

Método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales elípticas(Parte I)

Nancy Hitschfeld, María Cecilia Rivara

Contenido

- Ecuaciones en derivadas parciales
- Ecuaciones en derivadas parciales elípticas
- Ecuación de Laplace
- Aproximación de operadores diferenciales
- Fórmula de diferencias centradas para f' u f''
- Construcción de sistema de ecuaciones
 - Laplace con condiciones de Dirichlet
 - Laplace con condiciones de Neumann (mixtas)
- Resolución del sistema de ecuaciones

Ecuaciones en derivadas parciales

- Involucran una función desconocida u de dos o más variables independientes
- Válida sobre un dominio geométrico \Rightarrow discretización
- Condiciones de borde e iniciales
- ¿Dónde aparecen?
 - Mecánica de fluidos
 - Transmisión de calor
 - Cálculo de tensiones
 - Deformaciones de sólidos, etc.
- (Libro de apoyo: Sección 10.3, capítulo 10, Mathews-Fink)

Clasificación de EDPs clásicas

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

para $x_0 \leq x \leq x_f, y_0 \leq y \leq y_f$ y con las condiciones de borde para un dominio rectangular

$$\begin{aligned} u(x, y_0) &= b_{y_0}(x), & u(x, y_f) &= b_{y_f}(x) \\ u(x_0, y) &= b_{x_0}(y), & u(x_f, y) &= b_{x_f}(y) \end{aligned}$$

Estas EDPs pueden ser clasificadas en tres grupos:

EDP elíptica si: $B^2 - 4AC < 0$ (usada en problemas estacionarios de transmisión de calor, difusión de partículas o vibración de una membrana)

EDP parabólica si: $B^2 - 4AC = 0$ (resultan de analizar la evolución temporal de los problemas mencionados para ecuaciones elípticas, y otros)

EDP hiperbólica si: $B^2 - 4AC > 0$ (comunes en el análisis de transporte de masa en fluidos, fenómenos ondulatorios y otros procesos)

EDPs Elípticas

- Problemas de estado estacionario (no son función del tiempo)

- Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

- Ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{en } \Omega$$

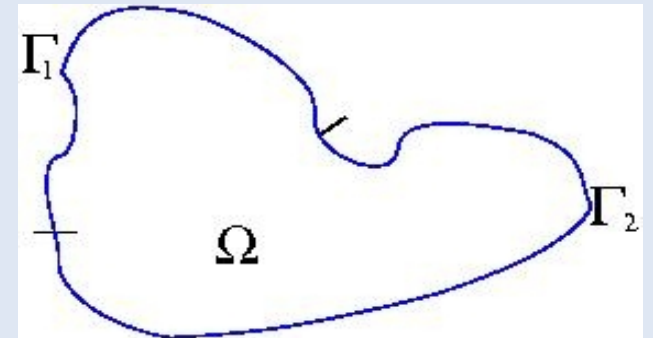
- Condiciones de borde

- Dirichlet

$$u = f_1 \quad \text{en } \Gamma_1$$

- Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_2 \quad \text{en } \Gamma_2$$



- Importante en muchos campos de la ciencia: por ejemplo, en electromagnetismo, astronomía y dinámica de fluidos para modelar el potencial eléctrico, gravitacional y de fluidos, respectivamente.

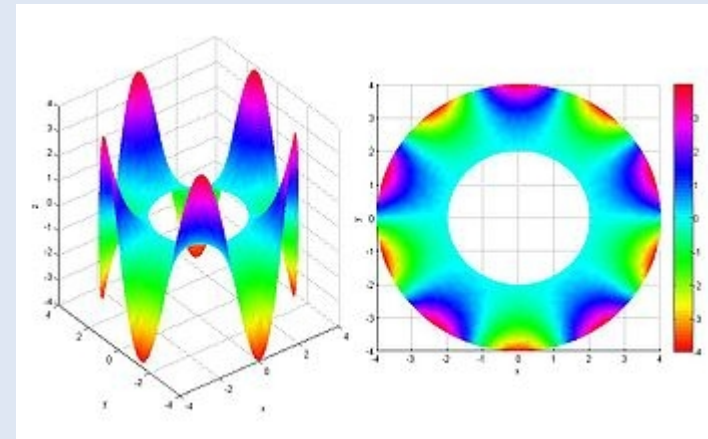
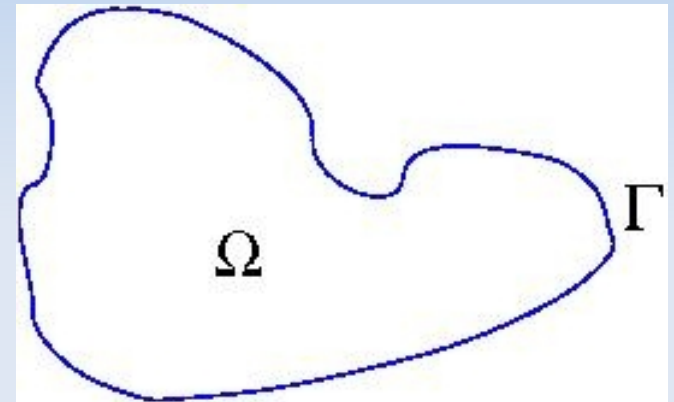
Ejemplo: Ecuación de Laplace

