北京林业大学《高等数学》
2023-2024学年第一学期期末试卷

一、填空题：(3分×5＝15分)

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x} & x<0\\ (1+x) & x>0\end{cases}$ ，若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，则 $a=$__**1**____________。

2. 函数 $f(x)=x^3$ 在区间$[1,2]$上满足拉格朗日中值定理结论的 $\xi=$____ $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ ____________。

3. 曲面 $z-x^3+xy^2=0$ 上点$M_0(1,1,0)$处的切平面方程为___ $x-y=0$ ____________。

4. 通解为$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ 的微分方程为__ $y''-y=0$ ____________。

5. 设$\Phi(x)=\int_x^5\sqrt{1+t^2}\,dt$，则$\Phi'(1)=$____ $-\sqrt{2}$ ____________。

二、选择题： (3 分 × 5 = 15 分)

1. 下列变量中（ B ）是当$x\to 1$时的无穷小量。

(A)$\dfrac{1}{x^2-2x+1}$　　(B)$\dfrac{(x-1)^2}{2}$　　(C)e^{x-1}　　(D) $\dfrac{\sin x}{x}$

2. 设函数 $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$ ，则$x=3$是$f(x)$的（ D ）。

(A) 连续点　　(B) 可去间断点　　(C) 跳跃间断点　　(D) 无穷间断点

3. 函数 $z=x^2-y^2+1$ 的极值点为（ D ）。

(A) $(0,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,0)$　　(D) 不存在

4. 在空间直角坐标系中，方程 $z=3x^2+2y^2$ 所表示的曲面是（ B ）。

(A) 椭球面　　(B) 椭圆抛物面　　(C) 椭圆柱面　　(D) 单叶双曲面

5.下列各式正确的是（ D ）。

(A) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)dx$ **(B)** $\int df(x) = f(x)$ **(C)** $\int f'(x)dx = f(x)$ **(D)** $d\int f(x)dx = f(x)dx$

三、计算题：(4 分 × 8 = 32 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin x} = 1$

2. **2. 设** $z = e^{x-2y}$ **而** $x = \sin t, y = t^3$，**求** $\dfrac{dz}{dt}$

解：$z = e^{\sin t-2t^2}$ $\therefore \dfrac{d_z}{d_t} = (\cos t - 6t^2)e^{\sin t-2t^3}$

3. 求由方程 $e^z = xyz$ **所确定的函数的偏导数** $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：$e^z\dfrac{\partial_z}{\partial_y} = xz + xy\dfrac{\partial_z}{\partial_y}$ $\therefore \dfrac{\partial_z}{\partial_y} = \dfrac{xy}{e^z - xy}$

4. $y = e^{3x+9}$ ，**求** dy

解：$\dfrac{d_y}{d_x} = e^{3x+9}$ $\therefore d_y = e^{3x+9}d_x$

5. $\int x\cos x dx$

解 ：$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x d_x$ $\int \sin x d_x = -\cos x + c_1$ $\therefore \int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + c$

6. $\int \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

解 ： 令 $\sqrt{x} = t$ 则 $\int \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \dfrac{2t}{1+t}d_t = 2t - 2\ln(1+t) + c$

$\therefore \int \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c$

7. $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx$

解： $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-2x}d_x = \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2b})$

当 $b\to+\infty$ 时 $\lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2b})=\frac{1}{2}$

当 $b\to-\infty$ 时 极限不存在

综上 $b\to+\infty$ 时积分收敛 为$\frac{1}{2}$

当$b\to-\infty$时 积分发散

8.设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ \cos x & 1\le x<3 \end{cases}$ **，求** $\int_0^2 f(x)dx$

解 ： $\int_0^2 f(x)d_x = \int_0^1 x^2 d_x + \int_1^2 \cos x d_x$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + [\sin x]_1^2$$

$$= \frac{1}{3}+\sin 2-\sin 1$$

四、求微分方程 $y'+\frac{2}{x}y=\frac{x+1}{x}$ 的通解。 **(10 分)**

解 ： $p(x)=\frac{2}{x}$ $\qquad Q(x)=\frac{x+1}{x}$

$$y=e^{-\int p(x)d_x}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)}d_x + c\right]$$

$$y=e^{-2\ln x}\left[\int \frac{x+1}{x}e^{2\ln x}d_x + c\right]$$

则 $y=x^{-2}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c\right]$

五、求由抛物线 $y^2=x$ **与直线** $x=2$ **所围图形绕**x**轴旋转一周而形成的立体的体积。 (8 分)**

解 ： 体积 V=$\int_0^2 \pi y^2 d_x$ $\qquad y^2=x$ $\qquad \therefore V=\int_0^2 \pi x d_x = 2\pi$

六、求过点$(-3,1,-2)$和$(3,0,5)$且平行于x轴的平面方程。（10 分）

解 ：所求平面平行于 x 轴 则 设此平面方程为：$ay+bz+c=0$ 。

又∵ 此平面过（-3，1，-2） （3，0，5）

∴ 可解得 $a=7b$ $c=-5b$

则可得此平面方程：$7z+y-5=0$

七、铁路线上 AB 的距离为$100km$，工厂 C 距 A 处为$20km$，AC 垂直于 AB（如图所示），今要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路，已知铁路与公路每km货运费之比为 3：5，问 D 选在何处，才能使从 B 到 C 的运费最少。（10 分）

解 ：令 AD 间距离为 x Km （$0\le x\le 100$），运输总费用为 P(x) 。铁路每千米运费为 3k，公路每千米运费为 5k。

则 总费用 $P(x)=3k(100-x)+5k\sqrt{x^2+400}$

$$=k(300-3x+5\sqrt{x^2+400})$$

$$P'(x)=k\frac{5x-3\sqrt{x^2+400}}{\sqrt{x^2+400}}$$

令$P'(x)=0$ 的 x = 15 当$x\ge 15$时$P(x)\ge 0$ 当$x<15$时 $P(x)<0$

则，当 x=15 时总运费最少。即在距 A 点 15Km 处选取 D 点，满足从 B 至 C 点运费最少。