Estimadores de Máxima Verosimilitud

Introducción

Hasta ahora hemos encontrado que el cálculo de probabilidades, tanto para las variables aleatorias como para los estadísticos que se construyen a partir de una muestra aleatoria, requieren de la especificación de una distribución de probabilidad.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Introducción

Hasta ahora hemos encontrado que el cálculo de probabilidades, tanto para las variables aleatorias como para los estadísticos que se construyen a partir de una muestra aleatoria, requieren de la especificación de una distribución de probabilidad.

En la mayoría de casos, aunque podamos especificar un modelo probabilístico para esas variables, en general estos depende de cantidades desconocidas (parámetros) y a menps que podamos tener algún conocimiento u aprooximación de dichos valores concocidos, no será posoble responder a preguntas de tipo probabilístico.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Introducción

Hasta ahora hemos encontrado que el cálculo de probabilidades, tanto para las variables aleatorias como para los estadísticos que se construyen a partir de una muestra aleatoria, requieren de la especificación de una distribución de probabilidad.

En la mayoría de casos, aunque podamos especificar un modelo probabilístico para esas variables, en general estos depende de cantidades desconocidas (parámetros) y a menps que podamos tener algún conocimiento u aprooximación de dichos valores concocidos, no será posoble responder a preguntas de tipo probabilístico.

Por ejemplo, se puede saber que los puntajes obtenidos en una prueba de admisión son normales, pero desconocemos la media μ y varianza σ^2 de los puntajes.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Introducción

Hasta ahora hemos encontrado que el cálculo de probabilidades, tanto para las variables aleatorias como para los estadísticos que se construyen a partir de una muestra aleatoria, requieren de la especificación de una distribución de probabilidad.

En la mayoría de casos, aunque podamos especificar un modelo probabilístico para esas variables, en general estos depende de cantidades desconocidas (parámetros) y a menps que podamos tener algún conocimiento u aprooximación de dichos valores concocidos, no será posoble responder a preguntas de tipo probabilístico.

Por ejemplo, se puede saber que los puntajes obtenidos en una prueba de admisión son normales, pero desconocemos la media μ y varianza σ^2 de los puntajes. Se puede tener conocimiento acerca de que el número de errores por página es una v.a. Poisson, pero desconocemos la media λ el cual corresponde al número promedio de errores por página.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Introducción

Hasta ahora hemos encontrado que el cálculo de probabilidades, tanto para las variables aleatorias como para los estadísticos que se construyen a partir de una muestra aleatoria, requieren de la especificación de una distribución de probabilidad.

En la mayoría de casos, aunque podamos especificar un modelo probabilístico para esas variables, en general estos depende de cantidades desconocidas (parámetros) y a menps que podamos tener algún conocimiento u aprooximación de dichos valores concocidos, no será posoble responder a preguntas de tipo probabilístico.

Por ejemplo, se puede saber que los puntajes obtenidos en una prueba de admisión son normales, pero desconocemos la media μ y varianza σ^2 de los puntajes. Se puede tener conocimiento acerca de que el número de errores por página es una v.a. Poisson, pero desconocemos la media λ el cual corresponde al número promedio de errores por página.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Introducción

Si la distribución de interés está completamente determinada por un número finito de parámetros, es posible usar la información de una muestra aleatoria para obtener valores aproximados de los parámetros, de manera que que estos sean acordes con la muestra aleatoria.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Introducción

Si la distribución de interés está completamente determinada por un número finito de parámetros, es posible usar la información de una muestra aleatoria para obtener valores aproximados de los parámetros, de manera que que estos sean acordes con la muestra aleatoria. El concepto sobre el cuál se propone este tipo de aproximaciones, se basa en la idea de encontrar estimaciones de los parámetros que maximicen la probabilidad de ocurrencia de la muestra aleatoria.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Introducción

Si la distribución de interés está completamente determinada por un número finito de parámetros, es posible usar la información de una muestra aleatoria para obtener valores aproximados de los parámetros, de manera que que estos sean acordes con la muestra aleatoria. El concepto sobre el cuál se propone este tipo de aproximaciones, se basa en la idea de encontrar estimaciones de los parámetros que maximicen la probabilidad de ocurrencia de la muestra aleatoria.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución f que depende de un parámetro θ (o vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$) por notación escribimos $f(x \,|\, \theta)$.

