Combinatória

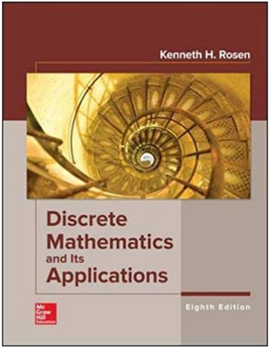
André Gustavo dos Santos[1]

[1] Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF230 - 2021/1

Conteúdo

Os slides seguintes são baseados nas seções 6.1 e 6.2 do livro texto da disciplina:



ROSEN, Kenneth H.
Discrete mathematics and its applications.
McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018

Introdução

- Combinatória é uma importante parte da matemática discreta que estuda o arranjo dos objetos
- Enumeração, a contagem de objetos com certas propriedades, é uma importante parte da combinatória
- É a arte de contar "sem contar"
- Exemplos de usos de contagem
  - Contagem para determinar complexidade de algoritmos
  - para saber se há números de telefones ou endereços IP para atender a demanda
  - para probabilidade de eventos
  - em biologia computacional, sequenciamento de DNA

Introdução

- A senha em determinado sistema consite de 6 a 8 caracteres, cada um deles uma letra ou dígito, sendo pelo menos um deles dígito. Quantas senhas possiveis?
- Os princípios básicas da contagem podem responder questões deste tipo.

Regra do produto

Regra do Produto

Suponha que um processo possa ser dividido numa sequência de duas tarefas. Se houver n_1 maneiras de fazer a primeira e para cada uma delas houver n_2 maneiras de fazer a segunda, então há $n_1 \times n_2$ maneiras de concluir o processo.

Alocação de salas

Uma empresa aluga um andar com 12 salas e deve determinar uma sala (diferente) para cada um dos 2 funcionários. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Há 12 maneiras de alocar o primeiro, e para cada uma delas há 11 de alocar o segundo: $12 \times 11 = 132$**.**

Numeração de cadeiras

As cadeiras de um auditório devem ser etiquetadas com uma letra maiúscula e um número de 1 a 100. Quantas cadeiras no máximo podem ser etiquetadas de maneira diferente?

Há 26 opções letras para etiquetar, e para cada uma delas há 100 números: $26 \times 100 = 2600$**.**

Regra do produto - generalização

Generalização

Suponha que um processo possa ser dividido numa sequência de m tarefas, $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Se houver n_i maneiras de fazer a tarefa T_i não importando como as anteriores foram feitas, então há $n_1 \times n_2 \times \ldots n_m$ maneiras de concluir o processo.

Cadeias de bits

Quantas sequências diferentes de 7 bits existem?

Há 2 opções para cada bit, independente dos anteriores: $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^7 = 128$**.**

Contagem de subconjuntos

Quantos subconjuntos distintos têm um conjunto S?

Para cada elemento de S há duas opções, ou está ou não está no subconjunto: $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{|S|}$**.**

Funções injetoras

Quantas funções injetoras existem de um conjunto de m elementos para um de n?

Função injetora mapeia para elementos distintos, então há n opções para o primeiro elemento, para cada uma há $n-1$ para o segundo, ... : $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1)$**. Obs.: se $m > n$ não existe nenhuma.**

Regra da soma

Regra do Soma

Se que uma tarefa pode ser feita em uma de n_1 maneiras ou em uma de n_2 maneiras, em que nenhuma das n_1 é a mesma de nenhuma das n_2, então há $n_1 + n_2$ maneiras de concluir a tarefa.

Escolha de representantes

Um estudante da pós-graduação em Ciência da Computação deve ser escolhido como representante do curso. Se há 18 estudantes de doutorado e 40 de mestrado, quantas possibilidades existem?

Pode ser escolhido um dos 18 de doutorado ou um dos 40 de mestrado: $18 + 40 = 58$**.**

Regra da soma - generalização

Generalização

Se que uma tarefa pode ser feito em uma de n_1 maneiras ou em uma de n_2 maneiras, ..., ou em uma de n_m maneiras, em que nenhuma das n_i é a mesma de nenhuma das n_j, para toda par i, j, então há $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ maneiras de concluir a tarefa.

Escolha de disciplina

Um estudante deve se matricular em uma disciplina de outro departamento, e a escolha pode ser entre 4 de ADM, 2 de DIR ou 2 de ECO. Quantas são as possibilidades?

Pode ser escolhida uma das 4 ADM ou uma das 2 DIR ou uma das 2 ECO: $4 + 2 + 2 = 8$**.**

Regras básicas - visão de conjuntos

Regra do produto

Se A tem $|A|$ elementos e B tem $|B|$ elementos então existem $|A| \times |B|$ maneiras de escolher um elemento de A **e** um de B

assumindo que os elementos são independentes: um não influencia a escolha do outro

Regra da soma

Se A tem $|A|$ elementos e B tem $|B|$ elementos então existem $|A| + |B|$ maneiras de escolher um elemento de A **ou** de B

assumindo que os elementos são distintos: não há elementos repetidos

Regra da subtração

Regra da substração

Se uma tarefa pode ser feita em uma de n_1 maneiras ou em uma de n_2 maneiras, então há $n_1 + n_2$ **menos** o número de maneiras em comum entre as duas de concluir a tarefa.

