Recorrências

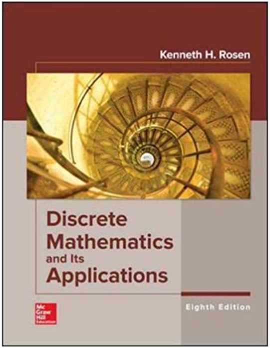
André Gustavo dos Santos[1]

[1] Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF230 - 2021/1

Conteúdo

Os slides seguintes são baseados nas seções 2.4.3 e 8.1 do livro texto da disciplina:



ROSEN, Kenneth H.
Discrete mathematics and its applications.
McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018

Introdução

- Sequências são listas ordenadas de elementos
- São usadas em matemática discreta de muitas formas, por exemplo, para representar soluções de certos problemas de contagem
- Também são uma importante estrutura de dados
- Muitas vezes precisamos trabalhar com a soma dos elementos de uma sequência
- Os termos de muitas sequências podem ser definidos por uma fórmula
- Em alguns casos podem ser representados por uma relação de recorrência, que expressa cada elemento em termos de elementos anteriores

Sequências

- Uma sequência é uma estrutura discreta que representa uma lista ordenada
- Por exemplo, $1, 2, 3, 5, 8$ é uma sequência de 5 termos
- Já $1, 3, 9, 27, 81, \ldots, 3^n, \ldots$ é uma sequência infinita

Sequências - notação

- Usamos a_n para representar o n=ésimo elemento de uma sequência
- Usamos $\{a_n\}$ para representar a sequência

Sequência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{1}{n}$

- A lista de termos, começando com a_1, é dada por $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
- Ou seja, $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Sequência $\{b_n\}$ com $b_n = 2 \cdot 5^n$

- A lista de termos, começando com b_0, é dada por $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$
- Ou seja, $2, 10, 50, 250, \ldots$

Sequência $\{c_n\}$ com $c_n = -1 + 4n$

- A lista de termos, começando com c_0, é dada por $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$
- Ou seja, $-1, 3, 7, 11, \ldots$

Recorrências

- Nos exemplos anteriores foram dadas fórmulas explícitas para os termos
- Outra forma de especificar uma sequência é informar um ou mais termos iniciais e uma regra para determinar os termos subsequentes a partir dos que os precedem
- Regras deste tipo são chamadas relações de recorrência

Relação de recorrência

Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa a_n em termos de um ou mais termos anteriores da sequência (ou seja, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$) para todo inteiro $n \geq n_0$, sendo n_0 um inteiros não negativo.

Uma sequência é chamada solução de uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação.

Sequência $\{a_n\}$ com $a_n = a_{n-1} + 3$ e $a_0 = 2$. Quanto valem a_1, a_2, a_3?

- $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
- $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
- $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

Recorrências - exemplos

Sequência $\{b_n\}$ com $b_n = 5 \cdot b_{n-1}$ e $b_0 = 2$. Quanto valem b_1, b_2, b_3?

- $b_1 = 5 \cdot a_0 = 5 \cdot 2 = 10$
- $b_2 = 5 \cdot a_1 = 5 \cdot 10 = 50$
- $b_3 = 5 \cdot a_2 = 5 \cdot 50 = 250$

Sequência $\{c_n\}$ com $c_n = 4 + c_{n-1}$ e $c_0 = -1$. Quanto valem c_1, c_2, c_3?

- $c_1 = 4 + c_0 = 4 + (-1) = 3$
- $c_2 = 4 + c_1 = 4 + 3 = 7$
- $c_2 = 4 + c_2 = 4 + 7 = 11$

Note que estas relações de recorrência definem $\{b_n\}$.e $\{c_n\}$ dadas como exemplos de sequência anteriormente.

UFV

Recorrências - exemplos

Sequência $\{f_n\}$ com $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ e $f_1 = 1$ e $f_2 = 2$. Quanto valem f_3, f_4, f_5?

- $f_3 = f_2 + f_1 = 2 + 1 = 3$
- $f_4 = f_3 + f_2 = 3 + 2 = 5$
- $f_5 = f_4 + f_3 = 5 + 3 = 8$

Note que os 5 primeiros termos desta sequência são os termos da primeira sequência dada como exemplo nestes slides

Recorrências

- Nos exemplos anteriores vimos que uma relação de recorrência define recursivamente uma sequência
- As condições iniciais de uma sequência definida recursivamente especificam os termos que precedem o primeiro termo em que a recorrência surte efeito
- Por exemplo, $f_1 = 1$ e $f_2 = 2$, $c_3 = -1$, $b_3 = 2$, $a_0 = 2$ nos exemplos anteriores

- Quando resolvemos uma relação de recorrência com as condições iniciais, achamos uma fórmula fechada para os termos da sequência
- Ou seja, uma fórmula explícita para os termos, que não usa termos anteriores
- Técnicas de solução de relações de recorrência serão vistas na próxima aula

Métodos de resolução

Na próxima aula

Aplicações de recorrência

- Relações de recorrência são muito importantes no estudo de algoritmos
- Programação dinâmica
  - Importante paradigma de desenvolvimento de algoritmos
  - Algoritmos que usam esta técnica dividem um problema em subproblemas sobrepostos
  - A solução do problema é obtida das soluções dos subproblemas por uma relação de recorrência
- Divisão-e-Conquista
  - Outro importante paradigma de desenvolvimento de algoritmos
  - Algoritmos com esta técnica dividem um problema em subproblemas não sobrepostos
  - Os subproblemas são divididos até que possam ser resolvidos diretamente
  - A análise de complexidade desses algoritmos é feita por relações de recorrência
- Relações de recorrência são úteis também na solução de problemas de contagem
  - Alguns podem ser resolvidos utilizando séries de potências, as funções geradoras
  - Os coeficientes das potências de x representam os termos da sequência
  - Funções geradoras podem ser usados também para resolver relações de recorrência

Exemplos de aplicação

Na próxima aula