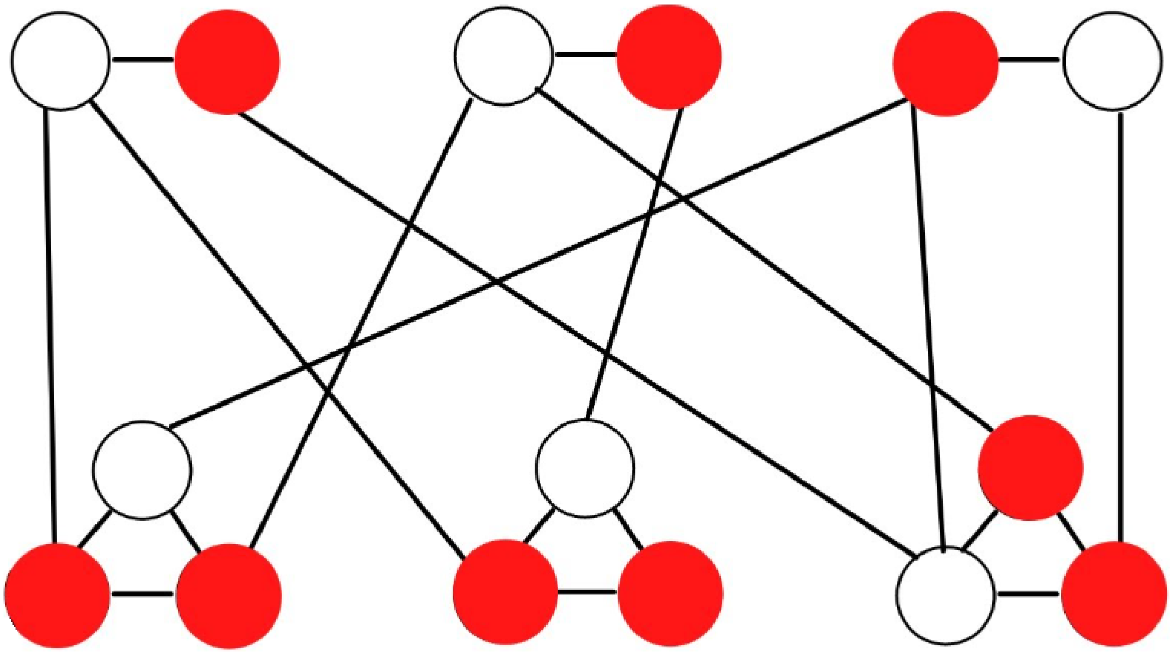
Vertex Cover.
Reducción desde 3SAT



Grupo 6

Aram Pérez Dios
Pablo Pérez González
Roberto Carrazana Pernía

Introducción

Partiendo del Teorema Cook que clasifica al SAT como problema NP-Completo y sabiendo que existe una reducción polinomial al 3SAT, demostraremos que existe a su vez una transformación del 3SAT al problema del Vertex Cover. Demostrando así que este último también se encuentra dentro de la clase de la NP-Completitud.

Problemas involucrados

3SAT

Dado un conjunto U = {u1, u2, ... , un} de variables y una colección C = {c1, c2, ... , cm} de cláusulas sobre U, de manera que cada cláusula está compuesta por tres variables $|c_i| = 3$, para $1 \leq i \leq m$.

¿Existe una asignación de valores para las variables de U que hagan verdadera la colección de cláusulas C?

Vertex Cover

La cobertura de vértices de un grafo G(V,E) es un subconjunto de vértices V' del grafo tales que todas las aristas E esten conectadas a alguno de ellos. La cobertura de vértices mínima es aquella que cumple la misma condición con el menor número de vértices.

Dado un grafo G = (V, E) no dirigido y un entero K.

¿Existe una cobertura de vértices de tamaño K o menos para el grafo G, es decir, un subconjunto V' de V con tamaño menor o igual que K tal que cada arista tiene al menos un extremo en V'?

Demostración

Sea una instancia de 3SAT donde U = {u1, u2, … , un} es el conjunto de variables y una colección C = {c1, c2, … , cm} el de cláusulas. El grafo consta de dos 'gadgets' o partes fundamentales:

1- (True Setting Components) Dos vértices por cada una de las variables, uno para la variable misma y otro para su versión negada, así como una arista que los conecte.

