Exercícios #10
Valor total: 3 pontos

Solução

Problema de Maximização			**Problema de Minimização**	
Variáveis	≥ 0	$\leftrightarrow$	$\geq$	**Restrições**
	≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$	
	Livre	$\leftrightarrow$	$=$	
Restrições	$\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0	**Variáveis**
	$\geq$	$\leftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\leftrightarrow$	Livre	

Relação entre problemas Primal e Dual

Questão 1

Considere a Questão 3 dos Exercícios #2.

a) Mostre a Tabela Simplex referente à solução ótima do problema.

```
x1 e x2 = quantidade de camisas de manga longa e curta produzidas por dia.

Maximizar Lucro = 5x1 + 3.5x2
sujeito a:
Mão_de_Obra) 1.5x1 + x2 ≤ 400
Limite_x1)   x1 ≤ 150
Limite_x2)   x2 ≤ 300
```

Base	***x1***	***x2***	***s1***	***s2***	***s3***	***RHS***
f	0	0	10/3	0	1/6	4150/3
x2	0	1	0	0	1	300
x1	1	0	2/3	0	-2/3	200/3
s2	0	0	-2/3	1	2/3	250/3

b) Em um determinado mês, a fábrica foi avisada que haveria racionamento de energia, e que ela não poderia gastar mais do que 650 kWh na produção das camisas. Sabendo que cada camisa de manga longa gasta 2.5 kWh, e a de manga curta, 1.3 kWh, verifique se a solução original se mantém ótima.

Nova restrição:

```
Energia) 2.5x1 + 1.3x2 ≤ 650
         2.5*(200/3) + 1.3*300 ≤ 650
         556.67 ≤ 650
```

A nova restrição continua válida, o que significa que a solução ótima calculada no item (a) será mantida.

c) No mês seguinte, o limite do racionamento de energia foi reduzido de 650 para 500 kWh. verifique se a solução original se mantém ótima e, caso fique inviável, use o Simplex Dual para obter a nova solução ótima e descreva a nova solução obtida.

Nesse caso, teremos:

$556.67 \leq 500$

o que é FALSO. Portanto devemos inserir a nova restrição e usar o Simplex Dual:

$2.5x1 + 1.3x2 - s4 = 500$

Base	***x1***	***x2***	***s1***	***s2***	***s3***	***s4***	***RHS***
f	0	0	10/3	0	1/6	0	4150/3
x2	0	1	0	0	1	0	300
x1	1	0	2/3	0	-2/3	0	200/3
s2	0	0	-2/3	1	2/3	0	250/3
s4	2.5	1.3	0	0	0	1	500

Zerando os dois valores em destaque para retornar a tabela à forma canônica, temos:

Base	***x1***	***x2***	***s1***	***s2***	***s3***	***s4***	***RHS***
f	0	0	10/3	0	1/6	0	4150/3
x2	0	1	0	0	1	0	300
x1	1	0	2/3	0	-2/3	0	200/3
s2	0	0	-2/3	1	2/3	0	250/3
s4	0	0	-5/3	0	0.367	1	-56.667

A única opção é o ***s1*** entrar no lugar do ***s4***. Fazendo o pivoteamento, temos:

Base	***x1***	***x2***	***s1***	***s2***	***s3***	***s4***	***RHS***
f	0	0	0	0	0.9	2	1270
x2	0	1	0	0	1	0	300
x1	1	0	0	0	-0.52	0.4	44
s2	0	0	0	1	0.52	-0.4	106

s1	0	0	1	0	-0.22	-0.6	34

A solução acima já é a ótima. Teremos a produção de 44 camisas de manga longa e 300 de manga curta. O lucro cairá de $1.383,33 para $1.270,00

d) Antevendo mais períodos de racionamento no futuro, a empresa decidiu estudar a possibilidade de produzir também camisas Pólo. Esse tipo de camisa gasta o dobro de mão de obra da camisa de manga curta, 2 kWh de energia, mas em compensação dá um lucro de $6,20 cada. Use a teoria da Dualidade para determinar se vale a pena ou não produzir e vender essa camisa e, se sim, determine a nova solução ótima usando algum software apropriado.

