Lógica proposicional e de predicados

André Gustavo dos Santos[1]

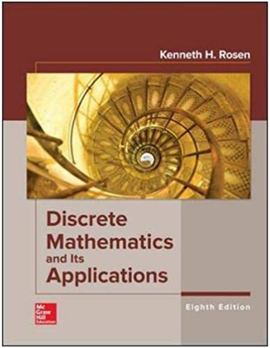
[1] Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF230 - 2021/1

Conteúdo

UFV

Os slides seguintes são baseados nas seções 1.1 a 1.5 do livro texto da disciplina:



ROSEN, Kenneth H.
Discrete mathematics and its applications.
McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018

UFV

Proposições

Definição

Proposição é uma sentença declarativa que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambas.

Exemplos

- Brasília é a capital do Brasil.
- Nova Iorque é a capital dos EUA.
- 2 + 2 = 5
- A terra é plana.

Por que as sentenças abaixo não são proposições?

- Responda esta questão.
- $x + 2 = 5$
- $2^n \geq 100$

Lógica proposicional

- Lógica proposicional é a área da lógica que trata proposições
- Foi desenvolvida por Aristóteles, filósofo grego, há mais de 2300 anos
- Novas proposições podem ser produzidas a partir de outras
- Proposições compostas são produzidas por operadores lógicos
- Esses métodos foram discutidos por George Boole, matemático inglês, em 1854

Negação $\neg$

Definição

A negação de uma proposição p, denotada por $\neg p$, é a sentença “Não é o caso de p”.

Exemplo

- Se p é a proposição “Hoje é terça-feira.”, $\neg p$ é a proposição “Não é o caso de hoje ser terça-feira.”
- Ou, de forma mais simples, “Hoje não é terça-feira.”

Qual a negação de “O celular do João tem pelo menos 32GB de memória.”?

- Não é o caso do celular do João ter pelo menos 32GB de memória.
- O celular do João não tem pelo menos 32GB de memória.
- O celular do João tem menos de 32GB de memória.
- ERRADO: O celular do João tem no máximo 32GB de memória.

Conjunção $\wedge$

Definição

A conjunção de duas proposições p e q, denotada por $p \wedge q$, é a proposição "p e q.", que é verdadeira se ambas p e q são verdadeiras e falsa caso contrário.

Exemplo

- Seja p a proposição "Hoje está chovendo." e q a proposição "Hoje é quarta-feira."
- a proposição $p \wedge q$ só é verdadeira numa quarta-feira chuvosa.

Disjunção $\vee$

Definição

A disjunção de duas proposições p e q, denotada por $p \vee q$, é a proposição "p ou q.", que é falsa se ambas p e q são falsas e verdadeira caso contrário.

Exemplo

- Seja p a proposição "Hoje está chovendo." e q a proposição "Hoje é quarta-feira."
- a proposição $p \vee q$ é verdadeira em uma quarta-feira e em qualquer dia chuvoso.

Disjunção exclusiva $\oplus$

Definição

A disjunção exclusiva de duas proposições p e q, denotada por $p \oplus q$, é a proposição que é verdadeira se exatamente uma entre p e q é verdadeira, e falsa caso contrário.

Exemplo

- Seja p a proposição “Hoje está chovendo.” e q a proposição “Hoje é quarta-feira.”
- a proposição $p \oplus q$ é verdadeira em uma quarta-feira e em dias chuvosos, mas não numa quarta-feira chuvosa.

“Não sei se caso ou se compro uma bicicleta...”

- Cuidado com o português! Muitas vezes o “ou” é exclusivo
- “O valor do almoço inclui bebida ou sobremesa.” - está implícito que não ambos

Proposições condicionais $\rightarrow$

Definição

A proposição condicional $p \rightarrow q$ é a proposição "se p, então q.", que é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e verdadeira caso contrário.

Nessa proposição, p é a premissa (ou hipótese) e q é a consequência (ou conclusão)

Exemplo

- "Se eu for eleito, vou reduzir os impostos." pode ser escrito como $p \rightarrow q$, sendo p a proposição "Eu sou eleito" e q "vou reduzir os impostos."
- Note que só é falsa se eu for eleito e não reduzir os impostos.

Se hoje é sexta-feira, então 2+2=5

- É verdadeira todos os dias, exceto na sexta-feira.
- O conceito matemático vai além do uso em português, é independente da relação causa-efeito entre a hipótese e a conclusão.

