班级：________ 姓名：________ 学号：________

密 封 线

北京林业大学

2023-2024学年第一学期课程期末考试试卷

课程名称： 线性代数 　　考试方式：闭卷（ ）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	统分人签名
得分										

考生注意事项：1、本试卷共 6 页，请查看试卷中是否有缺页。

2、考试结束后，考生不得将试卷、答题纸和草稿纸带出考场。

一、选择题(每小题 3 分，共 15 分)

得分	评 卷

1、 A、B 均为 n 阶方阵，则必有(　　)成立

（A） $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ 　（B） $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

（C） $AB=0 \Rightarrow A=0或B=0$

（D） $|A+AB|=0 \Leftrightarrow |A|=0或|E+B|=0$

2、已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$ ，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{13}-5a_{12} & \frac{1}{2}a_{12} \\ 2a_{21} & 3a_{23}-5a_{22} & \frac{1}{2}a_{22} \\ 2a_{31} & 3a_{33}-5a_{32} & \frac{1}{2}a_{32} \end{vmatrix}=$ (　　)

（A）6　　（B）-6　　（C）-30　　（D）-10

3、n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (n>3)线性无关，则下列说法**错误**的是(　　)

（A） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个向量线性无关

（B）令 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$，齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解

（C）对任意 n 维向量 β， β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一

（D） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意一个向量都不能由其余两个向量线性表示

4、设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r，P 为 m 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，则矩阵 PAQ 的秩为(　　)

（A）r　　（B） r+1　　（C） m　　（D） n

5、设线性方程组 Ax=0 有 6 个未知变量，系数矩阵 A 的秩 R(A)=2，则线性方程组基础解系中解向量的个数是（　　）

A、6　　B、5　　C、3　　D、4

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

得分	评 卷

1、已知 $\alpha=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}, A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，则 $A^3=$________.

2、设矩阵 $A_{5\times3}$ 的秩为 3，则 $A_{5\times3}$ 的行最简形矩阵为________.

3、设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,三维向量 $\alpha=(b,1,1)^T$，已知 $A\alpha$与α 线性相关，则 b=____________.

4、方阵 A 的一个特征值为 2，则行列式|A－2E|＝_______.（E 为单位矩阵）

5、设三元线性方程组 AX=b ，其中 b 为矩阵 A 的列向量之和，则可知方程的一个特解为______.

三、行列式的计算(第 1 题 3 分，第 2 题 5 分，共 8 分)

得 分	评 卷

1. $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2. $D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

班级：________ 姓名：________ 学号：________

密 封 线

四、矩阵的运算（共 10 分）

得分	评卷人

若 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\4&3\\-1&2\end{pmatrix}$，且 $AX=2X+B$，求矩阵 X.

五、向量组的线性相关性（第 1 题 8 分，第 2 题 10 分，共 18 分）

得分	评卷人

1.若 $b_1=a_1+a_2, b_2=a_2+a_3, b_3=a_3$，且已知向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，证明向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关.

2. 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\k\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 2，（1）求常数 k；（2）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，并把其余的向量用该极大无关组线性表示出来.

班级：________ 姓名：________ 学号：________

密 封 线

六、线性方程组的解（第 1 小题 12 分，第 2 小题 6 分，共 18 分）

得分	评卷人

1. 设三元线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 (A,b) 化为行阶梯形矩阵如下：$(A,b)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8\\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-4) & \lambda(\lambda-4)\end{pmatrix}$，试讨论当 λ 为何值时，该方程组（1）有惟一解；（2）无解；（3）有无穷多解，并求出有无穷多解时原方程组的通解.

2. 设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 2，已知 $\eta_1=(1,0,2,-1)^{\mathrm{T}},\eta_2=(1,2,1,-1)^{\mathrm{T}},\eta_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$ 是它的三个解向量，求该方程组的通解.

七、特征值和特征向量（共 9 分）

得分	评卷人

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的特征值和特征向量.

八、综合题（共 7 分）（各小题只要写出结果，不必写出过程）.

得	评 卷

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，若 $AB=C$.

1. 求矩阵 C

2. 将矩阵 A,C 按列向量组表达，即 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$C=(\gamma_1,\gamma_2)$.（1）试将向量 γ_1 用向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示出来；（2）写出方程组 $Ax=\gamma_2$ 的解

3. . 将矩阵 B,C 按行向量组表达，即 $B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{pmatrix}$，试将行向量 δ_2 用 B 的行向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示出来。