Teorema Binomial e algumas identidades

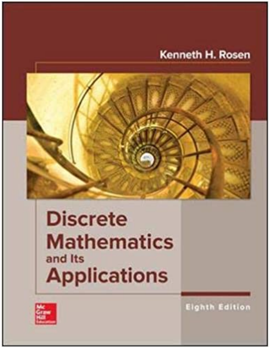
André Gustavo dos Santos[1]

[1] Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF230 - 2021/1

Conteúdo

Os slides seguintes são baseados nas seção 6.4 do livro texto da disciplina:



ROSEN, Kenneth H.
Discrete mathematics and its applications.
McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018

UFV

Coeficientes binomiais

- Já vimos que o número de r-combinações de um conjunto de n elementos é denotado por $\binom{n}{r}$
- Este número é chamado coeficiente binomial, porque ocorre como coeficiente na expansão de potências de expressões binomiais
- Uma expressão binomial é simplesmente uma soma de dois termos, como $x + y$
- Uma potência de expressão binomial, como $(x + y)^n$, pode ser expandida multiplicando-se os termos

Expansão de $(x + y)^3$

$$
\begin{aligned}
(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) \\
&= (xx + xy + yx + yy)(x + y) \\
&= (xxx + xyx + yxx + yyx + xxy + xyy + yxy + yyy) \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.
\end{aligned}
$$

Teorema Binomial

Teorema Binomial

Sejam x e y variáveis e n um inteiro não negativo. Então,

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \\ &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n\end{aligned}$$

Prova

- Os termos da expansão são da forma $x^{n-j}y^j$, para $j = 0, 1, \ldots, n$ pois surgem da multiplicação de x e y n vezes
- Os termos $x^{n-j}y^j$ são obtidos escolhendo-se $n-j$ vezes o x dos n fatores $(x+y)$ (e consequentemente j vezes o y)
- O número de vezes que esse termo aparece é então $\binom{n}{n-j}$, que é igual a $\binom{n}{j}$

Exemplos de uso

Qual a expansão de $(x+y)^4$?

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} x^{4-j} y^j \\
&= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 \binom{4}{4} y^4 \\
&= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.
\end{aligned}
$$

Exemplos de uso

Qual o coeficiente de $x^{12}y^{13}$ na expansão de $(x+y)^{25}$?

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5200300$$

Qual o coeficiente de $x^{12}y^{13}$ na expansão de $(2x-3y)^{25}$?

- A expressão pode ser reescrita como $(2x+(-3y))^{25}$
- Pelo teorema binomial temos que:

$$(2x+(-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}(2x)^{25-j}(-3y)^{j}$$

- O coeficiente de $x^{12}y^{13}$ é obtido quando $j=13$:

$$\binom{25}{13}2^{12}(-3)^{13}$$

Corolários

Corolário 1

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Prova:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} 1^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

Prova por combinatória:

- Outra forma de provar é notar que $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ são respectivamente o número de maneiras de selecionar 0, 1, 2, ..., n elementos de um conjunto de n
- Cada uma dessas maneiras forma um subconjunto dos n elementos
- A soma de todas elas conta todos subconjuntos, que já vimos que são 2^n.

Corolários

Corolário 2

Seja n um inteiro positivo. Então,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Prova:

$$0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j$$

- Note que isso mostra que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

Corolários

Corolário 3

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

Prova:

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} 2^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j$$

Identidade de Pascal

- Coeficientes binomiais satisfazem muitas identidades
- Uma das mais importantes é descrita a seguir

Identidade de Pascal

Sejam n e k inteiros positivos, com $n \geq k$. Então,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Prova por combinatória:

- $\binom{n+1}{k}$ é o número de maneiras de selecionar k elementos de um conjunto de $n+1$
- Para mostrar que a soma do lado direito conta a mesma coisa, considere um elemento particular a entre os $n+1$
- Para selecionar k elementos dos $n+1$. podemos:
  - selecionar a e selecionar outros $k-1$ dos n restantes: $\binom{n}{k-1}$ maneiras
  - não selecionar a, e selecionar k dos n restantes: $\binom{n}{k}$ maneiras

Identidade de Pascal

- A identidade de Pascal, com as condições iniciais $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para todo inteiro n pode ser usada para definir recursivamente os coeficientes binomiais
- Isto é interessante porque usa apenas adições, nenhuma multiplicação

- Ela também é a base para uma disposição geométrica dos coeficientes binomiais em forma de triângulo, como mostrado a seguir
- A n-ésima linha do triângulo contém os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$
- A soma de dois coeficientes adjacentes é o coeficiente entre eles na linha abaixo

Triângulo de Pascal

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}$$
$$\cdots$$

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$
$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$
$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$
$$\cdots$$

Fonte: ROSEN, K H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018.

Identidade de Vandermonde

Identidade de Vandermonde

Sejam m, n, r inteiros não negativos com $r \leq n$ e $r \leq m$. Então,

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}.$$

Prova por combinatória:

- Considere que há m elementos em um conjunto e n em outro
- $\binom{m+n}{r}$ é o número de maneiras de selecionar r elementos da união deles
- Outra fazer de contar isso é selecionar $r-k$ entre os m elementos e k entre os n, para k de 0 a r. Pela regra do produto $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ para cada k, e pela regra da soma, o somatório disso para todo k.

Corolário

Seja n um inteiro não negativo. Então,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Mais uma

Teorema

Sejam n e r inteiros positivos, com $r \leq n$. Então,

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}.$$

Prova por combinatória:

- Já vimos que há $\binom{n}{r}$ cadeias de n bits com exatamente r bits 1
- Então $\binom{n+1}{r+1}$ é o número de cadeias de $n+1$ bits com exatamente $r+1$ bits 1
- Vamos mostrar que o lado direito da identidade conta a mesma coisa
  - O último bit 1 dessas cadeias pode ser desde o $(r+1)$ até o $(n+1)$-ésimo bit
  - Se o último bit 1 está na posição $k+1$, os outros r devem estar entre as k anteriores
  - Para cada k existem então $\binom{k}{r}$ cadeias cujo último bit está na posição $k+1$
  - A regra da soma, iterando para todo k, resulta no somatório do lado direito da identidade

Expansão multinomial