

# 北京林业大学 2017--2018 学年第一学期期末试卷

试卷名称： 高等数学上 (理工类)课程所在院系： 理学院

考试班级学号姓名成绩

试卷说明：

1. 本次考试为闭卷考试。本试卷共计 4 页，共 8 大部分，请勿漏答；
2. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
3. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
4. 本试卷所有试题答案直接写在试卷上；（特殊要求请详细说明）
5. 答题完毕，请将试卷和答题纸正面向外交回，不得带出考场；

考试中心提示：请你遵守考场纪律，参与公平竞争！

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

得分	评卷人

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 已知  $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 6$ ，则  $f(x) = \underline{x^2 + 4}$ 。

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1 + x)]^{\frac{2}{x}} = \underline{e^2}$ 。

3. 设  $f(x) = \begin{cases} a + 3\sin x, & x \leq 0 \\ (1+x)_x^2, & x > 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续，则  $a = \underline{e^2}$ 。

4. 设函数  $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(3+t^2) dt$ ，则  $f'(x) = \underline{2x \ln(3+x^4)}$ 。

5. 函数  $f(x) = x(2x-1)^2(x+3)^3$ ，则  $f^{(6)}(x) = \underline{2880}$ 。

6.  $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = \underline{\frac{1}{2}(x + \tan x) + c}$ 。

7.  $\int_{-2}^2 \frac{\sin^5 x + |x|}{2 + x^2} dx = \underline{\ln 3}$ 。

8.  $f(x)$  为连续函数，且  $f(x)$  为奇函数，则  $\int_{-2}^2 [f(x) + 1] x^2 dx = \underline{\frac{16}{3}}$ 。

9. 已知  $y = f(\frac{3x-2}{3x+2})$ ,  $f'(x) = \arcsin x^2$ ，则  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \underline{\frac{3\pi}{2}}$ 。

10. 设  $x = et \sin t$ ,  $y = et \cos t$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$ .

二、计算题（每题 5 分，共 35 分）

1. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin x}$

2 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

解：解：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{2x \sin x + x^2 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{x^2}}{2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x} = 0$$

$$= -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-\frac{1}{x^2})}{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= 0$$

或

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{x^2}}{6x}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

3. 计算  $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx$

4. 计算  $\int x \ln(1+x) dx$

解：  $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx$  解：  $\int x \ln(1+x) dx$

$$= \int \frac{e^{2x} + e^x - e^x}{1 + e^x} dx = \frac{1}{2} \int \ln(1+x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(e^{2x} + e^x) - e^x}{1 + e^x} dx = \frac{1}{2} (x^2 \ln(1+x) - \int \frac{x^2}{1+x} dx) \\
&= \int e^x dx - \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \frac{1}{2} (x^2 \ln(1+x) - \int (x-1 + \frac{1}{1+x}) dx) \\
&= e^x - \ln(1 + e^x) + C = \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln(1+x)
\end{aligned}$$

5. 设  $y = x^{2x} + \arctan(2x)$ , 求  $dy$ ,

解: 令  $u = x^{2x}$

$$\ln u = 2x \ln x$$

$$\frac{u'}{u} = 2 \ln x + 2$$

$$u' = x^{2x} (2 \ln x + 2)$$

$$dy = [x^{2x} (2 \ln x + 2)$$

$$+ \frac{2}{1 + 4x^2}] dx$$

6. 计算  $\int_0^1 \ln(1 + \sqrt{x}) dx$ . 解: 令  $\sqrt{x} = t$ , 则  $dx = 2t dt$

$$\text{原式} = \int_0^1 \ln(1+t) dt^2 = t^2 \ln(1+t) \Big|_0^1 - \int_0^1 t^2 d \ln(1+t)$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 (t - 1 + \frac{1}{1+t}) dt$$

$$= \frac{1}{2}$$

7. 已知  $y = x + \sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x$ , 求  $dy$ 。

$$dy = (1 + \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}} \arcsin 2x + \sqrt{1-4x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}) dx = (3 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} \arcsin 2x) dx$$

8、已知  $\sqrt{x^2 + y^2} = 5e^{\arctan \frac{y}{x}}$ ，求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

