

Recorrências e funções geradoras

1. Uma máquina de venda automática aceita apenas moedas de \$1 e \$5. O número de maneiras de pagar um valor n , em que a ordem de inserção das moedas importa, pode ser calculado pela relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-5}$ para $n \geq 5$ com condições iniciais $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$.
 A explicação é que, para $n < 5$, só há uma forma, que é inserir moedas de \$1 até completar o valor; já para $n \geq 5$, pode-se inserir uma moeda de \$1, restando $n - 1$ a pagar, que pode ser pago de a_{n-1} formas, ou inserir uma moeda de \$5, restando $n - 5$, que pode ser pago de a_{n-5} formas.
 - a) Use a relação de recorrência para encontrar os valores de a_6, a_7, a_8, a_9 e a_{10}
 - b) Enumere todas as a_{10} formas de pagar \$10

2. No exercício anterior, a ordem de inserção das moedas importava na contagem. Por exemplo, inserir $1+1+5$, $1+5+1$ e $5+1+1$ eram contados como formas diferentes. Se a ordem de inserção não importasse, elas seriam consideradas indistinguíveis e haveria apenas 2 formas de pagar \$7: inserir 7 moedas de \$1 ou inserir uma moeda de \$5 e duas de \$1.
 O número de maneiras de pagar um valor n quando a ordem de inserção não importa pode ser calculado utilizando funções geradoras. É o coeficiente de x^n em $(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots)$.
 A explicação é que o primeiro fator representa quantas moedas de \$1 foram usadas e o segundo quantas moedas de \$5. O coeficiente de x^n indica o número de maneiras de obter o expoente n escolhendo um termo do primeiro fator e um do segundo, consequentemente o número de maneiras de totalizar n escolhendo-se moedas de \$1 e \$5.
 - a) Use uma ferramenta matemática¹ para encontrar os coeficientes de x^6, x^7, x^8, x^9 e x^{10}
 - b) Enumere todas as formas de pagar \$10

3. Certo sistema considera como código válido um string de dígitos que contém exatamente um dígito 0. Por exemplo, 2021 é válido, enquanto 1999 e 2020 não são. Queremos saber quantos códigos válidos de n dígitos existem. Por exemplo, existe apenas um válido de 1 bit (0) e existem 18 válidos de 2 bits (01, 02, ..., 09, 10, 20, ..., 90). Seja c_n o número de códigos válidos de n bits, $n \geq 1$.
 - a) Calcule c_n usando análise combinatória [Dica: coloque o 0 e depois preencha o restante]
 - b) Escreva uma relação de recorrência para c_n [Dica: há duas formas de produzir código válido a partir de um código de $n - 1$ bits, colocar um dígito $\neq 0$ após um código válido ou colocar 0 após um código inválido]
 - c) Resolva a relação de recorrência encontrada (mostre os cálculos)

4. Certo local tem uma escada com n degraus, e as pessoas conseguem subir um ou dois degraus de uma vez. Ou seja, quando uma pessoa está em um degrau k , ela consegue ir para o degrau $k + 1$ ou $k + 2$.
 - a) Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de subir os n degraus
 - b) Quais as condições iniciais?
 - c) Calcule o número de maneiras para $n = 10$

¹Por exemplo: Solumaths, Symbolab, MathPortal

5. Podemos colocar parênteses no produto $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ para determinar a ordem de multiplicação de diversas formas. Por exemplo $x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4)))$ e $(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot (x_3 \cdot x_4)$.
- Liste todas as formas possíveis (considere diferentes se impõem ordens diferentes das multiplicações)
 - Use a recorrência desenvolvida em aula para calcular C_4 , o número de formas de colocar parênteses em produto de 5 números para determinar a ordem das multiplicações. [Verifique sua resposta da letra a]
 - É possível mostrar que $C_n = \binom{2n}{n} / (n+1)$. Calcule por esta fórmula. [Verifique sua resposta da letra b]
6. As permutações de n elementos podem ser geradas colocando-se o n -ésimo (último) elemento em todas as posições de todas as permutações dos $n-1$ elementos restantes. Por exemplo, considere os elementos $\{1, 2, 3\}$. As permutações sem o último elemento são $(1, 2)$ e $(2, 1)$. Colocando o último elemento, 3, em todas as posições destas permutações obtemos: $(3, 1, 2)$, $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, que são todas as permutações dos 3 elementos.
- Escreva uma relação de recorrência para o número de permutações obtidas desta forma
 - Resolva a relação de recorrência e compare o resultado com o obtido por análise combinatória
7. Como vimos, a função geradora de uma sequência $\{a_n\}$ de elementos a_0, a_1, a_2, \dots é dada por $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$.
- Por exemplo, a função geradora da sequência $1, 2, 3, 4, \dots$ é $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$, que, de acordo com tabela de funções geradoras úteis mostrada em aula (Tabela 1 da seção 8.4 do livro texto), pode ser escrita como $\frac{1}{(1-x)^2}$.
- Para cada sequência a seguir, escreva sua função geradora na forma expandida e na forma compacta, como feito no exemplo acima (consulte a tabela e faça manipulações e substituições, se necessário).
- $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$
 - $2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$
 - $3, 3, 3, 3, 3, \dots$
 - $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$
 - $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \dots, \binom{6}{6}$.
 - $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$