- Si tenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ con $u = f_1$ en Γ

- ¿Qué deseamos encontrar?
- ¿Cómo resolverla? numéricamente
- ¿Qué conceptos debemos utilizar?

Ejemplo: Ecuación de Laplace sobre una corona ($r=2$ y $R=4$) con condiciones de contorno de Dirichlet: $u(r=2)=0$ y $u(r=4)=4\sin(5\theta)$

(Imagen desde: http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace's_equation)



Ejemplo: Ecuación de Laplace

Ejemplo 1.1. Ecuación de Laplace — Distribución de la temperatura en un estado estacionario.

Considerando la ecuación de Laplace:

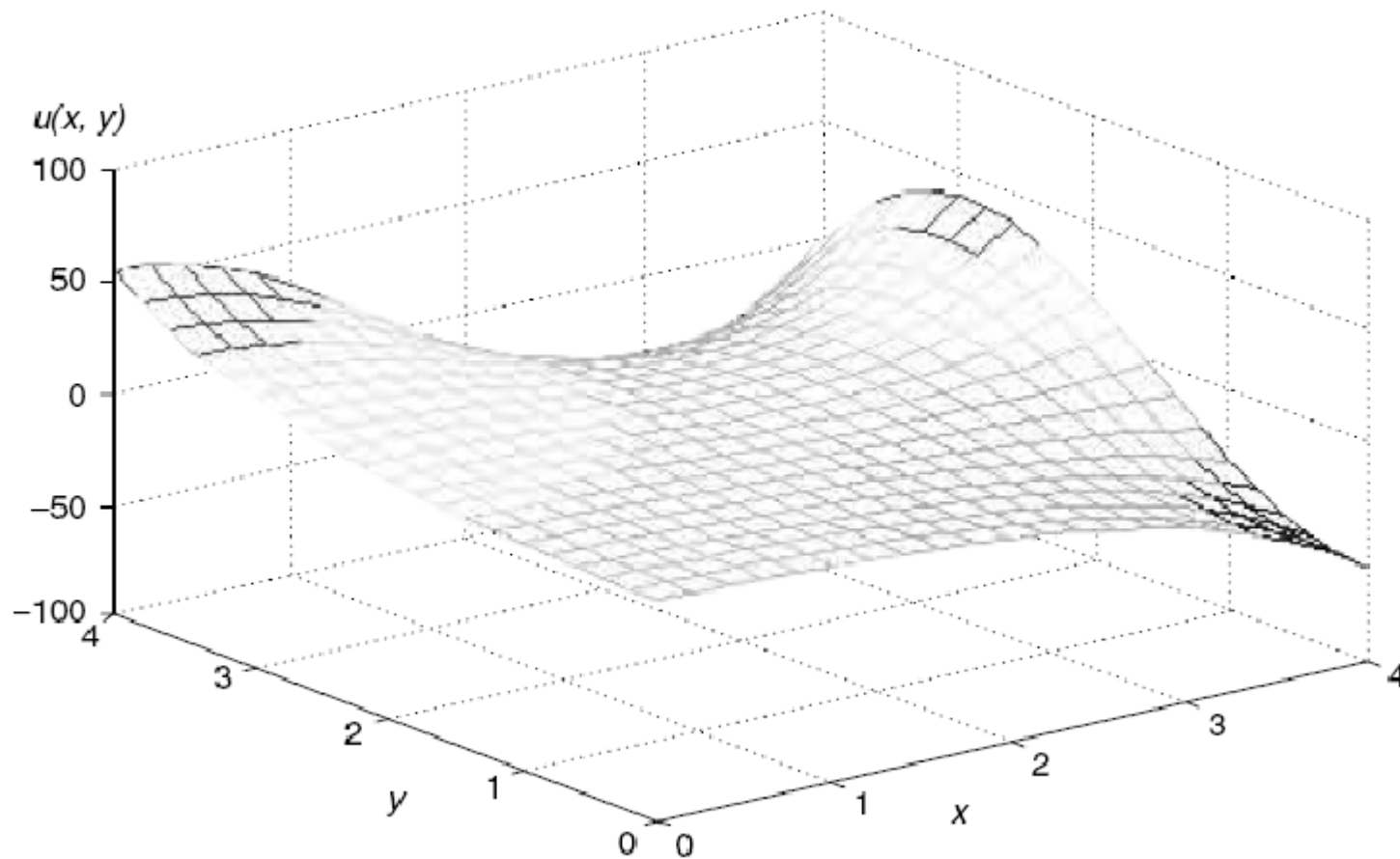
$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$$

