Permutações e Combinações

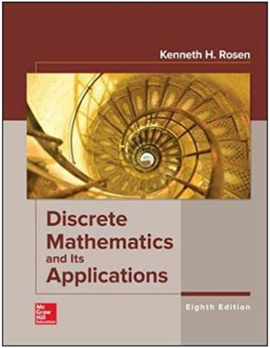
André Gustavo dos Santos[1]

[1] Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF230 - 2021/1

Conteúdo

Os slides seguintes são baseados nas seções 6.3 e 6.5 do livro texto da disciplina:



ROSEN, Kenneth H.
Discrete mathematics and its applications.
McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018

Introdução

- Muitos problemas de contagem envolvem o número de maneiras de se organizar um número específico de elementos distintos de um conjunto de tamanho definido
- Em alguns casos a ordem é relevante; em outros não
- Exemplos:
  - De quantas formas podemos escollher 3 estudantes de um grupo de 5 para ficarem em fila para uma foto?
  - Quantos comitês diferentes de 3 estudantes podem ser formados escolhidos de um grupo de 4 estudantes?

Permutações - exemplos

Fila para foto

De quantas formas podemos escollher 3 estudantes de um grupo de 5 para ficarem em fila para uma foto?

Há 5 opções para o primeiro da fila, para cada uma deles há 4 para o segundo, e depois 3 para o terceiro. Pela regra do produto, $5 \times 4 \times 3 = 60$**.**

Fila para foto II

De quantas formas podemos organizar todos os 5 estudantes em fila para uma foto?

De forma análoga ao anterior, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$**.**

Permutações - definições

Permutação

Uma **permutação** de um conjunto de objetos distintos é um arranjo ordenado desses objetos

***r*-Permutação**

Uma **r-permutação** de um conjunto de objetos distintos é um arranjo ordenado de r desses objetos

Exemplo

Seja $S = \{a, b, c\}$

- As permutações de S são: a, b, c; a, c, b; b, a, c; b, c, a; c, a, b; c, b, a
- As 2-permutações de S são: a, b; a, c; b, a; b, c; c, a; c, b

Permutações - fórmulas

- O número de r-permutações de um conjunto com n elementos é denotado $P(n, r)$
- A fórmula para $P(n, r)$ pode ser encontrada pela regra do produto

Teorema:1

Se n é um inteiro positivo e r um inteiro positivo com $1 \leq r \leq n$, então há

$$P(n, r) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

r-permutações de um conjunto de n elementos.

Obs.: note que $P(n, 0) = 1$ *para n inteiro não negativo*

Corolário 1

Se n e r são inteiros com $0 \leq r \leq n$ então $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

UFV

Permutações - exemplos

Concurso

De quantas maneiras podemos escolher o primeiro, o segundo e o terceiro lugar de um concurso com 100 candidatos?

$P(100, 3) = 100 \times 99 \times 98 = 970200.$

Corrida

Uma corrida tem 10 atletas. O vencedor recebe medalha de ouro, o segundo lugar recebe medalha de prata e o terceiro lugar medalha de bronze. De quantas maneiras diferentes essas medalhas podem ser distribuídas considetando todos os resultados possíveis e sem empate?

$P(10, 3) = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

Permutações - exemplos

Vendedor

Um vendedor deve visitar 8 cidades diferentes. Ele deve começar em uma delas mas as demais 7 podem ser visitadas em qualquer ordem. Quantas ordens são possíveis?

Como a primeira é fixa, ele pode permutar as demais: $P(7,7) = \frac{7!}{0!} = 5040$**.**

Letras

Quantas permutações das letras ABCDEFGH contêm a sequência ABC?

Consideramos ABC como um bloco único e permutamos 6 objetos, o bloco ABC e as letras individuais D, E, F, G, H: $P(6,6) = \frac{6!}{0!} = 720$**.**

Combinações - exemplo

Comitês

Quantos comitês diferentes de 3 estudantes podem ser formados escolhidos de um grupo de 4 estudantes?

A ordem não importa, então não podemos simplesmente aplicar a regra do produto. Note que escolher 3 estudantes para o comitê é o mesmo que escolher 1 para ficar de fora, então são 4 comitês diferentes.

