

专题一 行列式

一、行列式及其性质

1、利用对角线法则计算行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} ma & -b \\ nb & a \end{vmatrix}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix}.$$

$$(5) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

2、利用行列式的性质计算行列式 .

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 201 \\ -1 & 3 & 3 & 299 \\ -2 & 2 & 1 & 98 \\ 3 & 5 & 1 & 103 \end{vmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

班级

姓名

学号

$$(5) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$(6) \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & u & 0 & v \end{vmatrix}$$

$$(7) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$(8) \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

$$3、\text{解方程} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

4、证明：(1) 设 a, b, c 为互异实数，证明行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \text{ 为零的充要条件是 } a+b+c=0.$$

$$(2) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3 + y^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$5、\text{ 设 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}, \text{ 求 } A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14},$$

其中 A_{ij} 为行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式.

班级

姓名

学号

6、求行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 的第四行各元素的余子式之和.

二、 n 阶行列式

7、计算 n 阶行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \dots & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$*(3) D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

班级	姓名	学号										
*8、设行列式	$D =$	$\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$										
证明 $D_n = (n+1)a^n$.												
			*9、已知 m 阶行列式 $ A = a$, n 阶行列式 $ B = b$, 求 $D = \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix}$ 的值.									

10、利用范德蒙行列式计算行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 8 & 1 & 27 \end{vmatrix}$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n^2 & \dots & n^n \end{vmatrix}.$$

三、克莱默法则

11、如果齐次方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ 4x_1 + kx_2 = 0 \\ x_1 + \quad + kx_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解, k 应取什么值?

12、 I 为何值时, 齐次线性方程组
$$\begin{cases} Ix_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + Ix_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 只有零解.

13、问 l, m 取何值时，齐次线性方程组
$$\begin{cases} lx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2mx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解.

14、用克莱姆法则解下列线性方程组：

$$(1) \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}.$$

$$(2) \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}.$$

15、求三次多项式 $f(x)$,

使得 $f(-1) = 0, f(10) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16$.

专题一 行列式 自测题

一、选择题：

1、行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是 ().

(A) $k \neq -1$

(B) $k \neq 3$

(C) $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$

(D) $k \neq -1$ 或 $k \neq 3$

2、行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的充要条件是 ().

(A) $k = -2$

(B) $k = 3$

(C) $k = -2$ 且 $k = 3$

(D) $k = -21$ 或 $k = 3$

3、设四阶行列式 $|A| = 0$, 则 A 中 ().

(A) 必有一行元素全为零 ;

(B) 必有两行元素对应成比例 ;

(C) 必有一行元素可以表示为其余各行对应元素的线性关系.

(D) 对角线上元素全为零.

4、行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ 的值为 ().

(A) -72 ;

(B) -24 ;

(C) -36 ;

(D) -12 .

二、填空题

1、设行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$, 则

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2、设三阶行列式 $|-2A| = 2$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

3、若三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 - a_1 & 2b_2 - a_2 & 2b_3 - a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 6$,

则行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4、设 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -1$, 则 $a =$ _____.

5、若行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$,

则行列式 $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{12} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ _____.

6、设 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, 则

$A_{21} + 2A_{22} + 3A_{23} + 4A_{24} =$ _____.

三、计算四阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

四、计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & \dots & 2 \\ 1 & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

五、设 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix},$

求方程 $f(x) = 0$ 根的个数？

六、求方程 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ 的根.

七、如果齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, k 应取什么值?

*八、判定方程组
$$\begin{cases} (a^2 - 2)x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ -5x_1 + (a^2 + 3)x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + (a^2 + 2)x_3 = 0. \end{cases}$$
 是否只有零解.

九、用克莱姆法则解方程组
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}.$$

十、证明等式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (x_i - x_j) \sum_{i=1}^4 x_i$.

本章练习纠错与总结：

专题二 矩阵及其运算

一、矩阵及其运算

1、求解下列矩阵的乘积：

$$(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 3 \ 2) ;$$

$$(2) (2 \ 1 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} ;$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2、设 1×2 矩阵 $A = (-1, 2)$, 则计算 AA^T , $A^T A$.

3、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

计算 $3B, AB, AB^T, AB - AB^T$.

4、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & & & \\ & \mathbf{I}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$, 计算 A^k .

5、已知 $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $A = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$, 计算 A^n .

班级

姓名

学号

6、设 $\mathbf{a} = (2, 0, 1)$, 矩阵 $A = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$, n 为正整数 ,

计算矩阵 $E - A^n$ 的行列式.

7、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 分别计算 A^2, A^3, A^n (n 为正整数).

8、求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

9、求与 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换的全体二阶矩阵.

*10、已知： A 是对角元互不相等的 n 阶对角矩阵，

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \text{ 当 } i \neq j \text{ 时,}$$

$a_i \neq a_j (i, j = 1, 2, \dots, n)$. 证明：与 A 可交换的矩阵必是对角矩阵.

