Distribuciones Bivariadas

Introducción

Muchos de los fenómenos que usualmente estudiamos, involucran diferentes y diversos factores, los cuales son identificados por medio de variables. En la práctica es dificil construir modelos que logren explicar un fenómeno particular solo usando una variable aleatoria. Así que la manera de entender como se comportan dichos fenómenos es a través del conocimiento de como se comportan de manera conjunta las variables asociadas a dichos fenómenos.

Distribuciones Bivariadas

Introducción

Muchos de los fenómenos que usualmente estudiamos, involucran diferentes y diversos factores, los cuales son identificados por medio de variables. En la práctica es dificil construir modelos que logren explicar un fenómeno particular solo usando una variable aleatoria. Así que la manera de entender como se comportan dichos fenómenos es a través del conocimiento de como se comportan de manera conjunta las variables asociadas a dichos fenómenos.

Si X e Y son variables aleatorias, la distribución que rige el comportamiento conjunto de ambas variables es llamada *Distribución Bivariable o Bivariada*. En el caso de considerar más de dos variables, hablaremos de distribuciones *Multivariables o Multivariadas*.

Distribuciones Bivariadas

Introducción

Muchos de los fenómenos que usualmente estudiamos, involucran diferentes y diversos factores, los cuales son identificados por medio de variables. En la práctica es dificil construir modelos que logren explicar un fenómeno particular solo usando una variable aleatoria. Así que la manera de entender como se comportan dichos fenómenos es a través del conocimiento de como se comportan de manera conjunta las variables asociadas a dichos fenómenos.

Si X e Y son variables aleatorias, la distribución que rige el comportamiento conjunto de ambas variables es llamada *Distribución Bivariable o Bivariada*. En el caso de considerar más de dos variables, hablaremos de distribuciones *Multivariables o Multivariadas*. En este capítulo, la atención se enfocará en las distribuciones Bivaridas.

Distribuciones Bivariadas

Introducción

Muchos de los fenómenos que usualmente estudiamos, involucran diferentes y diversos factores, los cuales son identificados por medio de variables. En la práctica es dificil construir modelos que logren explicar un fenómeno particular solo usando una variable aleatoria. Así que la manera de entender como se comportan dichos fenómenos es a través del conocimiento de como se comportan de manera conjunta las variables asociadas a dichos fenómenos.

Si X e Y son variables aleatorias, la distribución que rige el comportamiento conjunto de ambas variables es llamada *Distribución Bivariable o Bivariada*. En el caso de considerar más de dos variables, hablaremos de distribuciones *Multivariables o Multivariadas*. En este capítulo, la atención se enfocará en las distribuciones Bivaridas. Primero se abordará el caso Discreto y Luego el Caso continuo, igual que he hizo en el capítulo de Distribuciones de Probabilidad.

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S.

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S. La distribución de probabilidad conjunta de X e Y (la f.m.p conjunta), la cual denotamos $p(x\ ,\ y)$, se define como:

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S. La distribución de probabilidad conjunta de X e Y (la f.m.p conjunta), la cual denotamos $p(x\ ,\ y)$, se define como:

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad , \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \ .$$

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S. La distribución de probabilidad conjunta de X e Y (la f.m.p conjunta), la cual denotamos $p(x\ ,\ y)$, se define como:

$$p(x,\,y) = P(X = x,\,Y = y) \quad , \quad \forall (x,\,y) \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \,.$$

Propiedades:

Definición

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S. La distribución de probabilidad conjunta de X e Y (la f.m.p conjunta), la cual denotamos $p(x\ ,\ y)$, se define como:

$$p(x,\, y) = P(X = x,\, Y = y) \quad , \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \,.$$

Propiedades:

1. $$p(x,\, y) \geq 0 \quad ; \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{A} \,.$$

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S. La distribución de probabilidad conjunta de X e Y (la f.m.p conjunta), la cual denotamos $p(x\ ,\ y)$, se define como:

$$p(x,\, y) = P(X = x,\, Y = y) \quad , \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \, .$$

Propiedades:

1. $$p(x,\, y) \geq 0 \quad ; \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{A} \, .$$
2. $$\sum_{(x,y)\, \in\, \mathcal{A}} \sum p(x,\, y) = 1 \, .$$

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S. La distribución de probabilidad conjunta de X e Y (la f.m.p conjunta), la cual denotamos $p(x\ ,\ y)$, se define como:

$$p(x,\, y) = P(X = x,\, Y = y) \quad , \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2\ .$$

Propiedades:

1. $$p(x,\, y) \geq 0 \quad ; \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{A}\ .$$
2. $$\sum_{(x,y)\,\in\,\mathcal{A}}\sum p(x,\, y) = 1\ .$$
3. Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces:

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S. La distribución de probabilidad conjunta de X e Y (la f.m.p conjunta), la cual denotamos $p(x\ ,\ y)$, se define como:

$$p(x,\, y) = P(X = x,\, Y = y) \quad , \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \, .$$

Propiedades:

1. $$p(x,\, y) \geq 0 \quad ; \quad \forall (x,\, y) \in \mathcal{A} \, .$$
2. $$\sum_{(x,y)\, \in\, \mathcal{A}} \sum p(x,\, y) = 1 \, .$$
3. Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces:

$$P\left((X,\, Y) \in A\right) = \sum_{(x,y) \in A} \sum p(x,\, y) \, .$$

Ejemplo 49

Sean X e Y v.a. discretas con f.m.p conjunta dada por:

Ejemplo 49

Sean X e Y v.a. discretas con f.m.p conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
P(x, y)	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

Calcule:

a) $P\,(X \leq 1\,,\, Y \leq 1)\,.$

b) $P\,(X > 1\,,\, Y < 2)\,.$

c) $P\,(X = 0\,|\, Y = 1)\,.$

Solución

a) Sea $A = \{(x,\, y)\,|\, X \leq 1\,,\, Y \leq 1\}\,.$

Ejemplo 49

Sean X e Y v.a. discretas con f.m.p conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
P(x, y)	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

Calcule:

a) $P\left(X \leq 1\,,\, Y \leq 1\right)$.

b) $P\left(X > 1\,,\, Y < 2\right)$.

c) $P\left(X = 0 \,|\, Y = 1\right)$.

Solución

a) Sea $A = \{(x,\, y) \,|\, X \leq 1\,,\, Y \leq 1\}$. Entonces:

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Ejemplo 49

Sean X e Y v.a. discretas con f.m.p conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
P(x, y)	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

Calcule:

a) $P\,(X \leq 1\,,\, Y \leq 1)\,.$

b) $P\,(X > 1\,,\, Y < 2)\,.$

c) $P\,(X = 0\,|\, Y = 1)\,.$

Solución

a) Sea $A = \{(x,\, y)\,|\, X \leq 1\,,\, Y \leq 1\}\,.$ Entonces:

$$P\,(X \leq 1,\, Y \leq 1) = P\,(\,(x,\, y) \in A) = \sum_{(x,\, y)\,\in\, A} \sum p(x,\, y) = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} p(x,\, y) \;=\; \frac{11}{18}\;.$$

b) Sea $B = \{(x,\, y)\,|\, X > 1 \,\wedge\, Y < 2\}$. Entonces:

b) Sea $B = \{(x,\, y) \,|\, X > 1 \,\wedge\, Y < 2\}$. Entonces:

$$P(X > 1 \,|\, Y < 2) = P\left((X,\, Y) \in B\right) = \sum_{x=2}^{2} \sum_{y=0}^{1} p(x,\, y) = \frac{7}{18}\ .$$

b) Sea $B = \{(x,\, y) \,|\, X > 1 \,\wedge\, Y < 2\}$. Entonces:

$$P(X > 1 \,|\, Y < 2) = P\left((X,\, Y) \in B\right) = \sum_{x=2}^{2} \sum_{y=0}^{1} p(x,\, y) = \frac{7}{18}\,.$$

c)

$$P\left(X = 0 \,|\, Y = 1\right) = \frac{P(X = 0,\, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{p(0,\, 1)}{\sum\limits_{x=0}^{2} p(x,\, 1)} = \frac{3}{7}\,.$$

Ejemplo 50

Una urna contiene 10 bolas rojas, 4 bolas blancas y 12 negras.

b) Sea $B = \{(x,\, y) \,|\, X > 1 \,\wedge\, Y < 2\}$. Entonces:

$$P(X > 1 \,|\, Y < 2) = P\left((X,\, Y) \in B\right) = \sum_{x=2}^{2} \sum_{y=0}^{1} p(x,\, y) = \frac{7}{18}\,.$$

c)

$$P\left(X = 0 \,|\, Y = 1\right) = \frac{P(X = 0,\, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{p(0,\, 1)}{\sum\limits_{x=0}^{2} p(x,\, 1)} = \frac{3}{7}\,.$$

Ejemplo 50

Una urna contiene 10 bolas rojas, 4 bolas blancas y 12 negras. Se extraen aleatoriamente y sin reemplazo 4 bolas.

b) Sea $B = \{(x,\, y) \,|\, X > 1 \,\wedge\, Y < 2\}$. Entonces:

$$P(X > 1 \,|\, Y < 2) = P\left((X,\, Y) \in B\right) = \sum_{x=2}^{2} \sum_{y=0}^{1} p(x,\, y) = \frac{7}{18}\,.$$

c)

$$P\left(X = 0 \,|\, Y = 1\right) = \frac{P(X = 0,\, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{p(0,\, 1)}{\sum\limits_{x=0}^{2} p(x,\, 1)} = \frac{3}{7}\,.$$