Novo modelo, já com as variáveis de folga:

```
x1 = quantidade de camisas de manga longa produzidas por dia.
x2 = quantidade de camisas de manga curta produzidas por dia.
x3 = quantidade de camisas pólo produzidas por dia.

Maximizar      5x1 + 3.5x2 + 6.2x3
sujeito a:
Mão_de_Obra) 1.5x1     + x2   + 2x3 + s1                  = 400
Limite_x1)      x1                       + s2             = 150
Limite_x2)                x2                  + s3        = 300
Energia)     2.5x1 + 1.3x2   + 2x3                 + s4 = 500
```

A nova coluna inserida no modelo está destacada acima. Essa nova coluna no modelo Primal corresponde a uma nova restrição no modelo Dual:

$2y_1 + 2y_4 \geq 6.2$

onde y_1 e y_4 são os preços duais das restrições de mão de obra e energia, respectivamente. Assim, temos:

$2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \geq 6.2 \therefore 4 \geq 6.2$

O resultado é FALSO, o que significa que a solução ótima atual fica inviável com a introdução desse novo produto. Ou seja, vale a pena considerá-lo na produção:

Base	***x1***	***x2***	***x3***	***s1***	***s2***	***s3***	***s4***	***RHS***
f	0	0	0	2.75	0	0.295	0.35	1363.5
x3	0	0	1	1.25	0	-0.275	-0.75	42.5
s2	0	0	0	1	1	0.3	-1	140
x2	0	1	0	0	0	1	0	300
x1	1	0	0	-1	0	-0.3	1	10

Na nova solução teremos a produção de 10 camisas de manga longa, 300 de manga curta e 42.5 camisas Pólo. O lucro será de $1.365,50, recuperando boa parte do lucro perdido no item (c). Toda a mão de obra e energia serão esgotados com essa produção.

Questão 2

Considere a Questão 4 dos Exercícios #2.

a) Mostre a Tabela Simplex referente à solução ótima do problema.

```
x1 e x2 = quantidade de doce de leite e de queijo produzidas por dia.

Maximizar Receita = 4x1 + 5x2
sujeito a:
Máx. Leite)       7x1 + 9x2 ≤ 800
máx._queijo)      x2 ≤ 50
x1_x2)            x2 ≤ 1.5x1
Mão_de_Obra)      6x1 + 30x2 ≤ 2*7*60
```

Base	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS
f	0	1/7	4/7	0	0	0	3200/7
s3	0	41/14	3/14	0	1	0	1200/7
s2	0	1	0	1	0	0	50
s4	0	156/7	-6/7	0	0	1	1080/7
x1	1	9/7	1/7	0	0	0	800/7

b) Em um determinado ano, a região enfrentou uma seca muito forte, e o fazendeiro teve que restringir a água usada na produção para apenas 50 litros por dia. Considerando que cada kg de doce de leite requer meio litro de água, e cada kg de queijo requer 800 ml de água para sua produção, verifique se a solução original se mantém ótima e, caso fique inviável, use o Simplex Dual para obter a nova solução ótima e descreva a nova solução obtida.

Nova restrição:

```
Água) 0.5x1 + 0.8x2 ≤ 50
      0.5*(800/7) + 0.8*0 ≤ 50
      57.14 ≤ 50
```

o que é FALSO. Portanto devemos inserir a nova restrição e usar o Simplex Dual:

```
0.5x1 + 0.8x2 + s5 = 50
```

Base	x1	x2	s1	s2	s3	s4	s5	RHS
f	0	1/7	4/7	0	0	0	0	3200/7
s3	0	41/14	3/14	0	1	0	0	1200/7
s2	0	1	0	1	0	0	0	50
s4	0	156/7	-6/7	0	0	1	0	1080/7

x1	1	9/7	1/7	0	0	0	0	800/7
s5	1/2	4/5	0	0	0	0	1	50

Zerando o valor em destaque para retornar a tabela à forma canônica, temos:

