专题一　行列式

参考答案

一、行列式及其性质：

1、利用对角线法则计算行列式．

(1) $\begin{vmatrix} ma & -b \\ nb & a \end{vmatrix} = ma^2 + nb^2$.

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -4$.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix} = 2a^3 - 6a^2 + 6$.

(5) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$$= 3xy(x+y) - (x+y)^3 - x^3 - y^3 = -2(x^3 + y^3).$$

2、利用行列式的性质计算行列式．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 24$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 201 \\ -1 & 3 & 3 & 299 \\ -2 & 2 & 1 & 98 \\ 3 & 5 & 1 & 103 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 100+1 \\ -1 & 3 & 3 & 300-1 \\ -2 & 2 & 1 & 100-2 \\ 3 & 5 & 1 & 100+3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 100 \\ -1 & 3 & 3 & 300 \\ -2 & 2 & 1 & 100 \\ 3 & 5 & 1 & 100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & +3 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 51 \end{vmatrix} = -153.$$

(4) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}$

$=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_2-r_1,r_3-r_1,r_4-r_1} 10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}$

$\cdot\xlongequal{r_3-2r_2,r_4+r_2}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&0&-4&4\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=160$.

(5) **行列式**

$D=\begin{vmatrix}2&3&0&0&0\\1&2&3&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0\\1&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-4$.

(6) $\begin{vmatrix}a&0&b&0\\0&x&0&y\\c&0&d&0\\0&u&0&v\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}x&0&y\\0&d&0\\u&0&v\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}0&b&0\\x&0&y\\u&0&v\end{vmatrix}$

$=ad\begin{vmatrix}x&y\\u&v\end{vmatrix}-cb\begin{vmatrix}x&y\\u&v\end{vmatrix}=(ad-cb)(xu-yv)$.

(7) $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_1-r_2,r_3-r_4}\begin{vmatrix}x&x&0&0\\1&1-x&1&1\\0&0&y&y\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$

$$=xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1-x&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1,r_4-r_1}xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&-x&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1-y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&-x&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}=x^2y^2.$$

(8)

$$\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

3、**解方程** $\begin{vmatrix}1&2&1&1\\1&x&2&3\\0&0&x&2\\0&0&2&x\end{vmatrix}=0.$

解: $\begin{vmatrix}1&2&1&1\\1&x&2&3\\0&0&x&2\\0&0&2&x\end{vmatrix}=(x-2)^2(x+2)=0,$

解之得 $x_1=x_2=2,\ x_3=-2.$

4、**证明**：(1) **设**a,b,c **为互异实数，证明行列式**:

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}$$ **为零的充要条件是** $a+b+c=0.$

证明: $D=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a+b+c)(c-a)(c-b)(b-a).$$

所以，行列式为零的充要条件是$a+b+c=0$.

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+y^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

证明:：将左式按第一列拆开得

左式$=\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az \\ ay+bz & az+bx & ax \\ az+bx & ax+by & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & bx \\ ay+bz & az+bx & by \\ az+bx & ax+by & bz \end{vmatrix}$

（按第二列拆开，因有两列成比例得一项为零）

$$=\begin{vmatrix} ax+by & ay & az \\ ay+bz & az & ax \\ az+bx & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay+bz & bx \\ bz & az+bx & by \\ bx & ax+by & bz \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$.

证明：左式$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

5、**设** $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$**，求** $A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}$**，**

其中 A_{ij} **为行列式中元素** a_{ij} **的代数余子式**.

解: $A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}=-24$.

6、**求行列式** $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$**的第四行各元素余子式之和**.

解: $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$

$$=7\begin{vmatrix}3&4&0\\4&4&2\\0&0&1\end{vmatrix}=-28$$

二、n 阶行列式

7、**计算** n **阶行列式**

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n\\1&2&0&\dots&0\\1&0&3&\dots&0\\\dots\\1&0&0&\dots&n\end{vmatrix}\overset{r_1-r_2,r_1-r_3,\dots,r_1-r_n}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$

$$=\begin{vmatrix}-(n-1)&0&0&\dots&0\\1&2&0&\dots&0\\1&0&3&\dots&0\\\dots\\1&0&0&\dots&n\end{vmatrix}=(1-n)n!.$$

(2) $\begin{vmatrix}x&a&a&\dots&a\\a&x&a&\dots&a\\a&a&x&\dots&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a&a&a&\dots&x\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+r_3.+\dots+r_n}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\a&x&a&\dots&a\\a&a&x&\dots&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a&a&a&\dots&x\end{vmatrix}\underset{c_2-ac_1,c_3-ac_1,\dots,c_n-ac_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$$

*(3)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解:将行列式按第 n 行展开，有

$$D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot a_n\cdot(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n$$

递推得

$$D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1},\quad D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1},\ \dots,D_2=a_1x+a_2,$$

所以 $D_n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n$.

*8、**设行列式** $D=\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$

证明 $D_n=(n+1)a^n$.

证　用归纳法. 当 $n=1$ **时,** $D_1=2a$, **命题正确;**

当 $n=2$ **时,** $D_2=3a^2$, **命题正确.**

设 $n<k$ **时,** $D_n=(n+1)a^n$, **命题正确.**

当 $n=k$ **时, 按第一列展开, 则有**

$$D_n=2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}=2a(ka^{k-1})-a^2((k-1)a^{k-2})=(k+1)a^k.$$

所以 $D_n=(n+1)a^n$.

*9、**已知** m **阶行列式** $|A|=a$, n **阶行列式** $|B|=b$,

求 $D=\begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix}$ **的值**.

解: **将** $|A|$ **所在的列一次与其前面的** n **逐列交换，共交换** $m\times n$ **次，得** $\begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix}=(-1)^{mn}ab$.

10、**利用范德蒙行列式计算行列式**

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 8 & 1 & 27 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ (-1)^2 & 2^2 & 1^2 & 3^2 \\ (-1)^3 & 2^3 & 1^3 & 3^3 \end{vmatrix}$$

$$=[2-(-1)][1-(-1)][3-(-1)](1-2)(3-2)(3-1)=-48.$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n^2 & \dots & n^2 \end{vmatrix}.$$

解: **从各行中提出公因子**,

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}\cdot n!=n!\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

$$=n!(2-1)(3-1)\dots(n-1)(3-2)(4-2)\dots(n-2)\dots(n-(n-1))$$
$$=n![1\cdot 2\cdots(n-1)]\cdot[1\cdot 2\cdots(n-2)]\cdots 2!\cdot 1!$$
$$=1!2!3!\cdots(n-2)!(n-1)!n!.$$

三、克莱默法则

11、**若齐次方程组** $\begin{cases} 3x_1+x_2+kx_3=0 \\ 4x_1+kx_2=0 \\ x_1+\quad+kx_3=0 \end{cases}$ **有非零解**, k **应取什么值**?

解: **方程的系数行列式**

$$D=\begin{vmatrix}3&1&k\\4&k&0\\1&0&k\end{vmatrix}=2k(k-2),$$

当$k=0$或$k=2$时，齐次线性方程组有非零解.

12、l **为何值时，齐次线性方程组**$\begin{cases}lx_1+\ \ x_2-x_3=0\\ x_1+\ lx_2-x_3=0\\2x_1\ \ -x_2+x_3=0\end{cases}$**只有零解.**

解：方程的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}l&1&-1\\1&l&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=(l-1)(l+2),$$

当$l\neq1$且$l\neq-2$时，齐次线性方程组只有零解.

13、**问l,m取何值时，齐次线性方程组**$\begin{cases}lx_1+\ \ \ x_2+x_3=0\\ x_1+\ mx_2+x_3=0\\ x_1+2mx_2+x_3=0\end{cases}$**有非零解.**

解：方程的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}l&1&1\\1&m&1\\1&2m&1\end{vmatrix}=-m(l-1),$$

当$m=0$或$l=1$时，齐次线性方程组有非零解.

14、**用克莱姆法则解下列线性方程组：**

(1) $\begin{cases}2x+5y=1\\3x+7y=2\end{cases}.$

解： $D=\begin{vmatrix}2&5\\3&7\end{vmatrix}=-1$，$D_1=\begin{vmatrix}1&5\\2&7\end{vmatrix}=-3$，$D_3=\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=1$，

$$x=\frac{D_1}{D}=3,\quad y=\frac{D_2}{D}=-1.$$

(2) $\begin{cases}x+y-2z=-3\\5x-2y+7z=22\\2x-5y+4z=4\end{cases}.$

解： $D=\begin{vmatrix}1&1&-2\\5&-2&7\\2&-5&4\end{vmatrix}=63,\quad D_1=\begin{vmatrix}-3&1&-2\\22&-2&7\\4&-5&4\end{vmatrix}=63,$

$$D=\begin{vmatrix}1&-3&-2\\5&22&7\\2&4&4\end{vmatrix}=126,\quad D=\begin{vmatrix}1&1&-3\\5&-2&22\\2&-5&4\end{vmatrix}=189,$$

$$x=\frac{D_1}{D}=1,\quad y=\frac{D_2}{D}=2,\quad z=\frac{D_3}{D}=3.$$

15、**求三次多项式**$f(x)$，

使得 $f(-1)=0, f(10=4, f(2)=3, f(3)=16$.

解: 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

因为 $\begin{cases} f(-1)==a+b-c+d=0 \\ f(1)=a+b+c+d=4 \\ f(2)=8a+4b+2c+d=3 \\ f(3)=27a+9b+3c+d=16 \end{cases}$

解方程组得 $a=2, b=-5, c=0, d=7$,

所以 $f(x)=2x^3-5x^2+7$.

专题一　行列式

自测题　参考答案

一、选择题：

1、行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是（ C ）.

(A) $k \neq -1$　　(B) $k \neq 3$

(C) $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$　　(D) $k \neq -1$ 或 $k \neq 3$

2、行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的充要条件是（ D ）.

(A) $k=-2$　　(B) $k=3$

(C) $k=-2$ 且 $k=3$　　(D) $k=-21$ 或 $k=3$

3、设四阶行列式 $|A|=0$，则 A 中（C）.

(A) 必有一行元素全为零；

(B) 必有两行元素对应成比例；

(C) 必有一行元素可以表示为其余各行对应元素的线性关系.

(D) 对角线上元素全为零.

4、行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ 的值为（ A ）.

(A) -72;　(B) -24;　(C) -36;　(D) -12.

二、填空题

1、设行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$，$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix} =$ 3.

2、设三阶行列式 $|-2A|=2$，则 $|A| = -\frac{1}{4}$.

3、若三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 6$，

则行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{\quad 3 \quad}$.

4、**设** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -1$，**则** $a = \underline{-\frac{1}{2}}$.

5、**若行列式** $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，

则行列式 $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11} - 3a_{12} & a_{12} \\ 4a_{21} & 2a_{21} - 3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31} - 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\quad -12 \quad}$.

6、**设** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$，**则** $A_{21} + 2A_{22} + 3A_{23} + 4A_{24} = \underline{0\quad}$.

三、计算四阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = (ac - bd)^2$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_1+c_2+c_3+c_4]{} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2+c_1,\,c_3-c_1,\,c_4+c_1]{} x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -x\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^4.$$

四、计算 n **阶行列式** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & \dots & 2 \\ 1 & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

解： $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & \dots & 2 \\ 1 & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_1-r_2,r_2-r_3,r_3-r_4,\dots,r_{n-1}-r_n} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & \dots & 2 \\ 1 & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-r_2,r_2-r_3,\dots,r_n-r_{n-1}} \dots \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1-x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0\dots & 0\dots & \dots & 1-x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} x^{n-2}.$$

五、设 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，

求方程 $f(x)=0$ **根的个数？**

解：**求方程** $f(x)=0$ **有几个根，也就是问** $f(x)$ **是** x **几次多项式**.

将第 1 **列的**-1 **倍分别加至第** 2、3、4 **烈，得**

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{=====}{c_4+c_2}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ x-7 & -3 \end{vmatrix}=x(x+20).$$

所以，方程 $f(x)=0$ **有两个根** 0 **和** -20.

六、求方程 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix}=0$ **的根**.

解：$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 2^2 & (-2)^2 & x^2 \\ 1 & 2^3 & (-2)^3 & x^3 \end{vmatrix}$

$=(x-1)(x-2)(x+2)\cdot(-2-1)(-2-2)(2-1)$

$=(x-1)(x-2)(x+2)$.

方程 $f(x)=0$ **的根为** 1、2、-2.

七、如果齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2-x_3=0 \\ kx_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ **有非零解，** k **应取什么值**?

解：$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}=-(k+1)(k-4)$,

当 $k=-1$ **或** $k=4$ **时，齐次线性方程组有非零解**.

八、判定方程组 $\begin{cases} (a^2-2)x_1+x_2-2x_3=0; \\ -5x_1+(a^2+3)x_2-3x_3=0; \\ x_1+(a^2+2)x_3=0. \end{cases}$ **是否只有零解**.

解：因系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2-2 & 1 & -2 \\ -5 & a^2+3 & -3 \\ 1 & 0 & a^2+2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2-c_3}\begin{vmatrix} a^2+1 & 1 & -2 \\ a^2+1 & a^2+3 & -3 \\ -(a^2+1) & 0 & a^2+2 \end{vmatrix}$$

$$=(a^2+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & a^2+3 & -3 \\ -1 & 0 & a^2+2 \end{vmatrix}$$

$$=(a^2+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & a^2+2 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a^2+1)^3>0,$$

故所给齐次线性方程组只有零解.

九、用克莱姆法则解方程组 $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$.

解: $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=12$, $D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix}=24$,

$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix}=-24$, $D_3=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix}=35$,

$$x=\frac{D_1}{D}=2,\quad y=\frac{D_2}{D}=-2,\quad z=\frac{D_3}{D}=3.$$

十、证明等式 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}=\prod_{1\le j\le i\le 4}(x_i-x_j)\sum_{i=1}^{4}x_i$.

证明　构造范德蒙行列式 $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x^4 \end{vmatrix}$

$|A|=B_{45}=\prod_{1\le j\le i\le 4}(x_i-x_j)\sum_{i=1}^{4}x_i$. B_{45} **为** x^3 **的系数**.

专题二　矩阵及其运算

参考答案

一、矩阵及其运算

1、求解下列矩阵的乘积：

（1）$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}$；

解：$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&4\\1&3&2\\3&9&6\end{pmatrix}$;

（2）$\begin{pmatrix}2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$　；

解：$\begin{pmatrix}2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=(11)$；

（3）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\4&3\\7&9\end{pmatrix}$；

解：$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\4&3\\7&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\\7&9\end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix}2&1&4&3\\1&-1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\0&2&-2\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}2&1&4&3\\1&-1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\0&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-1&2\\4&3&-6\end{pmatrix}.$$

2、设 1×2 矩阵 $A=(-1,2)$，则计算 AA^T， A^TA.

解： $AA^T=$ （5）， $A^TA=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$.

3、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&-1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&-1&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}$,

计算 $3B, AB, AB^T, AB-AB^T$.

解： $3B=\begin{pmatrix}3&9&6\\6&-3&-6\\3&0&-3\end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix}8&1&-5\\6&0&-3\end{pmatrix},$

$$AB^T=\begin{pmatrix}13&-6&-2\\8&1&2\end{pmatrix}, AB-AB^T=\begin{pmatrix}-5&7&-3\\-2&-1&-5\end{pmatrix}.$$

4、**已知矩阵** $A=\begin{pmatrix}l_1&&&\\&l_2&&\\&&\ddots&\\&&&l_n\end{pmatrix}$**，计算** A^k.

解： $A^n=\begin{pmatrix}l_1^k&&&\\&l_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&l_n^k\end{pmatrix}.$

5、**已知** $a=(1,2,3), b=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$**，** $A=a^Tb$ **，计算** A^n.

解： $a^Tb=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}, ba^T=3$，

$$A^n=\underbrace{(a^Tb)(a^Tb)\cdots(a^Tb)}_{n\text{个}}=a^T\underbrace{(ba^T)(ba^T)\cdots(ba^T)}_{n\text{-}1\text{个}}b$$

$$=a^T(ba^T)^{n-1}b=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}.$$

6、**设** $a=(2,0,1)$**，矩阵** $A=a^Ta$ **，** n **为正整数，**

计算矩阵 $E-A^n$ **的行列式**.

