

Ejercicio 3.1.5. *La ruta utilizada por cierto automovilista para ir al trabajo tiene dos cruces con semáforo. La probabilidad de que pare en el primer semaforo es de 0.4, la probabilidad análoga para el segundo semáforo es 0.5, y la probabilidad de que se detenga por lo menos en uno de los semáforos es 0.6. ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga:*

- a. en ambos semáforos?*
- b. en el primero, pero no en el segundo?*
- c. exactamente en uno de ellos?*

3.2. Técnicas de conteo

En algunos experimentos no es fácil enumerar todos los posibles resultados de éste. Se hace necesario entonces proponer métodos que permitan el conteo de dichos resultados.

3.2.1. REGLA MULTIPLICATIVA

Si una operación puede describirse como una secuencia de k pasos donde el número de maneras de completar el paso 1 es n_1 , para cada manera de completar el paso 1 existen n_2 maneras de completar el paso 2, y así sucesivamente, entonces el número total de formas de completar la operación es.

$$\prod_{i=1}^k n_i$$

Ejemplo 3.2.1. *En una operación de manufactura se produce una pieza con operaciones de maquinado, pulido y pintado. Existen tres herramientas para maquinado, cuatro para pulido y tres para el pintado. ¿Cuántas rutas distintas (maquinado – pulido – pintura) son posibles para fabricar una pieza?*

Solución

Número de formas de operaciones de maquinado: 3

Número de operaciones de pulido : 4

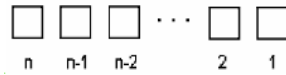
Número de operaciones de pintado : 3

Número de rutas diferentes: $3 \times 4 \times 3 = 36$

3.2.2. PERMUTACIONES

Una permutación es un arreglo ordenado de un conjunto de objetos. El número de permutaciones (acomodos) de n elementos diferentes es $n!$.

El número de permutaciones (acomodos) de r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos distintos se denota P_r^n y



$$n! = n * (n - 1) * (n - 2) \dots 2 * 1$$



$$P_r^n = n (n - 1) (n - 2) \cdots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Ejemplo 3.2.2. Juan, Carlos, Ana, y Milena esperan en la parada del autobús. ¿De cuantas maneras se pueden filar para subir al bus? Si sólo hay puesto para dos, ¿De cuantas maneras se pueden organizar ellos en los primeros dos lugares?

Solución

Usemos las iniciales para mayor facilidad: JCAM

Formas en que se pueden filar: $4! = 24$

Formas en que se pueden acomodar en dos lugares: $P_2^4 = \frac{4!}{2!} = 12$

El número de acomodos de $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ objetos de los cuales n_1 son del tipo 1, n_2 son del tipo dos, n_k del tipo k , es:

$$P_{n_1 \dots n_k}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Ejemplo 3.2.3. Una pieza se etiqueta usando 4 líneas delgadas, tres líneas medianas y dos líneas gruesas. Si cada ordenamiento de las nueve líneas representa una etiqueta diferente. ¿Cuántas etiquetas distintas pueden generarse con este esquema?

Solución

El número de etiquetas diferentes es:

$$P_{4,3,2} = \frac{9}{4!3!2} = 1260$$

El número de subconjuntos de tamaño r distintos, que pueden seleccionarse de un conjunto de n elementos, se denota $\binom{n}{r}$ ó C_r^n ó nC_r y

$$\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Propiedades

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$0! = 1$$

Ejemplo 3.2.4. De una baraja de 52 cartas se extraen al azar dos cartas y sin reemplazo. ¿Cuántas muestras de dos cartas contienen un As y un dos? ¿Cuántas muestras contienen un diez y una figura? ¿Cuántas muestras contienen dos figuras?

Solución

Defina los siguientes eventos:

A: La carta extraída es un As;

D: La carta extraída es un dos

F: La carta extraída es una figura;

T: La carta extraída es un diez

a) Maneras de extraer un As de 4 posibles: $\binom{4}{1}$

b) Maneras de extraer un dos de 4 posibles: $\binom{4}{1}$

c) Maneras de extraer un AS y un dos: $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 16$

d) Maneras de extraer un diez y una figura: $\binom{4}{1} \binom{12}{1} = 48$

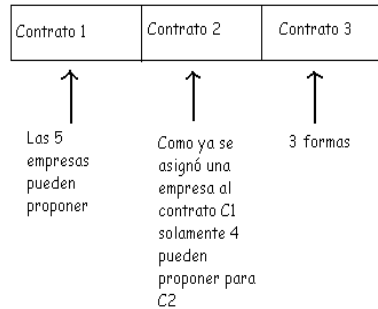
e) Maneras de extraer dos figuras de 12 posibles: $\binom{12}{2} = 66$

Ejemplo 3.2.5. Cinco empresas F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5 hacen propuestas con respecto a 3 contratos separados C_1, C_2, C_3 . Una empresa puede obtener a lo más un contrato. Los contratos son bastantes diferentes de tal forma que la asignación de C_1 a F_1 es diferente de la asignación de C_2 a F_1 .

