

北京林业大学 2007--2008 学年第一学期考试试卷

试卷名称: 数理统计 II (B 卷) 课程所在院系: 理学院

考试班级: _____ 学号: _____ 姓名: _____ 成绩: _____

试卷说明:

1. 本次考试为闭卷考试。本试卷共 4 页, 共 七大部分, 请勿漏答;
2. 考试时间为 120 分钟, 请掌握好答题时间;
3. 答题之前, 请将试卷上的考试班级、学号、姓名填写清楚;
4. 所有试题答案写在试卷上;
5. 答题完毕, 请将试卷交回, 不得带出考场;
6. 考试中心提示: 请你遵守考场纪律, 参与公平竞争!



答题中可能用到的数据如下:

$$\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(2.33) = 0.99, z_{0.025} = 1.96, t_{0.025}(4) = 2.7764, \chi^2_{0.025}(4) = 11.143, \chi^2_{0.975}(4) = 0.484.$$

一. 填空 (每空 2 分, 共 32 分)

1. 设 A, B, C 为三个随机事件, 则事件 " A, B, C 至少有一个不发生" 可表示为 \overline{ABC} (或 $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$).
2. 连续投掷三次硬币, 则至少有一次出现正面的概率等于 $7/8$ (或者 0.875).
3. 已知 $X \sim N(1, 4)$, 则 $P\{0 < X < 2\} =$ 0.383 .
4. 已知 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.2$, 且 A, B 相互独立, 则 $P(A \cup B) =$ 0.52 .
5. 已知 X 服从区间 $[a, b]$ 上的均匀分布, 又 $EX = 2, DY = 3$, 则 $a =$ -1 , $b =$ 5 .
6. 已知 \bar{X} 表示从某个总体 X 中抽取出来的容量为 8 的简单随机样本的样本平均, 且 $E\bar{X} = 4, D\bar{X} = 6$. 则 $EX =$ 4 , $DX =$ 48 .
7. 连续型随机变量 X 的概率密度函数为: $f(x) = \begin{cases} A \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则 $A =$ 1 ,
 $P(\frac{\pi}{4} < X < \pi) =$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 0.7071 .
8. 已知 $X \sim N(-2, 5)$, 常数 k 满足 $P\{X > k\} = P\{X \leq k\}$, 则 $k =$ -2 .
9. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立且 $X \sim N(1, 2), Y \sim N(-1, 3)$, 则 $-2X + Y$ 所服从的分布为 $N(-3, 11)$.
10. 已知 X 服从参数为 1 (其中 $\lambda > 0$) 的泊松分布, 且 $EX^2 =$ 2 .

11. 已知 $D\xi=25$, $D\eta=36$, 且 ξ 和 η 的相关系数 $\rho_{\xi\eta}=0.4$, 则 $D(\xi-\eta)=$ 37。

12. 设 (X,Y) 的分布律为:

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 |
|------------------|-------|-------|--------|
| 1 | $1/6$ | $1/9$ | $1/18$ |
| 2 | $1/3$ | m | n |

若 X 和 Y 相互独立, 则 $m=$ $2/9$, $n=$ $1/9$ 。

二. (10 分) 已知离散型随机变量 X 的概率分布为:

| X | -1 | 0 | 1 |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| P | $\frac{3}{2m}$ | $\frac{1}{3m}$ | $\frac{1}{2m}$ |

- (1) 求常数 m 的值;
- (2) 求 X 的分布函数 $F(x)$;
- (3) 计算 X 的数学期望 EX 和方差 DX 。

解: (1) 由分布律性质知: $\frac{3}{2m} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{2m} = 1$, 解得 $m=7/3$ 3 分

(2) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 9/14, & -1 \leq x < 0 \\ 11/14, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 6 分