$V_i = \{u_1, \overline{u_1}\}$

$E_i = \{\{u_1, \overline{u_1}\}\}$

2- (Satisfaction Testing Component) Tres vértices conectados a modo de triángulo para cada una de las cláusulas, a cada uno de estos se le denominará 'gadget'.

$V'_j = \{a_1[j], a_2[j], a_3[j]\}$

$E'_j = \{\{a_1[j], a_2[j]\}, \{a_1[j], a_3[j]\}, \{a_2[j], a_3[j]\}\}$

3- Por último, sean las tres variables de cada cláusula cj, denotados como x_j, y_j y z_j, se crean aristas que las conecten con los vértices correspondientes en V.

$E''_j = \{\{a_1[j], x_j\}, \{a_1[j], y_j\}, \{a_2[j], z_j\}\}$

Complejidad de la transformación

Podemos ver fácilmente cómo realizar la transformación es posible en tiempo polinomial ya que ninguna de las construcciones descritas lleva un tiempo superior a O(n^a).

Satisfactibilidad

Otro aspecto a tener en cuenta es la correlación con el problema original. Cuando C sea satisfacible, podremos construir un grafo G = (V, E) y un entero positivo K ≤ |V| tal que G posee un recubrimiento de vértices de tamaño K o menos. En cualquier otro caso, el número de vértices del subconjunto superará a nuestra K y sabremos que el problema original no es satisfactible.

Esta K se obtendrá de la fórmula K = n + 2m donde n es el número de variables de nuestro problema (n = |U|) y m el número de cláusulas
(m = |C|). Dicha fórmula se obtiene de que:

- Al incluir sólo uno de los vértices de las primeras estructuras, es decir, las conformadas por una variable y su negado nos aseguramos de cubrir la arista correspondiente a estos.

- Es necesario cubrir todas las aristas de los 'gadgets' y por tanto será obligatorio que en V' estén incluidos al menos dos vértices de cada V'_j . Estas son las estructuras triangulares que conforman las clausuras.

Esto quiere decir que como máximo para formar un cubrimiento vamos a necesitar un vértice por cada par de literal y negado y otros dos vértices por cada cláusula.

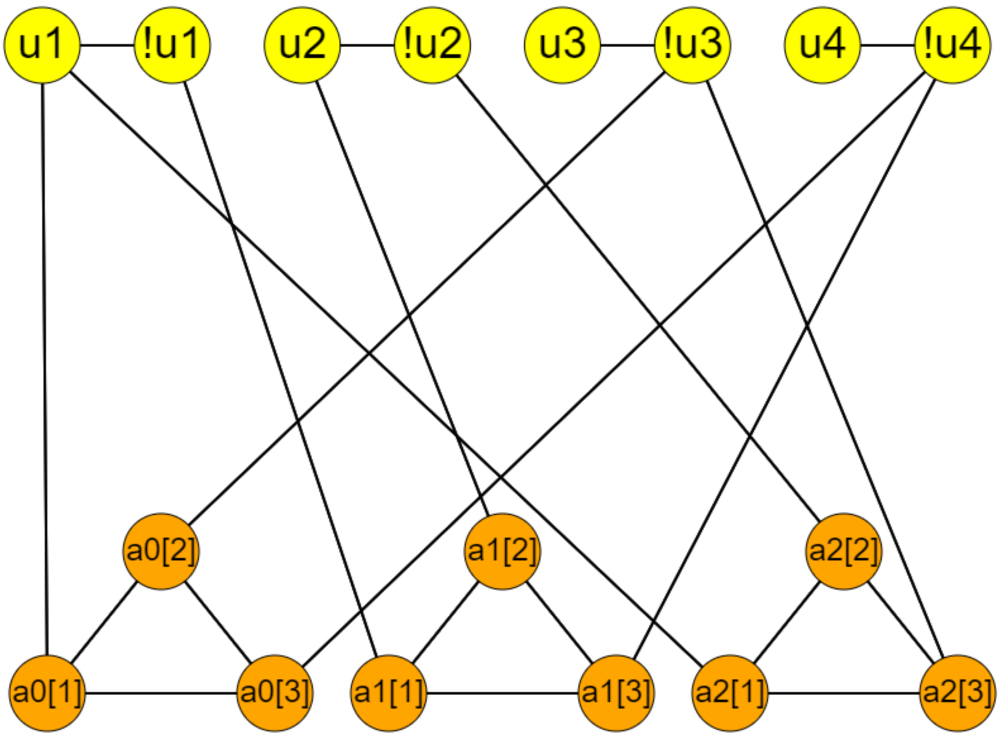
Además si nos fijamos en la elección resultante del Vertex Cover podremos obtener los valores de las variables del problema original. Esto es debido a que una de las aristas de las Satisfactory Testing Components está cubierta por uno de los vértices de las True Setting Components que lo conectan. Lo que nos dará el valor de la variable en la cláusula correspondiente.