con las condiciones de frontera

$$u(0, y) = e^y - \cos y, \quad u(4, y) = e^y \cos 4 - e^4 \cos y$$

$$u(x, 0) = \cos x - e^x, \quad u(x, 4) = e^4 \cos x - e^x \cos 4$$

Solución aproximada

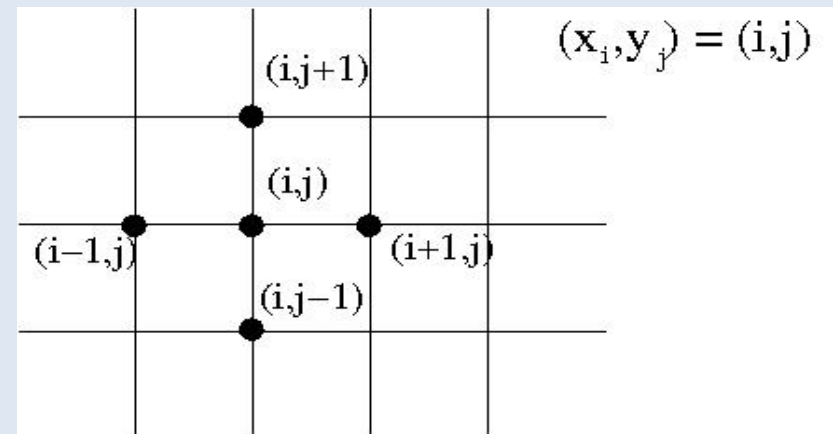


La distribución de la temperatura sobre la placa

¿Cómo la resolvemos? Usaremos diferencias finitas

- Técnica numérica
 - Discretizar el dominio
 - Aproximar los operadores diferenciales por operadores de diferencias

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}$$



- Laplaciano:

$$\nabla^2 u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

¿Cómo se deduce?

- Usar aproximaciones de derivadas
 - Límite del cociente incremental:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

- Aproximación buena solo para h pequeños
- (Detalles en [sección 6.1, Mathews-Fink](#))

¿Cómo se deduce? (...)

- Fórmula de diferencias centradas:
- **Teorema** Fórmula centrada de orden $O(h^2)$. Supongamos que $f \in C^3[a, b]$ y que $x-h, x, x+h \in [a, b]$ entonces:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- Es más, existe un número $c = c(x) \in [a, b]$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + E_{trunc}(f, h)$$

- siendo $E_{trunc}(f, h) = \frac{-h^2 f^{(3)}(c)}{6} = O(h^2)$

¿Cómo se deduce? (...)

- Demostración:

- Usamos la fórmula de Taylor de orden 2 de f alrededor de x para $f(x-h)$ y $f(x+h)$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(c_1)h^3}{3!}$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} - \frac{f^{(3)}(c_2)h^3}{3!}$$

- Restamos y obtenemos

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{(f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2))h^3}{3!}$$

- Como $f^{(3)}(x)$ es continua, usamos el teorema del valor intermedio

$$\frac{f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2)}{2} = f^{(3)}(c)$$

¿Cómo se deduce? (...)

- Y ordenando términos obtenemos:

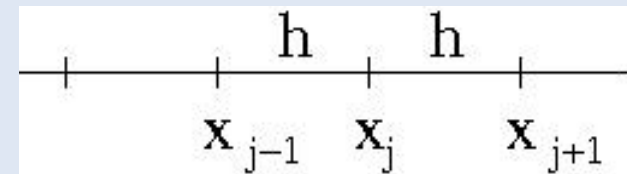
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{f^{(3)}(c)h^2}{3!}$$

- (Primer término es la fórmula centrada y el segundo el error de truncamiento)

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

- A continuación usaremos la siguiente notación:

$$f'(x_j) \approx \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h}$$



Fórmulas de derivación numérica

- ¿Cómo se generaliza para las derivadas de orden superior?
- Fórmulas de diferencias centradas $O(h^2)$

- $$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

- $$f^{(2)}(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$
 Se usa para discretizar el Laplaciano

- $$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

- $$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

Cómo se deduce f'' ?