Introducción

Si la distribución de interés está completamente determinada por un número finito de parámetros, es posible usar la información de una muestra aleatoria para obtener valores aproximados de los parámetros, de manera que que estos sean acordes con la muestra aleatoria. El concepto sobre el cuál se propone este tipo de aproximaciones, se basa en la idea de encontrar estimaciones de los parámetros que maximicen la probabilidad de ocurrencia de la muestra aleatoria.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución f que depende de un parámetro θ (o vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$) por notación escribimos $f(x \,|\, \theta)$.

La función de verosimilitud de la muestra, la cual se denota $L(\theta \,|\, \mathbf{X})$ o simplemente $L(\theta)$, se define como

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Introducción

Si la distribución de interés está completamente determinada por un número finito de parámetros, es posible usar la información de una muestra aleatoria para obtener valores aproximados de los parámetros, de manera que que estos sean acordes con la muestra aleatoria. El concepto sobre el cuál se propone este tipo de aproximaciones, se basa en la idea de encontrar estimaciones de los parámetros que maximicen la probabilidad de ocurrencia de la muestra aleatoria.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución f que depende de un parámetro θ (o vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$) por notación escribimos $f(x \,|\, \theta)$.

La función de verosimilitud de la muestra, la cual se denota $L(\theta \,|\, \mathbf{X})$ o simplemente $L(\theta)$, se define como

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i \,|\, \theta) \; .$$

EMV de θ

El estimador de máxima verosimilitud de θ, denotado EMV, será aquel valor de θ que maximiza a $L(\theta)$ y se suele denotar $\hat{\theta}$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

EMV de θ

El estimador de máxima verosimilitud de θ, denotado EMV, será aquel valor de θ que maximiza a $L(\theta)$ y se suele denotar $\hat{\theta}$. Debido a que las expresiones para $L(\theta)$ pueden ser complejas, se suele maximizar el logaritmo natural de $L(\theta)$, el cual es denotado $\ell(\theta)$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

EMV de θ

El estimador de máxima verosimilitud de θ, denotado EMV, será aquel valor de θ que maximiza a $L(\theta)$ y se suele denotar $\hat{\theta}$. Debido a que las expresiones para $L(\theta)$ pueden ser complejas, se suele maximizar el logaritmo natural de $L(\theta)$, el cual es denotado $\ell(\theta)$.

Ejemplo 74

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Bernoulli con parámetro p, desconocido.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

EMV de θ

El estimador de máxima verosimilitud de θ, denotado EMV, será aquel valor de θ que maximiza a $L(\theta)$ y se suele denotar $\hat{\theta}$. Debido a que las expresiones para $L(\theta)$ pueden ser complejas, se suele maximizar el logaritmo natural de $L(\theta)$, el cual es denotado $\ell\left(\theta\right)$.

Ejemplo 74

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Bernoulli con parámetro p, desconocido. Halle el EMV para p.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

EMV de θ

El estimador de máxima verosimilitud de θ, denotado EMV, será aquel valor de θ que maximiza a $L(\theta)$ y se suele denotar $\hat{\theta}$. Debido a que las expresiones para $L(\theta)$ pueden ser complejas, se suele maximizar el logaritmo natural de $L(\theta)$, el cual es denotado $\ell(\theta)$.

Ejemplo 74

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Bernoulli con parámetro p, desconocido. Halle el EMV para p.

Solución

La p.m.f de una Bernoulli con parámetro p es de la forma:

Estimadores de Máxima Verosimilitud

EMV de θ

El estimador de máxima verosimilitud de θ, denotado EMV, será aquel valor de θ que maximiza a $L(\theta)$ y se suele denotar $\hat{\theta}$. Debido a que las expresiones para $L(\theta)$ pueden ser complejas, se suele maximizar el logaritmo natural de $L(\theta)$, el cual es denotado $\ell\,(\theta)$.

Ejemplo 74

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Bernoulli con parámetro p, desconocido. Halle el EMV para p.

