组合

forgottencsc

Sept 19, 2019

组合

容斥原理与子集卷积

Zeta 变换与 Moebius 变换

定义：

$$(\zeta f)(S)=\sum_{T\subseteq S}f(T)$$

$$(\mu f)(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$$

定理：

$$(\mu\zeta f)(S)=(\zeta\mu f)(S)=f(S)$$

也可写作：

$$g(S)=\sum_{T\subseteq S}f(T)\Rightarrow f(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}g(T)$$

证明：

$$\begin{aligned}(\mu\zeta f)(S)&=\sum_{T\subseteq S}(\zeta f)(T)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}\sum_{U\subseteq T}f(U)\\&=\sum_{U\subseteq S}f(U)\sum_{U\subseteq T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}=\sum_{U\subseteq S}f(U)\sum_{V\subseteq S-U}(-1)^{|V|}\\&=\sum_{U\subseteq S}f(U)[|S|-|U|=0]=f(S)\end{aligned}$$

注：同时有

$$g(S)=\sum_{T\supseteq S}f(T)\Rightarrow f(S)=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T|-|S|}g(T)$$

定义：容斥原理背景

设有许多性质 P_i, 性质的全集为 U, $A_i=\{x|P_i(x)\}$ 表示满足第 i 个性质的集合

对于一些性质的集合 S, 定义

$$f(S)=\{x|\exists i\in S,P_i(x)\}=\left|\bigcup_{i\in S}A_i\right|$$

$$g(S)=\{x|\forall i\in S,P_i(x)\}=\left|\bigcap_{i\in S}A_i\right|$$

$$h(S)=\{x|(\forall i\in S,P_i(x))\land(\forall i\notin S,\neg P_i(x)\}=\left|\bigcap_{i\in S}A_i-\bigcup_{i\notin S}A_i\right|$$

则由定义有：

$$f(U)=\sum_{\emptyset\neq S\subseteq U}h(S)$$

$$g(T)=\sum_{S\supseteq T}h(S)$$

定理：容斥原理

$$f(U)=\sum_{\emptyset\neq T\subseteq U}(-1)^{|T|+1}g(T)$$

证明：

$$\begin{aligned}f(U)&=\sum_{\emptyset\neq S\subseteq U}h(S)=\sum_{\emptyset\neq S\subseteq U}\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T|-|S|}g(T)=\sum_{\emptyset\neq T\subseteq U}(-1)^{|T|}g(T)\sum_{\emptyset\neq S\subseteq T}(-1)^{|S|}\\&=\sum_{\emptyset\neq T\subseteq U}(-1)^{|T|}g(T)(\sum_{S\subseteq T}(-1)^{|S|}-(-1)^{|\emptyset|})=\sum_{\emptyset\neq T\subseteq U}(-1)^{|T|-1}g(T)\end{aligned}$$

即：

$$\left|\bigcup_{i\in S}A_i\right|=\sum_{k=1}^{|S|}(-1)^{k-1}\sum_{T\subseteq|S|,|T|=k}\left|\bigcap_{i\in T}A_i\right|$$

扩展：由

$$\left|\bigcap_{i\in S}A_i\right|=|U|-\left|\bigcup_{i\in S}(\overline{A_i})\right|$$

可对交集的大小进行计算。

生成函数

常见级数

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+...$$

$$\ln(x+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+...$$

一般生成函数

定义：一个序列 $\{a_i\}$ 的生成函数 (OGF) 为

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

易得两个生成函数的乘积即为对应序列的卷积：

$$H(x) = F(x)G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) x^i$$

即

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$$

注：一般生成函数的系数可看作某种组合方案，两个一般生成函数的卷积的第 i 项系数的意义（即上式）可看作对从第一个集合中选 j 个，第二个集合中选 $i-j$ 个的组合的方案数求和。

指数生成函数

定义：一个序列 $\{a_i\}$ 的指数生成函数 (EGF) 为

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$$

易得两个指数生成函数的乘积即为对应序列的带二项式系数的卷积：

$$H(x) = F(x)G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{x^i}{i!}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} i! \frac{a_j}{j!} \frac{b_{i-j}}{(i-j)!} \right) \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_j b_{i-j} \right) \frac{x^i}{i!}$$

