# 北京林业大学2019-2020学年第一学期期末试卷

**试卷名称：　高等数学上（理工类)课程所在院系：　理学院**

**考试班级学号姓名成绩**

试卷说明：
1. 本次考试为**闭** 卷考试。本试卷共计**4**页，共**8**大部分，请勿漏答；
2. 考试时间为**120**分钟，请掌握好答题时间；
3. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
4. 本试卷所有试题答案直接写在试卷上；（特殊要求请详细说明）
5. 答题完毕，请将试卷和答题纸正面向外交回，不得带出考场；

考试中心提示：请你遵守考场纪律，参与公平竞争！

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、填空题（每题3分，共30分）

1. 已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+6$，则 $f(x)=\underline{x^2+4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\underline{\quad e^2\quad}$。

3. 设 $f(x)=\begin{cases} a+3\sin x, x\le 0 \\ (1+x)^{\frac{2}{x}}, x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=\underline{e^2}$.

4. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(3+t^2)dt$，则 $f'(x)=\underline{\quad 2x\ln(3+x^4)\quad}$。

5、函数 $\boldsymbol{f(x)=x(2x-1)^2(x+3)^3}$，则 $\boldsymbol{f^{(6)}(x)=}\underline{\quad 2880\quad}$。

6. $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx=\underline{\frac{1}{2}(x+\tan x)+c}$.

7. $\int_{-2}^{2}\frac{\sin^5 x+|x|}{2+x^2}dx=\underline{\quad \ln 3\quad}$。

8. $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-2}^{2}\left[f(x)+1\right]x^2\,dx=\underline{\mathbf{\frac{16}{3}}}$.

9. 已知 $y=f(\frac{3x-2}{3x+2}), f'(x)=\arcsin x^2$，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\underline{\frac{3\pi}{2}}$。

10．设 $x = e^t \sin t$， $y = e^t \cos t$，则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}}$ .

二、计算题（每题 5 分，共 35 分）

1．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \int_0^x e^{t^2}dt}{x^2 \sin x}$　　　　2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

解：解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \int_0^x e^{t^2}dt}{x^2 \sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - e^{x^2}}{2x\sin x + x^2 \cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{x^2}}{2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2 \sin x}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} =$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(-\frac{1}{x^2})}{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$
$$= 0$$

或

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \int_0^x e^{t^2}dt}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - e^{x^2}}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{x^2}}{6x}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

3. 计算 $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}dx$　　　　4. 计算 $\int x\ln(1 + x)dx$

解：$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}dx$ 解：$\int x\ln(1 + x)dx$

$$= \int \frac{e^{2x} + e^x - e^x}{1 + e^x}dx = \frac{1}{2}\int \ln(1 + x)dx^2$$

$=\int \frac{(e^{2x}+e^{x})-e^{x}}{1+e^{x}}dx$ $=\frac{1}{2}(x^2\ln(1+x)-\int \frac{x^2}{1+x}dx)$

$=\int e^{x}dx-\int \frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx$ $=\frac{1}{2}(x^2\ln(1+x)-\int (x-1+\frac{1}{1+x})dx)$

$=e^{x}-\ln(1+e^{x})+C$ $=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(1+x)$

5. 设 $y=x^{2x}+\arctan(2x)$ ,求 $dy$ ，

解：令 $u=x^{2x}$

$\ln u=2x\ln x$

$\frac{u'}{u}=2\ln x+2$

$u'=x^{2x}(2\ln x+2)$

$dy=[x^{2x}(2\ln x+2)$

$+\frac{2}{1+4x^2}]dx$

6．计算 $\int_0^1\ln(1+\sqrt{x})dx$． 解：令 $\sqrt{x}=t$, 则 $dx=dt^2$

原式 $=\int_0^1\ln(1+t)dt^2=t^2\ln(1+t)\Big|_0^1-\int_0^1 t^2d\ln(1+t)$

$=\ln 2-\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt$

$=\ln 2-\int_0^1(t-1+\frac{1}{1+t})dt$

$=\frac{1}{2}$

7、已知 $y=x+\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x$，求 $dy$ 。

$$dy=(1+\frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x+\sqrt{1-4x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}})dx=(3-\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x)dx$$