Solución

La p.m.f de una Bernoulli con parámetro p es de la forma:

$$p(x \,|\, p) = p^{\,x}\,(1-p)^{1-x} \quad ; \quad x = 0,\, 1\,.$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

EMV de θ

El estimador de máxima verosimilitud de θ, denotado EMV, será aquel valor de θ que maximiza a $L(\theta)$ y se suele denotar $\hat{\theta}$. Debido a que las expresiones para $L(\theta)$ pueden ser complejas, se suele maximizar el logaritmo natural de $L(\theta)$, el cual es denotado $\ell\,(\theta)$.

Ejemplo 74

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Bernoulli con parámetro p, desconocido. Halle el EMV para p.

Solución

La p.m.f de una Bernoulli con parámetro p es de la forma:

$$p(x\,|\,p) = p^{x}\,(1-p)^{1-x} \quad ; \quad x = 0, 1 \,.$$

Así:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{X_i}\,(1-p)^{1-X_i} = p^{\sum X_i}\,(1-p)^{n-\sum X_i} \; ; \;\; 0 \le p \le 1 \,.$$

$$\ell\,(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i\, ln\, p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) ln(1-p)\ ;\ 0 < p < 1\ .$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell\,(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln\, p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) ln(1-p)\ ;\ 0 < p < 1\ .$$

$$\frac{d}{dp}\,\ell\,(p) = \frac{1}{p}\,\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=}^{n} X_i\right)\ .$$

$$\ell\,(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i\, ln\, p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) ln(1-p) \;;\; 0 < p < 1\,.$$

$$\frac{d}{dp}\,\ell\,(p) = \frac{1}{p}\,\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=}^{n} X_i \right)\,.$$

Haciendo $\ell^{'}(p) = 0$ se obtiene:

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell\,(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln \, p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) \, ln(1-p) \; ; \; 0 < p < 1 \; .$$

$$\frac{d}{dp}\,\ell\,(p) = \frac{1}{p}\,\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=}^{n} X_i \right) \; .$$

Haciendo $\ell^{'}(p) = 0$ se obtiene:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) = 0 \quad \therefore \quad p^* = \frac{\sum^{n} X_i}{n} \; .$$

$$\ell\,(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln\, p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) \, ln(1-p) \; ; \; 0 < p < 1 \; .$$

$$\frac{d}{dp}\,\ell\,(p) = \frac{1}{p}\,\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=}^{n} X_i \right) \; .$$

Haciendo $\ell^{'}(p) = 0$ se obtiene:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) = 0 \quad \therefore \quad p^{*} = \frac{\sum^{n} X_i}{n} \; .$$

$$\ell^{''}(p) = -\frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{(1-p)^2}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) \; .$$

$$\ell\,(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln \, p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) \, ln(1-p) \; ; \; 0 < p < 1 \; .$$

$$\frac{d}{dp}\,\ell\,(p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=}^{n} X_i \right) \; .$$

Haciendo $\ell^{'}(p) = 0$ se obtiene:

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) = 0 \quad \therefore \quad p^{*} = \frac{\sum^{n} X_i}{n} \; .$$

$$\ell^{''}(p) = -\frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{(1-p)^2} \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right) \; .$$

Como $\ell^{''}(p^{*}) = -\frac{n}{(1-p^{*})} < 0$, se tiene que p^{*} es un máximo, siempre que $0 < \sum_{i=1}^{n} X_i < n$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Si $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \therefore L(p) = (1-p)^n\,,\;\; 0 \le p \le 1$, la cual se máximiza cuando

$$p = 0 = \frac{0}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \hat{p}\,.$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Si $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0 \therefore L(p) = (1-p)^n\,,\ \ 0 \leq p \leq 1$, la cual se máximiza cuando $p = 0 = \frac{0}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} = \hat{p}\,.$

Si $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0 \therefore L(p) = p^n$, que es máxima cuando $p = 1 = \frac{n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\,.$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Si $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0 \therefore L(p) = (1-p)^n\,,\;\; 0 \leq p \leq 1$, la cual se máximiza cuando

$p = 0 = \frac{0}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} = \hat{p}\,.$

Si $\sum\limits_{i=1}^{n}\, X_i = 0 \therefore L(p) = p^n$, que es máxima cuando $p = 1 = \frac{n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\, X_i}{n}\,.$