解： $A=a^Ta=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&0&0\\2&0&1\end{pmatrix}, aa^T=5.$

$$A^n = a^T(aa^T)(aa^T)\cdots(aa^T)a = 5^{n-1}\begin{pmatrix}4&0&2\\0&0&0\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\left|E-A^n\right| = \begin{vmatrix}1-4\times5^{n-1}&0&-2\times5^{n-1}\\0&1&0\\-2\times5^{n-1}&0&1-5^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(1-4\times5^{n-1})(1-5^{n-1})-4\times5^{2(n-1)}=1-5^n.$$

7、**已知矩阵** $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，**分别计算** A^2, A^3, A^n (n **为正整数**).

解： $A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$A^3=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix},$$

设 $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，**则** $A=E+B$，**因** E **与** B **可交换，则**

$$A^n=(E+B)^n=E^n+nE^{n-1}B+C_n^2E^{n-2}B^2+C_n^3E^{n-3}B^3+\ldots+B^n,$$

注意到 $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B^3=B^4=\ldots=O$，**所以**

$$A^n=(E+B)^n=E+nB+C_n^2B^2=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

8、**求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵**.

解：设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$**为所求矩阵，由题意，有**

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+bd&bc+d^2\end{pmatrix}=O,$$

$$\begin{cases}a^2+bc=0\\ab+bd=0\\ac+dc=0\\bc+d^2=0\end{cases},$$

得 $a=-d, a^2+bc=0$，因此有所求矩阵 A 的形式为

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$，其中 $a^2+bc=0$.

9、求与 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换的全体二阶矩阵.

解：全体二阶矩阵为 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$，其中 a, b 为任意数.

*10、已知：A 是对角元互不相等的 n 阶对角矩阵，

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}，当 i \neq j 时，$$

$a_i \neq a_j (i, j=1,2,\ldots,n)$.证明：与 A 可交换的矩阵是对角矩阵.

证明：设与 A 可交换的矩阵 $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$，由条件 $AB=BA$，

则有

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & & a_nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$ 而

由 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j (i, j=1,2,\ldots,n)$，得当 $i \neq j$ 时，$b_{ij} \neq 0$，

即 B 为对角矩阵，命题得证.

*11、证明以下命题：

（1）若 A 是主对角元全为零的上三角矩阵，则 A^2 也是主对角元全为零的上三角矩阵；

（2）主对角元全为 1 的上三角矩阵的乘积，仍是主对角元为 1 的上三角矩阵.

证明：（1）由题意，设 $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

令 $A^2=C=(c_{ij})$，易得，当 $i \geq j$ 时，$c_{ij}=0$，命题得证.

（2）同理可证该命题..

*12、证明：$(A_1A_2\cdots A_n)^T=A_n^T\cdots A_2^TA_1^T$.

证明：用归纳法证明，容易验证当$n=1,2$时，公式成立；

假定当$n=k$时也成立，当$n=k+1$时，

$$(A_1A_2\cdots A_kA_{k+1})^T=((A_1A_2\cdots A_k)A_{k+1})^T=A_{k+1}{}^T(A_1A_2\cdots A_k)^T$$
$$=A_{k+1}{}^TA_k{}^T\cdots A_2{}^TA_1{}^T.$$

13、对于任意的n阶矩阵A,证明：

（1）$A+A^T$是对称矩阵，$A-A^T$是反对称矩阵；

（2）A可表示为对称矩阵和反对陈矩阵之和.

证明：(1) $(A+A^T)^T=A+A^T$，

$(A-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$，

故$A+A^T$是对称矩阵，$A-A^T$是反对称矩阵.

(2) $A=\dfrac{1}{2}(A+A^T)+\dfrac{1}{2}(A-A^T)$，

即A可表示为对称矩阵和反对陈矩阵之和.

14、设A,B为n方阵，且A为对称矩阵,证明B^TAB是对称矩阵.

证明：因为$(B^TAB)^T=B^TA^TB=-B^TAB$，则B^TAB是对称矩阵.

*15、设A为n阶反对称矩阵，证明：对于任意的n维列向量a，$a^TAa=0$.

证明：注意到a^TAa是一个实数，所以有

$(a^TAa)^T=a^TAa$，

而根据A的反对称性，又有

$(a^TAa)^T=-a^TAa$，即$a^TAa=-a^TAa$，因此得$a^TAa=0$.

*16、设A,B为n方阵，且A为对称矩阵，B为反对称矩阵，证明：(1) $AB+BA$是一个反对称矩阵；

(2) 对于任意的正整数k，A^k为对称矩阵；

(3) 若k为偶数，B^k为对称矩阵，若k为奇数，B^k为反对称矩阵.

证明：(1) 根据条件，有

$(AB+BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=-BA-AB=-(AB+BA)$，

即$AB+BA$是一个反对称矩阵；

(2) 因为$(A^k)^T=(A^T)^k=A^k$，即A^k为对称矩阵；

(3) 因为$(B^k)^T=(B^T)^k=(-B)^k=(-1)^kB^k$，

则有k为偶数，B^k为对称矩阵，k为奇数，B^k为反对称矩阵.

*17、设A,B都是对合矩阵（即$A^2=I,B^2=I$），

证明：乘积AB是对合矩阵的充分必要条件是A,B可交换.

证明：必要性

AB是对合矩阵，即有$E=(AB)^2=A(BA)B$，

两端左乘A,右乘B，并根据A,B都是对合矩阵，得：

$AB = A^2(BA)B^2 = BA$，即 A,B 可交换.

充分性

若 $AB=BA$，此等式两端右乘 AB，得

$(AB)^2 = BAAB = BEB = B^2 = E$,

因此 AB 为对合矩阵，命题得证.

*18、设 A,B 均为 n 阶称矩阵，且满足 $A^2=A, B^2=B$ 以及 $(A+B)^2=A+B$，证明：AB 为零矩阵.

证明：由条件 $A^2=A, B^2=B$，有：

$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = A+B+AB+BA$，

又 $(A+B)^2=A+B$，因此得：$AB+BA=O$.

用 A 分别左乘、右乘上式两边，得到：

$A(AB+BA) = A^2B + ABA = AB + ABA = O$,

$(AB+BA)A = ABA + BA^2 = ABA + BA = O$,

从而 $AB=BA$，代入 $AB+BA=O$，得：$AB=BA=O$，命题得证.

*19、A 是一个 n 阶矩阵，证明：$A=O$ 的充要条件是 $AA^T=O$ 。

由此可知：实对称矩阵 $A=O$ 的充要条件是 $A^2=O$.

证明：必要性易证，下证充分性.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，记 $C=AA^T$，则 $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2, \quad i=1\cdots n$.

由 $C=O$，知 $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$，即 $a_{ij}=0, \quad i,j=1\cdots n$,命题得证.

*20、A,B 是一个 n 阶矩阵，其中 A 为对称矩阵，B 为反对称矩阵，且 $A^2=B^2$，证明：$A=B=O$.

证明：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$，由 B 的反对称性知

$b_{ii}=0$，$i=1\cdots n$。

考察 $A^2 = AA^T = B^2 = -BB^T$ 的第 i 个主对角元素，得：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = -\sum_{j\neq i} b_{ij}^2$$

上式左端非负，右端非正，因此有：

$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = b_{i1} = b_{i2} = \cdots = b_{in} = 0$，$i=1\cdots n$，

于是有 $A=B=O$，命题得证.

二、逆矩阵

21、用代数余子式方法求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

解： $A_{11}=2, A_{12}=-1, A_{21}=-3, A_{22}=3, |A|=1$，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

解： $|A|=1, A_{11}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1$, **类似** $A_{22}=A_{33}=1$,

$$A_{12}=-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=0, A_{13}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0, A_{21}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-1,$$

$$A_{23}=-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0, A_{31}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=1, A_{32}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-1$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

解： $|A|=-2, A_{11}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-1, A_{12}=-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=1,$

$$A_{13}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1, A_{21}=-\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=1, A_{22}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-3,$$

$$A_{23}=-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-3, A_{31}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=3, A_{32}=-\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=-7,$$

$$A_{33}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-5.$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & -7\\ 1 & -3 & -5\end{pmatrix}$$

22、**设** A,B,C **为** n **阶可逆方阵，**

化简： $(BC^T-I)^T(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$

.**解**: $(BC^T-I)^T(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$

$=(CB^T-I)(B^{-T}A^T)+[A^{-T}B^T]^{-1}$

$=(CB^T-I)(B^{-T}A^T)+[A^{-T}B^T]^{-1}$

$=CA^T-B^{-T}A^T+B^{-T}A^T=CA^T$

23、**设** A,B **为** n **阶方阵，且** $E+AB$ **可逆，**

化简： $(E+BA)[E-B(E+AB)^{-1}A]$.

解： $(E+BA)[E-B(E+AB)^{-1}A]$

$=E-B(E+AB)^{-1}A+[BA-BAB(E+AB)^{-1}A]$

$= E - B(E+AB)^{-1}A + B[E - AB(E+AB)^{-1}]A$

$= E + B[-(E+AB)^{-1} + E - AB(E+AB)^{-1}]A$

$= E + B[E - (E+AB)(E+AB)^{-1}]A$

$= E + B[E-E]A = E$

24、**已知** A,B **为** 4 **阶方阵，且** $|A|=-2$，$|B|=3$，**求**

(1) $|5AB|$；**(2)** $|-AB^T|$；**(3)** $|(AB)^{-1}|$；

(4) $|A^{-1}B^{-1}|$；**(5)** $|((2AB)^T)^{-1}|$

解： $|A^{-1}|=-\dfrac{1}{2}, |B^{-1}|=\dfrac{1}{3}$,

(1) $|5AB| = 5^4\times(-2)\times 3 = -3750$；

(2) $|-AB^T| = (-1)^4\times(-2)\times 3 = -6$；

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}||A^{-1}| = -\dfrac{1}{6}$;

(4) $|A^{-1}B^{-1}| = -\dfrac{1}{6}$;

(5) $|((2AB)^T)^{-1}| = \dfrac{1}{|(2AB)^T|} = \dfrac{1}{2^4\times(-2)\times 3} = -\dfrac{1}{96}$.

*25、**设** A,B **为** n **阶** $(n\geq 2)$ **可逆矩阵，证明伴随矩阵满足以下性质：**

(1) $(AB)^* = B^*A^*$；

(2) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$；

(3) $(A^T)^* = (A^*)^T$；

(4) $(kA)^* = k^{n-1}(A)^*$，k **为非零常数；**

(5) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

证明：(1) **由伴随矩阵与可逆矩阵的关系，得**

$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = B^*A^*$；

(2) $(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^*$；

(3) $(A^T)^* = |A^T|(A^T)^{-1} = \left(|A|A^{-1}\right)^T = (A^*)^T$；

(4) $(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*$；

(5) $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = ||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1} = |A|^n\dfrac{1}{|A|}(\dfrac{1}{|A|}A)$

$= |A|^{n-2}A$.

*26、**设** n **阶方阵** A **的伴随矩阵为** A^*，**证明 若** $|A|=0$，**则** $|A^*|=0$.

证明：对于$|A|=0$，分两种情况讨论：

(i) 若 $A=O$，则 $A^*=O$，即$|A^*|=0$；

(ii) 若 $A\neq O$，反证之，假设$|A^*|\neq 0$，即 A^* 为可逆的.

由 $AA^*=|A|E$，以及$|A|=0$得 $A=|A|(A^*)^{-1}=O$，

这与假设想矛盾，故假设不成立，即$|A^*|=0$.命题得证.

27、求解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

解：$X=\begin{pmatrix}-17 & -28\\ -4 & -6\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$,

解：$X=\begin{pmatrix}0 & 7 & 1\\ 1 & -4 & -2\end{pmatrix}$.

(3) $X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

解：$X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 8\\ 4 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

解： $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$,

$X=A^{-1}CB^{-1}$，???

28、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$, 且 $AX=2A+2X$，求矩阵 X.

解：$(A-2E)X=2A$，$X=2(A-2E)^{-1}A$.

$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$X=2(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&3&0\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&6&0\\-2&0&4\end{pmatrix}.$$

29、**设 3 阶方阵 A,B 满足方程 $A^2B-A-B=E$，试求矩阵 B 以及行列式 $|B|$，其中** $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$**，** $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

解： $(A^2-E)B=A+E$

$B=(A^2-E)^{-1}(A+E)=[(A+E)(A-E)]^{-1}(A+E)$

$$=(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1/2\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ |B|=1/2$$

30、**设矩阵** $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$**，矩阵 X 满足** $AXA+BXB=AXB+BXA+E$**，E 是三阶单位矩阵，求矩阵 X**.

解： $AXA+BXB-AXB-BXA=E$，

$AX(A-B)-BX(A-B)=E$，

$(A-B)X(A-B)=E$，

因为 $|A-B|\neq 0$**，所以** $X=[(A-B)^{-1}]^2=[(E)^{-1}]^2=E$.

31、**设矩阵 A,B 为同阶方阵，且满足 $A+B=AB$，**

证明：$A-E$ 可逆，并进一步证明 $BA=AB$.

证明：因为 $A=AB-B=(A-E)B$，

所以 $(A-E)+E=(A-E)B$，

$(A-E)(B-E)=E$，

因此 $A-E$ 可逆且 $(A-E)^{-1}=B-E$.

有可逆性质知， $(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$，

展开得： $AB-A-B+E=BA-A-B+E$， $AB=BA$.

32、**设矩阵 A,B 为同阶方阵，已知 $|B|\neq 0$， $A-E$ 可逆，且有 $(A-E)^{-1}=(B-E)^T$，求证 A 可逆.**

证明：由条件知，

$E=(A-E)(A-E)^{-1}=(A-E)(B-E)^T=AB^T-A-B^T+E$

由此得 $AB^T-A-B^T=O$，

即： $A=(A-E)B^T$,

由 $|B|\neq 0$， $A-E$ **可逆，得**

$|A|=|(A-E)B^T|=|A-E||B|\neq 0$**，命题得证.**

*33、设矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

且有 $A(E-2C^{-1}B)^T C^T=B$，试求矩阵 A.

解：$A(E-2C^{-1}B)^T C^T=A(C-2CC^{-1}B)^T=A(C-2B)^T$，

$A(C-2B)^T=B$，$A=B[(C-2B)^T]^{-1}$.

$$[(C-2B)^T]=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&2&0\\0&2&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$A=B[(C-2B)^T]^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-3&2\\-1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

*34、设 $A^k=O$（k 为正整数），证明：

$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明：因为 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$

$$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots A^{k-1}-A^k$$

$=E-A^k=E$， 命题得证.

*35、设 A,B 为 n 阶方阵,且 $E-AB$ 与 $E-BA$ 均可逆，

证明：$(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A$.

证明：因为

$(E-BA)(E+B(E-AB)^{-1}A)$

$=E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A$

$=E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A$

$=E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A$

$=E-BA+BA=E$.

故 $(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A$

36、设方阵 A 满足方程 $A^2-A-8I=O$，试证明：

(1) $(A-3I)$ 可逆，并求出其逆；

(2) $(A-4I)$ 也可逆，并求出其逆.

证明：(1) 由方程知：$(A-3I)(A+2I)-2I=O$，

整理得：$(A-3I)\dfrac{A+2I}{2}=I$，

即矩阵 $A-3I,\dfrac{A+2I}{2}$ 均可逆，且 $(A-3I)^{-1}=\dfrac{A+2I}{2}$；

(2) 同理：$(A-4I)(A+3I)+4I=O$，

整理得： $(A-4I)(-\frac{A+3I}{4})=I$，

即矩阵 $A-4I,-\frac{A+3I}{4}$ **均可逆，且** $(A-4I)^{-1}=-\frac{A+3I}{2}$.