Ejemplo 50

Una urna contiene 10 bolas rojas, 4 bolas blancas y 12 negras. Se extraen aleatoriamente y sin reemplazo 4 bolas. Sea X: el # de bolas blancas en las 4 extraídas y Y: el # de bolas rojas en la muestra de 4.

b) Sea $B = \{(x,\, y) \,|\, X > 1 \wedge Y < 2\}$. Entonces:

$$P(X > 1 \,|\, Y < 2) = P\left((X,\, Y) \in B\right) = \sum_{x=2}^{2} \sum_{y=0}^{1} p(x,\, y) = \frac{7}{18}\,.$$

c)

$$P\left(X = 0 \,|\, Y = 1\right) = \frac{P(X = 0,\, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{p(0,\, 1)}{\sum\limits_{x=0}^{2} p(x,\, 1)} = \frac{3}{7}\,.$$

Ejemplo 50

Una urna contiene 10 bolas rojas, 4 bolas blancas y 12 negras. Se extraen aleatoriamente y sin reemplazo 4 bolas. Sea X: el # de bolas blancas en las 4 extraídas y Y: el # de bolas rojas en la muestra de 4. Calcule:

b) Sea $B = \{(x,\, y) \,|\, X > 1 \,\wedge\, Y < 2\}$. Entonces:

$$P(X > 1 \,|\, Y < 2) = P\left((X,\, Y) \in B\right) = \sum_{x=2}^{2} \sum_{y=0}^{1} p(x,\, y) = \frac{7}{18}\,.$$

c)

$$P\left(X = 0 \,|\, Y = 1\right) = \frac{P(X = 0,\, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{p(0,\, 1)}{\sum\limits_{x=0}^{2} p(x,\, 1)} = \frac{3}{7}\,.$$

Ejemplo 50

Una urna contiene 10 bolas rojas, 4 bolas blancas y 12 negras. Se extraen aleatoriamente y sin reemplazo 4 bolas. Sea X: el # de bolas blancas en las 4 extraídas y Y: el # de bolas rojas en la muestra de 4. Calcule:

a) La f.m.p. conjunta de X e Y.

b) Sea $B = \{(x,\, y) \,|\, X > 1 \,\wedge\, Y < 2\}$. Entonces:

$$P(X > 1 \,|\, Y < 2) = P\left((X,\, Y) \in B\right) = \sum_{x=2}^{2} \sum_{y=0}^{1} p(x,\, y) = \frac{7}{18}\,.$$

c)

$$P\left(X = 0 \,|\, Y = 1\right) = \frac{P(X = 0,\, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{p(0,\, 1)}{\sum\limits_{x=0}^{2} p(x,\, 1)} = \frac{3}{7}\,.$$

Ejemplo 50

Una urna contiene 10 bolas rojas, 4 bolas blancas y 12 negras. Se extraen aleatoriamente y sin reemplazo 4 bolas. Sea X: el # de bolas blancas en las 4 extraídas y Y: el # de bolas rojas en la muestra de 4. Calcule:

a) La f.m.p. conjunta de X e Y.

b) $P\left(X < 2,\, Y > 1\right)$.

b) Sea $B = \{(x,\, y) \,|\, X > 1 \,\wedge\, Y < 2\}$. Entonces:

$$P(X > 1 \,|\, Y < 2) = P\left((X,\, Y) \in B\right) = \sum_{x=2}^{2} \sum_{y=0}^{1} p(x,\, y) = \frac{7}{18}\,.$$

c)

$$P\left(X = 0 \,|\, Y = 1\right) = \frac{P(X = 0,\, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{p(0,\, 1)}{\sum_{x=0}^{2} p(x,\, 1)} = \frac{3}{7}\,.$$

Ejemplo 50

Una urna contiene 10 bolas rojas, 4 bolas blancas y 12 negras. Se extraen aleatoriamente y sin reemplazo 4 bolas. Sea X: el # de bolas blancas en las 4 extraídas y Y: el # de bolas rojas en la muestra de 4. Calcule:

a) La f.m.p. conjunta de X e Y.

b) $P\left(X < 2,\, Y > 1\right)$.

c) $P\left(X > 1 \,|\, Y < 2\right)$.

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Solución

a) El rango conjunto de las variables X e Y es $\mathcal{A} = \{\,(x,\,y)\,|\,0 \leq x + y \leq 4\}$.

Solución

a) El rango conjunto de las variables X e Y es $\mathcal{A} = \{\, (x,\, y) \,|\, 0 \leq x + y \leq 4\}$.
Es claro que $X \sim h(26,\, 4,\, 4)$ y $Y \sim h(26,\, 10,\, 4)$.

Solución

a) El rango conjunto de las variables X e Y es $\mathcal{A} = \{\,(x,\, y)\,|\, 0 \leq x + y \leq 4\}$. Es claro que $X \sim h(26,\, 4,\, 4)$ y $Y \sim h(26,\, 10,\, 4)$. Usando los métodos de conteo vistos anteriormente se obtiene:

Solución

a) El rango conjunto de las variables X e Y es $\mathcal{A} = \{\,(x,\, y)\,|\, 0 \leq x + y \leq 4\}$. Es claro que $X \sim h(26,\, 4,\, 4)$ y $Y \sim h(26,\, 10,\, 4)$. Usando los métodos de conteo vistos anteriormente se obtiene:

$$p(x,\, y) = \frac{\binom{4}{x}\binom{10}{y}\binom{12}{4-x-y}}{\binom{26}{4}} \quad ; \quad 0 \leq x + y \leq 4\,.$$

Solución

a) El rango conjunto de las variables X e Y es $\mathcal{A} = \{\,(x,\, y)\,|\,0 \leq x + y \leq 4\}$. Es claro que $X \sim h(26,\, 4,\, 4)$ y $Y \sim h(26,\, 10,\, 4)$. Usando los métodos de conteo vistos anteriormente se obtiene:

$$p(x,\, y) = \frac{\binom{4}{x}\binom{10}{y}\binom{12}{4-x-y}}{\binom{26}{4}} \quad ; \quad 0 \leq x + y \leq 4\,.$$

b)

$$P(X < 2,\, Y > 1) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=2}^{4-x} \frac{\binom{4}{x}\binom{10}{y}\binom{12}{4-x-y}}{\binom{26}{4}} = \frac{726}{1495} = 0.4856$$

Distribuciones Bivariadas de variables Discretas

Solución

a) El rango conjunto de las variables X e Y es $\mathcal{A} = \{\,(x,\,y)\,|\,0 \leq x + y \leq 4\}$. Es claro que $X \sim h(26,\,4,\,4)$ y $Y \sim h(26,\,10,\,4)$. Usando los métodos de conteo vistos anteriormente se obtiene:

$$p(x,\,y) = \frac{\binom{4}{x}\binom{10}{y}\binom{12}{4-x-y}}{\binom{26}{4}} \quad ; \quad 0 \leq x + y \leq 4\,.$$

b)

$$P(X < 2,\, Y > 1) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=2}^{4-x} \frac{\binom{4}{x}\binom{10}{y}\binom{12}{4-x-y}}{\binom{26}{4}} = \frac{726}{1495} = 0.4856$$

c)

$$P(X > 1\,|\,Y < 2) = \frac{P(X \geq 2,\, Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} = \frac{\displaystyle\sum_{y=0}^{1}\sum_{x=2}^{4-y} \frac{\binom{4}{x}\binom{10}{y}\binom{12}{4-x-y}}{\binom{26}{4}}}{\displaystyle\sum_{y=0}^{1}\sum_{x=0}^{4-y} \frac{\binom{4}{x}\binom{10}{y}\binom{12}{4-x-y}}{\binom{26}{4}}} \approx 0.1624\,.$$

Distribuciones Bivariadas de variables Continuas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias continuas definidas en $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Distribuciones Bivariadas de variables Continuas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias continuas definidas en $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$. La distribución acumulada de X e Y, la cual se denota $F(x, y)$, se define como:

Distribuciones Bivariadas de variables Continuas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias continuas definidas en $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$. La distribución acumulada de X e Y, la cual se denota $F(x,\, y)$, se define como:

$$F(x,\, y) = P\left(X \leq x,\, Y \leq y\right) \quad ; \quad \forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Distribuciones Bivariadas de variables Continuas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias continuas definidas en $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$. La distribución acumulada de X e Y, la cual se denota $F(x,\, y)$, se define como:

$$F(x,\, y) = P\left(X \leq x,\, Y \leq y\right) \quad ; \quad \forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \, .$$

Al igual que en el caso univariado, F es continua pero en $\mathbb{R}^2$.

Distribuciones Bivariadas de variables Continuas

Definición

Sean X e Y variables aleatorias continuas definidas en $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$. La distribución acumulada de X e Y, la cual se denota $F(x,\, y)$, se define como:

$$F(x,\, y) = P\left(X \leq x,\, Y \leq y\right) \quad ; \quad \forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \; .$$

Al igual que en el caso univariado, F es continua pero en $\mathbb{R}^2$. Si existe una función $f \;:\; \mathbb{R}^2 \;\rightarrow\; \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que:

$$\frac{\partial^2 \, F(x,\, y)}{\partial x \, \partial y} = f(x,\, y) \; ,$$

$\forall (x,\, y)$ donde exista $\dfrac{\partial^2 \, F}{\partial x \, \partial y}$, entonces f es llamada *Función de Densidad de Probabilidad Conjunta* de X e Y (f.d.p) conjunta.