Así $\hat{p} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ es el EMV para $p\,.$

Ejemplo 75

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una Poisson con parámetro λ desconocido.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Si $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \therefore L(p) = (1-p)^n\,, \;\; 0 \leq p \leq 1$, la cual se máximiza cuando $p = 0 = \frac{0}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \hat{p}\,.$

Si $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \therefore L(p) = p^n$, que es máxima cuando $p = 1 = \frac{n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\,.$

Así $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ es el EMV para $p\,.$

Ejemplo 75

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una Poisson con parámetro λ desconocido. La función de verosimilitud para λ en este caso está dada por:

Si $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0 \therefore L(p) = (1-p)^n\,, \;\; 0 \leq p \leq 1$, la cual se máximiza cuando

$p = 0 = \frac{0}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} = \hat{p}\,.$

Si $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0 \therefore L(p) = p^n$, que es máxima cuando $p = 1 = \frac{n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\,.$

Así $\hat{p} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ es el EMV para $p\,.$

Ejemplo 75

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una Poisson con parámetro λ desconocido. La función de verosimilitud para λ en este caso está dada por:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X_i}}{X_i!} \quad \lambda > 0\,.$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\lambda) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln(\lambda) \;\; ; \;\; \lambda > 0 \, .$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\lambda) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln(\lambda) \;\; ; \;\; \lambda > 0 \, .$$

$$\ell^{'}(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\lambda) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln(\lambda) \ \ ; \ \ \lambda > 0 \, .$$

$$\ell^{'}(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

$$\ell^{''}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} X_i \ \ . \ \text{si} \sum_{i=1}^{n} X_i \neq 0 \ \ \Rightarrow \ \ \ell^{''}(\lambda^{*}) < 0 \, .$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\lambda) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln(\lambda) \;\; ; \;\; \lambda > 0 \, .$$

$$\ell^{'}(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

$$\ell^{''}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} X_i \;\; . \; \text{si} \sum_{i=1}^{n} X_i \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \ell^{''}(\lambda^*) < 0 \, .$$

Si $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \; \Rightarrow \; L(\lambda) = e^{-\lambda\, n}$, para $\lambda \geq 0$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\lambda) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln(\lambda) \;\; ; \;\; \lambda > 0 \, .$$

$$\ell^{'}(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

$$\ell^{''}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} X_i \;\; . \text{ si } \sum_{i=1}^{n} X_i \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \ell^{''}(\lambda^{*}) < 0 \, .$$

Si $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \; \Rightarrow \; L(\lambda) = e^{-\lambda \, n}$, para $\lambda \geq 0$.

Esta función se maximiza cuando $\lambda = 0 = \frac{0}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\lambda) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} X_i \, ln(\lambda) \;\; ; \;\; \lambda > 0 \, .$$

$$\ell^{'}(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

$$\ell^{''}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} X_i \;\; . \;\; \text{si} \sum_{i=1}^{n} X_i \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \ell^{''}(\lambda^{*}) < 0 \, .$$

Si $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \;\Rightarrow\; L(\lambda) = e^{-\lambda\, n}$, para $\lambda \geq 0$.

Esta función se maximiza cuando $\lambda = 0 = \dfrac{0}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}$.

Así, el EMV para λ es $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Observaciones

- Los EMV no son siempre insesgados.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Observaciones

- Los EMV no son siempre insesgados.
- Los EMV no tienen siempre varianza mínima.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Observaciones

- Los EMV no son siempre insesgados.
- Los EMV no tienen siempre varianza mínima.

Ejemplo 76

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas.

Observaciones

- Los EMV no son siempre insesgados.
- Los EMV no tienen siempre varianza mínima.

Ejemplo 76

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas. Halle los EMV para μ y σ^2.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Observaciones

- Los EMV no son siempre insesgados.
- Los EMV no tienen siempre varianza mínima.

Ejemplo 76

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas. Halle los EMV para μ y σ^2.

solución

La función de verosimilitud para μ y σ está dada por :

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Observaciones

- Los EMV no son siempre insesgados.
- Los EMV no tienen siempre varianza mínima.