*37、**由上题，进一步证明若方阵** A **满足方程** $A^2+pA+qI=O$，**且** r **不是方程** $x^2+px+q=0$ **的零跟，则** $(A-rI)$ **可逆，并求其逆矩阵**;

证明：由方程知： $(A-rI)(A+(r+p)I)+(r^2+rp+q)I=O$，

而 $r^2+rx+q\neq 0$，**则矩阵方程可写为：**

$$(A-rI)(-\frac{A+(r+p)I}{r^2+rp+q})=I，$$

即矩阵 $A-rI,-\frac{A+(r+p)I}{r^2+rp+q}$ **均为可逆矩阵，且有**

$$(A-rI)^{-1}=-\frac{A+(r+p)I}{r^2+rp+q}.$$

*38、**假定** n **阶方阵** A **满足矩阵方程：**

$A^m+a_1A^{m-1}+a_2A^{m-2}+\ldots+a_{m-1}A+a_mE=O(a_m\neq 0)$，**其中** $a_1,a_2,\ldots,a_{m-1},a_m$ **都是实数，证明：** A **是可逆的，并求出其逆矩阵**.

证明：由 A **满足的矩阵方程得：**

$$A(A^{m-1}+a_1A^{m-2}+a_2A^{m-3}+\ldots+a_{m-1})=-a_mE，$$

整理得：

$$A(-\frac{A^{m-1}+a_1A^{m-2}+a_2A^{m-3}+\ldots+a_{m-1}}{a_m})=E，$$

即 A **是可逆的，且** $A^{-1}=-\frac{A^{m-1}+a_1A^{m-2}+a_2A^{m-3}+\ldots+a_{m-1}}{a_m}$.

*39、**设** $A,B,A+B$ **均为可逆方阵，**

证明： $A^{-1}+B^{-1}$ **可逆，并给出逆矩阵的表达式**.

证明：因为

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}，$$

由条件 $A,B,A+B$ **均可逆，所以** $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ **也是可逆矩阵，**

即 $A^{-1}+B^{-1}$ **为可逆矩阵，且**

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(A^{-1}(A+B)B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

*40、**设矩阵** $A=E_n-aa^T$，**其中** a **为** n **维非零列向量，且** $A^2=A$，**证明：**(1) $A^2=A\Leftrightarrow a^Ta=1$；(2) A **不可逆**.

证明：(1)

$$A^2=(E_n-aa^T)^2=E_n-2aa^T+a(a^Ta)a^T=E_n-(2-a^Ta)aa^T$$

因此有 $A^2=A\Leftrightarrow a^Ta=1$ **；**

（2）**有** $a^Ta=1$ **，知** $aa^T\neq O$ **，因此** $A=E_n-aa^T\neq E_n$ **，**

若假定 A **可逆，根据条件** $A^2=A$ **，得** $A=E_n$ **，矛盾，故假设不成立，命题得证.**

三、分块矩阵

41、**用分块矩阵的乘法，计算下列矩阵的乘积：**

（1）$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&4&5\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

解：令 $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}4&5\\1&2\end{pmatrix}$**，**

则原矩阵乘积为：

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C&O\\O&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AC&O\\O&BD\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3&0&0\\0&6&0&0\\0&0&4&5\\0&0&3&6\end{pmatrix}.$$

（2）$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$

解：令 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}$**，**

则原乘积可表示为：

$$\begin{pmatrix}A&E\\O&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&C\\O&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&AC+D\\O&BD\end{pmatrix},$$

而 $AC+D=\begin{pmatrix}5&2\\2&-4\end{pmatrix},BD=\begin{pmatrix}-4&3\\0&-9\end{pmatrix}$**，**

由此得矩阵乘积为： $\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix}.$

42、**设分块矩阵** $C=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$**，其中** A,B **分别是** m **阶**$,n$ **阶可逆矩阵，证明：** C **是可逆的，并求出** C^{-1}.

证明：因为 $|C|=\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|\neq0$**，**

所以C是可逆的，且 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}=E_{(m+n)\times(m+n)}$，

所以 $C^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

*43、设 $D=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$，其中 A,B 分别是 m 阶, n 阶可逆方阵，

证明：D 是可逆的，并求出 D^{-1}.

证明：由 $|D|=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|\neq 0$，所以 D 是可逆的.

假定 $D^{-1}=\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$,其中 P 与 A， S 与 B 分别是同阶方阵，

由可逆定义知，

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AP & AQ \\ CP+BR & CQ+BS \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

于是有： $AP=E_m \Rightarrow P=A^{-1}$；

$AQ=O\Rightarrow Q=O$；

$CQ+BS=E_n \Rightarrow S=B^{-1}$；

$CP+BR=O\Rightarrow R=-B^{-1}CP=-B^{-1}CA^{-1}$.

则 $D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$.

*44、由上题结论，证明可逆的下（上）三角矩阵的逆矩阵也是下（上）三角矩阵.

证明：对 n 作数学归纳法，当 $n=1$ 时，易知结论成立.

假定结论对 $n-1$ 阶可逆下三角矩阵成立，现考察 n 阶可逆下三角矩阵.

设 n 阶下三角矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，对 A 分块，令

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$， $A_1=\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ \boldsymbol{a} & A_1 \end{pmatrix}$.

由 A 的可逆性，知对角线元素 $a_{ii}\neq 0, i=1,\cdots,n$ ，因此

$a_{11}\neq 0, |A_1|\neq 0,$ 即对角块矩阵均可逆，由上题结论知，

$A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \\ -A_1^{-1}\boldsymbol{a}\,a_{11}^{-1} & A_1^{-1} \end{pmatrix}$，

根据归纳假设， A_1^{-1} 为 $n-1$ 阶可逆下三角矩阵，

所以 A^{-1} 是 n 阶可逆下三角矩阵.

若 A 为 n 阶可逆上三角矩阵，则 A^T 为可逆下三角矩阵，根据已证结论，$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ 为下三角矩阵,也即 A^{-1} 为上三角矩阵，命题得证.

45、利用矩阵分块的方法和相关结论，求下列可逆矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

解：令 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，原矩阵可写为 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$，

则原矩阵的逆矩阵为：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

解：令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B=3, C=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，原矩阵可写为

$\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{pmatrix}$，则原矩阵的逆矩阵为：

$$\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O & O \\ O & B^{-1} & O \\ O & O & C^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & l_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & l_n \\ l_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,

解：令 $A=\begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} l_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_n \end{pmatrix}$,**原矩阵可写为**

$\begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix}$**，则原矩阵的逆矩阵为：**

$$\begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{l_2} \\ \frac{1}{l_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{l_n} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* **(4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解：令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$**，原矩阵可写为**

$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$**，**

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*46、**设** $C=\begin{pmatrix} & & & C_1 \\ & & C_2 & \\ & \therefore & & \\ C_k & & & \end{pmatrix}$, **其中** $C_i\,(i=1,\cdots,k)$ **均为可逆矩阵，求** C^{-1}.

解：

$$\begin{pmatrix} & & & C_1 \\ & & C_2 & \\ & \therefore & & \\ C_k & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & C_k^{-1} \\ & & \therefore & \\ & C_2^{-1} & & \\ C_1^{-1} & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix}$$

，

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} & & & C_k^{-1} \\ & & \therefore & \\ & C_2^{-1} & & \\ C_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

四、矩阵的初等变换

47、**用初等变换求解下列可逆矩阵的逆矩阵：**.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$(**分别用初等行、*列两种变换进行求解**)

解：法一，利用初等行变换，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_2-3r_1,\,r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{5}),\,r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-\frac{5}{9}),\,r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+\frac{3}{5}r_3,\,r_1-\frac{1}{5}r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right),$$

则矩阵的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$.

*__法二，利用初等列变换，__

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1,\,c_3+c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2\times\frac{-1}{5},\,c_3-3c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{-2}{5} & \frac{-9}{5} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3\times\frac{-5}{9},\,c_1-3c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{9} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+\frac{2}{5}c_3,\,c_1-\frac{1}{5}c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

解：通过初等行变换，有

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_2 - r_1, r_3 - r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_2, r_3 - r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}, r_4 \times \frac{-1}{4}]{r_2 \times \frac{-1}{2}, r_4 + r_3,}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_4, r_1 - r_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - r_3, r_1 - r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right),$$

则矩阵的逆矩阵为$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解：通过初等行变换，有

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & a^2 & a^3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 - a^2 r_4]{r_3 - ar_4,\, r_2 - a^2 r_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 - a^2 r_3]{r_2 - ar_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - ar_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

则矩阵的逆矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

五、矩阵的秩

48、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 3 & -1 & -3 & 4\\ 1 & 5 & -9 & -8\end{pmatrix}$，**求** $r(A)$ **.**

解：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 3 & -1 & -3 & 4\\ 1 & 5 & -9 & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -4 & 6 & 7\\ 0 & 4 & -6 & -7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 4 & -6 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=2$.

49、**矩阵** $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 8 & 3 & 7\\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5\\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$ **,求矩阵** A **的秩并写出** A **的一个最高阶非零子式.**

解： $$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 8 & 3 & 7\\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5\\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7\\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5\\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $r(A)=3$ **.** A **的 1,2,4 行 1,2,5 列所在的三阶子式**

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 7\\ 2 & -3 & -5\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=16\neq 0 .$$

50、a **取何值时，矩阵** $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 6 & -5 & 3\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1\\ 4 & -5 & 8 & -9 & a\end{pmatrix}$ **的秩是** 2.

解： $$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 6 & -5 & 3\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1\\ 4 & -5 & 8 & -9 & a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -3 & 6 & -5 & 3\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 1 & a-6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2 & -3 & 6 & -5 & 3\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-7\end{pmatrix}$$ **，所以** $a=7$ **时，矩阵** A **的秩为** 2.

专题二 矩阵及其运算

自测题 参考答案

一、选择题：

1、**已知** A,B **均为** n **阶方阵，则必有**__D__.

(A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ (B) $(AB)^T=A^TB^T$

(C) $AB=O$ 时，$A=O$ 或 $B=O$

(D) $|A+AB|=0 \Leftrightarrow |A|=0$，或 $|E+B|=0$

2、设 A 为三阶方阵，且 $|A|=2$ 则 $|(A^*)^{-1}|=$ __B__

(A)4　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{2}$

3、设 A,B,C 均为 n 阶方阵，满足 $ABC=E$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，

则必有__D__.

(A) $ACB=E$；　(B) $CBA=E$；　(C) $BAC=E$　(D) $BCA=E$

4、设 A,B,C 均为 n 阶方阵，且 $AB=BC=CA=E$，

则 $A^2+B^2+C^2=$ __A__.

(A) $3E$　　(B) $2E$　　(C) E　　(D) 0

5、设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵，

在下列等式中正确的是__D__.

(A) $(-A)^*=-A^*$　　(B) $|A^*|=|A|^n$

(C) $|-A|=-|A|$　　(D) $(-A)^{-1}=-A^{-1}$

6、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，若 A 可逆，则 B^{-1} 为__C__

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$　　(C) $P_1P_2A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$

二、填空题

1、设 A,B 都是 5 阶矩阵,且 $|A^{-1}|=-3, |B|=2$,则

$||B|A|=$ __$-\frac{32}{3}$__

2、已知：$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，　则 $A^*=$ __$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$__.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则 $A^{100}=\underline{\begin{pmatrix}1&0\\100&1\end{pmatrix}}$.

4、 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$ ，$|B|=\underline{\quad 2\quad}$.

5、设 A,B 都是 n 阶方阵,且 $|A|=2,|B|=3,$ 则 $\begin{vmatrix}A&0\\0&B\end{vmatrix}=\underline{\quad 6\quad}$.

6、设 n 维向量 $a=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})$，矩阵 $A=E-a^Ta$ ，

$B=E+2a^Ta$ ，则 $AB=\underline{E}$.

三、问常数 k 取何值时，方程组

$$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=k-3,\\x_1+kx_2+x_3=-2,\\x_1+x_2+kx_3=-2,\end{cases}$$

无解,有唯一解,或有无穷多解,并在有无穷多解时写出其全部解.

解：对方程组的增广矩阵进行高斯消元，

$$\begin{pmatrix}k&1&1&k-3\\1&k&1&-2\\1&1&k&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\Leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&1&k&-2\\1&k&1&-2\\k&1&1&k-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1,r_3-kr_1}\begin{pmatrix}1&1&k&-2\\0&k-1&1-k&0\\0&1-k&1-k^2&3k-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&k&-2\\0&k-1&1-k&0\\0&0&(k+2)(1-k)&3(k-1)\end{pmatrix},$$

则有当 $k=-2$ 时，方程组无解；

当 $k\neq-2,$ 且 $k\neq-1$ 时，方程组有唯一解；

当 $k=1$ 时，方程组有无穷多解,其解为：

$x_1=-2-k_1-k_2,x_2=k_1,x_3=k_2$,其中 k_1,k_2 为任意常数.

四、设 A 为 n 阶反对称阵，若 n 为奇数，则 A^* 为对称阵，若 n 为偶数，则 A^* 为反对称阵.

证明：由条件知 $A^T=-A$，因此 $(A^T)^*=(-A)^*$.

又 $(A^*)^T=(A^T)^*=(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$，

从而当 n 为奇数时，$(A^*)^T=A^*$，即 A^* 为对称阵，当 n 为偶数时，

$(A^*)^T=-A^*$，即 A^* 为反对称阵，命题得证.

五、设 $a=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}^T$，且 $a^Ta=1,A=E-2aa^T$，

证明：A 是对称矩阵，且 $A^2=E$.

证明：先证明 A 为对称矩阵，因为

$A^T=(E-2aa^T)^T=E-2(a^T)^Ta^T=E-2aa^T=A$，

所以 A 为对称矩阵.

又 $A^2=(E-2\alpha\alpha^T)^2=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$

$=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T=E$，

命题得证.

六、求 $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$ **的逆矩阵.**

解： $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{bmatrix}$

七、设 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$，**求** X **使** $AX=B$.

解：由题意 $X=A^{-1}B$**，利用初等行变换进行求解，**

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-1&-2&-2\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1,r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-1&-2&-2\\0&2&3&6&6\\0&1&2&9&5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3,r_3-r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-1&-2&-2\\0&1&1&-3&1\\0&0&1&12&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3,r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{array}\right),$$

则 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}$.

八、设方阵 A **满足** $A^2+6A+9I=O$，**证明** $A+4I$ **可逆,并求** $(A+4I)^{-1}$.

证明：由 $A^2+6A+9I=O$**，知**

$(A+4I)(A+2I)+I=O$，

即 $(A+4I)(-A-2I)=I$，

由此得 $A+4I$ 可逆，且 $(A+4I)^{-1}=-A-2I$.

九、设 A **是** n **阶可逆矩阵，**

将 A **的第** i **行与第** j **行对换后得到的矩阵记为** B.

(1) **证明：矩阵** B **可逆；**

(2) 求 AB^{-1}.

(1) **证明：由于** A **是** n **阶可逆矩阵，因此** $|A|\neq 0$ **，**

因此 $|B|=-|A|\neq 0$ **，即矩阵** B **可逆**.

(2) **假定用** $E_{i.j}$ **表示由** n **阶单位阵交换第** i **行与第** j **行后所得的初等矩阵，则** $E_{i.j}A=B$ **，因此**

$$AB^{-1}=A(E_{i.j}A)^{-1}=AA^{-1}E_{i.j}^{-1}=E_{i.j}.$$

十、利用分块方法求矩阵的逆矩阵： $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

解：令 $A=(n),B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$,**原矩阵可写为** $\begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix}$**，**

则原矩阵的逆矩阵为：

$$\begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

专题三　线性方程组及向量组的线性相关性 参考答案

一、线性方程组的消元法

1、用消元法解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$

解： $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$

(2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5 \end{cases}$.

解：无解

(3) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

解： $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

2、求下列方程组的一般解.

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

解: 因为系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以一般解为： $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$ **（其中 x_3，x_4 是自由未知量）**.

(2) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 14x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

解: 因为增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 14 & -6 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 4 & -9 \\ 0 & 18 & -8 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/9 & 1 \\ 0 & 1 & -4/9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

3、用高斯消元法判断下列线性方程组是否有解，

并在有解的情况下，求出其全部解.