解：  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln 5 + \arctan \frac{y}{x}$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{xdy - ydx}{1 + \frac{y^2}{x^2}}, \quad xdx + ydy = xdy - ydx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x - y)(1 + \frac{dy}{dx}) - (x + y)(1 - \frac{dy}{dx})}{(x - y)^2} = \frac{-2y + 2x \frac{dy}{dx}}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}.$$

### 三、证明题

1. 设  $x > 0$ ，证明  $\frac{2}{2x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x})$

证明：  $f(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln(1 + \frac{1}{x})$

$$f'(x) = -\frac{4}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x(1+x)(2x+1)^2} > 0$$

所以，  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加，又  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

故当  $x > 0$  时，  $f(x) < 0$ ，即  $\frac{2}{2x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x})$

2. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续，在开区间  $(a, b)$  内具有二阶导数，且

$f(a) = f(b)$ ，  $f(x)$  在  $x = a$  处的右导数  $f'_+(a)$  为正，证明在  $(a, b)$  内至少存在

一点  $c$ ，使得  $f''(c) < 0$

证明：因为  $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ ，根据极限的局部保号性知，存在  $\delta > 0$ ，

使得当  $x \in (a, a + \delta)$  时，有  $f(x) - f(a) > 0$ ，

取  $x_0 \in (a, a + \delta)$ ，根据拉格朗日中值定理知，分别在存在

$\xi_1 \in [a, x_0]$ ， $\xi_2 \in [x_0, b]$  使得

$$f(x_0) - f(a) = f'(\xi_1)(x_0 - a), f(x_0) - f(b) = f'(\xi_2)(x_0 - b)$$

由于  $f(x_0) - f(a) > 0, f(a) = f(b)$ , 所以  $f'(\xi_1) > 0, f'(\xi_2) < 0$ 。

因为  $f'(x)$  在闭区间  $[\xi_1, \xi_2]$  上连续, 开区间  $(\xi_1, \xi_2)$  可导, 所以存在  $c \in (\xi_1, \xi_2)$ , 使

$$f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = f''(c)(\xi_1 - \xi_2), \text{ 由 } f'(\xi_1) - f'(\xi_2) > 0, \xi_1 - \xi_2 < 0 \text{ 得 } f''(c) < 0。$$

四. (5 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $\int_0^1 f(tx) dt = \frac{1}{2}f(x) + 1$ , 求  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的表达式.

$$\text{解: } \int_0^1 f(tx) dt \stackrel{xt=u}{=} \int_0^x f(u) \cdot \frac{1}{x} du = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du = \frac{1}{2}f(x) + 1$$

$$2 \int_0^x f(u) du = xf(x) + 2x$$

上式两边对  $x$  求导后整理得  $f(x) - xf'(x) = 2$

$$\text{所以 } \left( \frac{f(x)}{x} \right)' = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x} + c$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 + cx \quad (c \text{ 为任意常数})$$

五、当曲线  $y = x^2$  ( $x \geq 0$ ) 上某点  $P$  处作一切线, 使之与曲线以及  $x$  轴所围图形

的面积为  $\frac{1}{12}$ , 试求:

- (1) 切点  $P$  的坐标;
- (2) 过切点  $P$  的切线方程;
- (3) 由上述所围平面图绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积.

解: 设切点  $A$  为  $(x_0, x_0^2)$ , 由  $f'(x) = 2x$  知, 过  $A$  点的切线方程为

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0), \text{ 即}$$

$$y = 2x_0x - x_0^2,$$

令  $y = 0$ , 得切线与  $x$  轴的交点为  $(\frac{x_0}{2}, 0)$ .

由题设

$$\frac{1}{12}=S=\int\limits_0^{x_0}x^2dx-\int\limits_0^{x_0}(2xx_0-x_0^2)dx=\frac{x_0^3}{12},$$

可知  $x_0=1$ ，即切点  $A$  的坐标为  $(1,1)$  .

于是切线方程为  $y-1=2(x-1)$  .

所求旋转体体积为  $V=\int\limits_0^1\pi(x^2)^2dx-\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\pi(2x-1)^2dx=\frac{\pi}{30}.$