1. ¿Cuántos elementos hay en S ? (El experimento es asignar contratos a las empresas)
2. ¿Cuál es la probabilidad de que se conceda un contrato a F_3 bajo el supuesto de que los puntos muestrales son equiprobables?

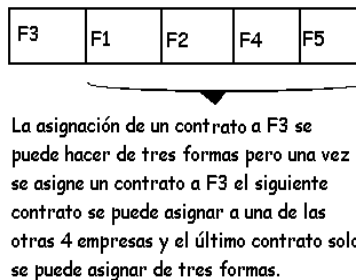
Solución

1. El problema se ilustra en el siguiente gráfico



Del gráfico anterior se observa que el número de elementos de S está dado por $5 \times 4 \times 3 = 60$ formas diferentes.

2. *El problema en cuestión se trata de ilustrar por medio del siguiente gráfico, donde se explican las posibilidades*



Sea A : evento de asignar un contrato a F_3 ; el número de elementos de $A = 3 \times 4 \times 3 = 36$ entonces $P(A) = \frac{36}{60} = 0.6$

Ejemplo 3.2.6. *¿ Cuantas y cuales permutaciones pueden formarse con los números 1, 2 y 3?.*

Solución

Como $n = 3$ el número de permutaciones está dado por $3! = 6$; las permutaciones son $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$.

Nota: Como en las permutaciones importa el orden, la permutación $(1, 2, 3) \neq (2, 1, 3)$.

De especial interés en estadística es determinar el número de permutaciones que pueden formarse con n objetos tomando grupos de r elementos a la vez ($r \leq n$) teniendo en cuenta el orden.

Definición El número de permutaciones que pueden formarse con n elementos tomando grupos de r está dado por

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

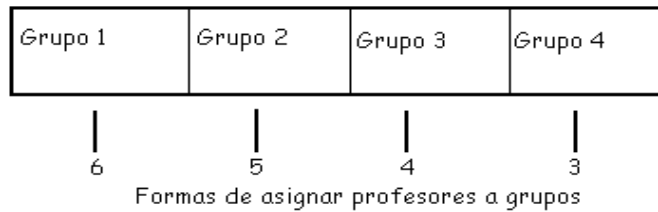
Ejemplo 3.2.7. Encuentre el número de formas en las que pueden asignarse 6 profesores a 4 grupos si ninguno puede ocupar más de un grupo.

Solución

El problema es equivalente a encontrar el número de permutaciones distintas que pueden formarse con 6 elementos tomando de a 4, entonces

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$$

Observe que este problema también se puede resolver razonando como se ilustra a continuación:



Así, el número de formas distintas estará dado por $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$. Otro problema de interés en estadística es determinar el número de subconjuntos que pueden formarse con n objetos tomando grupos de r elementos a la vez ($r \leq n$) sin tener en cuenta el orden.

Definición (Número combinatorio) El número de subconjuntos que pueden formarse con n elementos tomando grupos de r está dado por

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Se lee ‘ n tomados de r ’.

Ejemplo 3.2.8. *Se quiere seleccionar 3 candidatos de un total de 8 ¿De cuantas formas se puede hacer tal selección?*

Solución

Este es un problema donde no importa el orden en que se haga la selección; por lo tanto, el número de formas estará dado por:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

Ejemplo 3.2.9. *(Problema de la lotería)*

Una lotería consiste en acertar 6 de 36 números. Calcule la probabilidad que tiene una persona de acertar el resultado ganador bajo las siguientes condiciones de juego:

1. *teniendo en cuenta el orden en que aparezca el número ganador.*
2. *sin tener en cuenta el orden en que aparezca el número ganador.*

Solución

1. En este caso, si por ejemplo el número ganador fue (3, 31, 33, 27, 5, 12) y el apostador tenía el (31, 3, 33, 27, 5, 12) no se gana la lotería ya que importa el orden.

Sea A: El evento de acertar el número ganador.

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

ya que todos los números se pueden considerar igualmente factibles;

ahora, el número de resultados posibles es $36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 = 1402410240$; solamente hay un caso favorable, entonces,

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{1402410240} = 0.00000000071306$$

2. En este caso, si por ejemplo el número ganador fue (3, 31, 33, 27, 5, 12) y el apostador tenía el (31, 3, 33, 27, 5, 12) si se gana la lotería ya que no importa el orden.