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

解：对其增广矩阵进行高斯消元

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1, r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 5r_2, r_4 + 7r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_3, r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_4, r_2 + \frac{1}{2}r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

由此得方程组的解为 $x_1 = -8, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 0.$

(2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ -7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

解：对其增广矩阵进行高斯消元

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & -4 & -1 & 2 \\ -7 & 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 5r_1, r_5 + 7r_1]{r_2 + 2r_1, r_3 - r_1,} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & -9 & 9 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_5 - 3r_2]{r_3 + r_2, r_4 + 2r_2,} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此得方程组的解为 $x_1 = 2 + k, x_2 = 2 + k, x_3 = k, k$ **为任意常数**.

(3) $\begin{cases} x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1 \\ 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7 \\ 3x_1-2x_2-2x_3+3x_4=1 \end{cases}$

对其增广矩阵进行高斯消元

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-2r_1,r_3-5r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2,} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **，由此知方程组无解。**

(4) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \\ x_1-x_2+x_4=0 \end{cases}$

对其增广矩阵进行高斯消元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}\times r_3]{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

得方程组的解为 $x_1=-k, x_2=0, x_3=2k, x_4=k$**，**$k$ **为任意常数.**

4、**问常数**k**取何值时，方程组**$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$

无解,有唯一解,或有无穷多解,并在有无穷多解时写出其全部解.

解：系数矩阵行列式为$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-(k+1)(k-4)$

当$|A|\neq 0$**时，即**$k\neq -1$**且**$k\neq 4$**，有唯一解;**

当$k=-1$**时，**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1,\ r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$ **，无解；**

当$k=4$**时，**$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_2\times\frac{1}{5}}\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

方程组有无穷多解，其全部解为：

$x_1=-3k, x_2=4-k, x_3=k$，k **为任意常数**.

5、线性方程组 $\begin{cases}x_1-3x_2-x_3=0\\x_1-4x_2+ax_3=b\\2x_1-x_2+3x_3=5\end{cases}$，

问：a,b **取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？**

在有无穷多解时求出其全部解.

解：对其增广矩阵进行高斯消元

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\1&-4&a&b\\2&-1&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\2&-1&3&5\\1&-4&a&b\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\0&5&5&5\\0&-1&a+1&b\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2\times\frac{1}{5}}\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&a+2&b+1\end{pmatrix}$$

当 $a=-2$，$b\neq-1$ **时，方程组无解；**

当 $a\neq-2$ **时，方程组有唯一解；**

当 $a=-2$，$b=-1$ **时，方程组有无穷多解,其解为**

$x_1=3-2k, x_2=1-k, x_3=k$，k **为任意常数**.

二、向量组及其线性组合

6、**试将** $b=(4,11,3)^T$ **表示为** $a_1=(1,3,2)^T, a_2=(3,2,1)^T$，

$a_3=(-2,-5,1)^T$ **的线性组合**.

解：设 $b=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3$，

比较对应分量可得线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3=4\\3x_1+2x_2-5x_3=11\\2x_1+x_2+x_3=3\end{cases}$

对此方程组的增广矩阵施以初等行变换，可得

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\3&2&-5&11\\2&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix},$$

因此 $x_1=2, x_2=0, x_3=-1$**，所以** $b=2a_1+0a_2-a_3$.

7、**试将** $b=(1,2,1,1)^T$ **表示为** $a_1=(1,1,1,1)^T, a_2=(1,1,-1,-1)^T$，

$a_3=(1,-1,1,-1)^T, a_4=(1,-1,-1,1)^T$ **的线性组合**.

解：设 $b=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4$**，比较对应分量可得线性**

方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$,

对此方程组的增广矩阵施以初等行变换，可得

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

因此$x_1=\frac{5}{4},x_2=\frac{1}{4},x_3=-\frac{1}{4},x_4=-\frac{1}{4}$，所以

$$b=\frac{1}{4}(5a_1+a_2-a_3-a_4).$$

8、已知$a_1=(1,1,0)^T$, $a_2=(2,0,1)^T$, $a_3=(2,5,t)^T$,

试问t为何值时a_3可由a_1, a_2线性表示.

解: 由于a_1, a_2线性无关，因此只有当向量组a_1, a_2, a_3

线性相关时a_3可由a_1, a_2线性表示.

令$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=0$，则此方程组有非零解，故

$$|a_1,\ a_2,\ a_3|=\begin{vmatrix}1&2&2\\1&0&5\\0&1&t\end{vmatrix}=2-5-2t=0,\text{因此}\ t=-\frac{3}{2}\ .$$

三、向量组的线性相关性

9、选择题

(1) 已知向量组a_1,a_2,a_3,a_4线性无关，

则下列向量组中线性无关的是（C ）

（A） $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4+a_1$;

（B） $a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_4,a_4-a_1$;

（C） $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4-a_1$;

（D） $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3-a_4,a_4-a_1$.

(2) 若a,b,g线性无关，a,b,d线性相关，则（D ）

（A） a必可由b,g,d线性表示;

（B） b必不可由a,g,d线性表示;

（C） d必不可由a,b,g线性表示;

（D）d 必可由 a, b, g 线性表示.

(3) n 维向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m (3 \le m \le n)$ 线性无关的充分必要条件是（D）

（A）存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m \ne 0$;

（B） $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中任意两个向量线性无关;

（C） $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中存在一个向量不能由其余向量线性表示;

（D） $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中任意一个向量都不能由其余向量线性表示.

(4) 向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，$b_1 = a_1 - a_2$，$b_2 = a_2 - a_3$，$b_3 = l a_3 - t a_1$ 也线性无关，则 l, t 满足（B）

$(A)\ l = t$； $(B)\ l \ne t$； $(C)\ l = t = 1$； $(D)\ l \ne 2t$.

10、求下列向量组的一个极大线性无关组，

并将其余向量用此极大线性无关组线性表示.

(1) $a_1 = (1, 2, 3, 0)^T, a_2 = (-1, -2, 0, 3)^T$,

$a_3 = (2,4,6,0)^T$, $a_4 = (1,-2,-1,0)^T, a_5 = (0,0,1,1)^T$.

解：对 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 进行初等行变换，得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是向量组的秩为 3，它的一个极大线性无关组为 a_1, a_2, a_4 且

$a_3 = 2a_1,\ a_5 = \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2$.

(2) $a_1 = (1,-1,2,4)^T, a_2 = (0,3,1,2)^T, a_3 = (1,-1,2,0)^T$,

$a_4 = (3,0,7,14)^T, a_5 = (2,1,5,6)^T$.

解：对 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 进行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&3&2\\-1&3&-1&0&1\\2&1&2&7&5\\4&2&0&14&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&2\\0&3&0&3&3\\0&1&0&1&1\\0&2&-4&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

于是向量组的秩为 3**，它的一个极大无关组为** a_1,a_2,a_3**，**

且有 $a_4=3a_1+a_2, a_5=a_1+a_2+a_3$**.**

(3) $a_1=(1,4,-2)^T, a_2=(1,-2,4)^T, a_3=(2,5,-1)^T$,

$a_4=(4,5,-2)^T, a_5=(5,4,-4)^T$ **.**

解：对 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ **进行初等行变换，得**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&4&5\\4&-2&5&5&4\\-2&4&-1&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&4&5\\0&-6&-3&-11&-16\\0&0&0&-5&-10\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&0&-2\\0&1&\frac{1}{2}&0&-1\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

于是向量组的秩为 3**，它的一个极大无关组为** a_1,a_2,a_4**，**

且有 $a_3=\frac{3}{2}a_1+\frac{1}{2}a_2, a_5=-2a_1-a_2+2a_4$.

(4) $a_1=(1,3,5,-1)^T, a_2=(2,-1,-3,4)^T$,

$a_3=(5,1,-1,7)^T$，$a_4=(-3,-3,1,1)^T$ **.**

解：对 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ **进行初等行变换，得**

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5&-3\\3&-1&1&-3\\5&-3&-1&1\\-1&4&7&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&5&-3\\0&-1&-2&4\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是向量组的秩为 3**，它的一个极大无关组为** a_1,a_2,a_4**，**

并且 $a_3=a_1+2a_2$.

(5) $a_1=(1,0,2,3,-4)^T, a_2=(7,1,0,-1,3)^T$,

$a_3=(1,4,-9,-6,22)^T$，$a_4=(6,4,1,9,2)^T$ **.**

解：对 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ **进行初等行变换，得**

$$A=\begin{pmatrix}1&7&1&6\\0&1&4&4\\2&0&-9&1\\3&-1&-6&9\\-4&3&22&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&1&6\\0&1&4&4\\0&-14&-11&-11\\0&-22&-9&-9\\0&31&26&26\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&7&1&6\\0&1&4&4\\0&0&45&45\\0&0&38&38\\0&0&-98&-98\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&1&6\\0&1&4&4\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

于是向量组的秩为 3，它的一个极大无关组为 a_1，a_2，a_3，

并且 $a_4=5a_1+0a_2+a_3$．

11、已知向量组 $a_1=(1,3,0,5)^T,a_2=(1,2,1,4)^T,a_3=(1,1,2,3)^T$，

$a_4=(1,-3,6,-1)^T$ $a_5=(1,a,3,b)^T$ 的秩为 2.

试求 a,b 的值，并求向量组的一个极大线性无关组，

且将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解：令 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$，则对其进行初等行变换有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&-3&a\\0&1&2&6&3\\5&4&3&-1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&a\\0&0&0&0&b-2\end{pmatrix},$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-5&-2\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由 $r\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}=2$ 得 $a=0,b=2$，a_1,a_2 为一个极大线性无关组，$a_3=-a_1+2a_2,a_4=-5a_1+6a_2,a_5=-2a_1+3a_2$．

12、已知向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，

试证向量组 $2a_1+3a_2$，a_2+4a_3,a_1+5a_3 亦线性无关．

证明：设有 k_1,k_2,k_3 使

$k_1(2a_1+3a_2)+k_2(a_2+4a_3)+k_3(a_1+5a_3)=0$，整理得

$(2k_1+k_3)a_1+(3k_1+k_2)a_2+(4k_2+5k_3)a_3=0$．

因为 a_1,a_2,a_3 线性无关，所以

$$\begin{cases}2k_1+k_3=0\\3k_1+k_2=0\\4k_2+5k_3=0\end{cases}.$$

由于 $\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&0\\0&4&5\end{vmatrix}=22\neq0$，因此方程组只有零解，即

$k_1=k_2=k_3=0$，从而向量组 $2a_1+3a_2,a_2+4a_3,a_1+5a_3$ 线性无关，证毕.

*13、向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关，

$b_1=a_1+a_2$，$b_2=a_2+a_3,\cdots,$　$b_s=a_s+a_1$，

试讨论向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 的线性相关性.

解:设有数 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 使得 $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_s b_s = 0$,即

$$(x_1 + x_s)a_1 + (x_1 + x_2)a_2 + \cdots + (x_{s-1} + x_s)a_s = 0 .$$

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关,所以 $\begin{cases} x_1 + x_s = 0 \\ x_1 + x_s = 0 \\ \cdots\ \cdots \\ x_1 + x_s = 0 \end{cases}$.

该方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{s+1}$,

(1)当 s 为奇数时, $D = 2 \neq 0$,方程组只有零解,

$x_1, x_2, \cdots, x_s$ 必全为零,向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 的线性无关;

(2)当 s 为偶数时, $D = 0$,方程有非零解,

即存在不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 使 $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_s b_s = 0$,

向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 线性相关.

*14、设 n 维向量 a_1, a_2, a_3 线性相关,且满足 $2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0$.

试说明对于任意的 n 维向量 b ,参数 l_1, l_2, l_3 满足什么条件时,向量组 $a_1 + l_1 b, a_2 + l_2 b, a_3 + l_3 b$ 线性相关.

解:因为向量组 $a_1 + l_1 b, a_2 + l_2 b, a_3 + l_3 b$ 线性相关,

由定义得,存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使得

$k_1(a_1 + l_1 b) + k_2(a_2 + l_2 b) + k_3(a_3 + l_3 b) = 0$,

整理得 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + (k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3) b = 0$.

因为 b 是任意的 n 维向量,而向量 a_1, a_2, a_3 满足 $2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0$,

故 $k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 3,$ 且 $2l_1 - l_2 + 3l_3 = 0$ 时,上式成立,因此 $2l_1 - l_2 + 3l_3 = 0$ 时,向量组 $a_1 + l_1 b, a_2 + l_2 b, a_3 + l_3 b$ 线性相关.

*15、已知向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关,矩阵 A 可逆.

求证向量组 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关.

证明:设 $k_1 A a_1 + k_2 A a_2 + \cdots + k_s A a_s = 0$,则 $A(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_s a_s) = 0$.由 A 为可逆矩阵,知 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_s a_s = A^{-1} 0 = 0$.再由 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关,知

$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，**即向量组** $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ **线性无关.**

四、线性方程组解的结构

16、**用基础解系表示下列齐次线性方程组的全部解：**

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$

解： $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$

解： $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 1\\-2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\1\\0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 5\\-6\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$

解： $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 2\\-2\\1\\0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\\0\\1 \end{pmatrix}$

（4）$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4-x_5=0\\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4+2x_5=0\\ 3x_1+5x_2-x_3+x_5=0\\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0 \end{cases}$

解： $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -8\\5\\1\\0\\0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 5\\-3\\0\\1\\0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} -7\\4\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$

（5）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=0\\ 5x_1+5x_2+2x_3=0\\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$

解： $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

解： $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

17、**用基础解系表示下列非齐次线性方程组的全部解：**

(1) $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

解： $x = k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

解： $x = k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

解： $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ -7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

解： $X=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} or X=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$

(5) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0\\2x_1+2x_2+x_3+\quad x_5=1\\3x_1+3x_2\quad -x_4+2x_5=1\\x_1+x_2+2x_3+x_4\quad =1\end{cases}$

解：特解和 3 个基础解系： $a_0=(1,0,0,0,-1)$

$a_1=(-1,1,0,0,0),a_2=(-2,0,1,0,3),a_3=(-1,0,0,1,2)$

所以原方程组的通解为

$:a=k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+a_0\quad k_1,k_2,k_3$ **为任意常数）**

(6) $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4=1\\2x_1-x_2+x_3+2x_4=3\\x_1-x_3+x_4=2\\3x_1-x_2+3x_4=5\end{cases}$

解： $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

18、**求齐次线性方程组** $\begin{cases}lx_1+x_2+x_3=0\\x_1+lx_2+x_3=0\\x_1+x_2+lx_3=0\end{cases}$ **只有零解的充要条件。**

解为： $l\neq 1$**且**$l\neq -2.$

19、**设四元非齐次线性方程组系数矩阵的秩是** 2，$a_1=\begin{pmatrix}4\\4\\3\\-1\end{pmatrix}$，

$a_2=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\2\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}0\\-3\\1\\3\end{pmatrix}$**是它的三个解，求它的通解。**

解： $x=a_1+k_1(a_1-a_2)+k_2(a_1-a_3)=$

$$\begin{pmatrix}4\\4\\3\\-1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\7\\2\\-4\end{pmatrix}。$$

20、当 k **取何值时，方程组** $\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3=3\\x_1+x_2+x_3=k\\5x_1+4x_2+6x_3=15\end{cases}$ **有解，**

并求出此时的通解.

解：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}3&2&4&3\\1&1&1&k\\5&4&6&15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&k\\3&2&4&3\\5&4&6&15\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&k\\0&-1&1&3-3k\\0&0&0&12-2k\end{pmatrix}$$

$\therefore$ **当 $k=6$ 时，方程组有解且有无穷多解.**

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&6\\3&2&4&3\\5&4&6&15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-9\\0&1&-1&15\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\therefore X=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9\\15\\0\end{bmatrix}$$

21、**已知方程组** $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4=1\\3x_1-5x_2+5x_3-3x_4=2\\2x_1-3x_2+2x_3-2x_4=a\end{cases}$，

当 a 为何值时方程组无解？当 a 为何值时方程组有解？并求解.