Base	***x1***	***x2***	***s1***	***s2***	***s3***	***s4***	***s5***	***RHS***
f	0	1/7	4/7	0	0	0	0	3200/7
s3	0	41/14	3/14	0	1	0	0	1200/7
s2	0	1	0	1	0	0	0	50
s4	0	156/7	-6/7	0	0	1	0	1080/7
x1	1	9/7	1/7	0	0	0	0	800/7
s5	0	11/70	-1/14	0	0	0	1	-50/7

A única opção é o ***s1*** entrar no lugar do ***s5***. Fazendo o pivoteamento, temos:

Base	***x1***	***x2***	***s1***	***s2***	***s3***	***s4***	***s5***	***RHS***
f	0	7/5	0	0	0	0	8	400
s3	0	17/5	0	0	1	0	3	150
s2	0	1	0	1	0	0	0	50
s4	0	102/5	0	0	0	1	-12	240
x1	1	8/5	0	0	0	0	2	100
s1	0	-11/5	1	0	0	0	-14	100

A solução acima já é a ótima. Teremos a produção de 100 kg de doce de leite e ainda nada de queijo. A receita cairá de $457,14 para $400,00.

c) Vendo que a produção de queijo não está valendo a pena e que ainda há sobra de leite e mão de obra, o fazendeiro decidiu estudar a possibilidade de produzir também iogurte natural. Cada quilo de iogurte requer 2 litros de leite, 10 minutos de mão de obra e 500 ml de água. Use a teoria da Dualidade para determinar a receita mínima que o fazendeiro precisa ter com cada kg de iogurte para que sua produção valha a pena.

Novo modelo, já com as variáveis de folga:

```
x1 = kg de doce de leite produzidos por dia.
x2 = kg de queijo produzidos por dia.
x3 = kg de iogurte natural produzidos por dia.

Maximizar       4x1    + 5x2  + c3x3
sujeito a:
Máx. Leite)     7x1    + 9x2   + 2x3 + s1                       = 800
máx._queijo)             x2              + s2                   = 50
x1_x2)       -1.5x1     + x2                  + s3              = 0
Mão_de_Obra)    6x1   + 30x2  + 10x3               + s4         = 840
Água)         0.5x1 + 0.8x2 + 0.5x3                     + s5    = 50
```

A nova coluna inserida no modelo está destacada acima. Essa nova coluna no modelo Primal corresponde a uma nova restrição no modelo Dual:

$$2y_1 + 10y_4 + 0.5y_5 \geq c_3$$

onde y_1, y_4 e y_5 são os preços duais das restrições de leite, mão de obra e água, respectivamente. Assim, temos:

$$2 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0.5 \cdot 8 \geq c_3 \therefore c_3 \leq 4$$

Ou seja, enquanto a receita do iogurte for menor ou igual a 4, não valerá a pena produzi-lo. Se o fazendeiro puder vender o iogurte a um preço maior que $4,00 o kg, ele obterá uma vantagem.

d) Usando um software de sua preferência, determine a solução ótima para o problema caso o fazendeiro possa vender o iogurte a $5 o kg. Descreva a solução e determine também nesse caso qual deverá ser o preço mínimo para a venda do queijo para que seja interessante sua produção.

Resolvendo pelo LINGO, temos:

```
  Objective value:      460.0000

        Variable           Value        Reduced Cost
              X1        40.00000            0.000000
              X2        0.000000            6.500000
              X3        60.00000            0.000000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
       MAX_LEITE        400.0000            0.000000
      MAX_QUEIJO        50.00000            0.000000
           X1_X2        60.00000            0.000000
     MAO_DE_OBRA        0.000000           0.2500000
            AGUA        0.000000            5.000000
```

O fazendeiro deverá produzir 40 kg de doce de leite e 60 kg de iogurte natural. Ainda haverá sobra de 400 litros de leite, mas a mão de obra e a água serão esgotados. A receita total será de $460 por dia. Para que seja vantajoso produzir queijo, ele terá que vende-lo por no mínimo 5 + 6,5 = $11,50.