Ejemplo 76

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas. Halle los EMV para μ y σ^2.

solución

La función de verosimilitud para μ y σ está dada por :

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i-\mu)^2} \quad ; \quad \mu \in \mathbb{R} \, , \, \sigma > 0 \, .$$

Observaciones

- Los EMV no son siempre insesgados.
- Los EMV no tienen siempre varianza mínima.

Ejemplo 76

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas. Halle los EMV para μ y σ^2.

solución

La función de verosimilitud para μ y σ está dada por :

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i-\mu)^2} \quad ; \quad \mu \in \mathbb{R}\,,\ \sigma > 0\,.$$

$$L(\mu, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}\,.$$

Tomando logarítmo natural se obtiene:

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Observaciones

- Los EMV no son siempre insesgados.
- Los EMV no tienen siempre varianza mínima.

Ejemplo 76

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas. Halle los EMV para μ y σ^2.

solución

La función de verosimilitud para μ y σ está dada por :

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\,\sigma^2}(X_i-\mu)^2} \quad ; \quad \mu \in \mathbb{R}\,,\ \sigma > 0\,.$$

$$L(\mu, \sigma) = (2\,\pi)^{-\frac{n}{2}}\, \sigma^{-n}\, e^{-\frac{1}{2\,\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2} \,.$$

Tomando logarítmo natural se obtiene:

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\mu,\,\sigma) = -\frac{n}{2}\,ln\,(2\,\pi) - n\,ln(\sigma) - \frac{1}{2\,\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\,.$$

$$\ell(\mu,\, \sigma) = -\frac{n}{2}\, ln\,(2\,\pi) - n\, ln(\sigma) - \frac{1}{2\,\sigma^2}\, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2\ .$$

$$\frac{\partial\,\ell}{\partial\,\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \ \text{ y } \ \frac{\partial\,\ell}{\partial\,\sigma} = -\,\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2\ .$$

Igualando estas derivadas parciales a 0 se obtiene:

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\mu,\, \sigma) = -\frac{n}{2}\, ln\,(2\,\pi) - n\,ln(\sigma) - \frac{1}{2\,\sigma^2}\, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \,.$$

$$\frac{\partial\,\ell}{\partial\,\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \;\; \text{y} \;\; \frac{\partial\,\ell}{\partial\,\sigma} = -\,\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \,.$$

Igualando estas derivadas parciales a 0 se obtiene:

$$\frac{1}{\sigma^2}\, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = 0 \;\; ; \;\; -\,\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\, \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \,.$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\mu,\,\sigma) = -\frac{n}{2}\,ln\,(2\,\pi) - n\,ln(\sigma) - \frac{1}{2\,\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\ .$$

$$\frac{\partial\,\ell}{\partial\,\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\ \text{ y }\ \frac{\partial\,\ell}{\partial\,\sigma} = -\,\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\ .$$

Igualando estas derivadas parciales a 0 se obtiene:

$$\frac{1}{\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0\ \ ;\ \ -\,\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\ .$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i - n\,\mu = 0\ \ ;\ \ -\,\frac{1}{\sigma}\left\{n - \frac{1}{\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right\} = 0\ .$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\ell(\mu,\,\sigma) = -\frac{n}{2}\,ln\,(2\,\pi) - n\,ln(\sigma) - \frac{1}{2\,\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\,.$$

$$\frac{\partial\,\ell}{\partial\,\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \;\text{ y }\; \frac{\partial\,\ell}{\partial\,\sigma} = -\,\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\,.$$

Igualando estas derivadas parciales a 0 se obtiene:

$$\frac{1}{\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0 \;\;;\;\; -\,\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\,.$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i - n\,\mu = 0 \;\;;\;\; -\,\frac{1}{\sigma}\left\{n - \frac{1}{\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right\} = 0\,.$$

La solución a este sistema de ecuaciones es:

$$\ell(\mu,\,\sigma) = -\frac{n}{2}\,ln\,(2\,\pi) - n\,ln(\sigma) - \frac{1}{2\,\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\;.$$

$$\frac{\partial\,\ell}{\partial\,\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\;\text{ y }\;\frac{\partial\,\ell}{\partial\,\sigma} = -\,\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\;.$$