(3) X 的分布律为:

| X | -1 | 0 | 1 |
|-----|--------|--------|--------|
| P | $9/14$ | $2/14$ | $3/14$ |

所以 $EX = -1 \times 9/14 + 0 \times 2/14 + 1 \times 3/14 = -3/7$ 8 分

又因为: $EX^2 = (-1)^2 \times 9/14 + 0^2 \times 2/14 + 1^2 \times 3/14 = 6/7$ 9 分

所以: $DX = EX^2 + (EX)^2 = 33/49$ 10 分

三. (10 分) 甲乙两个车间生产同一种电池, 甲车间生产的电池占全厂的 45%, 乙车间生产的电池占全厂 55%; 甲、乙两车间的次品率分别为 4%、5%。(1) 求全厂电池的次品率, (2) 现在从待出厂电池中检查出 1 个次品, 求它是甲车间生产的概率。

解: 用 A 表示“甲厂产品”, 用 B 表示“次品率”, 则

$$P(A) = \frac{45}{100}, P(\bar{A}) = \frac{55}{100}, P(B|A) = \frac{4}{100}, P(B|\bar{A}) = \frac{5}{100}$$

$$(1) \quad P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{45}{100} \times \frac{4}{100} + \frac{55}{100} \times \frac{5}{100} = 0.0455 \quad \text{——5分}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = 36/91 = 0.396 \quad \text{10分}$$

四. (8分) 已知 X 和 Y 都是连续型随机变量, 设 X 的概率密度函数 $f_X(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$,

且 $Y = X - 1$, 求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解: 法 1:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \cdots \cdots \cdots 1 \text{分} \\ &= P\{X - 1 \leq y\} \\ &= P\{X \leq y + 1\} \cdots \cdots \cdots 3 \text{分} \\ &= F_X(y + 1) \cdots \cdots \cdots 5 \text{分} \end{aligned}$$

两边对 y 求导, 得:

$$f_Y(y) = f_X(y+1) \times (y+1)' = \frac{1}{\pi[(y+1)^2+1]} = \frac{1}{\pi(y^2+2y+2)} \quad \text{——8分}$$

法 2: $X = Y + 1$, 2分

所以

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(y+1) \cdot (y+1)' \cdots \cdots \cdots 5 \text{分} \\ &= \frac{1}{\pi[(y+1)^2+1]} = \frac{1}{\pi(y^2+2y+2)} \cdots \cdots \cdots 8 \text{分} \end{aligned}$$

五. (10分) 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数为:

$$F(x, y) = A \left(B + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(C + \arctan \frac{y}{3} \right),$$

(1) 求常数 A 、 B 、 C ;

(2) 求 X 和 Y 各自的边缘分布函数 $F_X(x)$ 、 $F_Y(y)$, 并且判断 X 和 Y 是否相互独立.

解: (1) 由分布函数的性质, 得

$$1 = F(+\infty, +\infty) = A \left(B + \frac{\pi}{2} \right) \left(C + \frac{\pi}{2} \right) \cdots \cdots \cdots 1 \text{分}$$

$$0 = F(x, -\infty) = A \left(B + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(C - \frac{\pi}{2} \right) \cdots \cdots \cdots 2 \text{分}$$

$$0 = F(-\infty, y) = A \left(B - \frac{\pi}{2} \right) \left(C + \arctan \frac{y}{3} \right) \cdots \cdots \cdots 3 \text{分}$$

$$\text{由以上三式可得, } A = \frac{1}{\pi^2}, \quad B = \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{\pi}{2}, \quad \cdots \cdots \cdots 4 \text{分}$$

(2) X 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right)$$

6 分

Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right)$$

8 分

$$\text{显然: } F(x, y) = A \left(B + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(C + \arctan \frac{y}{3} \right) = F_X(x) \times F_Y(y) \dots$$

9 分

所以 X 和 Y 相互独立。  10 分

六. (10 分) 某小区里的电影院为小区中的 1000 名居民服务。假定在某个时刻每个居民以 0.5 的概率到该电影院看电影。问电影院应该设多少个座位才能以 99% 的概率保证来看电影的观众都有座位?