*11、证明以下命题：

- (1) 若 A 是主对角元全为零的上三角矩阵，
则 A^2 也是主对角元全为零的上三角矩阵；
- (2) 主对角元全为1的上三角矩阵的乘积，
仍是主对角元为1的上三角矩阵.

班级

姓名

学号

*12、证明： $(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T$.

13、对于任意的 n 阶矩阵 A , 证明：

(1) $A + A^T$ 是对称矩阵, $A - A^T$ 是反对称矩阵;

(2) A 可表示为对称矩阵和反对称矩阵之和.

14、设 A, B 为 n 方阵, 且 A 为对称矩阵, 证明 $B^T A B$ 是对称矩阵.

*15、设 A 为 n 阶反对称矩阵,

证明：对于任意的 n 维列向量 \mathbf{a} , $\mathbf{a}^T A \mathbf{a} = 0$.

*16、设 A, B 为 n 方阵，且 A 为对称矩阵， B 为反对称矩阵，

证明：(1) $AB + BA$ 是一个反对称矩阵；

(2) 对于任意的正整数 k ， A^k 为对称矩阵；

(3) 若 k 为偶数， B^k 为对称矩阵，若 k 为奇数， B^k 为反对称矩阵.

*17、设 A, B 都是对合矩阵 (即 $A^2 = I, B^2 = I$),

证明：乘积 AB 是对合矩阵的充分必要条件是 A, B 可交换.

*18、设 A, B 均为 n 阶称矩阵，且满足 $A^2 = A, B^2 = B$ 以及

$(A + B)^2 = A + B$ ，证明： AB 为零矩阵.

班级

姓名

学号

*19、 A 是一个 n 阶矩阵, 证明: $A = O$ 的充要条件是 $AA^T = O$ 。

由此可知: 实对称矩阵 $A = O$ 的充要条件是 $A^2 = O$ 。

*20、 A, B 是一个 n 阶矩阵, 其中 A 为对称矩阵, B 为反对称矩阵,

且 $A^2 = B^2$, 证明: $A = B = O$ 。

二、逆矩阵

21、用代数余子式方法求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

22、设 A, B, C 为 n 阶可逆方阵，

$$\text{化简：} (BC^T - I)^T (AB^{-1})^T + [(BA^{-1})^T]^{-1}$$

23、设 A, B 为 n 阶方阵，且 $E + AB$ 可逆，

$$\text{化简：} (E + BA)[E - B(E + AB)^{-1}A].$$

24、已知 A, B 为 4 阶方阵，且 $|A| = -2$ ， $|B| = 3$ ，求

$$(1) |5AB|; (2) |-AB^T|;$$

$$(3) |(AB)^{-1}|; (4) |A^{-1}B^{-1}|; (5) |((2AB)^T)^{-1}|$$

*25、设 A, B 为 n 阶 ($n \geq 2$) 可逆矩阵, 证明伴随矩阵满足以下性质:

$$(1) (AB)^* = B^* A^* ;$$

$$(2) (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* ;$$

$$(3) (A^T)^* = (A^*)^T ;$$

$$(4) (kA)^* = k^{n-1} (A)^* , k \text{ 为非零常数} ;$$

$$(5) (A^*)^* = |A|^{n-2} A .$$

26、设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^ , 证明 若 $|A|=0$ 则 $|A^*|=0$.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

27、求解下列矩阵方程：

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

班级	姓名	学号
----	----	----

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$28、\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{且 } AX = 2A + 2X, \text{求矩阵 } X.$$

29、设 3 阶方阵 A, B 满足方程 $A^2 B - A - B = E$ ，试求矩阵 B

以及行列式 $|B|$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

30、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足

$AXA + BXB = AXB + BXA + E$, E 是三阶单位矩阵, 试求矩阵 X .

31、设矩阵 A, B 为同阶方阵, 且满足 $A + B = AB$,

证明: $A - E$ 可逆, 并进一步证明 $BA = AB$.

32、设矩阵 A, B 为同阶方阵, 已知 $|B| \neq 0$, $A - E$ 可逆, 且有

$(A - E)^{-1} = (B - E)^T$, 求证 A 可逆.

*33、设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

且有 $A(E - 2C^{-1}B)^T C^T = B$, 试求矩阵 A .

*34、设 $A^k = O$ (k 为正整数),

证明 : $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$

*35、设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $E - AB$ 与 $E - BA$ 均可逆 ,

证明 : $(E - BA)^{-1} = E + B(E - AB)^{-1}A.$

36、设方阵 A 满足方程 $A^2 - A - 8I = O$,

试证明: (1) $(A - 3I)$ 可逆, 并求出其逆;

(2) $(A - 4I)$ 也可逆, 并求出其逆.

*37、由上题, 进一步证明若方阵 A 满足方程 $A^2 + pA + qI = O$,

且 r 不是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的零根, 则 $(A - rI)$ 可逆,

并求其逆矩阵;

*38、假定 n 阶方阵 A 满足矩阵方程:

$$A^m + a_1 A^{m-1} + a_2 A^{m-2} + \dots + a_{m-1} A + a_m E = O (a_m \neq 0), \text{ 其中}$$

$a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ 都是实数, 证明: A 是可逆的, 并求出其逆矩阵.

