Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria se dice **Continua** si el rango de dicha variable es un intervalo o es la unión de varios intervalos reales, acotados o no acotados.

Probabilidad y Distribuciones de Probabilidad

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria se dice **Continua** si el rango de dicha variable es un intervalo o es la unión de varios intervalos reales, acotados o no acotados. Por ejemplo, medición de la corriente de un alambre, longitud de partes desgastadas en una pieza, tiempo de duración de una bombilla, tiempos de espera, estatura, masa, etc.

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria se dice **Continua** si el rango de dicha variable es un intervalo o es la unión de varios intervalos reales, acotados o no acotados. Por ejemplo, medición de la corriente de un alambre, longitud de partes desgastadas en una pieza, tiempo de duración de una bombilla, tiempos de espera, estatura, masa, etc.

Definición

Sea X una variable aleatoria continua.

Probabilidad y Distribuciones de Probabilidad

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria se dice **Continua** si el rango de dicha variable es un intervalo o es la unión de varios intervalos reales, acotados o no acotados. Por ejemplo, medición de la corriente de un alambre, longitud de partes desgastadas en una pieza, tiempo de duración de una bombilla, tiempos de espera, estatura, masa, etc.

Definición

Sea X una variable aleatoria continua. La distribución acumulada para la variable aleatoria X, se define igual que en el caso discreto:

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria se dice **Continua** si el rango de dicha variable es un intervalo o es la unión de varios intervalos reales, acotados o no acotados. Por ejemplo, medición de la corriente de un alambre, longitud de partes desgastadas en una pieza, tiempo de duración de una bombilla, tiempos de espera, estatura, masa, etc.

Definición

Sea X una variable aleatoria continua. La distribución acumulada para la variable aleatoria X, se define igual que en el caso discreto:

$$F(x) = P(X \leq x) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \, .$$

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria se dice **Continua** si el rango de dicha variable es un intervalo o es la unión de varios intervalos reales, acotados o no acotados. Por ejemplo, medición de la corriente de un alambre, longitud de partes desgastadas en una pieza, tiempo de duración de una bombilla, tiempos de espera, estatura, masa, etc.

Definición

Sea X una variable aleatoria continua. La distribución acumulada para la variable aleatoria X, se define igual que en el caso discreto:

$$F(x) = P(X \leq x) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Esta función resulta ser continua en $\mathbb{R}$.

Probabilidad y Distribuciones de Probabilidad

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria se dice **Continua** si el rango de dicha variable es un intervalo o es la unión de varios intervalos reales, acotados o no acotados. Por ejemplo, medición de la corriente de un alambre, longitud de partes desgastadas en una pieza, tiempo de duración de una bombilla, tiempos de espera, estatura, masa, etc.

Definición

Sea X una variable aleatoria continua. La distribución acumulada para la variable aleatoria X, se define igual que en el caso discreto:

$$F(x) = P(X \leq x) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \, .$$

Esta función resulta ser continua en $\mathbb{R}$. Si existe una función $f(x)$, tal que $\dfrac{d\,F(x)}{d\,x} = f(x)$, para todo x donde dicha derivada exista, entonces $f(x)$ es llamada *Función de Densidad de Probabilidad* o p.d.f. de X.

Propiedades

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

Propiedades

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

1) $f(x) \geq 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Propiedades

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

1) $f(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

Propiedades

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

1) $f(x) \geq 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$.
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.
3) $P\,(X \in A) = \int_{A} f(x)\, dx$.

Propiedades

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

1) $f(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

3) $P\,(X \in A) = \int\limits_{A} f(x)\,dx$.

4) Si $A = [a,\, b]$, con $a < b \Rightarrow \;\; P\,(a \leq X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Usando la propiedad 4 es fácil ver que:

Propiedades

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

1) $f(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.
3) $P\left(X \in A\right) = \int\limits_{A} f(x)\, dx$.
4) Si $A = [a,\, b]$, con $a < b \Rightarrow \; P\left(a \leq X \leq b\right) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$.

Usando la propiedad 4 es fácil ver que:

$$P\left(X = x\right) = P\left(x \leq X \leq x\right) = \int_{x}^{x} f(x)\, dx = 0 \, .$$

Probabilidad y Distribuciones de Probabilidad

Es decir, la probabilidad en un punto es cero.

Es decir, la probabilidad en un punto es cero. De este resultado se deduce que si X es una variable aleatoria continua, entonces:

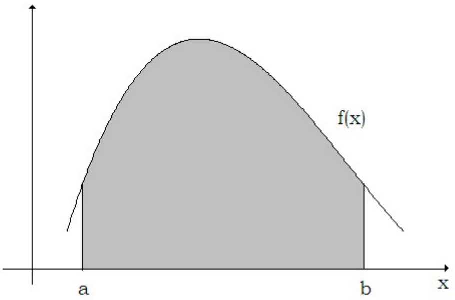
Es decir, la probabilidad en un punto es cero. De este resultado se deduce que si X es una variable aleatoria continua, entonces:

$$P\left(a \leq X \leq b\right) = P\left(a < X \leq b\right) = P\left(a \leq X < b\right) = P\left(a < X < b\right) \ .$$

Es decir, la probabilidad en un punto es cero. De este resultado se deduce que si X es una variable aleatoria continua, entonces:

$$P\left(a \leq X \leq b\right) = P\left(a < X \leq b\right) = P\left(a \leq X < b\right) = P\left(a < X < b\right) \ .$$

Como $f(x) \geq 0$, entonces, el cálculo de probabilidades se reduce a calcular el área bajo $f(x)$ en el rango de interés.



