北京林业大学《线性代数》
2022-2023学年第一学期考试试卷

一、 填空题（共 24 分，每小题 3 分）

1. 已知 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=3$，则 $|2A^*-5A^{-1}|$ =______________ .

2. 已知 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=-2$，则 $\left|(\mathrm{A}^*)^*\right|$ =______________ .

3. 已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2-A-2E=\mathbf{O}$，其中 E 为 n 阶单位阵，则 $(A+3E)^{-1}$ = ____________ .

4. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=(6,3,1)^T$ 用 $\xi_1=(1,0,0)^T,\xi_2=(1,1,0)^T,\xi_3=(1,1,1)^T$ 来线性表示的表示式为 ______________ .

5. 设 A 为 4 阶方阵，齐次线性方程组 Ax=0 只有零解，则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为______________.

6. 三阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的三个特征值为 $-1,1,-2$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，则 $\mathbf{B}$ 的所有特征值为 ____________ .

7. 已知 $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&3\\5&a&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则 a=________ .

8. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围为 ________________ .

二、选择题（共 12 分，每小题 3 分）

1. 设 $\mathbf{A}$ 是方阵，如有矩阵关系式 $\mathbf{AB=AC}$，则必有（　　　　）.

（A） $\mathbf{A}=\mathbf{0}$　　　（B） $\mathbf{B}\neq\mathbf{C}$ 时 $\mathbf{A}=\mathbf{0}$

（C） $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$ 时 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　　（D） $|\mathbf{A}|\neq\mathbf{0}$ 时 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$

2. 已知 3×4 型矩阵 **A** 的行向量组线性无关，则 R（$\mathbf{A}^T$）等于（　　　）.

（A） 1　　　　（B）2

（C） 3　　　　（D）4

3. 设 A 是 n 阶方阵，$R(A) = n-1$，α_1, α_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解，则下列说法正确的是（　　　）.

（A） α_1, α_2 线性相关　　　　(B) α_1, α_2 线性无关

（C） α_1, α_2 是一个基础解系　　　　（D） α_1, α_2 有一个为零向量

4. 若矩阵 $\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ 与对角阵 $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ 相似，则有（　　　）.

（A） $b = 24$　　（B） $b = -7$　　（C） $b = -8$　　（D） $b = 0$

三、（8 分）计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$。

四、（8 分）设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$，$AX = 2X + A$，求 X

五、（8 分）求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$，

$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$，$\alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ 的秩及其一个最大无关组, 并将其余向量用该最大无关组线性表示.

六、（10 分）设三元二次型 $f = x^T Ax$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$. 用配方法将该二次型化为标准二次型，并写出所作的可逆线性变换.

七、（12 分）求 a, b 为何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = b \end{cases},$$

（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷多组解，并写出的通解.

八、（12 分）求正交变换 $x = Py$，将下列二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

化为标准型，并判断该二次型是否是正定二次型.

九、（6分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $n(n>3)$ 维列向量，已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4(\neq 0)$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。