Propiedades de f

1. $F(x,\, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(t,\, s)\, ds\, dt$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, dy\, dx = 1$.

3. Si $B \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces:

Propiedades de f

1. $F(x,\, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(t,\, s)\, ds\, dt$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, dy\, dx = 1$.

3. Si $B \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces:

$$P\left((X,\, Y) \in B\right) = \iint\limits_{B} f(x,\, y)\, dy\, dx$$

Ejemplo 51

Sean X e Y v.a. continuas con f.d.p. conjunta dada por:

Distribuciones Bivariadas de variables Continuas

Propiedades de f

1. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(t, s)\, ds\, dt$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy\, dx = 1$.

3. Si $B \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces:

$$P\left((X, Y) \in B\right) = \iint\limits_{B} f(x, y)\, dy\, dx$$

Ejemplo 51

Sean X e Y v.a. continuas con f.d.p. conjunta dada por:

$$f(x, y) = c\,(x + y) \quad ; \quad 0 < x < 3\,;\; x < y < x + 2\,.$$

Ejemplo 51

1. Halle el valor de c, para que f sea una en efecto una f.d.p. conjunta.

Ejemplo 51

1. Halle el valor de c, para que f sea una en efecto una f.d.p. conjunta.
2. Calcule $P(X < 1, Y < 2)$.

Ejemplo 51

1. Halle el valor de c, para que f sea una en efecto una f.d.p. conjunta.
2. Calcule $P(X < 1, Y < 2)$.
3. Calcule $P(1 < X < 2)$.

Ejemplo 51

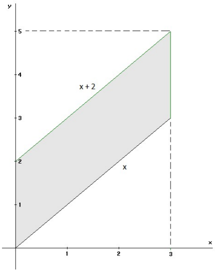
1. Halle el valor de c, para que f sea una en efecto una f.d.p. conjunta.
2. Calcule $P(X < 1, Y < 2)$.
3. Calcule $P(1 < X < 2)$.
4. $P\left(X < 2 \,|\, Y < 2\right)$.

El dominio de f se muestra en el siguiente gráfico.

Ejemplo 51

1. Halle el valor de c, para que f sea una en efecto una f.d.p. conjunta.
2. Calcule $P(X < 1, Y < 2)$.
3. Calcule $P(1 < X < 2)$.
4. $P(X < 2 \,|\, Y < 2)$.

El dominio de f se muestra en el siguiente gráfico.



Solución

- $$\int_0^3 \int_x^{x+2} c\,(x+y)\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^3 \left(x\,y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_x^{x+2} dx = 1$$

Solución

- $$\int_0^3 \int_x^{x+2} c\,(x+y)\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^3 \left(x\,y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_x^{x+2} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow c \int_0^3 (4\,x + 2)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\,\left(2\,x^2 + 2\,x\right)\Big|_0^3 = 1 \Leftrightarrow 24\,c = 1$$

Solución

- $$\int_0^3 \int_x^{x+2} c\,(x+y)\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^3 \left(x\,y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_x^{x+2} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow c \int_0^3 (4\,x + 2)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\,\left(2\,x^2 + 2\,x\right)\Big|_0^3 = 1 \Leftrightarrow 24\,c = 1$$

Así, $c = \frac{1}{24}$. Con esto

Solución

- $$\int_0^3 \int_x^{x+2} c\,(x+y)\,dy\,dx \;=1 \Leftrightarrow \; c \int_0^3 \left(x\,y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_x^{x+2} dx \;=1$$

  $$\Leftrightarrow c \int_0^3 (4\,x \;+\; 2)\,dx = 1 \;\Leftrightarrow\; c\,\left(2\,x^2 + 2\,x\right)\Big|_0^3 = 1 \;\Leftrightarrow\; 24\,c = 1$$

  Así, $c = \frac{1}{24}$. Con esto

  $$f(x,\,y) = \frac{x+y}{24} \;\;;\;\; 0 < x < 3 \;\;,\;\; x < y < x+2\,.$$

Solución

- $$\int_0^3 \int_x^{x+2} c\,(x+y)\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^3 \left(x\,y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{x+2} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow c \int_0^3 (4\,x + 2)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\,\left(2\,x^2 + 2\,x\right)\Big|_0^3 = 1 \Leftrightarrow 24\,c = 1$$

Así, $c = \frac{1}{24}$. Con esto

$$f(x,\,y) = \frac{x+y}{24} \;\; ; \;\; 0 < x < 3 \;\; , \;\; x < y < x+2 \,.$$

- $$P(X < 1,\, Y < 2) = \int_0^1 \int_x^2 \frac{1}{24}\,(x+y)\,dy\,dx = \frac{5}{48} \,.$$

- $$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \int_x^{x+2} \frac{x+y}{24}\, dy\, dx = \frac{1}{24} \int_1^2 \left(x\, y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_x^{x+2} dx = \frac{1}{3}\,.$$

- $$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \int_x^{x+2} \frac{x+y}{24}\, dy\, dx = \frac{1}{24} \int_1^2 \left(x\, y + \frac{y^2}{2} \right)\Big|_x^{x+2} dx = \frac{1}{3}\,.$$

- $$P(X < 2 \,|\, Y > 2) = \frac{P(X < 2,\, Y > 2)}{P(Y > 2)} = \frac{\int_0^2 \int_2^{x+2} \frac{1}{24}\,(x+y)\, dy\, dx}{1 - P(Y \leq 2)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \int_0^2 \int_0^y \frac{1}{24}\,(x+y)\, dx\, dy} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2}{5}\,.$$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Definiciones

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas).

Distribuciones Marginales y Condicionales

Definiciones

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). La *Distribución Marginal* de X, está dada por:

Distribuciones Marginales y Condicionales

Definiciones

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). La *Distribución Marginal* de X, está dada por:

$$\begin{cases} \mathsf{p}_X(x) = \sum\limits_{y} p(x,\, y) & , \quad \text{Caso Discreto} \\ \mathsf{f}_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, dy & , \quad \text{Caso Continuo} \end{cases} .$$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Definiciones

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). La *Distribución Marginal* de X, está dada por:

$$\begin{cases} \mathsf{p}_X(x) = \sum\limits_{y} p(x,\, y) & , \quad \text{Caso Discreto} \\ \mathsf{f}_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, dy & , \quad \text{Caso Continuo} \end{cases} .$$

Analogamente se define la distribución Marginal para Y.

Distribuciones Marginales y Condicionales

Definiciones

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). La *Distribución Marginal* de X, está dada por:

$$\begin{cases} \mathsf{p}_X(x) = \sum\limits_{y} p(x,\, y) & , \quad \text{Caso Discreto} \\ \mathsf{f}_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, dy & , \quad \text{Caso Continuo} \end{cases} .$$

Analogamente se define la distribución Marginal para Y.

La *Distribución Condicional* de "Y dado $X = x$", la cual se denotará: $p_{Y\,|\,x}(y)$ (o $f_{Y\,|\,x}(y)$), se define como:

Distribuciones Marginales y Condicionales

Definiciones

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). La *Distribución Marginal* de X, está dada por:

$$\begin{cases} \mathsf{p}_X(x) = \sum_y p(x,\, y) & , \quad \text{Caso Discreto} \\ \mathsf{f}_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, dy & , \quad \text{Caso Continuo} \end{cases} .$$

Analogamente se define la distribución Marginal para Y.

La *Distribución Condicional* de "Y dado $X = x$", la cual se denotará: $p_{Y\,|\,x}(y)$ (o $f_{Y\,|\,x}(y)$), se define como:

$$\begin{cases} \mathsf{p}_{Y\,|\,x}(y) = \dfrac{p(x,\, y)}{p_X(x)} & ; \quad \text{si } \mathsf{p}_X(x) > 0 \quad , \ X \text{ e } Y \text{ discretas} \\ \mathsf{f}_{Y\,|\,x}(y) = \dfrac{f(x,\, y)}{f_X(x)} & ; \quad \text{si } \mathsf{f}_X(x) > 0 \quad , \ X \text{ e } Y \text{ continuas} \end{cases} .$$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Definiciones

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). La *Distribución Marginal* de X, está dada por:

$$\begin{cases} \mathsf{p}_X(x) = \sum_y p(x,\, y) & , \quad \text{Caso Discreto} \\ \mathsf{f}_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, dy & , \quad \text{Caso Continuo} \end{cases} .$$

Analogamente se define la distribución Marginal para Y.

La *Distribución Condicional* de "Y dado $X = x$", la cual se denotará: $p_{Y\,|\,x}(y)$ (o $f_{Y\,|\,x}(y)$), se define como:

$$\begin{cases} \mathsf{p}_{Y\,|\,x}(y) = \dfrac{p(x,\, y)}{p_X(x)} & ; \quad \text{si } \ \mathsf{p}_X(x) > 0 \quad , \ X \text{ e } Y \text{ discretas} \\ \mathsf{f}_{Y\,|\,x}(y) = \dfrac{f(x,\, y)}{f_X(x)} & ; \quad \text{si } \ \mathsf{f}_X(x) > 0 \quad , \ X \text{ e } Y \text{ continuas} \end{cases} .$$

De lo anterior se deduce que:

Distribuciones Marginales y Condicionales

Definiciones

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). La *Distribución Marginal* de X, está dada por:

$$\begin{cases} \mathsf{p}_X(x) = \sum_y p(x,\, y) & , \quad \text{Caso Discreto} \\ \mathsf{f}_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, dy & , \quad \text{Caso Continuo} \end{cases} .$$

Analogamente se define la distribución Marginal para Y.

