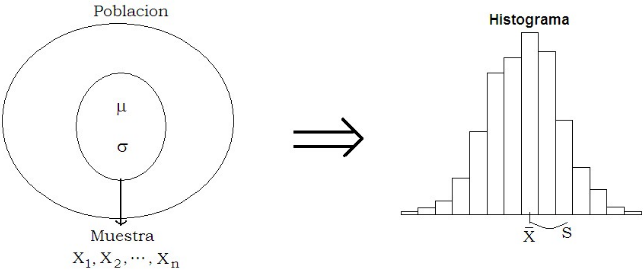
Distribuciones Muestrales

En el proceso de identificar y explicar las características esenciales que permiten describir el comportamiento de un fenómeno, nuestro objetivo es el de establecer de manera aproximada dicho comportamiento usando parte de toda la información relevante acerca del fenómeno.



Las distribuciones de probabilidad vistas hasta ahora presentan, en su forma funcional, características que deben ser previamente conocidas, para poder identificar y responder a preguntas a través del cálculo de probabilidades asociadas a dichas distribuciones.

Distribuciones Muestrales

Introducción

- Si $X \sim bin(n,p)$, es necesario conocer tanto el valor de n como de p para poder evaluar probabilidades asociadas a la v.a X.

Distribuciones Muestrales

Introducción

- Si $X \sim bin(n, p)$, es necesario conocer tanto el valor de n como de p para poder evaluar probabilidades asociadas a la v.a X. Diferentes valores de p implican una forma distribucional diferente, aunque pertenezca a la misma familia.

Introducción

- Si $X \sim bin(n,p)$, es necesario conocer tanto el valor de n como de p para poder evaluar probabilidades asociadas a la v.a X. Diferentes valores de p implican una forma distribucional diferente, aunque pertenezca a la misma familia.
- Si $X \sim p(\lambda)$, es necesario conocer el valor de λ, para el cálculo de probabilidades.

Distribuciones Muestrales

Introducción

- Si $X \sim bin(n,p)$, es necesario conocer tanto el valor de n como de p para poder evaluar probabilidades asociadas a la v.a X. Diferentes valores de p implican una forma distribucional diferente, aunque pertenezca a la misma familia.
- Si $X \sim p(\lambda)$, es necesario conocer el valor de λ, para el cálculo de probabilidades.
- Si $X \sim n\left(\mu, \sigma^2\right)$, cada combinación de μ y de σ, implica diferentes cálculos probabilísticos asociados a la v.a. X.

Distribuciones Muestrales

Introducción

- Si $X \sim bin(n, p)$, es necesario conocer tanto el valor de n como de p para poder evaluar probabilidades asociadas a la v.a X. Diferentes valores de p implican una forma distribucional diferente, aunque pertenezca a la misma familia.
- Si $X \sim p(\lambda)$, es necesario conocer el valor de λ, para el cálculo de probabilidades.
- Si $X \sim n\left(\mu, \sigma^2\right)$, cada combinación de μ y de σ, implica diferentes cálculos probabilísticos asociados a la v.a. X.

En los anteriores ejemplos, las cantidades claves que se requieren conocer y que caracterizan a dichas distribuciones son llamadas *Parámetros*.

Introducción

- Si $X \sim bin(n, p)$, es necesario conocer tanto el valor de n como de p para poder evaluar probabilidades asociadas a la v.a X. Diferentes valores de p implican una forma distribucional diferente, aunque pertenezca a la misma familia.
- Si $X \sim p(\lambda)$, es necesario conocer el valor de λ, para el cálculo de probabilidades.
- Si $X \sim n\left(\mu, \sigma^2\right)$, cada combinación de μ y de σ, implica diferentes cálculos probabilísticos asociados a la v.a. X.

En los anteriores ejemplos, las cantidades claves que se requieren conocer y que caracterizan a dichas distribuciones son llamadas *Parámetros*.Aunque en algunos casos sea posible conocer la distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria, puede que los parámetros asociados a ella, no lo sean.

Introducción

- Si $X \sim bin(n, p)$, es necesario conocer tanto el valor de n como de p para poder evaluar probabilidades asociadas a la v.a X. Diferentes valores de p implican una forma distribucional diferente, aunque pertenezca a la misma familia.
- Si $X \sim p(\lambda)$, es necesario conocer el valor de λ, para el cálculo de probabilidades.
- Si $X \sim n\left(\mu, \sigma^2\right)$, cada combinación de μ y de σ, implica diferentes cálculos probabilísticos asociados a la v.a. X.

En los anteriores ejemplos, las cantidades claves que se requieren conocer y que caracterizan a dichas distribuciones son llamadas *Parámetros*.Aunque en algunos casos sea posible conocer la distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria, puede que los parámetros asociados a ella, no lo sean. Ahora bien, en la práctica, algunas cantidades particulares, son de interés para el investigador y su obtención de manera directa o aproximada, a través de una muestra de datos, se hace cada vez más importante.

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

- Estimar la proporción de lavadoras porducidas por una empresa que se descomponen antes del tiempo de garantía.

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

- Estimar la proporción de lavadoras porducidas por una empresa que se descomponen antes del tiempo de garantía.
- Estimar el tiempo promedio que una persona permanece en fila.

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

- Estimar la proporción de lavadoras porducidas por una empresa que se descomponen antes del tiempo de garantía.
- Estimar el tiempo promedio que una persona permanece en fila.
- Estimar la variabilidad en los diámetros de las tuercas de cierto tipo producidas por un fabricante.

