Estimación Puntual

Introducción

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución, tal que $E[X_i] = \mu$. Si μ no es conocida, una aproximación natural es el promedio muestral $\bar{X}$.

Estimación Puntual

Introducción

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución, tal que $E[X_i] = \mu$. Si μ no es conocida, una aproximación natural es el promedio muestral $\bar{X}$. Si además $Var[X_i] = \sigma^2$ también es desconocida, una aproximación natural es $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$.

Introducción

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución, tal que $E[X_i] = \mu$. Si μ no es conocida, una aproximación natural es el promedio muestral $\bar{X}$. Si además $Var[X_i] = \sigma^2$ también es desconocida, una aproximación natural es $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$.

Pero si $X_i \sim f(x \,|\, \theta)$ donde θ no representa ninguno de estos parámetros, ¿Cómo encontramos una aproximación para θ usando la información de la muestra aleatoria?

Estimación Puntual

Introducción

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución, tal que $E[X_i] = \mu$. Si μ no es conocida, una aproximación natural es el promedio muestral $\bar{X}$. Si además $Var[X_i] = \sigma^2$ también es desconocida, una aproximación natural es $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$.

Pero si $X_i \sim f(x \mid \theta)$ donde θ no representa ninguno de estos parámetros, ¿Cómo encontramos una aproximación para θ usando la información de la muestra aleatoria?

Es importante entonces proponer métodos que permitan obtener aproximaciones de los parámetros desconocidos asociados a una distribución de probabilidad, con base en la información dada por una muestra aleatoria.

Estimación Puntual

Introducción

Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución, tal que $E[X_i] = \mu$. Si μ no es conocida, una aproximación natural es el promedio muestral $\bar{X}$. Si además $Var[X_i] = \sigma^2$ también es desconocida, una aproximación natural es $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$.

Pero si $X_i \sim f(x \,|\, \theta)$ donde θ no representa ninguno de estos parámetros, ¿Cómo encontramos una aproximación para θ usando la información de la muestra aleatoria?

Es importante entonces proponer métodos que permitan obtener aproximaciones de los parámetros desconocidos asociados a una distribución de probabilidad, con base en la información dada por una muestra aleatoria. En cualquier caso, dicha aproximación, la cual será función de la muestra, será también una variable aleatoria.

Estimación Puntual

Estimador

Un *Estimador* es una regla que establece como usar la información obtenida de una muestra aleatoria para obtener una aproximación o estimación de un parámetro de interés.

Estimación Puntual

Estimador

Un *Estimador* es una regla que establece como usar la información obtenida de una muestra aleatoria para obtener una aproximación o estimación de un parámetro de interés. Si θ representa el parámetro de interés, un estimador de θ, basado en una m.a se denotará como $\hat{\theta}$.

Estimación Puntual

Estimador

Un *Estimador* es una regla que establece como usar la información obtenida de una muestra aleatoria para obtener una aproximación o estimación de un parámetro de interés. Si θ representa el parámetro de interés, un estimador de θ, basado en una m.a se denotará como $\hat{\theta}$.

Se distinguen dos tipos de estimadores: Puntuales y por Intervalos.

Estimación Puntual

Estimador

Un *Estimador* es una regla que establece como usar la información obtenida de una muestra aleatoria para obtener una aproximación o estimación de un parámetro de interés. Si θ representa el parámetro de interés, un estimador de θ, basado en una m.a se denotará como $\hat{\theta}$.

Se distinguen dos tipos de estimadores: Puntuales y por Intervalos. En el primer caso solo un valor es usado para estimar a θ; en el segundo se establece un intervalo de posibles valores para θ, donde se asume que el valor real de θ estará en dicho intervalo con una alta confianza.

Estimación Puntual

Estimador

Un *Estimador* es una regla que establece como usar la información obtenida de una muestra aleatoria para obtener una aproximación o estimación de un parámetro de interés. Si θ representa el parámetro de interés, un estimador de θ, basado en una m.a se denotará como $\hat{\theta}$.

Se distinguen dos tipos de estimadores: Puntuales y por Intervalos. En el primer caso solo un valor es usado para estimar a θ; en el segundo se establece un intervalo de posibles valores para θ, donde se asume que el valor real de θ estará en dicho intervalo con una alta confianza.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2.

Estimación Puntual

Estimador

Un *Estimador* es una regla que establece como usar la información obtenida de una muestra aleatoria para obtener una aproximación o estimación de un parámetro de interés. Si θ representa el parámetro de interés, un estimador de θ, basado en una m.a se denotará como $\hat{\theta}$.

Se distinguen dos tipos de estimadores: Puntuales y por Intervalos. En el primer caso solo un valor es usado para estimar a θ; en el segundo se establece un intervalo de posibles valores para θ, donde se asume que el valor real de θ estará en dicho intervalo con una alta confianza.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2. Varios estimadores para μ se pueden proponer:

Estimación Puntual

Estimador

Un *Estimador* es una regla que establece como usar la información obtenida de una muestra aleatoria para obtener una aproximación o estimación de un parámetro de interés. Si θ representa el parámetro de interés, un estimador de θ, basado en una m.a se denotará como $\hat{\theta}$.

Se distinguen dos tipos de estimadores: Puntuales y por Intervalos. En el primer caso solo un valor es usado para estimar a θ; en el segundo se establece un intervalo de posibles valores para θ, donde se asume que el valor real de θ estará en dicho intervalo con una alta confianza.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2. Varios estimadores para μ se pueden proponer:

$$\bar{X}\,, \quad \tilde{X} : P50 : \text{Mediana}\,, \quad \hat{\mu}_1 = \frac{min + max}{2}\,, \quad \bar{X}_{Tr(p)}\,,$$

Estimación Puntual

Estimador

Un *Estimador* es una regla que establece como usar la información obtenida de una muestra aleatoria para obtener una aproximación o estimación de un parámetro de interés. Si θ representa el parámetro de interés, un estimador de θ, basado en una m.a se denotará como $\hat{\theta}$.