La *Distribución Condicional* de "Y dado $X = x$", la cual se denotará: $p_{Y\,|\,x}(y)$ (o $f_{Y\,|\,x}(y)$), se define como:

$$\begin{cases} \mathsf{p}_{Y\,|\,x}(y) = \dfrac{p(x,\, y)}{p_X(x)} & ; \quad \text{si } \mathsf{p}_X(x) > 0 \quad , \; X \text{ e } Y \text{ discretas} \\ \mathsf{f}_{Y\,|\,x}(y) = \dfrac{f(x,\, y)}{f_X(x)} & ; \quad \text{si } \mathsf{f}_X(x) > 0 \quad , \; X \text{ e } Y \text{ continuas} \end{cases} .$$

De lo anterior se deduce que:

$$f(x,\, y) = f_X(x)\, f_{Y\,|\,x}(y) = f_Y(y)\, f_{X\,|\,y}(x) .$$

Ejemplo 52

Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.m.p conjunta dada por:

Ejemplo 52

Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.m.p conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
$p(x\,,\,y)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Ejemplo 52

Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.m.p conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
$p(x\,,\,y)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

Halle $p_X(x),\ p_Y(y),\ p_{Y\,|\,1}(y),\ p_{X\,|\,0}(x)$.

Solución

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{1} p(x,\,y) = p(x,\,0) + p(x,\,1) \ \ ; \ \ x = 0,\,1,\,2\,.$$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Ejemplo 52

Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.m.p conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
$p(x\,,\,y)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

Halle $p_X(x),\ p_Y(y),\ p_{Y|1}(y),\ p_{X|0}(x)$.

Solución

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{1} p(x,\,y) = p(x,\,0) + p(x,\,1) \;\; ; \;\; x = 0,\,1,\,2\,.$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=0}^{2} p(x,\,y) = p(0,\,y) + p(1,\,y) + p(2,\,y) \;\; ; \;\; y = 0,\,1\,.$$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Las respectivas tablas para estas distribuciones son:

Distribuciones Marginales y Condicionales

Las respectivas tablas para estas distribuciones son:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Las respectivas tablas para estas distribuciones son:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Por definición:

Las respectivas tablas para estas distribuciones son:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Por definición:

$$p_{Y|1}(y) = \frac{p(1,\, y)}{P_X(1)} = \frac{p(1,\, y)}{\frac{7}{18}} \;\; ; \;\; \text{para } y = 0,\, 1 \, .$$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Las respectivas tablas para estas distribuciones son:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Por definición:

$$p_{Y|1}(y) = \frac{p(1,\, y)}{P_X(1)} = \frac{p(1,\, y)}{\frac{7}{18}} \;\; ; \;\; \text{para } y = 0,\, 1\ .$$

Para hallar la distribución, basta evaluar en $y = 0$ y en $y = 1$:

Distribuciones Marginales y Condicionales

Las respectivas tablas para estas distribuciones son:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Por definición:

$$p_{Y|1}(y) = \frac{p(1,\, y)}{P_X(1)} = \frac{p(1,\, y)}{\frac{7}{18}} \;\; ; \;\; \text{para } y = 0,\, 1\ .$$

Para hallar la distribución, basta evaluar en $y = 0$ y en $y = 1$:

$$p_{Y|1}(0) = \frac{p(1,\, 0)}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7} \quad ; \quad p_{Y|1}(1) = \frac{p(1,\, 1)}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{3}{18}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}\ .$$

Las respectivas tablas para estas distribuciones son:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Por definición:

$$p_{Y|1}(y) = \frac{p(1,\, y)}{P_X(1)} = \frac{p(1,\, y)}{\frac{7}{18}} \quad ; \quad \text{para } y = 0,\, 1\ .$$

Para hallar la distribución, basta evaluar en $y = 0$ y en $y = 1$:

$$p_{Y|1}(0) = \frac{p(1,\, 0)}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7} \quad ; \quad p_{Y|1}(1) = \frac{p(1,\, 1)}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{3}{18}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}\ .$$

De manera análoga:

Distribuciones Marginales y Condicionales

Las respectivas tablas para estas distribuciones son:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Por definición:

$$p_{Y|1}(y) = \frac{p(1,\, y)}{P_X(1)} = \frac{p(1,\, y)}{\frac{7}{18}} \quad ; \quad \text{para } y = 0,\, 1\ .$$

Para hallar la distribución, basta evaluar en $y = 0$ y en $y = 1$:

$$p_{Y|1}(0) = \frac{p(1,\, 0)}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7} \quad ; \quad p_{Y|1}(1) = \frac{p(1,\, 1)}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{3}{18}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}\ .$$

De manera análoga:

$$p_{X|0}(x) = \frac{p(x,\, 0)}{P_Y(0)} = \frac{p(x,\, 0)}{\frac{11}{18}} \quad ; \quad \text{para } x = 0,\, 1,\, 2\ .$$

Por ejemplo:

$$p_{X|0}(0) = \frac{p(0,\, 0)}{\frac{11}{18}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{18}} = \frac{1}{11}\,.$$

Por ejemplo:

$$p_{X|0}(0) = \frac{p(0,\,0)}{\frac{11}{18}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{18}} = \frac{1}{11}\,.$$

Similarmente para los otros valores de x.

Distribuciones Marginales y Condicionales

Por ejemplo:

$$p_{X|0}(0) = \frac{p(0,\,0)}{\frac{11}{18}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{18}} = \frac{1}{11}\,.$$

Similarmente para los otros valores de x. Las distribuciones condicionales se muestran a continuación:

Distribuciones Marginales y Condicionales

Por ejemplo:

$$p_{X|0}(0) = \frac{p(0,\,0)}{\frac{11}{18}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{18}} = \frac{1}{11}\,.$$

Similarmente para los otros valores de x. Las distribuciones condicionales se muestran a continuación:

y	0	1
$P_{Y\|1}(y)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

x	0	1	2
$P_{X\|0}(x)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{6}{11}$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Por ejemplo:

$$p_{X|0}(0) = \frac{p(0,\, 0)}{\frac{11}{18}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{18}} = \frac{1}{11}\ .$$

Similarmente para los otros valores de x. Las distribuciones condicionales se muestran a continuación:

y	0	1
$P_{Y\|1}(y)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

x	0	1	2
$P_{X\|0}(x)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{6}{11}$

Ejemplo 53

Sean X e Y variables aleatorias continuas con f.d.p conjunta dada por:

Por ejemplo:

$$p_{X|0}(0) = \frac{p(0,\,0)}{\frac{11}{18}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{18}} = \frac{1}{11}\,.$$

Similarmente para los otros valores de x. Las distribuciones condicionales se muestran a continuación:

y	0	1
$P_{Y\|1}(y)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

x	0	1	2
$P_{X\|0}(x)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{6}{11}$

Ejemplo 53

Sean X e Y variables aleatorias continuas con f.d.p conjunta dada por:

$$f(x,\,y) = e^{-x} \quad ; \quad 0 \leq y < x\,.$$

Distribuciones Marginales y Condicionales

Por ejemplo:

$$p_{X|0}(0) = \frac{p(0,\,0)}{\frac{11}{18}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{18}} = \frac{1}{11}\ .$$

Similarmente para los otros valores de x. Las distribuciones condicionales se muestran a continuación:

y	0	1
$P_{Y\|1}(y)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

x	0	1	2
$P_{X\|0}(x)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{6}{11}$

Ejemplo 53

Sean X e Y variables aleatorias continuas con f.d.p conjunta dada por:

$$f(x,\,y) \,=\, e^{-x} \quad ; \quad 0 \leq y < x\ .$$

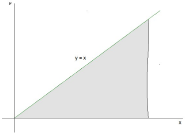
Encuentre las distribuciones marginales para X e Y y las respectivas distribuciones condicionales.

Distribuciones Marginales y Condicionales

El dominio de la f.d.p para X e Y se muestra en la siguiente figura.

Distribuciones Marginales y Condicionales

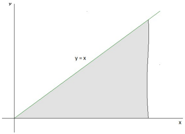
El dominio de la f.d.p para X e Y se muestra en la siguiente figura.



Solución

$$f_X(x) = \int_0^x e^{-x}\,dy = x\,e^{-x}\ ,\ x > 0 \quad ; \quad f_Y(y) = \int_y^\infty e^{-x}\,dx = e^{-y}\ ,\ y > 0\ .$$

El dominio de la f.d.p para X e Y se muestra en la siguiente figura.



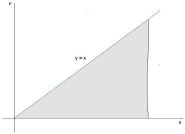
Solución

$$f_X(x) = \int_0^x e^{-x}\, dy = x\, e^{-x}\ ,\ x > 0 \quad ; \quad f_Y(y) = \int_y^\infty e^{-x}\, dx = e^{-y}\ ,\ y > 0\ .$$

Finalmente:

Distribuciones Marginales y Condicionales

El dominio de la f.d.p para X e Y se muestra en la siguiente figura.



