Permutação com objetos idênticos e distribuição em caixas

André Gustavo dos Santos[1]

[1] Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF230 - 2021/1

Conteúdo

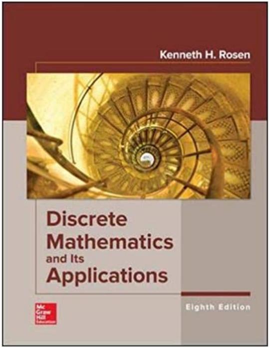
1 Introdução

2 Permutações com objetos idênticos

3 Distribuição de objetos em caixas

4 Expansão multinomial

Os slides seguintes são baseados nas seções 6.5.4 e 6.5.5 do livro texto da disciplina:



ROSEN, Kenneth H.
Discrete mathematics and its applications.
McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018

Introdução

- Já vimos como contar permutações e combinações, sem e com repetição
- Mas e se houver elementos idênticos (indistiguíveis)?

Exemplo

Quantos strings diferentes podem ser feitos rearrajando-se as letras de `SOSSEGO`?

- Se as letras fossem todas distintas, seriam $P(7,7) = 7!$ strings diferentes
- Mas strings com permutações das 3 letras '`S`' são equivalentes; pela regra da divisão, o total deve ser dividido por $P(3,3) = 3!$
- E strings com permutações das 2 letras '`O`' são equivalentes; pela regra da divisão, o total deve ser dividido por $P(2,2) = 2!$
- Existem então $\frac{7!}{3!2!} = 420$ strings diferentes rearranjando-se as letras de `SOSSEGO`

Outra maneira de contar:

- Das 7 posições do rearranjo, devemos escolher 3 para ser '`S`': $C(7,3) = \binom{7}{3}$
- Das 4 posições restantes, devemos escolher 2 para ser '`O`': $C(4,2) = \binom{4}{2}$
- Das 2 restantes, 1 para ser '`E`': $C(2,1) = \binom{2}{1}$; e a última para ser '`G`': $C(1,1) = \binom{1}{1}$
- Pela regra do produto, temos $\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 420$ strings diferentes

Fórmula

Teorema 5

O número de permutações diferentes de n objetos, onde há n_1 objetos idênticos do tipo 1, n_2 objetos idênticos do tipo 2, ..., n_k objetos idênticos do tipo k, é dado por:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

- No exemplo anterior, $n = 7$ letras, $n_1 = 3$ 'S', $n_2 = 2$ 'O', $n_3 = 1$ 'G' e $n_4 = 1$ 'G':

$$\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420.$$

Distribuição de objetos em caixas

- Muitos problemas de contagem podem ser resolvidos enumerando-se o número de maneiras que objetos podem ser colocados em caixas, quando a ordem dos objetos nas caixas não é relevante
- Os objetos podem ser idênticos ou distintos
- As caixas podem ser idênticas ou distintas

Exemplo

Quantas maneiras existem de distribuir as 52 cartas de um baralho em mãos de 5 cartas para 4 jogadores?

- Das 52 cartas, devemos escolher 5 para o jogador A: $C(52,5) = \binom{52}{5}$
- Das 47 cartas restantes, devemos escolher 5 para o jogador B: $C(47,5) = \binom{47}{5}$
- Das 42 restantes, 5 para o C: $C(42,5) = \binom{42}{5}$; e então 5 para o D: $C(37,5) = \binom{37}{5}$
- Pela regra do produto: $\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5} = \frac{52!}{47!5!} \cdot \frac{47!}{42!5!} \cdot \frac{42!}{37!5!} \cdot \frac{37!}{32!5!} = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}$.

Outra maneira de contar:

- Considere o string '`AAAAABBBBBCCCCCDDDDDNNN...N`' (com 32 `N`'s)
- Existe uma correpondência um para um das permutações deste string com as maneiras de distribuir as cartas aos jogadores
- Ordene as 52 cartas e entregue aos jogadores as cartas das posições das suas letras na permutação; as cartas nas posições `N` não são entregues aos jogadores.
- Pela fórmula do teorema 5, são $\frac{52!}{5!5!5!5!32!}$ permutações.

Fórmula

Teorema 6

O número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas distintas, com n_i objetos na i-ésima caixa, para $i = 1, 2, \ldots, k$ é dado por:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

- No exemplo anterior, $n = 52$ objetos distintas (as cartas) em $k = 5$ caixas distintas (os jogadores e a mesa), com $n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $n_3 = 5$, $n_4 = 5$ e $n_5 = 32$:

$$\frac{52!}{5!5!5!5!32!}$$

Exemplo

Quantas maneiras existem de distribuir 10 bolas idênticas em 8 caixas distintas?

- Para cada bola devemos escolher uma caixa, sendo que a caixa pode ser repetida
- Combinação (seleção) com repetição, sendo $n = 8$ e $r = 10$

$$C(8+10-1, 10) = C(17, 10) = \binom{17}{10} = \frac{17!}{10!7!} = 19448$$

Fórmula

Objetos idênticos em caixas distintas

O número de maneiras de distribuir r objetos idênticos em n caixas distintas, é dado por:

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$$

Exemplo

Quantas maneiras existem de distribuir 4 funcionários em 3 escritórios idênticos, sendo que cada escritório pode ter qualquer quantidade de funcionários?

