线性代数总复习 I 答案

考试班级________________学号_____________姓名_____________成绩____________

一、填空题（本题共 12 小题，每题 3 分，共 36 分）

1. 已知 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$ ________3 or -1________.

2. 如果齐次方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解，那么 $\lambda =$ ______$\pm\sqrt{3}$______.

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 设 A 为三阶方阵，且 $|A| = 2$ 则 $|3A^{-1} - A^*| =$ __$\frac{1}{2}$__.

5. 已知矩阵 A 的秩为 n-1，且 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个互不相同的解，则 $Ax = b$ 的通解为________$\eta_1 + k(\eta_1 - \eta_2), k$ 为任意常数________.

6. 设 $\alpha = (2, -1, 5)^T$，$\beta = (-1, 1, 1)^T$，则 $\alpha + \beta = (1，0，6)^T$.

7. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 - \alpha_2$，$\alpha_2 - \alpha_3$，$\alpha_3 - \alpha_1$ 是___线性相关___（填“线性相关”或“线性无关”）.

解：设 $k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(\alpha_2 - \alpha_3) + k_3(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$，则

$(k_1 - k_3)\alpha_1 + (k_2 - k_1)\alpha_2 + (k_3 - k_2)\alpha_3 = 0$，因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，故

$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_2 - k_1 = 0 \\ k_3 - k_2 = 0 \end{cases}$，则 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则方程组 $\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_2 - k_1 = 0 \\ k_3 - k_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解，所以向量组 $\alpha_1 - \alpha_2$，$\alpha_2 - \alpha_3$，$\alpha_3 - \alpha_1$ 是线性相关的。

8. 矩阵$\begin{pmatrix}3 & 10\\ 2 & 2\end{pmatrix}$的全部特征值为_____-2, 7_____.

9. 设三阶矩阵 A 的 3 个特征值为 2，3，4，则行列式$|A|$=_____24_____.

10. 与$\alpha_1=(1,-2,3),\alpha_2=(0,2,-5)$都正交的单位向量为_____$\underline{(\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{2}{3\sqrt{5}})}$_____.

解：设与$\alpha_1=(1,-2,3),\alpha_2=(0,2,-5)$都正交的向量为$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)$，则

$$\begin{matrix}(\alpha_1,\alpha_3)=x_1-2x_2+3x_3=0\\(\alpha_1,\alpha_2)=2x_2-5x_3=0\end{matrix},\quad \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 2 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -\frac{5}{2}\end{pmatrix},\text{ 解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}2\\ \frac{5}{2}\\1\end{pmatrix},$$

单位化得$\underline{(\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{2}{3\sqrt{5}})}$。

11. 若 3 元实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形为$4y_1^2-3y_2^2$，则其规范形为_____$\underline{z_1^2-z_2^2}$__.

12. 已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2$为正定二次型，则$\lambda$的取值范围为$\underline{-1<\lambda<1}$.

解：二次型矩阵为$\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$，二次型矩阵为正定矩阵，则所有顺序主子式都大于零，故

$$1>0,\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & 1\end{vmatrix}=1-\lambda^2>0,\begin{vmatrix}1 & \lambda & 0\\ \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}=5(1-\lambda^2)>0$$，解得$\underline{-1<\lambda<1}$。

二、计算题（本题共 6 小题，每题 8 分，共 48 分）

1．计算行列式$\begin{vmatrix}a-1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & a-2 & 1 & \cdots & 1\\ 3 & 1 & a-3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & 1 & 1 & \cdots & a-n\end{vmatrix}$.

解: 原式$=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3-a & a-3 & 0 & \cdots & 0 \\ 4-a & 0 & a-4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1-a & 0 & 0 & \cdots & a-n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+n-2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-n-1 \end{vmatrix}$

$=(a+n-2)(a-3)\cdots(a-n-1)$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足关系式 $A-XA=X$，求 X .

解：$A-XA=X \Rightarrow XA+X=A \Rightarrow X(A+E)=A \Rightarrow X=A(A+E)^{-1}$

$$X=A(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3. 线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=0 \\ x_1-4x_2+ax_3=b \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$，问：$a,b$ 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

在有无穷多解时求出其全部解.