Propiedades de $F(x)$

- $0 \leq F(x) \leq 1 \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Propiedades de $F(x)$

- $0 \leq F(x) \leq 1 \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Propiedades de $F(x)$

- $0 \leq F(x) \leq 1 \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $P(X > x) = 1 - F(x)$

Propiedades de $F(x)$

- $0 \leq F\,(x) \leq 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $P\,(X > x) = 1\, - \, F\,(x)$
- Si $x < y \quad \Rightarrow \quad F\,(x) \leq F\,(y)$

Propiedades de $F(x)$

- $0 \leq F(x) \leq 1 \, , \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- Si $x < y \quad \Rightarrow \quad F(x) \leq F(y)$
- Si $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, entonces

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) \, .$$

Ejemplo 20

Sea X una variable aleatoria que representa el tiempo de préstamo de un libro (en horas).

Propiedades de $F(x)$

- $0 \leq F(x) \leq 1 \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad$ y $\qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- Si $x < y \quad \Rightarrow \quad F(x) \leq F(y)$
- Si $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, entonces

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) \,.$$

Ejemplo 20

Sea X una variable aleatoria que representa el tiempo de préstamo de un libro (en horas). La distribución acumulada de X está dada por:

Probabilidad y Distribuciones de Probabilidad

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & ; \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases} .$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ \frac{x^2}{4} & ; \quad 0\leq x<2 \\ 1 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}.$$

Halle:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & ; \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases} .$$

Halle:

a) $P\left(X < 1\right)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & ; \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}.$$

Halle:

a) $P(X < 1)$.

b) $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & ; \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases} .$$

Halle:

a) $P\left(X < 1\right)$.

b) $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$.

c) Una expresión para el $100p$-avo percentil.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & ; \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases} .$$

Halle:

a) $P\left(X < 1\right)$.

b) $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$.

c) Una expresión para el $100p$-avo percentil.

d) $f(x)$, la p.d.f. de X.

Solución

a) $P\left(X < 1\right) = P\left(X \leq 1\right) = F(1) = \frac{1}{4}$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & ; \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases} .$$

Halle:

a) $P\left(X < 1\right)$.

b) $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$.

c) Una expresión para el $100p$-avo percentil.

d) $f(x)$, la p.d.f. de X.

Solución

a) $P\left(X < 1\right) = P\left(X \leq 1\right) = F(1) = \frac{1}{4}$.

b) $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

c) El cálculo del $100p$-avo percentil consiste en hallar un valor del rango de la variable aleatoria X, digamos x_p, tal que $P(X \leq x_p) = p$;

c) El cálculo del $100p$-avo percentil consiste en hallar un valor del rango de la variable aleatoria X, digamos x_p, tal que $P(X \leq x_p) = p$; es decir, se debe resolver la ecuación $F\left(x_p\right) = p$ para $0 < p < 1$.

c) El cálculo del $100p$-avo percentil consiste en hallar un valor del rango de la variable aleatoria X, digamos x_p, tal que $P(X \leq x_p) = p$; es decir, se debe resolver la ecuación $F\,(x_p) = p$ para $0 < p < 1$. Esta equación equivale a resolver la igualdad: $\frac{x^{\,2}}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad x_p = 2\,\sqrt{p}\,$.

c) El cálculo del $100p$-avo percentil consiste en hallar un valor del rango de la variable aleatoria X, digamos x_p, tal que $P(X \leq x_p) = p$; es decir, se debe resolver la ecuación $F\left(x_p\right) = p$ para $0 < p < 1$. Esta equación equivale a resolver la igualdad: $\frac{x^{\,2}}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad x_p = 2\sqrt{p}$.

d) $f(x) = F'(x) = \dfrac{2x}{4} = \dfrac{x}{2}\,; \quad 0 < x < 2.$

c) El cálculo del $100p$-avo percentil consiste en hallar un valor del rango de la variable aleatoria X, digamos x_p, tal que $P(X \leq x_p) = p$; es decir, se debe resolver la ecuación $F\left(x_p\right) = p$ para $0 < p < 1$. Esta equación equivale a resolver la igualdad: $\frac{x^{\,2}}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad x_p = 2\sqrt{p}$.

d) $f(x) = F'(x) = \dfrac{2x}{4} = \dfrac{x}{2}\,; \quad 0 < x < 2$. Observe que $F^{'}(0) = 0$ y $F^{'}(2)$ no existe.

