UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
INF 280 – PESQUISA OPERACIONAL I

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
PER-2 / 2021

Exercícios #2
Valor total: 3 pontos

Solução

Questão 1

Construa um modelo matemático que determina as dimensões (raio *r* e altura *h*) de um cilindro de volume máximo cuja área de superfície total (contando o "corpo" e as duas "tampas") seja no máximo 100 cm^2.

Volume: $\pi r^2 h$ Área: $2\pi r^2 + 2\pi rh$

Modelo:
Maximizar Volume = $\pi r^2 h$
sujeito a:
$2\pi r^2 + 2\pi rh \leq 100$

Responda: o modelo obtido acima é linear ou não-linear? Por quê?

Não linear por causa dos termos r^2h, r^2 e rh nas equações.

Questão 2

Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de $100,00 e o lucro unitário de P2 é de $150,00. A empresa necessita de 2 horas para montar uma unidade de P1 e 3 horas para montar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível no setor de montagem é de 120 horas. As demandas esperadas para os 2 produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês. Construa o modelo de PL com o objetivo de maximizar o lucro da empresa.

x_1 e x_2 = quantidade de P1 e P2 fabricado por mês, respectivamente.

Maximizar Lucro = $100x_1 + 150x_2$
sujeito a:
Montagem) $2x_1 + 3x_2 \leq 120$
Limite_P1) $x_1 \leq 40$
Limite_P2) $x_2 \leq 30$

Questão 3

Uma companhia produz dois tipos de camisas: manga longa e manga curta. Na companhia, o único ponto crítico é a mão-de-obra disponível. A camisa de manga longa consome 50% a mais de mão-de-obra do que a de manga curta. Sabe-se também que se toda a produção fosse concentrada na produção de camisas de manga curta, a companhia poderia entregar 400 camisas de manga curta por dia. O mercado limita a produção diária das camisas em 150 mangas longas e 300 mangas curtas. O lucro bruto por camisa de manga longa é de $5,00 e por camisa de manga curta, $3,50. Formular o problema de modo a permitir a determinação das quantidades de camisas a produzir de modo a otimizar o lucro.

```
x1 e x2 = quantidade de camisas de manga longa e curta produzidas por dia,
respectivamente.

Maximizar Lucro = 5x1 + 3.5x2
sujeito a:
Mão_de_Obra) 1.5x1 + x2 ≤ 400
Limite_x1)   x1 ≤ 150
Limite_x2)   x2 ≤ 300
```

Questão 4

Um fazendeiro dispõe de 800 litros de leite por dia para fazer doce de leite e queijo. Cada quilo de queijo requer 9 litros de leite e cada quilo de doce exige 7 litros de leite. Algumas exigências de mercado são impostas:

a) a quantidade máxima de queijo que pode ser feita por dia é 50 quilos;

b) a quantidade de queijo deve ser no máximo igual a 1,5 vezes a quantidade de doce de leite.

A fazenda dispõe de 2 empregados que trabalham, cada um, 7 horas por dia. Cada quilo de queijo requer 30 minutos de mão-de-obra e cada quilo de doce, 6 minutos. Sabendo-se que o quilo de queijo dá uma receita de $5,00 e cada quilo de doce dá $4,00, escreva um modelo de PL que permita determinar a produção diária que maximiza a receita.

```
x1 e x2 = quantidade de doce de leite e de queijo produzidas por dia,
respectivamente.

Maximizar Receita = 4x1 + 5x2
sujeito a:
Máx. Leite)       7x1 + 9x2 ≤ 800
máx._queijo)      x2 ≤ 50
x1_x2)            x2 ≤ 1.5x1
Mão_de_Obra)      6x1 + 30x2 ≤ 2*7*60
```

Questão 5

Uma fundição deve produzir exatamente 10 toneladas de um tipo de ferro-gusa, a partir de quantidades variadas de produtos (ingredientes) como: lingotes de ferro, grafite, restos de processos industriais e domiciliares. O ferro-gusa é composto de carbono, silício, (entre outros elementos). Os dados dos produtos estão na tabela a seguir, bem como deve ser a composição do ferro-gusa.

Produtos / Composição %	Lingotes	Grafite	Restos Industriais	Restos domiciliares	Composição Mínima
Carbono	0,5	0,9	0,5	0,15	0,43
Silício	0,2		0,02	0,29	0,19
Manganês	0,23		0,16	0,05	0,12
Custo R$/ton	90	180	25	35	

Escreva um modelo de otimização linear para determinar as quantidades dos ingredientes na liga metálica de modo que o custo seja mínimo.

```
xj = qtd (ton) de cada ingrediente usado na liga.
j = 1..4, onde 1 = Lingotes, 2 = Grafite etc.

Minimizar Custo = 900x1 + 180x2 + 25x3 + 35x4
s.a:
Total)      x1 + x2 + x3 + x4 = 10
Carbono)    0.5x1 + 0.9x2 + 0.5x3 + 0.15x4 ≥ 0.43 * 10
Silício)    0.2x1         + 0.02x3 + 0.29x4 ≥ 0.19 * 10
Manganês)   0.23x1        + 0.16x3 + 0.05x4 ≥ 0.12 * 10
```

Questão 6

Certa fazenda usa no mínimo 800 kg de ração especial por dia. Essa ração é uma mistura de milho e soja com as composições elencadas na tabela abaixo.

