Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Exponencial

Sea X una v.a continua.

Distribución Exponencial

Sea X una v.a continua. Diremos que X tiene una distribución *Exponencial*, si su f.d.p. es de la forma:

Distribución Exponencial

Sea X una v.a continua. Diremos que X tiene una distribución *Exponencial*, si su f.d.p. es de la forma:

$$f\,(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{\,-\lambda\, x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} \quad .$$

Distribución Exponencial

Sea X una v.a continua. Diremos que X tiene una distribución *Exponencial*, si su f.d.p. es de la forma:

$$f\,(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{\,-\lambda\, x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} \quad .$$

Por notación se escribe $X \sim Exp(\lambda)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Exponencial

Sea X una v.a continua. Diremos que X tiene una distribución *Exponencial*, si su f.d.p. es de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Por notación se escribe $X \sim Exp(\lambda)$.

Teorema 5

Si $X \sim Exp(\lambda)$, entonces:

- $$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2} .$$
- La c.d.f. de X es:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Exponencial

Sea X una v.a continua. Diremos que X tiene una distribución *Exponencial*, si su f.d.p. es de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \, e^{-\lambda \, x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases} .$$

Por notación se escribe $X \sim Exp(\lambda)$.

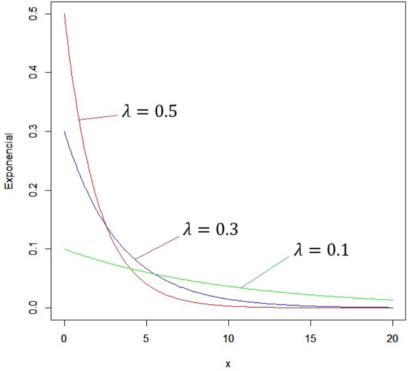
Teorema 5

Si $X \sim Exp(\lambda)$, entonces:

- $$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2} .$$
- La c.d.f. de X es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \, x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} .$$

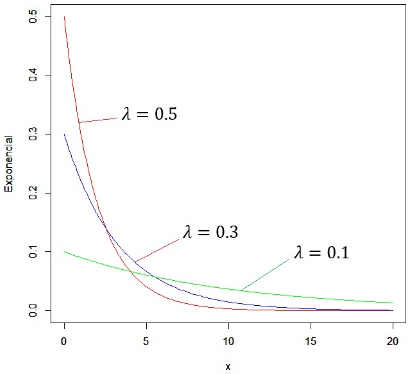
Algunas distribuciones de probabilidad Continuas



Ejemplo 44

Sea X el tiempo entre las detecciones de una partícula rara por un contador Geiger.

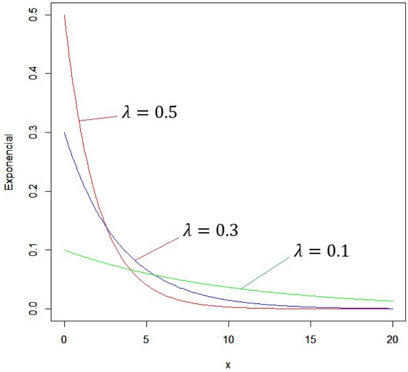
Algunas distribuciones de probabilidad Continuas



Ejemplo 44

Sea X el tiempo entre las detecciones de una partícula rara por un contador Geiger. Supóngase que éste tiempo tiene una distribución exponencial con un tiempo medio de 1.4 minutos.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas



Ejemplo 44

Sea X el tiempo entre las detecciones de una partícula rara por un contador Geiger. Supóngase que éste tiempo tiene una distribución exponencial con un tiempo medio de 1.4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de detectar una partícula durante el lapso de 30 segundos desde que se enciende el contador?

Solución

Como $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1.4$, entonces $\lambda = \frac{1}{1.4}$.

Solución

Como $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1.4$, entonces $\lambda = \frac{1}{1.4}$. De esta manera la f.p.p. de X está dada por: $f(x) = \frac{1}{1.4} \exp^{-\left(\frac{x}{1.4}\right)}$; $x > 0$.

Solución

Como $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1.4$, entonces $\lambda = \frac{1}{1.4}$. De esta manera la f.p.p. de X está dada por: $f(x) = \frac{1}{1.4} \exp^{-\left(\frac{x}{1.4}\right)}$; $x > 0$. Se pide calcular:

Solución

Como $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1.4$, entonces $\lambda = \frac{1}{1.4}$. De esta manera la f.p.p. de X está dada por: $f(x) = \frac{1}{1.4} \exp^{-\left(\frac{x}{1.4}\right)}$; $x > 0$. Se pide calcular:

$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} \frac{1}{1.4} \exp^{-\left(\frac{x}{1.4}\right)} dx = 1 - \exp^{-\left(\frac{0.5}{1.4}\right)} = 0.300327 .$$

O usando la c.d.f. de X:

Solución

Como $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1.4$, entonces $\lambda = \frac{1}{1.4}$. De esta manera la f.p.p. de X está dada por: $f(x) = \frac{1}{1.4}\exp^{-\left(\frac{x}{1.4}\right)}$; $x > 0$. Se pide calcular:

$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} \frac{1}{1.4}\ \exp^{-\left(\frac{x}{1.4}\right)}\, dx = 1 - \exp^{-\left(\frac{0.5}{1.4}\right)} = 0.300327\ .$$

O usando la c.d.f. de X:

$$P(X < 0.5) = P(X \leq 0.5) = F(0.5) = 1 - \exp^{-\left(\frac{0.5}{1.4}\right)} = 0.300327\ .$$

Suponga que transcurren 3 minutos sin que el contador detecte partícula alguna. ¿Cuál es la probabilidad de detectar una partícula en los 30 segundos siguientes?