c) El cálculo del $100p$-avo percentil consiste en hallar un valor del rango de la variable aleatoria X, digamos x_p, tal que $P(X \leq x_p) = p$; es decir, se debe resolver la ecuación $F\left(x_p\right) = p$ para $0 < p < 1$. Esta equación equivale a resolver la igualdad: $\frac{x^{\,2}}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad x_p = 2\sqrt{p}$.

d) $f(x) = F'(x) = \dfrac{2x}{4} = \dfrac{x}{2}\ ; \quad 0 < x < 2$. Observe que $F^{'}(0) = 0$ y $F^{'}(2)$ no existe. De esta manera se tiene que:

c) El cálculo del $100p$-avo percentil consiste en hallar un valor del rango de la variable aleatoria X, digamos x_p, tal que $P(X \leq x_p) = p$; es decir, se debe resolver la ecuación $F\left(x_p\right) = p$ para $0 < p < 1$. Esta equación equivale a resolver la igualdad: $\frac{x^{\,2}}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad x_p = 2\,\sqrt{p}$.

d) $f(x) = F'(x) = \dfrac{2x}{4} = \dfrac{x}{2}$; $\quad 0 < x < 2$. Observe que $F^{'}(0) = 0$ y $F^{'}(2)$ no existe. De esta manera se tiene que:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} \quad .$$

Ejemplo 21

Sea X una variable aleatoria que representa la duración en horas de cierto tipo de bombilla eléctrica.

c) El cálculo del $100p$-avo percentil consiste en hallar un valor del rango de la variable aleatoria X, digamos x_p, tal que $P(X \leq x_p) = p$; es decir, se debe resolver la ecuación $F(x_p) = p$ para $0 < p < 1$. Esta equación equivale a resolver la igualdad: $\frac{x^2}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad x_p = 2\sqrt{p}$.

d) $f(x) = F'(x) = \dfrac{2x}{4} = \dfrac{x}{2}$; $\quad 0 < x < 2$. Observe que $F^{'}(0) = 0$ y $F^{'}(2)$ no existe. De esta manera se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Ejemplo 21

Sea X una variable aleatoria que representa la duración en horas de cierto tipo de bombilla eléctrica. La p.d.f para X esta dada por:

c) El cálculo del $100p$-avo percentil consiste en hallar un valor del rango de la variable aleatoria X, digamos x_p, tal que $P(X \leq x_p) = p$; es decir, se debe resolver la ecuación $F\left(x_p\right) = p$ para $0 < p < 1$. Esta equación equivale a resolver la igualdad: $\frac{x^2}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad x_p = 2\sqrt{p}$.

d) $f(x) = F'(x) = \dfrac{2x}{4} = \dfrac{x}{2}$; $\quad 0 < x < 2$. Observe que $F'(0) = 0$ y $F'(2)$ no existe. De esta manera se tiene que:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Ejemplo 21

Sea X una variable aleatoria que representa la duración en horas de cierto tipo de bombilla eléctrica. La p.d.f para X esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^{3}} & , \quad 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^{3}} & , \quad 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Calcule:

a) $P(X \leq 2000)$

b) $P(X \leq 2000 \mid X \geq 1800)$

Solución

Primero es necesario hallar el valor de a.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^{3}} & , \quad 1500\leq x\leq 2500\\ 0 & , \quad \text{otro caso}\end{cases}.$$

Calcule:

a) $P\left(X\leq 2000\right)$

b) $P\left(X\leq 2000\,|\,X\geq 1800\right)$

Solución

Primero es necesario hallar el valor de a. Como: $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=1$.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^{3}} & , \quad 1500\leq x\leq 2500\\ 0 & , \quad \text{otro caso}\end{cases}.$$

Calcule:

a) $P\left(X\leq 2000\right)$

b) $P\left(X\leq 2000\,|\,X\geq 1800\right)$

Solución

Primero es necesario hallar el valor de a. Como: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=1$. entonces:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^{3}} & , \quad 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Calcule:

a) $P(X \leq 2000)$

b) $P(X \leq 2000 \mid X \geq 1800)$

Solución

Primero es necesario hallar el valor de a. Como: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. entonces:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{1500} f(x)\,dx}_{0} + \int_{1500}^{2500} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{2500}^{+\infty} f(x)\,dx}_{0} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^{3}} dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{a}{2\,x^{2}}\Big|_{1500}^{2500} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 7031250\,.$$

a)

$$P\,(X \leq 2000) = \int_{1500}^{2000} \frac{a}{x^{3}} dx = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{1500^{\,2}} - \frac{1}{2000^{\,2}}\right] \cong 0.68359\,.$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^{3}} dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad - \frac{a}{2\,x^{2}} \Big|_{1500}^{2500} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 7031250 \, .$$

a)

$$P\,(X \leq 2000) = \int_{1500}^{2000} \frac{a}{x^{3}} dx = \frac{a}{2} \left[\frac{1}{1500^{\,2}} - \frac{1}{2000^{\,2}} \right] \cong 0.68359 \, .$$

b)