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

- Estimar la proporción de lavadoras porducidas por una empresa que se descomponen antes del tiempo de garantía.
- Estimar el tiempo promedio que una persona permanece en fila.
- Estimar la variabilidad en los diámetros de las tuercas de cierto tipo producidas por un fabricante.

En estos 3 casos la característica de interés es: una proporción, un promedio, o una varianza.

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

- Estimar la proporción de lavadoras porducidas por una empresa que se descomponen antes del tiempo de garantía.
- Estimar el tiempo promedio que una persona permanece en fila.
- Estimar la variabilidad en los diámetros de las tuercas de cierto tipo producidas por un fabricante.

En estos 3 casos la característica de interés es: una proporción, un promedio, o una varianza. Estas características son únicas en cada caso.

Distribuciones Muestrales

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

- Estimar la proporción de lavadoras porducidas por una empresa que se descomponen antes del tiempo de garantía.
- Estimar el tiempo promedio que una persona permanece en fila.
- Estimar la variabilidad en los diámetros de las tuercas de cierto tipo producidas por un fabricante.

En estos 3 casos la característica de interés es: una proporción, un promedio, o una varianza. Estas características son únicas en cada caso. La idea es estimar u obtener un valor aproximado de estas cantidades(parámetros), usando la información recolectada a partir de una muestra de datos.

Distribuciones Muestrales

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

- Estimar la proporción de lavadoras porducidas por una empresa que se descomponen antes del tiempo de garantía.
- Estimar el tiempo promedio que una persona permanece en fila.
- Estimar la variabilidad en los diámetros de las tuercas de cierto tipo producidas por un fabricante.

En estos 3 casos la característica de interés es: una proporción, un promedio, o una varianza. Estas características son únicas en cada caso. La idea es estimar u obtener un valor aproximado de estas cantidades(parámetros), usando la información recolectada a partir de una muestra de datos.

Cada objeto o individuo seleccionado aporta información acerca de la característica que se quiere medir, la cual varía de individuo a individuo o de objeto a objeto.

Distribuciones Muestrales

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

- Estimar la proporción de lavadoras porducidas por una empresa que se descomponen antes del tiempo de garantía.
- Estimar el tiempo promedio que una persona permanece en fila.
- Estimar la variabilidad en los diámetros de las tuercas de cierto tipo producidas por un fabricante.

En estos 3 casos la característica de interés es: una proporción, un promedio, o una varianza. Estas características son únicas en cada caso. La idea es estimar u obtener un valor aproximado de estas cantidades(parámetros), usando la información recolectada a partir de una muestra de datos.

Cada objeto o individuo seleccionado aporta información acerca de la característica que se quiere medir, la cual varía de individuo a individuo o de objeto a objeto. Así, la muestra obtenida no es más que una colección de variables aleatorias.

Introducción

En particular, algunas de las cantidades a estimar más comunes se pueden encontrar en los siguientes ejemplos:

- Estimar la proporción de lavadoras porducidas por una empresa que se descomponen antes del tiempo de garantía.
- Estimar el tiempo promedio que una persona permanece en fila.
- Estimar la variabilidad en los diámetros de las tuercas de cierto tipo producidas por un fabricante.

En estos 3 casos la característica de interés es: una proporción, un promedio, o una varianza. Estas características son únicas en cada caso. La idea es estimar u obtener un valor aproximado de estas cantidades(parámetros), usando la información recolectada a partir de una muestra de datos.

Cada objeto o individuo seleccionado aporta información acerca de la característica que se quiere medir, la cual varía de individuo a individuo o de objeto a objeto. Así, la muestra obtenida no es más que una colección de variables aleatorias. Si además, las mediciones son independientes, las variables involucradas también lo serán.

Distribuciones Muestrales

Muestras Aleatorias

Una *Muestra Aleatoria* (m.a), de tamaño n, es un conjunto de n v.a E.I e idénticamente distribuidas.

Distribuciones Muestrales

Muestras Aleatorias

Una *Muestra Aleatoria* (m.a), de tamaño n, es un conjunto de n v.a E.I e idénticamente distribuidas. es decir, si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a., entonces la distribución conjunta está dada por:

Muestras Aleatorias

Una *Muestra Aleatoria* (m.a), de tamaño n, es un conjunto de n v.a E.I e idénticamente distribuidas. es decir, si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a., entonces la distribución conjunta está dada por:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i) ;$$

Distribuciones Muestrales

Muestras Aleatorias

Una *Muestra Aleatoria* (m.a), de tamaño n, es un conjunto de n v.a E.I e idénticamente distribuidas. es decir, si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a., entonces la distribución conjunta está dada por:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \ ;$$

donde $g(\bullet)$ representa la densidad común de la cual proviene la muestra.

Muestras Aleatorias

Una *Muestra Aleatoria* (m.a), de tamaño n, es un conjunto de n v.a E.I e idénticamente distribuidas. es decir, si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a., entonces la distribución conjunta está dada por:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \; ;$$

donde $g(\bullet)$ representa la densidad común de la cual proviene la muestra. Cualquier cantidad calculada a partir de la muestra es conocida como **Estadística Muestral** o **Estadístico**.