*39、设 $A, B, A + B$ 均为可逆方阵,

证明: $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 并给出逆矩阵的表达式.

*40、设矩阵 $A = E_n - \mathbf{a}\mathbf{a}^T$, 其中 \mathbf{a} 为 n 维非零列向量 , 且

$$A^2 = A ,$$

证明 : (1) $A^2 = A \Leftrightarrow \mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1$; (2) A 不可逆.

三、分块矩阵

41、用分块矩阵的乘法 , 计算下列矩阵的乘积 :

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

42、设分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$, 其中 A, B 分别是 m 阶, n 阶可逆矩阵, 证明: C 是可逆的, 并求出 C^{-1} .

*43、设 $D = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$, 其中 A, B 分别是 m 阶, n 阶可逆方阵, 证明: D 是可逆的, 并求出 D^{-1} .

班级

姓名

学号

*44、由上题结论，证明可逆的下（上）三角矩阵的逆矩阵也是下（上）三角矩阵.

45、利用矩阵分块的方法和相关结论，求下列可逆矩阵的逆矩阵：

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I}_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$* (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

班级	姓名	学号
<p>*46、设 $C = \begin{pmatrix} & & C_1 \\ & & \\ & \ddots & C_2 \\ C_k & & \end{pmatrix}$, 其中 $C_i (i = 1, \dots, k)$ 均为可逆矩阵,</p> <p>求 C^{-1}.</p>		
四、矩阵的初等变换		
47、用初等变换求解下列可逆矩阵的逆矩阵：.		
<p>(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (用初等行变换进行求解)</p>		

$$* (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ (用初等列变换进行求解)}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

班级

姓名

学号

五、矩阵的秩

48、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 \end{pmatrix}$, 求 $r(A)$.

49、矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

求矩阵 A 的秩并写出 A 的一个最高阶非零子式.

50、 a 取何值时，矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 8 & -9 & a \end{pmatrix}$ 的秩是 2.

专题二 矩阵及其运算 自测题

一、选择题：

1、已知 A, B 均为 n 阶方阵，则必有_____.

(A) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (B)

$(AB)^T = A^T B^T$

(C) $AB = O$ 时， $A = O$ 或 $B = O$

(D) $|A+AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ ，或 $|E+B| = 0$

2、设 A 为三阶方阵，且 $|A| = 2$ 则 $|(A^*)^{-1}| =$ _____.

(A) 4 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

3、设 A, B, C 均为 n 阶方阵，满足 $ABC = E$ ，其中 E 为 n 阶单位矩阵，

则必有_____.

(A) $ACB = E$ ； (B) $CBA = E$ ； (C) $BAC = E$ ； (D)

$BCA = E$.

4、设 A, B, C 均为 n 阶方阵，且 $AB = BC = CA = E$ ，

则 $A^2 + B^2 + C^2 =$ _____.

- (A) $3E$ (B) $2E$ (C) E (D) 0

5、设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,

在下列等式中正确的是_____.

- (A) $(-A)^* = -A^*$ (B) $|A^*| = |A|^n$
(C) $|-A| = -|A|$ (D) $(-A)^{-1} = -A^{-1}$

6、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$,

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 A 可逆, 则 B^{-1}

为_____.

- (A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

二、填空题

1、设 A, B 都是 5 阶矩阵, 且 $|A^{-1}| = -3, |B| = 2$, 则

$||B|A|| =$ _____.

2、已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^* =$ _____.

3、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{100} =$ _____.

4、 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, $|B| =$ _____.

5、设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 $|A| = 2, |B| = 3$, 则 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} =$ _____.

6、设 n 维向量 $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})$, 矩阵 $A = E - \mathbf{a}^T \mathbf{a}$,

$B = E + 2\mathbf{a}^T \mathbf{a}$, 则 $AB =$ _____.

三、问常数 k 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k-3, \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2, \end{cases}$$

无解,有唯一解,或有无穷多解,并在有无穷多解时写出其全部解.

四、设 A 为 n 阶反对称阵,若 n 为奇数,则 A^* 为对称阵,若 n 为偶数,则 A^* 为反对称阵.

五、设 $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T$, 且 $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1, A = E - 2\mathbf{a}\mathbf{a}^T$,

证明: A 是对称矩阵, 且 $A^2 = E$.

班级	姓名	学号	
六、求	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	的逆矩阵.	<p>七、设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求 X 使 $AX = B$.</p> <p>八、设方阵 A 满足 $A^2 + 6A + 9I = O$, 证明 $A + 4I$ 可逆, 并求 $(A + 4I)^{-1}$.</p>

九、设 A 是 n 阶可逆矩阵，

将 A 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 B 。

(1) 证明：矩阵 B 可逆；(2) 求 AB^{-1} 。

十、利用分块方法求矩阵的逆矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

本章练习纠错与总结：

专题三 线性方程组及向量组的线性相关性

一、线性方程组的消元法

1、用消元法解下列线性方程组：

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

2、求下列方程组的一般解.