Ingrediente	kg de nutriente por kg de ingrediente		Custo dos ingredientes (R$/kg)
	Proteína	Fibra	
Milho	0,09	0,02	0,30
Soja	0,6	0,06	0,90

Os requisitos nutricionais da ração especial são de no mínimo 30% de proteína e de no máximo 5% de fibra. A fazenda quer determinar a mistura de ingredientes que gera a ração de mínimo custo diário. Escreva um modelo de PL para resolver esse problema.

```
x1 e x2 = qtd (kg) de cada ingrediente (Milho e Soja) usado na ração.

Minimizar Custo = 0.3x1 + 0.9x2
s.a:
Total Ração) x1 + x2 ≥ 800
Proteína)    0.09x1 + 0.6x2 ≥ 0.3 * (x1 + x2)
Fibra)       0.02x1 + 0.06x2 ≤ 0.05 * (x1 + x2)
```

Questão 7

Em grande parte dos *campi* universitários, os departamentos acadêmicos contratam alunos para prestar pequenos serviços, como atender telefone e fazer trabalhos de digitação. A necessidade desse tipo de serviço varia durante o horário normal de trabalho (8h às 17h). No Departamento de Engenharia de Produção, o número mínimo necessário de estudantes é de dois entre 8h e 10h, três entre 10h01m e 11h, quatro entre 11h01m e 13h, e três entre 13h01m e 17h. Cada estudante trabalha por três horas consecutivas (exceto os que começam às 15h01m, que trabalham duas horas, e os que começam às 16h01m, que trabalham uma hora). Devido a seu horário flexível, de modo geral os estudantes podem se apresentar para o trabalho a qualquer hora durante o horário normal de trabalho, mas nenhum deles quer começar a trabalhar na hora do almoço (meio dia). Determine o número mínimo de estudantes que o Departamento de Engenharia de Produção deve contratar e especifique a quantidade de estudantes que devem se apresentar para trabalhar em cada hora durante o horário normal de trabalho.

j:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Horário:	08:01 09:00	09:01 10:00	10:01 11:00	11:01 12:00	12:01 13:00	13:01 14:00	14:01 15:00	15:01 16:00	16:01 17:00
Demanda:	2	2	3	4	4	3	3	3	3

xj = número de alunos que começam a trabalhar no horário j. Obs.: x5 = 0.

Min. f = x1 + x2 + x3 + x4 + x6 + x7 + x8 + x9
s.a.
1) x1 ≥ 2
2) x1 + x2 ≥ 2
3) x1 + x2 + x3 ≥ 3
4) x2 + x3 + x4 ≥ 4
5) x3 + x4 ≥ 4
6) x4 + x6 ≥ 3
7) x6 + x7 ≥ 3
8) x6 + x7 + x8 ≥ 3
9) x7 + x8 + x9 ≥ 3

Obs.: poderíamos usar restrições do tipo "=" no lugar de "≥" para esse problema. No entanto, devemos usar "=" apenas quando for mandatório, sob o risco do modelo ficar com as restrições "apertadas" demais e não ter solução alguma.

Questão 8

Um fazendeiro possui três propriedades de produtividade aproximadamente igual. O total produzido em cada fazenda depende do tamanho da mesma e da quantidade de água disponível para sua irrigação. Os dados correspondentes são os seguintes:

Fazenda	*Área de cultivo (hectares)*	*Água disponível (m³)*
1	950	1500
2	735	900
3	840	1200

Três tipos de cultura devem ser desenvolvidos nas três fazendas, e cada cultura tem consumo de água e lucros próprios. Além disso, a área máxima que deve ser dedicada a cada cultura também está determinada. Os dados são:

Cultura	*Área máxima (hectares)*	**Consumo de água** *(m³/hectare)*	*Lucro ($)*
A	950	5,0	6000
B	800	4,0	4500
C	1200	4,5	5500

Seja x_{A1} a área a ser utilizada pela cultura A na fazenda 1, e assim por diante. (a) Formule o problema usando um modelo de PL a fim de que o lucro total seja máximo. (b) Que modificações teríamos de fazer ao modelo se toda a reserva de água (3600 m^3) pudesse ser compartilhada entre as três fazendas?

X_{ij} - Quantidade da cultura i plantada na fazenda j.

Max. $6000 * (X_{a1} + X_{a2} + X_{a2}) + 4500X_{b1} + 4500X_{b2} + 4500X_{b3} + 5500X_{c1} + 5500X_{c2} + 5500X_{c3}$
s.a.
Área 1) $X_{a1} + X_{b1} + X_{c1} \leq 950$
Área 2) $X_{a2} + X_{b2} + X_{c2} \leq 735$
Área 3) $X_{a3} + X_{b3} + X_{c3} \leq 840$
Água 1) $5X_{a1} + 4X_{b1} + 4.5X_{c1} \leq 1500$
Água 2) $5X_{a2} + 4X_{b2} + 4.5X_{c2} \leq 900$
Água 3) $5X_{a3} + 4X_{b3} + 4.5X_{c3} \leq 1200$
Área A) $X_{a1} + X_{a2} + X_{a3} \leq 950$
Área B) $X_{b1} + X_{b2} + X_{b3} \leq 800$
Área C) $X_{c1} + X_{c2} + X_{c3} \leq 1200$

b) Substituir as três restrições de Água por apenas uma:

Água) $5(X_{a1} + X_{a2} + X_{a3}) + 4(X_{b1} + X_{b2} + X_{b3}) + 4.5(X_{c1} + X_{c2} + X_{c3}) \leq 3600$