$$P\,(X \leq 2000 \,|\, X \geq 1800) = \frac{P\,(1800 \leq X \leq 2000)}{P\,(X \geq 1800)}$$

$$\Leftrightarrow \int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^{3}} dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad - \frac{a}{2\,x^{2}}\Big|_{1500}^{2500} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 7031250\,.$$

a)

$$P\,(X \leq 2000) = \int_{1500}^{2000} \frac{a}{x^{3}} dx = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{1500^{\,2}} - \frac{1}{2000^{\,2}}\right] \cong 0.68359\,.$$

b)

$$P\,(X \leq 2000 \,|\, X \geq 1800) = \frac{P\,(1800 \leq X \leq 2000)}{P\,(X \geq 1800)}$$

$$P\,(X \leq 2000 \,|\, X \geq 1800) = \frac{\int_{1800}^{2000} \frac{a}{x^{3}} dx}{\int_{1800}^{2500} \frac{a}{x^{3}} dx} = \frac{\frac{475}{2304}}{\frac{301}{576}} \approx 0.39452\,.$$

Ejemplo 22

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria X continua con p.d.f dada por:

Ejemplo 22

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria X continua con p.d.f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Ejemplo 22

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria X continua con p.d.f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

a) Halle $F(x)$.

Ejemplo 22

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria X continua con p.d.f dada por:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

a) Halle $F(x)$.

b) Calcule $P(X<1)$.

Ejemplo 22

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria X continua con p.d.f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

a) Halle $F(x)$.

b) Calcule $P(X < 1)$.

c) Calcule $P(1 < X < 2)$.

Ejemplo 22

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria X continua con p.d.f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

a) Halle $F(x)$.

b) Calcule $P(X < 1)$.

c) Calcule $P(1 < X < 2)$.

d) Halle el valor de k tal que $P(X < k) = 0.95$.

Solución

a) Si $x \leq 0$ entonces $F_X(x) = 0$.

Ejemplo 22

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria X continua con p.d.f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

a) Halle $F(x)$.

b) Calcule $P(X < 1)$.

c) Calcule $P(1 < X < 2)$.

d) Halle el valor de k tal que $P(X < k) = 0.95$.

Solución

a) Si $x \leq 0$ entonces $F_X(x) = 0$. Si $x > 0$ entonces

Ejemplo 22

El tiempo de espera de un cliente hasta ser atendido es una variable aleatoria X continua con p.d.f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

a) Halle $F(x)$.

b) Calcule $P(X < 1)$.

c) Calcule $P(1 < X < 2)$.

d) Halle el valor de k tal que $P(X < k) = 0.95$.

Solución

a) Si $x \leq 0$ entonces $F_X(x) = 0$. Si $x > 0$ entonces

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt = -e^{-t}\,\Big|_0^x = 1 - e^{-x} .$$

b)

$$P(X < 1) = P(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} \approx 0.63212\ .$$

c)

$$P(1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(1) = \left(1 - e^{-2}\right) - \left(1 - e^{-1}\right)$$

$$P(1 < X < 2) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{e-1}{e^2} \approx 0.23254\ .$$

d)

$$P(X < k) = F_X(k) = 1 - e^{-k} = 0.95 \Leftrightarrow e^{-k} = 0.05 \ \Rightarrow\ k = 2.9957\ .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Definición

Sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua), con distribución de probabilidad $f(x)$.

Definición

Sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua), con distribución de probabilidad $f(x)$. El valor esperado de X, el cuál se denota $E[X]$, se define como:

Valor Esperado de variables aleatorias

Definición

Sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua), con distribución de probabilidad $f(x)$. El valor esperado de X, el cuál se denota $E[X]$, se define como:

$$E[X] = \begin{cases} \sum\limits_{x} x\ p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Definición

Sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua), con distribución de probabilidad $f(x)$. El valor esperado de X, el cuál se denota $E[X]$, se define como:

$$E[X] = \begin{cases} \sum_x x\, p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Este valor esperado es usualmente denotado μ_X, o μ. Algunas propiedades del valor esperado.

Valor Esperado de variables aleatorias

Definición

Sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua), con distribución de probabilidad $f(x)$. El valor esperado de X, el cuál se denota $E[X]$, se define como:

$$E[X] = \begin{cases} \sum_{x} x\, p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases}.$$

Este valor esperado es usualmente denotado μ_X, o μ. Algunas propiedades del valor esperado. Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

Valor Esperado de variables aleatorias

Definición

Sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua), con distribución de probabilidad $f(x)$. El valor esperado de X, el cuál se denota $E[X]$, se define como:

$$E[X] = \begin{cases} \sum_x x\, p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases}.$$

Este valor esperado es usualmente denotado μ_X, o μ. Algunas propiedades del valor esperado. Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

- $E[a] = a$.

Valor Esperado de variables aleatorias

Definición

Sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua), con distribución de probabilidad $f(x)$. El valor esperado de X, el cuál se denota $E[X]$, se define como:

$$E[X] = \begin{cases} \sum\limits_{x} x\, p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Este valor esperado es usualmente denotado μ_X, o μ. Algunas propiedades del valor esperado. Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

- $E[a] = a$.
- $E[a\,X + b] = a\,E[X] + b$.