解：对其增广矩阵进行高斯消元

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & a & b \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & a+1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2\times\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & b+1 \end{pmatrix}$$ 当

$a=-2$，$b\neq-1$ 时，方程组无解 ；当 $a\neq-2$ 时，方程组有唯一解；

当 $a=-2$，$b=-1$ 时，方程组有无穷多解, 其解为：

$$x_1=3-2k, x_2=1-k, x_3=k,\ k \text{ 为任意常数.}$$

4. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,-3,1), \alpha_2=(2,3,-1,2), \alpha_3=(3,1,-2,-2), \alpha_4=(0,4,-2,5)$，求其极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出.

解：$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&3&1&4\\-3&-1&-2&-2\\1&2&-2&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&5&-4\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为其一个极大线性无关组，且$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

5. 设n维向量$\alpha=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})$，矩阵$A=E-\alpha^T\alpha$，$B=E+2\alpha^T\alpha$，求$AB$.

解:（法一）$\alpha\alpha^T=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})^T=\frac{1}{2}$

$$AB=(E-\alpha^T\alpha)(E+2\alpha^T\alpha)=E+\alpha^T\alpha-2\alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha=E$$

（法二）$\alpha^T\alpha=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\vdots\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&\cdots&0&\frac{1}{4}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\\frac{1}{4}&0&\cdots&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

$$A=E-\alpha^T\alpha=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&\cdots&0&\frac{1}{4}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\\frac{1}{4}&0&\cdots&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&0&\cdots&0&-\frac{1}{4}\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\-\frac{1}{4}&0&\cdots&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$B=E+2\alpha^T\alpha=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&\cdots&0&\frac{1}{4}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\\frac{1}{4}&0&\cdots&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&\cdots&0&\frac{1}{2}\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\\frac{1}{2}&0&\cdots&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&0&\cdots&0&-\frac{1}{4}\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\-\frac{1}{4}&0&\cdots&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&\cdots&0&\frac{1}{2}\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\\frac{1}{2}&0&\cdots&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=E$$

6. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 的值及所用的正交变换矩阵.

解:二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$,由二次型的标准形知 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

由于 $|A|=2(9-a^2)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=10 \quad\Rightarrow\quad a=\pm 2$.

当 $a=2$ 时,对应于 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ 的特征向量分别为 $(0,1,-1),(1,0,0),(0,1,1)$,

所用正交变换矩阵为 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$

当 $a=-2$ 时,对应于 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ 的特征向量分别为 $(0,1,1),(1,0,0),(0,1,-1)$,

所用正交变换矩阵为$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

四、证明题(本大题共 3 小题, 共 16 分)

1. 设 n 阶矩阵阵 A 满足 $A^2+2A+3E=O$，证明 $A+3E$ 可逆，并求其逆矩阵. (6 分)

证明: 因为$(A+3E)(A-E)=-6E$,

所以$|(A+3E)(A-E)|=|A+3E||A-E|=|-6E|\neq 0$,即$|A+3E|\neq 0$,故可逆;

且$(A+3E)^{-1}=-\frac{1}{6}(A-E)$.

2. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足:（1） $\alpha_1\neq 0$;（2）每个$\alpha_i(i=2,3,\cdots,s)$都不能由它前面的向量线性相关，即不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出. 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. （5 分）

证明: 若$s=1$, 由(1)知结论成立.

下面设$s\geq 2$, 反设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关,

即存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$成立.

设从后往前看第一个不为零的数为$k_t(1\leq t\leq s)$, 即有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0,\ \ k_t\neq 0$,

故$\alpha_t=-\frac{k_1}{k_t}\alpha_1-\frac{k_2}{k_t}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{t-1}}{k_t}\alpha_{t-1}$, 与(2)矛盾, 故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

3. 若 A 是正定矩阵， A^* 是其伴随矩阵，证明 A^* 是正定的.(5 分)

证明: 因为 A 是正定矩阵,故 A 的特征值$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, 且$|A|>0$.

又$A^*=|A|A^{-1}$; $\left(A^*\right)^T=\left(|A|A^{-1}\right)^T=|A|\left(A^T\right)^{-1}=|A|A^{-1}=A^*$, 故 A^* 是对称矩阵,

且 A^* 的特征值为$|A|\lambda_i^{-1}>0(i=1,2,\cdots,n)$, 所以 A^* 是正定的.