Distribuciones Muestrales

Muestras Aleatorias

Una *Muestra Aleatoria* (m.a), de tamaño n, es un conjunto de n v.a E.I e idénticamente distribuidas. es decir, si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a., entonces la distribución conjunta está dada por:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \ ;$$

donde $g(\bullet)$ representa la densidad común de la cual proviene la muestra. Cualquier cantidad calculada a partir de la muestra es conocida como **Estadística Muestral** o **Estadístico**.

Un Estadístico será entonces una función de la m.a.

Distribuciones Muestrales

Muestras Aleatorias

Una *Muestra Aleatoria* (m.a), de tamaño n, es un conjunto de n v.a E.I e idénticamente distribuidas. es decir, si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a., entonces la distribución conjunta está dada por:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \; ;$$

donde $g(\bullet)$ representa la densidad común de la cual proviene la muestra. Cualquier cantidad calculada a partir de la muestra es conocida como **Estadística Muestral** o **Estadístico**.

Un Estadístico será entonces una función de la m.a. No todos los estadísticos que se definen a partir de una m.a. son de interés.

Distribuciones Muestrales

Muestras Aleatorias

Una *Muestra Aleatoria* (m.a), de tamaño n, es un conjunto de n v.a E.I e idénticamente distribuidas. es decir, si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a., entonces la distribución conjunta está dada por:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \; ;$$

donde $g(\bullet)$ representa la densidad común de la cual proviene la muestra. Cualquier cantidad calculada a partir de la muestra es conocida como **Estadística Muestral** o **Estadístico**.

Un Estadístico será entonces una función de la m.a. No todos los estadísticos que se definen a partir de una m.a. son de interés. La idea está en encontrar aquellos que permiten obtener mejores aproximaciones a los parámetros de interés. (Por ejemplo la media μ, la varianza σ^2 o una proporción p).

Estadísticos

En particular algunas estadísticas conocidas empleadas para estimar estos parámetros son:

Distribuciones Muestrales

Estadísticos

En particular algunas estadísticas conocidas empleadas para estimar estos parámetros son:

- Para μ se usan comunmente $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Distribuciones Muestrales

Estadísticos

En particular algunas estadísticas conocidas empleadas para estimar estos parámetros son:

- Para μ se usan comunmente $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Para σ^2 se usa $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

Estadísticos

En particular algunas estadísticas conocidas empleadas para estimar estos parámetros son:

- Para μ se usan comunmente $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Para σ^2 se usa $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$.
- Para una proporción p asociada a una distribución Binomial, se usa $\frac{X}{n}$, $X \sim bin(n , p)$.

Distribuciones Muestrales

Estadísticos

En particular algunas estadísticas conocidas empleadas para estimar estos parámetros son:

- Para μ se usan comunmente $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Para σ^2 se usa $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$.
- Para una proporción p asociada a una distribución Binomial, se usa $\frac{X}{n}$, $X \sim bin(n\ ,\ p)$.

Propuestos estos estadísticos, las siguiente pregunta se relaciona con su distribución.

Distribuciones Muestrales

Estadísticos

En particular algunas estadísticas conocidas empleadas para estimar estos parámetros son:

- Para μ se usan comunmente $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Para σ^2 se usa $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.
- Para una proporción p asociada a una distribución Binomial, se usa $\frac{X}{n}$, $X \sim bin(n , p)$.

Propuestos estos estadísticos, las siguiente pregunta se relaciona con su distribución. Esto es importante, ya que los estadísticos muestrales son también variables aleatorias y para evaluar que tan buenos son como aproximaciones de los parámetros distribucionales (también conocidos como parámetros poblacionales), es necesario conocer sus distribuciones de probabilidad.

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían:

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?,

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?, ¿Cuál es la distribucción de S^2?,

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?, ¿Cuál es la distribucción de S^2?, ¿Cuál es la dsitribución de $\frac{X}{n}$?, donde $X \sim bin(n\,,p)$.

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?, ¿Cuál es la distribucción de S^2?, ¿Cuál es la dsitribución de $\frac{X}{n}$?, donde $X \sim bin(n\,,p)$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2.

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?, ¿Cuál es la distribucción de S^2?, ¿Cuál es la dsitribución de $\frac{X}{n}$?, donde $X \sim bin(n\,, p)$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?, ¿Cuál es la distribucción de S^2?, ¿Cuál es la dsitribución de $\frac{X}{n}$?, donde $X \sim bin(n\,,p)$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Observe que:

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?, ¿Cuál es la distribucción de S^2?, ¿Cuál es la dsitribución de $\frac{X}{n}$?, donde $X \sim bin(n\,,p)$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Observe que:

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{n\,\mu}{n} = \mu\,.$$

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?, ¿Cuál es la distribucción de S^2?, ¿Cuál es la dsitribución de $\frac{X}{n}$?, donde $X \sim bin(n\,, p)$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Observe que:

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{n\,\mu}{n} = \mu\,.$$

$$Var\left[\bar{X}\right] = Var\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i\right] = \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

Distribuciones Muestrales

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?, ¿Cuál es la distribucción de S^2?, ¿Cuál es la dsitribución de $\frac{X}{n}$?, donde $X \sim bin(n\,, p)$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Observe que:

$$E\left[\bar{X}\right] \;=\; E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] \;=\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] \;=\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu \;=\; \frac{n\,\mu}{n} \;=\; \mu\,.$$

$$Var\left[\bar{X}\right] \;=\; Var\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] \;=\; \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i\right] \;=\; \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

Si $T = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \;\Rightarrow\; E[T] = n\,\mu$ y $Var[T] = n\,\sigma^2$.