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

班级

姓名

学号

$$(2) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 14x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}.$$

3、用高斯消元法判断下列线性方程组是否有解，
并在有解的情况下，求出其全部解.

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}.$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ -7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases} .$$

$$(3) \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} .$$

班级	姓名	学号	
(4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$			<p>4、问常数 k 取何值时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$</p> <p>无解,有唯一解,或有无穷多解,并在有无穷多解时写出其全部解.</p>

5、线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + ax_3 = b, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

问： a, b 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

在有无穷多解时求出其全部解.

二、向量组及其线性组合

6、试将 $\mathbf{b} = (4, 11, 3)^T$ 表示为 $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 2)^T, \mathbf{a}_2 = (3, 2, 1)^T,$

$\mathbf{a}_3 = (-2, -5, 1)^T$ 的线性组合.

班级

姓名

学号

7、试将 $\mathbf{b} = (1, 2, 1, 1)^T$ 表示为 $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\mathbf{a}_4 = (1, -1, -1, 1)^T$ 的线性组合.

8、已知 $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)^T$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 1)^T$, $\mathbf{a}_3 = (2, 5, t)^T$, 试问 t 为何值时 \mathbf{a}_3 可由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性表示.

三、向量组的线性相关性

9、选择题

(1) 已知向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关,

则下列向量组中线性无关的是 ().

(A) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1$;

(B) $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_1$;

(C) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_1$;

(D) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_1$.

(2) 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}$ 线性无关, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ 线性相关, 则 ().

(A) \mathbf{a} 必可由 $\mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{d}$ 线性表示;

(B) \mathbf{b} 必不可由 $\mathbf{a}, \mathbf{g}, \mathbf{d}$ 线性表示;

(C) \mathbf{d} 必不可由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}$ 线性表示;

(D) \mathbf{d} 必可由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}$ 线性表示.

(3) n 维向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m (3 \leq m \leq n)$ 线性无关的

充分必要条件是 ().

(A) 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使

$$k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_m \mathbf{a}_m \neq \mathbf{0};$$

(B) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 中任意两个向量线性无关;

(C) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 中存在一个向量, 它不能由其余向量线性表示;

(D) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 中任意一个向量都不能由其余向量线性表示.

(4) 向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关,

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3 = l\mathbf{a}_3 - t\mathbf{a}_1$ 也线性无关, 则

l, t 满足 ().

(A) $l = t$; (B) $l \neq t$; (C) $l = t = 1$; (D) $l \neq 2t$.

10、求下列向量组的一个极大线性无关组,

并将其余向量用此极大线性无关组线性表示.

(1) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 0)^T, \mathbf{a}_2 = (-1, -2, 0, 3)^T,$

$\mathbf{a}_3 = (2, 4, 6, 0)^T, \mathbf{a}_4 = (1, -2, -1, 0)^T, \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 1)^T.$

班级	姓名	学号	
(2) $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \mathbf{a}_2 = (0, 3, 1, 2)^T,$ $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 2, 0)^T, \mathbf{a}_4 = (3, 0, 7, 14)^T, \mathbf{a}_5 = (2, 1, 5, 6)^T.$			$(3) \mathbf{a}_1 = (1, 4, -2)^T, \mathbf{a}_2 = (1, -2, 4)^T,$ $\mathbf{a}_3 = (2, 5, -1)^T, \mathbf{a}_4 = (4, 5, -2)^T, \mathbf{a}_5 = (5, 4, -4)^T.$

$$(4) \mathbf{a}_1 = (1, 3, 5, -1)^T, \mathbf{a}_2 = (2, -1, -3, 4)^T,$$

$$\mathbf{a}_3 = (5, 1, -1, 7)^T, \mathbf{a}_4 = (-3, -3, 1, 1)^T.$$

$$(5) \mathbf{a}_1 = (1, 0, 2, 3, -4)^T, \mathbf{a}_2 = (7, 1, 0, -1, 3)^T,$$

$$\mathbf{a}_3 = (1, 4, -9, -6, 22)^T, \mathbf{a}_4 = (6, 4, 1, 9, 2)^T.$$

班级

姓名

学号

11、已知向量组 $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 0, 5)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, 4)^T, \mathbf{a}_3 = (1, 1, 2, 3)^T,$

$\mathbf{a}_4 = (1, -3, 6, -1)^T, \mathbf{a}_5 = (1, a, 3, b)^T$ 的秩为 2.

试求 a, b 的值, 并求向量组的一个极大线性无关组,

且将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

12、已知向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关,

试证向量组 $2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_3$ 亦线性无关.

*13、向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性无关,

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{b}_s = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_1,$$

试讨论向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s$ 的线性相关性.

