Auxiliar 2

Métodos Numéricos

1

Repaso

¿Métodos qué?

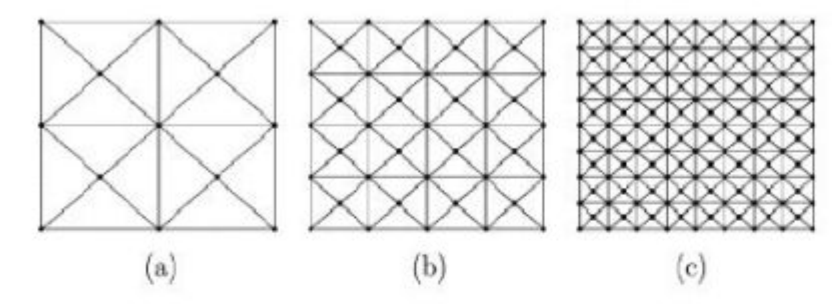
Discretización

- Representar objetos mediante modelo matemático
- Pueden ser puntos, polígonos o volúmenes
- Para métodos numéricos se usan grillas de puntos

Discretización grilla de puntos

- Se utiliza una matriz

- Las dimensiones de la matriz representan los puntos de la grilla



EDPs

- Una ecuación diferencial en donde aparecen dos o más variables independientes

- Sirven para modelar problemas en física e ingeniería

Ejemplo: Ecuación de Laplace

Modelar fenómenos estacionarios

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Condiciones de borde

Dirichlet $u = f_1(x, y)$

Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2(x, y)$

Diferencias finitas para ecuación de LaPlace

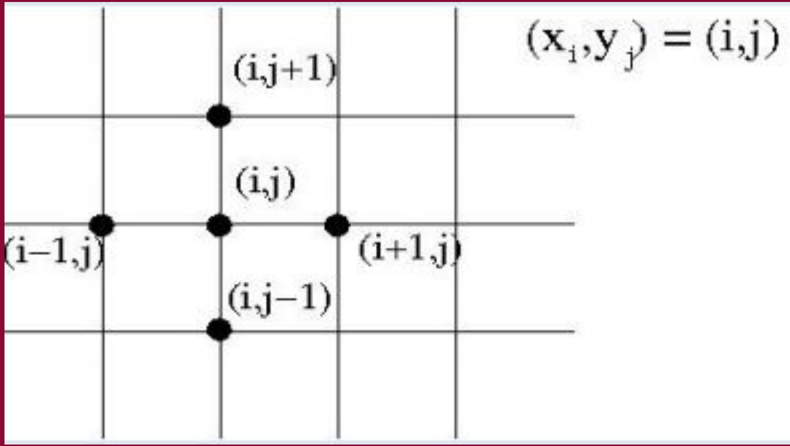
- Dominio modelado por una grilla

- Aproximar operadores diferenciales mediante operadores de diferencias

$$\nabla^2 u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

Diferencias finitas para ecuación de LaPlace

- Esquema de resolución



Método General

- Discretizar región con grilla regular de paso h
- Escribir ecuaciones de diferencias para cada punto de la grilla

  (OJO LA ECUACIÓN DEBE CORRESPONDER A LA EDP)
- Se obtiene un sistema lineal de ecuaciones $A\tilde{u}=b$
- El sistema se resuelve numéricamente
  - Método directo
  - Método iterativo

Condiciones de borde

- Dirichlet: Se reemplaza directo en la matriz

$$u = f_1(x, y)$$

- Neumann: Tiene su propia ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_2(x, y)$$

Condiciones de borde tipo Neumann

$$2u_{i,2} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1} - 4u_{i,1} = 0 \qquad \text{(lado inferior)},$$

$$2u_{i,m-1} + u_{i-1,m} + u_{i+1,m} - 4u_{i,m} = 0 \qquad \text{(lado superior)},$$

$$2u_{2,j} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1} - 4u_{1,j} = 0 \qquad \text{(lado izquierdo)},$$