解：

$$A\ (A,b)=\begin{bmatrix}1&-2&3&-1&\vdots&1\\3&-5&5&-3&\vdots&2\\2&-3&2&-2&\vdots&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3&-1&\vdots&1\\0&1&-4&0&\vdots&-1\\0&1&-4&0&\vdots&a-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-2&3&-1&\vdots&1\\0&1&-4&0&\vdots&-1\\0&0&0&0&\vdots&a-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-5&-1&\vdots&-1\\0&1&-4&0&\vdots&-1\\0&0&0&0&\vdots&a-1\end{bmatrix}$$

(1) $a\neq 1$ **时，方程组无解；**

(2) $a=1$ **时，**

因为 $r(A)=r(A,b)=2<4$**，所以方程组有无穷多解。**

取 x_3,x_4 **为自由未知量，令** $x_3=0,x_4=0$

得方程组的一个特解 $x_0=(-1,-1,0,0)^T$**；**

令自由未知量为 $x_3=1,x_4=0$**，**

得其导出组基础解系中的一个解 $x_1=(5,4,1,0)^T$**，**

令自由未知量为 $x_3=0,x_4=1$**，**

得其导出组基础解系中的另一个解 $x_2=(1,0,0,1)^T$**，**

所以方程组的一般解为

$$x=x_0+k_1x_1+k_2x_2=(-1,-1,0,0)^T+k_1(5,4,1,0)^T+k_2(1,0,0,1)^T,$$

其中 k_1,k_2 **为任意常数。**

*22、. 求a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$

有唯一解、无解或有无穷多解？在有解时，求其通解.

解：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix}$

$a\neq 1$,唯一解，$\left\{\dfrac{b-a+2}{a-1},\dfrac{a-2b-3}{a-1},\dfrac{b+1}{a-1},0\right\}$

$a=1,b\neq -1$,无解

$a=1,b=-1$，无穷多解.　通解$x=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

专题三　线性方程组及向量组的线性相关性

自测题　参考答案

一、判断题：

($\surd$) 1、线性无关的向量组必定不含零向量.

($\surd$)2、如果一个向量组线性无关，那么它的任何一个非空的部分组也线性无关.

(×) 3、$m>n$是n维向量组$a_1,a_2,\cdots a_m$线性相关的必要条件.

(×) 4、如果两个向量组的秩相等，那么它们必然是等价向量组.

($\surd$) 5、若向量组a_1,a_2,a_3线性无关，a_1,a_2,a_4线性相关，

则a_4必可由a_1,a_2,a_3线性表示.

($\surd$)6、若a_1,a_2,a_3线性无关，则a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1线性无关.

($\surd$) 7、设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是一组n维向量，且n维单位向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$可被它们线性表出，那么$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关.

(×)*8、设$r>1$, $b_1=a_2+a_3+...+a_r$, $b_2=a_1+a_3+...+a_r,\cdots$, $b_r=a_1+a_2+...+a_{r-1}$，那么$r\{b_1,b_2\cdots,b_r\}<r\{a_1,a_2\cdots,a_r\}$.

(×)* 9、如果A是 n 阶矩阵且$|A|=0$，则A的每一个行向量都是其余各行向量的线性组合.

($\surd$)* 10、设$a_1=(a_1,a_2,a_3)^T$, $a_2=(b_1,b_2,b_3)^T$, $a_3=(c_1,c_2,c_3)^T$,

则三条直线$a_ix+b_iy+c_i=0$，$(a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3)$交于

一点的充要条件是 a_1,a_2,a_3 线性相关且 a_1,a_2 线性无关.

二、选择题

1、设 n 元线性方程组 $AX=B$ 有解，则当 $r(A)$ （ A ） n 时，$AX=B$ 有无穷多解。

A. $<$　　B. $\le$　　C. $>$　　D. $\ge$

2、设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $AX=O$ 仅有零解的充要条件是 A 的（B）.

A. 列向量线性相关　　B. 列向量线性无关

C. 行向量线性相关　　D. 行向量线性无关

3、$m>n$ 是 n 维向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关的（ B ）条件。

A. 必要　　B. 充分　　C. 无关　　D. 充分必要

4、设 x_1,x_2 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，h_1,h_2 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则(C).

$A.$ $2x_1+h_1$ 为 $Ax=0$ 的解　　$B.$ h_1+h_2 为 $Ax=b$ 的解；

$C.$ x_1+x_2 为 $Ax=0$ 的解；　　$D.$ h_1-h_2 为 $Ax=b$ 的解.

5、设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中，系数矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 且 $\boldsymbol{r(A)=r}$，则（ C ）。

A. 当 $\boldsymbol{m=n}$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有惟一解；

B. 当 $\boldsymbol{r=n}$ 时， 方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有惟一解；

C. 当 $\boldsymbol{r=m}$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有解；

D. 当 $\boldsymbol{r<n}$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有无穷多解。

三、填空题

1、设 $a=(2,-1,5)^T$ ， $b=(-1,1,1)^T$ ，则 $a+b=$ $\underline{(1,0,6)^T}$ ，$3a-2b=$ $\underline{(8,-5,13)^T}$.

2、设 $a_1=(1,1,1)^T$ ， $a_2=(1,2,3)^T$ ， $a_3=(1,3,t)^T$ ，则当 $t=$ $\underline{\quad 5\quad}$ 时它们线性相关.

3、设 $a_1=(k,1,1)^T,a_2=(0,2,3)^T,a_3=(1,2,1)^T$，则当 k $\underline{\ne 1/4}$ 时， a_1,a_2,a_3 线性无关.

4、已知向量组

$a_1=(1,2,3,4)^T,a_2=(2,3,4,5)^T,a_3=(3,4,5,6)^T$,

$a_4=(4,5,6,7)^T$，则该向量组的秩是 $\underline{\quad 2\quad}$.

5、若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&3\\1&3&t\end{pmatrix}$,且 $r(A)=3$,则 $t\ne\underline{\frac{5}{2}}$.

6、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$ 的列向量线性相关,则 $t=$ $\underline{-3}$.

7、设三阶方阵 $A=(a,g_1,g_2),B=(b,2g_1,-3g_2)$，其中 a,b,g_1,g_2 均是三维列向量且 $|A|=-\frac{1}{3}$，$|B|=3$，则 $|A+B|=\underline{5}$.

8、设 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 均为 4 维列向量，且矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3,b_1)$，$B=(a_1,a_2,b_2,a_3)$，$C=(a_3,a_2,a_1,b_1+b_2)$，如果 $|A|=a,|B|=b$，则行列式 $|C|=\underline{b-a}$.

9、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为___1____

10、若 A 为 n 阶可逆矩阵，则 $r(A^*)=\underline{n}$.

11、若 n 元线性方程组有解，且其系数矩阵的秩为 r，则当__$r=n$ 时，方程组有唯一解；当__$r<n$___ 时，方程组有无穷多解。

12、设三元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中，矩阵 A 的秩为 2，且 $x_1=(1,2,2)^T$，$x_2=(3,2,1)^T$ 为 $Ax=b$ 的两个解，则此非齐次方程组的全部解可表示为：

$k(2,0,-1)^T+(3,2,1)^T$ 或 $k(-2,0,1)^T+(1,2,2)^T$（其中 k 为任意常数）

13、设 x 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，h 为非齐次线性方程组 AX=b 的解，则 $3x+h$ 为_____$AX=b$_____的解。

14、若 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&1\\4&1&-1\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的线性无关的解的个数为__1___。

15、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解的充要条件是 <u>r(A)=r(A,b)=n</u>，有无穷多解的充要条件是 <u>r(A)=r(A,b)<n</u>

四、求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&l&-1&2\\2&-1&l&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解：

$$A=\begin{pmatrix}1&l&-1&2\\2&-1&l&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&l&-1&2\\0&-1-2l&l+2&1\\0&10-l&-5&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&l\\0&1&l+2&-1-2l\\0&-1&-5&10-l\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&l\\0&1&l+2&-1-2l\\0&0&l-3&9-3l\end{pmatrix}$$

从而当 $l\neq3$ 时，$r(A)=3$；当 $l=3$ 时，$r(A)=2$.

五、求向量组 $a_1=(2,1,3,-1)^T, a_2=(3,-1,2,0)^T$，$a_3=(1,3,4,-2)^T, a_4=(4,-3,1,1)^T$ **的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.**

解：

$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-1&3&-3\\3&2&4&1\\-1&0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-3\\2&3&1&4\\3&2&4&1\\-1&0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-3\\0&5&-5&10\\0&5&-5&10\\0&-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-3\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $r(A)=2$，a_1,a_2 **就是一个极大无关组，**

且 $a_3=2a_1-a_2$，　$a_4=-a_1+2a_2$.

六、已知向量组

$a_1=(1,1,1,3)^T, a_2=(1,3,-5,-1)^T, a_3=(-2,-6,10,a)^T$，

$a_4=(4,1,6,a+10)^T$　**线性相关.**

试求 a **的值并确定该向量组的一个极大线性无关组.**

解：对 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ **进行初等行变换，得**

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\1&3&-6&1\\1&-5&10&6\\3&-1&a&a+10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&2&-4&-3\\0&-6&12&2\\0&-4&a+6&a-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&2&-4&-3\\0&0&a-2&a-8\\0&0&0&-7\end{pmatrix}$$

由于向量组线性相关，即 $r(A)<4$，**必有** $a=2$，

且显然 a_1，a_2，a_4 **为其一个极大无关组.**

七、已知

$a_1=(1,2,1)^T, a_2=(l,-1,10)^T, a_3=(-1,l,-6)^T, b=(2,5,1)^T$，

,**试分析** l **的取值情况使得**

(1) b **可由** a_1,a_2,a_3 **线性表出，表示方式唯一；**

(2) b **可由** a_1,a_2,a_3 **线性表出，表示方式不唯一；**

(3) b **不能由** a_1,a_2,a_3 **线性表出.**

解：

$$(a_1,a_2,a_3,b)=\begin{pmatrix}1&l&-1&2\\2&-1&l&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&l&-1&2\\0&-1-2l&l+2&1\\0&10-l&-5&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & l & -1 & 2\\ 0 & -1-2l & l+2 & 1\\ 0 & 9-3l & l-3 & 0\end{pmatrix}$$

(1) 当 $l\neq 3$ **且** $l\neq -5$ **时，** $r(a_1,a_2,a_3)=r(a_1,a_2,a_3,b)=3$，$b$ **能由** a_1,a_2,a_3 **线性表示，且表示方式唯一.**

(2) 当 $l=3$ **时，** $r(a_1,a_2,a_3)=r(a_1,a_2,a_3,b)=2$，$b$ **可由** a_1,a_2,a_3 **线性表示，但表示方式不唯一.**

(3) 当 $l\neq 3$**，且** $\dfrac{-1-2l}{9-3l}=\dfrac{l+2}{l-3}$**，即** $l=-5$ **时，**

$r(a_1,a_2,a_3)=2, r(a_1,a_2,a_3,b)=3$，$b$ **不能由** a_1,a_2,a_3 **线性表示.**

八、设 $b_1=a_1+a_2+a_3, b_2=a_1+a_2+2a_3, b_3=a_1+2a_2+3a_3$，**如果** a_1,a_2,a_3 **线性无关，证明：** b_1,b_2,b_3 **也线性无关.**

证明：设 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$**,即**

$$x_1(a_1+a_2+a_3)+x_2(a_1+a_2+2a_3)+x_3(a_1+2a_2+3a_3)=0,$$

整理得

$$(x_1+x_2+x_3)a_1+(x_1+x_2+2x_3)a_2+(x_1+2x_2+3x_3)a_3=0.$$

因为 a_1,a_2,a_3 **线性无关，故** $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+2x_3=0\\ x_1+2x_2+3x_3=0\end{cases}$

又 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$，

所以 $x_1=x_2=x_3=0$**，即** b_1,b_2,b_3 **线性无关.**

九、用基础解系表示齐次线性方程组的全部解：

(1) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0\end{cases}.$

解：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{7}{8}\\\frac{5}{8}\\-\frac{5}{8}\\0\\1\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$.

解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

十、求方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4=3 \\ 3x_1+5x_2+x_3+7x_4=5 \end{cases}$ 的通解.

解：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

十一、已知方程组$\begin{cases} l x_1+x_2+x_3=l-3 \\ x_1+l x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+l x_3=-2 \end{cases}$，当 l 为何值时方程组

无解？当 l 为何值时方程组有解？并求解.

解：$l=-2$，方程组无解；$l\neq-2$ 且 $l\neq1$，方程组有唯一解；

$l=1$ 时，方程组有无穷多解。

$$X=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

专题四　矩阵的特征值及二次型

参考答案

一、向量的内积、长度及正交性

1、已知向量$a=(1,2,2,-1)^T,b=(1,1,-5,3)^T$**，（1）计算**$a,b$ **的内积；**

（2）将向量a,b **单位化.**

解：(1) $[a,b]=a^Tb=(1,2,2,-1)\begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix}=-10$;

(2) $\|a\|=\sqrt{1^2+2^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$，$\|b\|=6$，

$\dfrac{a}{\|a\|}=(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{2}{\sqrt{10}},\dfrac{2}{\sqrt{10}},\dfrac{-1}{\sqrt{10}})^T$，$\dfrac{b}{\|b\|}=(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6},-\dfrac{5}{6},\dfrac{1}{2})^T$.

2、已知3**维向量空间**R^3**的两个向量**$a_1=(-1,2,0)^T,a_2=(2,1,2)^T$**，求一个非零向量**$a_3$**，使**$a_1,a_2,a_3$**两两正交.**

解：记 $A=(a_1^T,a_2^T)=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix}$**，则可取**$a_3$ **为线性方程组** $AX=0$ **的非零解，**

对$\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$**，由**$\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&2\end{pmatrix}$

$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&5&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{5}\\0&1&\frac{2}{5}\end{pmatrix}$**得**$\begin{cases}x_1=-\dfrac{4}{5}x_3\\x_1=-\dfrac{2}{5}x_3\end{cases}$**，从而有基础解系**

$(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{2}{5},1)^T$**，取**$a_3=(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{2}{5},1)^T$ **即合要求.**

3、已知$a_1=(1,1,0,0)^T,a_2=(1,0,1,0)^T,a_3=(-1,0,0,1)^T$**，利用施密特法把这组向量规范正交化.**

解：先将向量组正交化，取$b_1=a_1=(1,1,0,0)^T$**，**

$$b_2=a_2-\frac{[a_2,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$b_3 = a_3 - \frac{[a_3, b_1]}{\|b_1\|^2} b_1 - \frac{[a_3, b_2]}{\|b_2\|^2} b_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)^T$，再将$b_1, b_2, b_3$单位化得，

$$g_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T，$$

$$g_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)^T，$$

$$g_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = (\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2})^T.$$

4、a，b为何值时，矩阵$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$为正交矩阵.

解：设$A = (a_1, a_2, a_3)$，若A为正交矩阵，则有

$$a_i^T a_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1,2,3)，$$

由$a_1^T a_1 = 1$，即$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + a^2 = 1$，得$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$；

由$a_2^T a_2 = 1$，即$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + b^2 = 1$，得$b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$；

由$a_1^T a_2 = 0$，即$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + ab = 0$，得$a, b$异号.

故所求的正交阵为

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}，A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

5、设a 为非零的列向量,E是n阶单位矩阵,令$A = E - \frac{2}{a^T a} a a^T$，证明$A$为对称的正交矩阵.