即

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_j b_{i-j}$$

注：指数生成函数的系数可看作某种排列方案，两个指数生成函数的卷积的第 i 项系数的意义（即上式）可看作对从第一个集合中选 j 个，第二个集合中选 $i-j$ 个，并将 i 个位只中的 j 个钦定为从第一个集合中选出来的，余下 $i-j$ 个钦定为从第二个集合中选出来的的所有排列的方案数求和。（因此有个组合数作为系数）

$e^{F(x)}$ 的组合意义

定义：合法集合与合法划分

将满足某些性质的集合定义为合法集合。将一个集合划分为多个合法集合的划分方案定义为合法划分。

若 $F(x)$ 为表示大小为 n 的合法集合有多少种的生成函数，则 $\frac{F(x)^k}{k!}$ 为将大小为 n 的集合划分为 k 份合法集合的合法划分数的生成函数。

如大小为 n 的无向图有 $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ 种，则对应的合法集合可设为大小为 n 的连通图。枚举划分为的集合数并求和可得到

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F(x)^k}{k!}$$

即 $G(x) = e^{F(x)}$，或 $F(x) = lnG(x)$

常见数列的生成函数

$$F_i : F(x) = 1 + xF(x) + x^2F(x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

常见计数序列

斐波那契数

性质：

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_n F_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

$$F_n = F_m F_{n-m+1} + F_{m-1} F_{n-m}$$

$$F_{n-1} F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

$$gcd(F_n, F_m) = F_{gcd(n,m)}$$

$$n|m \Leftrightarrow F(n)|F(m)$$

二项式系数

定义：

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

常见恒等式：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}$$

卡特兰数

性质：

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$C_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{n}{k}\right)$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

n=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

OGF：$F(x) = 1 + xF(x)^2 = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$

第一类斯特林数

$s(n,m)$ 表示将大小为 n 的集合划分成 m 个圆排列的方案数

考虑 n 所在排列（加入某个圆排列或单独作为一个新的圆排列）可得到递推式：

$$s(n,m) = s(n-1,m-1) + ns(n-1,m)$$

特别的，$s(n,0) = [n == 0]$

注：每个圆排列可被视作一个置换，因而

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) = n!$$

行的 OGF：

由递推式有

$$s_n(x) = xs_{n-1}(x) + ns_{n-1} = (x+n)s_{n-1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x+i)$$

列的 EGF:

单一圆排列的 EGF 为

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)!x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

卷 m 次后除去 $m!$ 消除圆排列之间的先后顺序即可得到第一类斯特林数列的 EGF

$$F(x) = \frac{\left(-\ln(1-x)\right)^m}{m!}$$

注：上式是无符号第一类斯特林数列的 EGF，带符号的为

$$F(x) = \frac{\left(\ln(1+x)\right)^m}{m!}$$

第二类斯特林数

$S(n,m)$ 表示将大小为 n 的集合划分成 m 个非空集合的方案数

考虑 n 所在集合（加入 m 个集合中的一个或单独作为一个新的集合）可得到递推式：

$$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m)$$

考虑容斥，给每个集合编号后设 A_i 为第 i 个集合为空的放法，则所求为 $\bar{A}_i$ 的交，即

$$m!S(n,m)=m^n-\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(m-k)^n$$

得

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(m-k)^n$$

行的 OGF:

由通项公式得

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n=\sum_{k=0}^{n}x^k\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}\frac{(k-i)^n}{(k-i)!}\right)$$

列的 OGF: 由递推式有：

$$S_m(x)=xS_{m-1}(x)+mxS_m(x)$$

得

$$S_m(x)=\frac{x}{1-mx}S_m(x)=\frac{x^m}{\prod_{i=1}^{m}1-mx}$$

伯努利数

$$B_0=1,n\geq 1\Rightarrow B_{2n+1}=0$$

$$n\geq 1\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0$$

EGF:$F(x)=\frac{x}{e^x-1}$

默慈金数

M_n 表示从 $(0,0)$ 开始每次向右上或正右或右下走一格且不走到第四象限的情况下走到 $(n,0)$ 的方案总数。

M_n 表示在 n 个点的圆上画出数条不相交弦的全部方法的总数。

性质：

$$M_n=\frac{(2(n-1)+3)M_{n-1}+(3(n-2)+3)M_{n-2}}{n+2}$$

$$M_n=M_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}M_kM_{n-2-k}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}C_k$$