A modo de ejemplo, vamos a deducir la fórmula de orden $O(h^2)$ para $f''(x)$ que se muestra en la Tabla 6.3. Escribimos los desarrollos en serie de Taylor:

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} + \dots$$

y

$$(2) \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} - \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} - \dots$$

Sumando los desarrollos (1) y (2) eliminamos los términos que contienen las derivadas impares $f'(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, \dots :

$$(3) \quad f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2h^2 f''(x)}{2} + \frac{2h^4 f^{(4)}(x)}{24} + \dots$$

(Sección 6.2- Libro de Mathews-Fink)

¿Cómo se deduce f''?

Ahora despejamos $f''(x)$ de la expresión (3) y obtenemos

$$(4) \quad f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{2h^2 f^{(4)}(x)}{4!} - \frac{2h^4 f^{(6)}(x)}{6!} - \dots - \frac{2h^{2k-2} f^{(2k)}(x)}{(2k)!} - \dots$$

Si truncamos el desarrollo en serie (4) en la cuarta derivada, entonces existe un valor c en $[x-h, x+h]$ tal que

$$(5) \quad f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2 f^{(4)}(c)}{12},$$

El primer término corresponde al valor de f'' buscado:

$$f^{(2)}(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

(Sección 6.2- Libro de Mathews-Fink)

Ecuación de diferencias para el Laplaciano

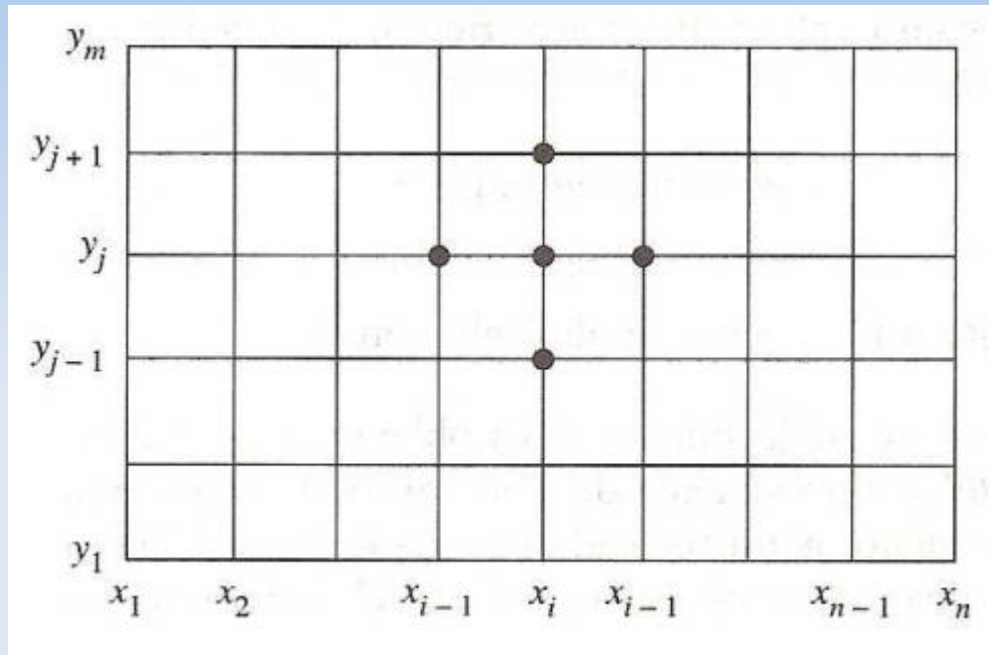
- Reemplazando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2} \quad y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{h^2}$$

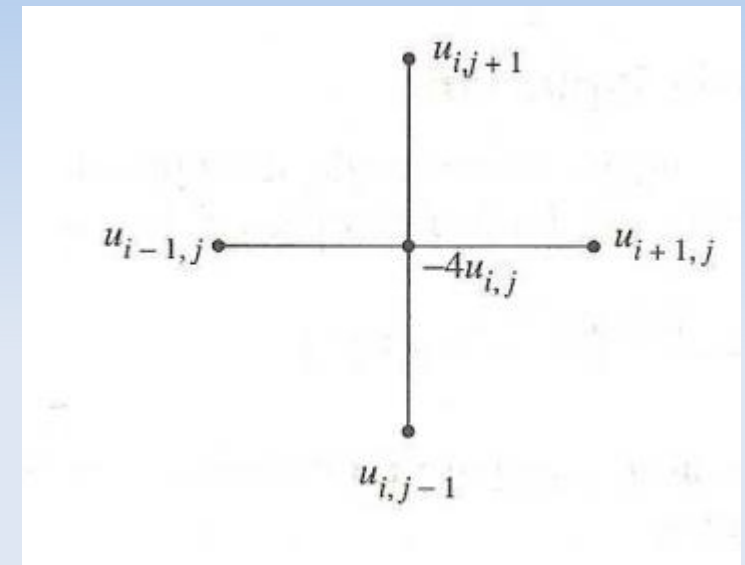
- Obtenemos la fórmula para la aproximación de la ec. de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} - 4u_{ij} + u_{ij-1} + u_{ij+1}}{h^2} = 0$$