Solución

Como $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1.4$, entonces $\lambda = \frac{1}{1.4}$. De esta manera la f.p.p. de X está dada por: $f(x) = \frac{1}{1.4}\exp^{-\left(\frac{x}{1.4}\right)}$; $x > 0$. Se pide calcular:

$$P(X < 0.5) = \int_{0}^{0.5} \frac{1}{1.4} \exp^{-\left(\frac{x}{1.4}\right)} dx = 1 - \exp^{-\left(\frac{0.5}{1.4}\right)} = 0.300327 \, .$$

O usando la c.d.f. de X:

$$P(X < 0.5) = P(X \leq 0.5) = F(0.5) = 1 - \exp^{-\left(\frac{0.5}{1.4}\right)} = 0.300327 \, .$$

Suponga que transcurren 3 minutos sin que el contador detecte partícula alguna. ¿Cuál es la probabilidad de detectar una partícula en los 30 segundos siguientes?

$$P(X < 3.5|X > 3.0) = \frac{P(3 < X < 3.5)}{P(X > 3)} = \frac{P(X < 3.5) - P(X < 3)}{P(X > 3)} \, .$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

$$P(X < 3.5 | X > 3.0) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{3.5}{1.4}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{3}{1.4}}\right)}{e^{-\frac{3}{1.4}}} .$$

$$P(X < 3.5 | X > 3.0) = \frac{e^{-\frac{3}{1.4}} - e^{-\frac{3.5}{1.4}}}{e^{-\frac{3}{1.4}}} = \frac{e^{-\frac{3}{1.4}} \left(1 - e^{-\frac{0.5}{1.4}}\right)}{e^{-\frac{3}{1.4}}}$$

$$P(X < 3.5 | X > 3.0) = 1 - e^{-\frac{0.5}{1.4}} = P(X < 0.5) = 0.300327 .$$

El proceso no tiene memoria, solo importa lo que pase en los siguientes 30 segundos, es decir los siguientes 0.5 min.

Propiedad de carencia de memoria

Suponga que X es una variable aleatoria tal que $X \sim exp(\lambda)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

$$P(X<3.5|X>3.0)=\frac{\left(1-e^{-\frac{3.5}{1.4}}\right)-\left(1-e^{-\frac{3}{1.4}}\right)}{e^{-\frac{3}{1.4}}}\ .$$

$$P(X<3.5|X>3.0)=\frac{e^{-\frac{3}{1.4}}-e^{-\frac{3.5}{1.4}}}{e^{-\frac{3}{1.4}}}=\frac{e^{-\frac{3}{1.4}}\ \left(1-e^{-\frac{0.5}{1.4}}\right)}{e^{-\frac{3}{1.4}}}$$

$$P(X<3.5|X>3.0)=1-e^{-\frac{0.5}{1.4}}=P(X<0.5)=0.300327\ .$$

El proceso no tiene memoria, solo importa lo que pase en los siguientes 30 segundos, es decir los siguientes 0.5 min.

Propiedad de carencia de memoria

Suponga que X es una variable aleatoria tal que $X\sim exp(\lambda)$. Sean t_1 y t_2 reales positivos.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

$$P(X < 3.5|X > 3.0) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{3.5}{1.4}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{3}{1.4}}\right)}{e^{-\frac{3}{1.4}}} .$$

$$P(X < 3.5|X > 3.0) = \frac{e^{-\frac{3}{1.4}} - e^{-\frac{3.5}{1.4}}}{e^{-\frac{3}{1.4}}} = \frac{e^{-\frac{3}{1.4}}\left(1 - e^{-\frac{0.5}{1.4}}\right)}{e^{-\frac{3}{1.4}}}$$

$$P(X < 3.5|X > 3.0) = 1 - e^{-\frac{0.5}{1.4}} = P(X < 0.5) = 0.300327 .$$

El proceso no tiene memoria, solo importa lo que pase en los siguientes 30 segundos, es decir los siguientes 0.5 min.