Solución

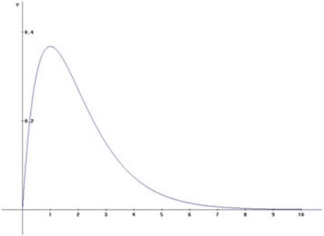
$$f_X(x) = \int_0^x e^{-x}\,dy = x\,e^{-x}\ ,\ x > 0 \quad ; \quad f_Y(y) = \int_y^\infty e^{-x}\,dx = e^{-y}\ ,\ y > 0\ .$$

Finalmente:

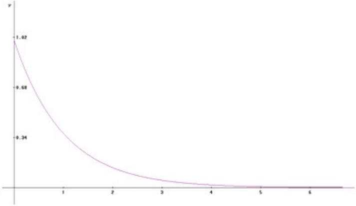
$$f_{Y|x}(y) = \frac{f(x,\,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-x}}{x\,e^{-x}} = \frac{1}{x} \quad ; \quad 0 < y < x\ .$$

$$f_{X|y}(x) = \frac{f(x,\,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-x}}{e^{-y}} = e^{-\,(x-y)} \quad ; \quad x > y\ .$$

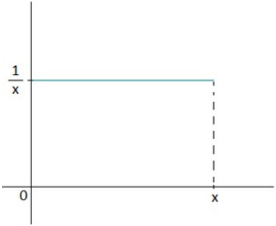
Distribuciones Marginales y Condicionales



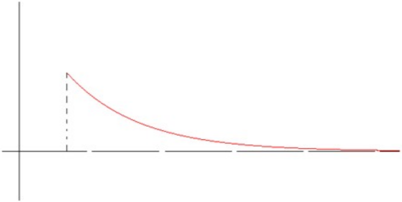
$f_X(x) = x\,e^{-x}$



$f_Y(y) = e^{-y}$



$f_{Y\,|\,x}(y) = \frac{1}{x}$



$f_{X\,|\,y}(x) = e^{-(x-y)}$

Probabilidades Condicionales

El cálculo de probabilidades condicionales se realiza usando la respectiva distribución condicional.

Distribuciones Marginales y Condicionales

Probabilidades Condicionales

El cálculo de probabilidades condicionales se realiza usando la respectiva distribución condicional. Sean X e Y variables aleatorias (discretas o continuas).

Distribuciones Marginales y Condicionales

Probabilidades Condicionales

El cálculo de probabilidades condicionales se realiza usando la respectiva distribución condicional. Sean X e Y variables aleatorias (discretas o continuas). Para conjuntos $A \subset \mathcal{A}$ y $B \subset \mathcal{B}$ se verifica:

Distribuciones Marginales y Condicionales

Probabilidades Condicionales

El cálculo de probabilidades condicionales se realiza usando la respectiva distribución condicional. Sean X e Y variables aleatorias (discretas o continuas). Para conjuntos $A \subset \mathcal{A}$ y $B \subset \mathcal{B}$ se verifica:

$$P\,(Y \in B \,|\, X = x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{y \in B} p_{Y|x}(y)\,dy & ; \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son discretas} \\[2ex] \displaystyle\int_{y \in B} f_{Y|x}(y)\,dy & ; \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son continuas} \end{cases} .$$

Probabilidades Condicionales

El cálculo de probabilidades condicionales se realiza usando la respectiva distribución condicional. Sean X e Y variables aleatorias (discretas o continuas). Para conjuntos $A \subset \mathcal{A}$ y $B \subset \mathcal{B}$ se verifica:

$$P\left(Y \in B \,|\, X = x\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{y \in B} p_{Y|x}(y)\, dy & ; \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son discretas} \\ \\ \displaystyle\int_{y \in B} f_{Y|x}(y)\, dy & ; \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son continuas} \end{cases} .$$

Similarmente

Distribuciones Marginales y Condicionales

Probabilidades Condicionales

El cálculo de probabilidades condicionales se realiza usando la respectiva distribución condicional. Sean X e Y variables aleatorias (discretas o continuas). Para conjuntos $A \subset \mathcal{A}$ y $B \subset \mathcal{B}$ se verifica:

$$P\,(Y \in B \,|\, X = x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{y \in B} p_{Y|x}(y)\,dy & ; \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son discretas} \\ \\ \displaystyle\int_{y \in B} f_{Y|x}(y)\,dy & ; \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son continuas} \end{cases} .$$

Similarmente

$$P\,(X \in A \,|\, Y = y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in A} p_{X|y}(x)\,dx & ; \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son discretas} \\ \\ \displaystyle\int_{x \in A} f_{X|y}(x)\,dx & ; \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son continuas} \end{cases} .$$

Ejemplo: Probabilidades Condicionales

Considere nuevamente las variables aleatorias del ejemplo 53. Calcule $P(Y < 2 \,|\, X = 3)$ y $P(X > 2 \,|\, Y = 1)$.

Ejemplo: Probabilidades Condicionales

Considere nuevamente las variables aleatorias del ejemplo 53. Calcule $P(Y < 2 \,|\, X = 3)$ y $P(X > 2 \,|\, Y = 1)$. Usando los resultados del ejemplo 53 se tiene que:

Ejemplo: Probabilidades Condicionales

Considere nuevamente las variables aleatorias del ejemplo 53. Calcule $P(Y < 2 \,|\, X = 3)$ y $P(X > 2 \,|\, Y = 1)$. Usando los resultados del ejemplo 53 se tiene que:

$$f_{Y|3}(y) = \frac{1}{3}\,,\ 0 < y < 3 \quad ; \quad f_{X|1}(x) = e^{-(x-1)}\,,\ x > 1\,.$$

Ahora,

Ejemplo: Probabilidades Condicionales

Considere nuevamente las variables aleatorias del ejemplo 53. Calcule $P(Y < 2 \,|\, X = 3)$ y $P(X > 2 \,|\, Y = 1)$. Usando los resultados del ejemplo 53 se tiene que:

$$f_{Y|3}(y) = \frac{1}{3}\,,\ 0 < y < 3 \quad ; \quad f_{X|1}(x) = e^{-(x-1)}\,,\ x > 1\,.$$

Ahora,

$$P(Y < 2 \,|\, X = 3) = \int_0^2 \frac{1}{3}\, dy = \frac{2}{3}\,.$$

Ejemplo: Probabilidades Condicionales

Considere nuevamente las variables aleatorias del ejemplo 53. Calcule $P(Y < 2 \,|\, X = 3)$ y $P(X > 2 \,|\, Y = 1)$. Usando los resultados del ejemplo 53 se tiene que:

$$f_{Y|3}(y) = \frac{1}{3}\,,\; 0 < y < 3 \quad ; \quad f_{X|1}(x) = e^{-(x-1)}\,,\; x > 1\,.$$

Ahora,

$$P(Y < 2 \,|\, X = 3) = \int_0^2 \frac{1}{3}\,dy = \frac{2}{3}\,.$$

$$P(X > 2 \,|\, Y = 1) = \int_2^\infty e^{-(x-1)}\,dx = e^{-1} \approx 0.3679\,.$$

Distribuciones Bivariadas

Independencia de Variables Aleatorias

Sean X e Y variables aleatorias.

Independencia de Variables Aleatorias

Sean X e Y variables aleatorias. Diremos que X e Y son *Estadísticamente Independientes* (E.I.), si:

Independencia de Variables Aleatorias

Sean X e Y variables aleatorias. Diremos que X e Y son *Estadísticamente Independientes* (E.I.), si:

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad ; \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A}\,.$$

Distribuciones Bivariadas

Independencia de Variables Aleatorias

Sean X e Y variables aleatorias. Diremos que X e Y son *Estadísticamente Independientes* (E.I.), si:

$$f(x,\, y) \,=\, f_X(x)\, f_Y(y) \quad ; \quad \forall\, (x,\, y) \,\in\, \mathcal{A}\,.$$

Si existe un par $(x,\, y)$, para el cual la igualdad no es cierta, diremos que X e Y son *Estadísticamente Dependientes*.

Independencia de Variables Aleatorias

Sean X e Y variables aleatorias. Diremos que X e Y son *Estadísticamente Independientes* (E.I.), si:

$$f(x,\, y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad ; \quad \forall\, (x,\, y) \in \mathcal{A}\,.$$

Si existe un par $(x,\, y)$, para el cual la igualdad no es cierta, diremos que X e Y son *Estadísticamente Dependientes*.

Ejemplo 54

Sean X e Y variables aleatorias discretas con p.m.f conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
p(x, y)	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

¿Son X e Y estadísticamente independientes?

Solución

Del ejemplo 52 se encontraron las distribuciones marginales para X e Y:

Solución

Del ejemplo 52 se encontraron las distribuciones marginales para X e Y:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Considere el punto $(0,\,1)$ en el dominio de la f.d.p conjunta.

Solución

Del ejemplo 52 se encontraron las distribuciones marginales para X e Y:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Considere el punto $(0,\, 1)$ en el dominio de la f.d.p conjunta. Observe que:

Solución

Del ejemplo 52 se encontraron las distribuciones marginales para X e Y:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Considere el punto $(0,\,1)$ en el dominio de la f.d.p conjunta. Observe que:

$$p(0,\,1) = \frac{3}{18} \quad ; \quad p_X(0) = \frac{4}{18} \ , \ \ p_Y(1) = \frac{7}{18} \, .$$

Solución

Del ejemplo 52 se encontraron las distribuciones marginales para X e Y:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Considere el punto $(0,\, 1)$ en el dominio de la f.d.p conjunta. Observe que:

$$p(0,\, 1) = \frac{3}{18} \quad ; \quad p_X(0) = \frac{4}{18} \;,\;\; p_Y(1) = \frac{7}{18}\,.$$

Claramente $p(0,\, 1) \;\neq\; p_X(0)\, p_Y(1)\,.$

Solución

Del ejemplo 52 se encontraron las distribuciones marginales para X e Y:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Considere el punto $(0,\, 1)$ en el dominio de la f.d.p conjunta. Observe que:

$$p(0,\, 1) = \frac{3}{18} \quad ; \quad p_X(0) = \frac{4}{18} \ , \ \ p_Y(1) = \frac{7}{18} \, .$$

Claramente $p(0,\, 1) \neq p_X(0)\, p_Y(1)$. Se verifica que existe un par $(x,\, y) \in \mathcal{A}$ para el cual no se dá la igualdad anterior.