OGF 满足 $F(x)=xF(x)+x^2F^2(x)=\frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}=\frac{2}{1-x+\sqrt{1-2x-3x^2}}$

注：C_k 为卡塔兰数。

n=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_n	1	1	2	4	9	21	51	127	323	835	2188

那罗延数

$N(n,k)$ 表示长度为 $2n$ 的合法括号序列中有 k 对直接相邻的左右括号的方案数。

性质：

$$N(n,k)=\frac{1}{n}\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}N(n,k)=C_n$$

注：C_k 为卡塔兰数。

n|1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	6	6	1				
5	1	10	20	10	1			
6	1	15	50	50	15	1		
7	1	21	105	175	105	21	1	
8	1	28	196	490	490	196	28	1

贝尔数

EGF: $F(x)=e^{e^x-1}$

等幂求和

考虑 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n}i^k$ 的生成函数 G_n

$$G_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\sum_{i=1}^{n}i^k$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xi)^k}{k!}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}e^{xi}=\frac{e^x(1-e^{xn})}{1-e^x}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^k=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i}B_in^{k+1-i}$$

反演

二项式反演

$g_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)$	$g_k=\sum_{n=k}^{m}\binom{n}{k}f_n$
$f_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k)$	$f_k=\sum_{n=k}^{m}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g_n$

斯特林反演

图计数

Prufer 序列

定义：一棵有标号树的 Prufer 序列为递归地将其最小的叶节点删去并将其邻点标号加入序列末尾直到剩余两个点所得序列。

Prufer 序列转化为树：

维护一个集合 S，初始 $S=\{1,2,...,n\}$。对于序列中从左到右的每个元素 u，找到未在其右侧出现的 S 中的最小元素 v 并将 u,v 连边，然后将 v 从 S 中删去，最后将 S 中剩余两个点连边即可完成对树的还原。

扩展——森林的 Prufer 序列：

定义：一个 n 个点的有 k 个连通块组成的森林的 Prufer 序列与树的构造方式几乎相同，唯一的区别是剩余 $k+1$ 个点时停止。易得 n 个点 k 个连通块组成的森林的 $Prufer$ 序列长度为 $n-k$

1. 先钦定 k 个根
2. 第 $n-k$ 个位置的值为 k 个根之一。
3. 前 $n-k-1$ 个位置上的值任意。

不难得到 n 个点，有 k 个连通块的森林数量为 $\binom{n}{k}kn^{n-k-1}$

有标号无根树计数

定理 (Caylay)：n 个点的有标号无根树共有 n^{n-2} 种。从 Prufer 序列的构造与还原不难看出一棵树对应着一个 Prufer 序列，而每个 Prufer 序列在其 $n-2$ 个位置均有 n 种取值可能。

法 2：

枚举叶子个数 k，可得到

当 $0\le n\le 2$ 时有 $F(n)=1$，否则有 $F(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(n-k)^kF(n-k)$

有标号有根树计数

给每个有标号无根树定一个根即可得到有标号有根树，因而 n 个点的有标号有根树共有 n^{n-1} 种。

有标号基环树计数

考虑魔改 Prufer 序列，先钦定 k 个点在环上，方案为 $\binom{n}{k}$。

将环上的边都断开并将所有环上的点连向一个标号为正无穷的特殊点。

该树的 Prufer 序列具有如下性质：

1. 最后 k 个位置的值均为正无穷。
2. 第 $n-k$ 个位置的值必为环上的 k 个点之一。
3. 前 $n-k-1$ 个位置上的值任意。

因而 n 个点的基环树个数为

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kn^{n-k-1}$$

有标号连通图计数

对于满足某些性质的图（如欧拉图，即顶点度数均为偶数），用可以不连通的所有方案推广到连通的所有方案的情况可通过将所有方案减去不连通的方案获得。如枚举 1 号点所在连通块大小 k，则除 1 号点之外的点共有 $\binom{n-1}{k-1}$ 种方案：

$$f_n=g_n-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}f_kg_{n-k}$$

也可通过指数生成函数进行计数，即 $G(x)=lnF(x)$，其中 $F(x),G(x)$ 分别为 f_n,g_n 的 EGF。具体见“$e^{F(x)}$ 的组合意义”