Propiedad de carencia de memoria

Suponga que X es una variable aleatoria tal que $X \sim exp(\lambda)$. Sean t_1 y t_2 reales positivos. Entonces:

$$P(X < 3.5|X > 3.0) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{3.5}{1.4}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{3}{1.4}}\right)}{e^{-\frac{3}{1.4}}} \; .$$

$$P(X < 3.5|X > 3.0) = \frac{e^{-\frac{3}{1.4}} - e^{-\frac{3.5}{1.4}}}{e^{-\frac{3}{1.4}}} = \frac{e^{-\frac{3}{1.4}}\left(1 - e^{-\frac{0.5}{1.4}}\right)}{e^{-\frac{3}{1.4}}}$$

$$P(X < 3.5|X > 3.0) = 1 - e^{-\frac{0.5}{1.4}} = P(X < 0.5) = 0.300327 \; .$$

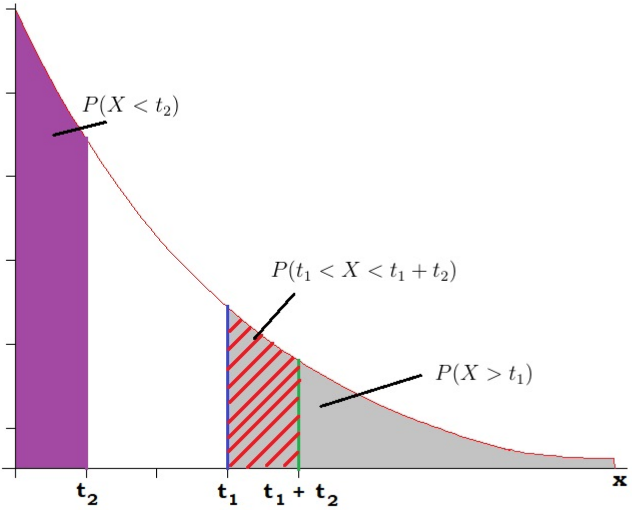
El proceso no tiene memoria, solo importa lo que pase en los siguientes 30 segundos, es decir los siguientes 0.5 min.

Propiedad de carencia de memoria

Suponga que X es una variable aleatoria tal que $X \sim exp(\lambda)$. Sean t_1 y t_2 reales positivos. Entonces:

$$P\left(X < t_1 + t_2 \,|\, X \geq t_1\right) = P\left(X < t_2\right) \; .$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas



Ejemplo 45

El tiempo entre arribos de los taxis a un cruce muy concurrido tiene una distribución exponencial con tiempo medio de 10 minutos.

Ejemplo 45

El tiempo entre arribos de los taxis a un cruce muy concurrido tiene una distribución exponencial con tiempo medio de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que esté en el cruce tenga que esperar mas de una hora por un taxi?

Ejemplo 45

El tiempo entre arribos de los taxis a un cruce muy concurrido tiene una distribución exponencial con tiempo medio de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que esté en el cruce tenga que esperar mas de una hora por un taxi?

b) Suponga que una persona ya esperó una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un taxi en los siguientes 10 minutos?

Solución

Sea X: el tiempo transcurrido en minutos entre la llegada de 2 taxis.

Ejemplo 45

El tiempo entre arribos de los taxis a un cruce muy concurrido tiene una distribución exponencial con tiempo medio de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que esté en el cruce tenga que esperar mas de una hora por un taxi?

b) Suponga que una persona ya esperó una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un taxi en los siguientes 10 minutos?

Solución

Sea X: el tiempo transcurrido en minutos entre la llegada de 2 taxis. Así, $X \sim Exp(0.1)$, ya que $E[X] = \frac{1}{\lambda}$, entonces $\lambda = \frac{1}{10}$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 45

El tiempo entre arribos de los taxis a un cruce muy concurrido tiene una distribución exponencial con tiempo medio de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que esté en el cruce tenga que esperar mas de una hora por un taxi?

b) Suponga que una persona ya esperó una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un taxi en los siguientes 10 minutos?

Solución

Sea X: el tiempo transcurrido en minutos entre la llegada de 2 taxis. Así, $X \sim Exp(0.1)$, ya que $E[X] = \frac{1}{\lambda}$, entonces $\lambda = \frac{1}{10}$.

a) $P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) = e^{-0.1\,(60)} \approx 0.00248$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 45

El tiempo entre arribos de los taxis a un cruce muy concurrido tiene una distribución exponencial con tiempo medio de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que esté en el cruce tenga que esperar mas de una hora por un taxi?

b) Suponga que una persona ya esperó una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un taxi en los siguientes 10 minutos?

Solución

Sea X: el tiempo transcurrido en minutos entre la llegada de 2 taxis. Así, $X \sim Exp(0.1)$, ya que $E[X] = \frac{1}{\lambda}$, entonces $\lambda = \frac{1}{10}$.

a) $P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) = e^{-0.1\,(60)} \approx 0.00248$.

b) $P(X \leq 70 \,|\, X \geq 60) = P(X \leq 10) = 1 - e^{-0.1(10)} \approx 0.63212$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí.Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre 2 ocurrencias sucesivas de este proceso Poisson. Entonces, $T \sim Exp(\lambda)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí.Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre 2 ocurrencias sucesivas de este proceso Poisson. Entonces, $T \sim Exp(\lambda)$.