Combinações - definições

r-Combinação

Uma **r-combinação** de um conjunto de objetos distintos é uma seleção não ordenada de r desses objetos

Exemplo

Seja $S = \{a, b, c, d\}$

- As 3-combinações de S são: a, b, c; a, b, d; a, c, d; b, c, d
- As 2-permutações de S são: a, b; a, c; a, d; b, c; b, d; c, d

Combinações - fórmulas

- O número de r-combinações de um conjunto com n elementos é denotado $C(n, r)$
- Também pode ser denotado por $\binom{n}{r}$, chamado coeficiente binomial
- Como a ordem não importa e há $P(r, r)$ maneiras de ordenar os elementos de uma r-combinação, cada uma das $C(n, r)$ r-combinações corresponde a $P(r, r)$ r-permutações. Pela regra da divisão, $C(n, r) = P(n, r)/P(r, r)$.

Teorema 2

Se n e r são inteiros com $0 \leq r \leq n$ então $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

- Como $n!$ cresce muito com o valor de n, para evitar overflow podemos usar:

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots()n-r+1)}{r!}$$

Corolário 2

Se n e r são inteiros com $0 \leq r \leq n$ então $C(n, r) = C(n, n-r)$

Combinações - exemplos

Baralho

Quantas mãos de pôquer de cinco cartas são possíveis em um baralho de 52 cartas?

A ordem na mão não importa, então são $C(52,5) = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2598960.$

Baralho II

Quantas formas de selecionar 47 cartas de um baralho de 52 cartas são possíveis?

Selecionar 47 cartas de 52 é o mesmo que selecionar 5 para ficar de fora: $C(52,47) = C(52,5) = 2598960.$

Combinações - exemplos

Time de basquete

De quantas maneiras podemos escolher 5 jogadores de um time de basquete entre os 10 membros do time?

A ordem não importa, então são $C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$.

Bitstring

Quantas cadeias de n bits possuem exatamente r bits 1?

As posições dos bits 1 formam uma r-combinação do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, portanto são $C(n, r)$.

Generalizações

- Em muitos problemas de contagem os elementos podem ser usados repetidamente
- Exemplos
  - Letras podem ser repetidas em placas de automóveis
  - Bombons podem aparecer repetidos em caixas de bombons sortidos
- Permutações e combinações devem então ser generalizadas considerando repetição

Permutações com repetição - exemplo

Senhas

Quantas senhas diferentes de letras minúsculas de tamanho 6 podem ser formadas?

Letras podem se repetir. Pela regra do produto são 26 **opções para a primeira,** 26 **para a segunda, ...** $= 26^6$**.**

Permutações com repetição - fórmula

- A fórmula pode ser obtida pela regra do produto

Teorema 3

O número de r-permutações de um conjunto de n objetos, com repetição, é n^r.

Combinações com repetição - exemplos

Seleção de frutas

Há quantas maneiras de selecionar 4 frutas de uma fruteira que contém maçãs, bananas e laranjas, se a ordem não importa, e a fruta específica também não (apenas o tipo dela), sabendo-se que a fruteira tem pelo menos 4 de cada tipo?

Não é possível usar nenhuma das fórmulas anteriores. São $n = 3$ frutas e queremos selecionar $r = 4$, sem importar a ordem, com repetição. Vamos listar todas elas, são 15:

- **4 maçãs**
- **3 maçãs, 1 banana**
- **3 maçãs, 1 laranja**
- **2 maçãs, 2 bananas**
- **2 maçãs, 1 banana, 1 laranja**
- **2 maçãs, 2 laranjas**
- **1 maçã, 3 bananas**
- **1 maçã, 2 bananas, 1 laranja**
- **1 maçã, 1 banana, 2 laranjas**
- **1 maçã, 3 laranjas**
- **4 bananas**
- **3 bananas, 1 laranja**
- **2 bananas, 2 laranjas**
- **1 banana, 3 laranjas**
- **4 laranjas**

Cédulas

Há quantas maneiras de selecionar 5 cédulas de um caixa que contêm cédulas de $1, $2, $5, $10, $20, $50, $100? (considerando que a ordem de escolha não importa, nem a cédula específica (apenas seu valor) e há pelo menos 5 de cada tipo no caixa).