解: 假设准备 x 个座; 用 ξ 表示去看电影的观众人数,

显然 ξ 服从 $B(1000, 0.5)$, 1 分

$np=500$, 2 分,

$np(1-p)=250$, 3 分

因为 $n=200$, 充分大, 由中心极限定理可以认为

ξ 近似服从 $N(500, 250)$, 5 分,

根据题意知道: $\therefore P(\xi \leq x) \geq 0.99$ 7 分

所以: $\Phi\left(\frac{x-500}{\sqrt{250}}\right) \geq 0.99$ 8 分

即 $\frac{x-500}{\sqrt{250}} \geq 2.33$ 9 分

解得 $x \geq 536.84$, 至少准备 537 个座位 10 分



七. (12 分) 已知某批容器的重量 (单位: 千克) 服从正态分布, 现独立地抽取 5 件, 测得它们的平均重量分别为 21, 20, 19, 22, 18.

试求 (1) 该批容器的重量的平均值 μ 的置信度为 95% 的置信区间.

(2) 该批容器的重量的方差 σ^2 的置信度为 95% 的置信区间.

解: $\bar{X} = 20$, $s^2 = 2.5$, $s = 1.58$, $\alpha = 0.05$, $n = 5$ 2 分

$$(1) \mu \in \left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right) \dots 4 分$$

$$= \left(20 - 2.7764 \times \frac{1.58}{\sqrt{5}}, 20 + 2.7764 \times \frac{1.58}{\sqrt{5}} \right) \dots 5 分$$

$$= (18.0371, 21.963) \dots 7 分$$

$$(2) \sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right) = \left(\frac{4 \times 2.5}{11.143}, \frac{4 \times 2.5}{0.484} \right) = (0.8974, 20.6611)$$

———— 9 分 ———— 11 分 ———— 12 分

八. (8 分) 已知某批矿砂的含碳量 (单位: %) 服从正态分布, 现在从这批矿砂中随机抽取 5 个样品, 经测定它们的含碳量分别为: 3.25, 3.27, 3.24, 3.26, 3.24, 问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下能否认为这批矿砂的平均含碳量为 3.25.

解: 计算得样本平均 $\bar{x} = 3.252$, 样本标准差 $s = 0.01304$ 2 分

(1) 建立统计假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 3.25$; $H_1: \mu \neq 3.25$ 3 分

(2) 建立统计量: $T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ 4 分

(3) 在 H_0 成立前提下计算: $|T| = \left| \frac{3.252 - 3.25}{0.01304/\sqrt{5}} \right| = 0.343$ 5 分

由 $\alpha = 0.05$ 求得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(4) = 2.7764$ 6 分

(4) 因为 $|T| < t_{\frac{\alpha}{2}}(4)$, 接受 H_0 7 分

即不可以认为这批矿砂的平均含碳量为 3.25. 8 分

北京林业大学 2009—2010 学年第 二 学期考试试卷

课程名称: 数理统计 B (A 卷) 课程所在学院: 理学院
 考试班级 学号 姓名 成绩

试卷说明:

7. 本次考试为闭卷考试。本试卷共计四页, 共十大部分, 请勿漏答;
8. 考试时间为120分钟, 请掌握好答题时间;
9. 答题之前, 请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚;
10. 答案写在本试卷上;

一、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 在 10 个药丸中有 3 丸已失效, 从中任取 4 丸, 其中有 2 丸失效的概率为 $3/10$ 。
2. 已知 $P(A)=0.4$, $P(B)=0.3$, 且 A、B 相互独立, 则 $P(A \cup B) =$ 0.58。
3. 已知 5% 的男人和 0.25% 的女人是色盲, 假设男人女人各占一半。现随机地挑选一人, 此人恰是色盲患者的概率为 2.625%。
4. X 服从参数为 λ (其中 $\lambda > 0$) 的泊松 (Poisson) 分布, 且 $E[(X-1)(X-2)] = 1$, 则 $\lambda =$ 1。

5. 已知 X_1, X_2, \dots, X_9 是来自总体 X 的简单随机样本, $EX = \mu$ 。令 $\hat{\theta} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^4 X_i + C \sum_{i=5}^9 X_i$,

则当 $C =$ 1/25 时, $\hat{\theta}$ 为总体期望 μ 的无偏估计。