Se distinguen dos tipos de estimadores: Puntuales y por Intervalos. En el primer caso solo un valor es usado para estimar a θ; en el segundo se establece un intervalo de posibles valores para θ, donde se asume que el valor real de θ estará en dicho intervalo con una alta confianza.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2. Varios estimadores para μ se pueden proponer:

$$\bar{X}\,, \quad \tilde{X} : P50 : \text{Mediana}\,, \quad \hat{\mu}_1 = \frac{min + max}{2}\,, \quad \bar{X}_{Tr(p)}\,,$$

donde $\bar{X}_{Tr(p)}$ representa el promedio del $100(1-2p)\,\%$ de los valores muestrales más centrales (elimina las colas).

Estimador

Estimadores puntuales para σ^2:

Estimación Puntual

Estimador

Estimadores puntuales para σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \;\; ; \;\; S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 ,$$

Estimador

Estimadores puntuales para σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n\ -\ 1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \ ; \ S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 ,$$

$$DM = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \tilde{X}\right)^2 \ ; \ \hat{\sigma} = \frac{1}{4}\,\text{Rango} \ .$$

Estimación Puntual

Estimador

Estimadores puntuales para σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n\ -\ 1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \ ; \ S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 ,$$

$$DM = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \tilde{X}\right)^2 \ ; \ \hat{\sigma} = \frac{1}{4}\,\text{Rango} .$$

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, a medida que el tamaño de la muestra crece, se espera que $\hat{\theta}$ esté muy cerca de θ.

Estimador

Estimadores puntuales para σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \ ; \ S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 ,$$

$$DM = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \tilde{X}\right)^2 \ ; \ \hat{\sigma} = \frac{1}{4} \text{Rango} .$$

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, a medida que el tamaño de la muestra crece, se espera que $\hat{\theta}$ esté muy cerca de θ. Debido a que los valores de $\hat{\theta}$ cambian de muestra a muestra, se tiene que:

Estimador

Estimadores puntuales para σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \ ; \ S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 ,$$

$$DM = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \tilde{X}\right)^2 \ ; \ \hat{\sigma} = \frac{1}{4}\,\text{Rango} .$$

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, a medida que el tamaño de la muestra crece, se espera que $\hat{\theta}$ esté muy cerca de θ. Debido a que los valores de $\hat{\theta}$ cambian de muestra a muestra, se tiene que:

$$\hat{\theta} = \theta + \epsilon \quad ; \quad \epsilon : \textit{Error de estimación} .$$

Estimación Puntual

Propiedades deseables de un Estimador

Se dice que un estimador puntual $\hat{\theta}$ de θ es **Insesgado** si

Propiedades deseables de un Estimador

Se dice que un estimador puntual $\hat{\theta}$ de θ es **Insesgado** si $E[\hat{\theta}] = \theta$.

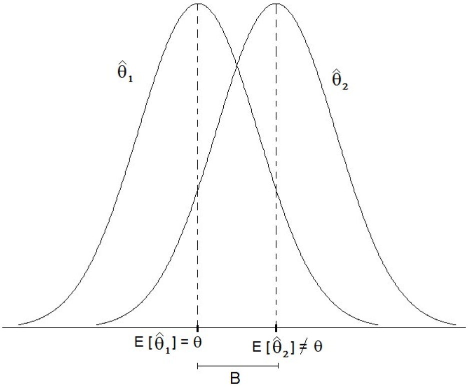
Estimación Puntual

Propiedades deseables de un Estimador

Se dice que un estimador puntual $\hat{\theta}$ de θ es **Insesgado** si $E[\hat{\theta}] = \theta$. En otro caso contrario diremos que es *Sesgado*.

Propiedades deseables de un Estimador

Se dice que un estimador puntual $\hat{\theta}$ de θ es **Insesgado** si $E[\hat{\theta}] = \theta$. En otro caso contrario diremos que es *Sesgado*. Si $\hat{\theta}$ es sesgado, el sesgo se define como: $B = E[\hat{\theta}] - \theta$.



Ejemplo 69

Suponga que $X \sim bin(n, p)$ con p desconocida.

Ejemplo 69

Suponga que $X \sim bin(n, p)$ con p desconocida. Considere los siguientes estimadores para p:

Ejemplo 69

Suponga que $X \sim bin(n, p)$ con p desconocida. Considere los siguientes estimadores para p:

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n} \quad ; \quad \hat{p}_2 = \frac{X+1}{n+1} \, .$$

Ejemplo 69

Suponga que $X \sim bin(n, p)$ con p desconocida. Considere los siguientes estimadores para p:

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n} \quad ; \quad \hat{p}_2 = \frac{X+1}{n+1} \,.$$

Ahora,

Ejemplo 69

Suponga que $X \sim bin(n, p)$ con p desconocida. Considere los siguientes estimadores para p:

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n} \quad ; \quad \hat{p}_2 = \frac{X+1}{n+1} \, .$$

Ahora,

$$E\left[\hat{p}_1\right] = \frac{1}{n} E\left[X\right] = \frac{n\,p}{n} = p \, .$$

Ejemplo 69

Suponga que $X \sim bin(n, p)$ con p desconocida. Considere los siguientes estimadores para p:

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n} \quad ; \quad \hat{p}_2 = \frac{X+1}{n+1} \, .$$

Ahora,

$$E\left[\hat{p}_1\right] = \frac{1}{n}\, E\left[X\right] = \frac{n\,p}{n} = p \, .$$

$$E\left[\hat{p}_2\right] = \frac{1}{n\,+\,1}\, E\left[X\,+\,1\right] = \frac{n\,p\,+\,1}{n\,+\,1} = \frac{n}{n\,+\,1}\, p \,+\, \frac{1}{n\,+\,1} \, .$$

Ejemplo 69

Suponga que $X \sim bin(n, p)$ con p desconocida. Considere los siguientes estimadores para p:

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n} \quad ; \quad \hat{p}_2 = \frac{X+1}{n+1} \, .$$

Ahora,

$$E\left[\hat{p}_1\right] = \frac{1}{n} \, E\left[X\right] = \frac{n\,p}{n} = p \, .$$

$$E\left[\hat{p}_2\right] = \frac{1}{n \, + \, 1} \, E\left[X \, + \, 1\right] = \frac{n\,p \, + \, 1}{n \, + \, 1} = \frac{n}{n \, + \, 1} \, p \, + \, \frac{1}{n \, + \, 1} \, .$$

$\hat{p}_1$ es insesgado para p y $\hat{p}_2$ no es insesgado para p.