Mais uma vez, combinação com repetição. Precisamos de um método para contar r-combinações de n elementos permitindo repetição.

Combinações com repetição - fórmula

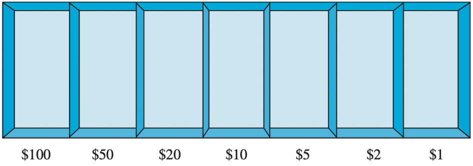


FIGURE 1 **Cash box with seven types of bills.**

- O caixa com as 7 opções pode ser representado com 6 '|'s separando os compartimentos: | | | | | |
- Selecionar 1 cédula pode ser representado por um '$*$':
  - '$*$' entre barras representa selecionar a cédula correspondente (50, 20, 10, 5, ou 2)
  - '$*$' à esquerda de todas as barras representa selecionar a cédula de 100
  - '$*$' à direita de todas as barras representa selecionar a cédula de 1
- Selecionar 5 cédulas entre 7 opções, com repetição, pode ser representado então por um string de 6 '|'s e 5 '$*$'s. Veja exemplos a seguir.

Combinações com repetição - fórmula

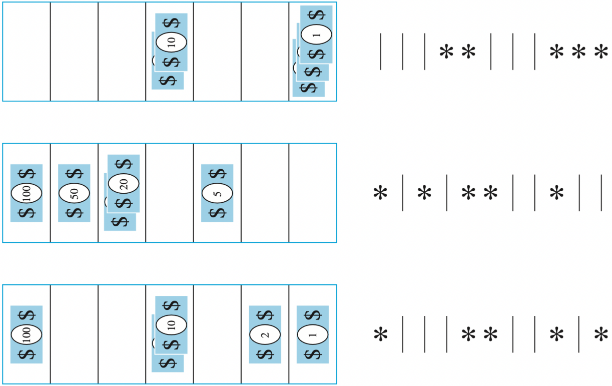


FIGURE 2 **Examples of ways to select five bills.**

Combinações com repetição - fórmula

- Selecionar r cédulas entre n opções, com repetição, pode ser representado por um string de $n-1$ '|'s e r '$*$'s
- De uma forma geral, cada r-combinação de um conjunto de n elementos é um string de tamanho $n+r-1$ contendo r asteriscos
- Em um exercício anterior vimos que há $C(n, r)$ cadeias de n bits com r 1's

Teorema 4

O número de r-combinações de um conjunto de n objetos, com repetição, é $C(n+r-1, r)$, ou seja, $\binom{n+r-1}{r}$.

- No ex. da seleção de frutas, $n=3$ e $r=4$: são $\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$ maneiras
- No caso das cédulas, $n=7$ e $r=5$: são $\binom{7+5-1}{5} = \binom{11}{5} = 462$ maneiras

Combinações com repetição - exemplos

Bombons

Certa doceira faz 4 tipos de bombons. Há quantas caixas diferentes possíveis contendo 6 desses bombons?

Combinação com repetição, $n = 4$ **e** $r = 6$**: são** $\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$ **caixas possíveis.**

Equação

Quantas soluções tem a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

se x_1, x_2, x_3 são inteiros não negativos?

Pode ser visto como selecionar 11 vezes entre 3 opções (x_1, x_2, x_3**) – cada seleção aumenta 1 na variável.**
Combinação com repetição, $n = 3$ **e** $r = 11$**: são** $\binom{3+11-1}{11} = \binom{13}{11} = 78$ **soluções possíveis.**

Equação (continuação...)

E quantas com $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$?

Neste caso, $1 + 2 + 3 = 6$ **seleções já foram feitas, faltam** 5.
Combinação com repetição, $n = 3$ **e** $r = 5$**: são** $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$ **soluções possíveis.**

Resumo

	Importa a ordem (Permutação)	Não importa a ordem (Combinação)
Sem repetição	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
Com repetição	n^r	$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$