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)\; p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\; f(x)\; dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)\ p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\ f(x)\ dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Nota: Sea $g(X) = (X - \mu_X)^2$.

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)\ p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\ f(x)\ dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Nota: Sea $g(X) = (X - \mu_X)^2$. La *Varianza* de X, la cual se denotará $Var[X]$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, se define como:

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)\; p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\; f(x)\; dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Nota: Sea $g(X) = (X - \mu_X)^2$. La *Varianza* de X, la cual se denotará $Var[X]$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, se define como:

$$Var[X] = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)\, p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Nota: Sea $g(X) = (X - \mu_X)^2$. La *Varianza* de X, la cual se denotará $Var[X]$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, se define como:

$$Var[X] = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 .$$

Propiedades de la Varianza

Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_x g(x)\, p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Nota: Sea $g(X) = (X - \mu_X)^2$. La *Varianza* de X, la cual se denotará $Var[X]$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, se define como:

$$Var[X] = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 .$$

Propiedades de la Varianza

Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

- $Var[X] = E\left[X^2\right] - (E\left[X\right])^2$.

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)\, p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Nota: Sea $g(X) = (X - \mu_X)^2$. La *Varianza* de X, la cual se denotará $Var[X]$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, se define como:

$$Var[X] = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 .$$

Propiedades de la Varianza

Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

- $Var[X] = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2$.
- $Var[a] = 0$.

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)\, p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Nota: Sea $g(X) = (X - \mu_X)^2$. La *Varianza* de X, la cual se denotará $Var[X]$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, se define como:

$$Var[X] = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 .$$

Propiedades de la Varianza

Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

- $Var[X] = E\left[X^2\right] - (E\left[X\right])^2$.
- $Var[a] = 0$.
- $Var[a\,X + b] = a^2\,Var[X]$.

Valor Esperado de variables aleatorias

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)\, p(x) & ; \quad \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx & ; \quad \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases} .$$

Nota: Sea $g(X) = (X - \mu_X)^2$. La *Varianza* de X, la cual se denotará $Var[X]$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, se define como:

$$Var[X] = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 .$$

Propiedades de la Varianza

Sean a, b números reales y sea X una variable aleatoria (Discreta o Continua).

- $Var[X] = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2$.
- $Var[a] = 0$.
- $Var[a\,X + b] = a^2\, Var[X]$.

Valor Esperado de variables aleatorias

A la raíz cuadrada de la Varianza se le conoce como *Desviación estándar* y se denota como σ_X o simplemente σ.

A la raíz cuadrada de la Varianza se le conoce como *Desviación estándar* y se denota como σ_X o simplemente σ.

Ejemplo 23

El tiempo de espera en la fila de un autobús (en min) es una variable aleatoria X, con p.d.f. dada por $f(x) = 0.1\, e^{-0.1\, x}$, $x > 0$.

Valor Esperado de variables aleatorias

A la raíz cuadrada de la Varianza se le conoce como *Desviación estándar* y se denota como σ_X o simplemente σ.

Ejemplo 23

El tiempo de espera en la fila de un autobús (en min) es una variable aleatoria X, con p.d.f. dada por $f(x) = 0.1\,e^{-0.1\,x}$, $x > 0$.

- Halle $E[X]$, $Var[X]$ y σ_X .

Valor Esperado de variables aleatorias

A la raíz cuadrada de la Varianza se le conoce como *Desviación estándar* y se denota como σ_X o simplemente σ.

Ejemplo 23

El tiempo de espera en la fila de un autobús (en min) es una variable aleatoria X, con p.d.f. dada por $f(x) = 0.1\, e^{-0.1\, x}$, $x > 0$.

- Halle $E[X]$, $Var[X]$ y σ_X .
- Sea $g(X) = 2\, X - 10$. Calcule $Var[g(X)]$.

Solución

- Por definición se tiene que:

A la raíz cuadrada de la Varianza se le conoce como *Desviación estándar* y se denota como σ_X o simplemente σ.

Ejemplo 23

El tiempo de espera en la fila de un autobús (en min) es una variable aleatoria X, con p.d.f. dada por $f(x) = 0.1\, e^{-0.1\, x} \;\;, \;\; x > 0$.

- Halle $E[X]$, $Var[X]$ y σ_X .
- Sea $g(X) = 2\,X - 10$. Calcule $Var[g(X)]$.