8、已知 $\sqrt{x^2+y^2}=5e^{\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

**解：** $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln 5+\arctan\frac{y}{x}$

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{\frac{xdy-ydx}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}},\quad xdx+ydy=xdy-ydx,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-y)(1+\frac{dy}{dx})-(x+y)(1-\frac{dy}{dx})}{(x-y)^2}=\frac{-2y+2x\frac{dy}{dx}}{(x-y)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

三、证明题

1.设 $x>0$，证明 $\frac{2}{2x+1}<\ln(1+\frac{1}{x})$

证明：$f(x)=\frac{2}{2x+1}-\ln(1+\frac{1}{x})$

$$f'(x)=-\frac{4}{(2x+1)^2}+\frac{1}{x(1+x)}=\frac{1}{x(1+x)(2x+1)^2}>0$$

所以，$f(x)$ 在 $[0,+\infty$ 上单调增加，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

故当 $x>0$ 时，$f(x)<0$ ，即 $\frac{2}{2x+1}<\ln(1+\frac{1}{x})$

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间（ $a,b$ ）内具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)$，$f(x)$ 在 $x=a$ 处的右导数 $f'_+(a)$ 为正，证明在（ $a,b$ ）内至少存在一点 c，使得 $f''(c)<0$

证明：因为 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，根据极限的局部保号性知，存在 $\delta>0$，

使得当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，有 $f(x)-f(a)>0$，

取 $x_0\in(a,a+\delta)$ ，根据拉格朗日中值定理知，分别在存在

$\xi_1\in[a\ ,x_0\ \xi]\ \in_2\ {}_o\ x$ [使b得 ]

$f(x_0)-f(a)=f'(\xi_1)(x_0-a), f(x_0)-f(b)=f'(\xi_2)(x_0-b)$

由于 $f(x_0)-f(a)>0, f(a)=f(b)$，所以 $f'(\xi_1)>0, f'(\xi_2)<0$。

因为 $f'(x)$ 在闭区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，开区间 $(\xi_1,\xi_2)$ 可导，所以存在 $c\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $f'(\xi_1)-f'(\xi_2)=f''(c)(\xi_1-\xi_2)$，由 $f'(\xi_1)-f'(\xi_2)>0, \xi_1-\xi_2<0$ 得 $f''(c)<0$。

四.（5 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(x)+1$，求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的表达式.

解：$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t \overset{xt=u}{=\!=\!=} \int_0^x f(u)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}f(x)+1$

$2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=xf(x)+2x$

上式两边对 $x$ 求导后整理得 $f(x)-xf'(x)=2$

所以 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2}\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{2}{x}+c$

$\Rightarrow\ f(x)=2+cx$（c 为任意常数）

五、当曲线 $y=x^2\quad(x\geq 0)$ 上某点 $P$ 处作一切线，使之与曲线以及 $x$ 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：

（1）切点 $P$ 的坐标；

（2）过切点 $P$ 的切线方程；

（3）由上述所围平面图绕 $x$ 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解：设切点 $\boldsymbol{A}$ 为 $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{x_0^2})$，由 $\boldsymbol{f'(x)=2x}$ 知，过 $\boldsymbol{A}$ 点的切线方程为

$\boldsymbol{y-x_0^2=2x_0(x-x_0)}$，即

$\boldsymbol{y=2x_0x-x_0^2}$，

令 $\boldsymbol{y=0}$，得切线与 $\boldsymbol{x}$ 轴的交点为 $\boldsymbol{(\frac{x_0}{2},0)}$ .

由题设

$$\frac{1}{12}=S=\int_0^{x_0} x^2dx-\int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0}(2xx_0-x_0^2)dx=\frac{x_0^3}{12},$$

可知 $x_0=1$，即切点 $A$ 的坐标为 $(1,1)$ .

于是切线方程为 $$y-1=2(x-1).$$

所求旋转体体积为 $$V=\int_0 \pi(x^2)^2dx-\int_{\frac{1}{2}}\pi(2x-1)^2dx=\frac{\pi}{30}.$$