Igualando estas derivadas parciales a 0 se obtiene:

$$\frac{1}{\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0\;\;;\;\;-\,\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\;.$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i - n\,\mu = 0\;\;;\;\;-\,\frac{1}{\sigma}\left\{n - \frac{1}{\sigma^2}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right\} = 0\;.$$

La solución a este sistema de ecuaciones es:

$$\mu^* = \frac{1}{n}\,\sum_{i=1}^{n}X_i = \bar{X}\;\;;\;\;\sigma^{*2} = \frac{1}{n}\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\;.$$

Para verificar que en efecto son MLE, se calculan las segundas derivadas parciales con respecto a μ y σ:

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Para verificar que en efecto son MLE, se calculan las segundas derivadas parciales con respecto a μ y σ:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu \, \partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \ .$$

La respectiva matriz de segundas derivadas parciales, evaluada en μ^* y σ^*, está dada por:

Para verificar que en efecto son MLE, se calculan las segundas derivadas parciales con respecto a μ y σ:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu \, \partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \ .$$

La respectiva matriz de segundas derivadas parciales, evaluada en μ^* y σ^*, está dada por:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & -\frac{2}{\sigma^3} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \\ -\frac{2}{\sigma^3} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu) & \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \end{bmatrix}_{\mu^*, \sigma^*} = \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^{*2}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\,n}{\sigma^{*2}} \end{bmatrix} .$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Para verificar que en efecto son MLE, se calculan las segundas derivadas parciales con respecto a μ y σ:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu \, \partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \, .$$

La respectiva matriz de segundas derivadas parciales, evaluada en μ^* y σ^*, está dada por:

$$\begin{bmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \\ -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) & \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \end{bmatrix}_{\mu^*, \sigma^*} = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\sigma^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2\,n}{\sigma^{*2}} \end{bmatrix} .$$

Como esta matriz es definida negativa, entonces los MLE para μ y σ^2 son respectivamente $\hat{\mu} = \bar{X}$ y $\hat{\sigma}^2 = S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Para verificar que en efecto son MLE, se calculan las segundas derivadas parciales con respecto a μ y σ:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu \, \partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \, .$$

La respectiva matriz de segundas derivadas parciales, evaluada en μ^* y σ^*, está dada por:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & -\frac{2}{\sigma^3} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \\ -\frac{2}{\sigma^3} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu) & \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \end{bmatrix}_{\mu^*, \sigma^*} = \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^{*2}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\,n}{\sigma^{*2}} \end{bmatrix} \, .$$

Como esta matriz es definida negativa, entonces los MLE para μ y σ^2 son respectivamente $\hat{\mu} = \bar{X}$ y $\hat{\sigma}^2 = S_n^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$. Observe que $E[S_n^2] = \frac{n-1}{n} \, \sigma^2$.

Para verificar que en efecto son MLE, se calculan las segundas derivadas parciales con respecto a μ y σ:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2}\ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\ , \ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu\,\partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\ .$$

La respectiva matriz de segundas derivadas parciales, evaluada en μ^* y σ^*, está dada por:

$$\begin{bmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \\ -\frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) & \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \end{bmatrix}_{\mu^*,\,\sigma^*} = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\sigma^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2\,n}{\sigma^{*2}} \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz es definida negativa, entonces los MLE para μ y σ^2 son respectivamente $\hat{\mu} = \bar{X}$ y $\hat{\sigma}^2 = S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$. Observe que $E[S_n^2] = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2$. En este caso el EMV para σ^2 es sesgado.

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ.

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ. Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ . Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ . Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una $exp(\theta)$.

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ. Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una $exp(\theta)$. Sea $\beta = P(X_i > 2)$. ¿Cómo hallar el EMV para β?.

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ . Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una $exp(\theta)$. Sea $\beta = P(X_i > 2)$. ¿Cómo hallar el EMV para β?. Una forma de hacerlo es hallar la función de verosimilitud para β y hallar el EMV.

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ . Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una $exp(\theta)$. Sea $\beta = P(X_i > 2)$. ¿Cómo hallar el EMV para β?. Una forma de hacerlo es hallar la función de verosimilitud para β y hallar el EMV. Observe que $\beta = \int_2^\infty \theta\, e^{-\theta\, x}\, dx = e^{-2\,\theta}$.