Estimación Puntual

Ejemplo 69

Suponga que $X \sim bin(n, p)$ con p desconocida. Considere los siguientes estimadores para p:

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n} \quad ; \quad \hat{p}_2 = \frac{X+1}{n+1} \,.$$

Ahora,

$$E\left[\hat{p}_1\right] = \frac{1}{n}\, E\left[X\right] = \frac{n\,p}{n} = p \,.$$

$$E\left[\hat{p}_2\right] = \frac{1}{n\,+\,1}\, E\left[X\,+\,1\right] = \frac{n\,p\,+\,1}{n\,+\,1} = \frac{n}{n\,+\,1}\, p\,+\,\frac{1}{n\,+\,1} \,.$$

$\hat{p}_1$ es insesgado para p y $\hat{p}_2$ no es insesgado para p.

El sesgo de $\hat{p}_2$ está dado por: $B = E\left[\hat{p}_2\right] - p = \dfrac{1-p}{n+1}$.

Ejemplo 69

Suponga que $X \sim bin(n, p)$ con p desconocida. Considere los siguientes estimadores para p:

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n} \quad ; \quad \hat{p}_2 = \frac{X+1}{n+1} \, .$$

Ahora,

$$E\left[\hat{p}_1\right] = \frac{1}{n} \, E\left[X\right] = \frac{n\,p}{n} = p \, .$$

$$E\left[\hat{p}_2\right] = \frac{1}{n\,+\,1} \, E\left[X\,+\,1\right] = \frac{n\,p\,+\,1}{n\,+\,1} = \frac{n}{n\,+\,1} \, p\,+\,\frac{1}{n\,+\,1} \, .$$

$\hat{p}_1$ es insesgado para p y $\hat{p}_2$ no es insesgado para p.

El sesgo de $\hat{p}_2$ está dado por: $B = E\left[\hat{p}_2\right] - p = \dfrac{1-p}{n+1}$. En este caso el mejor estimador para p sería $\hat{p}_1$.

Ejemplo 70

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2, entonces $\bar{X}$ y S^2 son estimadores insesgados para μ y σ^2 respectivamente.

Ejemplo 70

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2, entonces $\bar{X}$ y S^2 son estimadores insesgados para μ y σ^2 respectivamente. En efecto:

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\,\mu}{n} = \mu\,.$$

Ejemplo 70

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2, entonces $\bar{X}$ y S^2 son estimadores insesgados para μ y σ^2 respectivamente. En efecto:

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\,\mu}{n} = \mu\,.$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\,X_i\,\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{X}^2\,.$$

Ejemplo 70

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2, entonces $\bar{X}$ y S^2 son estimadores insesgados para μ y σ^2 respectivamente. En efecto:

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{n\,\mu}{n} = \mu\,.$$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2\,X_i\,\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{X}^2\,.$$

Así

Ejemplo 70

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2, entonces $\bar{X}$ y S^2 son estimadores insesgados para μ y σ^2 respectivamente. En efecto:

$$E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{n\,\mu}{n} = \mu\,.$$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2\,X_i\,\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{X}^2\,.$$

Así

$$E\left[S^2\right] = \frac{1}{n-1}\,E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{X}^2\right] = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^2\right] - n\,E\left[\bar{X}^2\right]\right)$$

Estimación Puntual

Como:

Estimación Puntual

Como:

$$E\left[X_i^2\right] = Var\left[X_i\right] + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 \quad \text{y} \quad E\left[\bar{X}^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \ .$$

Estimación Puntual

Como:

$$E\left[X_i^2\right] = Var\left[X_i\right] + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 \quad \text{y} \quad E\left[\bar{X}^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 .$$

Entonces:

Como:

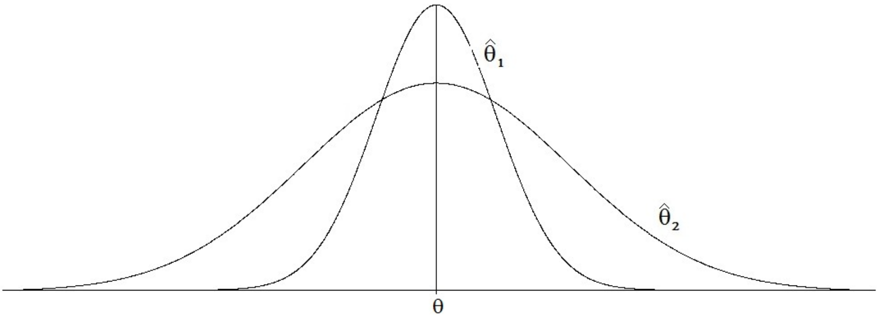
$$E\left[X_i^2\right] = Var\left[X_i\right] + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 \quad \text{y} \quad E\left[\bar{X}^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \, .$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E\left[S^2\right] &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\mu^2+\sigma^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2\right) = \frac{(n-1)\,\sigma^2}{n-1} = \sigma^2 \, . \end{aligned}$$

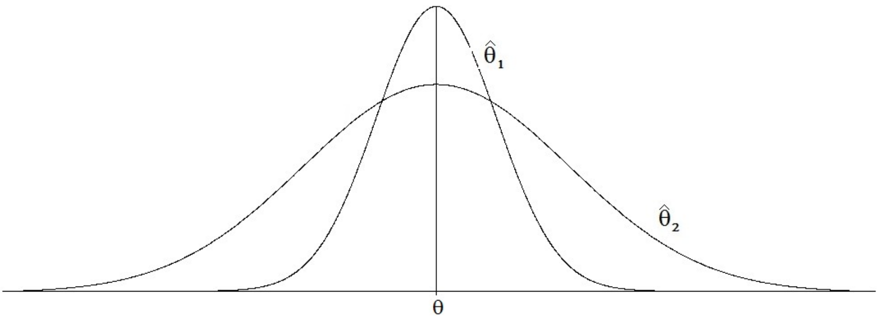
Entre dos estimadores insesgados para un parámetro θ, se prefiere aquel con menor varianza.

