# Indução matemática

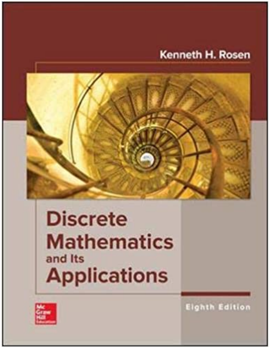
André Gustavo dos Santos[1]

[1] Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF230 - 2021/1

# Conteúdo

Os slides seguintes são baseados nas seções 5.1 e 5.2.1-3 do livro texto da disciplina:




ROSEN, Kenneth H.
Discrete mathematics and its applications.
McGraw-Hill Education, 8th edition, 2018

UFV

# Introdução

- Muitas proposições matemáticas afirmam que uma propriedade é verdadeira para todos os inteiros positivos
- Exemplos
  - um conjunto com $n$ elementos tem $2^n$ subconjuntos
  - a soma dos $n$ primeiros inteiros positivos é $n(n+1)/2$
  - $n! \leq n^n$
  - $n^3 - n$ é divisível por 3

- Indução matemática é utilizada para provar resultados como esses
- Provas por indução têm duas partes:
  - Elas mostram que a proposição é verdadeira para o inteiro positivo 1
  - E mostram que, se a proposição é verdadeira para um inteiro positivo, então é verdadeira para o inteiro seguinte

# Ilustração

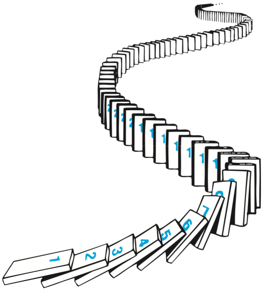


**FIGURE 2** **Illustrating how mathematical induction works using dominoes.**

Suponha uma fileira infinita de dominós com as propriedades:

1. O dominó nº 1 cai
2. Se o dominó nº $(k)$ cai, o dominó nº $(k+1)$ também cai

Podemos concluir que todos os dominós cairão?

# Ilustração

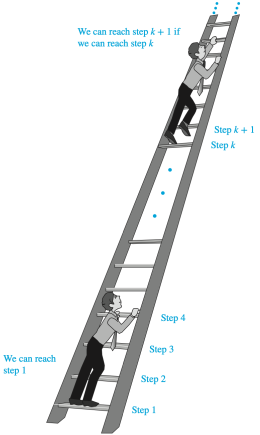



**FIGURE 1** **Climbing an infinite ladder.**

Suponha uma escada infinita com as propriedades:

1. Podemos alcançar o primeiro degrau da escada
2. Se podemos alcançar algum degrau qualquer, então podemos alcançar o seguinte

Podemos concluir que podemos alcançar todos os degraus?

## Formalização

Como vimos, provas por indução têm duas partes:

1. Elas mostram que a proposição é verdadeira para o inteiro positivo 1
2. E mostram que, se a proposição é verdadeira para um inteiro positivo, então é verdadeira para o inteiro seguinte

Formalmente, para provar que $\forall n P(n)$ é verdadeira, temos que provar:

1. **Passo base**: provar que $P(1)$ é verdadeira
2. **Passo indutivo**: provar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$ para qualquer inteiro positivo $k$

Observações

- Pode ser expressa por $[P(1) \wedge \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n P(n)$
- A hipótese de que $P(k)$ é verdadeira é chamada **hipótese indutiva**

ATENÇÃO!

- Na prova por indução, não assumimos que $P(k)$ seja verdadeira para todos os inteiros positivos! Mostramos apenas que, se assumimos que $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é.

## Uso em provas

- Proposições da forma $\forall n P(n)$ no domínio dos inteiros positivos
- Teoremas escritos como proposições no formato acima
- Fórmulas de somatórios
- Inequações
- Identidades em combinações de conjuntos
- Resultados de divisibilidade
- Correção de algoritmos e programas
- Resultados de complexidade de algoritmos
- Definições e estruturas recursivas
- Propriedades de grafos (especialmente árvores)
- etc...

# Por que é uma prova válida?

- Pelo princípio da boa ordenação (da boa ordem):
  "Todo subconjunto não vazio de números naturais de números naturais possui um menor elemento."
- Suponha que provamos que $P(1)$ e $P(k) \rightarrow P(k+1)$ são verdadeiras
- Para mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n$, suponha que não, que haja pelo menos um $n$ tal que $P(n)$ seja falsa
- Seja $S$ o conjunto de elementos para os quais $P(n)$ é falsa
- Como $S$ não é vazio, pelo princípio da boa ordenação ele tem um menor elemento
- Seja $m$ tal elemento
- Como provamos que $P(1)$ é verdadeira, então $m > 1$
- Como $m$ é inteiro positivo $> 1$ então $m - 1$ também é inteiro positivo
- Como provamos que $P(m) \rightarrow P(m+1)$ é verdadeira, se $P(m)$ é falsa, então $P(m-1)$ também é falsa
- Mas então $m - 1 \in S$, e $m$ não é o menor elemento, uma contradição.

## Sobre o passo base

- Muitas vezes temos que provar que $P(n)$ é verdadeira para $n = b$, $b + 1$, $b + 2$, $\ldots$, ou seja, para todo $n \geq b$, mas com $b \neq 1$
- Indução matemática também pode ser usada
- Nesse caso mudamos o passo base de $P(1)$ para $P(b)$

## Somatórios

### Prove que a soma dos $n$ primeiros inteiros positivos vale $n(n+1)/2$

- Seja $P(n)$ a proposição que $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Para provar que $P(n)$ é verdadeira para $n = 1, 2, 3, \ldots$ temos fazer duas coisas:
  - Mostrar que $P(1)$ é verdadeira
  - Mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira para $k = 1, 2, 3, \ldots$
- **Passo base**: $P(1)$ é verdadeira pois $1 = \frac{1(1+1)}{2}$
- **Passo de indução**: para a hipótese indutiva, assuma que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, que $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$. Considerando essa hipótese, devemos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$ $= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \textit{(pela hipótese de indução)} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Então, se $P(k)$ é verdadeira, $P(k+1)$ também é. E isso completa a prova.

