Funções geradoras

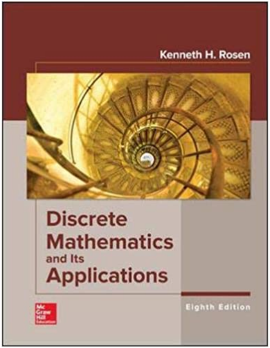
André Gustavo dos Santos[1]

[1] Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF230 - 2021/1

Conteúdo

Os slides seguintes são baseados nas seção 8.4 do livro texto da disciplina:



ROSEN, Kenneth H.
Discrete mathematics and its applications.
McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018

Introdução

- Funções geradores são usadas para representar sequências de forma eficiente, codificando seus termos como coeficientes de potências de uma variável x em uma série formal
- Elas podem ser usadas para resolver diversos problemas de contagem
- Também podem ser usadas para resolver relações de recorrências
- São usadas ainda para provar algumas identidades combinatórias

Definição

Definição

Uma função geradora para a sequência $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ de números reais é a série infinita

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^\cdot$$

- É chamada função geradora ordinária de $\{a_k\}$ para distinguir de outros tipos

Exemplos

Sequência $\{a_k\}$ com $a_k = 3$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$$

Sequência $\{a_k\}$ com $a_k = k + 1$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

Sequência $\{a_k\}$ com $a_k = 2^k$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$

Sequências finitas

- Podemos definir funções geradores para sequências finitas de números reais
- Dada uma sequência $a_0, a_1, \ldots, a_n$, podemos estendê-la para uma sequência infinita acrescentando $a_{n+1} = 0$, $a_{n+2} = 0$ e assim por diante
- A função geradora desta sequência será um polinômio de grau n porque nenhum termo $a_j x^j$ com $j > n$ aparece na sequência, isto é,

$$G(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n$$

Qual a função geradora da sequência $1, 1, 1, 1, 1, 1$?

$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

- Como $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = (x^6 - 1)/(x - 1)$ quando $x \neq 1$, podemos dizer que $G(x) = (x^6 - 1)/(x - 1)$ é uma função geradora da sequência $1, 1, 1, 1, 1, 1$
- As potências de x são apenas locais para os termos da sequência, não precisamos nos preocupar com o fato de $G(1)$ não ser definida

Exemplo

Seja m um inteiro positivo e $a_k = C(m,k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.
Qual a função geradora da sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$?

$$G(x) = C(m,0) + C(m,1)x + C(m,2)x^2 + \cdots + C(m,m)x^m$$

O teorema binomial mostra que $G(x) = (1+x)^m$.

Séries de potências formais

- Quando usadas na solução de problemas de contagem, são tratadas como séries de potências formais[1]
- Assim, são tratadas como objetos algébricos, sem preocupação com convergência
- Entretanto, quando convergem, algumas operações de séries de potências formais podem ser usadas
- Vamos usar algumas séries de potências de algumas funções em torno de $x = 0$
- Alguns fatos importantes sobre séries infinitas, quando usadas com funções geradoras, são listados a seguir
- Detalhes podem ser vistos em livros de Cálculo

[1] generalização de funções polinomiais, permitindo infinitos termos

Fatos úteis

Função $f(x) = 1/(1-x)$

A função $f(x) = 1/(1-x)$ é função geradora da sequência $1, 1, 1, 1, \ldots$ porque

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

para $|x| < 1$.

Função $f(x) = 1/(1-ax)$

A função $f(x) = 1/(1-ax)$ é função geradora da sequência $1, a, a^2, a^3, \ldots$ porque

$$1/(1-ax) = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots$$

quando $|ax| < 1$, ou, de forma equivalente, quando $|x| < 1/|a|$ para $a \neq 0$.

Soma e produto

Teorema 1

- Seja $(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$
- Então

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + b_k x^k$$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k$$

UFV

Exemplo

Seja $f(x) = 1/(1-x)^2$.

Quais os coeficientes de $a_0, a_1, a_2, \ldots$ na expansão $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$?

- Vimos anteriormente que $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots$
- Do teorema 1, $f(x) = 1/(1-x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} 1\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$.

- Pode ser obtido também por diferenciação, derivando $1 + x + x^2 + \ldots$
- Derivadas são bastante úteis para produzir novas identidades a partir de funções geradoras conhecidas

Binômio estendido

- Já vimos que a solução de muitos problemas de contagem usam binômios

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

- Para usar funções geradoras, precisamos aplicar o teorema binomial em expoentes não inteiros. A seguinte definição estende os coeficientes binomiais.