Solución

Del ejemplo 52 se encontraron las distribuciones marginales para X e Y:

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

Considere el punto $(0,\, 1)$ en el dominio de la f.d.p conjunta. Observe que:

$$p(0,\, 1) = \frac{3}{18} \quad ; \quad p_X(0) = \frac{4}{18} \;\; , \;\; p_Y(1) = \frac{7}{18}\,.$$

Claramente $p(0,\, 1) \neq p_X(0)\, p_Y(1)$. Se verifica que existe un par $(x,\, y) \in \mathcal{A}$ para el cual no se dá la igualdad anterior. Entonces X e Y son v.a Estadísticamente dependientes.

Ejemplo 55

Sean X y Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

Ejemplo 55

Sean X y Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x, y) = 4\,x\,(1 - y) \quad ; \quad 0 < x < 1\,,\; 0 < y < 1\,.$$

Ejemplo 55

Sean X y Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x, y) = 4\,x\,(1 - y) \quad ; \quad 0 < x < 1\;,\;0 < y < 1\;.$$

Las marginales para X e Y son respectivamente:

Ejemplo 55

Sean X y Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x, y) = 4\,x\,(1 - y) \quad ; \quad 0 < x < 1\,,\; 0 < y < 1\,.$$

Las marginales para X e Y son respectivamente:

$$f_X(x) = \int_0^1 4\,x\,(1 - y)\,dy = 2\,x\,,\; 0 < x < 1\,.$$

Ejemplo 55

Sean X y Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x, y) = 4\,x\,(1-y) \quad ; \quad 0 < x < 1\,,\; 0 < y < 1\,.$$

Las marginales para X e Y son respectivamente:

$$f_X(x) = \int_0^1 4\,x\,(1-y)\,dy = 2\,x\,,\; 0 < x < 1\,.$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4\,x\,(1-y)\,dx = 2\,(1-y)\,,\; 0 < y < 1\,.$$

Ejemplo 55

Sean X y Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x,\, y) = 4\,x\,(1-y) \quad ; \quad 0 < x < 1\,,\ 0 < y < 1\,.$$

Las marginales para X e Y son respectivamente:

$$f_X(x) = \int_0^1 4\,x\,(1-y)\,dy = 2\,x\,,\ 0 < x < 1\,.$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4\,x\,(1-y)\,dx = 2\,(1-y)\,,\ 0 < y < 1\,.$$

Además, se verifica que:

Ejemplo 55

Sean X y Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x,\, y) = 4\,x\,(1-y) \quad ; \quad 0 < x < 1\,,\; 0 < y < 1\,.$$

Las marginales para X e Y son respectivamente:

$$f_X(x) = \int_0^1 4\,x\,(1-y)\;dy = 2\,x\,,\; 0 < x < 1\,.$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4\,x\,(1-y)\;dx = 2\,(1-y)\,,\; 0 < y < 1\,.$$

Además, se verifica que:

$$f_X(x)\,f_y(y) = (2\,x)\,2\,(1-y) = 4\,x\,(1-y) = f(x,\, y)\;;\; \forall (x,\, y) \in [0,\, 1]^{\,2}\,,$$

Ejemplo 55

Sean X y Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x,\, y) = 4\,x\,(1-y) \quad ; \quad 0 < x < 1\,,\; 0 < y < 1\,.$$

Las marginales para X e Y son respectivamente:

$$f_X(x) = \int_0^1 4\,x\,(1-y)\,dy = 2\,x\,,\; 0 < x < 1\,.$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4\,x\,(1-y)\,dx = 2\,(1-y)\,,\; 0 < y < 1\,.$$

Además, se verifica que:

$f_X(x)\,f_y(y) = (2\,x)\,2\,(1-y) = 4\,x\,(1-y) = f(x,\,y)\,;\ \forall (x,\,y) \in [0,\,1]^2\,,$
es decir, X y Y son E.I.

Valor Esperado de funciones de v.a.

Al igual que en el caso univariado, se puede definir el valor esperado de funciones de X e Y.

Valor Esperado de funciones de v.a.

Al igual que en el caso univariado, se puede definir el valor esperado de funciones de X e Y. Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o continuas) y sea $g(X, Y)$ una función de X e Y, tal que $g : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Valor Esperado de funciones de v.a.

Al igual que en el caso univariado, se puede definir el valor esperado de funciones de X e Y. Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o continuas) y sea $g(X, Y)$ una función de X e Y, tal que $g : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces:

Valor Esperado de funciones de v.a.

Al igual que en el caso univariado, se puede definir el valor esperado de funciones de X e Y. Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o continuas) y sea $g(X, Y)$ una función de X e Y, tal que $g : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$E\left[g(X, Y)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} \sum\limits_{y} g(x, y)\, p(x, y) & ; \quad \text{caso discreto} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\, f(x, y)\, dy\, dx & ; \quad \text{caso continuo} \end{cases} .$$

Valor Esperado de funciones de v.a.

Al igual que en el caso univariado, se puede definir el valor esperado de funciones de X e Y. Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o continuas) y sea $g(X, Y)$ una función de X e Y, tal que $g : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$E\left[g(X, Y)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} \sum\limits_{y} g(x, y)\, p(x, y) & ; \quad \text{caso discreto} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\, f(x, y)\, dy\, dx & ; \quad \text{caso continuo} \end{cases} .$$

Observe que:

Valor Esperado de funciones de v.a.

Al igual que en el caso univariado, se puede definir el valor esperado de funciones de X e Y. Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o continuas) y sea $g(X, Y)$ una función de X e Y, tal que $g : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$E\left[g(X, Y)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} \sum\limits_{y} g(x, y)\, p(x, y) & ; \quad \text{caso discreto} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\, f(x, y)\, dy\, dx & ; \quad \text{caso continuo} \end{cases} .$$

Observe que:

Si $g(X,Y) = X \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[X]$.

Valor Esperado de funciones de v.a.

Al igual que en el caso univariado, se puede definir el valor esperado de funciones de X e Y. Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o continuas) y sea $g(X,\, Y)$ una función de X e Y, tal que $g : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$E\left[g(X,\, Y)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} \sum\limits_{y} g(x,\, y)\, p(x,\, y) & ; \quad \text{caso discreto} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\, y)\, f(x,\, y)\, dy\, dx & ; \quad \text{caso continuo} \end{cases} .$$

Observe que:

Si $g(X,Y) = X \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[X]$.

Si $g(X,Y) = Y \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[Y]$.

Valor Esperado de funciones de v.a.

Al igual que en el caso univariado, se puede definir el valor esperado de funciones de X e Y. Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o continuas) y sea $g(X,\, Y)$ una función de X e Y, tal que $g : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$E\left[g(X,\, Y)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} \sum\limits_{y} g(x,\, y)\, p(x,\, y) & ; \quad \text{caso discreto} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\, y)\, f(x,\, y)\, dy\, dx & ; \quad \text{caso continuo} \end{cases} .$$

Observe que:

Si $g(X,Y) = X \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[X]$.

Si $g(X,Y) = Y \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[Y]$.

Si $g(X,Y) = (X-\mu_X)^2 \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[(X-\mu_X)^2] = Var[X]$.

Valor Esperado de funciones de v.a.

Al igual que en el caso univariado, se puede definir el valor esperado de funciones de X e Y. Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o continuas) y sea $g(X, Y)$ una función de X e Y, tal que $g : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$E\left[g(X, Y)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} \sum\limits_{y} g(x, y)\, p(x, y) & ; \quad \text{caso discreto} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\, f(x, y)\, dy\, dx & ; \quad \text{caso continuo} \end{cases} .$$

Observe que:

Si $g(X,Y) = X \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[X]$.

Si $g(X,Y) = Y \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[Y]$.

Si $g(X,Y) = (X-\mu_X)^2 \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[(X-\mu_X)^2] = Var[X]$.

Si $g(X,Y) = (Y-\mu_Y)^2 \quad \Rightarrow \quad E[g(X,Y)] = E[(Y-\mu_Y)^2] = Var[Y]$.

