Distribución Normal

Esta distribución juega un papel clave en el desarrollo de la inferencia estadística, pues muchas de las herramientas usadas en la toma de decisiones o en el modelamiento estadístico, tienen su fundamento en ésta distribución.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Esta distribución juega un papel clave en el desarrollo de la inferencia estadística, pues muchas de las herramientas usadas en la toma de decisiones o en el modelamiento estadístico, tienen su fundamento en ésta distribución.

Las variables involucradas en un gran número de estudios, pueden ser modeladas usando una distribución normal.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Esta distribución juega un papel clave en el desarrollo de la inferencia estadística, pues muchas de las herramientas usadas en la toma de decisiones o en el modelamiento estadístico, tienen su fundamento en ésta distribución.

Las variables involucradas en un gran número de estudios, pueden ser modeladas usando una distribución normal. Algunas variables físicas, datos meteorológicos (temperatura, precipitaciones, presión atmosférica, etc), mediciones en organismos vivos, notas o puntajes en pruebas de admisión o de aptitud, errores en instrumentación, proporciones de errores en diversos procesos, etc.

Distribución Normal

Sea X una variable aleatoria continua; se dice que X tiene una distribución normal, si su f.d.p es de la forma:

Distribución Normal

Sea X una variable aleatoria continua; se dice que X tiene una distribución normal, si su f.d.p es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad ; \quad \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ \mu \in \mathbb{R}\ ,\ \ \sigma > 0 \end{array} .$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Sea X una variable aleatoria continua; se dice que X tiene una distribución normal, si su f.d.p es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad ; \quad \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ \mu \in \mathbb{R}\ ,\ \ \sigma > 0 \end{array} .$$

Por notación se escribe $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$.

Distribución Normal

Sea X una variable aleatoria continua; se dice que X tiene una distribución normal, si su f.d.p es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{(x\ -\ \mu)^2}{\sigma^2}} \quad ; \quad \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ \mu \in \mathbb{R}\ ,\ \ \sigma > 0 \end{array} .$$

Por notación se escribe $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. A las cantidades μ y σ^2 se les conoce como parámetros de localización y de escala, respectivamente.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Sea X una variable aleatoria continua; se dice que X tiene una distribución normal, si su f.d.p es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad ; \quad \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ \mu \in \mathbb{R}\ ,\ \ \sigma > 0 \end{array} .$$

Por notación se escribe $X \sim n(\mu, \sigma^2)$. A las cantidades μ y σ^2 se les conoce como parámetros de localización y de escala, respectivamente.

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, se obtiene una distribución normal especial, conocida como *Normal Estándar* y la respectiva variable aleatoria es usualmente denotada con la letra Z.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Sea X una variable aleatoria continua; se dice que X tiene una distribución normal, si su f.d.p es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{(x\,-\,\mu)^2}{\sigma^2}} \quad ; \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ \mu \in \mathbb{R}\ ,\ \ \sigma > 0 \end{matrix} \ .$$

Por notación se escribe $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. A las cantidades μ y σ^2 se les conoce como parámetros de localización y de escala, respectivamente.

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, se obtiene una distribución normal especial, conocida como *Normal Estándar* y la respectiva variable aleatoria es usualmente denotada con la letra Z. Se escribe $Z \sim n(0,\ 1)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Notas

Sea X una variable aleatoria tal que que $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Notas

Sea X una variable aleatoria tal que que $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen para la variable aleatoria X.

- El área abajo de curva normal comprendida entre $(-\infty,\ \infty)$ es igual a 1.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Notas

Sea X una variable aleatoria tal que que $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen para la variable aleatoria X.

- El área abajo de curva normal comprendida entre $(-\infty,\ \infty)$ es igual a 1.
- La normal es simétrica respecto a μ.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Notas

Sea X una variable aleatoria tal que que $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen para la variable aleatoria X.

- El área abajo de curva normal comprendida entre $(-\infty,\ \infty)$ es igual a 1.
- La normal es simétrica respecto a μ. Como consecuencia de esto, el área bajo de la curva en el intervalo $[\mu,\ \infty)$ es igual a 0.5.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Notas

Sea X una variable aleatoria tal que que $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen para la variable aleatoria X.

- El área abajo de curva normal comprendida entre $(-\infty,\ \infty)$ es igual a 1.
- La normal es simétrica respecto a μ. Como consecuencia de esto, el área bajo de la curva en el intervalo $[\mu,\ \infty)$ es igual a 0.5.
- La distribución normal tiene forma de campana.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Notas

Sea X una variable aleatoria tal que que $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen para la variable aleatoria X.

- El área abajo de curva normal comprendida entre $(-\infty,\ \infty)$ es igual a 1.
- La normal es simétrica respecto a μ. Como consecuencia de esto, el área bajo de la curva en el intervalo $[\mu,\ \infty)$ es igual a 0.5.
- La distribución normal tiene forma de campana.
- La normal queda completamente caracterizada con el conocimiento de sus parámetros de localización y de escala.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Notas

Sea X una variable aleatoria tal que que $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen para la variable aleatoria X.

- El área abajo de curva normal comprendida entre $(-\infty,\ \infty)$ es igual a 1.
- La normal es simétrica respecto a μ. Como consecuencia de esto, el área bajo de la curva en el intervalo $[\mu,\ \infty)$ es igual a 0.5.
- La distribución normal tiene forma de campana.
- La normal queda completamente caracterizada con el conocimiento de sus parámetros de localización y de escala.
- En la práctica la normalidad se alcanza de manera aproximada.

Notas

Sea X una variable aleatoria tal que que $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen para la variable aleatoria X.

- El área abajo de curva normal comprendida entre $(-\infty,\ \infty)$ es igual a 1.
- La normal es simétrica respecto a μ. Como consecuencia de esto, el área bajo de la curva en el intervalo $[\mu,\ \infty)$ es igual a 0.5.
- La distribución normal tiene forma de campana.
- La normal queda completamente caracterizada con el conocimiento de sus parámetros de localización y de escala.
- En la práctica la normalidad se alcanza de manera aproximada.
- $E\left[X\right] = \mu$ y $Var\left[X\right] = \sigma^2$.

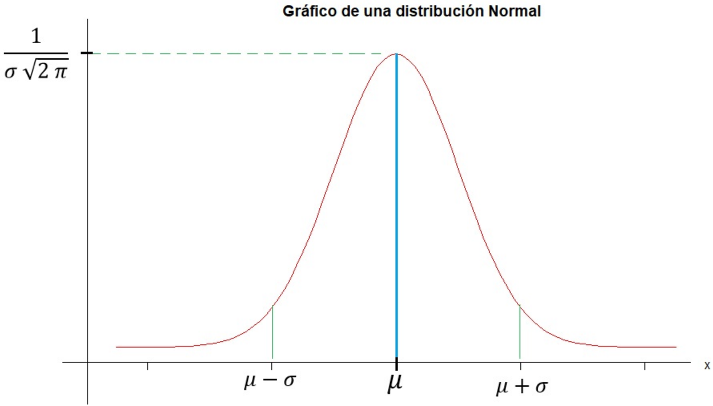
Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Notas

Sea X una variable aleatoria tal que que $X \sim n(\mu,\ \sigma^2)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen para la variable aleatoria X.