Questão 3

Considere a Questão 3 dos Exercícios #5, cuja solução é dada abaixo:

```
A, B, C = qtd. de caixas de 1kg de cada tipo de cereal.

Max 2*A + 2.5*B + 3*C
    - 0.1*((50/57)*A + (60/65)*B + (60/69)*C)
    - 0.12*((5/57)*A + (3/69)*C)
    - 0.11*((2/65)*B + (4/69)*C)
    - 0.2*((2/57)*A + (3/65)*B + (2/69)*C)

Max 1.894736842105263 * A + 2.395076923076923 * B + 2.895652173913044 * C
(essas contas podem ser obtidas através do próprio LINGO, através do menu Solver >
Generate > Display Model)

s.a.
[Min_A]           A                         >= 500
[Min_B]                       B             >= 600
[Min_C]                                 C >= 500
[Aveia]    (50/57)*A + (60/65)*B + (60/69)*C <= 30000
[Passas]    (5/57)*A             + (3/69)*C <= 2000
[Coco]                 (2/65)*B  + (4/69)*C <= 1000
[Amendoas]  (2/57)*A  + (3/65)*B  + (2/69)*C <= 1000

  Objective value:       76467.97

        Variable           Value        Reduced Cost
               A        13723.85            0.000000
               B        600.0000            0.000000
               C        16931.54            0.000000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
           MIN_A        13223.85            0.000000
           MIN_B        0.000000          -0.8033846
           MIN_C        16431.54            0.000000
           AVEIA        2684.615            0.000000
          PASSAS        60.00000            0.000000
            COCO        0.000000            22.95000
        AMENDOAS        0.000000            54.00000
```

a) A empresa deseja estudar a possibilidade de aumentar ainda mais seus lucros, fabricando um novo produto: Cereal D. Esse novo cereal usará uma mistura de 60:2:1:1 de aveia, passas, coco e amêndoas. Use a teoria da Dualidade para determinar o menor valor de venda para cada caixa desse cereal para que sua produção valha a pena.

A nova coluna inserida no modelo será:

c4
0
0
0
60/64
2/64
1/64
1/64

Essa nova coluna no modelo Primal corresponde a uma nova restrição no modelo Dual:

$(60/64)y_4 + (2/64)y_5 + (1/64)y_6 + (1/64)y_7 \geq c_4$

Assim, temos:

$(60/64) \cdot 0 + (2/64) \cdot 0 + (1/64) \cdot 22.95 + (1/64) \cdot 54 \geq c_4 \therefore c_4 \leq 1.20234375$

Ou seja, enquanto a (receita – custos) do cereal D for menor ou igual ao valor acima, não valerá a pena produzi-lo. Calculando os custos para esse cereal, temos:

$(60/64) \cdot 0.1 + (2/64) \cdot 0.12 + (1/64) \cdot 0.11 + (1/64) \cdot 0.2 = 0.10234375$

Portanto, o valor mínimo de venda para cada caixa deverá ser de:

1.20234375 + 0.10234375 = $1.30

b) Calcule e descreva a nova solução obtida caso o cereal D possa ser vendido a $1,80 a caixa de 1 kg.

```
  Objective value:      79086.50

        Variable           Value        Reduced Cost
               A        12546.75            0.000000
               B        600.0000            0.000000
               C        15506.63            0.000000
               D        5286.627            0.000000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
               1        79086.50            1.000000
           MIN_A        12046.75            0.000000
           MIN_B        0.000000          -0.5032663
           MIN_C        15006.63            0.000000
           AVEIA        0.000000           0.9753846
          PASSAS        60.00000            0.000000
            COCO        0.000000            20.51154
        AMENDOAS        0.000000            29.61538
```

Produzir 12.546,75 caixas de cereal A, 600 caixas de B, 15.506,63 caixas de C e 5.286,63 caixas de D.
O lucro será de $ 79.086,50.
Haverá uma sobra de 60 kg de passas.