Ejemplo 56

Sean X e Y variables aleatorias discretas con p.m.f. conjunta dada por:

Ejemplo 56

Sean X e Y variables aleatorias discretas con p.m.f. conjunta dada por:

$$p(x, y) = \frac{(x+y)}{36} \quad ; \quad x, y = 1, 2, 3 \, .$$

Ejemplo 56

Sean X e Y variables aleatorias discretas con p.m.f. conjunta dada por:

$$p(x, y) = \frac{(x + y)}{36} \quad ; \quad x, y = 1, 2, 3 \; .$$

Ahora:

Ejemplo 56

Sean X e Y variables aleatorias discretas con p.m.f. conjunta dada por:

$$p(x,y) = \frac{(x+y)}{36} \quad ; \quad x,y = 1,2,3 \, .$$

Ahora:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} x * \frac{x+y}{36} = \frac{13}{6} \; ; \; E[Y] = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} y * \frac{x+y}{36} = \frac{13}{6} \, .$$

Ejemplo 56

Sean X e Y variables aleatorias discretas con p.m.f. conjunta dada por:

$$p(x,y) = \frac{(x+y)}{36} \quad ; \quad x,y = 1,2,3\ .$$

Ahora:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} x * \frac{x+y}{36} = \frac{13}{6} \ ; \ E[Y] = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} y * \frac{x+y}{36} = \frac{13}{6}\ .$$

$$E[X\,Y] = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} x\,y * \frac{x+y}{36} = \frac{14}{3}\ .$$

$$E[X^2+Y^2] = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} (x^2+y^2) * \frac{x+y}{36} = \frac{32}{3}\ .$$

$$E[(X-\mu_X)\,(Y-\mu_Y)] = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} \left(x - \frac{13}{6}\right)\left(y - \frac{13}{6}\right) * \frac{x+y}{36} = -\,\frac{1}{36}\ .$$

Ejemplo 57

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

Ejemplo 57

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad 0 < y \leq x \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases} \quad .$$

Ejemplo 57

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad 0 < y \leq x \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Ahora:

$$E[X] = \int_0^{\infty} \int_0^{x} x\, e^{-x}\, dy\, dx = 2 \quad ; \quad E[Y] = \int_0^{\infty} \int_0^{x} y\, e^{-x}\, dy\, dx = 1 \,.$$

Ejemplo 57

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad 0 < y \leq x \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Ahora:

$$E[X] = \int_0^{\infty}\int_0^{x} x\,e^{-x}\,dy\,dx = 2 \quad ; \quad E[Y] = \int_0^{\infty}\int_0^{x} y\,e^{-x}\,dy\,dx = 1 .$$

$$E[X\,Y] = \int_0^{\infty}\int_0^{x} x\,y\,e^{-x}\,dy\,dx = 3 \,; \; E[X^2+Y^2] = \int_0^{\infty}\int_0^{x} (x^2+y^2)\,e^{-x}\,dy\,dx = 8 .$$

Ejemplo 57

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad 0 < y \leq x \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Ahora:

$$E[X] = \int_0^\infty \int_0^x x\, e^{-x}\, dy\, dx = 2 \quad ; \quad E[Y] = \int_0^\infty \int_0^x y\, e^{-x}\, dy\, dx = 1 \, .$$

$$E[X\,Y] = \int_0^\infty \int_0^x x\, y\, e^{-x}\, dy\, dx = 3 \, ; \; E[X^2+Y^2] = \int_0^\infty \int_0^x (x^2 + y^2)\, e^{-x}\, dy\, dx = 8 \, .$$

$$E[(X-\mu_X)\,(Y-\mu_Y)] = \int_0^\infty \int_0^x (x-2)\,(y-1)\; e^{-x}\, dy\, dx = 1 \, .$$

Distribuciones Bivariadas

Valores Esperados Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas).

Valores Esperados Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). Sea $h(X)$ una función solo de X.

Valores Esperados Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). Sea $h(X)$ una función solo de X. El *Valor Esperado Condicional* de "$h(X)$ dado $Y = y$" se define como:

Valores Esperados Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). Sea $h(X)$ una función solo de X. El *Valor Esperado Condicional* de "$h(X)$ dado $Y = y$" se define como:

$$E[h(X) \,|\, Y = y] = \begin{cases} \sum\limits_{x} h(x)\, p_{X|y}(x) & ; \quad X \text{ es Discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_{X|y}(x)\, dx & ; \quad X \text{ es Continua} \end{cases} .$$

Valores Esperados Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). Sea $h(X)$ una función solo de X. El *Valor Esperado Condicional* de "$h(X)$ dado $Y = y$" se define como:

$$E[h(X)\,|\,Y=y] = \begin{cases} \sum\limits_{x} h(x)\,p_{X|y}(x) & ; \quad X \text{ es Discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)\,f_{X|y}(x)\,dx & ; \quad X \text{ es Continua} \end{cases} .$$

Analogamente se define para una función $g(Y)$:

Valores Esperados Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). Sea $h(X)$ una función solo de X. El *Valor Esperado Condicional* de "$h(X)$ dado $Y = y$" se define como:

$$E[h(X)\,|\,Y=y] = \begin{cases} \sum\limits_{x} h(x)\,p_{X|y}(x) & ; \quad X \text{ es Discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)\,f_{X|y}(x)\,dx & ; \quad X \text{ es Continua} \end{cases} .$$

Analogamente se define para una función $g(Y)$:

$$E[g(Y)\,|\,X=x] = \begin{cases} \sum\limits_{y} g(y)\,p_{Y|x}(y) & ; \quad Y \text{ es Discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\,f_{Y|x}(y)\,dy & ; \quad Y \text{ es Continua} \end{cases} .$$

Distribuciones Bivariadas

Valores Esperados Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). Sea $h(X)$ una función solo de X. El *Valor Esperado Condicional* de "$h(X)$ dado $Y = y$" se define como:

$$E[h(X)\,|\,Y = y] = \begin{cases} \sum\limits_{x} h(x)\,p_{X|y}(x) & ; \quad X \text{ es Discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)\,f_{X|y}(x)\,dx & ; \quad X \text{ es Continua} \end{cases} .$$

Analogamente se define para una función $g(Y)$:

$$E[g(Y)\,|\,X = x] = \begin{cases} \sum\limits_{y} g(y)\,p_{Y|x}(y) & ; \quad Y \text{ es Discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\,f_{Y|x}(y)\,dy & ; \quad Y \text{ es Continua} \end{cases} .$$

En particular, si $h(X) = X$ se obtiene la media condicional de X dado $y = y$, la cual se denota $\mu_{X|y}$.

Distribuciones Bivariadas

Valores Esperados Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas). Sea $h(X)$ una función solo de X. El *Valor Esperado Condicional* de "$h(X)$ dado $Y = y$" se define como:

$$E[h(X)\,|\,Y = y] = \begin{cases} \sum\limits_{x} h(x)\, p_{X|y}(x) & ; \quad X \text{ es Discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_{X|y}(x)\, dx & ; \quad X \text{ es Continua} \end{cases} .$$

Analogamente se define para una función $g(Y)$:

$$E[g(Y)\,|\,X = x] = \begin{cases} \sum\limits_{y} g(y)\, p_{Y|x}(y) & ; \quad Y \text{ es Discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f_{Y|x}(y)\, dy & ; \quad Y \text{ es Continua} \end{cases} .$$

En particular, si $h(X) = X$ se obtiene la media condicional de X dado $y = y$, la cual se denota $\mu_{X|y}$. Si $g(Y) = Y$ se obtiene la media condicional de Y dado $X = x$, la cual se denota $\mu_{Y|x}$.

Valores Esperados Condicionales

La Varianza condicional de X dado $Y = y$, se denota $\sigma^2_{X|y}$ y se obtiene como:

$$\sigma^2_{X|y} = Var[X \mid Y = y] = E[X^2 \mid Y = y] - \mu^2_{X|y} \, .$$

Distribuciones Bivariadas

Valores Esperados Condicionales

La Varianza condicional de X dado $Y = y$, se denota $\sigma^2_{X|y}$ y se obtiene como:

$$\sigma^2_{X|y} = Var[X \,|\, Y = y] = E[X^2 \,|\, Y = y] - \mu^2_{X|y}\,.$$

Similarmente se define la varianza condicional de Y dado $X = x$:

Valores Esperados Condicionales

La Varianza condicional de X dado $Y = y$, se denota $\sigma^2_{X|y}$ y se obtiene como:

$$\sigma^2_{X|y} = Var[X \,|\, Y = y] = E[X^2 \,|\, Y = y] - \mu^2_{X|y} \, .$$

Similarmente se define la varianza condicional de Y dado $X = x$:

$$\sigma^2_{Y|x} = Var[Y \,|\, X = x] = E[Y^2 \,|\, X = x] - \mu^2_{Y|x} \, .$$

Ejemplo 58

Sean X e Y variables aleatorias discretas con p.m.f. conjunta dada por:

Valores Esperados Condicionales

La Varianza condicional de X dado $Y = y$, se denota $\sigma^2_{X|y}$ y se obtiene como:

$$\sigma^2_{X|y} = Var[X \,|\, Y = y] = E[X^2 \,|\, Y = y] - \mu^2_{X|y} \,.$$

Similarmente se define la varianza condicional de Y dado $X = x$:

$$\sigma^2_{Y|x} = Var[Y \,|\, X = x] = E[Y^2 \,|\, X = x] - \mu^2_{Y|x} \,.$$

Ejemplo 58

Sean X e Y variables aleatorias discretas con p.m.f. conjunta dada por:

$$p(x, y) = \frac{(x + y)}{36} \quad ; \quad x, y = 1, 2, 3 \,.$$

Valores Esperados Condicionales

La Varianza condicional de X dado $Y = y$, se denota $\sigma^2_{X|y}$ y se obtiene como:

$$\sigma^2_{X|y} = Var[X \,|\, Y = y] = E[X^2 \,|\, Y = y] - \mu^2_{X|y} \, .$$

Similarmente se define la varianza condicional de Y dado $X = x$:

$$\sigma^2_{Y|x} = Var[Y \,|\, X = x] = E[Y^2 \,|\, X = x] - \mu^2_{Y|x} \, .$$

Ejemplo 58

Sean X e Y variables aleatorias discretas con p.m.f. conjunta dada por:

$$p(x, y) = \frac{(x + y)}{36} \quad ; \quad x, y = 1, 2, 3 \, .$$

Halle $E[X \,|\, Y = 1]$, $E[Y \,|\, X = 2]$, $E[X^2 \,|\, Y = 1]$, $E[Y^2 \,|\, X = 2]$, $\sigma^2_{X|1}$, $\sigma^2_{Y|2}$.

