北京林业大学 2020--2021学年第二学期试卷 A

试卷名称：线性代数（56 学时）　　课程所在院系：理学院

考试班级________ 学号________ 姓名________ 成绩________

试卷说明：

1. 本次考试为 闭 卷考试。认真审题，请勿漏答；
2. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
3. 本试卷所有试题答案写在 试卷 纸上，其它无效；
4. 答题完毕，请将试卷纸正面向外对叠交回，不得带出考场；

一、判断题（下列命题你认为正确的在题后括号内打“ √”，错的打“×”）（每小题 3 分，共 12 分）

1、若方程组 $Ax=0$ 含有自由未知量，则方程组 $Ax=b$ 将有无穷多解.（ × ）

2、一个 n 阶矩阵 A 为非奇异的，当且仅当 A 相抵于 I （I 是单位矩阵.（ √ ）

3、任何两个迹相同的 n 阶矩阵是相似的.（ × ）

4、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A)=r(A^T)$.（ √ ）

二、单项选择题(在每小题四个备选答案中选出一个正确答案,填在题中括号内)(每题 3 分，共 15 分)

1、已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=M$，则 $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix}=$（ A ）

(A) k^2M；　(B) kM；　(C) k^4M；　(D) kM^2，

2、A,B 均为 $n(n\geq 2)$ 阶方阵，且 $AB=O$，则（ ***C*** ）.

(A) A,B 均为零矩阵；　(C) A,B 至少有一个矩阵为奇异矩阵；

(B) A,B 至少有一个为零矩阵；　(D) A,B 均为奇异矩阵.

3、$m>n$ 是 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的(***A***)条件.

(A) 充分；　(B) 必要；　(C) 充分必要；　(D) 必要而不充分的；

4、设 ξ_1,ξ_2 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，η_1,η_2 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则(***C***).

(A) $2\xi_1+\eta_1$ 为 $Ax=0$ 的解；　(B) $\eta_1+\eta_2$ 为 $Ax=b$ 的解；

(C) $\xi_1+\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解；　　　　(D) $\eta_1-\eta_2$ 为 $Ax=b$ 的解.

5、 设 A 是正交矩阵，α_j 是 A 的第 j 列，则 α_j 与 α_j 的内积等于（　B　）

(A)　0；　　(B)　1；　　(C)　2；　　(D)　3

三、填空(将正确答案填在题中横线上，每题 3 分，共 21 分)

1、设 A 为三阶方阵，且 $|A|=2$，则 $\left|(2A^T)^{-1}\right|=$ __1/16____

2、设 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma$ 都是 3 维行向量，且行列式

$$\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \beta_2\\ \gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_2\\ \beta_1\\ \gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma\end{vmatrix}=2，则 \begin{vmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ 2\gamma\end{vmatrix}=\underline{\quad 16\quad}.$$

3、设 A 是 4 阶矩阵，若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中含有一个解向量，

则 $AA^*=$ __O____

4、设矩阵 $D=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$，若 A、B 可逆，则 D 也可逆且 $D^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}}$

5、若方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2+6x_3-5x_4=3\\ x_2-4x_3+x_4=1\\ 4x_1-5x_2+8x_3-9x_4=k\end{cases}$ 有解，则 $k=$ __7____

6、设 $\alpha_1=(k,1,1),\alpha_2=(0,2,3),\alpha_3=(1,2,1)$，则当 $k=$__1/4____时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

7、t 满足 $\underline{-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}}$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的.

四、设 $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$，且 $AX=B+X$，求 X.　（8 分）

解 $AX=B+X\Rightarrow(A-I)X=B$, $|A-I|=\begin{vmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}10&5\\5&3\end{vmatrix}\neq 0,\Rightarrow$ 可逆,

$\because$

$$\therefore X=(A-I)^{-1}B\Rightarrow\big((A-I),B\big)=\begin{pmatrix}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-3&-4&-3&-7\\2&2&1&2&2\\1&-1&-2&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\0&-3&-4&-3&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2&1&-3\\0&1&1&-3&1\\0&-3&-4&-3&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2&1&-3\\0&1&1&-3&1\\0&0&1&12&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&25&5\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}$$

五、设$\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(2,1,5,6),\alpha_5=(1,-1,2,0)$

求已知的向量组的一个含有α_1,α_5的极大线性无关组，并将其余向量用它线性表示。

（8 分）

$$\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\-1&3&0&1&-1\\2&1&7&5&2\\4&2&14&6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&3&3&3&0\\0&1&1&1&0\\0&2&2&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

向量组的一个含有α_1,α_5的极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$， $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$； $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

六、求方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$的基础解系，并用它表示出方程组的通解. **(10 分)**

解：对系数矩阵作初等变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\to\quad\to\begin{pmatrix}3&0&-6&-5\\0&3&6&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \text{基础解系是}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$$

…

通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$ （k_3,k_4为任意常数）

七、 已知$\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(0,0,1,1),\alpha_3=(1,0,0,4),\alpha_4=(0,0,0,2)$ 是R^4的一组基，设$\varepsilon_1=(1,0,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0,0),\varepsilon_3=(0,0,1,0),\varepsilon_4=(0,0,0,1)$，(8 分)

1、 求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$的过渡矩阵.

2、 求ε_3在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标.

解：由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的过渡矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&4&2\end{pmatrix}$

所以由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$的过渡矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&-1&0&0\\-2&2&-0.5&0.5\end{pmatrix}$

故向量ε_3在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为: $(0,1,0,-\frac{1}{2})$

八、用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3$为标准形， 并写出 所用正交变换。(12 分)

解： $f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3\Rightarrow\begin{pmatrix}-5&2&3\\2&1&0\\3&0&-1\end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+5&-2&-3\\-2&\lambda-1&0\\-3&0&\lambda+1\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}-2&-3\\\lambda-1&0\end{vmatrix}+(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda+5&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=-9(\lambda-1)+(\lambda+1)[(\lambda-1)(\lambda+5)-4]=-9(\lambda-1)+(\lambda+1)[\lambda^2+4\lambda-9]$$

$$=-9\lambda+9+\lambda^3+4\lambda^2-9\lambda+\lambda^2+4\lambda-9=\lambda(\lambda^2+5\lambda-14)=\lambda(\lambda+7)(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -7$

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)^T, e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, . \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, e_3 = \left(\frac{-4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^T$$

正交矩阵 $P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$ 经正交变换 $x = Py$，$f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形：$2y_2^2 - 7y_3^2$

九、设 A, B 为 $n \times n$ 矩阵，证明: 如果 $AB = O$，那么 秩(A)+秩$(B) \le n$． (6 分)

证明：将 B 分块为：$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$，因为已知 $AB = O$

所以 $AB = A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n) = (0, 0, \cdots, 0)$

$\Rightarrow A\beta_i = 0; (i = 1, 2, \cdots, n) \Rightarrow \beta_i$ 是方程组 $Ax = 0$ 的解 …

取出方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系：$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$，其中 $r =$ 秩(A)

所以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性表出

故 秩(B) = 秩$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} \le$ 秩$\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}\} = n -$ 秩(A)

$\Rightarrow$ 秩(A)+秩$(B) \le n$

-