Estimación Puntual



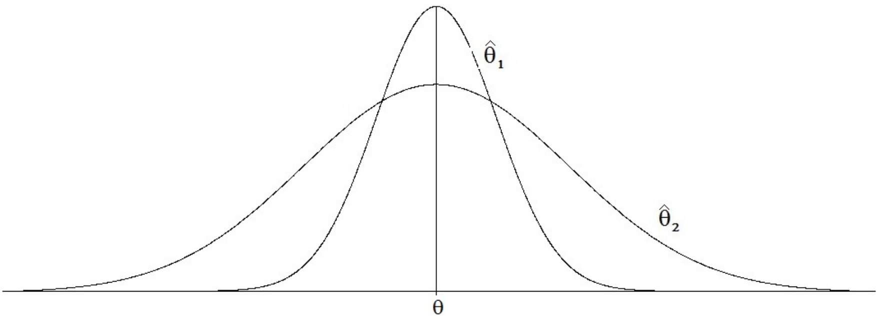
Del gráfico se deduce que ambos estimadores para θ son insesgados.

Estimación Puntual



Del gráfico se deduce que ambos estimadores para θ son insesgados. También se evidencia que $Var\left[\hat{\theta}_1\right] < Var\left[\hat{\theta}_2\right]$ y entonces $\hat{\theta}_1$ es mejor estimador de θ que $\hat{\theta}_2$.

Estimación Puntual



Del gráfico se deduce que ambos estimadores para θ son insesgados. También se evidencia que $Var\left[\hat{\theta}_1\right] < Var\left[\hat{\theta}_2\right]$ y entonces $\hat{\theta}_1$ es mejor estimador de θ que $\hat{\theta}_2$.

De todos los estimadores insesgados para un parámetro θ, el de menor varianza es llamado: **Estimador Insesgado de Mínima Varianza** (MVUE).

Ejemplo 71

Sea $X_1, \ldots, X_n$, con $n \geq 4$, una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2 conocida.

Ejemplo 71

Sea $X_1, \ldots, X_n$, con $n \geq 4$, una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2 conocida. Considere los siguientes estimadores para μ:

Ejemplo 71

Sea $X_1, \ldots, X_n$, con $n \geq 4$, una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2 conocida. Considere los siguientes estimadores para μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_n}{3} \quad \text{y} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2\,X_1 - X_n + 2\,X_4 + X_{10}}{4}\,.$$

Ejemplo 71

Sea $X_1, \ldots, X_n$, con $n \geq 4$, una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2 conocida. Considere los siguientes estimadores para μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_n}{3} \quad \text{y} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2\,X_1 - X_n + 2\,X_4 + X_{10}}{4}\,.$$

$$E\left[\hat{\mu}_1\right] = \frac{1}{3}\,E\left[X_1 + X_2 + X_n\right] = \frac{\mu + \mu + \mu}{3} = \mu$$

$$E\left[\hat{\mu}_2\right] = \frac{1}{4}\,E\left[2X_1 - X_n + 2X_4 + X_{10}\right] = \frac{1}{4}\left(2\mu - \mu + 2\mu + \mu\right) = \mu$$

$$Var\left[\hat{\mu}_1\right] = \frac{1}{9}\,Var\left[X_1 + X_2 + X_n\right] = \frac{1}{9}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2\right) = \sigma^2/3$$

$$\begin{aligned} Var\left[\hat{\mu}_2\right] &= \frac{1}{16}\,Var\left[2X_1 - X_n + 2X_4 + X_{10}\right] \\ &= \frac{1}{16}\,\left(4\,\sigma^2 + \sigma^2 + 4\,\sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{5}{8}\,\sigma^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 71

Sea $X_1, \ldots, X_n$, con $n \geq 4$, una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2 conocida. Considere los siguientes estimadores para μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_n}{3} \quad \text{y} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2\,X_1 - X_n + 2\,X_4 + X_{10}}{4}\,.$$

$$\begin{aligned}
E\left[\hat{\mu}_1\right] &= \frac{1}{3}\,E\left[X_1 + X_2 + X_n\right] = \frac{\mu + \mu + \mu}{3} = \mu \\
E\left[\hat{\mu}_2\right] &= \frac{1}{4}\,E\left[2X_1 - X_n + 2X_4 + X_{10}\right] = \frac{1}{4}\left(2\mu - \mu + 2\mu + \mu\right) = \mu \\
Var\left[\hat{\mu}_1\right] &= \frac{1}{9}\,Var\left[X_1 + X_2 + X_n\right] = \frac{1}{9}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2\right) = \sigma^2/3 \\
Var\left[\hat{\mu}_2\right] &= \frac{1}{16}\,Var\left[2X_1 - X_n + 2X_4 + X_{10}\right] \\
&= \frac{1}{16}\,\left(4\,\sigma^2 + \sigma^2 + 4\,\sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{5}{8}\,\sigma^2
\end{aligned}$$

Dado que $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$, son insesgados y que $Var\left[\hat{\mu}_1\right] < Var\left[\hat{\mu}_2\right]$, entonces $\hat{\mu}_1$ es mejor estimador para μ que $\hat{\mu}_2$.

Teorema 6

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$. Entonces, $\bar{X}$ es el MVUE para μ.