Sea A: El evento de acertar el número ganador.

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

ya que todos los números se pueden considerar igualmente factibles; ahora, el número de resultados posibles está dado por:

$$\binom{36}{6} = \frac{36!}{6!30!} = 1947792$$

Solamente hay un caso favorable, entonces,

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{1947792} = 0.000000051340$$

Ejemplo 3.2.10. *Se van a seleccionar al azar 4 estudiantes de un grupo formado por 3 estudiantes no graduados y 5 estudiantes graduados para un cierto comite. Hallar la probabilidad de que se encuentren exactamente 2 no graduados entre los 4 escogidos.*

Solución

Sea E: Evento de encontrar exactamente 2 no graduados entre los 4 seleccionados.

Casos Posibles:

$$\binom{8}{4} = 70 \text{ Formas de seleccionar 4 tomando de a 8}$$

El número de formas de seleccionar exactamente 2 de los no graduados está dado por $\binom{3}{2} = 3$ pero como se toman 4, los otros dos se deben tomar necesariamente del grupo de graduados y esto se puede hacer de $\binom{5}{2} = 10$ formas diferentes; así por la regla del producto, la operación de

elegir exactamente 2 de los no graduados se hace de $\binom{3}{2} \times \binom{5}{2} = 30$ formas, entonces,

Casos favorables:

$$\binom{3}{2} \times \binom{5}{2} = 30$$

Entonces

$$P(E) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{5}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

Definición El número de formas en las que se pueden asignar n objetos distintos en k grupos diferentes que contienen n_1, n_2, \dots, n_k objetos respectivamente está dado por,

$$N = \binom{n}{n_1 \ n_2 \ n_3 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \text{ donde } \sum_{i=1}^k n_i = n$$

Ejemplo 3.2.11. *Nueve personas salen de viaje en 3 vehículos cuyas capacidades son 2, 4 y 5 pasajeros respectivamente. ¿ En cuantas formas es posible transportar las 9 personas con los 3 vehículos si cada uno de ellos debe llevar al menos un pasajero?*

Solución

En la tabla siguiente aparecen las posibilidades de transporte para los pasajeros con cada vehículo,

Vehículo 1	Vehículo 2	Vehículo 3
2	2	5
2	3	4
2	4	3
1	4	4
1	3	5

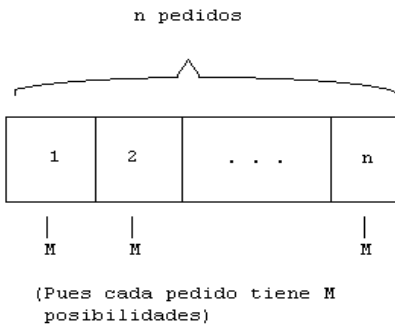
Ahora bien, todas las nueve personas son distintas y por lo tanto el número de formas distintas de transportar los pasajeros estará dado por,

$$\binom{9}{2 \ 2 \ 5} + \binom{9}{2 \ 3 \ 4} + \binom{9}{2 \ 4 \ 3} + \binom{9}{1 \ 4 \ 4} + \binom{9}{1 \ 3 \ 5} \\ = 4410$$

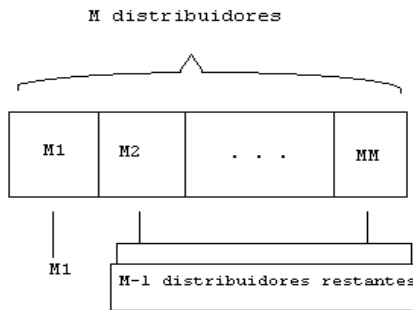
Ejemplo 3.2.12. Una compañía compra artículos a M distribuidores y desea ordenar n pedidos ($n < M$). Suponga que la compañía hace los pedidos al azar y que no tiene preferencia por ningún distribuidor. Encuentre la probabilidad de que uno de los distribuidores reciba exactamente k pedidos. Note que ($k \leq n$).