Representación operador de diferencias



Discretización del rectángulo



Esquema de ecuación de diferencias para el Laplaciano

Método de diferencias finitas (2D): pasos a seguir

- Discretizar región con grilla regular de paso h en direcciones x e y
- Escribir ecuaciones de diferencias para cada punto de la grilla
 - Se obtiene un sistema lineal de ecuaciones $A\tilde{u}=b$
 - El sistema se resuelve numéricamente
 - Método directo, por ej: Gauss
 - Método iterativo

Ventajas/Limitaciones del método de diferencias finitas

- Se adapta bien a geometrías rectangulares o que son uniones de rectángulos
- Es intuitivo, fácil de explicar y entender
- No permite modelar bien geometrías complejas ni condiciones de borde sobre bordes curvos
 - Usar otros más generales pero a la vez más complejos
 - Ejemplo: métodos de elementos finitos o volúmenes finitos

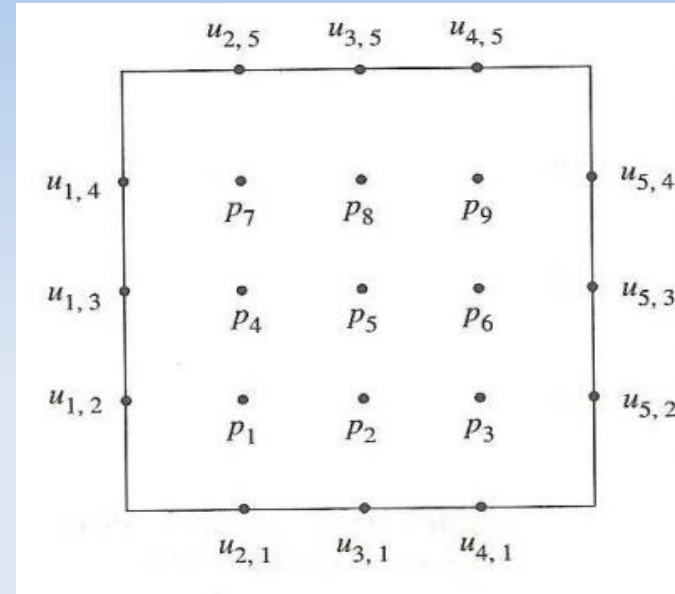
Construcción del sistema lineal

(Condiciones de borde Dirichlet)

- Supongamos que tenemos un problema de Dirichlet, es decir conocemos los valores en la frontera de $u(x,y)$ en la frontera de la región R
 - $u(x_1, y_j) = u_{1,j}$ para $2 \leq j \leq m-1$ (a la izquierda)
 - $u(x_i, y_1) = u_{i,1}$ para $2 \leq i \leq n-1$ (abajo)
 - $u(x_n, y_j) = u_{n,j}$ para $2 \leq j \leq m-1$ (a la derecha)
 - $u(x_i, y_m) = u_{i,m}$ para $2 \leq i \leq n-1$ (arriba)

Ejemplo con grilla 5x5

- Etiquetamos los puntos interiores como se muestra a continuación:

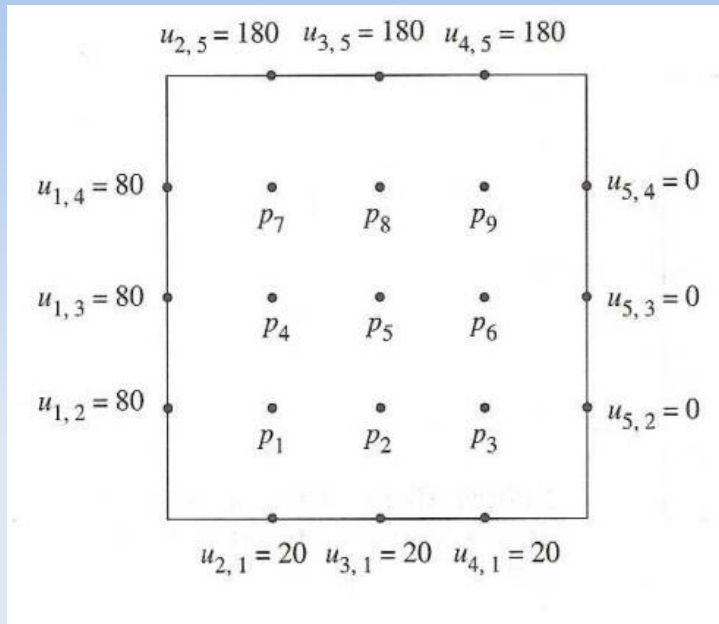


$$\begin{aligned}
 -4p_1 + p_2 + p_4 &= -u_{2,1} - u_{1,2} \\
 p_1 - 4p_2 + p_3 + p_5 &= -u_{3,1} \\
 p_2 - 4p_3 + p_6 &= -u_{4,1} - u_{5,2} \\
 p_1 - 4p_4 + p_5 + p_7 &= -u_{1,3} \\
 p_2 + p_4 - 4p_5 + p_6 + p_8 &= 0 \\
 p_3 + p_5 - 4p_6 + p_9 &= -u_{5,3} \\
 p_4 - 4p_7 + p_8 &= -u_{2,5} - u_{1,4} \\
 p_5 + p_7 - 4p_8 + p_9 &= -u_{3,5} \\
 p_6 + p_8 - 4p_9 &= -u_{4,5} - u_{5,4}
 \end{aligned}$$

Ejemplo grilla 5x5 (...)

- **Problema:** determinar la solución aproximada de la ecuación de Laplace en el rectángulo $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ donde $u(x, y)$ denota la temperatura en un punto (x, y) , los valores de frontera son:
 - $u(x, 0) = 20 \quad 0 < x < 4$
 - $u(x, 4) = 180 \quad 0 < x < 4$
 - $u(0, y) = 80 \quad 0 < y < 4$
 - $u(4, y) = 0 \quad 0 < y < 4$

Ejemplo con grilla 5x5 (...)



$$\begin{aligned}
 -4p_1 + p_2 + p_4 &= -100 \\
 p_1 - 4p_2 + p_3 + p_5 &= -20 \\
 p_2 - 4p_3 + p_6 &= -20 \\
 p_1 - 4p_4 + p_5 + p_7 &= -80 \\
 p_2 + p_4 - 4p_5 + p_6 + p_8 &= 0 \\
 p_3 + p_5 - 4p_6 + p_9 &= 0 \\
 p_4 - 4p_7 + p_8 &= -260 \\
 p_5 + p_7 - 4p_8 + p_9 &= -180 \\
 p_6 + p_8 - 4p_9 &= -180.
 \end{aligned}$$

Por ejemplo, con Método de Gauss ...

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7 \ p_8 \ p_9]' \\
 &= [55.7143 \ 43.2143 \ 27.1429 \ 79.6429 \ 70.0000 \\
 &\quad 45.3571 \ 112.857 \ 111.786 \ 84.2857]'.
 \end{aligned}$$

Construcción de sistema lineal

(Condiciones de borde de Neumann)

- Corresponde a cuando se especifican valores de la derivada direccional de $u(x,y)$ en la dirección perpendicular al contorno R

- Ejemplo: resolver con
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = 0$$

- En el contexto de los problemas de temperatura, significa contorno aislado, no hay flujo de calor a través de él
- Supongamos que fijamos $x = x_n$, de manera de considerar $x=a$ en $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. La condición de contorno de la derivada para $x = a$ es:

$$\frac{\partial u(x_n, y_j)}{\partial x} = u_x(x_n, y_j) = 0$$

Construcción de sistema lineal (Condiciones de borde de Neumann) ...

- La ecuación de diferencias de Laplace para (x_n, y_j)

$$u_{n+1j} + u_{n-1j} - 4u_{nj} + u_{nj+1} + u_{nj-1} = 0$$

- Donde el valor u_{n+1j} es desconocido pues está fuera del dominio R. Sin embargo, podemos usar la fórmula de la derivación numérica:

$$\frac{u_{n+1j} - u_{n-1j}}{2h} \approx u_x(x_n, y_j) = 0 \quad u_{n+1j} \approx u_{n-1j}$$