Distribuciones Muestrales

Distribución de la media muestral

Las preguntas a resolver serían: ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?, ¿Cuál es la distribucción de S^2?, ¿Cuál es la dsitribución de $\frac{X}{n}$?, donde $X \sim bin(n\,, p)$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Observe que:

$$E\left[\bar{X}\right] \;=\; E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu \;=\; \frac{n\,\mu}{n} \;=\; \mu\,.$$

$$Var\left[\bar{X}\right] \;=\; Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \;=\; \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i\right] \;=\; \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

Si $T = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\,, \;\Rightarrow\; E[T] = n\,\mu$ y $Var[T] = n\,\sigma^2$. Así, la distribución muestral de $\bar{X}$, tiene media μ y varianza σ^2/n.

Distribuciones Muestrales

Proposición

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$, entonces:

Distribuciones Muestrales

Proposición

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$\bar{X} \sim n\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{y} \quad T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim n(n\,\mu, n\,\sigma^2)\,.$$

Distribuciones Muestrales

Proposición

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$\bar{X} \sim n\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{y} \quad T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim n(n\,\mu, n\,\sigma^2)\,.$$

Así,

Distribuciones Muestrales

Proposición

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$\bar{X} \sim n\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{y} \quad T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim n(n\,\mu, n\,\sigma^2)\,.$$

Así,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim n\,(0\,,\,1) \quad \text{y} \quad \frac{T - n\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \sim n\,(0\,,\,1)\,.$$

Ejemplo 65

Suponga que el QI de los estudiantes de primer año de Matemáticas es una v.a. normalmente distribuída con media 120 y varianza 100. Se seleccionan aleatoriamente 25 estudiantes de primer año.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el QI promedio de esta muestra sea superior a 122?

Distribuciones Muestrales

Proposición

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$\bar{X} \sim n\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{y} \quad T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim n(n\,\mu, n\,\sigma^2)\,.$$

Así,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim n\,(0\,,\,1) \quad \text{y} \quad \frac{T - n\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \sim n\,(0\,,\,1)\,.$$

Ejemplo 65

Suponga que el QI de los estudiantes de primer año de Matemáticas es una v.a. normalmente distribuída con media 120 y varianza 100. Se seleccionan aleatoriamente 25 estudiantes de primer año.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el QI promedio de esta muestra sea superior a 122?
2. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra que garantice que el $5\,\%$ de las veces el QI promedio sea superior a 122?

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. que representa los QI de n estudiantes de primer año.

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. que representa los QI de n estudiantes de primer año. Se tiene que $X_i \sim n(120, 100)\,;\, i = 1, 2, \ldots, n$.

1.

$$P(\bar{X} > 122) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{122 - 120}{\frac{10}{\sqrt{25}}}\right) = P(Z > 1) = 0.1587\,.$$

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. que representa los QI de n estudiantes de primer año. Se tiene que $X_i \sim n(120, 100)$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.
$$P(\bar{X} > 122) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{122 - 120}{\frac{10}{\sqrt{25}}}\right) = P(Z > 1) = 0.1587 \,.$$

2.
$$P(\bar{X} > 122) = 0.05 \iff P\left(Z > \frac{122 - 120}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right) = 0.05 \,.$$

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. que representa los QI de n estudiantes de primer año. Se tiene que $X_i \sim n(120,\, 100)\,;\, i = 1, 2, \ldots, n\,.$

1. $$P(\bar{X} > 122) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{122 - 120}{\frac{10}{\sqrt{25}}}\right) = P(Z > 1) = 0.1587\,.$$

2. $$P(\bar{X} > 122) = 0.05 \;\Leftrightarrow\; P\left(Z > \frac{122 - 120}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right) = 0.05\,.$$

$$\Leftrightarrow\; P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.95 \;\therefore\; 1.645 = \frac{\sqrt{n}}{5} \;\therefore\; n \approx 68\,.$$

Distribuciones Muestrales

¿Qué pasa cuando la m.a $X_1, \ldots, X_n$ no proviene de una normal?

Distribuciones Muestrales

¿Qué pasa cuando la m.a $X_1, \ldots, X_n$ no proviene de una normal? Recuerde que si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a de una población con media μ y varianza σ^2, la variable aleatoria $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene media cero y varianza 1.

Distribuciones Muestrales

¿Qué pasa cuando la m.a $X_1, \ldots, X_n$ no proviene de una normal? Recuerde que si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a de una población con media μ y varianza σ^2, la variable aleatoria $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene media cero y varianza 1.

Cuando n crece la varianza de $\bar{X}$ es cada vez más pequeña y el histograma de las $\bar{X}$ es cada vez más parecido al de una distribución simétrica con forma de campana.

Distribuciones Muestrales

¿Qué pasa cuando la m.a $X_1, \ldots, X_n$ no proviene de una normal? Recuerde que si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a de una población con media μ y varianza σ^2, la variable aleatoria $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene media cero y varianza 1.

Cuando n crece la varianza de $\bar{X}$ es cada vez más pequeña y el histograma de las $\bar{X}$ es cada vez más parecido al de una distribución simétrica con forma de campana.

Teorema Central del Límite

Suponga que $X_1, \ldots, X$ es una m.a. de una población con media μ y varianza σ^2.

Distribuciones Muestrales

¿Qué pasa cuando la m.a $X_1, \ldots, X_n$ no proviene de una normal? Recuerde que si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a de una población con media μ y varianza σ^2, la variable aleatoria $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene media cero y varianza 1.