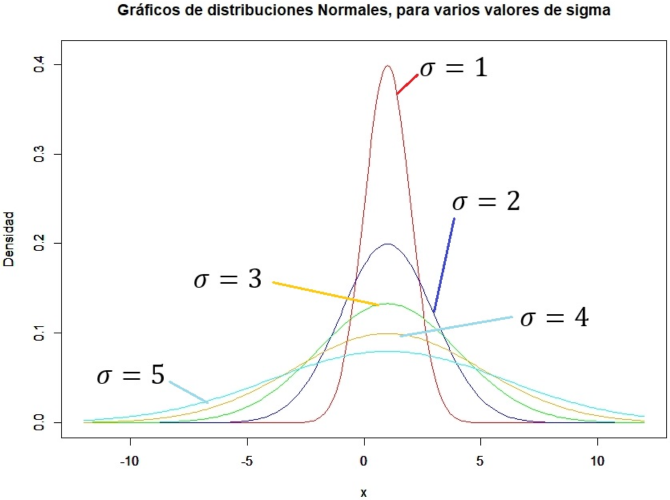
- El área abajo de curva normal comprendida entre $(-\infty,\ \infty)$ es igual a 1.
- La normal es simétrica respecto a μ. Como consecuencia de esto, el área bajo de la curva en el intervalo $[\mu,\ \infty)$ es igual a 0.5.
- La distribución normal tiene forma de campana.
- La normal queda completamente caracterizada con el conocimiento de sus parámetros de localización y de escala.
- En la práctica la normalidad se alcanza de manera aproximada.
- $E[X] = \mu$ y $Var[X] = \sigma^2$.
- Cuanto más grande es el parámetro σ^2 el gráfico de la función es mas 'achatada' y de colas más largas.

$$X \sim n(\mu,\, \sigma^2)$$



Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

A continuación se ilustran algunas normales con el mismo valor de $\mu = 0$ y diferentes valores de σ^2



Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Se mostrará que en efecto: $E[X] = \mu$ y $Var[X] = \sigma^2$.

Distribución Normal

Se mostrará que en efecto: $E[X] = \mu$ y $Var[X] = \sigma^2$.

$$E\,[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\,dx\;.$$

Haga el siguiente cambio de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$; con lo que $dx = \sigma dz$.

Distribución Normal

Se mostrará que en efecto: $E[X] = \mu$ y $Var[X] = \sigma^2$.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \, dx \, .$$

Haga el siguiente cambio de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$; con lo que $dx = \sigma dz$. Así:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Se mostrará que en efecto: $E[X] = \mu$ y $Var[X] = \sigma^2$.

$$E\,[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\,dx\ .$$

Haga el siguiente cambio de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$; con lo que $dx = \sigma dz$. Así:

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma\,z)\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

$$= \mu\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

En esta última expresión el primer miembro de la derecha es μ veces el área bajo una curva normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ y el segundo miembro es una integral que da cero; por lo tanto de obtiene que $E[X] = \mu$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Como $Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right]$, entonces:

Como $Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right]$, entonces:

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \, dx \; .$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Como $Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right]$, entonces:

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \, dx \, .$$

Haga el siguiente cambio de variable $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$; con lo que $dx = \sigma\, dz$. Así,

Como $Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right]$, entonces:

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \, dx \, .$$

Haga el siguiente cambio de variable $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$; con lo que $dx = \sigma\, dz$. Así,

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2 \, e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \, .$$

Como $Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right]$, entonces:

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \, dx \, .$$

Haga el siguiente cambio de variable $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$; con lo que $dx = \sigma \, dz$. Así,

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \, e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \, .$$

Integrando por partes con $u = z$, $dv = z\, e^{-\frac{z^2}{2}}$, $du = dz$ y $v = -e^{-\frac{z^2}{2}}$ se tiene que:

Como $Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right]$, entonces:

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \, dx \, .$$

Haga el siguiente cambio de variable $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$; con lo que $dx = \sigma\, dz$. Así,

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \, e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \, .$$

Integrando por partes con $u = z$, $dv = z\, e^{-\frac{z^2}{2}}$, $du = dz$ y $v = -e^{-\frac{z^2}{2}}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} E\left[(X-\mu)^2\right] &= \sigma^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, z\, e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{z^2}{2}} \, dz \right) \\ &= \sigma^2 \, (0+1) = \sigma^2 \, . \end{aligned}$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Por la forma que tiene esta distribución, es claro que no existe una antiderivada que se pueda obtener de manera explícita.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Por la forma que tiene esta distribución, es claro que no existe una antiderivada que se pueda obtener de manera explícita. Esto significa que a la hora de resolver preguntas probabilísticas asociadas a una variable aleatoria Normal, será necesario calcular de manera aproximada (numérica) dicha integral.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Por la forma que tiene esta distribución, es claro que no existe una antiderivada que se pueda obtener de manera explícita. Esto significa que a la hora de resolver preguntas probabilísticas asociadas a una variable aleatoria Normal, será necesario calcular de manera aproximada (numérica) dicha integral. Suponga que $X \sim n(\mu, \sigma^2)$. Sean x_1 y x_2 valores reales.

Distribución Normal

Por la forma que tiene esta distribución, es claro que no existe una antiderivada que se pueda obtener de manera explícita. Esto significa que a la hora de resolver preguntas probabilísticas asociadas a una variable aleatoria Normal, será necesario calcular de manera aproximada (numérica) dicha integral. Suponga que $X \sim n(\mu,\, \sigma^2)$. Sean x_1 y x_2 valores reales. Entonces:

Distribución Normal

Por la forma que tiene esta distribución, es claro que no existe una antiderivada que se pueda obtener de manera explícita. Esto significa que a la hora de resolver preguntas probabilísticas asociadas a una variable aleatoria Normal, será necesario calcular de manera aproximada (numérica) dicha integral. Suponga que $X \sim n(\mu,\, \sigma^2)$. Sean x_1 y x_2 valores reales. Entonces:

$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\, dx$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Por la forma que tiene esta distribución, es claro que no existe una antiderivada que se pueda obtener de manera explícita. Esto significa que a la hora de resolver preguntas probabilísticas asociadas a una variable aleatoria Normal, será necesario calcular de manera aproximada (numérica) dicha integral. Suponga que $X \sim n(\mu,\, \sigma^2)$. Sean x_1 y x_2 valores reales. Entonces:

$$P\,(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\, dx$$

Haciendo $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, se tiene que $dz = \frac{1}{\sigma}\, dx$.

Distribución Normal

Por la forma que tiene esta distribución, es claro que no existe una antiderivada que se pueda obtener de manera explícita. Esto significa que a la hora de resolver preguntas probabilísticas asociadas a una variable aleatoria Normal, será necesario calcular de manera aproximada (numérica) dicha integral. Suponga que $X \sim n(\mu,\, \sigma^2)$. Sean x_1 y x_2 valores reales. Entonces:

$$P\,(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\, dx$$

Haciendo $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, se tiene que $dz = \frac{1}{\sigma}\, dx$. Así:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Por la forma que tiene esta distribución, es claro que no existe una antiderivada que se pueda obtener de manera explícita. Esto significa que a la hora de resolver preguntas probabilísticas asociadas a una variable aleatoria Normal, será necesario calcular de manera aproximada (numérica) dicha integral. Suponga que $X \sim n(\mu,\, \sigma^2)$. Sean x_1 y x_2 valores reales. Entonces:

$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\, dx$$

Haciendo $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, se tiene que $dz = \frac{1}{\sigma}\, dx$. Así:

$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = \int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = P\left(z_1 < Z < z_2\right)\ .$$

Donde $z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ y $z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Donde $z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ y $z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$. Esto indica que cualquier cálculo de probabilidades para una variable aleatoria $N(\mu,\, \sigma^2)$ puede reducirse al cálculo de probabilidades con una variable aleatoria $N(0, 1)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Donde $z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ y $z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$. Esto indica que cualquier cálculo de probabilidades para una variable aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$ puede reducirse al cálculo de probabilidades con una variable aleatoria $N(0, 1)$. El proceso de transformar una v.a normal en una normal estándar se conoce como *Estandarización* o *Normalización*.