La f.d.a de T se obtiene como $F(t) = P(T \leq t)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí.Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre 2 ocurrencias sucesivas de este proceso Poisson. Entonces, $T \sim Exp(\lambda)$.

La f.d.a de T se obtiene como $F(t) = P(T \leq t)$. Por facilidad se calculará primero $P(T > t)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí.Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre 2 ocurrencias sucesivas de este proceso Poisson. Entonces, $T \sim Exp(\lambda)$.

La f.d.a de T se obtiene como $F(t) = P(T \leq t)$. Por facilidad se calculará primero $P(T > t)$. Para ello se define la variable aleatoria Y: número de ocurrencias en un intervalo de longitud t.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí.Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre 2 ocurrencias sucesivas de este proceso Poisson. Entonces, $T \sim Exp(\lambda)$.

La f.d.a de T se obtiene como $F(t) = P(T \leq t)$. Por facilidad se calculará primero $P(T > t)$. Para ello se define la variable aleatoria Y: número de ocurrencias en un intervalo de longitud t. Entonces $Y \sim p(\lambda^*)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí.Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre 2 ocurrencias sucesivas de este proceso Poisson. Entonces, $T \sim Exp(\lambda)$.

La f.d.a de T se obtiene como $F(t) = P(T \leq t)$. Por facilidad se calculará primero $P(T > t)$. Para ello se define la variable aleatoria Y: número de ocurrencias en un intervalo de longitud t. Entonces $Y \sim p(\lambda^*)$. Usando la propiedad de proporcionalidad de un proceso Poisson, se tiene que $\lambda^* = \lambda\, t$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí.Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre 2 ocurrencias sucesivas de este proceso Poisson. Entonces, $T \sim Exp(\lambda)$.

La f.d.a de T se obtiene como $F(t) = P(T \leq t)$. Por facilidad se calculará primero $P(T > t)$. Para ello se define la variable aleatoria Y: número de ocurrencias en un intervalo de longitud t. Entonces $Y \sim p(\lambda^*)$. Usando la propiedad de proporcionalidad de un proceso Poisson, se tiene que $\lambda^* = \lambda\, t$. Así, $Y \sim p(\lambda\, t)$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí.Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre 2 ocurrencias sucesivas de este proceso Poisson. Entonces, $T \sim Exp(\lambda)$.

La f.d.a de T se obtiene como $F(t) = P(T \leq t)$. Por facilidad se calculará primero $P(T > t)$. Para ello se define la variable aleatoria Y: número de ocurrencias en un intervalo de longitud t. Entonces $Y \sim p(\lambda^*)$. Usando la propiedad de proporcionalidad de un proceso Poisson, se tiene que $\lambda^* = \lambda\, t$. Así, $Y \sim p(\lambda\, t)$. De esta manera,

$$F(t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \exp^{-\lambda\, t} \ .$$

La cual corresponde a la acumulada de una exponencial con parámetro λ, que es lo que se quería probar.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0,\ x]$ horas sea 0.01.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0,\ x]$ horas sea 0.01.

Solución

a) Sea X: Tiempo entre llamadas.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0,\ x]$ horas sea 0.01.

Solución

a) Sea X: Tiempo entre llamadas. $E[X] = 10$ minutos.

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0,\ x]$ horas sea 0.01.

Solución

a) Sea X: Tiempo entre llamadas. $E[X] = 10$ minutos. Sea Y: número de llamadas que llegan en 30 minutos. $y = 0, 1, 2, \cdots$.

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0,\ x]$ horas sea 0.01.

Solución

a) Sea X: Tiempo entre llamadas. $E[X] = 10$ minutos. Sea Y: número de llamadas que llegan en 30 minutos. $y = 0, 1, 2, \cdots$. Así, $Y \sim p(\lambda^*)$, con λ^*: número promedio de llamadas en 30 minutos.

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0,\ x]$ horas sea 0.01.

Solución

a) Sea X: Tiempo entre llamadas. $E[X] = 10$ minutos. Sea Y: número de llamadas que llegan en 30 minutos. $y = 0, 1, 2, \cdots$. Así, $Y \sim p(\lambda^*)$, con λ^*: número promedio de llamadas en 30 minutos. Como el tiempo promedio para recibir una llamada es 10 min, se tiene que se recibe una llamada en promedio cada 10 min. Así: es claro que $\lambda^* = 3$.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0,\ x]$ horas sea 0.01.

Solución

a) Sea X: Tiempo entre llamadas. $E[X] = 10$ minutos. Sea Y: número de llamadas que llegan en 30 minutos. $y = 0, 1, 2, \cdots$. Así, $Y \sim p(\lambda^*)$, con λ^*: número promedio de llamadas en 30 minutos. Como el tiempo promedio para recibir una llamada es 10 min, se tiene que se recibe una llamada en promedio cada 10 min. Así: es claro que $\lambda^* = 3$. De esta manera se tierne que $Y \sim p(3)$.

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0,\ x]$ horas sea 0.01.