Cuando n crece la varianza de $\bar{X}$ es cada vez más pequeña y el histograma de las $\bar{X}$ es cada vez más parecido al de una distribución simétrica con forma de campana.

Teorema Central del Límite

Suponga que $X_1, \ldots, X$ es una m.a. de una población con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{X}$ la media muestral. Entonces cuando $n \to +\infty$, la distribución muestral de $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ es aproximadamente normal estándar.

Distribuciones Muestrales

¿Qué pasa cuando la m.a $X_1, \ldots, X_n$ no proviene de una normal? Recuerde que si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a de una población con media μ y varianza σ^2, la variable aleatoria $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene media cero y varianza 1.

Cuando n crece la varianza de $\bar{X}$ es cada vez más pequeña y el histograma de las $\bar{X}$ es cada vez más parecido al de una distribución simétrica con forma de campana.

Teorema Central del Límite

Suponga que $X_1, \ldots, X$ es una m.a. de una población con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{X}$ la media muestral. Entonces cuando $n \to +\infty$, la distribución muestral de $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ es aproximadamente normal estándar. En otras palabras:

Distribuciones Muestrales

¿Qué pasa cuando la m.a $X_1, \ldots, X_n$ no proviene de una normal? Recuerde que si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a de una población con media μ y varianza σ^2, la variable aleatoria $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene media cero y varianza 1.

Cuando n crece la varianza de $\bar{X}$ es cada vez más pequeña y el histograma de las $\bar{X}$ es cada vez más parecido al de una distribución simétrica con forma de campana.

Teorema Central del Límite

Suponga que $X_1, \ldots, X$ es una m.a. de una población con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{X}$ la media muestral. Entonces cuando $n \to +\infty$, la distribución muestral de $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ es aproximadamente normal estándar. En otras palabras:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \overbrace{n \to +\infty}^{aprox} \quad n(0,\, 1)\ .$$

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación.

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación. Si la distribución de la muestra es simétrica y continua, la exigencia de tamaños de muestra grandes, puede flexibilizarse.

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación. Si la distribución de la muestra es simétrica y continua, la exigencia de tamaños de muestra grandes, puede flexibilizarse. En este caso valores de $n \geq 30$ suelen dar excelentes aproximaciones.

Distribuciones Muestrales

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación. Si la distribución de la muestra es simétrica y continua, la exigencia de tamaños de muestra grandes, puede flexibilizarse. En este caso valores de $n \geq 30$ suelen dar excelentes aproximaciones. Si la distribución de la muestra es sesgada, se requieren tamaños de muestra cada vez más grandes.

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación. Si la distribución de la muestra es simétrica y continua, la exigencia de tamaños de muestra grandes, puede flexibilizarse. En este caso valores de $n \geq 30$ suelen dar excelentes aproximaciones. Si la distribución de la muestra es sesgada, se requieren tamaños de muestra cada vez más grandes. En el caso de muestras aleatorias que provienen de distribuciones discretas, el tamaño de muestra debe ser lo más grande posible.

Distribuciones Muestrales

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación. Si la distribución de la muestra es simétrica y continua, la exigencia de tamaños de muestra grandes, puede flexibilizarse. En este caso valores de $n \geq 30$ suelen dar excelentes aproximaciones. Si la distribución de la muestra es sesgada, se requieren tamaños de muestra cada vez más grandes. En el caso de muestras aleatorias que provienen de distribuciones discretas, el tamaño de muestra debe ser lo más grande posible.El uso del TLC, se ilustra acontinuación:

Distribuciones Muestrales

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación. Si la distribución de la muestra es simétrica y continua, la exigencia de tamaños de muestra grandes, puede flexibilizarse. En este caso valores de $n \geq 30$ suelen dar excelentes aproximaciones. Si la distribución de la muestra es sesgada, se requieren tamaños de muestra cada vez más grandes. En el caso de muestras aleatorias que provienen de distribuciones discretas, el tamaño de muestra debe ser lo más grande posible.El uso del TLC, se ilustra acontinuación:

$$P(\bar{X} \leq a) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \approx P\left(Z < \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

Distribuciones Muestrales

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación. Si la distribución de la muestra es simétrica y continua, la exigencia de tamaños de muestra grandes, puede flexibilizarse. En este caso valores de $n \geq 30$ suelen dar excelentes aproximaciones. Si la distribución de la muestra es sesgada, se requieren tamaños de muestra cada vez más grandes. En el caso de muestras aleatorias que provienen de distribuciones discretas, el tamaño de muestra debe ser lo más grande posible.El uso del TLC, se ilustra acontinuación:

$$P(\bar{X} \leq a) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \approx P\left(Z < \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

Si σ^2 es desconocida y n grande, se puede reemplazar σ^2 por S^2.