*14、设 n 维向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性相关, 且满足 $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

试说明对于任意的 n 维向量 \mathbf{b} , 参数 l_1, l_2, l_3 满足什么条件时,

向量组 $\mathbf{a}_1 + l_1 \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + l_2 \mathbf{b}, \mathbf{a}_3 + l_3 \mathbf{b}$ 线性相关.

班级

姓名

学号

*15、已知向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性无关，矩阵 A 可逆。

求证向量组 $A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, \dots, A\mathbf{a}_s$ 线性无关。

四、线性方程组解的结构

16、用基础解系表示下列齐次线性方程组的全部解：

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} .$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

$$(3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

班级	姓名	学号
<div> <div> <div>(4)</div> <div> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} .$ </div> </div> <div> <div>(5)</div> <div> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} .$ </div> </div> </div>		

$$(6) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases} .$$

17、用基础解系表示下列非齐次线性方程组的全部解：

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases} .$$

班级	姓名	学号
<div> <div> <div>(2)</div> <div> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases} .$ </div> </div> <div> <div>(3)</div> <div> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \end{cases} .$ </div> </div> </div>		

$$(4) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ -7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases} .$$

$$(5) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases} .$$

班级	姓名	学号	
(6)	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 5 \end{cases}$		18、求齐次线性方程组 $\begin{cases} \mathbf{I}x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mathbf{I}x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \mathbf{I}x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解的充要条件.

19、设四元非齐次线性方程组系数矩阵的秩是 2 ,
 $\mathbf{a}_1 = (4, 4, 3, -1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, 3, 2)^T$, $\mathbf{a}_3 = (0, -3, 1, 3)^T$ 是它的三个解, 求它的通解。

20、当 k 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = k \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$
 有解,

并求出此时的通解.

班级	姓名	学号
<p>21、已知方程组</p> $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = a \end{cases},$ <p>当 a 为何值时方程组无解？当 a 为何值时方程组有解？并求解。</p>		<p>*22、. 求 a, b 为何值时，方程组</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$ <p>有唯一解、无解或有无穷多解？在有解时，求其通解。</p>

专题三 线性方程组及向量组的线性相关性 自测题

一、判断题：

- () 1、线性无关的向量组必定不含零向量.
- () 2、如果一个向量组线性无关，那么它的任何一个非空的部分组也线性无关.
- () 3、 $m > n$ 是 n 维向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关的必要条件.
- () 4、如果两个向量组的秩相等，那么它们必然是等价向量组.
- () 5、若向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关， $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ 线性相关，则 \mathbf{a}_4 必可由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表示.
- () 6、若 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关，则 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1$ 线性无关.
- () 7、设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是一组 n 维向量，且 n 维单位向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

可被它们线性表出，那么 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

() * 8、设 $r > 1$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \dots + \mathbf{a}_r$,

$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 + \dots + \mathbf{a}_r, \dots,$

$\mathbf{b}_r = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_{r-1}$ ，那么

$r\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r\} < r\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$.

() * 9、如果 A 是 n 阶矩阵且 $|A| = 0$ ，则 A 的每一个行向量都是

其余各行向量的线性组合.

() * 10、设

$\mathbf{a}_1 = (a_1, a_2, a_3)^T, \mathbf{a}_2 = (b_1, b_2, b_3)^T, \mathbf{a}_3 = (c_1, c_2, c_3)^T$,

则三条直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0$ ， $(a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i=1, 2, 3)$ 交于一点的

充要条件是 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性相关且 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性无关.

二、选择题

- 1、设 n 元线性方程组 $AX = B$ 有解，则当 $r(A)$ () n 时， $AX = B$ 有无穷多解.
- A. $<$ B. \leq C. $>$ D. \geq

- 2、设 A 为 $m \times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $AX = O$ 仅有零解的充要条件是 A 的 () .
- A. 列向量线性相关 B. 列向量线性无关
C. 行向量线性相关 D. 行向量线性无关
- 3、 $m > n$ 是 n 维向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关的 () 条件.
- A. 必要 B. 充分 C. 无关 D. 充分必要
- 4、设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解， $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解，则 () .
- A. $2\mathbf{x}_1 + \mathbf{h}_1$ 为 $Ax = 0$ 的解 B. $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$ 为 $Ax = b$ 的解；
C. $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 为 $Ax = 0$ 的解； D. $\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2$ 为 $Ax = b$ 的解.
- 5、设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 中，系数矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 且 $r(A) = r$ ，则 () .
- A. 当 $m = n$ 时，方程组 $Ax = b$ 有惟一解；
B. 当 $r = n$ 时，方程组 $Ax = b$ 有惟一解；
C. 当 $r = m$ 时，方程组 $Ax = b$ 有解；
D. 当 $r < n$ 时，方程组 $Ax = b$ 有无穷多解.