Estimación Puntual

Teorema 6

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$. Entonces, $\bar{X}$ es el MVUE para μ.

Definición

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, el *Error Estándar* de $\hat{\theta}$ será su desviación estándar, es decir, $\sqrt{Var[\hat{\theta}]}$.

Estimación Puntual

Teorema 6

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$. Entonces, $\bar{X}$ es el MVUE para μ.

Definición

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, el *Error Estándar* de $\hat{\theta}$ será su desviación estándar, es decir, $\sqrt{Var[\hat{\theta}]}$.

Si $Var[\hat{\theta}]$ depende de algún otro parámetro desconocido, éste debe ser estimado previamente y así, se obtiene una estimación del error estándar de $\hat{\theta}$.

Estimación Puntual

Teorema 6

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$. Entonces, $\bar{X}$ es el MVUE para μ.

Definición

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, el *Error Estándar* de $\hat{\theta}$ será su desviación estándar, es decir, $\sqrt{Var[\hat{\theta}]}$.

Si $Var[\hat{\theta}]$ depende de algún otro parámetro desconocido, éste debe ser estimado previamente y así, se obtiene una estimación del error estándar de $\hat{\theta}$. Al error estándar de $\hat{\theta}$ se le suele denotar $\sigma_{\hat{\theta}}$ ó $S_{\hat{\theta}}$, cuando se deba realizar previamente alguna estimación.

Estimación Puntual

Teorema 6

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$. Entonces, $\bar{X}$ es el MVUE para μ.

Definición

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, el *Error Estándar* de $\hat{\theta}$ será su desviación estándar, es decir, $\sqrt{Var[\hat{\theta}]}$.

Si $Var[\hat{\theta}]$ depende de algún otro parámetro desconocido, éste debe ser estimado previamente y así, se obtiene una estimación del error estándar de $\hat{\theta}$. Al error estándar de $\hat{\theta}$ se le suele denotar $\sigma_{\hat{\theta}}$ ó $S_{\hat{\theta}}$, cuando se deba realizar previamente alguna estimación.

Para una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2, se tiene que un estimador insesgado para μ es $\bar{X}$, cuya varianza es $\frac{\sigma^2}{n}$.

Estimación Puntual

Teorema 6

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$. Entonces, $\bar{X}$ es el MVUE para μ.

Definición

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, el *Error Estándar* de $\hat{\theta}$ será su desviación estándar, es decir, $\sqrt{Var[\hat{\theta}]}$.

Si $Var[\hat{\theta}]$ depende de algún otro parámetro desconocido, éste debe ser estimado previamente y así, se obtiene una estimación del error estándar de $\hat{\theta}$. Al error estándar de $\hat{\theta}$ se le suele denotar $\sigma_{\hat{\theta}}$ ó $S_{\hat{\theta}}$, cuando se deba realizar previamente alguna estimación.

Para una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2, se tiene que un estimador insesgado para μ es $\bar{X}$, cuya varianza es $\frac{\sigma^2}{n}$. Así, el error estándar de $\bar{X}$, está dado por $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Estimación Puntual

Teorema 6

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$. Entonces, $\bar{X}$ es el MVUE para μ.

Definición

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, el *Error Estándar* de $\hat{\theta}$ será su desviación estándar, es decir, $\sqrt{Var[\hat{\theta}]}$.

Si $Var[\hat{\theta}]$ depende de algún otro parámetro desconocido, éste debe ser estimado previamente y así, se obtiene una estimación del error estándar de $\hat{\theta}$. Al error estándar de $\hat{\theta}$ se le suele denotar $\sigma_{\hat{\theta}}$ ó $S_{\hat{\theta}}$, cuando se deba realizar previamente alguna estimación.

Para una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2, se tiene que un estimador insesgado para μ es $\bar{X}$, cuya varianza es $\frac{\sigma^2}{n}$. Así, el error estándar de $\bar{X}$, está dado por $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si σ es desconocida puede ser estimada usando la desviación estándar muestral S.

Estimación Puntual

Teorema 6

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $n(\mu, \sigma^2)$. Entonces, $\bar{X}$ es el MVUE para μ.

Definición

Si $\hat{\theta}$ es una estimador de θ, el *Error Estándar* de $\hat{\theta}$ será su desviación estándar, es decir, $\sqrt{Var[\hat{\theta}]}$.

Si $Var[\hat{\theta}]$ depende de algún otro parámetro desconocido, éste debe ser estimado previamente y así, se obtiene una estimación del error estándar de $\hat{\theta}$. Al error estándar de $\hat{\theta}$ se le suele denotar $\sigma_{\hat{\theta}}$ ó $S_{\hat{\theta}}$, cuando se deba realizar previamente alguna estimación.

Para una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2, se tiene que un estimador insesgado para μ es $\bar{X}$, cuya varianza es $\frac{\sigma^2}{n}$. Así, el error estándar de $\bar{X}$, está dado por $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si σ es desconocida puede ser estimada usando la desviación estándar muestral S. Así, el error estándar estimado para $\bar{X}$ está dado por $S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Ejemplo 72

Suponga que $X \sim bin(n, p)$, con p desconocido.

Ejemplo 72

Suponga que $X \sim bin(n, p)$, con p desconocido. Un estimador para p está dado por $\hat{p} = \frac{X}{n}$.

Ejemplo 72

Suponga que $X \sim bin(n,\, p)$, con p desconocido. Un estimador para p está dado por $\hat{p} = \frac{X}{n}$. Ahora, $Var[\hat{p}] = \frac{p\,(1-p)}{n}$.

Ejemplo 72

Suponga que $X \sim bin(n,\, p)$, con p desconocido. Un estimador para p está dado por $\hat{p} = \frac{X}{n}$. Ahora, $Var[\hat{p}] = \frac{p\,(1-p)}{n}$. Como p es desconocido, puede usarse $\hat{p}$ para obtener una estimación de la varianza de $\hat{p}$.