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación. Si la distribución de la muestra es simétrica y continua, la exigencia de tamaños de muestra grandes, puede flexibilizarse. En este caso valores de $n \geq 30$ suelen dar excelentes aproximaciones. Si la distribución de la muestra es sesgada, se requieren tamaños de muestra cada vez más grandes. En el caso de muestras aleatorias que provienen de distribuciones discretas, el tamaño de muestra debe ser lo más grande posible.El uso del TLC, se ilustra acontinuación:

$$P(\bar{X} \leq a) \;=\; P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \;\approx\; P\left(Z < \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) .$$

Si σ^2 es desconocida y n grande, se puede reemplazar σ^2 por S^2. Así:

Teorema Central del Límite (TLC)

Entre mayor sea n, mejor es la aproximación. Si la distribución de la muestra es simétrica y continua, la exigencia de tamaños de muestra grandes, puede flexibilizarse. En este caso valores de $n \geq 30$ suelen dar excelentes aproximaciones. Si la distribución de la muestra es sesgada, se requieren tamaños de muestra cada vez más grandes. En el caso de muestras aleatorias que provienen de distribuciones discretas, el tamaño de muestra debe ser lo más grande posible.El uso del TLC, se ilustra acontinuación:

$$P(\bar{X} \leq a) \;=\; P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \;\approx\; P\left(Z < \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \;.$$

Si σ^2 es desconocida y n grande, se puede reemplazar σ^2 por S^2. Así:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad \overbrace{n \to +\infty}^{aprox} \quad n(0,\, 1)\;.$$

Ejemplo 66

Por experiencia se sabe que un empleado tarda en promedio 12 minutos para fabricar un artículo. Con base en la información obtenida del mes anterior, se estimó que la variación en estos tiempos de fabricación es aproximadamente 10.24 min^2.

Ejemplo 66

Por experiencia se sabe que un empleado tarda en promedio 12 minutos para fabricar un artículo. Con base en la información obtenida del mes anterior, se estimó que la variación en estos tiempos de fabricación es aproximadamente 10.24 min^2. Se seleccionan aleatoriamente 60 empleados y se registran los tiempos que tarda cada uno en fabricar el mismo tipo de artículo.

Ejemplo 66

Por experiencia se sabe que un empleado tarda en promedio 12 minutos para fabricar un artículo. Con base en la información obtenida del mes anterior, se estimó que la variación en estos tiempos de fabricación es aproximadamente 10.24 min^2. Se seleccionan aleatoriamente 60 empleados y se registran los tiempos que tarda cada uno en fabricar el mismo tipo de artículo. Es importante aclarar que el proceso de fabricación está estadarizado.

Ejemplo 66

Por experiencia se sabe que un empleado tarda en promedio 12 minutos para fabricar un artículo. Con base en la información obtenida del mes anterior, se estimó que la variación en estos tiempos de fabricación es aproximadamente 10.24 min^2. Se seleccionan aleatoriamente 60 empleados y se registran los tiempos que tarda cada uno en fabricar el mismo tipo de artículo. Es importante aclarar que el proceso de fabricación está estadarizado.

a) Calcule la probabilidad de que el tiempo promedio empleado por los 60 empleados sea superior a 12.5 min.

Ejemplo 66

Por experiencia se sabe que un empleado tarda en promedio 12 minutos para fabricar un artículo. Con base en la información obtenida del mes anterior, se estimó que la variación en estos tiempos de fabricación es aproximadamente 10.24 min^2. Se seleccionan aleatoriamente 60 empleados y se registran los tiempos que tarda cada uno en fabricar el mismo tipo de artículo. Es importante aclarar que el proceso de fabricación está estadarizado.

a) Calcule la probabilidad de que el tiempo promedio empleado por los 60 empleados sea superior a 12.5 min.

b) Si se desea que el tiempo promedio empleado por n empleados sea inferior a 12.5 min, con una probabilidad aproximada de al menos 0.95, ¿Cuál debe ser el tamaño de muestra mínimo que garantiza esta condición?

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo.

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo. De la información dada por el enunciado se sabe que $E[X] = 12$ y $\sigma^2 \approx 10.24$.

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo. De la información dada por el enunciado se sabe que $E[X] = 12$ y $\sigma^2 \approx 10.24$. Con esto se tiene que $\sigma = 3.2$.

a) Sea $X_1, \ldots, X_{60}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de fabricación de los 60 empleados.

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo. De la información dada por el enunciado se sabe que $E[X] = 12$ y $\sigma^2 \approx 10.24$. Con esto se tiene que $\sigma = 3.2$.

a) Sea $X_1, \ldots, X_{60}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de fabricación de los 60 empleados. Se tiene que $E[X_i] = 12$ y $Var[X_i] \approx 10.24$, para $i = 1, \ldots, 60$.

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo. De la información dada por el enunciado se sabe que $E[X] = 12$ y $\sigma^2 \approx 10.24$. Con esto se tiene que $\sigma = 3.2$.

a) Sea $X_1, \ldots, X_{60}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de fabricación de los 60 empleados. Se tiene que $E[X_i] = 12$ y $Var[X_i] \approx 10.24$, para $i = 1, \ldots, 60$. Se pide calcular:

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo. De la información dada por el enunciado se sabe que $E[X] = 12$ y $\sigma^2 \approx 10.24$. Con esto se tiene que $\sigma = 3.2$.

a) Sea $X_1, \ldots, X_{60}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de fabricación de los 60 empleados. Se tiene que $E[X_i] = 12$ y $Var[X_i] \approx 10.24$, para $i = 1, \ldots, 60$. Se pide calcular:

$$P(\bar{X} > 12.5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{12.5 - 12}{3.2/\sqrt{60}}\right) \underset{TLC}{\approx} P(Z > 1.21) = 0.1131\,.$$

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo. De la información dada por el enunciado se sabe que $E[X] = 12$ y $\sigma^2 \approx 10.24$. Con esto se tiene que $\sigma = 3.2$.

a) Sea $X_1, \ldots, X_{60}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de fabricación de los 60 empleados. Se tiene que $E[X_i] = 12$ y $Var[X_i] \approx 10.24$, para $i = 1, \ldots, 60$. Se pide calcular:

$$P(\bar{X} > 12.5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{12.5 - 12}{3.2/\sqrt{60}}\right) \underset{TLC}{\approx} P(Z > 1.21) = 0.1131 .$$

b) Se debe hallar n tal que $P(\bar{X} < 12.5) \geq 0.95$.