Solución

a) Sea X: Tiempo entre llamadas. $E[X] = 10$ minutos. Sea Y: número de llamadas que llegan en 30 minutos. $y = 0, 1, 2, \cdots$. Así, $Y \sim p(\lambda^*)$, con λ^*: número promedio de llamadas en 30 minutos. Como el tiempo promedio para recibir una llamada es 10 min, se tiene que se recibe una llamada en promedio cada 10 min. Así: es claro que $\lambda^* = 3$. De esta manera se tierne que $Y \sim p(3)$. Finalmente:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Ejemplo 46

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0,\ x]$ horas sea 0.01.

Solución

a) Sea X: Tiempo entre llamadas. $E[X] = 10$ minutos. Sea Y: número de llamadas que llegan en 30 minutos. $y = 0, 1, 2, \cdots$. Así, $Y \sim p(\lambda^*)$, con λ^*: número promedio de llamadas en 30 minutos. Como el tiempo promedio para recibir una llamada es 10 min, se tiene que se recibe una llamada en promedio cada 10 min. Así: es claro que $\lambda^* = 3$. De esta manera se tierne que $Y \sim p(3)$. Finalmente:

$$P\left(Y > 3\right) = 1 - P\left(Y \leq 3\right) = 1 - \sum_{y=0}^{3} \frac{e^{-3}\, 3^y}{y!} \approx 1 - 0.6472 = 0.3528 \, .$$

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$.

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora.

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora. Así, si en $\frac{1}{6}$ de hora llega en promedio una llamada, en x horas llegarán $\lambda_2 = 6\,x$ llamadas.

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora. Así, si en $\frac{1}{6}$ de hora llega en promedio una llamada, en x horas llegarán $\lambda_2 = 6\,x$ llamadas. De esta manera se tiene que $Y \sim p(6\,x)$. Finalmente la pregunta se reduce a encontrar x tal que $P(Y = 0) = 0.01$

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora. Así, si en $\frac{1}{6}$ de hora llega en promedio una llamada, en x horas llegarán $\lambda_2 = 6\,x$ llamadas. De esta manera se tiene que $Y \sim p(6\,x)$. Finalmente la pregunta se reduce a encontrar x tal que $P(Y = 0) = 0.01$

$$P(Y = 0) = 0.01 \Leftrightarrow e^{-\,6\,x} = 0.01 \Leftrightarrow x = \frac{ln(0.01)}{-6} \approx 0.76753\,.$$

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora. Así, si en $\frac{1}{6}$ de hora llega en promedio una llamada, en x horas llegarán $\lambda_2 = 6\,x$ llamadas. De esta manera se tiene que $Y \sim p(6\,x)$. Finalmente la pregunta se reduce a encontrar x tal que $P(Y = 0) = 0.01$

$$P(Y = 0) = 0.01 \Leftrightarrow e^{-\,6\,x} = 0.01 \Leftrightarrow x = \frac{ln(0.01)}{-6} \approx 0.76753\,.$$

Aproximadamente 46.05 min

Ejemplo 47

El tiempo de duración de un chip para computadora es una v.a exponencial con media de 20000 horas.

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora. Así, si en $\frac{1}{6}$ de hora llega en promedio una llamada, en x horas llegarán $\lambda_2 = 6\,x$ llamadas. De esta manera se tiene que $Y \sim p(6\,x)$. Finalmente la pregunta se reduce a encontrar x tal que $P(Y = 0) = 0.01$

$$P(Y=0) = 0.01 \Leftrightarrow e^{-\,6\,x} = 0.01 \Leftrightarrow x = \frac{ln(0.01)}{-6} \approx 0.76753\,.$$

Aproximadamente 46.05 min

Ejemplo 47

El tiempo de duración de un chip para computadora es una v.a exponencial con media de 20000 horas. Dado que el chip lleva funcionando más de 15000 horas ¿Cuál es la probabilidad de que dure 1000 horas más?

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora. Así, si en $\frac{1}{6}$ de hora llega en promedio una llamada, en x horas llegarán $\lambda_2 = 6\,x$ llamadas. De esta manera se tiene que $Y \sim p(6\,x)$. Finalmente la pregunta se reduce a encontrar x tal que $P(Y = 0) = 0.01$

$$P(Y = 0) = 0.01 \Leftrightarrow e^{-\,6\,x} = 0.01 \Leftrightarrow x = \frac{ln(0.01)}{-6} \approx 0.76753\,.$$

Aproximadamente 46.05 min

Ejemplo 47

El tiempo de duración de un chip para computadora es una v.a exponencial con media de 20000 horas. Dado que el chip lleva funcionando más de 15000 horas ¿Cuál es la probabilidad de que dure 1000 horas más?

Sea X : vida útil del chip.

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora. Así, si en $\frac{1}{6}$ de hora llega en promedio una llamada, en x horas llegarán $\lambda_2 = 6\,x$ llamadas. De esta manera se tiene que $Y \sim p(6\,x)$. Finalmente la pregunta se reduce a encontrar x tal que $P(Y = 0) = 0.01$

$$P(Y = 0) = 0.01 \Leftrightarrow e^{-\,6\,x} = 0.01 \Leftrightarrow x = \frac{ln(0.01)}{-6} \approx 0.76753\,.$$

Aproximadamente 46.05 min

Ejemplo 47

El tiempo de duración de un chip para computadora es una v.a exponencial con media de 20000 horas. Dado que el chip lleva funcionando más de 15000 horas ¿Cuál es la probabilidad de que dure 1000 horas más?