- Note que podemos distribuir os funcionários colocando
  - os 4 em um mesmo escritório
  - 3 em um e 1 em outro
  - 2 em um e 2 em outro
  - ou 2 em um e 1 em cada um dos outros
- Cada forma de distribuir os funcionários pode ser representada por uma forma de particionar um conjunto de 4 elementos em 3 conjuntos disjuntos
- Seja $\{A, B, C, D\}$ o conjunto de funcionários. Temos um total de 14 maneiras:
  - $\{\{A, B, C, D\}\}$ (1)
  - $\{\{A, B, C\}, \{D\}\}$; $\{\{A, B, D\}, \{C\}\}$; $\{\{A, C, D\}, \{B\}\}$; $\{\{B, C, D\}, \{A\}\}$ (4)
  - $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$; $\{\{A, C\}, \{B, D\}\}$; $\{\{A, D\}, \{B, C\}\}$ (3)
  - $\{\{A, B\}, \{C\}, \{D\}\}$; $\{\{A, C\}, \{B\}, \{D\}\}$; $\{\{A, D\}, \{B\}, \{C\}\}$; $\{\{B, C\}, \{A\}, \{D\}\}$; $\{\{B, D\}, \{A\}, \{B\}\}$; $\{\{C, D\}, \{A\}, \{B\}\}$ (6)

Outra maneira de contar:

- Considerar o número de escritórios em que colocamos os funcionários
- Há 6 formas de colocar os funcionários em 3 escritórios sem deixar nenhum vazio
- Há 7 formas de colocá-los em 2 escritórios sem deixar nenhum vazio
- Há 1 forma de colocá-los em 1 escritório sem deixá-lo vazio; total: 14 formas

UFV

Fórmula

Objetos distintos em caixas idênticas

Não há uma fórmula fechada simples para o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas idênticas.

- Há uma fórmula envolvendo somatório, particularmente complicada...
- Seja $S(n, j)$ o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em j caixas idênticas <u>sem que nenhuma caixa fique vazia</u>
- O número de maneiras é então $S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, k)$
- Os valores $S(n, j)$ são os números de Stirling de segunda ordem, denotados $\left\{ {n \atop j} \right\}$
- O número de maneiras é então

$$\sum_{j=1}^{k} \left\{ {n \atop j} \right\}$$

- Obs.: por inclusão-exclusão é possível mostrar que

$$\left\{ {n \atop j} \right\} = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i} \binom{j}{i} (j-i)^{n}$$

Exemplo

Quantas maneiras existem de distribuir 6 livros idênticos em 4 caixas idênticas, sendo que cada caixa pode ter qualquer quantidade de livros?

- Vamos enumerar todas as maneiras listando o número de livros em cada caixa:
  - 6
  - 5, 1
  - 4, 2
  - 4, 1, 1
  - 3, 3
  - 3, 2, 1
  - 3, 1, 1, 1
  - 2, 2, 2
  - 2, 2, 1, 1
- Total: 9 maneiras

Fórmula

Objetos idênticos em caixas idênticas

Não há uma fórmula fechada simples para o número de maneiras de distribuir n objetos identicos em k caixas idênticas.

Expansão multinomial

Expansão de $(x+y+z)^3$

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &= (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z) \\
&= (xx+xy+xz+yx+yy+yz+zx+zy+zz)(x+y+z) \\
&= xxx+xxy+xxz+xyx+xyy+xyz+xzx+xzy+xzz+yxx+yxy+yxz+yyx \\
&+ yyy+yyz+yzx+yzy+yzz+zxx+zxy+zxz+zyx+zyy+zyz+zzx+zzy+zzz \\
&= x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz
\end{aligned}$$

Teorema multinomial

Teorema multinomial

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m$ m variáveis e n um inteiro não negativo. Então,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}$$

onde $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$.

**o somatório é feito sobre todas combinações de índices $n_1, n_2, \ldots, n_m$ não negativos de soma n.*

Coeficiente multinomial

- Os números $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ são chamados coeficientes multinomiais
- Seu valor pode ser calculado por $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$
- Corresponde ao número de permutações de n elementos com n_i do tipo i
- E ao número de maneiras de colocar n objetos distintos em m caixas distintas, com n_i objetos na i-ésima caixa

Exemplos de uso

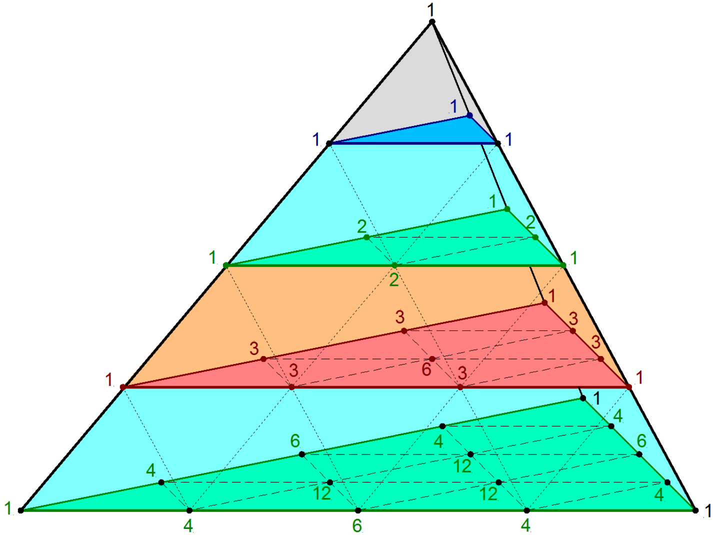
Qual o coeficiente de x^2y na expansão de $(x+y+z)^3$?

$$\binom{3}{2,1,0} = \frac{3!}{2!1!0!} = 3$$

Qual o coeficiente de xyz na expansão de $(x+y+z)^3$?

$$\binom{3}{1,1,1} = \frac{3!}{1!1!1!} = 6$$

Pirâmide de Pascal



Fonte: wikipedia