Solución

- Por definición se tiene que:

$$E[X] = \int_0^\infty 0.1\, e^{-0.1\, x}\, x\, dx = -\frac{1}{0.1}(u+1)\, e^{-u}\,\Big|_0^\infty = 10\ .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Solución

- $$E[X^2] = \int_0^\infty 0.1\, e^{-0.1\,x}\, x^2\; dx = -\frac{1}{0.1^2}(u^2 + 2\,u + 2)\, e^{-u}\,|_0^\infty = 200\;.$$

Solución

- $$E[X^2] = \int\limits_0^\infty 0.1\, e^{-0.1\, x}\, x^2\; dx = -\frac{1}{0.1^2}(u^2 + 2\, u + 2)\, e^{-u}\, |_0^\infty = 200\ .$$

  Con esto

Solución

- $$E[X^2] = \int_0^{\infty} 0.1\, e^{-0.1\, x}\, x^2\; dx = -\frac{1}{0.1^2}(u^2 + 2\, u + 2)\, e^{-u}\, |_0^{\infty} = 200\ .$$

  Con esto

  $$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 200 - 100 = 100\ .$$

  Finalmente $\sigma_X = 10$.

Valor Esperado de variables aleatorias

Solución

- $$E[X^2] = \int_0^\infty 0.1\, e^{-0.1\,x}\, x^2\, dx = -\frac{1}{0.1^2}(u^2 + 2\,u + 2)\, e^{-u}\, |_0^\infty = 200\ .$$

  Con esto

  $$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 200 - 100 = 100\ .$$

  Finalmente $\sigma_X = 10$. El tiempo medio de espera en fila por el autobús es de 10 min y la mayoría de personas que esperan en fila, requieren entre 0 y 20 min.

Valor Esperado de variables aleatorias

Solución

- $$E[X^2] = \int_0^\infty 0.1\, e^{-0.1\, x}\, x^2\, dx = -\frac{1}{0.1^2}(u^2 + 2\, u + 2)\, e^{-u}\, |_0^\infty = 200\ .$$

  Con esto

  $$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 200 - 100 = 100\ .$$

  Finalmente $\sigma_X = 10$. El tiempo medio de espera en fila por el autobús es de 10 min y la mayoría de personas que esperan en fila, requieren entre 0 y 20 min.

- $$Var\,[g(X)] = Var[2\,X - 10] = 2^2\,Var[X] = 4 * 100 = 400\ .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 24

Se lanzan cuatro monedas no cargadas.

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 24

Se lanzan cuatro monedas no cargadas. Sea X la variable aleatoria definida por el número de caras, entonces $A_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ejemplo 24

Se lanzan cuatro monedas no cargadas. Sea X la variable aleatoria definida por el número de caras, entonces $A_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Halle la p.m.f de X y $E[X]$.

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 24

Se lanzan cuatro monedas no cargadas. Sea X la variable aleatoria definida por el número de caras, entonces $A_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Halle la p.m.f de X y $E[X]$.

Solución

Es fácil verificar que (ejercicio):

Ejemplo 24

Se lanzan cuatro monedas no cargadas. Sea X la variable aleatoria definida por el número de caras, entonces $A_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Halle la p.m.f de X y $E[X]$.

Solución

Es fácil verificar que (ejercicio):

$$p(x) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4 \, .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 24

Se lanzan cuatro monedas no cargadas. Sea X la variable aleatoria definida por el número de caras, entonces $A_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Halle la p.m.f de X y $E[X]$.

Solución

Es fácil verificar que (ejercicio):

$$p(x) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4 \, .$$

De esta manera se tiene que:

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 24

Se lanzan cuatro monedas no cargadas. Sea X la variable aleatoria definida por el número de caras, entonces $A_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Halle la p.m.f de X y $E[X]$.

Solución

Es fácil verificar que (ejercicio):

$$p(x) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4 \, .$$

De esta manera se tiene que:

$$E[X] = \sum_{x=0}^{4} x \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left[0\binom{4}{0} + 1\binom{4}{1} + 2\binom{4}{2} + 3\binom{4}{3} + 4\binom{4}{4} \right] \, .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 24

Se lanzan cuatro monedas no cargadas. Sea X la variable aleatoria definida por el número de caras, entonces $A_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Halle la p.m.f de X y $E[X]$.

Solución

Es fácil verificar que (ejercicio):

$$p(x) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4 \; .$$

De esta manera se tiene que:

$$E[X] = \sum_{x=0}^{4} x \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left[0\binom{4}{0} + 1\binom{4}{1} + 2\binom{4}{2} + 3\binom{4}{3} + 4\binom{4}{4} \right] \; .$$

$$E\,[X] = \frac{1}{16}\;[\,0(1) + 1(4) + 2(6) + 3(4) + 4(1)\,] \;=\; \frac{32}{16} = 2 \; .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 24

Se lanzan cuatro monedas no cargadas. Sea X la variable aleatoria definida por el número de caras, entonces $A_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Halle la p.m.f de X y $E[X]$.

Solución

Es fácil verificar que (ejercicio):

$$p(x) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4 \, .$$

De esta manera se tiene que:

$$E[X] = \sum_{x=0}^{4} x \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left[0\binom{4}{0} + 1\binom{4}{1} + 2\binom{4}{2} + 3\binom{4}{3} + 4\binom{4}{4} \right] \, .$$

$$E\,[X] = \frac{1}{16}\,[\,0(1) + 1(4) + 2(6) + 3(4) + 4(1)\,] \, = \, \frac{32}{16} = 2 \, .$$

Si se repite muchas veces este experimento, se espera que el número de caras obtenidas tienda a 2.