Sea X : vida útil del chip. Se sabe que $X \sim Exp\left(\frac{1}{20000}\right)$.

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora. Así, si en $\frac{1}{6}$ de hora llega en promedio una llamada, en x horas llegarán $\lambda_2 = 6\,x$ llamadas. De esta manera se tiene que $Y \sim p(6\,x)$. Finalmente la pregunta se reduce a encontrar x tal que $P(Y = 0) = 0.01$

$$P(Y = 0) = 0.01 \Leftrightarrow e^{-\,6\,x} = 0.01 \Leftrightarrow x = \frac{ln(0.01)}{-6} \approx 0.76753\,.$$

Aproximadamente 46.05 min

Ejemplo 47

El tiempo de duración de un chip para computadora es una v.a exponencial con media de 20000 horas. Dado que el chip lleva funcionando más de 15000 horas ¿Cuál es la probabilidad de que dure 1000 horas más?

Sea X : vida útil del chip. Se sabe que $X \sim Exp\left(\frac{1}{20000}\right)$. Se pide calcular:

b) Sea Y: número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim p(\lambda_2)$. Observe que 10 min equivalen a $\frac{1}{6}$ de hora. Así, si en $\frac{1}{6}$ de hora llega en promedio una llamada, en x horas llegarán $\lambda_2 = 6\,x$ llamadas. De esta manera se tiene que $Y \sim p(6\,x)$. Finalmente la pregunta se reduce a encontrar x tal que $P(Y = 0) = 0.01$

$$P(Y = 0) = 0.01 \Leftrightarrow e^{-\,6\,x} = 0.01 \Leftrightarrow x = \frac{ln(0.01)}{-6} \approx 0.76753\,.$$

Aproximadamente 46.05 min

Ejemplo 47

El tiempo de duración de un chip para computadora es una v.a exponencial con media de 20000 horas. Dado que el chip lleva funcionando más de 15000 horas ¿Cuál es la probabilidad de que dure 1000 horas más?

Sea X : vida útil del chip. Se sabe que $X \sim Exp\left(\frac{1}{20000}\right)$. Se pide calcular:

$$P\,(X > 15000 + 1000\,|\,X > 15000) = P(X > 1000) = e^{-\,\frac{1000}{20000}} \approx 0.95123\,.$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa.

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X tiene una distribución *Lognormal*, con parámetros μ y σ si $ln(X) \sim n(\mu, \sigma^2)$.

Distribución Lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X tiene una distribución *Lognormal*, con parámetros μ y σ si $ln(X) \sim n(\mu, \sigma^2)$. La f.d.p de X está dada por:

Distribución Lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X tiene una distribución *Lognormal*, con parámetros μ y σ si $ln(X) \sim n(\mu, \sigma^2)$. La f.d.p de X está dada por:

$$f\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;x\;\sigma}\,e^{-\,\frac{1}{2}\,\frac{(\ln x-\mu)^{\,2}}{\sigma^{\,2}}} \quad ; \;\; x > 0\;,\; \mu \in \mathbb{R}\;,\; \sigma > 0\;.$$

Distribución Lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X tiene una distribución *Lognormal*, con parámetros μ y σ si $ln(X) \sim n(\mu, \sigma^2)$. La f.d.p de X está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\; x\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}} \;;\; x > 0\,,\; \mu \in \mathbb{R}\,,\; \sigma > 0\,.$$

μ y σ^2 **NO** son la media y varianza de X.

Distribución Lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X tiene una distribución *Lognormal*, con parámetros μ y σ si $ln(X) \sim n(\mu, \sigma^2)$. La f.d.p de X está dada por:

$$f\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;x\,\sigma}\,e^{-\,\frac{1}{2}\,\frac{(\ln x-\mu)^{\,2}}{\sigma^{\,2}}}\quad ;\;\; x>0\;,\;\mu\in\mathbb{R}\;,\;\sigma>0\;.$$

μ y $\sigma^{\,2}$ **NO** son la media y varianza de X. Son la media y varianza de $\ln(X)$.

Distribución Lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X tiene una distribución *Lognormal*, con parámetros μ y σ si $ln(X) \sim n(\mu, \sigma^2)$. La f.d.p de X está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\; x\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}} \quad ; \quad x > 0\,,\ \mu \in \mathbb{R}\,,\ \sigma > 0\,.$$

μ y σ^2 **NO** son la media y varianza de X. Son la media y varianza de $\ln(X)$. Se puede mostrar que:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Distribución Lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X tiene una distribución *Lognormal*, con parámetros μ y σ si $ln(X) \sim n(\mu, \sigma^2)$. La f.d.p de X está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\; x\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}} \;;\;\; x > 0\,,\; \mu \in \mathbb{R}\,,\; \sigma > 0\,.$$

μ y σ^2 **NO** son la media y varianza de X. Son la media y varianza de $\ln(X)$. Se puede mostrar que:

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{y} \quad Var[X] = e^{2\mu+\sigma^2} * \left(e^{\sigma^2} - 1\right)\,.$$

El cálculo de probabilidades con una densidad Lognormal es algo complicado.