证明：因为$A^T = [E - \frac{2}{a^T a} a a^T]^T = E^T - \frac{2}{a^T a}(a a^T)^T$

$= E-\frac{2}{a^T a}a a^T = A$，所以 A 为对称矩阵；

又由于 $A^T A = AA = (E-\frac{2}{a^T a}a a^T)(E-\frac{2}{a^T a}a a^T) =$

$$E-\frac{2}{a^T a}a a^T-\frac{2}{a^T a}a a^T+\frac{4}{(a^T a)^2}(a a^T)(a a^T)$$

$$= E-\frac{2}{a^T a}a a^T-\frac{2}{a^T a}a a^T+\frac{4}{(a^T a)^2}a(a^T a)a^T,$$

$$= E-\frac{2}{a^T a}a a^T-\frac{2}{a^T a}a a^T+\frac{4}{(a^T a)}a a^T = E.$$

二、矩阵的特征值与特征向量

6、求下列矩阵的特征值以及特征向量.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

解：由

$$|A-lE| = \begin{vmatrix} 3-l & 10 \\ 2 & 2-l \end{vmatrix} = l^2-5l-14 = (l-7)(l+2) = 0,$$

得 $l_1 = -2,\ l_2 = 7.$

对特征值 $l_1 = -2$，解方程 $(A+2E)X = 0$，因

$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

得对应的特征向量 $a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$；

对特征值 $l_2 = 7$，解方程 $(A-7E)X = 0$，

因 $\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，得对应的特征向量 $a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

解：由 $|A-lE| = \begin{vmatrix} 2-l & 2 & -2 \\ 2 & 5-l & -4 \\ -2 & -4 & 5-l \end{vmatrix} = -(l-1)^2(l-10) = 0$，

所以 $l_1 = l_2 = 1,\ l_3 = 10$.

对特征值 $l_1 = l_2 = 1$，解方程 $(A-E)X = 0$，因

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得对应的特征向量$a_1=(-2,1,0)^T, a_2=(2,0,1)^T$；

对特征值 $l_3=10$，解方程$(A-10E)X=0$，即

$$\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得对应的特征向量$a_3=(-1,-2,2)^T$.

7、已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & x & 2\\ 5 & y & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$的特征值为-1（三重），求$x, y$的值，并求矩阵$A$的特征向量.

解：根据特征值的性质$\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}l_i$，即$2+y-2=-3$，得

$y=-3$.

又根据$\prod_{i=1}^{3}l_i=|A|$，即$\begin{vmatrix}2 & x & 2\\ 5 & y & 3\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-1$，得$x=-1$.

对于特征值 $l=-1$，解方程$(A+E)X=0$，因

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，得对应的特征向量$a=(1,1,-1)^T$.

8、已知矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ a & -2 & 2\\ 3 & b & -1\end{pmatrix}$的一个特征向量为$a=(1,-2,3)^T$，求$a,b$的值及特征向量$a$对应的特征值.

解：设a对应的特征值为l，根据特征值和特征向量的定义，有

$(A-lE)a=0$，即$\begin{pmatrix}3-l & 2 & -1\\ a & -2-l & 2\\ 3 & b & -1-l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}=0$，

于是，得到以a,b,l为未知数的线性方程组：

$\begin{cases}-l-4=0\\ a+2l+10=0\\ 2b+3l=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}l=-4\\ a=2\\ b=6\end{cases}$

9、若n阶方阵A满足$A^2=A$，则称A是幂等矩阵. 证明幂等矩阵的特征值只能是0或1.

证明：设 l 为 A 的特征值，对应的特征向量为a，于是有

$A^2a=A(Aa)=A(l a)=l(Aa)=l^2a$，又$A^2a=Aa=l a$，

所以$l^2a=l a$，从而$(l^2-l)a=0$，由于特征向量$a\neq 0$，因此

$l^2-l=0$，得$l=1$或$l=0$.

10、设n阶方阵A满足$A^2-2A-3E=0$， 证明矩阵A的特征值只能是-1或3.

证明：设 l 为 A 的特征值，则 $j(l)=l^2-2l-3$ 是矩阵

$A^2-2A-3E$的特征值,再由$A^2-2A-3E=0$及零矩阵的特征值

只有0，故$j(l)=l^2-2l-3=0$，得$l=-1$或$l=3$.

11、设A为n阶正交矩阵（即$A^TA=E$），且$|A|=-1$，证明$l=-1$是矩阵A的特征值.

证明：由特征值的定义，$l=-1$是矩阵A的特征值$\Leftrightarrow|A+E|=0$.

而

$|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|$ $=|A||E+A^T|$

$=|A||(E+A)^T|$

$=|A||(E+A)|=-|E+A|$，所以$2|(E+A)|=0$，从而

$|A+E|=0$，$l=-1$是矩阵A的特征值.

12、设A,E分别是3阶方阵和单位矩阵，且满足$\left|A-E\right|=0$，

$\left|A+E\right|=0$以及$\left|A+2E\right|=0$，求行列式$\left|A^2+A+E\right|$的值.

解：由题知A的三个特征值为$l_1=1,\ l_2=-1,\ l_3=-2$，令

$j(l)=l^2+l+1$，则$j(1)=3, j(-1)=1, j(-2)=3$是矩阵

A^2+A+E的全部特征值，由特征值性质知

$\left|A^2+A+E\right|=j(1)j(-1)j(-2)=9$.

三、相似矩阵与矩阵的对角化

13、已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$与$\Lambda=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$相似，求

x,y的值.

解：由于矩阵 A 与对角阵 Λ 相似，所以矩阵 A 的特征值为 $l_1=5,\ l_2=y,\ l_3=-4$，又由特征值的性质 $\sum_{i=1}^{3} a_{ii}=\sum_{i=1}^{3} l_i$，有

$1+x+1=5+y-4$，得 $x=y-1$.

再由矩阵 A 与对角阵 Λ 相似，有 $|A|=|\Lambda|$，即 $-15x-40=-20y$，

所以 $x=4, y=5$.

14、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ x & 1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$ 能相似对角化，求 x 的值.

解：先求矩阵的特征值：

$$|A-lE|=\begin{vmatrix}2-l & 0 & 1\\ x & 1-l & 3\\ 4 & 0 & 5-l\end{vmatrix}=(1-l)\begin{vmatrix}2-l & 1\\ 4 & 5-l\end{vmatrix}$$

$=(1-l)^2(6-l)$，所以 $l_1=l_2=1, l_3=6$.

矩阵能相似对角化的充要条件为矩阵 A 对应于二重特征值 $l_1=l_2=1$ 有 2 个线性无关的特征向量，即方程 $(A-E)X=0$ 有 2 个线性无关的解，亦即系数矩阵 $A-E$ 的秩为 1. 而

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ x & 0 & 3\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3-x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，显然当 $x=3$ 时，

$R(A-E)=1$，此时矩阵可以对角化.

15、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求 A^{97}.

解：(1) 求矩阵 A 的特征值：

$$|A-lE|=\begin{pmatrix}1-l & 0 & 1\\ 0 & 2-l & 0\\ 0 & 0 & 3-l\end{pmatrix}=(1-l)(2-l)(3-l)$$

所以 A 的特征值为 $l_1=1, l_2=2, l_3=3$，三个特征值互不相同，故 A 可以对角化.

(2) 对特征值 $l_1=1$，解方程 $(A-E)X=0$，因

$$A-E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，得特征向量

$x_1=(1,0,0)^T$.

对特征值 $l_2=2$，解方程 $(A-2E)X=0$，因

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得特征向量

$x_2=(0,1,0)^T$.

对特征值 $l_3=3$，解方程 $(A-3E)X=0$，因

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得特征向量

$x_1=(1,0,2)^T$.

(3) 令 $P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，有

$P^{-1}AP=\Lambda=diag(1,2,3)$，于是 $A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^{97}=P\Lambda^{97}P^{-1}$.

求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，得

$$A^{97}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{97}&0\\0&0&3^{97}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&\frac{3^{97}-1}{2}\\0&2^{97}&0\\0&0&3^{97}\end{pmatrix}$$

16、设 A 为 n 阶实方阵，证明：若 $A\neq 0$，但 $A^k=0$（其中 k 为某个正整数），则 A 不可能相似于对角阵.

证明：用反证法. 假定 A 与对角阵相似，即存在可逆阵 P，使

$P^{-1}AP=diag(l_1,l_2,\cdots,l_n)$，则

$$P^{-1}A^kP=(P^{-1}AP)^k=diag(l_1^k,l_2^k,\cdots,l_n^k)$$

因 $A^k=0$，所以 $P^{-1}A^kP=0$，得 $l_i=0,(1\le i\le n)$，从而 $P^{-1}AP=0$，得 $A=0$ 与条件矛盾，故 A 不可能相似于对角阵.

四、实对称矩阵的对角化

17、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵.

解：$|A-lE|=\begin{vmatrix}2-l&0&0\\0&3-l&2\\0&2&3-l\end{vmatrix}=(2-l)(5-l)(1-l)$，

得矩阵 A 的特征值为 $l_1=1,\ l_2=2,\ l_3=5$.

对特征值 $l_1=1$，解方程 $(A-E)X=0$，因

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得基础解系

$x_1=(0,-1,1)^T$.

对特征值 $l_2=2$，解方程 $(A-2E)X=0$，因

$$A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得基础解系

$x_2=(1,0,0)^T$.

对特征值 $l_3=5$，解方程 $(A-5E)X=0$，因

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得基础解系

$x_3=(0,1,1)^T$.

由于 x_1,x_2,x_3 是属于矩阵 A 的三个不同特征值的特征向量，故它们必两两正交，将它们单位化得 $p_1=\dfrac{x_1}{\|x_1\|}=(0,-\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2})^T$，

$p_2=\dfrac{x_2}{\|x_2\|}=(1,0,0)^T$，$p_3=\dfrac{x_3}{\|x_3\|}=(0,\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2})^T$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$**，则** P **为正交矩阵，且**

有 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

18、**设矩阵** $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$**，求正交矩阵** P **，使得** $P^{-1}AP=\Lambda$ **为对角阵**.

解：因为 $|A-lE|=\begin{vmatrix} 2-l & 2 & -2 \\ 2 & 5-l & -4 \\ -2 & -4 & 5-l \end{vmatrix}=-(l-1)^2(l-10)$ **，**

得矩阵 A **的特征值为** $l_1=l_2=1,\ l_3=10$.

对特征值 $l_1=l_2=1$**，解方程** $(A-E)X=0$**，因**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**，**

得基础解系 $a_1=(-2,1,0)^T, a_2=(2,0,1)^T$.

将 a_1,a_2 **正交化：取** $h_1=a_1, h_2=a_2-\frac{[a_2,h_1]}{\|h_1\|^2}h_1$

$$=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{4}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$**，再将** h_1,h_2 **单位化，得**

$p_1=(\frac{-2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0)^T, p_2=(\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3})^T$

对特征值 $l_3=10$**，解方程** $(A-10E)X=0$**，因**

$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**，得基础解系** $a_3=(-1,-2,2)^T$**，单**

位化得 $p_3=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$，

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,则 P 为正交矩阵,

且

有 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

19、设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 1，2，3，矩阵 A 对应于特征值 1，2 的特征向量分别是 $a_1=(-1,-1,1)^T$, $a_2=(1,-2,-1)^T$.

(1) 求 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量；

(2) 求矩阵 A .

解：(1) 设 A 对应于 3 的特征向量为 $a_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，由于 A 是实对称矩阵，于是有 $[a_1,a_3]=[a_2,a_3]=0$，即 $-x_1-x_2+x_3=0$，

$x_1-2x_2-x_3=0$，解方程并取其中一个非零解 $a_3=(1,0,1)^T$，所以 A 的属于特征值 3 的一个特征向量为 $a_3=(1,0,1)^T$.

(2) 因矩阵 A 对称，故一定存在正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=P^TAP=diag(1,2,3)$，取

$$p_1=\frac{a_1}{\|a_1\|}=(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T,$$

$$p_2=\frac{a_2}{\|a_2\|}=(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6})^T,$$

$p_3=\frac{a_3}{\|a_3\|}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$，令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，则 P 为正交矩阵，且 $P^{-1}AP=P^TAP=diag(1,2,3)$，

$$A=Pdiag(1,2,3)P^{-1}=Pdiag(1,2,3)P^T$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}.$$

20、设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $l_1=-1, l_2=l_3=1$，与特征值 $l_1=-1$ 对应的特征向量为 $a_1=(0,1,1)^T$，求矩阵 A.

解：(1) 设 A 对应于特征值 $l_2=l_3=1$ 的特征向量为 a_2,a_3，由实对称矩阵特征向量的性质知 $[a_1,a_2]=[a_1,a_3]=0$，可取 a_2,a_3 为方程 $a_1^TX=0$ 即 $x_2+x_3=0$ 的基础解系，得 $a_2=(1,0,0)^T, a_3=(0,-1,1)^T$，显然 a_2,a_3 正交.

(2) 将 a_1,a_2,a_3 单位化，得 $p_1=\dfrac{a_1}{\|a_1\|}=(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})^T$,

$p_2=\dfrac{a_2}{\|a_2\|}=(1,0,0)^T$，

$p_3=\dfrac{a_3}{\|a_3\|}=(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})^T$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，$P$ 为正交阵，并有

$P^{-1}AP=P^TAP=diag(-1,1,1)$，于是

$$A=Pdiag(-1,1,1)P^{-1}=Pdiag(-1,1,1)\,P^T==\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

***五、二次型**

21、用矩阵记号表示下列二次型：

(1) $f=2x^2+y^2-4xy-4yz$

(2) $f=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_4^{\ 2}+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+4x_3x_4$

解：(1) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(2) $f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&0&2\\-1&0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

22、**写出二次型** $f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ **的矩阵.**

解： $f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1^2+6x_1x_2+3x_2^2$

$=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&3\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，**故二次型** $f(x_1,x_2)$ **的矩阵是** $\begin{pmatrix}1&3\\3&3\end{pmatrix}$.

23、**已知二次型** $f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ **的秩为** 2，**求** c **的值.**

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$，**二次型** f **的秩为** 2，**故**

矩阵 A **的秩也为** 2，**从而** $|A|=\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{vmatrix}=0\Rightarrow c=3$.

24、**求一个正交变换，将二次型** $f=2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+3x_3^2$ **化为标准形.**

解：二次型 f **的矩阵为** $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，**它的特征多项式为**

$|A-lE|=\begin{pmatrix}2-l&1&0\\1&2-l&0\\0&0&3-l\end{pmatrix}=(1-l)(3-l)^2$，**所以** A **的特征值为** $l_1=1,\ l_2=l_3=3$.

对特征值 $l_1=1$，**解方程** $(A-E)X=0$，**因**

$A-E=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，**得特征向量** $x_1=(-1,1,0)^T$.

对特征值 $l_2=l_3=3$，**解方程** $(A-3E)X=0$，**因**

$A-3E=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，**得特征向量**

$x_2=(1,1,0)^T$，$x_3=(0,0,1)^T$.

显然x_1,x_2,x_3两两正交，将它们单位化得

$$p_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T,$$

$$p_2=\frac{x_2}{\|x_2\|}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T,\quad p_3=\frac{x_3}{\|x_3\|}=(0,0,1)^T.$$

令$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 P 为正交矩阵，再

作正交变换$x=Py$，即$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，便把

f化为标准形$f=y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$.

25、用配方法将下列二次型化为标准形，并写出所用的变换矩阵.

(1)　$f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

解：(1)　$f=x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$

$=(x_1-2x_2)^2-4x_2^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$

$=(x_1-2x_2)^2-2x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$

$=(x_1-2x_2)^2-2(x_2+x_3)^2+5x_3^2$

令$\begin{cases}y_1=x_1-2x_2\\ y_2=x_2+x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=y_1+2y_2-2y_3\\ x_2=y_2-y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$　就把 f 化为标准形

$f=y_1^2-2y_2^2+5y_3^2$.

所用变换的矩阵为$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(2)　$f=2x_1x_3-4x_2x_3$

解：在 f 中不含平方项.由于含有x_1x_3乘积项，故令$\begin{cases}x_1=y_1+y_3\\ x_2=y_2\\ x_3=y_1-y_3\end{cases}$，

代入可得 $f=2y_1^2-2y_3^2-4y_1y_2+4y_2y_3$，

再配方，得 $f=2(y_1-y_2)^2-2(y_2-y_3)^2$，

令 $\begin{cases} z_1=\sqrt{2}(y_1-y_2) \\ z_2=\sqrt{2}(y_2-y_3) \\ z_3=y_3 \end{cases}$，**即** $\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1+\frac{1}{\sqrt{2}}z_2+z_3 \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2+z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases}$，**就把** f **化为**

规范形 $f=z_1^2-z_2^2$，**所用变换的矩阵为**

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

26、**当** l **取何值时，二次型**

$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2lx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ **为正定二次型**.