Definição

Seja u um número real e k um inteiro não negativo.
O coeficiente binomial estendido $\binom{u}{k}$ é dado por

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!} & \text{if } k > 0 \\ 1 & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

- Note que é a mesma definição para $k > 0$, sem o uso de fatorial, já que u é real

Exemplo

Encontre os valores dos coeficientes binomiais de $\binom{1/2}{3}$ e $\binom{-2}{3}$

- Pela definição, com $u = 1/2$ e $k = 3$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = \frac{1}{16}$$

- Pela definição, com $u = -2$ e $k = 3$

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!} = -4$$

Relação útil

- Quando o parâmetro do topo é inteiro negativo, os coeficientes binomiais estendidos podem ser escritos em termos de coeficientes binomiais ordinários

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{r} &= \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-r+1)}{r!} \\
&= \frac{(-1)^r n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!} \\
&= \frac{(-1)^r (n+r-1)\dots(n+1)n}{r!} \\
&= \frac{(-1)^r (n+r-1)!}{r!} \\
&= (-1)^r \binom{n+r-1}{r}
\end{aligned}$$

Teorema binomial estendido

Teorema binomial estendido

Seja x um número real com $|x| < 1$ e seja u um número real. Então

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

- Note que quando u é inteiro positivo, o teorema binomial estendido se reduz ao teorema binomial, porque $\binom{u}{k} = 0$ se $k > u$.

Exemplo

Encontre a função geradora para $(1 + x)^{-n}$ quando n é inteiro positivo

- Pelo teorema binomial estendido, temos que

$$(1 + x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

- Pela relação anterior para valor negativo no topo, chegamos a

$$(1 + x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n + k - 1}{k} x^k$$

Encontre a função geradora para $(1 - x)^{-n}$ quando n é inteiro positivo

- Substituindo x por $-x$ no resultado anterior, chegamos a

$$(1 + x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} x^k$$

Resumo de funções geradoras usadas com frequência

TABLE 1 Useful Generating Functions.

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$ $= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k$ $= 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk}$ $= 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise

Fonte: Tabela 1 da seção 8.4 do livro texto da disciplina

Resumo de funções geradoras usadas com frequência

$\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 if $k \leq n$; 0 otherwise
$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\dfrac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	a^k
$\dfrac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1 if $r \mid k$; 0 otherwise

Fonte: Tabela 1 da seção 8.4 do livro texto da disciplina

Resumo de funções geradoras usadas com frequência

$\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$
$\dfrac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k)x^k$ $= 1 + C(n, 1)x + C(n+1, 2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1, k) = C(n+k-1, n-1)$
$\dfrac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k)(-1)^k x^k$ $= 1 - C(n, 1)x + C(n+1, 2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1, k) = (-1)^k C(n+k-1, n-1)$
$\dfrac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k)a^k x^k$ $= 1 + C(n, 1)ax + C(n+1, 2)a^2x^2 + \cdots$	$C(n+k-1, k)a^k = C(n+k-1, n-1)a^k$

Fonte: Tabela 1 da seção 8.4 do livro texto da disciplina

UFV

Resumo de funções geradoras usadas com frequência

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

Fonte: Tabela 1 da seção 8.4 do livro texto da disciplina

Aplicações em problemas de contagem

Encontre o número de soluções de $e_1 + e_2 + e_3 = 17$ com e_1, e_2, e_3 inteiros não negativos e $2 \leq e_1 \leq 5, 3 \leq e_2 \leq 6, 4 \leq e_3 \leq 7$

- É o coeficiente de x^{17} na expansão de $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$

Por que?

- porque x_{17} deve ser obtido multiplicando-se três termos, um de cada soma
- ou seja, um x^{e_1} com $2 \leq e_1 \leq 5$, um x^{e_2} com $3 \leq e_2 \leq 6$ e um x^{e_3} com $4 \leq e_3 \leq 7$, tal que $e_1 + e_2 + e_3 = 17$, exatamente o mesmo problema

Qual a solução?

- Inspecionamento os termos vemos que o coeficiente de x^{17} é 3
- Portanto há 3 soluções
- Embora encontrar esse valor não seja mais fácil que enumerar as soluções do problema original, o método pode ser usado em outros problemas de contagem com fórmulas especiais; além disso, existem ferramentas de cálculo algébrico que fornecem resultados da expansão dessas expressões

UFV

Aplicações em problemas de contagem

De quantas formas oito biscoitos podem ser distribuídos entre três crianças se cada uma recebe pelo menos dois e não mais que quatro?

- Coeficiente de x^8 na expressão $(x^2 + x^3 + x^4)^3$
- O expoente de cada fator é o número de biscoitos recebido por cada criança
- Como x^8 tem coeficiente 6 na expressão, há 6 formas distintas de distribuí-los

Aplicações em problemas de contagem

De quantas formas podemos inserir moedas de \$1, \$2 e \$5 em uma máquina de venda automática para pagar um valor \$r?