有标号二分图计数

法 1：

设大小为 n，有 m 个连通块的二分图数量为 $F(n,m)$，则有：

$$F(n,m)=\sum_{k=1}^{n-m+1}\binom{n-1}{k-1}F(k,1)F(n-k,m-1)$$

设 $G(n)$ 为大小为 n，进行了黑白染色的二分图数量，则有:

$$G(n)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}2^{m(n-m)}=\sum_{m=1}^{n}2^mF(n,m)$$

$$=2^1F(n,1)+\sum_{m=2}^{n}2^m\sum_{k=1}^{n-m+1}\binom{n-1}{k-1}F(k,1)F(n-k,m-1)$$

$$=2F(n,1)+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}F(k,1)\sum_{m=2}^{n-k+1}2^mF(n-k,m-1)$$

$$=2F(n,1)+2\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}F(k,1)\sum_{m=1}^{n-k}2^mF(n-k,m)$$

$$=2F(n,1)+2\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}F(k,1)G(n-k)$$

可得递推式:

$$F(n,1)=\frac{1}{2}G(n)-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}F(k,1)G(n-k)$$

注：

$$G(n)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}2^{m(n-m)}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}2^{nm-m^2}=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}2^{\frac{1}{2}(n^2+m^2-(n-m)^2)-m^2}$$
$$=n!2^{\frac{n^2}{2}}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!(n-m)!}2^{-\frac{(n-m)^2}{2}-\frac{m^2}{2}}=n!2^{\frac{n^2}{2}}\sum_{m=0}^{n}\frac{2^{-\frac{(n-m)^2}{2}}}{m!}\frac{2^{-\frac{m^2}{2}}}{(n-m)!}$$

法 2：

考虑 n 个点的二染色的连通二分图的 EGF 为 $H(x)$，二染色的二分图的 EGF 为 $G(x)$，连通二分图的 EGF 为 $F_1(x)$，二分图的 EGF 为 $F_2(x)$，则显然 $G(x)=e^{H(x)}$，且 $H(x)=2F_1(x)$,$F_2(x)=e^{F_1(x)}$。

于是 $F_2(x)=e^{F_1(x)}=e^{\frac{1}{2}H(x)}=e^{\frac{1}{2}lnG(x)}=\sqrt{G(x)}$。

有标号 **DAG** 计数

注意到 DAG 中存在一类特殊的点，即出度为 0 的点，我们通过枚举这些点进行计算。

设 $F(n,S)$ 为 n 个点，有且仅有 S 中点出度为 0 的 DAG 数量。

设 $G(n,S)$ 为 n 个点，至少有 S 中点出度为 0 的 DAG 数量。不难发现我们需要求的即是 $G(n,\emptyset)$。

枚举 S 中点与其他点的连边，可得 $G(n,S)=2^{|S|(n-|S|)}G(n-|S|,\emptyset)$

由 G 与 F 的定义可得

$$G(n,S)=\sum_{T\supseteq S}F(n,T)$$

$$F(n,S)=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T|-|S|}G(n,T)$$

于是有

$$G(n,\emptyset)=\sum_{T\neq\emptyset}F(n,T)=\sum_{T\neq\emptyset}\sum_{S\supseteq T}(-1)^{|S|-|T|}G(n,S)$$

$$=\sum_{T\neq\emptyset}\sum_{S\supseteq T}(-1)^{|S|-|T|}2^{|S|(n-|S|)}G(n-|S|,\emptyset)$$

$$=\sum_{S\neq\emptyset}(-1)^{|S|}2^{|S|(n-|S|)}G(n-|S|,\emptyset)\sum_{\emptyset\neq T\subseteq S}(-1)^{|T|}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}2^{k(n-k)}G(n-k,\emptyset)$$