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo. De la información dada por el enunciado se sabe que $E[X] = 12$ y $\sigma^2 \approx 10.24$. Con esto se tiene que $\sigma = 3.2$.

a) Sea $X_1, \ldots, X_{60}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de fabricación de los 60 empleados. Se tiene que $E[X_i] = 12$ y $Var[X_i] \approx 10.24$, para $i = 1, \ldots, 60$. Se pide calcular:

$$P(\bar{X} > 12.5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{12.5 - 12}{3.2/\sqrt{60}}\right) \underset{TLC}{\approx} P(Z > 1.21) = 0.1131 \,.$$

b) Se debe hallar n tal que $P(\bar{X} < 12.5) \geq 0.95$. En otras palabras:

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo. De la información dada por el enunciado se sabe que $E[X] = 12$ y $\sigma^2 \approx 10.24$. Con esto se tiene que $\sigma = 3.2$.

a) Sea $X_1, \ldots, X_{60}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de fabricación de los 60 empleados. Se tiene que $E[X_i] = 12$ y $Var[X_i] \approx 10.24$, para $i = 1, \ldots, 60$. Se pide calcular:

$$P(\bar{X} > 12.5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{12.5 - 12}{3.2/\sqrt{60}}\right) \underset{TLC}{\approx} P(Z > 1.21) = 0.1131\,.$$

b) Se debe hallar n tal que $P(\bar{X} < 12.5) \geq 0.95$. En otras palabras:

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{12.5 - 12}{3.2/\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z < \frac{5\sqrt{n}}{32}\right) \underset{aprox}{\geq} 0.95\,.$$

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de fabricación del artículo. De la información dada por el enunciado se sabe que $E[X] = 12$ y $\sigma^2 \approx 10.24$. Con esto se tiene que $\sigma = 3.2$.

a) Sea $X_1, \ldots, X_{60}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de fabricación de los 60 empleados. Se tiene que $E[X_i] = 12$ y $Var[X_i] \approx 10.24$, para $i = 1, \ldots, 60$. Se pide calcular:

$$P(\bar{X} > 12.5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{12.5 - 12}{3.2/\sqrt{60}}\right) \underset{TLC}{\approx} P(Z > 1.21) = 0.1131 \,.$$

b) Se debe hallar n tal que $P(\bar{X} < 12.5) \geq 0.95$. En otras palabras:

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{12.5 - 12}{3.2/\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z < \frac{5\sqrt{n}}{32}\right) \underset{aprox}{\geq} 0.95 \,.$$

Haciendo $z = \frac{5\sqrt{n}}{32}$, se tiene $P(Z < z) \geq 0.95$.

Haciendo $z = \frac{5\sqrt{n}}{32}$, se tiene $P(Z < z) \geq 0.95$. De la tabla de la normal estándar, se obtiene $z = 1.645$.

Haciendo $z = \frac{5\sqrt{n}}{32}$, se tiene $P(Z < z) \geq 0.95$. De la tabla de la normal estándar, se obtiene $z = 1.645$. Para garantizar que la probabilidad sea al menos 0.95 se requiere que $z \geq 1.645$, es decir $\frac{5\sqrt{n}}{32} \geq 1.645$.

Haciendo $z = \frac{5\sqrt{n}}{32}$, se tiene $P(Z < z) \geq 0.95$. De la tabla de la normal estándar, se obtiene $z = 1.645$. Para garantizar que la probabilidad sea al menos 0.95 se requiere que $z \geq 1.645$, es decir $\frac{5\sqrt{n}}{32} \geq 1.645$. De esta última desigualdad se obtiene que $n \geq 111$, el cual corresponde al mínimo n que garantiza la condición, de manera aproximada.

Ejemplo 67

La resistencia a la compresión del concreto es una v.a con una resistencia media de 2500 psi y una desviación estándar de 50 psi.

Haciendo $z = \frac{5\sqrt{n}}{32}$, se tiene $P(Z < z) \geq 0.95$. De la tabla de la normal estándar, se obtiene $z = 1.645$. Para garantizar que la probabilidad sea al menos 0.95 se requiere que $z \geq 1.645$, es decir $\frac{5\sqrt{n}}{32} \geq 1.645$. De esta última desigualdad se obtiene que $n \geq 111$, el cual corresponde al mínimo n que garantiza la condición, de manera aproximada.

Ejemplo 67

La resistencia a la compresión del concreto es una v.a con una resistencia media de 2500 psi y una desviación estándar de 50 psi. Si se examinan 36 especimenes de concreto, ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia promedio en esta muestra esté entre 2497 y 2505?

Haciendo $z = \frac{5\sqrt{n}}{32}$, se tiene $P(Z < z) \geq 0.95$. De la tabla de la normal estándar, se obtiene $z = 1.645$. Para garantizar que la probabilidad sea al menos 0.95 se requiere que $z \geq 1.645$, es decir $\frac{5\sqrt{n}}{32} \geq 1.645$. De esta última desigualdad se obtiene que $n \geq 111$, el cual corresponde al mínimo n que garantiza la condición, de manera aproximada.