- Y obtenemos la fórmula que relaciona u_{nj} con sus valores adyacentes

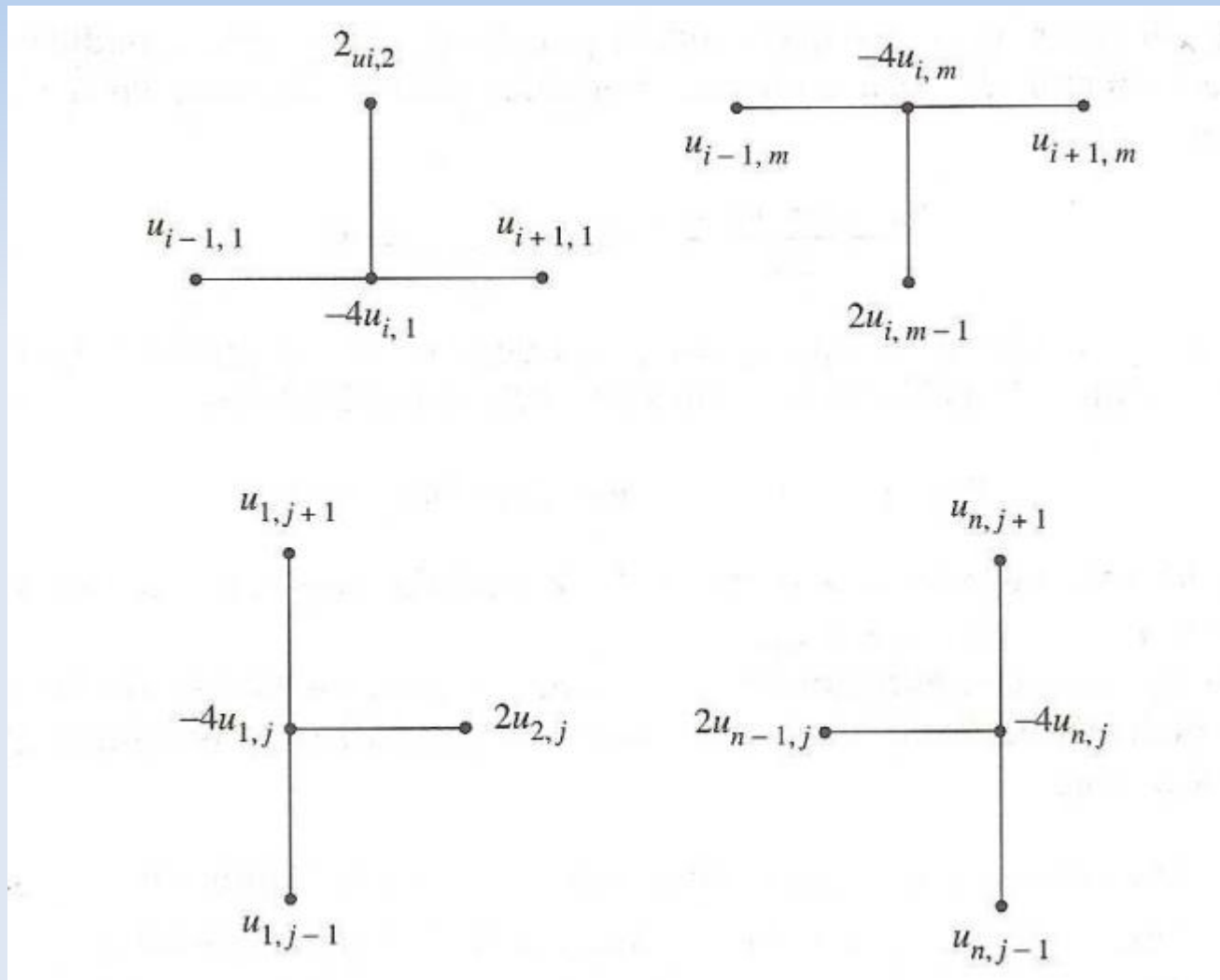
$$2u_{n-1j} - 4u_{nj} + u_{nj+1} + u_{nj-1} = 0$$

Construcción de sistema lineal (Condiciones de borde de Neumann) ...

- Las condiciones de Neumann para los puntos de los demás lados se obtiene de manera similar. Los cuatro casos son:

$$\begin{array}{ll} (14) & 2u_{i,2} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1} - 4u_{i,1} = 0 \quad (\text{lado inferior}), \\ (15) & 2u_{i,m-1} + u_{i-1,m} + u_{i+1,m} - 4u_{i,m} = 0 \quad (\text{lado superior}), \\ (16) & 2u_{2,j} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1} - 4u_{1,j} = 0 \quad (\text{lado izquierdo}), \\ (17) & 2u_{n-1,j} + u_{n,j-1} + u_{n,j+1} - 4u_{n,j} = 0 \quad (\text{lado derecho}). \end{array}$$