Donde $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$ y $z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$. Esto indica que cualquier cálculo de probabilidades para una variable aleatoria $N(\mu,\, \sigma^2)$ puede reducirse al cálculo de probabilidades con una variable aleatoria $N(0, 1)$. El proceso de transformar una v.a normal en una normal estándar se conoce como *Estandarización* o *Normalización*.

Para el cálculo de probabilidades con una variable $N(0, 1)$, la c.d.f. estará dada por:

$$\phi(z) = P\left(Z \leq z\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\ .$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Donde $z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ y $z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$. Esto indica que cualquier cálculo de probabilidades para una variable aleatoria $N(\mu,\, \sigma^2)$ puede reducirse al cálculo de probabilidades con una variable aleatoria $N(0, 1)$. El proceso de transformar una v.a normal en una normal estándar se conoce como *Estandarización* o *Normalización*.

Para el cálculo de probabilidades con una variable $N(0, 1)$, la c.d.f. estará dada por:

$$\phi(z) = P\left(Z \leq z\right) = \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\ .$$

De esta manera se tiene que:

Donde $z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ y $z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$. Esto indica que cualquier cálculo de probabilidades para una variable aleatoria $N(\mu,\, \sigma^2)$ puede reducirse al cálculo de probabilidades con una variable aleatoria $N(0, 1)$. El proceso de transformar una v.a normal en una normal estándar se conoce como *Estandarización* o *Normalización*.

Para el cálculo de probabilidades con una variable $N(0, 1)$, la c.d.f. estará dada por:

$$\phi(z) = P\left(Z \leq z\right) = \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\ .$$

De esta manera se tiene que:

$$P\left(x_1 \leq X \leq x_2\right) = P\left(z_1 \leq Z \leq z_2\right) = \phi\left(z_2\right) - \phi\left(z_1\right)\ .$$

Donde $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$ y $z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$. Esto indica que cualquier cálculo de probabilidades para una variable aleatoria $N(\mu,\, \sigma^2)$ puede reducirse al cálculo de probabilidades con una variable aleatoria $N(0, 1)$. El proceso de transformar una v.a normal en una normal estándar se conoce como *Estandarización* o *Normalización*.

Para el cálculo de probabilidades con una variable $N(0, 1)$, la c.d.f. estará dada por:

$$\phi(z) = P\left(Z \leq z\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\ .$$

De esta manera se tiene que:

$$P\left(x_1 \leq X \leq x_2\right) = P\left(z_1 \leq Z \leq z_2\right) = \phi\left(z_2\right) - \phi\left(z_1\right)\ .$$

La función $\phi(z)$ se encuentra tabulada en casi todos los textos de estadística. Una tabla típica se muestra a continuación.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

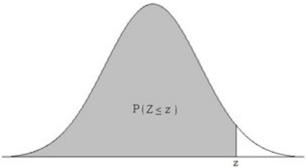


TABLA PARA LA NORMAL, Áreas a la izquierda

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.55567	0.559618	0.56356	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.57926	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.60642	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.62172	0.625516	0.6293	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680823	0.684386	0.687933
0.5	0.691463	0.694974	0.698468	0.701944	0.705402	0.70884	0.71226	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.77035	0.773373	0.776373	0.77935	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.79103	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.80785	0.81057	0.813267
0.9	0.81594	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.85083	0.853141	0.855428	0.85769	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866501	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879	0.881	0.882977
1.2	0.88493	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.89435	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.9032	0.904902	0.906583	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.92073	0.922196	0.923642	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Distribución Normal

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0\,,\,1)$.

Distribución Normal

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0\,,\,1)$. Para z, z_1 y z_2 reales positivos, se tiene:

Distribución Normal

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0\,,\,1)$. Para z, z_1 y z_2 reales positivos, se tiene:

- $P(Z < -z) = P(Z > z)$.

Distribución Normal

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0\,,\,1)$. Para z, z_1 y z_2 reales positivos, se tiene:

- $P(Z < -z) = P(Z > z)$.
- $P(Z \geq -z) = P(Z \leq z)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0, 1)$. Para z, z_1 y z_2 reales positivos, se tiene:

- $P(Z < -z) = P(Z > z)$.
- $P(Z \geq -z) = P(Z \leq z)$.
- $P(-z < Z < 0) = P(0 < Z < z)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0\,,\,1)$. Para z, z_1 y z_2 reales positivos, se tiene:

- $P(Z < -z) = P(Z > z)$.
- $P(Z \geq -z) = P(Z \leq z)$.
- $P(-z < Z < 0) = P(0 < Z < z)$.
- $P(Z < 0) = P(Z > 0) = \frac{1}{2}$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Normal

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0\,,\,1)$. Para z, z_1 y z_2 reales positivos, se tiene:

- $P\left(Z < -z\right) = P\left(Z > z\right)$.
- $P\left(Z \geq -z\right) = P\left(Z \leq z\right)$.
- $P\left(-z < Z < 0\right) = P\left(0 < Z < z\right)$.
- $P\left(Z < 0\right) = P\left(Z > 0\right) = \frac{1}{2}$.
- $P(|Z| < z) = 2\,P(Z < z) - 1$.

Distribución Normal

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0\,,\,1)$. Para z, z_1 y z_2 reales positivos, se tiene:

- $P\left(Z < -z\right) = P\left(Z > z\right)$.
- $P\left(Z \geq -z\right) = P\left(Z \leq z\right)$.
- $P\left(-z < Z < 0\right) = P\left(0 < Z < z\right)$.
- $P\left(Z < 0\right) = P\left(Z > 0\right) = \frac{1}{2}$.
- $P(|Z| < z) = 2\,P(Z < z) - 1$.
- $P\ \left(-z_1 < Z < -z_2\right) = P\ \left(z_2 < Z < z_1\right)$.

Distribución Normal

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0\,,\,1)$. Para z, z_1 y z_2 reales positivos, se tiene:

- $P\,(Z < -z) = P\,(Z > z)$.
- $P\,(Z \geq -z) = P\,(Z \leq z)$.
- $P\,(-z < Z < 0) = P\,(0 < Z < z)$.
- $P\,(Z < 0) = P\,(Z > 0) = \frac{1}{2}$.
- $P(|Z| < z) = 2\,P(Z < z) - 1$.
- $P\;(-z_1 < Z < -z_2) = P\;(z_2 < Z < z_1)$.

Ejemplo 39

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n(0\,,\,1)$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(Z < 1.32)$

Ejemplo 39

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n(0\,,\,1)$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(Z < 1.32)$

b) $P(Z > 1.45)$

Ejemplo 39

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n(0\,,\,1)$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(Z < 1.32)$

b) $P(Z > 1.45)$

c) $P(Z > -2.15)$

Ejemplo 39

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n(0\,,\,1)$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P\,(Z < 1.32)$

b) $P\,(Z > 1.45)$

c) $P\,(Z > -2.15)$

d) $P\,(1.76 < Z < 2.34)$

Ejemplo 39

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n(0, 1)$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(Z < 1.32)$
b) $P(Z > 1.45)$
c) $P(Z > -2.15)$
d) $P(1.76 < Z < 2.34)$
e) $P(-1 < Z < 1)$

Ejemplo 39

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n(0\,,\,1)$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P\,(Z < 1.32)$

b) $P\,(Z > 1.45)$

c) $P\,(Z > -2.15)$

d) $P\,(1.76 < Z < 2.34)$

e) $P\,(-1 < Z < 1)$

Solución

a) Esta probabilidad es directa: $P(Z < 1.32) = \phi(1.32) = 0.9066\,.$

Ejemplo 39

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n(0, 1)$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(Z < 1.32)$

b) $P(Z > 1.45)$

c) $P(Z > -2.15)$

d) $P(1.76 < Z < 2.34)$

e) $P(-1 < Z < 1)$

Solución

a) Esta probabilidad es directa: $P(Z < 1.32) = \phi(1.32) = 0.9066$.

