线性代数 A 期末练习答案

一、选择题（本题共 7 小题，每题 3 分，共 21 分）

1. 下列选项中是五阶行列式$\left|a_{ij}\right|(i,j=1,2,\cdots 5)$中一项的是（ D ）

(A) $a_{12}a_{31}a_{23}a_{45}a_{34}$ (B) $-a_{31}a_{22}a_{43}a_{14}a_{55}$ (C) $-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{51}$ (D) $a_{12}a_{21}a_{55}a_{43}a_{34}$

2. 行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & a_8 \end{vmatrix}$中元素$a_7$的代数余子式为（ B ）

(A) $a_2a_3a_6-a_2a_4a_5$ (B) $a_2a_4a_5-a_2a_3a_6$ (C) $a_1a_3a_6-a_2a_4a_5$ (D) $a_3a_6a_8-a_4a_5a_8$

3. 设A,B均为n阶矩阵，下列关系一定成立的是（ D ）

(A) $(AB)^2=A^2B^2$ (B) $(AB)^T=A^TB^T$ (C) $|A+B|=|A|+|B|$ (D) $|AB|=|BA|$

4. 设A,B,C均为n阶矩阵，I为单位矩阵，且$ABC=I$，则下列矩阵乘积一定等于I的是（ C ）

(A) ACB (B) BAC (C) CAB (D) CBA

5. 若6×5矩阵 A 的秩为$r(A)=3$，对应的齐次线性方程组为$Ax=0$，则其基础解系中解向量个数为（ A ）

(A) 2 个 (B) 3 个 (C) 5 个 (D) 6 个

6. 已知$\lambda_0=2$是可逆矩阵A的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$必有一个特征值为（ B ）

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{4}{3}$

7. 若二次型$f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为 2，则$c$等于（ B ）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

二、填空题（本题共 7 小题，每题 3 分，共 21 分）

1. 设 2 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=m$，则$\begin{vmatrix} a_{12} & 2a_{11}+4a_{12} \\ a_{22} & 2a_{21}+4a_{22} \end{vmatrix}=$ __—2m__.

2. 如果齐次方程组$\begin{cases} 4x_1+kx_2=0 \\ kx_1+4x_2=0 \end{cases}$有非零解，那么$k=$ __± 4__.

3. 已知 $AP=PB$, 其中矩阵 $P=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 则 $A=$ ____$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&2\\1&4\end{pmatrix}$____.

4. 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=2$，则 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-3A^*\right|=$ ____$-27/2$____.

5. 若 n 阶矩阵 A 满足方程 $A^2-A-2I=0$, 其中 I 是单位矩阵，则 $(A+2I)^{-1}=$ $\frac{1}{4}(3I-A)$

6. 已知向量 $\alpha=(-2,4,t)^T$ 与 $\beta=(2,-2,3)^T$ 正交，则 $t=$ ____4____.

7. 已知 $f=x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3+2\lambda x_2x_3$ 为正定二次型，则 λ 的取值范围为 ____$-\sqrt{3}<\lambda<\sqrt{3}$____.

三.（8 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\1&1&1&1\\0&1&2&1\\1&2&3&4\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\1&1&1&1\\0&1&2&1\\1&2&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&1&-2\\1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&1&2&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2&1&-2\\1&2&1\\1&2&3\end{vmatrix}=10$

四. (10 分)已知向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(3,0,7,14)^T,\alpha_4=(2,1,5,6)^T$ 和 $\alpha_5=(1,-1,2,0)^T$，求该向量组的极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出.

解：

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$

$$=\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\-1&3&0&1&-1\\2&1&7&5&2\\4&2&14&6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&3&3&3&0\\0&1&1&1&0\\0&2&2&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\ldots(6\text{分})$$

通过观察发现可取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大线性无关组（2 分），

且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$（2 分）

极大无线性无关组也可以是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$。

五. (10 分)线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=4 \\ -x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$，其中 λ 是参数. 问：当 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？当有无穷多解时，求出其全部解.

解：系数矩阵行列式为 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-4)$ （3 分）

当 $|A|\neq 0$ 时，即 $\lambda\neq -1$ 且 $\lambda\neq 4$，有唯一解 （2 分）

当 $\lambda=-1$ 时， $\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1,r_3-r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ 无解 （1 分）

当 $\lambda=4$ 时，$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1,r_3-r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

方程组有无穷多解, （2 分） 其解为 $x_1=-3k, x_2=4-k, x_3=k$, 其中 k 为任意常数 （2 分）

或者 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

六.（8 分）设 3 阶矩阵 A 满足 $|A-I|=0,|A+2I|=0,|2A+3I|=0$，其中 I 为 3 阶单位矩阵，

若 $\varphi(A)=A^2-A+2I$，求 $\varphi(A)$ 的特征值及 $\varphi(A)$ 的行列式.

解：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2,\lambda_3=-\dfrac{3}{2}$, …（3 分）

因此，$\varphi(A)$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=8$，$\lambda_2=\dfrac{23}{4}$, …（3 分）

$\varphi(A)$ 的行列式为 92 …（2 分）

七. (14 分)已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$，求正交变换 $x=Qy$，将二次型转化为标准形.

解： $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$，由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$ .....（2 分）

可得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$ .....（2 分）

由 $(\lambda_i I-A)x=0$ 可求出 0 相应的特征向量

$\lambda I-A=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&-4&4\\-2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，特征向量为 $\xi_1=(2,1,0)^T,\xi_2=(-2,0,1)^T$ .....（2 分）

做正交化，再作单位化得 $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)^T,e_2=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}(-2,4,5)^T$ .....（2 分）

再由 $(\lambda_i I-A)x=0$ 可求出 9 相应的特征向量

$\lambda I-A=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&1&-1\\2&5&4\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-9&-9\\2&5&4\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\2&5&4\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

特征向量为 $\xi_3=(1,-2,2)^T$，再作单位化可得 $e_3=\dfrac{1}{3}(1,-2,2)^T$ .....（4 分）

令 $Q=(e_1,e_2,e_3)$，则正交变换 $x=Qy$，二次型化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=9y_3^2$. .....（2 分）

八. (8 分) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n(n>1)$ 线性无关，且 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，证明：向量 $\beta-\alpha_1$，$\beta-\alpha_2$，$\cdots\beta-\alpha_n$ 线性无关.

证明：

$$k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)\cdots+k_s(\beta-\alpha_n)=0$$
$$\Rightarrow(k_2+\cdots k_n)\alpha_1+(k_1+k_3+\cdots k_n)\alpha_2+\cdots+(k_1+\cdots k_{n-1})\alpha_n=0$$ .....（2 分）

则由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关可得如下方程组

$\begin{cases}k_2+k_3\cdots+k_n=0\\k_1+k_3\cdots+k_n=0\\\cdots\\k_1+k_2\cdots+k_{n-1}=0\end{cases}$，...（2 分）其系数行列式 $\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}_n=(-1)^{n-1}(n-1)\neq0$ .....（2 分）

因此，方程组只有 0 解，也即向量 $\beta-\alpha_1$，$\beta-\alpha_2$，$\cdots\beta-\alpha_n$ 线性无关（2 分）