Proposições relacionadas a $p \to q$

- Oposta: $q \to p$
- Contrapositiva: $\neg q \to \neg p$
- Inversa: $\neg p \to \neg q$

Qual delas é equivalente à condicional $p \to q$?

- Apenas a contrapositiva (pode ser verificado comparando-se as tabelas-verdade)

"O time da casa ganha sempre que está chovendo"

- É o mesmo que dizer "Se está chovendo, então o time da casa ganha."
- Seja p a proposição "Está chovendo." e q "O time da casa ganha."
- A sentença pode ser descrita pela proposição $p \to q$
- Oposta: "Se o time da casa ganha, então está chovendo."
- Contrapositiva: "Se o time da cada não ganha, então não está chovendo."
- Inversa: "Se não está chovendo, então o time da casa não ganha."

Proposições bicondicionais $\leftrightarrow$

Definição

A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é a proposição "p se e somente se q.", que é verdadeira quando p e q têm o mesmo valor-verdade, e falsa caso contrário.

$p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras

Exemplos

- "Você pode pegar o voo se e somente se comprou a passagem."
- "Você pode se matricular em INF230 se e somente se foi aprovado em MAT131."

Proposições bicondicionais $\leftrightarrow$

Definição

A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é a proposição "p se e somente se q.", que é verdadeira quando p e q têm o mesmo valor-verdade, e falsa caso contrário.

$p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras

Exemplos

- "Você pode pegar o voo se e somente se comprou a passagem."
- "Você pode se matricular em INF230 se e somente se foi aprovado em MAT131."

Se hoje é sexta-feira, então 2+2=5

- É verdadeira todos os dias, exceto na sexta-feira.
- O conceito matemático vai além do uso em português, é independente da relação causa-efeito entre a hipótese e a conclusão.

UFV

Leitura em português

$p \rightarrow q$

- se p, então q
- se p, q
- p é suficiente para q
- p implica q
- p apenas se q
- q se p
- q quando ocorrer p
- q é necessária para p
- q sempre que p
- q a menos que $\neg p$

$p \leftrightarrow q$

- p se e somente se q (p sse q)
- se p então q, e vice-versa
- p é necessária e suficiente para q

Equivalências proposicionais $\equiv$

Definição

As proposições compostas p e q são logicamente equivalentes, denotado por $p \equiv q$, se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia (se apresentam a mesma tabela-verdade)

Tautologia é uma proposição que é sempre verdade, por exemplo, $p \vee \neg p$.
Contradição é uma que é sempre falsa, por exemplo, $p \wedge \neg p$.

Exemplo: leis de De Morgan

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Exemplos com condicionais e bidirecionais

- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Predicados

- A lógica proposicional não permite expressar várias expressões matemáticas e da linguagem natural
- Por exemplo se p é "Todo estudante matriculado em MD fez os exercícios." e q é "Manuel está matriculado em MD" como concluir que "Manuel fez os exercícios."?
- Para isso usamos a Lógica de Predicados

"$x > 3$"

- não é uma proposição se o valor de x não for especificado
- x é a variável, sujeito da declaração
- "> 3" é o predicado, propriedade que o sujeito pode ter
- $P(x)$, sendo P o predicado "> 3" e x a variável

UFV

Quantificadores

Definição $\forall$

$\forall x P(x)$ denota a quantificação universal $P(x)$, lida como “para todo x, $P(x)$” e entendida como a sentença “$P(x)$ para todo x no domínio”.

Definição $\exists$

$\exists x P(x)$ denota a quantificação existencial $P(x)$, lida como “existe x tal que $P(x)$” e entendida como a sentença “existe um elemento x no domínio tal que $P(x)$”.

Equivalências com quantificadores

Leis de De Morgan para quantificadores

- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Quantificadores aninhados

Exemplos

- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ é uma sentença válida no domínio dos números reais; propriedade comutativa: $x + y = x + y$ para todos os números reais x e y.
- $\forall x \exists y (x + y = 0)$ é uma sentença válida no domínio dos números reais; propriedade do oposto (inverso aditivo): para todo real x existe um real y tal que $x + y = 0$.

Exemplos

Exemplos do uso de quantificadores foram dados durante a aula usando as questões do Quiz 2. Não deixe de consultar o vídeo da aula e o livro! Os slides são um resumo.