b) $P(Z > 1.45) = 1 - P(Z \leq 1.45) = 1 - \phi(1.45)$
$P(Z > 1.45) = 1 - 0.9265 = 0.0735$.

c) $P(Z > -2.15) = P(Z < 2.15) = \phi(2.15) = 0.9842$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

c) $P(Z > -2.15) = P(Z < 2.15) = \phi(2.15) = 0.9842$.

d) $P(1.76 < Z < 2.34) = \phi(2.34) - \phi(1.76)$
$P(1.76 < Z < 2.34) = 0.9901 - 0.9608 = 0.0293$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

c) $P(Z > -2.15) = P(Z < 2.15) = \phi(2.15) = 0.9842\,.$

d) $P(1.76 < Z < 2.34) = \phi(2.34) - \phi(1.76)$
$P(1.76 < Z < 2.34) = 0.9901 - 0.9608 = 0.0293\,.$

e) $P(-1 < Z < 1) = P(|Z| < 1) = 2P(Z < 1) - 1$
$P(-1 < Z < 1) = 2\,\phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826\,.$

Ejemplo 40

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n\,(0\,,\,1)$. Determine el valor de a para el cuál se cumple:

a) $P\,(Z < a) = 0.9\,.$

c) $P(Z > -2.15) = P(Z < 2.15) = \phi(2.15) = 0.9842$.

d) $P(1.76 < Z < 2.34) = \phi(2.34) - \phi(1.76)$
$P(1.76 < Z < 2.34) = 0.9901 - 0.9608 = 0.0293$.

e) $P(-1 < Z < 1) = P(|Z| < 1) = 2P(Z < 1) - 1$
$P(-1 < Z < 1) = 2\,\phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$.

Ejemplo 40

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n\,(0\,,\,1)$. Determine el valor de a para el cuál se cumple:

a) $P\,(Z < a) = 0.9$.

b) $P\,(Z > a) = 0.05$.

c) $P(Z > -2.15) = P(Z < 2.15) = \phi(2.15) = 0.9842\,.$

d) $P(1.76 < Z < 2.34) = \phi(2.34) - \phi(1.76)$
$P(1.76 < Z < 2.34) = 0.9901 - 0.9608 = 0.0293\,.$

e) $P(-1 < Z < 1) = P(|Z| < 1) = 2P(Z < 1) - 1$
$P(-1 < Z < 1) = 2\,\phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826\,.$

Ejemplo 40

Suponga que Z es una variable aleatoria tal que $Z \sim n\,(0\,,\,1)$. Determine el valor de a para el cuál se cumple:

a) $P\,(Z < a) = 0.9\,.$

b) $P\,(Z > a) = 0.05\,.$

c) $P\,(-1.24 < Z < a) = 0.8\,.$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Solución

a) En este caso el proceso se hace a la inversa. En vez de buscar la probabilidad acumulada para un valor específico de z, se busca la probabilidad acumulada en la tabla y se identifica la respectiva z.

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.55567	0.559618	0.56356	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.57926	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.60642	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.62172	0.625516	0.6293	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
1.1	0.864334	0.866501	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879	0.881	0.882977
1.2	0.88493	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.89435	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.9032	0.904902	0.906583	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.92073	0.922196	0.923642	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888

Así, el valor de a tal que $P(Z < a) = 0.9$ es $a = 1.28$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Solución

a) En este caso el proceso se hace a la inversa. En vez de buscar la probabilidad acumulada para un valor específico de z, se busca la probabilidad acumulada en la tabla y se identifica la respectiva z.

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.55567	0.559618	0.56356	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.57926	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.60642	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.62172	0.625516	0.6293	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
1.1	0.864334	0.866501	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879	0.881	0.882977
1.2	0.88493	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.89435	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.9032	0.904902	0.906583	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.92073	0.922196	0.923642	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888

Así, el valor de a tal que $P(Z < a) = 0.9$ es $a = 1.28$.

b) $P(Z > a) = 0.05 \Leftrightarrow P(Z \leq a) = 0.95$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Solución

a) En este caso el proceso se hace a la inversa. En vez de buscar la probabilidad acumulada para un valor específico de z, se busca la probabilidad acumulada en la tabla y se identifica la respectiva z.

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.55567	0.559618	0.56356	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.57926	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.60642	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.62172	0.625516	0.6293	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
1.1	0.864334	0.866501	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879	0.881	0.882977
1.2	0.88493	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.89435	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.9032	0.904902	0.906583	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.92073	0.922196	0.923642	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888

Así, el valor de a tal que $P(Z < a) = 0.9$ es $a = 1.28$.

b) $P(Z > a) = 0.05 \Leftrightarrow P(Z \leq a) = 0.95$. De la tabla se obtiene $a = 1.64$.

Solución

a) En este caso el proceso se hace a la inversa. En vez de buscar la probabilidad acumulada para un valor específico de z, se busca la probabilidad acumulada en la tabla y se identifica la respectiva z.

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.55567	0.559618	0.56356	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.57926	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.60642	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.62172	0.625516	0.6293	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
1.1	0.864334	0.866501	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879	0.881	0.882977
1.2	0.88493	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.89435	0.896165	0.897958	$\boxed{0.899727}$	0.901475
1.3	0.9032	0.904902	0.906583	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.92073	0.922196	0.923642	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888

Así, el valor de a tal que $P\left(Z<a\right)=0.9$ es $a=1.28$.

b) $P\left(Z>a\right)=0.05\Leftrightarrow P\left(Z\leq a\right)=0.95$. De la tabla se obtiene $a=1.64$.

c) $P\left(-1.24<Z<a\right)=0.8\Leftrightarrow P(Z<a)-P(Z<-1.24)=0.8$.
$\Leftrightarrow P(Z<a)=0.8+P(Z>1.24)\Leftrightarrow P(Z<a)=0.8+1-P(Z<1.24)$
$\Leftrightarrow P(Z<a)=1.8-0.8925=0.9175$. De lo que se deduce que $a=1.39$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 41

La nota promedio obtenida por un estudiante de cierto curso tienen una distribución aproximadamente normal con una nota promedio de 3.3 y una desviación estándar de 0.4.

Ejemplo 41

La nota promedio obtenida por un estudiante de cierto curso tienen una distribución aproximadamente normal con una nota promedio de 3.3 y una desviación estándar de 0.4. Si se desea que solo el $5\,\%$ de todos los estudiantes de dicho curso reprueben, ¿Cuál debe ser la nota mínima para que esto sea posible?

Solución

Sea X: Nota obtenida por un estudiante.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 41

La nota promedio obtenida por un estudiante de cierto curso tienen una distribución aproximadamente normal con una nota promedio de 3.3 y una desviación estándar de 0.4. Si se desea que solo el $5\,\%$ de todos los estudiantes de dicho curso reprueben, ¿Cuál debe ser la nota mínima para que esto sea posible?

Solución

Sea X: Nota obtenida por un estudiante. Del enunciado se tiene que $X \sim N\,(3.3\,,\,0.16)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 41

La nota promedio obtenida por un estudiante de cierto curso tienen una distribución aproximadamente normal con una nota promedio de 3.3 y una desviación estándar de 0.4. Si se desea que solo el $5\,\%$ de todos los estudiantes de dicho curso reprueben, ¿Cuál debe ser la nota mínima para que esto sea posible?