Valor Esperado de variables aleatorias

En general, si se lanzan n monedas no cargadas y X: representa el número de caras en los n lanzamientos, entonces (verificar):

Valor Esperado de variables aleatorias

En general, si se lanzan n monedas no cargadas y X: representa el número de caras en los n lanzamientos, entonces (verificar):

$$E\left[X\right] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{n}{2}.$$

Ejemplo 25

Una máquina de llenado de latas es revisada cada hora.

Valor Esperado de variables aleatorias

En general, si se lanzan n monedas no cargadas y X: representa el número de caras en los n lanzamientos, entonces (verificar):

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2}.$$

Ejemplo 25

Una máquina de llenado de latas es revisada cada hora. Cada lata es sometida a un proceso para determinar el volumen de llenado y verificar si cumple o no los requisitos exigidos.

Valor Esperado de variables aleatorias

En general, si se lanzan n monedas no cargadas y X: representa el número de caras en los n lanzamientos, entonces (verificar):

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2}.$$

Ejemplo 25

Una máquina de llenado de latas es revisada cada hora. Cada lata es sometida a un proceso para determinar el volumen de llenado y verificar si cumple o no los requisitos exigidos. Este proceso se continúa hasta encontrar la primera lata que no cumple con los requisitos.

En general, si se lanzan n monedas no cargadas y X: representa el número de caras en los n lanzamientos, entonces (verificar):

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{n}{2}\,.$$

Ejemplo 25

Una máquina de llenado de latas es revisada cada hora. Cada lata es sometida a un proceso para determinar el volumen de llenado y verificar si cumple o no los requisitos exigidos. Este proceso se continúa hasta encontrar la primera lata que no cumple con los requisitos.

Sea X número de latas revisadas hasta encontrar la primera que no cumple.

Valor Esperado de variables aleatorias

En general, si se lanzan n monedas no cargadas y X: representa el número de caras en los n lanzamientos, entonces (verificar):

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{n}{2}.$$

Ejemplo 25

Una máquina de llenado de latas es revisada cada hora. Cada lata es sometida a un proceso para determinar el volumen de llenado y verificar si cumple o no los requisitos exigidos. Este proceso se continúa hasta encontrar la primera lata que no cumple con los requisitos.

Sea X número de latas revisadas hasta encontrar la primera que no cumple. Suponga que la proporción de latas que no cumplen las especificaciones es p.

En general, si se lanzan n monedas no cargadas y X: representa el número de caras en los n lanzamientos, entonces (verificar):

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2}.$$

Ejemplo 25

Una máquina de llenado de latas es revisada cada hora. Cada lata es sometida a un proceso para determinar el volumen de llenado y verificar si cumple o no los requisitos exigidos. Este proceso se continúa hasta encontrar la primera lata que no cumple con los requisitos.

Sea X número de latas revisadas hasta encontrar la primera que no cumple. Suponga que la proporción de latas que no cumplen las especificaciones es p. Halle $E[X]$.

Valor Esperado de variables aleatorias

Solución

Defina los eventos:

N : La lata no cumple los requisitos

Valor Esperado de variables aleatorias

Solución

Defina los eventos:

N : La lata no cumple los requisitos ; S : La lata si cumple los requisitos

Solución

Defina los eventos:

N : La lata no cumple los requisitos ; S : La lata si cumple los requisitos

El espacio muestral para este experimento está dado por:

Valor Esperado de variables aleatorias

Solución

Defina los eventos:

N : La lata no cumple los requisitos ; S : La lata si cumple los requisitos

El espacio muestral para este experimento está dado por:

$S = \{N, SN, SSN, SSSN, SSSSN, \cdots\}$, con $A_X = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

Valor Esperado de variables aleatorias

Solución

Defina los eventos:

N : La lata no cumple los requisitos ; S : La lata si cumple los requisitos

El espacio muestral para este experimento está dado por:

$S = \{N, SN, SSN, SSSN, SSSSN, \cdots\}$, con $A_X = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

$$
\begin{aligned}
&P(X=1) = P(N) = p \\
&P(X=2) = P(S\,N) = P(S)\;P(N) = (1-p)\;p \\
&P(X=3) = P(S\,S\,N) = P(S)\;P(S)\;P(N) = (1-p)^2\;p \\
&P(X=x) = P\left(\underbrace{S\,S\;\cdots\;S}_{x-1\text{ veces}}\,N\right) = P(S)^{x-1}\;p = (1-p)^{x-1}\;p
\end{aligned}
.
$$

$$P(x) = p\;(1-p)^{x-1}\;;\quad x = 1, 2, 3, \cdots$$

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x\,p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\,p\;(1-p)^{x-1} = \tfrac{1}{p}$$

Se probará que en efecto $E[X] = \frac{1}{p}$.

Valor Esperado de variables aleatorias

Se probará que en efecto $E[X] = \frac{1}{p}$. Sea $f(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p\, t^{\,x}$.