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ . Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una $exp(\theta)$. Sea $\beta = P(X_i > 2)$. ¿Cómo hallar el EMV para β?. Una forma de hacerlo es hallar la función de verosimilitud para β y hallar el EMV. Observe que $\beta = \int_2^\infty \theta\, e^{-\theta\, x}\, dx = e^{-2\,\theta}$. Así, $\theta = -\frac{1}{2}\, ln(\beta)$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ . Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una $exp(\theta)$. Sea $\beta = P(X_i > 2)$. ¿Cómo hallar el EMV para β?. Una forma de hacerlo es hallar la función de verosimilitud para β y hallar el EMV. Observe que $\beta = \int_2^\infty \theta\, e^{-\theta\, x}\, dx = e^{-2\,\theta}$. Así, $\theta = -\frac{1}{2}\, ln(\beta)$. La función de verosimilitud para θ está dada por:

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ . Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una $exp(\theta)$. Sea $\beta = P(X_i > 2)$. ¿Cómo hallar el EMV para β?. Una forma de hacerlo es hallar la función de verosimilitud para β y hallar el EMV. Observe que $\beta = \int_2^\infty \theta\, e^{-\theta\, x}\, dx = e^{-2\,\theta}$. Así, $\theta = -\frac{1}{2}\, ln(\beta)$. La función de verosimilitud para θ está dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, e^{-\theta\, X_i} = \theta^n\, e^{-\theta\, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i} .$$

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ . Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una $exp(\theta)$. Sea $\beta = P(X_i > 2)$. ¿Cómo hallar el EMV para β?. Una forma de hacerlo es hallar la función de verosimilitud para β y hallar el EMV. Observe que $\beta = \int_2^\infty \theta\, e^{-\theta\, x}\, dx = e^{-2\,\theta}$. Así, $\theta = -\frac{1}{2}\, ln(\beta)$. La función de verosimilitud para θ está dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, e^{-\theta\, X_i} = \theta^n\, e^{-\theta\, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i} .$$

Reemplazando θ en función de β se tiene:

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Invarianza de los EMV

Sea θ un parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ el EMV para θ . Si $\beta = g(\theta)$ entonces el EMV de β será $\hat{\beta} = g(\hat{\theta})$. Esta propiedad se conoce como *Invarianza del EMV*.

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una $exp(\theta)$. Sea $\beta = P(X_i > 2)$. ¿Cómo hallar el EMV para β?. Una forma de hacerlo es hallar la función de verosimilitud para β y hallar el EMV. Observe que $\beta = \int_2^\infty \theta\, e^{-\theta\, x}\, dx = e^{-2\,\theta}$. Así, $\theta = -\frac{1}{2}\, ln(\beta)$. La función de verosimilitud para θ está dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, e^{-\theta\, X_i} = \theta^n\, e^{-\theta\, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i} \,.$$

Reemplazando θ en función de β se tiene:

$$L(\beta) = \left(-\frac{1}{2}\, ln(\beta)\right)^n \beta^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} \,,\ \ 0 \leq \beta \leq 1 \,.$$

Invarianza de los EMV

$$\ell(\beta) = n \ln\left(-\frac{1}{2}\ln(\beta)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i \ln(\beta) \ , \ \ 0 < \beta < 1 \ .$$

Invarianza de los EMV

$$\ell(\beta) = n \ln\left(-\frac{1}{2}\ln(\beta)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i \ln(\beta) \ , \ \ 0 < \beta < 1 \, .$$

$$\ell'(\beta) = \frac{n}{\beta \ln(\beta)} + \frac{1}{2\,\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

Invarianza de los EMV

$$\ell(\beta) = n\,\ln\left(-\frac{1}{2}\,\ln(\beta)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i\,\ln(\beta)\ \ ,\ \ 0 < \beta < 1\,.$$

$$\ell^{'}(\beta) = \frac{n}{\beta\,\ln(\beta)} + \frac{1}{2\,\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

Al hacer $\ell^{'}(\beta) = 0$, se obtiene $\beta^{*} = e^{-\,\frac{2}{\overline{X}}}$.