Solución

Sea X: Nota obtenida por un estudiante. Del enunciado se tiene que $X \sim N\,(3.3\,,\,0.16)$. Antes de resolver la pregunta, observe que:

Ejemplo 41

La nota promedio obtenida por un estudiante de cierto curso tienen una distribución aproximadamente normal con una nota promedio de 3.3 y una desviación estándar de 0.4. Si se desea que solo el $5\,\%$ de todos los estudiantes de dicho curso reprueben, ¿Cuál debe ser la nota mínima para que esto sea posible?

Solución

Sea X: Nota obtenida por un estudiante. Del enunciado se tiene que $X \sim N\,(3.3\,,\,0.16)$. Antes de resolver la pregunta, observe que:

$$
\begin{aligned}
P(X < 3) &= P\left(\frac{X - 3.3}{0.4} < \frac{3 - 3.3}{0.4}\right) = P(Z < -0.75) \\
&= 1 - P(Z \leq 0.75) = 0.2266\,.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 41

La nota promedio obtenida por un estudiante de cierto curso tienen una distribución aproximadamente normal con una nota promedio de 3.3 y una desviación estándar de 0.4. Si se desea que solo el $5\,\%$ de todos los estudiantes de dicho curso reprueben, ¿Cuál debe ser la nota mínima para que esto sea posible?

Solución

Sea X: Nota obtenida por un estudiante. Del enunciado se tiene que $X \sim N\,(3.3\,,\,0.16)$. Antes de resolver la pregunta, observe que:

$$\begin{aligned} P(X<3) &= P\left(\frac{X-3.3}{0.4} < \frac{3-3.3}{0.4}\right) = P(Z<-0.75) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.75) = 0.2266\,. \end{aligned}$$

Es decir, se espera que el $22.66\,\%$ de los estudiantes pierdan el curso.

Ejemplo 41

La nota promedio obtenida por un estudiante de cierto curso tienen una distribución aproximadamente normal con una nota promedio de 3.3 y una desviación estándar de 0.4. Si se desea que solo el $5\,\%$ de todos los estudiantes de dicho curso reprueben, ¿Cuál debe ser la nota mínima para que esto sea posible?

Solución

Sea X: Nota obtenida por un estudiante. Del enunciado se tiene que $X \sim N\,(3.3\,,\,0.16)$. Antes de resolver la pregunta, observe que:

$$P(X < 3) = P\left(\frac{X - 3.3}{0.4} < \frac{3 - 3.3}{0.4}\right) = P(Z < -0.75)$$
$$= 1 - P(Z \leq 0.75) = 0.2266\,.$$

Es decir, se espera que el $22.66\,\%$ de los estudiantes pierdan el curso. Sea K la nota mínima aprobatoria que satisface $P\,(X < K) = 0.05\,$; (es decir, el $5\,\%$ de los estudiantes tienen notas inferiores a K y reprobarán el curso).

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 3.3}{0.4} < \frac{K - 3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\left(Z < z\right) = 0.05\ , \quad \text{con} \quad z = \frac{K - 3.3}{0.4}$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 3.3}{0.4} < \frac{K - 3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\left(Z < z\right) = 0.05 \ , \quad \text{con} \quad z = \frac{K - 3.3}{0.4}$$

La ecuación anterior equivale a encontar el valor de z que deja un área a la izquierda de 0.05.

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 3.3}{0.4} < \frac{K - 3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\left(Z < z\right) = 0.05\ , \quad \text{con} \quad z = \frac{K - 3.3}{0.4}$$

La ecuación anterior equivale a encontar el valor de z que deja un área a la izquierda de 0.05. Este valor será negativo (por la forma de la distribución).

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 3.3}{0.4} < \frac{K - 3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\,(Z < z) = 0.05\;, \quad \text{con} \quad z = \frac{K - 3.3}{0.4}$$

La ecuación anterior equivale a encontar el valor de z que deja un área a la izquierda de 0.05. Este valor será negativo (por la forma de la distribución). Por la simetría de esta distribución se tiene que:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 3.3}{0.4} < \frac{K - 3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\left(Z < z\right) = 0.05\ , \quad \text{con} \quad z = \frac{K - 3.3}{0.4}$$

La ecuación anterior equivale a encontar el valor de z que deja un área a la izquierda de 0.05. Este valor será negativo (por la forma de la distribución). Por la simetría de esta distribución se tiene que:

$$0.05 = P\left(Z < z\right) = P\left(Z > -z\right) = 1 - \ P\left(Z \leq -z\right)\ .$$

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-3.3}{0.4} < \frac{K-3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\left(Z < z\right) = 0.05\ , \quad \text{con} \quad z = \frac{K-3.3}{0.4}$$

La ecuación anterior equivale a encontar el valor de z que deja un área a la izquierda de 0.05. Este valor será negativo (por la forma de la distribución). Por la simetría de esta distribución se tiene que:

$$0.05 = P\left(Z < z\right) = P\left(Z > -z\right) = 1 - \ P\left(Z \leq -z\right)\ .$$

es decir,

$$P\left(Z \leq -z\right) = 0.95\ .$$

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 3.3}{0.4} < \frac{K - 3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\left(Z < z\right) = 0.05 \; , \quad \text{con} \quad z = \frac{K - 3.3}{0.4}$$

La ecuación anterior equivale a encontar el valor de z que deja un área a la izquierda de 0.05. Este valor será negativo (por la forma de la distribución). Por la simetría de esta distribución se tiene que:

$$0.05 = P\left(Z < z\right) = P\left(Z > -z\right) = 1 - \; P\left(Z \leq -z\right) \; .$$

es decir,

$$P\left(Z \leq -z\right) = 0.95 \; .$$

Usando la tabla de la normal se encuentra que:

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-3.3}{0.4} < \frac{K-3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\,(Z < z) = 0.05\;, \quad \text{con} \quad z = \frac{K-3.3}{0.4}$$

La ecuación anterior equivale a encontar el valor de z que deja un área a la izquierda de 0.05. Este valor será negativo (por la forma de la distribución). Por la simetría de esta distribución se tiene que:

$$0.05 = P\,(Z < z) = P\,(Z > -z) = 1 - \; P\,(Z \leq -z)\; .$$

es decir,

$$P\,(Z \leq -z) = 0.95\; .$$

Usando la tabla de la normal se encuentra que:

$$-z = 1.645 \Leftrightarrow z = -1.645 \Leftrightarrow -1.645 = \tfrac{K-3.3}{0.4} \;\; \Rightarrow K = 2.64\,.$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-3.3}{0.4} < \frac{K-3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\left(Z < z\right) = 0.05\ , \quad \text{con} \quad z = \frac{K-3.3}{0.4}$$

La ecuación anterior equivale a encontar el valor de z que deja un área a la izquierda de 0.05. Este valor será negativo (por la forma de la distribución). Por la simetría de esta distribución se tiene que:

$$0.05 = P\left(Z < z\right) = P\left(Z > -z\right) = 1 - \ P\left(Z \leq -z\right)\ .$$

es decir,

$$P\left(Z \leq -z\right) = 0.95\ .$$

Usando la tabla de la normal se encuentra que:

$$-z = 1.645 \Leftrightarrow z = -1.645 \Leftrightarrow -1.645 = \tfrac{K-3.3}{0.4} \ \Rightarrow K = 2.64\,.$$

Así, la nota mínima aprobatoria será 2.6, para que solo el 5 % pierda la materia.

$$P(X < K) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 3.3}{0.4} < \frac{K - 3.3}{0.4}\right) = 0.05$$

$$\leftrightarrow P\left(Z < z\right) = 0.05\ , \quad \text{con} \quad z = \frac{K - 3.3}{0.4}$$

La ecuación anterior equivale a encontar el valor de z que deja un área a la izquierda de 0.05. Este valor será negativo (por la forma de la distribución). Por la simetría de esta distribución se tiene que:

$$0.05 = P\left(Z < z\right) = P\left(Z > -z\right) = 1 - \ P\left(Z \leq -z\right)\ .$$

es decir,

$$P\left(Z \leq -z\right) = 0.95\ .$$

Usando la tabla de la normal se encuentra que:

$$-z = 1.645 \Leftrightarrow z = -1.645 \Leftrightarrow -1.645 = \tfrac{K-3.3}{0.4} \ \Rightarrow K = 2.64\,.$$

Así, la nota mínima aprobatoria será 2.6, para que solo el $5\,\%$ pierda la materia. En otras palabras, se ajusta la nota de todos sumando 0.4 para que solo pierda el $5\,\%$.