解：二次型 f **的矩阵为** $A=\begin{pmatrix} 1 & l & -1 \\ l & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，A **的各阶顺序主子式为**

$a_{11}=1>0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & l \\ l & 1 \end{vmatrix}=1-l^2>0$，

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & l & -1 \\ l & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-5l^2-4l>0$，**所以当** $-\frac{4}{5}<l<0$ **时**，A **的各阶顺序主子式都大于** 0，**二次型正定**.

27、**判定二次型** $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ **的正定性**.

解： f **的矩阵为** $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$，A **的** 1 **阶顺序主子式为**-2<0；

2 **阶顺序主子式为** $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=11>0$；3 **阶顺序主子式，即**

$|A|=-38<0$，**由赫尔维茨定理知** f **为负定**.

专题四　矩阵的特征值及二次型

自测题 参考答案

一、选择题

1、**三阶矩阵** A **的特征值为** 1，2，3，**则下列矩阵可逆的是**（ B ）.

(A) $A-E$　　(B) $A+E$　　(C) $2E-A$　　(D) $A-3E$

解析：l 为矩阵 A 的特征值$\Leftrightarrow |A-lE|=0$.

2、设 n 阶方阵 A 与 B 相似，则（ D ）

(A) $A-lE=B-lE$ (B) A 与 B 有相同的特征值与特征向量 (C) A 与 B 都相似于一个对角阵

(D) 对任意常数 t，$A-tE$ 与 $B-tE$ 相似

提示：由 $P^{-1}AP=B\Rightarrow P^{-1}(A-tE)P=B-tE$.

3、设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2=I$，则（ C ）

(A) $|A|=1$ (B) A 的特征值都是 1

(C) A 的秩为 n (D) A 一定是对称阵

提示：由 $A^2=I\Rightarrow |A^2|=|A|^2=1\neq 0$，故 A 可逆，从而 A 的秩为 n.

*4、矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的关系是（ C ）.

(A) 既合同又相似 (B) 相似但不合同

(C) 合同但不相似 (D) 既不合同又不相似

提示：矩阵 A 的特征值为 $l_1=1,\ l_2=l_3=4$.

*5、设 A 为 n 阶对称矩阵，则 A 是正定矩阵的充分必要条件是（ D ）

(A) 二次型 x^TAx 的负惯性指数为零 (B) A 没有负特征值

(C) 存在 n 阶矩阵 C，使 $A=C^TC$ (D) A 与单位矩阵合同

二、填空题

1、设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $\left|A^*+2E\right|=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

提示：由特征值的性质，得 $|A|=1\times(-1)\times 2=-2$，所以

$A^*=|A|A^{-1}=-2A^{-1}$，$A^*+2E=-2A^{-1}+2E$ 的特征值为 $0,4,1$，所以 $\left|A^*+2E\right|=0$.

2、设 x_1,x_2,x_3 分别是 $\begin{vmatrix}1-x&1&1\\-3&-1-x&1\\9&1&1-x\end{vmatrix}=0$ 的根，则 $x_1x_2x_3$ 的值为 $\underline{16}$.

提示：由题意知 x_1,x_2,x_3 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-3&-1&1\\9&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值，由特征值的性质有 $x_1x_2x_3=|A|=16$.

3、设 $l_1=6,\ l_2=2$ 是实对称矩阵 A 的特征值，且向量

$a=(-2,t+1,1)^T, b=(t,1,-2)^T$ 为分别属于特征值 $6,2$ 的特征向量，则 $t=$ __-1__.

提示：由对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交可得结果.

*4、如果二次型 $f=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是 $\underline{(2,+\infty)}$.

提示：由二次型 f 的矩阵的三个顺序主子式均大于零可得.

*5、如果实矩阵 A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 合同，则二次型 x^TAx 的规范形 $y^TAy=\underline{y_1^2+y_2^2-y_3^2}$.

提示：$|B-lE|=(3-l)(l-1)(l+1)$，B 的特征值为-1，1，3，所以二次型 x^TAx 的规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

三、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，

(1) 求 x,y；(2) 求一个可逆矩阵，使 $P^{-1}AP=B$.

解：(1) 由于矩阵 A 与对角阵 B 相似，所以矩阵 A 的特征值为 $l_1=2,\ l_2=y,\ l_3=-1$，又由特征值的性质 $\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}l_i$，有

$2+0+x=2+y-1$，得 $x=y-1$.

再由矩阵 A 与对角阵 B 相似，有 $|A|=|B|$，即 $-2=-2y$，

所以 $x=0, y=1$.

(2) 由相似的条件，知矩阵 A 的特征值为 $l_1=2, l_2=1, l_3=-1$.

对特征值 $l_1=2$，解方程 $(A-2E)X=0$，因

$$A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得特征向量

$x_1=(1,0,0)^T$.

对特征值 $l_2=1$，解方程 $(A-E)X=0$，因

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得特征向量

$x_2=(0,1,1)^T$.

对特征值 $l_3=-1$**，解方程**$(A+E)X=0$**，因**

$$A+E=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ **，得特征向量**

$x_3=(0,-1,1)^T$.

令$P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$**，则有**$P^{-1}AP=B$.

*** 四、求一个正交变换把二次曲面方程** $3x^2+3z^2+4xy+8xz+4yz=0$**化成标准方程.**

解：记二次曲面方程为 $f=0$ **，则** f **为二次型，它的矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$$**，由**

$$|A-lE|=\begin{vmatrix}3-l&2&4\\2&-l&2\\4&2&3-l\end{vmatrix}=(l+1)^2(l-8)$$**，得矩阵** A **的特征值为** $l_1=l_2=-1,l_3=8$.

对特征值 $l_1=l_2=-1$**，解方程**$(A+E)X=0$**，因**

$$A+E=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$**，得特征向量**

$x_1=(-1,2,0)^T,x_2=(-1,0,1)^T$ **；**

对特征值 $l_3=8$**，解方程**$(A-8E)X=0$**，因**

$$A-8E=\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$**，得特征向量**

$x_3=(2,1,2)^T$.

将x_1,x_2 **正交化，单位化得**

$$p_1=(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0)^T,p_2=(\frac{-4}{\sqrt{45}},\frac{-2}{\sqrt{45}},\frac{5}{\sqrt{45}})^T$$ **，**

将x_3单位化得 $p_1=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$，令$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5} & \frac{-4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，

则 P 为正交矩阵，并且正交变换$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5} & \frac{-4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$即为所求，在此变换下，题中二次曲面的方程化为标准方程$-u^2-v^2+8w^2=0$（它是圆锥面的方程）.

五、已知$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\quad(n=1,2,\cdots),\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$，求$x_{10}+y_{10}$.

解：由递推关系$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$，有$\begin{pmatrix}x_{10}\\y_{10}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_9\\y_9\end{pmatrix}$

$=\cdots=A^{10}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

求出矩阵 A 的特征值为$l_1=-1,l_2=4$.

对应于特征值$l_1=-1$的特征向量为$x_1=(-1,1)^T$；对应于特征值$l_1=4$的特征向量为$x_1=(2,3)^T$.

$P=(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}-1&2\\1&3\end{pmatrix}$，则$P$可逆，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}$，因此

$A=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}P^{-1}$，$A^{10}=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}^{10}P^{-1}=$

$\begin{pmatrix}-1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4^{10}\end{pmatrix}\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3+2\cdot4^{10} & -2+2\cdot4^{10}\\ -3+3\cdot4^{10} & 2+3\cdot4^{10}\end{pmatrix}$，

所以$\begin{pmatrix}x_{10}\\y_{10}\end{pmatrix}==A^{10}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3+2\cdot4^{10} & -2+2\cdot4^{10}\\ -3+3\cdot4^{10} & 2+3\cdot4^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1+4\cdot4^{10}\\ -1+6\cdot4^{10}\end{pmatrix}$

故$x_{10}+y_{10}=\frac{1}{5}(1+4\cdot4^{10}-1+6\cdot4^{10})=2\cdot4^{10}=2^{21}$，

六、设 l_1, l_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，$a_1,\cdots,a_r$ 是对应于特征值 l_1 的线性无关的特征向量，$b_1,\cdots,b_s$ 是对应于特征值 l_2 的线性无关的特征向量，证明向量组 $a_1,\cdots,a_r$, $b_1,\cdots,b_s$ 线性无关.

证明：由已知条件知 $Aa_i = l_1 a_i, i=1,\cdots,r$ **，** $Ab_j = l_2 b_j, j=1,\cdots,s$. **假设有**

$k_1 a_1 + \cdots + k_r a_r + l_1 b_1 + \cdots + l_s b_s = 0$ **，**　　(1)

将上式两边均左乘矩阵 A，得

$k_1 A a_1 + \cdots + k_r A a_r + l_1 A b_1 + \cdots + l_s A b_s = 0$ **，即**

$l_1(k_1 a_1 + \cdots + k_r a_r) + l_2(l_1 b_1 + \cdots + l_s b_s) = 0$

(2)

再将（1）式左右两边同乘 l_2，得

$l_2(k_1 a_1 + \cdots + k_r a_r) + l_2(l_1 b_1 + \cdots + l_s b_s) = 0$

（3）将（2）－(3)，得 $k_1 a_1 + \cdots + k_r a_r = 0$ **，由** $a_1,\cdots,a_r$ **线性无关知** $k_1 = \cdots = k_r = 0$ **，同理可证** $l_1 = \cdots = l_s = 0$ **，于是向量组** $a_1,\cdots,a_r$, $b_1,\cdots,b_s$ **线性无关.**

专题五　考研真题精选

参考答案

1. (4 **分**, 2006 **年**) **设矩阵** $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, E **为** 2 **阶单位矩阵**, **矩阵** B **满足** $BA=B+2E$，**则** $|B|=$ __2__.

2. (4 **分**, 2011 **年**) **设** A **为** 3 **阶矩阵**, **将** A **的第** 2 **列加到第一列得矩阵** B，**再交换** B **的第 2 行与第 3 行得单位矩阵**. **记** $P_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, **则** $A=$ (　D　).

(A) P_1P_2　　(B) $P_1^{-1}P_2$

(C) P_2P_1　　(D) $P_2P_1^{-1}$

3. (4 **分**, 2009 **年**) **设** A, B **均为** 2 **阶矩阵**, A^*, B^* **分别为** A, B **的**

伴随矩阵. **若** $|A|=2$, $|B|=3$, **则分块矩阵** $\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$ **的伴随矩阵为** (　B　).

(A) $\begin{pmatrix}0 & 3B^*\\ 2A^* & 0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}0 & 2B^*\\ 3A^* & 0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}0 & 3A^*\\ 2B^* & 0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0 & 2A^*\\ 3B^* & 0\end{pmatrix}$

4. (4 **分**, 2008 **年**) **设** A **为** n **阶非零矩阵**, E **为** n **阶单位矩阵**. **若** $A^3=0$, **则** (　C　).

(A) $E-A$ **不可逆**, $E+A$ **不可逆**

(B) $E-A$ **不可逆**, $E+A$ **可逆**

(C) $E-A$ **可逆**, $E+A$ **可逆**

(D) $E-A$ **可逆**, $E+A$ **不可逆**

5. (4 **分**, 2007 **年**) **矩阵** $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, **则** A^3 **的秩为** _1_.

6. (4 **分**, 2006 **年**) **设** $a_1,a_2,\cdots,a_s$ **均为** n **维列向量**, A **是** $m\times n$ **矩阵**, **下列选项正确的是**(　A　).

(A) **若** $a_1,a_2,\cdots,a_s$ **线性相关**, **则** $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ **线性相关**

(B) **若** $a_1,a_2,\cdots,a_s$ **线性相关**, **则** $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ **线性无关**

(C) **若** $a_1,a_2,\cdots,a_s$ **线性无关**, **则** $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ **线性相关**

(D) 若$a_1,a_2,\cdots,a_s$线性无关，则$Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$线性无关

7. (4 分, 2010 年) 设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，E为m阶单位矩阵. 若$AB=E$，则(A).

(A) 秩 $r(A)=m$，秩 $r(B)=m$

(B) 秩 $r(A)=m$，秩 $r(B)=n$

(C) 秩 $r(A)=n$，秩 $r(B)=m$

(D) 秩 $r(A)=n$，秩 $r(B)=n$

8. (4 分, 2007 年) 设向量组a_1,a_2,a_3线性无关，则下列向量组线性相关的是(A).

(A) a_1-a_2，a_2-a_3，a_3-a_1

(B) a_1+a_2，a_2+a_3，a_3+a_1

(C) a_1-2a_2，a_2-2a_3，a_3-2a_1

(D) a_1+2a_2，a_2+2a_3，a_3+2a_1

9. (11 分, 2011 年) 设向量组$a_1=(1,0,1)^{\mathrm T}$，$a_2=(0,1,1)^{\mathrm T}$，$a_3=(1,3,5)^{\mathrm T}$不能由向量组$b_1=(1,1,1)^{\mathrm T}$，$b_2=(1,2,3)^{\mathrm T}$，$b_3=(3,4,a)^{\mathrm T}$线性表示.

(I) 求a的值;

(II) 将b_1,b_2,b_3用a_1,a_2,a_3线性表示.

解: (I) 设$B=(b_1,b_2,b_3)$，$Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm T}$. 由于$a_1,a_2,a_3$不能由向量组$b_1,b_2,b_3$线性表示，故方程组$BY=a_i\,(i=1,2,3)$无解，从而
$$|b_1,b_2,b_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0,$$
于是$a=5$.

(II) 令$A=\left(a_1\quad a_2\quad a_3\ \vdots\ b_1\quad b_2\quad b_3\right)$. 对$A$施以初等行变换
$$A=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$
从而$b_1=2a_1+4a_2-a_3$，$b_2=a_1+2a_2$，

$b_3=5a_1+10a_2-2a_3$.

10. (10 分, 2008 年) 设a,b为 3 维列向量，矩阵$A=aa^{\mathrm T}+bb^{\mathrm T}$，其中$a^{\mathrm T},b^{\mathrm T}$分别是$a,b$的转置. 证明:

(I) $r(A)\le 2$; (II) 若a,b线性相关，则$r(A)<2$.

证明: (I) $r(A)=r(aa^{\mathrm T}+bb^{\mathrm T})$
$$\le r(aa^{\mathrm T})+r(bb^{\mathrm T})\le r(a)+r(b)\le 2.$$

(II) 由于a,b线性相关，不妨设$a=kb$. 于是
$$r(A)=r(aa^{\mathrm T}+bb^{\mathrm T})=r((1+k^2)bb^{\mathrm T})\le r(b)<2.$$

11. (4 分, 2011 年) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm T}$ 是方程组 $Ax=0$ 得一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为（ D ）.

(A) α_1,α_3　　(B) α_1,α_2

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

12. (11 分, 2010 年) 设 $A=\begin{pmatrix} l & 1 & 1 \\ 0 & l-1 & 0 \\ 1 & 1 & l \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解.

(I) 求 l,a；(II) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解 (I) 对矩阵 $(A \ \vdots \ b)$ 施以初等行变换

$$(A \ \vdots \ b)=\left(\begin{array}{ccc:c} l & 1 & 1 & a \\ 0 & l-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & l & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & l & 1 \\ 0 & l-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-l^2 & a-l+1 \end{array}\right)$$

因线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，所以 $r(\overline{A})=r(A)<3$，故 $l=-1$，$a=-2$.

(II) 当 $l=-1$，$a=-2$ 时，

$$(A \ \vdots \ b)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以方程组 $Ax=b$ 的通解为 $x=\frac{1}{2}(3,-1,0)^{\mathrm T}+k(1,0,1)^{\mathrm T}$

其中 k 为任意常数.

13. (11 分, 2009 年) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$，$x_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(I) 求满足 $Ax_2=x_1$，$A^2x_3=x_1$ 的所有向量 x_2，x_3；

(II) 对 (I) 中的任意向量 x_2，x_3，证明 x_1，x_2，x_3 线性无关.