Se probará que en efecto $E[X] = \frac{1}{p}$. Sea $f(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p\, t^{\,x}$. Si $|t| < 1$ entonces $f(t) = \dfrac{p}{1-t}$.

Se probará que en efecto $E[X] = \frac{1}{p}$. Sea $f(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p\, t^{x}$. Si $|t| < 1$ entonces $f(t) = \dfrac{p}{1-t}$. De esta manera

Valor Esperado de variables aleatorias

Se probará que en efecto $E[X] = \frac{1}{p}$. Sea $f(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p\, t^{\,x}$. Si $|t| < 1$ entonces $f(t) = \dfrac{p}{1-t}$. De esta manera

$$f^{'}(t) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, t^{x-1}\ , \quad \text{para} \quad |t| < 1\ .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Se probará que en efecto $E[X] = \frac{1}{p}$. Sea $f(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p\, t^{\,x}$. Si $|t| < 1$ entonces $f(t) = \dfrac{p}{1-t}$. De esta manera

$$f^{'}(t) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, t^{x-1} \,, \quad \text{para} \quad |t| < 1 \,.$$

Pero

Se probará que en efecto $E[X] = \frac{1}{p}$. Sea $f(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p\, t^{\,x}$. Si $|t| < 1$ entonces $f(t) = \dfrac{p}{1-t}$. De esta manera

$$f^{'}(t) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, t^{x-1}\ , \quad \text{para} \quad |t| < 1\ .$$

Pero

$$f'(t) = \frac{p}{(1-t)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{(1-t)^2} = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, t^{x-1}\ .$$

Se probará que en efecto $E[X] = \frac{1}{p}$. Sea $f(t) = \sum_{x=0}^{\infty} p\, t^{\,x}$. Si $|t| < 1$ entonces $f(t) = \dfrac{p}{1-t}$. De esta manera

$$f^{'}(t) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, t^{x-1} \,, \quad \text{para} \quad |t| < 1 \,.$$

Pero

$$f'(t) = \frac{p}{(1-t)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{(1-t)^2} = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, t^{x-1} \,.$$

Haciendo $t = 1 - p$, se tiene que:

Valor Esperado de variables aleatorias

Se probará que en efecto $E[X] = \frac{1}{p}$. Sea $f(t) = \sum\limits_{x=0}^{\infty} p\, t^{\,x}$. Si $|t| < 1$ entonces $f(t) = \dfrac{p}{1-t}$. De esta manera

$$f^{'}(t) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, t^{x-1}\ , \quad \text{para} \quad |t| < 1\ .$$

Pero

$$f'(t) = \frac{p}{(1-t)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{(1-t)^2} = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, t^{x-1}\ .$$

Haciendo $t = 1 - p$, se tiene que:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, (1-p)^{x-1} = \frac{p}{p^{\,2}} = \frac{1}{p}\ .$$

Ejemplo 26

Sea X una variable aleatoria con p.d.f. dada por:

Ejemplo 26

Sea X una variable aleatoria con p.d.f. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x\,(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 26

Sea X una variable aleatoria con p.d.f. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x\,(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases}.$$

Calcule $E[X]$ y $Var[X]$.

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 26

Sea X una variable aleatoria con p.d.f. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x\,(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Calcule $E[X]$ y $Var[X]$.

Solución

Primero se debe hallar el valor de k:

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 26

Sea X una variable aleatoria con p.d.f. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x\,(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Calcule $E[X]$ y $Var[X]$.

Solución

Primero se debe hallar el valor de k:

$$\int_0^1 k\,x\,(1-x)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k\,\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = 1\,;$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 26

Sea X una variable aleatoria con p.d.f. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x\,(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Calcule $E[X]$ y $Var[X]$.

Solución

Primero se debe hallar el valor de k:

$$\int_0^1 k\,x\,(1-x)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = 1\ ;$$

Así,

$$k\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 6\ .$$

Valor Esperado de variables aleatorias

Ejemplo 26

Sea X una variable aleatoria con p.d.f. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x\,(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Calcule $E[X]$ y $Var[X]$.

Solución

Primero se debe hallar el valor de k:

$$\int_0^1 k\,x\,(1-x)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k\,\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = 1\ ;$$

Así,

$$k\,\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 6\ .$$

Con esto $f(x) = 6\,x\,(1-x)\ ;\ 0 < x < 1$.

Valor Esperado de variables aleatorias

$$E[X] = \int_0^1 x\,6\,x\,(1-x)\,dx = \int_0^1 6\,(x^2 - x^3)\,dx = 6\,\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2\,6\,x\,(1-x)\,dx = 6\,\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]\Big|_0^1 = \frac{3}{10}\,.$$

Finalmente,

Valor Esperado de variables aleatorias

$$E[X] = \int_0^1 x\,6\,x\,(1-x)\,dx = \int_0^1 6\,(x^2 - x^3)\,dx = 6\,\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2\,6\,x\,(1-x)\,dx = 6\,\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]\Big|_0^1 = \frac{3}{10}\,.$$

Finalmente,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}\,.$$

y

$$\sigma_X = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,.$$