Ejemplo 42

El diámetro de un cable eléctrico está distribuido normalmente con un diámetro medio de 0.8 plg y una desviación estándar de 0.02.

Ejemplo 42

El diámetro de un cable eléctrico está distribuido normalmente con un diámetro medio de 0.8 plg y una desviación estándar de 0.02.

a) ¿Qué proporción de cables tiene un diámetro superior a 0.81 plg?

Ejemplo 42

El diámetro de un cable eléctrico está distribuido normalmente con un diámetro medio de 0.8 plg y una desviación esténdar de 0.02.

a) ¿Qué proporción de cables tiene un diámetro superior a 0.81 plg?

b) Un cable es defectuoso si su diámetro difiere del promedio en más de 0.025 plg.

Ejemplo 42

El diámetro de un cable eléctrico está distribuido normalmente con un diámetro medio de 0.8 plg y una desviación esténdar de 0.02.

a) ¿Qué proporción de cables tiene un diámetro superior a 0.81 plg?

b) Un cable es defectuoso si su diámetro difiere del promedio en más de 0.025 plg. ¿Qué proporción de cables son defectuosos?

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el diámetro del cable.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 42

El diámetro de un cable eléctrico está distribuido normalmente con un diámetro medio de 0.8 plg y una desviación esténdar de 0.02.

a) ¿Qué proporción de cables tiene un diámetro superior a 0.81 plg?

b) Un cable es defectuoso si su diámetro difiere del promedio en más de 0.025 plg. ¿Qué proporción de cables son defectuosos?

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el diámetro del cable. Se tiene que $X \sim n\,(0.8\,,\,0.0004)$.

Ejemplo 42

El diámetro de un cable eléctrico está distribuido normalmente con un diámetro medio de 0.8 plg y una desviación esténdar de 0.02.

a) ¿Qué proporción de cables tiene un diámetro superior a 0.81 plg?

b) Un cable es defectuoso si su diámetro difiere del promedio en más de 0.025 plg. ¿Qué proporción de cables son defectuosos?

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el diámetro del cable. Se tiene que $X \sim n\,(0.8\,,\,0.0004)$.

a)

$$P\,(X > 0.81) = 1 - P\,(X \leq 0.81) = 1 - P\left(\frac{X\ -\ \mu}{\sigma} \leq \frac{0.81\ -0.8}{0.02}\right)$$
$$= 1\ -\ P\,(Z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085\,.$$

b)

$$
\begin{aligned}
P\left(|X-0.8|>0.025\right) &= 1-P\left(|X-0.8|\leq 0.025\right)=1-P\left(-0.025\leq X-0.8\leq 0.025\right)\\
&= 1-P\left(\frac{-0.025}{0.02}\leq \frac{X-0.8}{0.02}\leq \frac{0.025}{0.02}\right)\\
&= 1-P\left(-1.25\leq Z\leq 1.25\right)\\
&= 1-\Phi\left(1.25\right)+\Phi\left(-1.25\right)=1-0.8944+0.1056=0.2112\,.
\end{aligned}
$$

Percentiles en una normal estándar

Sea $0<\alpha<1$ y suponga que $Z\sim n(0,\,1)$.

b)

$$
\begin{aligned}
P\left(|X-0.8|>0.025\right) &= 1-P\left(|X-0.8|\leq 0.025\right) = 1-P\left(-0.025\leq X-0.8\leq 0.025\right) \\
&= 1-P\left(\frac{-0.025}{0.02}\leq \frac{X-0.8}{0.02}\leq \frac{0.025}{0.02}\right) \\
&= 1-P\left(-1.25\leq Z\leq 1.25\right) \\
&= 1-\Phi\left(1.25\right)+\Phi\left(-1.25\right) = 1-0.8944+0.1056 = 0.2112\,.
\end{aligned}
$$

Percentiles en una normal estándar

Sea $0<\alpha<1$ y suponga que $Z\sim n(0,\,1)$.

El valor de Z que deja un área α a la derecha se denota z_{α}.

b)

$$\begin{aligned} P(|X-0.8|>0.025) &= 1-P(|X-0.8|\leq 0.025) = 1-P(-0.025\leq X-0.8\leq 0.025) \\ &= 1-P\left(\frac{-0.025}{0.02}\leq\frac{X-0.8}{0.02}\leq\frac{0.025}{0.02}\right) \\ &= 1-P(-1.25\leq Z\leq 1.25) \\ &= 1-\Phi(1.25)+\Phi(-1.25) = 1-0.8944+0.1056 = 0.2112\,. \end{aligned}$$

Percentiles en una normal estándar

Sea $0<\alpha<1$ y suponga que $Z\sim n(0,\,1)$.

El valor de Z que deja un área α a la derecha se denota z_α. Es decir,

b)

$$\begin{aligned} P\left(|X-0.8|>0.025\right) &= 1-P\left(|X-0.8|\leq 0.025\right)=1-P\left(-0.025\leq X-0.8\leq 0.025\right) \\ &= 1-P\left(\frac{-0.025}{0.02}\leq \frac{X-0.8}{0.02}\leq \frac{0.025}{0.02}\right) \\ &= 1-P\left(-1.25\leq Z\leq 1.25\right) \\ &= 1-\Phi\left(1.25\right)+\Phi\left(-1.25\right)=1-0.8944+0.1056=0.2112\,. \end{aligned}$$

Percentiles en una normal estándar

Sea $0<\alpha<1$ y suponga que $Z\sim n(0,\,1)$.

El valor de Z que deja un área α a la derecha se denota z_α. Es decir,

$$P\left(Z>Z_\alpha\right)=\alpha\,.$$

b)

$$
\begin{aligned}
P\left(|X-0.8|>0.025\right) &= 1-P\left(|X-0.8|\leq 0.025\right)=1-P\left(-0.025\leq X-0.8\leq 0.025\right)\\
&= 1-P\left(\frac{-0.025}{0.02}\leq \frac{X-0.8}{0.02}\leq \frac{0.025}{0.02}\right)\\
&= 1-P\left(-1.25\leq Z\leq 1.25\right)\\
&= 1-\Phi\left(1.25\right)+\Phi\left(-1.25\right)=1-0.8944+0.1056=0.2112\,.
\end{aligned}
$$

Percentiles en una normal estándar

Sea $0<\alpha<1$ y suponga que $Z\sim n(0,\,1)$.

El valor de Z que deja un área α a la derecha se denota z_{α}. Es decir,

$$P\left(Z>Z_{\alpha}\right)=\alpha\ .$$

z_{α} es llamado percentil $100(1-\alpha)\,\%$ de la distribución de Z.

b)

$$\begin{aligned}
P\left(|X-0.8|>0.025\right) &= 1-P\left(|X-0.8|\leq 0.025\right)=1-P\left(-0.025\leq X-0.8\leq 0.025\right)\\
&= 1-P\left(\frac{-0.025}{0.02}\leq\frac{X-0.8}{0.02}\leq\frac{0.025}{0.02}\right)\\
&= 1-P\left(-1.25\leq Z\leq 1.25\right)\\
&= 1-\Phi\left(1.25\right)+\Phi\left(-1.25\right)=1-0.8944+0.1056=0.2112\,.
\end{aligned}$$

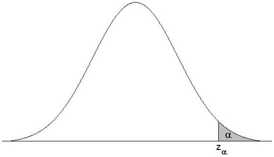
Percentiles en una normal estándar

Sea $0<\alpha<1$ y suponga que $Z\sim n(0,\,1)$.