Cadeias de bits

Quantas das cadeias de 8 bits começam com bit `1` ou terminam com os bits `00`?

Pela regra do produto, há 2^7 que começam com bit 1 e há 2^6 que terminam com bits 00; mas há 2^5 em comum, isto é, que começam com 1 e terminam com 00: $2^7 + 2^6 - 2^5 = 128 + 64 - 32 = 160$.

Visão de conjuntos

Princípio da Inclusão-Exclusão

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Candidatos a estágio

Uma empresa recebeu 350 currículos de candidatos a estágio. Se 220 se formaram em Ciência da Computação, 147 em Matemática e 51 em ambos os cursos, quantos não se formaram em nenhum desses?

São $220 + 147 - 51 = 316$ **que se formaram em algum desses; logo** $350 - 316 = 34$ **em nenhum desses.**

Regra da divisão

Regra da divisão

Se uma tarefa pode ser feita de "n maneiras", mas na verdade cada uma tem d formas equivalentes, então há n/d maneiras de concluir a tarefa.

Mesa circular

De quantas formas 4 pessoas podem se sentar numa mesa circular, se duas formas são consideradas iguais caso cada pessoa tenha a mesma pessoa à esquerda e a mesma à direita?

São 4 opções de pessoa para a primeira cadeira, 3 opções de pessoas para sua direita, 2 para a direita desta, e 1 para a última; pela regra do produto: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$**. Mas girar as pessoas ao redor da mesma chega numa forma equivalente, já que todas continuariam com a mesma à esquerda e à direita. Então cada forma tem** 4 **equivalentes e pela regra da divisão:** $24/4 = 6$ **maneiras.**

Diagramas de árvores

- Problemas de contagem também podem ser resolvidos com diagramas de árvore
- Uma árvore tem uma raiz, um conjunto de ramos saindo da raiz, e possivelmente ramos saindo dos ramos, terminando em folhas
- Em problemas de contagem os ramos representam possíveis escolhas e as folhas os resultados possíveis

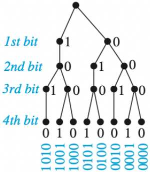
[1] Fonte: ROSEN, K H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018.

Diagramas de árvores

- Problemas de contagem também podem ser resolvidos com diagramas de árvore
- Uma árvore tem uma raiz, um conjunto de ramos saindo da raiz, e possivelmente ramos saindo dos ramos, terminando em folhas
- Em problemas de contagem os ramos representam possíveis escolhas e as folhas os resultados possíveis

Cadeias de bits

Quantas cadeias de 4 bits não têm 1's consecutivos?



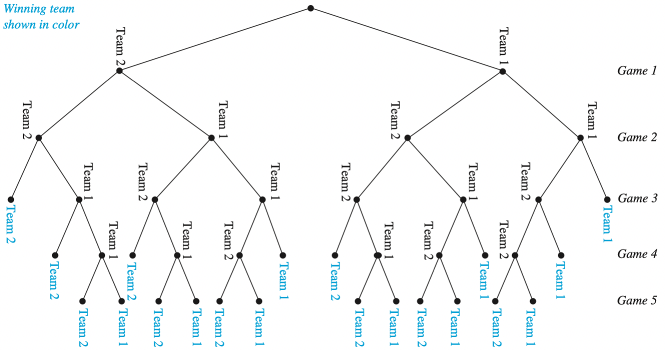
Pelo diagrama[1], são 8 cadeias.

[1] Fonte: ROSEN, K H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018.

Diagramas de árvores

Playoff

Numa eliminatória entre dois times, o primeiro que vencer três partidas vence a eliminatória. De quantas formas diferentes a eliminatória pode ocorrer?



Pelo diagrama[2], são 20 maneiras.

[2] Fonte: ROSEN, K H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018.

Princípio da casa dos pombos

Suponha que 10 pombos voem para 9 casas para se empoleirarem. Então, em pelo menos uma dessas casas haverá mais de um pombo.

Fonte: wikipedia

Note que não há garantia que toda casa vai ter pombo, nem que só haverá uma casa com mais de um. Apenas que havéra pelo menos uma casa com mais de um.

Princípio da casa dos pombos

Princípio da casa dos pombos (*the pigeonhole principle*)

Se $k+1$ ou mais objetos são colocados em k caixas, sendo k um inteiro positivo, então há caixa com 2 ou mais objetos.

Aniversário

Em qualquer grupo de 367 pessoas há pelo menos duas com mesma data de aniversário

São 367 pessoas para 366 datas possíveis, há mais “pombos” que “casas”.