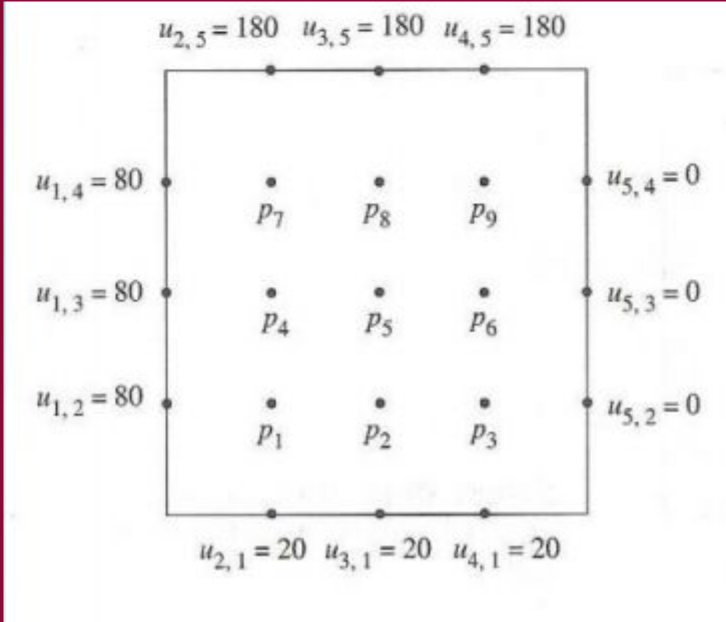
$$2u_{n-1,j} + u_{n,j-1} + u_{n,j+1} - 4u_{n,j} = 0 \qquad \text{(lado derecho)}.$$

Solución de la ecuación

- Tenemos la aproximación, ahora debemos resolverla

- La grilla nos dará un sistema de ecuaciones y existen varias formas de resolverlo.

Solución de la ecuación



$$
\begin{aligned}
-4p_1 + p_2 + p_4 &= -100 \\
p_1 - 4p_2 + p_3 + p_5 &= -20 \\
p_2 - 4p_3 + p_6 &= -20 \\
p_1 - 4p_4 + p_5 + p_7 &= -80 \\
p_2 + p_4 - 4p_5 + p_6 + p_8 &= 0 \\
p_3 + p_5 - 4p_6 + p_9 &= 0 \\
p_4 - 4p_7 + p_8 &= -260 \\
p_5 + p_7 - 4p_8 + p_9 &= -180 \\
p_6 + p_8 - 4p_9 &= -180.
\end{aligned}
$$

2

Problema

Ecuación de LaPlace

2

Spoilers

Método iterativo de sobrerelajación sucesiva

Qué teníamos

- Aproximación de diferencias finitas para ecuación de LaPlace

$$\nabla^2 u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

Diferencias finitas para ecuación de LaPlace

- La ecuación para iterar es

$$u_{i,j} + \omega r_{i,j},$$

- Con r para la ecuación de Laplace

$$r_{ij} = \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij}}{4}$$

Diferencias finitas para ecuación de LaPlace

- Y w el factor de ajuste

$$\omega = \frac{4}{2+\sqrt{4-\left(\cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\right)^{2}}}.$$

Diferencias finitas para ecuación de LaPlace

- Además, permite tratar las condiciones de neumann

(24)
$$u_{i,1} = u_{i,1} + \omega\left(\frac{2u_{i,2} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1} - 4u_{i,1}}{4}\right) \quad \text{(lado inferior)},$$

(25)
$$u_{i,m} = u_{i,m} + \omega\left(\frac{2u_{i,m-1} + u_{i-1,m} + u_{i+1,m} - 4u_{i,m}}{4}\right) \quad \text{(lado superior)},$$

(26)
$$u_{i,j} = u_{i,j} + \omega\left(\frac{2u_{2,j} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1} - 4u_{1,j}}{4}\right) \quad \text{(lado izquierdo)},$$

(27)
$$u_{n,j} = u_{n,j} + \omega\left(\frac{2u_{n-1,j} + u_{n,j-1} + u_{n,j+1} - 4u_{n,j}}{4}\right) \quad \text{(lado derecho)}.$$