Solución

Es fácil verificar que la distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $p_{X|1}(x) = \frac{x+1}{9}$; $x = 1, 2, 3$, y que la distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $p_{Y|2}(y) = \frac{y+2}{12}$; $y = 1, 2, 3$.

Solución

Es fácil verificar que la distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $p_{X|1}(x) = \frac{x+1}{9}$; $x = 1, 2, 3$, y que la distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $p_{Y|2}(y) = \frac{y+2}{12}$; $y = 1, 2, 3$. Así se tiene que:

Solución

Es fácil verificar que la distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $p_{X|1}(x) = \frac{x+1}{9}$; $x = 1, 2, 3$, y que la distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $p_{Y|2}(y) = \frac{y+2}{12}$; $y = 1, 2, 3$. Así se tiene que:

$$E[X \,|\, Y = 1] = \sum_{x=1}^{3} x \,\frac{x+1}{9} = \frac{20}{9} \quad ; \quad E[Y \,|\, X = 2] = \sum_{y=1}^{3} y \,\frac{y+2}{12} = \frac{13}{6} \,.$$

Solución

Es fácil verificar que la distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $p_{X|1}(x) = \frac{x+1}{9}$; $x = 1, 2, 3$, y que la distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $p_{Y|2}(y) = \frac{y+2}{12}$; $y = 1, 2, 3$. Así se tiene que:

$$E[X\,|\,Y = 1] = \sum_{x=1}^{3} x\,\frac{x+1}{9} = \frac{20}{9} \quad ; \quad E[Y\,|\,X = 2] = \sum_{y=1}^{3} y\,\frac{y+2}{12} = \frac{13}{6} \, .$$

$$E[X^2\,|\,Y = 1] = \sum_{x=1}^{3} x^2\,\frac{x+1}{9} = \frac{50}{9} \quad ; \quad E[Y^2\,|\,X = 2] = \sum_{y=1}^{3} y^2\,\frac{y+2}{12} = \frac{16}{3} \, .$$

Solución

Es fácil verificar que la distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $p_{X|1}(x) = \frac{x+1}{9}$; $x = 1, 2, 3$, y que la distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $p_{Y|2}(y) = \frac{y+2}{12}$; $y = 1, 2, 3$. Así se tiene que:

$$E[X \,|\, Y = 1] = \sum_{x=1}^{3} x \, \frac{x+1}{9} = \frac{20}{9} \quad ; \quad E[Y \,|\, X = 2] = \sum_{y=1}^{3} y \, \frac{y+2}{12} = \frac{13}{6} \, .$$

$$E[X^2 \,|\, Y = 1] = \sum_{x=1}^{3} x^2 \, \frac{x+1}{9} = \frac{50}{9} \quad ; \quad E[Y^2 \,|\, X = 2] = \sum_{y=1}^{3} y^2 \, \frac{y+2}{12} = \frac{16}{3} \, .$$

$$\sigma^2_{X|1} = E[X^2 \,|\, Y = 1] - \mu^2_{X|1} = \frac{50}{9} - \left(\frac{20}{9}\right)^2 = \frac{50}{81} \, .$$

Solución

Es fácil verificar que la distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $p_{X|1}(x) = \frac{x+1}{9}$; $x = 1, 2, 3$, y que la distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $p_{Y|2}(y) = \frac{y+2}{12}$; $y = 1, 2, 3$. Así se tiene que:

$$E[X \,|\, Y = 1] = \sum_{x=1}^{3} x \,\frac{x+1}{9} = \frac{20}{9} \quad ; \quad E[Y \,|\, X = 2] = \sum_{y=1}^{3} y \,\frac{y+2}{12} = \frac{13}{6} \,.$$

$$E[X^2 \,|\, Y = 1] = \sum_{x=1}^{3} x^2 \,\frac{x+1}{9} = \frac{50}{9} \quad ; \quad E[Y^2 \,|\, X = 2] = \sum_{y=1}^{3} y^2 \,\frac{y+2}{12} = \frac{16}{3} \,.$$

$$\sigma^2_{X|1} = E[X^2 \,|\, Y = 1] - \mu^2_{X|1} = \frac{50}{9} - \left(\frac{20}{9}\right)^2 = \frac{50}{81} \,.$$

$$\sigma^2_{Y|2} = E[Y^2 \,|\, X = 2] - \mu^2_{Y|2} = \frac{16}{3} - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{23}{36} \,.$$

Ejemplo 59

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por $f(x, y) = e^{-x}\ ;\ 0 < y \leq x$.

Ejemplo 59

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por $f(x, y) = e^{-x}\ ;\ 0 < y \leq x$. Halle $E[X \mid Y = 1]$, $E[Y \mid X = 2]$, $E[X^2 \mid Y = 1]$, $E[Y^2 \mid X = 2]$, $\sigma^2_{X|1}$, $\sigma^2_{Y|2}$.

Ejemplo 59

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por $f(x, y) = e^{-x}$; $0 < y \leq x$. Halle $E[X \mid Y = 1]$, $E[Y \mid X = 2]$, $E[X^2 \mid Y = 1]$, $E[Y^2 \mid X = 2]$, $\sigma^2_{X|1}$, $\sigma^2_{Y|2}$.

Solución

La distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $f_{X|1}(x) = e^{-(x-1)}$; $x > 1$.

Ejemplo 59

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por $f(x,y) = e^{-x}\ ;\ 0 < y \leq x$. Halle $E[X \mid Y = 1]$, $E[Y \mid X = 2]$, $E[X^2 \mid Y = 1]$, $E[Y^2 \mid X = 2]$, $\sigma^2_{X|1}$, $\sigma^2_{Y|2}$.

Solución

La distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $f_{X|1}(x) = e^{-(x-1)}\ ;\ x > 1$.
La distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $f_{Y|2}(y) = \frac{1}{2}\ ;\ 0 < y < 2$. Así:

Ejemplo 59

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por $f(x,y) = e^{-x}\ ;\ 0 < y \leq x$. Halle $E[X \mid Y = 1]$, $E[Y \mid X = 2]$, $E[X^2 \mid Y = 1]$, $E[Y^2 \mid X = 2]$, $\sigma^2_{X|1}$, $\sigma^2_{Y|2}$.

Solución

La distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $f_{X|1}(x) = e^{-(x-1)}\ ;\ x > 1$.
La distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $f_{Y|2}(y) = \frac{1}{2}\ ;\ 0 < y < 2$. Así:

$$E[X \mid Y = 1] = \int_1^\infty x\, e^{-(x-1)}\, dx = 2 \quad ; \quad E[Y, \mid X = 2] = \int_0^2 y\, \frac{1}{2}\, dy = 1 \ .$$

Distribuciones Bivariadas

Ejemplo 59

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por $f(x,y) = e^{-x}$; $0 < y \leq x$. Halle $E[X \mid Y = 1]$, $E[Y \mid X = 2]$, $E[X^2 \mid Y = 1]$, $E[Y^2 \mid X = 2]$, $\sigma^2_{X|1}$, $\sigma^2_{Y|2}$.

Solución

La distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $f_{X|1}(x) = e^{-(x-1)}$; $x > 1$.
La distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $f_{Y|2}(y) = \frac{1}{2}$; $0 < y < 2$. Así:

$$E[X \mid Y = 1] = \int_1^\infty x\, e^{-(x-1)}\, dx = 2 \quad ; \quad E[Y, \mid X = 2] = \int_0^2 y\, \frac{1}{2}\, dy = 1 \,.$$

$$E[X^2 \mid Y = 1] = \int_1^\infty x^2\, e^{-(x-1)}\, dx = 5 \quad ; \quad E[Y^2 \mid X = 2] = \int_0^2 y^2\, \frac{1}{2}\, dy = \frac{4}{3} \,.$$

Distribuciones Bivariadas

Ejemplo 59

Sean X e Y variables aleatorias continuas con p.d.f. conjunta dada por $f(x,y) = e^{-x}$; $0 < y \leq x$. Halle $E[X \,|\, Y = 1]$, $E[Y \,|\, X = 2]$, $E[X^2 \,|\, Y = 1]$, $E[Y^2 \,|\, X = 2]$, $\sigma^2_{X|1}$, $\sigma^2_{Y|2}$.

Solución

La distribución condicional de X dado $Y = 1$ es $f_{X|1}(x) = e^{-(x-1)}$; $x > 1$.
La distribución condicional de Y dado $X = 2$ es $f_{Y|2}(y) = \frac{1}{2}$; $0 < y < 2$. Así:

$$E[X \,|\, Y = 1] = \int_1^\infty x\, e^{-(x-1)}\, dx = 2 \quad ; \quad E[Y, |\, X = 2] = \int_0^2 y\, \frac{1}{2}\, dy = 1 \,.$$

$$E[X^2 \,|\, Y = 1] = \int_1^\infty x^2\, e^{-(x-1)}\, dx = 5 \quad ; \quad E[Y^2 \,|\, X = 2] = \int_0^2 y^2\, \frac{1}{2}\, dy = \frac{4}{3} \,.$$

$$\sigma^2_{X|1} = E[X^2 \,|\, Y = 1] - \mu^2_{X|1} = 5 - 2^2 = 1 \quad ; \quad \sigma^2_{Y|2} = E[Y^2 \,|\, X = 2] - \mu^2_{Y|2} = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3} \,.$$