Palavras

Em qualquer grupo de 27 palavras há pelo menos duas que começam com a mesma letra

São 27 palavras para 26 letras iniciais possíveis.

Notas

Quantos estudantes precisa ter uma turma da UFV para se ter certeza que pelo menos dois tiveram a mesma nota final?

São 101 notas possíveis (de 0 a 100), então com 102 estudantes certamente haverá nota repetida.

Princípio da casa dos pombos - generalização

Genaralização do Princípio da casa dos pombos

Se N objetos são colocados em k caixas, então pelo menos uma tem $\lceil N/k \rceil$ objetos.

$\equiv$ *Se mais de mk objetos são colocados em k caixas, então há caixa com mais de m objetos.*

Aniversário

Em qualquer grupo de 100 pessoas há pelo menos 9 que fazem aniversário no mesmo mês.

São 100 pessoas para 12 meses, então algum mês tem pelo menos $\lceil 100/12 \rceil = 9$ pessoas.

Baralho

Quantas cartas de um baralho de 52 cartas devem ser escolhidas para se garantir pelo menos 3 do mesmo naipe?

São 4 naipes, então pelo menos 9 cartas, pois assim teremos pelo menos $\lceil 9/4 \rceil = 3$ do mesmo naipe.

Princípio da casa dos pombos - exemplo relacionado

Conexão garantida

- Um laboratório de ciência da computação possui 15 estações de trabalho e 10 servidores
- Um cabo pode ser usado para ligar diretamente uma estação de trabalho a um servidor
- Para cada servidor, apenas uma conexão pode estar ativa a cada momento
- Queremos garantir que, a qualquer momento, qualquer conjunto de 10 ou menos estações de trabalho possa simultaneamente acessar servidores diferentes por conexão direta
- Claramente é possível garantir isso ligando-se cada estação a cada servidor (150 cabos)
- Mas qual o mínimo de conexões diretas para garantir este objetivo?

- Solução
  - Considere ligar cada uma das estações 1 a 10 a um servidor diferente e as estações 11 a 15 a todos os 10 servidores, totalizando $10 + 5 \cdot 10 = 60$ conexões diretas
  - ara um conjunto qualquer de 10 das 15 estações, as estações de 1 a 10 presentes podem acessar servidores diferentes; e cada estação de 11 a 15 presente pode acessar o servidor ligado a uma estação 1 a 10 não presente.
  - Portanto, esta configuração de 60 conexão garante acesso a servidores diferentes
  - Para provar que 60 é o mínimo, note que se houver menos de 60 conexões, algum dos 10 servidores estará ligado a no máximo 5 estações (pois se todos se ligam a 6 ou mais, há 60 ou mais ligações)
  - Os 9 servidores restantes não são suficientes para as demais 10 ou mais estações

Princípio da casa dos pombos - exemplos avançados

Partidas seguidas

Durante um mês de 30 dias, certo time de baseball jogou pelo menos uma partida por dia, mas não mais que 45 partidas no total. Mostre que em algum período de dias consecutivos, o time jogou exatamente 14 partidas.

- Seja a_i o número de jogos que o time jogou até o dia i, inclusive
- Então, $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ é uma sequência crescente de inteiros distintos (pois o time jogou pelo menos uma partida por dia), com $1 \leq a_i \leq 45$ (máximo de partidas)
- $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ também é uma sequência crescente de inteiros distintos, com $15 \leq a_i + 14 \leq 59$
- Os 60 números $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ são todos ≤ 59
- Então, pelo princípio da casa dos pombos, há algum número repetido
- Como $a_i, i = 1, 2, \ldots, 30$ são distintos e $a_i + 14, i = 1, 2, \ldots, 30$ são distintos, o repetido deve ser de conjuntos diferentes, ou seja, $a_i = a_j + 14$ para algum i, j
- Isto indica que o time jogou exatamente 14 jogos do dia $j + 1$ até o dia i.

Princípio da casa dos pombos - exemplos avançados

Múltiplos

Mostre que entre quaisquer $n+1$ inteiros positivos de valor até $2n$, deve haver pelo menos um múltiplo de algum dos outros.

- Escreva cada número a_i como um potência de 2 vezes um número ímpar, isto é, $a_i = 2^{k_i} q_i$, em que k_i é um inteiro não negativo e q_i um inteiro ímpar
- Os inteiros $q_1, \ldots, q_{n+1}$ são ímpares $< 2n$; como há n ímpares menores que $2n$, pelo princípio da casa dos pombos há ímpar repetido entre $q_1, \ldots, q_{n+1}$
- Então há índices i e j distintos com $q_i = q_j$
- Seja q esse valor comum de q_i e q_j
- Nesse caso, $a_i = 2^{k_i} q$ e $a_j = 2^{k_j} q$
- Se $k_i > k_j$, então a_i é múltiplo de a_j; senão, a_j é múltiplo de a_i. $\square$