三、填空题

- 1、设 $\mathbf{a} = (2, -1, 5)^T$ ， $\mathbf{b} = (-1, 1, 1)^T$ ，则 $\mathbf{a} + \mathbf{b} =$ _____，

$$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = \text{_____}.$$

- 2、设 $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)^T$ ， $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 3)^T$ ， $\mathbf{a}_3 = (1, 3, t)^T$ ，
则当 $t =$ _____ 时它们线性相关.
- 3、设 $\mathbf{a}_1 = (k, 1, 1)^T$ ， $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 3)^T$ ， $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 1)^T$ ，则当 k _____
时， $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关.
- 4、已知向量组
 $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)^T$ ， $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 4, 5)^T$ ， $\mathbf{a}_3 = (3, 4, 5, 6)^T$ ，
 $\mathbf{a}_4 = (4, 5, 6, 7)^T$ ，则该向量组的秩是 _____.
- 5、若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix}$ ，且 $r(A) = 3$ ，则 _____.
- 6、已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 的列向量线性相关，则
 $t =$ _____.
- 7、设三阶方阵 $A = (\mathbf{a}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ ， $B = (\mathbf{b}, 2\mathbf{g}_1, -3\mathbf{g}_2)$ ，其中

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ 均是三维列向量且 $|A| = -\frac{1}{3}$ ， $|B| = 3$ ，则

$$|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

8、设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 均为 4 维列向量, 且矩阵

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1), \quad B = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3),$$

$$C = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2), \text{ 如果 } |A| = a, |B| = b,$$

则行列式 $|C| = \underline{\hspace{2cm}}.$

9、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

10、若 A 为 n 阶可逆矩阵, 则 $r(A^*) = \underline{\hspace{2cm}}.$

11、若 n 元线性方程组有解, 且其系数矩阵的秩为 r , 则当 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 方程组有唯一解; 当 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 方程组有无穷多解.

12、设三元非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 中, 矩阵 A 的秩为 2,

且 $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 2)^T, \mathbf{x}_2 = (3, 2, 1)^T$ 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的两个解,

则此非齐次方程组的全部解可表示为:

$\underline{\hspace{4cm}}.$

13、设 \mathbf{x} 为齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的解, \mathbf{h} 为非齐次线性方程

组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解, 则 $3\mathbf{x} + \mathbf{h}$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的解.

14、若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的

线性无关的解的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

15、设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 有无穷多解的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

四、求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{I} & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \mathbf{I} & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

班级

姓名

学号

五、求向量组 $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 3, -1)^T, \mathbf{a}_2 = (3, -1, 2, 0)^T$

$\mathbf{a}_3 = (1, 3, 4, -2)^T, \mathbf{a}_4 = (4, -3, 1, 1)^T$ 的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

六、已知向量组

$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 3)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 3, -5, -1)^T, \mathbf{a}_3 = (-2, -6, 10, a)^T$,

$\mathbf{a}_4 = (4, 1, 6, a+10)^T$ 线性相关.

试求 a 的值并确定该向量组的一个极大线性无关组.

七、已知

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)^T, \mathbf{a}_2 = (I, -1, 10)^T, \mathbf{a}_3 = (-1, I, -6)^T, \mathbf{b} = (2, 5, 1)^T,$$

试分析 I 的取值情况使得

- (1) \mathbf{b} 可由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表出, 表示方式唯一;
- (2) \mathbf{b} 可由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表出, 表示方式不唯一;
- (3) \mathbf{b} 不能由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表出.

八、设

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3,$$

如果 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关, 证明: $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 也线性无关.

班级

姓名

学号

九、用基础解系表示齐次线性方程组的全部解：

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

十、求方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 5 \end{cases}$$
 的通解 .

十一、已知方程组
$$\begin{cases} l x_1 + x_2 + x_3 = l - 3 \\ x_1 + l x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + l x_3 = -2 \end{cases}$$
 , 当 l 为何值时方程组

无解 ?

当 l 为何值时方程组有解 ? 并求解 .

本章练习纠错与总结 :

专题四 矩阵的特征值及二次型

一、 向量的内积、长度及正交性

1、 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2, 2, -1)^T$, $\mathbf{b} = (1, 1, -5, 3)^T$, (1) 计算 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的内积;

(2) 将向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 单位化.

2、 已知 3 维向量空间 R^3 的两个向量 $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, 0)^T$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 2)^T$, 求一个非零向量 \mathbf{a}_3 , 使 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 两两正交.

3、 已知 $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0, 0, 1)^T$, 利用施密特法把这组向量规范正交化.

4、 a, b 为何值时, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ 为正交矩阵.

5、设 \mathbf{a} 为非零的列向量, E 是 n 阶单位矩阵, 令 $A = E - \frac{2}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{a}^T$, 证明 A 为对称的正交矩阵.

班级

姓名

学号

二、矩阵的特征值与特征向量

6、求下列矩阵的特征值以及特征向量.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

7、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 2 \\ 5 & y & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值为 -1 (三重), 求 x, y 的值, 并求矩阵 A 的特征向量.

8、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为

$\mathbf{a} = (1, -2, 3)^T$ ，求 a, b 的值及特征向量 \mathbf{a} 对应的特征值.