Ejemplo 72

Suponga que $X \sim bin(n, p)$, con p desconocido. Un estimador para p está dado por $\hat{p} = \frac{X}{n}$. Ahora, $Var[\hat{p}] = \frac{p(1-p)}{n}$. Como p es desconocido, puede usarse $\hat{p}$ para obtener una estimación de la varianza de $\hat{p}$. De esta manera la varianza de $\hat{p}$ puede ser estimada por:

$$\hat{Var}[\hat{p}] = S_{\hat{p}}^2 = \frac{\frac{X}{n}\left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n} .$$

Ejemplo 72

Suponga que $X \sim bin(n,\, p)$, con p desconocido. Un estimador para p está dado por $\hat{p} = \frac{X}{n}$. Ahora, $Var[\hat{p}] = \frac{p\,(1-p)}{n}$. Como p es desconocido, puede usarse $\hat{p}$ para obtener una estimación de la varianza de $\hat{p}$. De esta manera la varianza de $\hat{p}$ puede ser estimada por:

$$\hat{Var}[\hat{p}] = S_{\hat{p}}^2 = \frac{\frac{X}{n}\,\left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}\ .$$

Finalmente el error estándar estimado de $\hat{p}$ se obtiene como

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{Var}[\hat{p}]} = \sqrt{\frac{\frac{X}{n}\,\left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}}\ .$$

Ejemplo 72

Suponga que $X \sim bin(n, p)$, con p desconocido. Un estimador para p está dado por $\hat{p} = \frac{X}{n}$. Ahora, $Var[\hat{p}] = \frac{p\,(1-p)}{n}$. Como p es desconocido, puede usarse $\hat{p}$ para obtener una estimación de la varianza de $\hat{p}$. De esta manera la varianza de $\hat{p}$ puede ser estimada por:

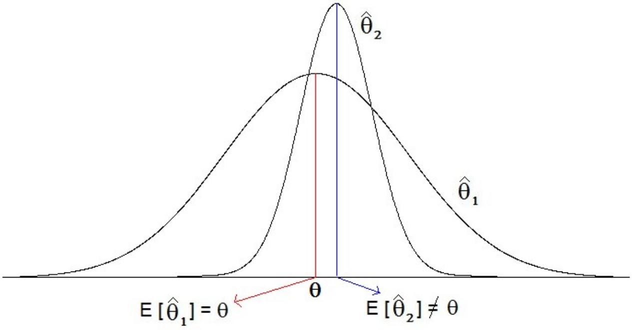
$$\hat{Var}[\hat{p}] = S^2_{\hat{p}} = \frac{\frac{X}{n}\,\left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}\ .$$

Finalmente el error estándar estimado de $\hat{p}$ se obtiene como

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{Var}[\hat{p}]} = \sqrt{\frac{\frac{X}{n}\,\left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}}\ .$$

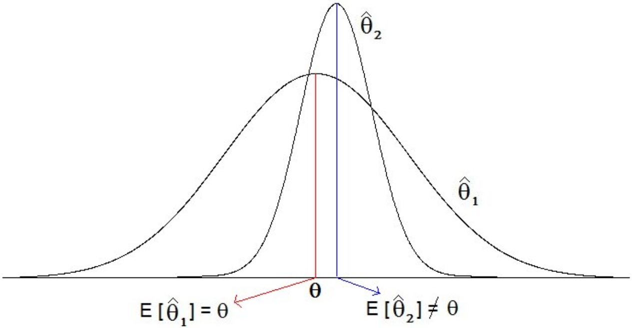
Observe que $Var\,[\hat{p}]$ es máxima cuando $p = 1/2$.

Estimación Puntual



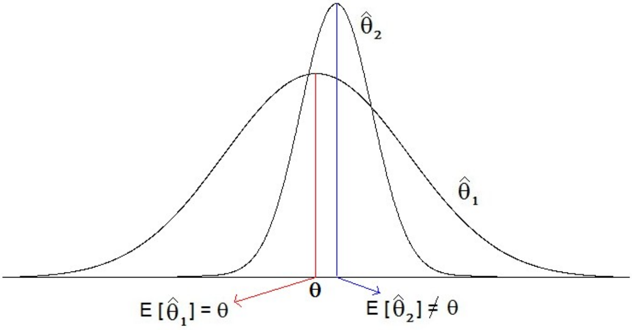
El gráfico anterior plantea una situación que es importante tener en cuenta.

Estimación Puntual



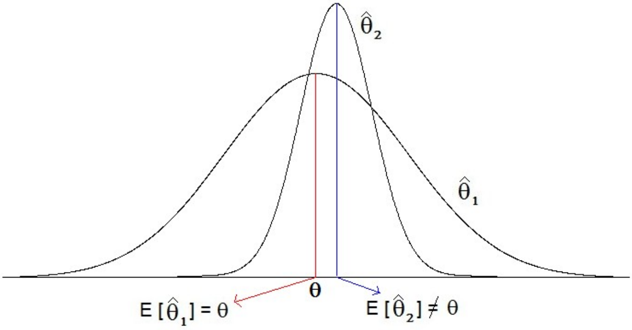
El gráfico anterior plantea una situación que es importante tener en cuenta. Observque que $\hat{\theta}_1$ es insesgado y $\hat{\theta}_2$ es sesgado. Sinembargo $Var[\hat{\theta}_1] > Var[\hat{\theta}_2]$.

Estimación Puntual



El gráfico anterior plantea una situación que es importante tener en cuenta. Observque que $\hat{\theta}_1$ es insesgado y $\hat{\theta}_2$ es sesgado. Sinembargo $Var[\hat{\theta}_1] > Var[\hat{\theta}_2]$. En este punto el problema radica en elegir el mejor estimador, por ser insesgado, o el mejor estimador por tener la varianza más pequeña.