解: (I) 对矩阵 $(A \ \vdots \ x_1)$ 施以初等行变换

$$(A \ \vdots \ x_1)=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

可求得 $x_2=\begin{pmatrix} -1/2+k/2 \\ 1/2-k/2 \\ k \end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

又 $A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，对矩阵 $\left(A^2\ \vdots\ x_1\right)$ 施以初等行变换

$$\left(A^2\ \vdots\ x_1\right)=\begin{pmatrix}2&2&0&\vdots&-1\\-2&-2&0&\vdots&1\\4&4&0&\vdots&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&\vdots&-1/2\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$

可求得 $x_3=\begin{pmatrix}-a-1/2\\a\\b\end{pmatrix}$，其中 a,b 为任意常数.

(II) $$\left|x_1,x_2,x_3\right|=\begin{vmatrix}-1&-1/2+k/2&-1/2-a\\1&1/2-k/2&a\\-2&k&b\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0$$

所以知 x_1，x_2，x_3 线性无关.

14. (11 分, 2007 年) 设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

解：联立方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$

对增广矩阵施以初等行变换，有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1-a\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}=B$$

由方程组有解，得 $(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，所求公共解为 $x=k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

当 $a=2$ 时，所求公共解为 $x=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

15. (9 分, 2006 年) 已知非齐次线性方程组

$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$，有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$；

(II) 求 a,b 的值及方程组的通解.

解: (I) 设 x_1、x_2、x_3 是该线性方程组 3 个线性无关的解,

则x_1-x_2，x_1-x_3是对应齐次线性方程组$Ax=0$的两个线性无关的解，因而$4-r(A)\ge 2$，即$r(A)\le 2$.

又A有一个2阶子式$\begin{vmatrix}1 & 1\\4 & 3\end{vmatrix}\ne 0$，于是$r(A)\ge 2$．因此$r(A)=2$.

(II) 对增广矩阵$\overline{A}$施以初等行变换，有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\4 & 3 & 5 & -1 & -1\\a & 1 & 3 & b & 1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -4 & 2\\0 & 1 & -1 & 5 & -3\\0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a\end{pmatrix}=B$$

因$r(A)=2$，故$4-2a=0,4a+b-5=0$，即$a=2,b=-3$.

此时，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -4 & 2\\0 & 1 & -1 & 5 & -3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$可得方程组通解为

$x=(2,-3,0,0)^{\mathrm T}+k_1(-2,1,1,0)^{\mathrm T}+k_2(4,-5,0,1)^{\mathrm T}$，其中$k_1,k_2$为任意常数.

16. (4 分, 2010 年) 设$a_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm T}$，$a_2=(1,1,0,2)^{\mathrm T}$，

$a_3=(2,1,1,a)^{\mathrm T}$．若由$a_1,a_2,a_3$生成的向量空间的维数为 2,

则$a=$____6____.

17. (4 分, 2009 年) 设a_1,a_2,a_3是 3 维向量空间R^3的一组基,

则由基$a_1,\frac{1}{2}a_2,\frac{1}{3}a_3$到基$a_1+a_2$，$a_2+a_3$，$a_3+a_1$的过渡矩阵为(A　　).

(A) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 2 & 0\\0 & 3 & 3\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 3\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1/2 & 1/4 & -1/6\\-1/2 & 1/4 & 1/6\\1/2 & -1/4 & 1/6\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2\\1/4 & 1/4 & -1/4\\-1/6 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$

18. (4 分, 2009 年) 若 3 维列向量a,b满足$a^{\mathrm T}b=2$，

其中$a^{\mathrm T}$为a的转置，则矩阵$ba^{\mathrm T}$的非零特征值为___2___.

19. (4 分, 2008 年) 设A为 2 阶矩阵，a_1,a_2为线性无关的 2 维列向量，$Aa_1=0$，$Aa_2=2a_1+a_2$．则A的非零特征值为_1_.

20. (4 分, 2007 年) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

则A与B(　B　　).

(A) 合同，且相似　　(B) 合同，但不相似

(C) 不合同，但相似　　(D) 既不合同，也不相似

21. (4 分, 2010 年) 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+A=0$.

若 A 的秩为 3，则 A 相似于(D).

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

22. (11 分, 2011 年) 设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且

$$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A.

解: (I) 由于 A 的秩为 2，故 0 是 A 的一个特征值. 又由题设可得

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以，-1 是 A 的一个特征值，且属于 -1 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}^T$，$k_1$ 为任意非零常数；1 也是 A 的一个特征值，且属于 1 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}^T$，$k_2$ 为任意非零常数.

设 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 是 A 的属于 0 的特征向量，由于 A 为实对称矩阵，则 $\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，$\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，即 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$，于是属于 0 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}^T$，$k_3$ 为任意非零常数.

(II) 令 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

于是 $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

23. (11 分, 2007 年) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $l_1=1$， $l_2=2$， $l_3=-2$，且 $a_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于 l_1 的一个特征向量.

记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 a_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B.

解: (I) 由 $Aa_1=l_1a_1$ 知

$$Ba_1=(A^5-4A^3+E)a_1=(l_1^5-4l_1^3+1)a_1=-2a_1$$

故 a_1 是矩阵 B 的特征向量.

由 A 的特征值得 B 的特征值为 $l_i^5-4l_i^3+1$,

即 B 的全部特征值为 $-2,1,1$.

由 $Ba_1=-2a_1$ 知 B 的属于特征值 -2 的全部特征向量为 k_1a_1,其中 k_1 是不为零的任意常数. 因为 A 是实对称矩阵, 所以 B 也是实对称矩阵.

设 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 B 的属于特征值 1 的任一特征向量. 因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交，所以 $(x_1,x_2,x_3)a_1=0$，即 $x_1-x_2+x_3=0$. 解得该方程组的基础解系为 $a_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $a_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，故 B 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2a_2+k_3a_3$，其中 k_2,k_3 是不全为零的任意常数.

(II) 令 $P=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,

又因为 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

故 $B=P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

24. (9 分，2006 年) 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $a_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$， $a_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$.

解: (I) 由于矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 所以

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

又因为 $Aa_1=0$，$Aa_2=0$，即 $Aa_1=0a_1$，$Aa_2=0a_2$，

故 $l_1=l_2=0$ 是 A 的二重特征值，a_1,a_2 为 A 的属于特征值 0 的两个线性无关的特征向量，属于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1a_1+k_2a_2$ （k_1,k_2 不全为零）;

$l_3=3$ 是 A 的一个特征值，$a_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$ 为 A 的属于特征值 3 的特征向量，属于特征值 3 的全体特征向量为 k_3a_3 ($k_3\neq 0$).

(II) $Q=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6 & -1/\sqrt2 & 1/\sqrt3\\ 2/\sqrt6 & 0 & 1/\sqrt3\\ -1/\sqrt6 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt3\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.

25. (4 分, 2011 年) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$__1__.

26. (11 分, 2010 年) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm T}Ax$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 Q 的第 3 列为 $(\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2})^{\mathrm T}$.

(I) 求矩阵 A;

(II) 证明 $A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

解: (I) 因为二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm T}Ax$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，故 A 的特征值为 1, 1, 0，且由 Q 的第 3 列为 $(\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2})^{\mathrm T}$ 知 $(1,0,1)^{\mathrm T}$ 为 A 的属于特征值 0 的特征向量.

设 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}$ 为 A 的属于特征值 1 的特征向量，因为 A 是实对称矩阵，故 $(x_1,x_2,x_3)(1,0,1)^{\mathrm T}=0$，即 $x_1+x_3=0$．取 $(\frac{\sqrt2}{2},0,-\frac{\sqrt2}{2})^{\mathrm T}$，$(0,1,0)^{\mathrm T}$ 为 A 的属于特征值 1 的两个正交的单位特征向量.

令 $Q=\begin{pmatrix}\sqrt2/2 & 0 & \sqrt2/2\\ 0 & 1 & 0\\ -\sqrt2/2 & 0 & \sqrt2/2\end{pmatrix}$，

则有 $Q^{\mathrm T}AQ=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，故 $A=\frac12\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(II) 由 (I) 知 A 的特征值为 1, 1, 0, 于是 $A+E$ 的特征值为 2, 2, 1, 又 $A+E$ 为实对称矩阵, 故 $A+E$ 为正定矩阵.

27. (11 分, 2009 年) 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

解: (I) 二次型 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|lE-A|=\begin{vmatrix} l-a & 0 & 1 \\ 0 & l-a & 1 \\ -1 & 1 & l-a+1 \end{vmatrix}$$

$$=(l-a)(l-(a+1))(l-(a-2))$$

所以二次型 f 的矩阵的所有特征值为

$l_1=a, l_2=a+1, l_3=a-2$.

(II)由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 所以 A 的特征值有 2 个为正数, 1 个为零. 又 $a-2<a<a+1$, 故 $a=2$.

28. (4 分, 2013 年)设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则（ B ）

（A） 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B） 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C） 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D） 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

解析: 由 $AB=C$，可知 C 的列向量可以由 A 的列向量组线性表示，又因为 B 可逆，则 $A=CB^{-1}$，从而 A 的列向量也可以由 C 的列向量组线性表示，所以两者等价。

29. (4 分, 2013 年)矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（ B ）

（A） $a=0,b=2$ （B） $a=0,b$ 为任意常数

（C） $a=2,b=0$ （D） $a=2,b$ 为任意常数

解析: A 和 B 相似.则 A 和 B 的特征值相同.

∴A 和 B 的特征值为 $\lambda_1=0$. $\lambda_2=b$. $\lambda_3=2$.

∴$|A-2E|=\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ a & b-2 & a \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix}=4a^2$ ∴$a=0$

且 $R(A)=R(B)$ $A\to\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

当 $a=0$ 时，$\forall b\in R$，有 $R(A)=R(B)$.

反之对于 $\forall b\in R$、$a=0$,有A和B相似.

30. (4 分, 2013 年)设 A=(a_{ij})是 3 阶非零矩阵，$|A|$为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|A|$ ＝__-1___.

解析: $\because a_{ij}+A_{ij}=0,\therefore A_{ij}=-a_{ij}$，

$\therefore A^*=-A^T\Rightarrow AA^*=-AA^T=|A|E$

取行列式得：　$-|A|^2=|A|^3\Rightarrow |A|=0$或$|A|=-1$

若$|A|=0$,$\Rightarrow -AA^T=0,\Rightarrow A=0$(矛盾)$\therefore |A|=-1$

31. (11 分, 2013 年)设 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$,当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$,并求所有矩阵 C。

解：令$C=\begin{pmatrix}x_1&x_3\\x_2&x_4\end{pmatrix}$,则

$$AC=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_3\\x_2&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{pmatrix},$$

同理$CA=\begin{pmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{pmatrix}$,

则 $AC-CA=\begin{pmatrix}-x_2+ax_3&-ax_1+x_2+ax_4\\x_1-x_3-x_4&x_2-ax_3\end{pmatrix}$,

则由 $AC-CA=B$ 得

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$$

此为 4 元非齐次线性方程组，欲使 C 存在，此线性方程组必须有解，于是

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\0&1&-a&0&1+a\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&1&-a&0&1+a\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{pmatrix}$$

所以，当 $a=-1,b=0$ 时，线性方程组有解，即存在 C，使 $AC-CA=B$.

又 $\bar{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,

$$\therefore X=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+c_2+1\\-c_1\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$\therefore C=\begin{pmatrix}c_1+c_2+1 & -c_1\\ c_1 & c_2\end{pmatrix},$$ **（其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数）**.

32.（11 **分**，2013 **年）设二次型**

$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，

记 $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，**证明二次型** f **对应的矩阵为** $2aa^T+bb^T$；**若** a,b **正交且均为单位向量，证明** f **在正交变换下的标准形为** $2y_1^2+y_2^2$。

证明：

$$(1)\ f=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=X^T(2aa^T)X+X^T(bb^T)X=X^T(2aa^T+bb^T)X$$

故 f **的矩阵 A=**$2aa^T+bb^T$

$(2)\because Aa=(2aa^T+bb^T)a=2a|a|^2+bb^Ta=2a$

$\therefore a$ **为** A **的对应于** $l_1=2$ **的特征向量**

又 $Ab=(2aa^T+bb^T)b=2aa^T\cdot b+b\cdot|b|^2=b$

b **为** A **的对应于** $l_2=1$ **的特征向量**

$\because r(A)\le r(2aa^T)+r(bb^T)=r(a)+r(b)=2<3$

$\therefore l_3=0$

故 f **在正交变换下的标准型为** $2y_1^2+y_2^2$.

33.（4 **分**，2014 **年）行列式** $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}$ **等于（** B **）**

（A）$(ad-bc)^2$　　（B）$-(ad-bc)^2$

（C）$a^2d^2-b^2c^2$　　（D）$-a^2d^2+b^2c^2$

解析：

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&0&b\\0&d&0\\c&0&d\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a&0&b\\0&c&0\\c&0&d\end{vmatrix}$$

$$=-ad\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)=-(ad-bc)^2$$

34.（4 分，2014 年）．设 a_1, a_2, a_3 是三维向量，则对任意的常数 k,l，向量 a_1+ka_3，a_2+la_3 线性无关是向量 a_1,a_2,a_3 线性无关的（ A ）

（A）必要而非充分条件
（B）充分而非必要条件
（C）充分必要条件
（D）　非充分非必要条件

解析：若向量 a_1, a_2, a_3 线性无关，则

（a_1+ka_3，a_2+la_3）

$$=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)K,$$

对任意的常数 k,l，矩阵 K 的秩都等于 2，所以向量 a_1+ka_3，a_2+la_3 一定线性无关．

而当 $a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 时，对任意的常数 k,l，向量 a_1+ka_3，a_2+la_3 线性无关，但 a_1,a_2,a_3 线性相关；故选择 A．

35. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围是 $\underline{[-2,2]}$．

解析：由配方法可知

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$$
$$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$$

由于负惯性指数为 1，故必须要求 $4-a^2\geq 0$，所以 a 的取值范围是 $[-2,2]$．

36.（11 分,2014 年）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵．

（1）　求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系；

（2）　求满足 $AB=E$ 的所有矩阵．

解：(1) 对系数矩阵 A 进行初等行变换如下：

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix},$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

得到方程组 $AX=0$ 同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=2x_4\\x_3=3x_4\end{cases}$$

得到 $AX=0$ 的一个基础解系 $x_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$.

（2）显然 B 矩阵是一个 4×3 矩阵，设 $B=\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\\x_4 & y_4 & z_4\end{pmatrix}$

对矩阵 (AE) 进行进行初等行变换如下：

$$(AE)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1\\0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1\\0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

由方程组可得矩阵 B 对应的三列分别为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix},$$

即满足 $AB=E$ 的所有矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}2-c_1 & 6-c_2 & -1-c_3\\-1+2c_1 & -3+2c_2 & 1+2c_3\\-1+3c_1 & -4+3c_2 & 1+3c_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

37.（11 分,2014 年）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & & \vdots\\1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\0 & \cdots & 0 & 2\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

证明：设 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$**，** $B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$**.**

分别求两个矩阵的特征值和特征向量如下：

$$\left|lE-A\right|=\begin{vmatrix}l-1&-1&\cdots&-1\\-1&l-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&l-1\end{vmatrix}=(l-n)l^{n-1}\text{，}$$

所以 A **的** n **个特征值为** $l_1=n,l_2=l_3=\cdots l_n=0$ **；**

而且 A **是实对称矩阵，所以一定可以对角化．且**

$$A\sim\begin{pmatrix}l&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}\text{；}$$

$$\left|lE-B\right|=\begin{vmatrix}l&0&\cdots&-1\\0&l&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&l-n\end{vmatrix}=(l-n)l^{n-1}$$

所以 B **的** n **个特征值也为** $l_1=n,l_2=l_3=\cdots l_n=0$ **；**

对于 $n-1$ **重特征值** $l=0$ **，由于矩阵** $(0E-B)=-B$ **的秩显然为** 1**，所以矩阵** B **对应** $n-1$ **重特征值** $l=0$ **的特征向量应该有** $n-1$ **个线性无关，进一步矩阵** B **存在** n **个线性无关的特征向量，即矩阵** B **一定可以对角化，且** $B\sim\begin{pmatrix}l&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$

从而可知 n **阶矩阵** $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ **与** $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ **相似．**