El valor de Z que deja un área α a la derecha se denota z_α. Es decir,

$$P\left(Z>Z_\alpha\right)=\alpha\,.$$

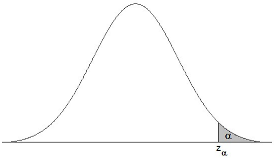
z_α es llamado percentil $100(1-\alpha)\,\%$ de la distribución de Z.



Aproximación Normal de la Binomial

Suponga que X es un v.a Binomial $X \sim bin(n, p)$. Si n es grande, entonces las probabilidades para esta v.a pueden ser aproximadas usando la distribución normal.

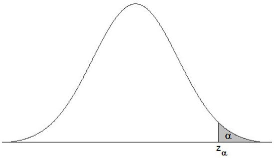
Algunas distribuciones de probabilidad Continuas



Aproximación Normal de la Binomial

Suponga que X es un v.a Binomial $X \sim bin(n, p)$. Si n es grande, entonces las probabilidades para esta v.a pueden ser aproximadas usando la distribución normal. Esta aproximación implica el uso de un factor de corrección, ya que el rango de una variable Binomial es un subconjunto de los enteros no-negativos.

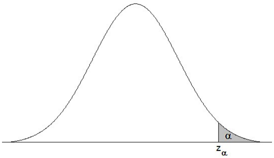
Algunas distribuciones de probabilidad Continuas



Aproximación Normal de la Binomial

Suponga que X es un v.a Binomial $X \sim bin(n, p)$. Si n es grande, entonces las probabilidades para esta v.a pueden ser aproximadas usando la distribución normal. Esta aproximación implica el uso de un factor de corrección, ya que el rango de una variable Binomial es un subconjunto de los enteros no-negativos. Debido a eso, las probabilidades de valores no enteros con una distribución Binomial, son calculados al redondear al entero más cercano, según el caso.

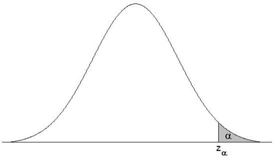
Algunas distribuciones de probabilidad Continuas



Aproximación Normal de la Binomial

Suponga que X es un v.a Binomial $X \sim bin(n, p)$. Si n es grande, entonces las probabilidades para esta v.a pueden ser aproximadas usando la distribución normal. Esta aproximación implica el uso de un factor de corrección, ya que el rango de una variable Binomial es un subconjunto de los enteros no-negativos. Debido a eso, las probabilidades de valores no enteros con una distribución Binomial, son calculados al redondear al entero más cercano, según el caso. Por ejemplo, suponga que $X \sim bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

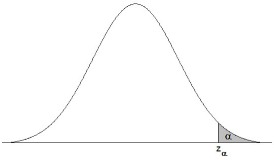
Algunas distribuciones de probabilidad Continuas



Aproximación Normal de la Binomial

Suponga que X es un v.a Binomial $X \sim bin(n, p)$. Si n es grande, entonces las probabilidades para esta v.a pueden ser aproximadas usando la distribución normal. Esta aproximación implica el uso de un factor de corrección, ya que el rango de una variable Binomial es un subconjunto de los enteros no-negativos. Debido a eso, las probabilidades de valores no enteros con una distribución Binomial, son calculados al redondear al entero más cercano, según el caso. Por ejemplo, suponga que $X \sim bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$. Observe que:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

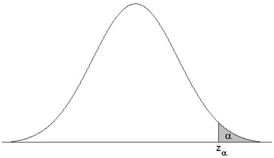


Aproximación Normal de la Binomial

Suponga que X es un v.a Binomial $X \sim bin(n, p)$. Si n es grande, entonces las probabilidades para esta v.a pueden ser aproximadas usando la distribución normal. Esta aproximación implica el uso de un factor de corrección, ya que el rango de una variable Binomial es un subconjunto de los enteros no-negativos. Debido a eso, las probabilidades de valores no enteros con una distribución Binomial, son calculados al redondear al entero más cercano, según el caso. Por ejemplo, suponga que $X \sim bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$. Observe que:

$$P(X \leq 2.2) = P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) \quad ; \quad P(X > 2.2) = P(X \geq 3)\,.$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas



Aproximación Normal de la Binomial

Suponga que X es un v.a Binomial $X \sim bin(n, p)$. Si n es grande, entonces las probabilidades para esta v.a pueden ser aproximadas usando la distribución normal. Esta aproximación implica el uso de un factor de corrección, ya que el rango de una variable Binomial es un subconjunto de los enteros no-negativos. Debido a eso, las probabilidades de valores no enteros con una distribución Binomial, son calculados al redondear al entero más cercano, según el caso. Por ejemplo, suponga que $X \sim bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$. Observe que:

$$P(X \leq 2.2) = P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) \quad ; \quad P(X > 2.2) = P(X \geq 3) \, .$$

$$P(X \leq 2) = P(X < 2.5) \quad ; \quad P(X \geq 3) = P(X > 3.5) \, .$$

Aproximación Normal de la Binomial

El factor de correción más usado es $\frac{1}{2}$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Aproximación Normal de la Binomial

El factor de correción más usado es $\frac{1}{2}$. Ahora suponga que $X \sim bin(n, p)$. Si $n_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, entonces se verifica que:

Aproximación Normal de la Binomial

El factor de correción más usado es $\frac{1}{2}$. Ahora suponga que $X \sim bin(n, p)$. Si $n_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, entonces se verifica que:

$$P(X = n_1) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_1 + \frac{1}{2}\right) .$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Aproximación Normal de la Binomial

El factor de correción más usado es $\frac{1}{2}$. Ahora suponga que $X \sim bin(n, p)$. Si $n_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, entonces se verifica que:

$$P(X = n_1) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_1 + \frac{1}{2}\right) .$$

Si $n_1, n_2 \in A_X$, con $n_1 < n_2$, se verifica que:

Aproximación Normal de la Binomial

El factor de correción más usado es $\frac{1}{2}$. Ahora suponga que $X \sim bin(n,p)$. Si $n_1 \in \{0,1,2,\cdots,n\}$, entonces se verifica que:

$$P(X = n_1) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_1 + \frac{1}{2}\right) .$$

Si $n_1, n_2 \in A_X$, con $n_1 < n_2$, se verifica que:

$$P\left(n_1 \leq X \leq n_2\right) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_2 + \frac{1}{2}\right) .$$

Aproximación Normal de la Binomial

El factor de correción más usado es $\frac{1}{2}$. Ahora suponga que $X \sim bin(n, p)$. Si $n_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, entonces se verifica que:

$$P(X = n_1) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_1 + \frac{1}{2}\right) .$$

Si $n_1, n_2 \in A_X$, con $n_1 < n_2$, se verifica que:

$$P\left(n_1 \leq X \leq n_2\right) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_2 + \frac{1}{2}\right) .$$

Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim bin(n, p)$. Entonces si n es grande, se tiene que:

Aproximación Normal de la Binomial

El factor de correción más usado es $\frac{1}{2}$. Ahora suponga que $X \sim bin(n, p)$. Si $n_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, entonces se verifica que:

$$P(X = n_1) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_1 + \frac{1}{2}\right) .$$

Si $n_1, n_2 \in A_X$, con $n_1 < n_2$, se verifica que:

$$P\left(n_1 \leq X \leq n_2\right) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_2 + \frac{1}{2}\right) .$$

Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim bin(n,\, p)$. Entonces si n es grande, se tiene que:

$$P\left(X \leq x\right) = P\left(X < x + \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x + \frac{1}{2} - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) ;$$

Aproximación Normal de la Binomial

El factor de correción más usado es $\frac{1}{2}$. Ahora suponga que $X \sim bin(n,p)$. Si $n_1 \in \{0,1,2,\cdots,n\}$, entonces se verifica que:

$$P(X = n_1) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_1 + \frac{1}{2}\right) .$$

Si $n_1, n_2 \in A_X$, con $n_1 < n_2$, se verifica que:

$$P\left(n_1 \leq X \leq n_2\right) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_2 + \frac{1}{2}\right) .$$

Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim bin(n,\, p)$. Entonces si n es grande, se tiene que:

$$P\left(X \leq x\right) = P\left(X < x + \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x + \frac{1}{2} - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) ;$$

donde $Z \sim n(0,\, 1)$.

