

线性代数总复习 II 答案

考试班级_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

试卷说明：

1. 本次考试为闭卷考试。本试卷共计 4 页，共 八 大部分，请勿漏答；
2. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
3. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
4. **本试卷答案全部写在试卷上；**
5. 答题完毕，请将试卷正面向外摊开交回，不得带出考场；

考试中心提示：请你遵守考场纪律，诚信考试、公平竞争！

一、填空题（本题共 10 小题，每题 3 分，共 30 分）

1. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$, 则 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} = \underline{-1}$.

2. 设三阶行列式 $| -2A | = 8$, 则 $| A | = \underline{-1}$.

3. 设 $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$, 则 $D(x) = 0$ 的全部根为 3, 2

4. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & y \end{bmatrix}$, $A = B$, 则 $x = \underline{1}$, $y = \underline{-1}$.

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

6. 已知非齐次线性方程组 $AX=b$ 无解, 则 $R(A) < \underline{R(A,b)}$ (填 “>”, “=” 或 “<”).

7. 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 中每一行诸元素之和为零时, 则 $| A | = \underline{0}$.

8. 设 A 为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有一个特征值为 -2 , 则 $| 2E + A | = \underline{0}$.

9. 已知 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $| \lambda E - A | = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, 则 A 的全部特征值为

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

10. 设 $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $b = \underline{\quad} - \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{\quad}$.

二、单项选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 齐次方程组 $\begin{cases} (k-1)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (k-1)x_2 = 0 \end{cases}$ 只有零解的充要条件是 (C)

- (A) $k \neq -1$ (B) $k \neq 3$ (C) $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$ (D) $k \neq -1$ 或 $k \neq 3$

2. 设 A, B, X 均为 n 阶矩阵, 且 A, B 可逆, 则下列结论错误的是 (D).

- (A) 若 $AX=B$, 则 $X=A^{-1}B$ (B) 若 $XA=B$, 则 $X=BA^{-1}$
 (C) 若 $AXB=C$, 则 $X=A^{-1}CB^{-1}$ (D) 若 $ABX=C$, 则 $X=A^{-1}B^{-1}C$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $B = (C)$ 成立.

- (A) AP_1P_2 (B) AP_2P_1 (C) P_1P_2A (D) P_2P_1A

4. 设 $A_{m \times s}, B_{s \times n}$, 则以下正确的结论是(A,D)

- (A) $R(AB) \leq R(A), R(AB) \leq R(B)$; (B) $R(AB) < R(A), R(AB) < R(B)$
 (C) $R(AB) < R(A) + R(B)$; (D) $R(AB) \leq R(A) + R(B)$

5. n 阶矩阵 A 与 B 相似的充分条件是 (D)

- (A) $A = |B|$ (B) $R(A) = R(B)$ (C) A 与 B 有相同的特征多项式.
 (D) A 与 B 有相同的特征多项式且 n 个特征值互不相同.

三、(本题 10 分) 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$

$$A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

四、(本题 10 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, B 为三阶矩阵, 且满足 $A^2 = E + AB$, 求矩阵 B .

$$\because |A| = -1 \neq 0, \therefore A \text{ 可逆}, A^2 = E + AB \Leftrightarrow AB = A^2 - E \Leftrightarrow B = A^{-1}(A^2 - E) = A - A^{-1}$$

$$B = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

五、(本题 10 分) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 0, 5)^T, \alpha_2 = (1, 2, 1, 4)^T, \alpha_3 = (1, 1, 2, 3)^T,$

$\alpha_4 = (1, -3, 6, -1)^T, \alpha_5 = (1, a, 3, b)^T$ 的秩为 2.

(1) 求 a, b 的值

(2) 求此向量组的一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解: 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, 则对其进行初等行变换有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 由 } r(A) = 2 \text{ 得}$$

$a = 0, b = 2$, 其中一个极大无关组为: α_1, α_2

由最后矩阵可知: $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_4 = -5\alpha_1 + 6\alpha_2, \alpha_5 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$

六、(本题 12 分) 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 为标准形, 并写出所用的正交线性替换.

解: 二次型的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$ 得

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3.$$

分别求出其特征向量为: $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 且彼此是正交的;

$$\text{单位化得 } \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } P = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \text{ 则 } f(x_1, x_2, x_3) \stackrel{x=Py}{=} y_2^2 + 3y_3^2.$$

七、(本题 6 分) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 . 试证:

$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ($c_1c_2 \neq 0$) 不是 A 的特征向量.

证 : 反证法, 假设 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ($c_1c_2 \neq 0$) 是 A 的特征向量, 对应的特征值为 λ , 则

$$A(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = \lambda(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2), \text{ 又 } A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \text{ 则有}$$

$$\begin{aligned} A(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) &= c_1\lambda_1\alpha_1 + c_2\lambda_2\alpha_2 = c_1\lambda\alpha_1 + c_2\lambda\alpha_2 \\ \Leftrightarrow c_1(\lambda_1 - \lambda)\alpha_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda)\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

因为 α_1, α_2 是属于不同的特征值得特征向量, 故线性无关, 故

$$c_1(\lambda_1 - \lambda) = c_2(\lambda_2 - \lambda) = 0$$

$$\because c_1 c_2 \neq 0$$

$$\therefore \lambda_1 - \lambda = \lambda_2 - \lambda = 0$$

即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 矛盾

所以假设不成立, 即 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 (c_1 c_2 \neq 0)$ 不是 A 的特征向量。

八、(本题 7 分) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_s = \alpha_s + \alpha_1$,

试讨论向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的线性相关性.

解: 设有数 x_1, x_2, \dots, x_s 使得 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_s\beta_s = 0$, 即

$$(x_1 + x_s)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + \dots + (x_{s-1} + x_s)\alpha_s = 0.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以 $\begin{cases} x_1 + x_s = 0 \\ x_1 + x_s = 0 \\ \dots \quad \dots \\ x_1 + x_s = 0 \end{cases}$.

该方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{s+1}$,

(1) 当 s 为奇数时, $D = 2 \neq 0$, 方程组只有零解,

x_1, x_2, \dots, x_s 必全为零, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的线性无关;

(2) 当 s 为偶数时, $D = 0$, 方程有非零解,

即存在不全为零的数 x_1, x_2, \dots, x_s 使 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_s\beta_s = 0$,

向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性相关.