Estimación Puntual



El gráfico anterior plantea una situación que es importante tener en cuenta. Observque que $\hat{\theta}_1$ es insesgado y $\hat{\theta}_2$ es sesgado. Sinembargo $Var[\hat{\theta}_1] > Var[\hat{\theta}_2]$. En este punto el problema radica en elegir el mejor estimador, por ser insesgado, o el mejor estimador por tener la varianza más pequeña. ¿Qué hacer en este caso?

Error Cuadrado Medio (ECM)

Una medida más general para comparar un par de estimadores arbitrarios de θ es el *Error Cuadrado Medio* (ECM), el cual se define como:

Estimación Puntual

Error Cuadrado Medio (ECM)

Una medida más general para comparar un par de estimadores arbitrarios de θ es el *Error Cuadrado Medio* (ECM), el cual se define como:

$$ECM\left[\hat{\theta}\right] = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] \, .$$

Estimación Puntual

Error Cuadrado Medio (ECM)

Una medida más general para comparar un par de estimadores arbitrarios de θ es el *Error Cuadrado Medio* (ECM), el cual se define como:

$$ECM\left[\hat{\theta}\right] = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] .$$

Es fácil verificar que $ECM\left[\hat{\theta}\right] = Var\left[\hat{\theta}\right] + B^2$.

Error Cuadrado Medio (ECM)

Una medida más general para comparar un par de estimadores arbitrarios de θ es el *Error Cuadrado Medio* (ECM), el cual se define como:

$$ECM\left[\hat{\theta}\right] = E\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right].$$

Es fácil verificar que $ECM\left[\hat{\theta}\right] = Var\left[\hat{\theta}\right] + B^2$. Entre dos estimadores para un parámetro θ se elige aquel con menor ECM.

Ejemplo 73

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media θ y varianza σ^2.

Error Cuadrado Medio (ECM)

Una medida más general para comparar un par de estimadores arbitrarios de θ es el *Error Cuadrado Medio* (ECM), el cual se define como:

$$ECM\left[\hat{\theta}\right] = E\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right].$$

Es fácil verificar que $ECM\left[\hat{\theta}\right] = Var\left[\hat{\theta}\right] + B^2$. Entre dos estimadores para un parámetro θ se elige aquel con menor ECM.

Ejemplo 73

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media θ y varianza σ^2. Considere dos estimadores de θ, dados por:

Error Cuadrado Medio (ECM)

Una medida más general para comparar un par de estimadores arbitrarios de θ es el *Error Cuadrado Medio* (ECM), el cual se define como:

$$ECM\left[\hat{\theta}\right] = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right].$$

Es fácil verificar que $ECM\left[\hat{\theta}\right] = Var\left[\hat{\theta}\right] + B^2$. Entre dos estimadores para un parámetro θ se elige aquel con menor ECM.

Ejemplo 73

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media θ y varianza σ^2. Considere dos estimadores de θ, dados por:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{4\,X_1 + X_n}{5} \quad \text{y} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}.$$

Error Cuadrado Medio (ECM)

Una medida más general para comparar un par de estimadores arbitrarios de θ es el *Error Cuadrado Medio* (ECM), el cual se define como:

$$ECM\left[\hat{\theta}\right] = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] .$$

Es fácil verificar que $ECM\left[\hat{\theta}\right] = Var\left[\hat{\theta}\right] + B^2$. Entre dos estimadores para un parámetro θ se elige aquel con menor ECM.

Ejemplo 73

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media θ y varianza σ^2. Considere dos estimadores de θ, dados por:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{4\,X_1 + X_n}{5} \quad \text{y} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10} .$$

¿Cuál de los dos es mejor estimador para θ?

Estimación Puntual

Solución

Observe que:

Solución

Observe que:

$$E\left[\hat{\theta}_1\right] = E\left[\frac{4\,X_1 + X_n}{5}\right] = \frac{1}{5}\,\{4\,E[X_1] + E[X_n]\} = \frac{4\,\theta + \theta}{5} = \theta\ .$$

Solución

Observe que:

$$E\left[\hat{\theta}_1\right] = E\left[\frac{4\,X_1 + X_n}{5}\right] = \frac{1}{5}\,\{4\,E[X_1] + E[X_n]\} = \frac{4\,\theta + \theta}{5} = \theta\,.$$

$$E\left[\hat{\theta}_2\right] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + 3\,E[X_n]}{10} = \frac{\theta}{2}\,.$$

Estimación Puntual

Solución

Observe que:

$$E\left[\hat{\theta}_1\right] = E\left[\frac{4\,X_1 + X_n}{5}\right] = \frac{1}{5}\,\{4\,E[X_1] + E[X_n]\} = \frac{4\,\theta + \theta}{5} = \theta\ .$$

$$E\left[\hat{\theta}_2\right] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + 3\,E[X_n]}{10} = \frac{\theta}{2}\ .$$

Así, $\hat{\theta}_1$ es Insesgado para θ y $\hat{\theta}_2$ es sesgado.

Solución

Observe que:

$$E\left[\hat{\theta}_1\right] = E\left[\frac{4\,X_1 + X_n}{5}\right] = \frac{1}{5}\,\{4\,E[X_1] + E[X_n]\} = \frac{4\,\theta + \theta}{5} = \theta\;.$$

$$E\left[\hat{\theta}_2\right] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + 3\,E[X_n]}{10} = \frac{\theta}{2}\;.$$

Así, $\hat{\theta}_1$ es Insesgado para θ y $\hat{\theta}_2$ es sesgado. El sesgo de $\hat{\theta}_1$ es cero y el sesgo de $\hat{\theta}_2$ es: $B_2 = E\left[\hat{\theta}_2\right] - \theta = -\frac{\theta}{2}$.