Distribución Lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa. Se dice que X tiene una distribución *Lognormal*, con parámetros μ y σ si $ln(X) \sim n(\mu, \sigma^2)$. La f.d.p de X está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\; x\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}} \;\; ; \;\; x > 0\,,\; \mu \in \mathbb{R}\,,\; \sigma > 0\,.$$

μ y σ^2 **NO** son la media y varianza de X. Son la media y varianza de $\ln(X)$. Se puede mostrar que:

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{y} \quad Var[X] = e^{2\mu + \sigma^2} * \left(e^{\sigma^2} - 1\right)\,.$$

El cálculo de probabilidades con una densidad Lognormal es algo complicado. Pero debido al hecho de que el logaritmo natural de un v.a Lognormal es una v.a normal, podemos usar las tablas para una normal estándar para calcular dichas probabilidades.

Como $\ln(X)$ es una función estrictamente creciente, entonces:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Como $\ln(X)$ es una función estrictamente creciente, entonces:

$$P(X \leq a) = P(ln(X) \leq ln(a)) = P\left(\frac{\ln(X)-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right).$$

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Como $\ln(X)$ es una función estrictamente creciente, entonces:

$$P(X \leq a) = P(ln(X) \leq ln(a)) = P\left(\frac{\ln(X)-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right) .$$

La f.d.a de X está dada por:

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Como $\ln(X)$ es una función estrictamente creciente, entonces:

$$P(X \leq a) = P(ln(X) \leq ln(a)) = P\left(\frac{\ln(X)-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right) .$$

La f.d.a de X está dada por:

$$F_X(x) = \phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) \quad ; \quad x > 0 .$$

Ejemplo 48

El articulo "The statistics of phytotoxic air pollutants"(Journal Royal Stat Soc., 1989, pp.183-198) sugiere que la concentración de SO_2 sobre cierto bosque, tiene un distribución aproximadamente Lognormal con $\mu = 1.9$ y $\sigma = 0.9$.

Como $\ln(X)$ es una función estrictamente creciente, entonces:

$$P(X \leq a) = P(ln(X) \leq ln(a)) = P\left(\frac{\ln(X) - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(a) - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\ln(a) - \mu}{\sigma}\right) .$$

La f.d.a de X está dada por:

$$F_X(x) = \phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) \quad ; \quad x > 0 .$$

Ejemplo 48

El articulo "The statistics of phytotoxic air pollutants"(Journal Royal Stat Soc., 1989, pp.183-198) sugiere que la concentración de SO_2 sobre cierto bosque, tiene un distribución aproximadamente Lognormal con $\mu = 1.9$ y $\sigma = 0.9$.

a) Si X: es la concentración de SO_2 en este bosque, calcule la concentración media de SO_2 y la desviación estándar para X?

Algunas distribuciones de probabilidad Continuas

Como $\ln(X)$ es una función estrictamente creciente, entonces:

$$P(X \leq a) = P(ln(X) \leq ln(a)) = P\left(\frac{\ln(X)-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right) .$$

La f.d.a de X está dada por:

$$F_X(x) = \phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) \quad ; \quad x > 0 .$$

Ejemplo 48

El articulo "The statistics of phytotoxic air pollutants"(Journal Royal Stat Soc., 1989, pp.183-198) sugiere que la concentración de SO_2 sobre cierto bosque, tiene un distribución aproximadamente Lognormal con $\mu = 1.9$ y $\sigma = 0.9$.

a) Si X: es la concentración de SO_2 en este bosque, calcule la concentración media de SO_2 y la desviación estándar para X?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración de SO_2 sea a lo sumo 10? ¿Esté entre 5 y 10?

Como $\ln(X)$ es una función estrictamente creciente, entonces:

$$P(X \leq a) = P(ln(X) \leq ln(a)) = P\left(\frac{\ln(X) - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(a) - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{\ln(a) - \mu}{\sigma}\right) .$$

La f.d.a de X está dada por:

$$F_X(x) = \phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) \quad ; \quad x > 0 .$$

Ejemplo 48

El articulo "The statistics of phytotoxic air pollutants"(Journal Royal Stat Soc., 1989, pp.183-198) sugiere que la concentración de SO_2 sobre cierto bosque, tiene un distribución aproximadamente Lognormal con $\mu = 1.9$ y $\sigma = 0.9$.

a) Si X: es la concentración de SO_2 en este bosque, calcule la concentración media de SO_2 y la desviación estándar para X?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración de SO_2 sea a lo sumo 10? ¿Esté entre 5 y 10?

c) Calcule la mediana para X.