Aproximación Normal de la Binomial

El factor de correción más usado es $\frac{1}{2}$. Ahora suponga que $X \sim bin(n,p)$. Si $n_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, entonces se verifica que:

$$P(X = n_1) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_1 + \frac{1}{2}\right) .$$

Si $n_1, n_2 \in A_X$, con $n_1 < n_2$, se verifica que:

$$P\left(n_1 \leq X \leq n_2\right) = P\left(n_1 - \frac{1}{2} < X < n_2 + \frac{1}{2}\right) .$$

Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim bin(n,\, p)$. Entonces si n es grande, se tiene que:

$$P\left(X \leq x\right) = P\left(X < x + \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x + \frac{1}{2} - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) ;$$

donde $Z \sim n(0,\, 1)$. En la práctica estas aproximaciones son buenas cuando: $n\,p \geq 10$ y $n\,(1-p) \geq 10$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

De igual manera se tiene que:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

De igual manera se tiene que:

$$P\left(X < x\right) = P\left(X < x - \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x - \frac{1}{2} - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) .$$

Ejemplo 43

Un proceso de fabricación produce un $2\,\%$ de chips defectuosos.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

De igual manera se tiene que:

$$P\,(X < x) = P\left(X < x - \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x - \frac{1}{2} - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) \,.$$

Ejemplo 43

Un proceso de fabricación produce un $2\,\%$ de chips defectuosos. Suponga que la determinación de ésta característica es independiente para cada chip y 1000 de ellos son seleccionados.

De igual manera se tiene que:

$$P(X < x) = P\left(X < x - \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x - \frac{1}{2} - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right).$$

Ejemplo 43

Un proceso de fabricación produce un $2\,\%$ de chips defectuosos. Suponga que la determinación de ésta característica es independiente para cada chip y 1000 de ellos son seleccionados. Calcule la probabilidad de que este lote contenga más de 25 chips defectuosos, usando la aproximación normal.

Solución

Sea X: la variable aleatoria que cuenta el número de chips defectuosos en los 1000 seleccionados.

De igual manera se tiene que:

$$P\,(X < x) = P\left(X < x - \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x - \frac{1}{2} - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) \,.$$

Ejemplo 43

Un proceso de fabricación produce un $2\,\%$ de chips defectuosos. Suponga que la determinación de ésta característica es independiente para cada chip y 1000 de ellos son seleccionados. Calcule la probabilidad de que este lote contenga más de 25 chips defectuosos, usando la aproximación normal.

Solución

Sea X: la variable aleatoria que cuenta el número de chips defectuosos en los 1000 seleccionados. Entonces $X \sim bin(1000,\, 0.02)\,.$

De igual manera se tiene que:

$$P\,(X < x) = P\left(X < x - \frac{1}{2}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{x - \frac{1}{2} - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right)\,.$$

Ejemplo 43

Un proceso de fabricación produce un $2\,\%$ de chips defectuosos. Suponga que la determinación de ésta característica es independiente para cada chip y 1000 de ellos son seleccionados. Calcule la probabilidad de que este lote contenga más de 25 chips defectuosos, usando la aproximación normal.

Solución

Sea X: la variable aleatoria que cuenta el número de chips defectuosos en los 1000 seleccionados. Entonces $X \sim bin(1000,\,0.02)$. Observe que $n\,p = 1000(0.02) = 20 > 10$ y $n\,(1-p) = 1000(0.98) = 980 > 10$.

Observe que $E[X] = n\,p = 20$ y $Var[X] = n\,p\,(1-p) = 19.6$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Observe que $E[X] = n\,p = 20$ y $Var[X] = n\,p\,(1-p) = 19.6$. Así:

Observe que $E[X] = n\,p = 20$ y $Var[X] = n\,p\,(1-p) = 19.6$. Así:

$$P\,(X > 25) = 1 - P\,(X \leq 25) = 1 - P\,(X < 25.5)$$

Observe que $E[X] = n\,p = 20$ y $Var[X] = n\,p\,(1-p) = 19.6$. Así:

$$P\,(X > 25) = 1 - P\,(X \leq 25) = 1 - P\,(X < 25.5)$$

$$\approx 1 - P\left(Z \leq \frac{25.5 - 20}{\sqrt{19.6}}\right) = 1 - P\,(Z \leq 1.24)$$

Observe que $E[X] = n\,p = 20$ y $Var[X] = n\,p\,(1-p) = 19.6$. Así:

$$P\,(X > 25) = 1 - P\,(X \leq 25) = 1 - P\,(X < 25.5)$$

$$\approx 1 - P\left(Z \leq \frac{25.5 - 20}{\sqrt{19.6}}\right) = 1 - P\,(Z \leq 1.24)$$

$$P\,(X > 25) \approx 1 - 0.8925123 = 0.1074877\,.$$

Observe que $E[X] = n\,p = 20$ y $Var[X] = n\,p\,(1-p) = 19.6$. Así:

$$P\,(X > 25) = 1 - P\,(X \leq 25) = 1 - P\,(X < 25.5)$$

$$\approx 1 - P\left(Z \leq \frac{25.5 - 20}{\sqrt{19.6}}\right) = 1 - P\,(Z \leq 1.24)$$

$$P\,(X > 25) \approx 1 - 0.8925123 = 0.1074877\;.$$

La probabilidad exacta se obtiene al calcular:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Observe que $E[X] = n\,p = 20$ y $Var[X] = n\,p\,(1-p) = 19.6$. Así:

$$P\,(X > 25) = 1 - P\,(X \leq 25) = 1 - P\,(X < 25.5)$$

$$\approx 1 - P\left(Z \leq \frac{25.5 - 20}{\sqrt{19.6}}\right) = 1 - P\,(Z \leq 1.24)$$

$$P\,(X > 25) \approx 1 - 0.8925123 = 0.1074877\,.$$

La probabilidad exacta se obtiene al calcular:

$$P(X > 25) = 1 - \sum_{x=0}^{25} \binom{1000}{x} 0.02^{x}\, 0.98^{1000-x} = 0.1099331\,.$$

Observe que $E[X] = n\,p = 20$ y $Var[X] = n\,p\,(1-p) = 19.6$. Así:

$$P\,(X > 25) = 1 - P\,(X \leq 25) = 1 - P\,(X < 25.5)$$

$$\approx 1 - P\left(Z \leq \frac{25.5 - 20}{\sqrt{19.6}}\right) = 1 - P\,(Z \leq 1.24)$$

$$P\,(X > 25) \approx 1 - 0.8925123 = 0.1074877\,.$$

La probabilidad exacta se obtiene al calcular:

$$P(X > 25) = 1 - \sum_{x=0}^{25} \binom{1000}{x} 0.02^{x}\, 0.98^{1000-x} = 0.1099331\,.$$

El error absoluto es 0.00245. La aproximación es muy buena.