得到递推式：

$F(n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}2^{k(n-k)}F(n-k)$

注：考虑上式的组合意义：

1. 从 n 个点中钦定 k 个点为 0 出度点有 $\binom{n}{k}$ 种选法。
2. 其他 $n-k$ 个点与 k 个点可以任意连边，方案数为 $2^{k(n-k)}$。
3. 其他 $n-k$ 个点之间共有 $F(n-k)$ 种连边方式。
4. 因为任意连边可能造成这 k 个点之外的点出度也为 0，所以式 $\binom{n}{k}2^{k(n-k)}F(n-k)$ 实际上是钦定了至少 k 个点为 0 出度点的 n 点 DAG 数量。
5. 考虑某种恰好有 k 个 0 出度点的 DAG 被哪些至少 i 个 0 出度点的方案统计了，可得重复统计次数为 $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}=2^k$。不难发现加上容斥系数后即可使上式变为 $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1}=(-1)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i=\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i-1}-1$，因此给所有出度至少为 k 的 DAG 方案数乘上一个 $(-1)^{k-1}$ 的容斥系数可保证所有方案均被统计恰好一次。
6. 因此 n 个点的 DAG 数量 = 至少 1 个点出度为 0 的 n 点 DAG 数量 − 至少 2 个点出度为 0 的 n 点 DAG 数量 + 至少 3 个点出度为 0 的 n 点 DAG 数量，等等。

有标号强连通图计数

设 n 的点的强连通图数量为 $F(n)$，考虑用所有 n 个点的有向图的个数 $H(n)$ 减去非强连通图的方案数来计算答案。

考虑 DAG 计数的过程，我们枚举非强连通图缩点后出度为 0 的强连通分量由哪些点组成，其他点与这些点之间可以任意连边。

可得：

$$F(n)=H(n)-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k(n-k)}H(n-k)G(k)+F(n)$$

其中 $G(k)$ 表示 k 个点组成数个互不相连的强连通分量的方案数。

右边加入 $F(n)$ 的原因是，当 k 取到 n 时，该项表示的方案为 n 个点组成数个互不相连的强连通分量的方案数，即恰好包括了一个 $F(n)$，因此要将其加回去。

由 DAG 计数可知，因为对 $H(n-k)$ 中的连边方案没有任何限制，所以余下 $n-k$ 个点中的点在缩点后也可能产生新的 0 出度点，即上述计数过程会造成重复统计。

我们仿照 DAG 计数，令 $G(n,i)$ 表示 n 个点组成 i 个互不相连的强连通分量的方案数，并令 $G(n)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}G(n,i)$, 加入容斥系数来避免重复统计。

由前式可得关于 $G(n)$ 的递推式：

$$H(n)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k(n-k)}H(n-k)G(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{k(n-k)} H(n-k) G(k) + G(n)$$

于是

$$G(n) = H(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{k(n-k)} H(n-k) G(k)$$

考虑用 $G(n)$ 获得 $F(n)$ 的递推式，因为 $F(n) = G(n,1)$，因此我们考虑通过枚举 1 号点所在强连通分量大小计算 $\sum_{i=2}^{n} (-1)^i G(n,i)$ 然后加到 $G(n)$ 上去。

$$F(n) = G(n,1) = G(n) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i G(n,i)$$

$$= G(n) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i \sum_{k=1}^{n-i+1} \binom{n-1}{k-1} G(k,1) G(n-k,i-1)$$

$$= G(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} G(k,1) \sum_{i=1}^{n-k} (-1)^{i-1} G(n-k,i)$$

$$= G(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} F(k) G(n-k)$$

注：$G(n,i)$ 可通过枚举 1 号点所在连通块大小获得递推式

$$G(n,i) = \sum_{k=1}^{n-i+1} \binom{n-1}{k-1} G(k,1) G(n-k,i)$$