Solución

Observe que:

$$E\left[\hat{\theta}_1\right] = E\left[\frac{4\,X_1 + X_n}{5}\right] = \frac{1}{5}\,\{4\,E[X_1] + E[X_n]\} = \frac{4\,\theta + \theta}{5} = \theta\,.$$

$$E\left[\hat{\theta}_2\right] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + 3\,E[X_n]}{10} = \frac{\theta}{2}\,.$$

Así, $\hat{\theta}_1$ es Insesgado para θ y $\hat{\theta}_2$ es sesgado. El sesgo de $\hat{\theta}_1$ es cero y el sesgo de $\hat{\theta}_2$ es: $B_2 = E\left[\hat{\theta}_2\right] - \theta = -\frac{\theta}{2}$.

$$\begin{aligned} Var\left[\hat{\theta}_1\right] &= Var\left[\frac{4\,X_1 + X_n}{5}\right] = \frac{1}{5^2}\,\{16\,Var[X_1] + Var[X_n]\} \\ &= \frac{1}{25}\,\left\{16\,\sigma^2 + \sigma^2\right\} = \frac{17}{25}\,\sigma^2\,. \end{aligned}$$

Estimación Puntual

$$Var\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{1}{100}\ \left\{\sigma^2 + \sigma^2 + 9\,\sigma^2\right\} = \frac{11}{100}\,\sigma^2\ .$$

Finalmente se obtienen los respectivos ECM para ambos estimadores:

Estimación Puntual

$$Var\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{1}{100}\,\left\{\sigma^2 + \sigma^2 + 9\,\sigma^2\right\} = \frac{11}{100}\,\sigma^2\,.$$

Finalmente se obtienen los respectivos ECM para ambos estimadores:

$$ECM\left[\hat{\theta}_1\right] = Var\left[\hat{\theta}_1\right] + B_1^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2 + 0^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2\,.$$

$$Var\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{1}{100}\ \left\{\sigma^2 + \sigma^2 + 9\,\sigma^2\right\} = \frac{11}{100}\,\sigma^2\ .$$

Finalmente se obtienen los respectivos ECM para ambos estimadores:

$$ECM\left[\hat{\theta}_1\right] = Var\left[\hat{\theta}_1\right] + B_1^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2 + 0^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2\ .$$

$$ECM\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\hat{\theta}_2\right] + B_2^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \left(-\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \frac{\theta^2}{4}\ .$$

Estimación Puntual

$$Var\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{1}{100}\ \left\{\sigma^2 + \sigma^2 + 9\,\sigma^2\right\} = \frac{11}{100}\,\sigma^2\ .$$

Finalmente se obtienen los respectivos ECM para ambos estimadores:

$$ECM\left[\hat{\theta}_1\right] = Var\left[\hat{\theta}_1\right] + B_1^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2 + 0^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2\ .$$

$$ECM\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\hat{\theta}_2\right] + B_2^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \left(-\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \frac{\theta^2}{4}\ .$$

Si se desea que $\hat{\theta}_2$ sea mejor estimador que $\hat{\theta}_1$, se requiere que $ECM\left[\hat{\theta}_2\right] < ECM\left[\hat{\theta}_1\right]$.

Estimación Puntual

$$Var\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{1}{100}\;\left\{\sigma^2 + \sigma^2 + 9\,\sigma^2\right\} = \frac{11}{100}\,\sigma^2\,.$$

Finalmente se obtienen los respectivos ECM para ambos estimadores:

$$ECM\left[\hat{\theta}_1\right] = Var\left[\hat{\theta}_1\right] + B_1^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2 + 0^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2\,.$$

$$ECM\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\hat{\theta}_2\right] + B_2^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \left(-\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \frac{\theta^2}{4}\,.$$

Si se desea que $\hat{\theta}_2$ sea mejor estimador que $\hat{\theta}_1$, se requiere que $ECM\left[\hat{\theta}_2\right] < ECM\left[\hat{\theta}_1\right]$. Esto equivale a resolver la desigualdad:

Estimación Puntual

$$Var\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{1}{100}\ \left\{\sigma^2 + \sigma^2 + 9\,\sigma^2\right\} = \frac{11}{100}\,\sigma^2\ .$$

Finalmente se obtienen los respectivos ECM para ambos estimadores:

$$ECM\left[\hat{\theta}_1\right] = Var\left[\hat{\theta}_1\right] + B_1^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2 + 0^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2\ .$$

$$ECM\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\hat{\theta}_2\right] + B_2^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \left(-\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \frac{\theta^2}{4}\ .$$

Si se desea que $\hat{\theta}_2$ sea mejor estimador que $\hat{\theta}_1$, se requiere que $ECM\left[\hat{\theta}_2\right] < ECM\left[\hat{\theta}_1\right]$. Esto equivale a resolver la desigualdad:

$$\frac{11}{100}\,\sigma^2 + \frac{\theta^2}{4} < \frac{17}{25}\,\sigma^2\ .$$

Estimación Puntual

$$Var\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + 3\,X_n}{10}\right] = \frac{1}{100}\ \left\{\sigma^2 + \sigma^2 + 9\,\sigma^2\right\} = \frac{11}{100}\,\sigma^2\ .$$

Finalmente se obtienen los respectivos ECM para ambos estimadores:

$$ECM\left[\hat{\theta}_1\right] = Var\left[\hat{\theta}_1\right] + B_1^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2 + 0^2 = \frac{17}{25}\,\sigma^2\ .$$

$$ECM\left[\hat{\theta}_2\right] = Var\left[\hat{\theta}_2\right] + B_2^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \left(-\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{11}{100}\,\sigma^2 + \frac{\theta^2}{4}\ .$$

Si se desea que $\hat{\theta}_2$ sea mejor estimador que $\hat{\theta}_1$, se requiere que $ECM\left[\hat{\theta}_2\right] < ECM\left[\hat{\theta}_1\right]$. Esto equivale a resolver la desigualdad:

$$\frac{11}{100}\,\sigma^2 + \frac{\theta^2}{4} < \frac{17}{25}\,\sigma^2\ .$$

Al resolver esta desigualdad se encuentra que $\hat{\theta}_2$ es mejor estimador que $\hat{\theta}_1$ si

$$\theta \in \left(-\frac{\sqrt{57}}{5}\,\sigma,\ \frac{\sqrt{57}}{5}\,\sigma\right)\ .$$