9、若 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$ ，则称 A 是幂等矩阵. 证明幂等矩阵的特征值只能是 0 或 1.

10、设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 2A - 3E = 0$ ，证明矩阵 A 的特征值只能是 -1 或 3.

班级

姓名

学号

11、设 A 为 n 阶正交矩阵 (即 $A^T A = E$), 且 $|A| = -1$, 证明 -1 是矩阵 A 的特征值.

12、设 A, E 分别是 3 阶方阵和单位矩阵 , 且满足 $|A - E| = 0$, $|A + E| = 0$ 以及 $|A + 2E| = 0$, 求行列式 $|A^2 + A + E|$ 的值.

三、相似矩阵与矩阵的对角化

13、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y 的值.

14、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ x & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 能相似对角化，求 x 的值.

15、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，求 A^{97} .

16、设 A 为 n 阶实方阵，证明：若 $A \neq 0$ ，但 $A^k = 0$ （其中 k 为某个正整数），则 A 不可能相似于对角阵.

四、实对称矩阵的对角化

17、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，求正交矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

18、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ ，求正交矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

19、设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 $1, 2, 3$ ，矩阵 A 对应于特征值 $1, 2$ 的特征向量分别是 $\mathbf{a}_1 = (-1, -1, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, -1)^T$.

(1) 求 A 的对应于特征值 3 的一个特征向量；

(2) 求矩阵 A .

20、设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ，与特征值 $\lambda_1 = -1$ 对应的特征向量为 $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)^T$ ，求矩阵 A .

班级

姓名

学号

*五、二次型

21、用矩阵记号表示下列二次型：

(1) $f = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$

(2) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 4x_3x_4$

22、写出二次型 $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 的矩阵.

23、已知二次型 $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2，求 c 的值.

24、求一个正交变换,将二次型 $f = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ 化为标准形.

$$(2) f = 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

25、用配方法将下列二次型化为标准形,并写出所用的变换矩阵.

$$(1) f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

26、当 I 取何值时，二次型

$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2Ix_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为正定二次型.

27、判定二次型 $f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 的正定性.

专题四 矩阵的特征值及二次型 自测题

一、选择题

1、三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$ ，则下列矩阵可逆的是().

(A) $A - E$ (B) $A + E$ (C) $2E - A$ (D) $A - 3E$

2、设 n 阶方阵 A 与 B 相似，则 ()

(A) $A - IE = B - IE$ (B) A 与 B 有相同的特征值与特征向量
(C) A 与 B 都相似于一个对角阵

(D) 对任意常数 t ， $A - tE$ 与 $B - tE$ 相似

3、设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2 = I$ ，则 ()

(A) $|A| = 1$ (B) A 的特征值都是 1

(C) A 的秩为 n (D) A 一定是对称阵

*4、矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的关系是

().

(A) 既合同又相似 (B) 相似但不合同

(C) 合同但不相似 (D) 既不同合同又不相似

*5、设 A 为 n 阶对称矩阵，则 A 是正定矩阵的充分必要条件是 ()

(A) 二次型 $x^T A x$ 的负惯性指数为零 (B) A 没有负特征值

(C) 存在 n 阶矩阵 C ，使 $A = C^T C$ (D) A 与单位矩阵合同

二、填空题

1、设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$ ， A^* 为 A 的伴随矩阵，则

$$|A^* + 2E| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2、设 x_1, x_2, x_3 分别是 $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -3 & -1-x & 1 \\ 9 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$ 的根，则 $x_1 x_2 x_3$ 的值为_____.

3、设 $\mathbf{l}_1 = 6, \mathbf{l}_2 = 2$ 是实对称矩阵 A 的特征值，且向量 $\mathbf{a} = (-2, t+1, 1)^T$ ， $\mathbf{b} = (t, 1, -2)^T$ 为分别属于特征值 6, 2 的特征向量，则 $t = \underline{\hspace{2cm}}.$

*4、如果二次型 $f = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是_____.

*5、如果实矩阵 A 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同，则二次型 $x^T A x$ 的

规范形 $y^T A y = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，

(1) 求 x, y ; (2) 求一个可逆矩阵，使 $P^{-1}AP = B$.

班级

姓名

学号

*四、求一个正交变换把二次曲面方程

$3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz = 0$ 化成标准方程.

五、已知

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n=1,2,\cdots), \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $x_{10} + y_{10}$.

六、设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值， $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ 是对应于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量， $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$ 是对应于特征值 λ_2 的线性无关的特征向量，证明向量组 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$ 线性无关.