Solución

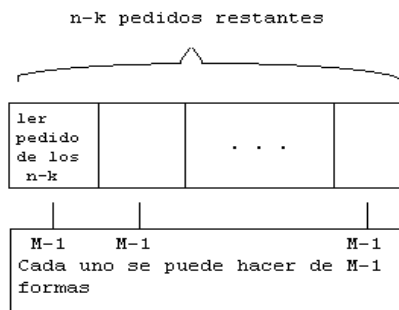
Se hacen n pedidos:



Por la regla del producto, el número de formas de hacer los n pedidos es M^n . Ahora, sea A: Evento en el que un distribuidor recibe exactamente k pedidos. Por simplicidad supongamos que el distribuidor M_1 recibe los k pedidos:



Si a M_1 se le hacen k pedidos de los n el número posible de formas estará dado por $\binom{n}{k}$; los $n - k$ pedidos restantes se harán a los otros $M - 1$ distribuidores,



Así los restantes $n - k$ pedidos se harán de $(M - 1)^{n-k}$ formas; por lo tanto la operación en la que se recibe exactamente k de los n pedidos se puede hacer de

$$\binom{n}{k} \times (M - 1)^{n-k}$$

Entonces,

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k} \times (M-1)^{n-k}}{M^n}$$

Es la probabilidad de que uno de los distribuidores reciba exactamente k pedidos.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.2.1. *Se selecciona al azar un vehículo en cierta ciudad. Si todas las letras de la placa del vehículo son diferentes, ¿Cuántos autos tienen la misma característica? ¿Cuántos autos tienen placas con todos sus dígitos impares?*

Ejercicio 3.2.2. *Se lanzan 20 monedas no cargadas, ¿Cuántos posibles resultados tienen solo tres caras?*

Ejercicio 3.2.3. *Se seleccionan al azar tres personas de un grupo por 10 obreros, 4 pintores y 6 carpinteros. ¿Cuántos grupos diferentes conformados por un obrero, un pintor y un carpintero se pueden formar?*

Ejercicio 3.2.4. *El pedido de una computadora personal digital puede especificar uno de cinco tamaños de memoria, cualquier tipo de monitor de tres posibles, cualquier tamaño de disco duro de entre cuatro posibles, y puede incluir o no una tableta para lápiz electrónico. ¿Cuántos sistemas distintos pueden ordenarse?*

Ejercicio 3.2.5. *Un proceso de manufactura está formado por 10 operaciones, las cuales pueden efectuarse en cualquier orden. ¿Cuántas secuencias de producción distintas son posibles?*

Ejercicio 3.2.6. *Un proceso de manufactura está formado por 10 operaciones. Sin embargo, cinco de ellas deben terminarse antes de que pueda darse inicio a las otras cinco. Dentro de cada conjunto de cinco, las operaciones pueden efectuarse en cualquier orden. ¿Cuál es el número de secuencias de operaciones distintas posible?*

Ejercicio 3.2.7. *Se inspecciona un lote de 140 chips mediante la selección de una muestra de cinco de ellos. Suponga que 10 chips no cumplen con los requerimientos del cliente.*

- a) *¿Cuál es el número de muestras distintas posibles?*
- b) *¿Cuántas muestras de cinco contienen exactamente un chip que no cumple con los requerimientos?*
- c) *¿Cuántas muestras de cinco contienen al menos un chip que no cumple con los requerimientos?*

Ejercicio 3.2.8. *El diseño de un sistema de comunicación considera las siguientes preguntas:*

- a) *¿Cuántos prefijos de tres dígitos de teléfono pueden crearse para representar un área geográfica en particular (código de área) con los dígitos del 0 al 9?*
- b) *. Al igual que en el inciso a), ¿Cuántos prefijos de tres dígitos pueden crearse de modo que el primer dígito no sea 0 ni 1, y el segundo sea 0 o 1?*
- c) *. ¿Cuál es el número de prefijos de tres dígitos en los que ningún dígito aparece más de una vez en cada prefijo?*

3.3. PROBABILIDAD Y AXIOMAS DE PROBABILIDAD

En la realización de un experimento aleatorio, la variación en las mediciones obtenidas puede ser muy pequeña o apreciable y se hace necesario determinar que tanto influye esta variación en las conclusiones que se desprendan del análisis de la información recolectada.

En un sentido amplio la probabilidad mide el “Grado de Creencia ” de una información hecha con base en la información recolectada. También mide la posibilidad de ocurrencia de uno o más resultados de un experimento aleatorio.

El enfoque básico sobre el cuál podemos iniciar el cálculo de probabilidades está vinculado a la frecuencia relativa. Así, la probabilidad de un resultado de un experimento aleatorio puede asociarse a la frecuencia de ocurrencia de dicho resultado en repeticiones sucesivas del experimento.

Si un experimento tiene N posibles resultados, todos con la misma probabilidad de ocurrencia, la probabilidad asociada a cada resultado es $1 / N$.

Si en vez de un resultado, se tiene un conjunto de resultados, digamos un