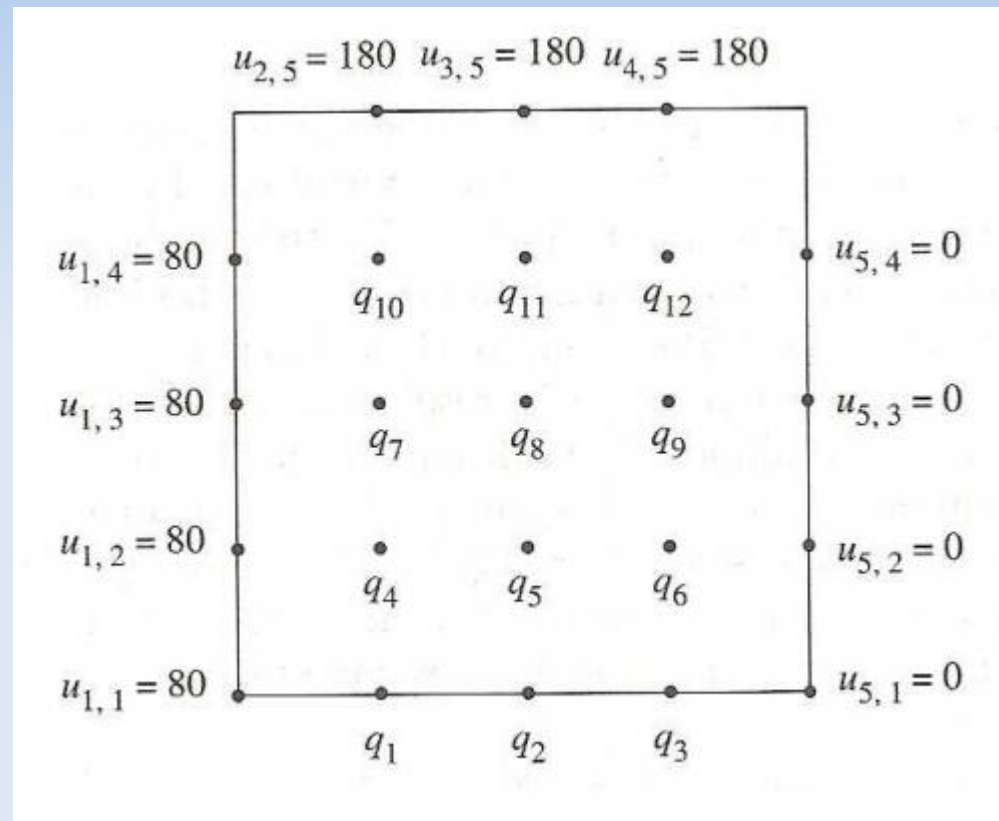
Construcción de sistema lineal (Condiciones de borde de Neumann) ...



Ejemplo con condiciones de borde mixtas

- Problema: determinar la solución aproximada de la ecuación de Laplace en el rectángulo $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ donde $u(x, y)$ denota la temperatura en un punto (x, y) , los valores de frontera son:
 - $u(x, 4) = 180$ $0 < x < 4$ (Dirichlet)
 - $u_y(x, 0) = 0$ $0 < x < 4$ (Neumann)
 - $u(0, y) = 80$ $0 < y < 4$ (Dirichlet)
 - $u(4, y) = 0$ $0 < y < 4$ (Dirichlet)

Grilla de 5x5 (12 incógnitas)



Grilla de 5x5 (12 incógnitas)

$$\begin{array}{rcl}
 -4q_1 + q_2 + 2q_4 & & = -80 \\
 q_1 - 4q_2 + q_3 + 2q_5 & & = 0 \\
 & q_2 - 4q_3 + 2q_6 & = 0 \\
 q_1 & -4q_4 + q_5 + q_7 & = -80 \\
 & q_2 + q_4 - 4q_5 + q_6 + q_8 & = 0 \\
 & q_3 + q_5 - 4q_6 + q_9 & = 0 \\
 & q_4 & -4q_7 + q_8 + q_{10} = -80 \\
 & q_5 & + q_7 - 4q_8 + q_9 + q_{11} = 0 \\
 & q_6 & + q_8 - 4q_9 + q_{12} = 0 \\
 & q_7 & -4q_{10} + q_{11} = -260 \\
 & q_8 & + q_{10} - 4q_{11} + q_{12} = -180 \\
 & q_9 & + q_{11} - 4q_{12} = -180.
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]' \\
 &= [71.8218 \ 56.8543 \ 32.2342 \ 75.2165 \ 61.6806 \ 36.0412 \\
 &\quad 87.3636 \ 78.6103 \ 50.2502 \ 115.628 \ 115.147 \ 86.3492]'.
 \end{aligned}$$

Resumen

- Método de diferencias finitas
- Problemas que se modelan usando la ecuación de Laplace
 - Condiciones de borde Dirichlet, Neumann y mixtas
- Construcción del sistema de ecuaciones
 - Cuidado con la numeración de los puntos para lograr un sistema pentadiagonal (solución más eficiente)