Solución

a)

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{1.9 + \frac{0.9^2}{2}} = e^{2.305} \approx 10.024 \, .$$

Solución

a)

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{1.9 + \frac{0.9^2}{2}} = e^{2.305} \approx 10.024 \; .$$

$$Var[X] = e^{2\mu + \sigma^2} * \left(e^{\sigma^2} - \; 1\right) = e^{2\,(1.9) + 0.9^{\,2}} * \left(e^{0.9^{\,2}} - 1\right) = 125.4 \; .$$

Solución

a)

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{1.9 + \frac{0.9^2}{2}} = e^{2.305} \approx 10.024\ .$$

$$Var[X] = e^{2\mu + \sigma^2} * \left(e^{\sigma^2} - 1\right) = e^{2\,(1.9) + 0.9^{\,2}} * \left(e^{0.9^{\,2}} - 1\right) = 125.4\ .$$

b)

$$P(X \leq 10) = P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln 10 - 1.9}{0.9}\right) = P(Z \leq 0.45) \approx 0.6736\ .$$

Solución

a)

$$E[X] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = e^{1.9+\frac{0.9^2}{2}} = e^{2.305} \approx 10.024 \ .$$

$$Var[X] = e^{2\mu+\sigma^2} * \left(e^{\sigma^2} - 1\right) = e^{2\,(1.9)+0.9^2} * \left(e^{0.9^2} - 1\right) = 125.4 \ .$$

b)

$$P(X \leq 10) = P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln 10 - 1.9}{0.9}\right) = P(Z \leq 0.45) \approx 0.6736 \ .$$

$$\begin{aligned} P(5 < X < 10) &= P\left(\frac{\ln 5 - 1.9}{0.9} \leq Z \leq \frac{\ln 10 - 1.9}{0.9}\right) \\ &= P(-0.32 \leq Z \leq 0.45) = \Phi(0.45) - \Phi(-0.32) \\ &\approx 0.2991 \ . \end{aligned}$$

c) Hallemos el valor de $\tilde{x}$ tal que $P(X \leq \tilde{x}) = 0.5$.

c) Hallemos el valor de $\tilde{x}$ tal que $P\left(X \leq \tilde{x}\right) = 0.5$.

$$P\left(X \leq \tilde{x}\right) = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\ln X \leq \ln \tilde{x}\right) = 0.5$$

c) Hallemos el valor de $\tilde{x}$ tal que $P\left(X \leq \tilde{x}\right) = 0.5$.

$$P\left(X \leq \tilde{x}\right) = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\ln X \leq \ln \tilde{x}\right) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}\right) = 0.5 \Leftrightarrow \quad P\left(Z \leq z\right) = 0.5\ ,$$

c) Hallemos el valor de $\tilde{x}$ tal que $P\left(X \leq \tilde{x}\right) = 0.5$.

$$P\left(X \leq \tilde{x}\right) = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\ln X \leq \ln \tilde{x}\right) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}\right) = 0.5 \Leftrightarrow \quad P\left(Z \leq z\right) = 0.5\ ,$$

donde $z = \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}$.

c) Hallemos el valor de $\tilde{x}$ tal que $P(X \leq \tilde{x}) = 0.5$.

$$P(X \leq \tilde{x}) = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad P(\ln X \leq \ln \tilde{x}) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}\right) = 0.5 \Leftrightarrow \quad P(Z \leq z) = 0.5\ ,$$

donde $z = \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}$. Así, $z = 0$, con lo que se obtiene $\ln(\tilde{x}) = 1.9$, lo que equivale a que $\tilde{x} = e^{1.9} = 6.686$.

c) Hallemos el valor de $\tilde{x}$ tal que $P(X \leq \tilde{x}) = 0.5$.

$$P(X \leq \tilde{x}) = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad P(\ln X \leq \ln \tilde{x}) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}\right) = 0.5 \Leftrightarrow \quad P(Z \leq z) = 0.5\,,$$

donde $z = \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}$. Así, $z = 0$, con lo que se obtiene $\ln(\tilde{x}) = 1.9$, lo que equivale a que $\tilde{x} = e^{1.9} = 6.686$.

En general, para una variable aleatoria Lognormal, con parámetros μ y σ^2, el percentil $100p$, denotado x_p, se calcula como:

c) Hallemos el valor de $\tilde{x}$ tal que $P(X \leq \tilde{x}) = 0.5$.

$$P(X \leq \tilde{x}) = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad P(\ln X \leq \ln \tilde{x}) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}\right) = 0.5 \Leftrightarrow \quad P(Z \leq z) = 0.5 \ ,$$

donde $z = \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}$. Así, $z = 0$, con lo que se obtiene $\ln(\tilde{x}) = 1.9$, lo que equivale a que $\tilde{x} = e^{1.9} = 6.686$.

En general, para una variable aleatoria Lognormal, con parámetros μ y σ^2, el percentil $100p$, denotado x_p, se calcula como:

$x_p = e^{\mu + \sigma z_p}$; donde z_p es tal que $P(Z > z_p) = p$, $Z \sim n(0, 1)$.