Invarianza de los EMV

$$\ell(\beta) = n \, \ln\left(-\frac{1}{2}\,\ln(\beta)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i \, \ln(\beta) \;\; , \;\; 0 < \beta < 1 \, .$$

$$\ell^{'}(\beta) = \frac{n}{\beta\,\ln(\beta)} + \frac{1}{2\,\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

Al hacer $\ell^{'}(\beta) = 0$, se obtiene $\beta^* = e^{-\frac{2}{\bar{X}}}$. Finalmente como $\ell^{''}(\beta^*) = -\dfrac{n}{(\beta^*)^2\,\ln^2(\beta^*)} < 0$, entonces el EMV para β es $\hat{\beta} = e^{-2/\bar{X}}$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Invarianza de los EMV

$$\ell(\beta) = n \ln\left(-\frac{1}{2}\ln(\beta)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i \ln(\beta) \ , \ \ 0 < \beta < 1 \, .$$

$$\ell'(\beta) = \frac{n}{\beta \ln(\beta)} + \frac{1}{2\,\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

Al hacer $\ell'(\beta) = 0$, se obtiene $\beta^* = e^{-\frac{2}{\bar{X}}}$. Finalmente como $\ell''(\beta^*) = -\dfrac{n}{(\beta^*)^2 \ln^2(\beta^*)} < 0$, entonces el EMV para β es $\hat{\beta} = e^{-2/\bar{X}}$.

Es fácil comprobar que el EMV para θ es $1/\bar{X}$.

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Invarianza de los EMV

$$\ell(\beta) = n \ln\left(-\frac{1}{2}\ln(\beta)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i \ln(\beta) \;\;, \;\; 0 < \beta < 1\,.$$

$$\ell^{'}(\beta) = \frac{n}{\beta\,\ln(\beta)} + \frac{1}{2\,\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

Al hacer $\ell^{'}(\beta) = 0$, se obtiene $\beta^* = e^{-\frac{2}{\bar{X}}}$. Finalmente como $\ell^{''}(\beta^*) = -\dfrac{n}{(\beta^*)^2\,\ln^2(\beta^*)} < 0$, entonces el EMV para β es $\hat{\beta} = e^{-2/\bar{X}}$.

Es fácil comprobar que el EMV para θ es $1/\bar{X}$. Así se verifica que:

Invarianza de los EMV

$$\ell(\beta) = n \ln\left(-\frac{1}{2}\ln(\beta)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i \ln(\beta) \;\;,\;\; 0 < \beta < 1\,.$$

$$\ell^{'}(\beta) = \frac{n}{\beta\,\ln(\beta)} + \frac{1}{2\,\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

Al hacer $\ell^{'}(\beta) = 0$, se obtiene $\beta^{*} = e^{-\frac{2}{\bar{X}}}$. Finalmente como $\ell^{''}(\beta^{*}) = -\dfrac{n}{(\beta^{*})^{2}\,\ln^{2}(\beta^{*})} < 0$, entonces el EMV para β es $\hat{\beta} = e^{-2/\bar{X}}$.

Es fácil comprobar que el EMV para θ es $1/\bar{X}$. Así se verifica que:

$$\hat{\beta} = e^{-2/\bar{X}} = e^{-2\,\hat{\theta}}\,.$$

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Invarianza de los EMV

$$\ell(\beta) = n \ln\left(-\frac{1}{2}\ln(\beta)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i \ln(\beta) \ , \ \ 0 < \beta < 1 \, .$$

$$\ell^{'}(\beta) = \frac{n}{\beta\,\ln(\beta)} + \frac{1}{2\,\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i \, .$$

Al hacer $\ell^{'}(\beta) = 0$, se obtiene $\beta^* = e^{-\frac{2}{\bar{X}}}$. Finalmente como $\ell^{''}(\beta^*) = -\dfrac{n}{(\beta^*)^2\,\ln^2(\beta^*)} < 0$, entonces el EMV para β es $\hat{\beta} = e^{-2/\bar{X}}$.

Es fácil comprobar que el EMV para θ es $1/\bar{X}$. Así se verifica que:

$$\hat{\beta} = e^{-2/\bar{X}} = e^{-2\,\hat{\theta}} \, .$$

En resúmen, no es necesario construir la función de verosimilitud para $g(\theta)$; basta reemplazar el EMV de θ en g y así se obtiene el EMV de $g(\theta)$.