- Depende se a ordem importa ou não. Por exemplo, podemos pagar \$3 de duas formas, se a ordem não importa (3 de \$1 ou 1 de \$1 e 1 de \$2), mas se a ordem importa são 3 formas (3 de \$1, 1 de \$1 e 1 de \$2 ou 1 de \$2 e 1 de \$1)
- Se a ordem não importa, só precisamos saber quantos de cada tipo
  - Coeficiente de x^r na expressão $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots)$
  - O primeiro fator é o número de moedas de \$1, o segundo de \$2 e o terceiro de \$5
  - Por exemplo, para pagar \$7 devemos encontrar o coeficiente de x^7, que é 6
- Se a ordem importa
  - Coeficiente de x^r na expressão $(x + x^2 + x^5)^n$ é o número de maneiras com n moedas
  - Pois cada uma das n moedas pode ser de \$1, \$2 ou \$5
  - O total é então o coeficiente de x^r em $1 + (x + x^2 + x^5) + (x + x^2 + x^5)^2 + (x + x^2 + x^5)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(x+x_2+x_5)}$
  - Por exemplo, para pagar \$7 devemos encontrar o coeficiente de x^7, que é 26

Aplicações em problemas de contagem envolvendo combinações

Use funções geradoras para calcular o número de k-combinações de n elementos

- Seja $f(x)$ a função geradora para $\{a_k\}$, número de k-combinações:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

- Cada elemento contribui com o termo $(1 + x)$ nessa função geradora
- Então, $f(x) = (1 + x)^n$, e pelo teorema binomial, $f(x) = \binom{n}{k} x^k$
- Portanto, o número de k-combinações de n elementos é $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Aplicações em problemas de contagem envolvendo combinações

Use funções geradoras para número de r-combinações de n elementos com repetição

- Seja $f(x)$ a função geradora para $\{a_r\}$, número de r-combinações com repetição: $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$
- Cada elemento contribui com o termo $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$ nessa função
- Então, $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n$
- Considerando $|x| < 1$ temos que $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = 1/(1 - x)$
- Então, $f(x) = 1/(1 - x)^n = (1 - x)^{-n}$
- Pelo teorema binomial estendido, $(1 - x)^{-n} = (1 + (-x))^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-x)^r$
- Vimos uma relação útil anterior, que $\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$
- O coeficiente de x^r é então $\binom{-n}{r}(-1)^r = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}$
- O número de r-combinações de n elementos com repetição é $\binom{n+r-1}{r}$

Aplicações em problemas de contagem envolvendo combinações

Use funções geradoras para o número de maneiras de selecionar r objetos entre n tipos diferentes se devemos selecionar pelo menos um de cada tipo

- Como precisamos selecionar pelo menos um de cada tipo, cada tipo contribui com o termo $(x + x^2 + x^3 + \dots)$ na função geradora da sequência $\{a_n\}$
- Então, $f(x) = (x + x^2 + x^3 + \dots)^n = x^n(1 + x + x^2 + \dots)^n = x^n/(1 - x)^n$
- Temos então
- $f(x) = x^n/(1 - x)^n = x^n(1 - x)^{-n}$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r \qquad \textit{(teorema binomial estendido)}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n + r - 1}{r} (-1)^r x^r \qquad \textit{(relação útil vista anteriormente)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n + r - 1}{r} x^{n+r} = \sum_{t=n}^{\infty} \binom{t - 1}{t - n} x^t \qquad \textit{(substituindo t = n+r)}$$

- O coeficiente de x^r é então $\binom{r-1}{r-n}$ (note que vale 0 para $r < n$)

Aplicações em relações de recorrência

- Podemos resolver uma relação de recorrência encontrando uma fórmula explícita para a função geradora associada

Resolva a recorrência $a_k = 3a_{k-1}$ para $k = 1, 2, \ldots$ com condição inicial $a_0 = 2$

- Seja $G(x)$ a função geradora para a sequência $\{a_k\}$, isto é, $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
- Note que $xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$
- $$\begin{aligned} G(x) - 3xG(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1}) x^k \\ &= 2. \qquad \textit{(pois } a_0 = 2 \textit{ e } a_k = 3a_{k-1}\textit{)} \end{aligned}$$
- Temos então $G(x) = 2/(1-3x)$, e, usando $1/(1-ax) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k$:

  $$G(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 3^k x^k$$
- Consequentemente, $a_k = 2 \cdot 3^k$.

Convolução

Definição

A convolução de duas sequências $\{a_n\} = a_0, a_1, a_2, \ldots$ e $\{b_n\} = b_0, b_1, b_2, \ldots$ é a sequência $\{\sum_k a_k b_{n-k}\} = a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ldots$

- Note que corresponde à multiplicação de suas funções geradoras
- Isto facilita avaliar muitas somas que seriam difíceis de outra maneira