本章练习纠错与总结：

专题五 考研真题精选

- (4 分, 2006 年) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| =$ _____.
- (4 分, 2011 年) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第一列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ().
(A) $P_1 P_2$ (B) $P_1^{-1} P_2$ (C) $P_2 P_1$ (D) $P_2 P_1^{-1}$
- (4 分, 2009 年) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ().

$$\begin{aligned} \text{(A)} & \begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix} & \text{(B)} & \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix} \\ \text{(C)} & \begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix} & \text{(D)} & \begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (4 分, 2008 年) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = 0$, 则 ().
(A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆
(B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆
(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆
(D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆
- (4 分, 2007 年) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.
- (4 分, 2006 年) 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ().
(A) 若 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性相关, 则 $A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, \dots, A\mathbf{a}_s$ 线性相关

- (B) 若 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性相关, 则 $A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, \dots, A\mathbf{a}_s$ 线性无关
- (C) 若 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性无关, 则 $A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, \dots, A\mathbf{a}_s$ 线性相关
- (D) 若 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性无关, 则 $A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, \dots, A\mathbf{a}_s$ 线性无关
7. (4 分, 2010 年) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵. 若 $AB = E$, 则().
- (A) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$
- (B) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$
- (C) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$
- (D) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$
8. (4 分, 2007 年) 设向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是().
- (A) $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1$
- (B) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1$
- (C) $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_1$
- (D) $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_1$
9. (11 分, 2011 年) 设向量组 $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)^T$, $\mathbf{a}_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 3)^T$, $\mathbf{b}_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.
- (I) 求 a 的值; (II) 将 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 用 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性表示.

10. (10 分, 2008 年) 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为 3 维列向量, 矩阵 $A = \mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{b}\mathbf{b}^T$, 其中 $\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T$ 分别是 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的转置. 证明:
- (I) $r(A) \leq 2$; (II) 若 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性相关, 则 $r(A) < 2$.

11. (4 分, 2011 年) 设 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 得一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为 ().

- (A) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ (B) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$
(C) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ (D) $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$

12. (11 分, 2010 年) 设 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{I} - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知线性

方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解.

- (I) 求 \mathbf{I}, a ; (II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

13. (11 分, 2009 年) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(I) 求满足 $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$, $A^2\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1$ 的所有向量 $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$;

(II) 对 (I) 中的任意向量 $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, 证明 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 线性无关.

14. (11 分, 2007 年) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

15. (9 分, 2006 年) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \text{ 有 3 个线性无关的解.} \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

16. (4 分, 2010 年) 设 $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1, 0)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 1, a)^T$. 若由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ _____.

17. (4 分, 2009 年) 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基, 则由基 $\mathbf{a}_1, \frac{1}{2}\mathbf{a}_2, \frac{1}{3}\mathbf{a}_3$ 到基 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1$ 的过渡矩阵为().

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/6 \\ -1/2 & 1/4 & 1/6 \\ 1/2 & -1/4 & 1/6 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

18. (4 分, 2009 年) 若 3 维列向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 2$, 其中 \mathbf{a}^T 为 \mathbf{a} 的转置, 则矩阵 $\mathbf{b}\mathbf{a}^T$ 的非零特征值为_____.

19. (4 分, 2008 年) 设 A 为 2 阶矩阵, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 为线性无关的 2 维列向量, $A\mathbf{a}_1 = 0$, $A\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$. 则 A 的非零特征值为_____.

20. (4 分, 2007 年) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 A 与 B ().

- (A) 合同, 且相似 (B) 合同, 但不相似
(C) 不合同, 但相似 (D) 既不合同, 也不相似

21. (4 分, 2010 年) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = 0$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于().

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

22. (11 分, 2011 年) 设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

23. (11 分, 2007 年) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$,

$\lambda_3 = -2$, 且 $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量.

记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 \mathbf{a}_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

24. (9 分, 2006 年) 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

25. (4 分, 2011 年) 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a =$ _____.

26. (11 分, 2010 年) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(I) 求矩阵 A ;

(II) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

27. (11 分, 2009 年) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

28. (4 分, 2013 年) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB=C$, 且 B 可逆, 则 ()

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

29. (4 分, 2013 年) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必

要条件为 ()

(A) $a=0, b=2$ (B) $a=0, b$ 为任意常数

(C) $a=2, b=0$ (D) $a=2, b$ 为任意常数

30. (4 分, 2013 年) 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0 (i, j=1, 2, 3)$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

31. (11 分, 2013 年) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$, 并求所有矩阵 C .

32. (11 分, 2013 年) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2,$$

记 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, 证明二次型 f 对应的矩阵为

$2\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{b}\mathbf{b}^T$; 若 \mathbf{a}, \mathbf{b} 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换

下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

33. (4 分, 2014 年) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 等于 ()

- (A) $(ad - bc)^2$ (B) $-(ad - bc)^2$
(C) $a^2d^2 - b^2c^2$ (D) $-a^2d^2 + b^2c^2$

34. (4 分, 2014 年) 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 是三维向量, 则对任意的常数 k, l , 向量 $\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_2 + l\mathbf{a}_3$ 线性无关是向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关的 ()

- (A) 必要而非充分条件
(B) 充分而非必要条件
(C) 充分必要条件
(D) 非充分非必要条件

35. (6 分, 2014 年)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围是_____.

36. (11 分, 2014 年)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵.

37. (11 分, 2014 年)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.