Ejemplo

Sea una instancia de 3SAT donde U = $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es el conjunto de variables y una colección C = $\{(u_1 \vee \overline{u_3} \vee \overline{u_4})\ (\overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_4})\ (u_1 \vee \overline{u_2} \vee \overline{u_3})\}$ el de cláusulas.

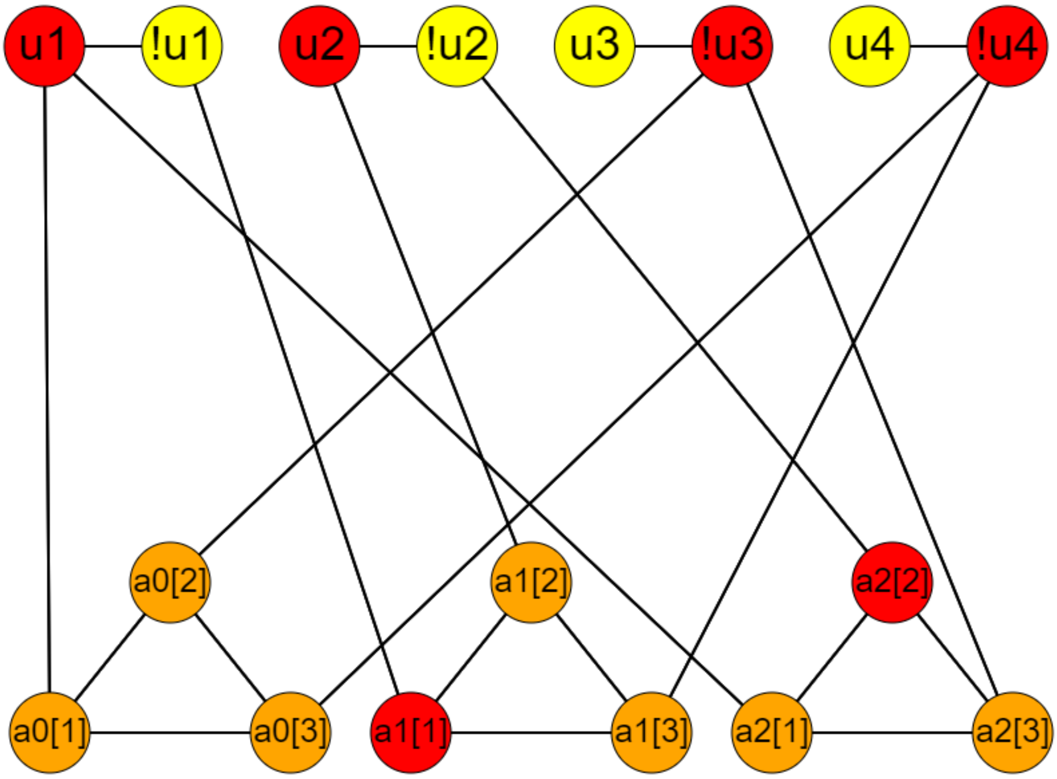
Los valores para las variables:

u_1 = verdadero, u_2 = verdadero, u_3 = falso y u_4 = falso.



Se marcan los vértices de la configuración inicial y aquellos que no conectan directamente con estos.

$\{(u_1 \vee \overline{u_3} \vee \overline{u_4})\ (\overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_4})\ (u_1 \vee \overline{u_2} \vee \overline{u_3})\}$ K = 10



Una solución posible sería:

V' = {u_1, u_2, $\overline{u_3}$, $\overline{u_4}$, $a_0[1]$, $a_0[3]$, $a_1[1]$, $a_1[3]$, $a_2[2]$, $a_2[3]$ }, en la que K = 10.