Ejemplo 67

La resistencia a la compresión del concreto es una v.a con una resistencia media de 2500 psi y una desviación estándar de 50 psi. Si se examinan 36 especimenes de concreto, ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia promedio en esta muestra esté entre 2497 y 2505? En este caso se pide calcular:

Haciendo $z = \frac{5\sqrt{n}}{32}$, se tiene $P(Z < z) \geq 0.95$. De la tabla de la normal estándar, se obtiene $z = 1.645$. Para garantizar que la probabilidad sea al menos 0.95 se requiere que $z \geq 1.645$, es decir $\frac{5\sqrt{n}}{32} \geq 1.645$. De esta última desigualdad se obtiene que $n \geq 111$, el cual corresponde al mínimo n que garantiza la condición, de manera aproximada.

Ejemplo 67

La resistencia a la compresión del concreto es una v.a con una resistencia media de 2500 psi y una desviación estándar de 50 psi. Si se examinan 36 especimenes de concreto, ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia promedio en esta muestra esté entre 2497 y 2505? En este caso se pide calcular:

$$P(2497 \leq \bar{X} \leq 2505) = P\left(\frac{2497 - 2500}{50/\sqrt{36}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{2505 - 2500}{50/\sqrt{36}}\right) .$$

Haciendo $z = \frac{5\sqrt{n}}{32}$, se tiene $P(Z < z) \geq 0.95$. De la tabla de la normal estándar, se obtiene $z = 1.645$. Para garantizar que la probabilidad sea al menos 0.95 se requiere que $z \geq 1.645$, es decir $\frac{5\sqrt{n}}{32} \geq 1.645$. De esta última desigualdad se obtiene que $n \geq 111$, el cual corresponde al mínimo n que garantiza la condición, de manera aproximada.

Ejemplo 67

La resistencia a la compresión del concreto es una v.a con una resistencia media de 2500 psi y una desviación estándar de 50 psi. Si se examinan 36 especimenes de concreto, ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia promedio en esta muestra esté entre 2497 y 2505? En este caso se pide calcular:

$$P(2497 \leq \bar{X} \leq 2505) = P\left(\frac{2497 - 2500}{50/\sqrt{36}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{2505 - 2500}{50/\sqrt{36}}\right) .$$

$$\underset{T\tilde{L}C}{\approx} P(-0.36 \leq Z \leq 0.6) = \phi(0.6) - \phi(-0.36) = 0.3663 .$$

Ejemplo 68

De la experiencia se sabe que el número promedio de accidentes en un cruce muy concurrido es de 3 por día.

Ejemplo 68

De la experiencia se sabe que el número promedio de accidentes en un cruce muy concurrido es de 3 por día. Si se observa el número de accidentes en dicho cruce en los siguientes 100 días, calcule la probabilidad aproximada de que el promedio de accidentes en los 100 días sea superior a 3.5.

Ejemplo 68

De la experiencia se sabe que el número promedio de accidentes en un cruce muy concurrido es de 3 por día. Si se observa el número de accidentes en dicho cruce en los siguientes 100 días, calcule la probabilidad aproximada de que el promedio de accidentes en los 100 días sea superior a 3.5.

Solución

Asumiendo que el número de accidentes se comporta igual en cada día, la variable aleatoria X número de accidentes por día, tiene una distribución $p(\lambda)$, con $\lambda = 3$.

Distribuciones Muestrales

Ejemplo 68

De la experiencia se sabe que el número promedio de accidentes en un cruce muy concurrido es de 3 por día. Si se observa el número de accidentes en dicho cruce en los siguientes 100 días, calcule la probabilidad aproximada de que el promedio de accidentes en los 100 días sea superior a 3.5.

Solución

Asumiendo que el número de accidentes se comporta igual en cada día, la variable aleatoria X número de accidentes por día, tiene una distribución $p(\lambda)$, con $\lambda = 3$. Se pide calcular:

Ejemplo 68

De la experiencia se sabe que el número promedio de accidentes en un cruce muy concurrido es de 3 por día. Si se observa el número de accidentes en dicho cruce en los siguientes 100 días, calcule la probabilidad aproximada de que el promedio de accidentes en los 100 días sea superior a 3.5.

Solución

Asumiendo que el número de accidentes se comporta igual en cada día, la variable aleatoria X número de accidentes por día, tiene una distribución $p(\lambda)$, con $\lambda = 3$. Se pide calcular:

$$P(\bar{X} > 3.5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{3.5 - 3}{\sqrt{3}/\sqrt{100}}\right) \underset{TLC}{\approx} P(Z > 2.89)\ .$$

Ejemplo 68

De la experiencia se sabe que el número promedio de accidentes en un cruce muy concurrido es de 3 por día. Si se observa el número de accidentes en dicho cruce en los siguientes 100 días, calcule la probabilidad aproximada de que el promedio de accidentes en los 100 días sea superior a 3.5.

Solución

Asumiendo que el número de accidentes se comporta igual en cada día, la variable aleatoria X número de accidentes por día, tiene una distribución $p(\lambda)$, con $\lambda = 3$. Se pide calcular:

$$P(\bar{X} > 3.5) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{3.5-3}{\sqrt{3}/\sqrt{100}}\right) \underset{TLC}{\approx} P(Z > 2.89) \, .$$

$$P(\bar{X} > 3.5) \approx 1 - P(Z \leq 2.89) = 0.00193 \, .$$