## Somatórios

**Qual a soma dos $n$ primeiros ímpares positivos?**

** feito durante a aula*

## Somatórios

**Prove que $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$ vale $2^{n+1} - 1$ para todo $n$ inteiro não negativo**

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{(n+1)} - 1$

** feito durante a aula*

# Inequações

**Prove que $n < 2^n$ para todo inteiro positivo $n$**

** feito durante a aula*

# Inequações

**Prove que $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$**

** feito durante a aula*

## Divisibilidade

**Prove que $n^3 - n$ é divisível por 3 para todo inteiro positivo $n$**

** feito durante a aula*

# Conjuntos

**Um conjunto finito de $n$ elementos tem $2^n$ subconjuntos**

** feito durante a aula*

# Usos criativos

**Guerra de torta**

Um número ímpar de pessoas está em um parque com distâncias distintas entre elas. Dado um sinal, cada pessoa joga uma torta na pessoa mais próxima, acertando-a. Prove que há pelo menos um sobrevivente (alguém que não é acertado por uma torta).

** feito durante a aula*

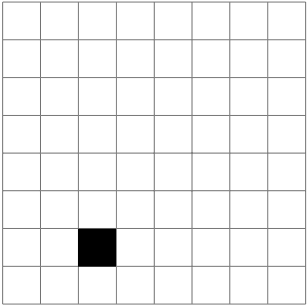
UFV

# Usos criativos

## Ladrilhamento com triminós

Qualquer tabuleiro $2^n \times 2^n$ com uma casa removida, sendo $n$ um inteiro positivo, pode ser completamento ladrilhado com triminós.

Triminós:



** feito durante a aula*

Example com $n = 3$

# Uso de indução para construir algoritmos

**Avaliação de polinômios**

Dada uma sequência de números reais $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e um número real $x$, calcular o valor do polinômio $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

**Hipótese de indução 1 – remover $a_n x_n$**

Sabemos avaliar $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$

**Hipótese de indução 2 – remover $a_n x_n$ (versão melhorada)**

Sabemos avaliar $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdots + a_1 x + a_0$ e calcular $x^{n-1}$

**Hipótese de indução 3 – remover $a_0$ (versão inversa)**

Sabemos avaliar $P'_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} \cdots + a_2 x + a_1$

*Regra de Horner*

UFV

# Comentários

- Queremos resolver $P(n)$, um problema $P$ de tamanho $n$
- Indução permite concentrar em estender soluções de subproblemas menores
- Tentar resolver um $P(n)$ arbitrário supondo que $P(n-1)$ já foi resolvido
- Há muitas formas de definir a hipótese e muitas formas de usá-la
- O truque na última versão foi considerar a entrada da esquerda para direita
- Em algums casos existem versões top-down e bottom-up (no caso de árvores)
- Algumas vezes o incremento é de 2 em 2 (ou mais), entre outras ideias

# Ordenação

**Ordenação**

Dados $n$ números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rearranjá-los em ordem crescente.

- Um dos problemas mais estudados na computação
- Base de muitos algoritmos, consome boa parte do tempo em muitas aplicações
- Há muitas variações do problema e dezenas de métodos de ordenação
- Hipótese: sabemos ordenar $n-1$ elementos
- Ordenar os $n-1$ e colocar o $n$-ésimo no lugar, em ordem $\Rightarrow$ **Inserção**
- Retirar um elemento específico (o maior) e ordenar os $n-1$ restantes $\Rightarrow$ **Seleção**
- Mergesort, Quicksort, ...

# Definição

- Na indução assumimos $P(k)$ como verdadeira
- Em alguns casos precisamos mais que isso
- Na **indução forte** assumimos $P(j)$, com $j = 1 \dots k$, como verdadeira
- Na metáfora da escada, supomos que conseguimos alcançar os degraus 1 a $k$ para provar que conseguimos alcançar o degrau $k + 1$.

Para provar que $\forall n P(n)$ é verdadeira, na indução matemática temos que:

1. **Passo base**: provar que $P(1)$ é verdadeira
2. **Passo indutivo**: provar que $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ para qualquer inteiro positivo $k$

Na indução forte temos que:

1. **Passo base**: provar que $P(1)$ é verdadeira
2. **Passo indutivo**: provar que $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k + 1)$ para qualquer inteiro positivo $k$

# Exemplos

**Se $n$ é um inteiro maior que 1, então $n$ pode ser escrito como produto de primos.**

** feito durante a aula*

# Exemplos

**Qualquer postagem de $\geq$ 12 centavos pode ser selada com selos de 4 e 5 centavos.**

** feito durante a aula*

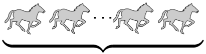
# Exemplo de prova errada de indução

**Paradoxo do cavalo**

Todos os cavalos são da mesma cor.

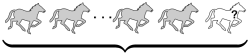
Prova por indução

- Queremos provar $\forall n P(n)$, sendo $P(n)$ a sentença "em um grupo de $n$ cavalos, todos têm a mesma cor."
- **Passo base**: $P(1)$ é verdadeira 
- **Passo indutivo**: Assumindo $P(k)$ verdadeira



$k$ cavalos

queremos provar que $P(k+1)$ é verdadeira



$k$+1 cavalos

** feito durante a aula*