

Prova 2

Solução

Valor total: 15 pontos

Quadro Simplex (maximização):

| | x_B | x_N | |
|-------|-------|-------------------------|----------------|
| f | 0 | $-c_j + c_B B^{-1} a_j$ | $c_B B^{-1} b$ |
| x_B | I | $B^{-1} N$ | $B^{-1} b$ |

| Problema de Maximização | | Problema de Minimização |
|-------------------------|-------------------|-------------------------|
| ≥ 0 | \leftrightarrow | \geq |
| ≤ 0 | \leftrightarrow | \leq |
| Livre | \leftrightarrow | $=$ |
| \leq | \leftrightarrow | ≥ 0 |
| \geq | \leftrightarrow | ≤ 0 |
| $=$ | \leftrightarrow | Livre |
| Variáveis | | Restrições |
| Restrições | | Variáveis |

(Baseado em Hillier & Lieberman, pág. 90)

A Empresa de Manufatura Ômega descontinuou a produção de uma determinada linha de produtos não-lucrativa. Esse fato acabou criando um considerável excesso de capacidade produtiva. A direção está levando em conta a possibilidade de dedicar esse excesso de capacidade produtiva para um ou mais produtos; a estes vamos chamá-los produtos 1, 2 e 3. A capacidade disponível nas máquinas que poderiam limitar a produção está sintetizada na tabela a seguir:

| Tipo de Máquina | Tempo Disponível (Horas-Máquina por Semana) |
|-----------------|--|
| Fresadora | 500 |
| Torno | 350 |
| Retificadora | 150 |

O número de horas-máquina exigidas para cada unidade do respectivo produto é:

| Tipo de Máquina | Produto 1 | Produto 2 | Produto 3 |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|
| Fresadora | 9 | 3 | 5 |
| Torno | 5 | 4 | 0 |
| Retificadora | 3 | 0 | 2 |

O departamento de vendas sinaliza que o potencial de vendas para os produtos 1 e 2 excede a taxa de produção máxima e que o potencial de vendas para o produto 3 é de 20 unidades por semana. O lucro unitário seria, respectivamente, de US\$ 50, US\$ 20 e US\$ 25 para os produtos 1, 2 e 3. O objetivo é determinar quanto de cada produto a Ômega deveria produzir para maximizar os lucros.

1. Formule um modelo de PL que pode ser usado para resolver o problema.

x_j = quanto de cada produto j a ser fabricado por semana.

Max. $50x_1 + 20x_2 + 25x_3$

s.a.

Fresadora) $9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500$

Torno) $5x_1 + 4x_2 \leq 350$

Retificadora) $3x_1 + 2x_3 \leq 150$

Max_P3) $x_3 \leq 20$

2. Copie a solução completa obtida pelo LINGO (solução + análise de sensibilidade).

| | | |
|------------------|------------------|--------------|
| Objective value: | | 2904.762 |
| Variable | Value | Reduced Cost |
| X1 | 26.19048 | 0.000000 |
| X2 | 54.76190 | 0.000000 |
| X3 | 20.00000 | 0.000000 |
| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
| FRESADORA | 0.000000 | 4.761905 |
| TORNO | 0.000000 | 1.428571 |
| RETIFICADORA | 31.42857 | 0.000000 |
| MAX_P3 | 0.000000 | 1.190476 |

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

| | | | |
|----------|---------------------|--------------------|--------------------|
| Variable | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
| X1 | 50.00000 | 1.250000 | 25.00000 |
| X2 | 20.00000 | 20.00000 | 1.000000 |
| X3 | 25.00000 | INFINITY | 1.190476 |

Righthand Side Ranges:

| | | | |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|
| Row | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
| FRESADORA | 500.0000 | 55.00000 | 137.5000 |
| TORNO | 350.0000 | 183.3333 | 73.33333 |
| RETIFICADORA | 150.0000 | INFINITY | 31.42857 |
| MAX_P3 | 20.00000 | 27.50000 | 20.00000 |

3. Descreva a solução encontrada (variáveis de decisão, folgas, F.O.).

Fabricar 26,2 unidades do produto 1, 54,76 unidades do produto 2 e 20 unidades do produto 3 por semana, fornecendo um lucro semanal de US\$ 2.904,76. Haverá uma sobra de 31,4 horas-máquina da Retificadora.

4. Monte a matriz B correspondente à Base ótima.

$$x_B = (x_1, x_2, x_3, s_3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Suponha que um engenheiro da empresa encontre um dispositivo para aumentar a capacidade da Fresadora em 27 horas-máquina. Com isso ela passaria de 500 para 527 horas-máquina por semana. O aluguel desse dispositivo seria de US\$ 100 por semana. Verifique se o uso desse dispositivo vale a pena. Use apenas os dados obtidos na questão 2 para justificar sua resposta.

Valeria a pena sim.

Com um aumento de 27 horas-máquina na fresadora, não haverá mudança de Base, de acordo com a análise de sensibilidade. Além disso, o Preço Dual da fresadora indica que teremos um aumento de US\$

4.76 de lucro para cada hora-máquina a mais. Dessa forma, teríamos um aumento de lucro total de US\$ 128.52. Com um custo de US\$ 100, sobraria ainda um lucro adicional de US\$ 28.52, fazendo o dispositivo valer a pena.

6. Se você pudesse alterar o limite de tempo de apenas uma das máquinas sem custo adicional algum, qual deles causaria o maior impacto no lucro total? Justifique sua resposta e calcule o aumento máximo no lucro que poderia ser obtido, usando apenas as informações da resposta da questão 2.

| Tipo de Máquina | Preço Dual | Aumento máximo | Lucro adicional |
|-----------------|------------|----------------|-----------------|
| Fresadora | 4.761905 | 55 | 261,90 |
| Torno | 1.428571 | 183.33 | 261,90 |

Vemos pelos cálculos acima que não faria diferença aumentarmos o tempo da Fresadora ou do Torno. Os dois forneceriam um lucro adicional total de US\$ 261,90.

7. Suponha que, numa determinada semana, a Retificadora tenha um problema mecânico e precise de manutenção, reduzindo sua disponibilidade naquela semana para 100 horas-máquina. Faça apenas um pivoteamento no Simplex Dual e diga se a solução obtida já é a solução ótima, ou se ainda é inviável (o que indicaria a necessidade de continuação do Simplex Dual), ou se é viável mas ainda não é ótima. Justifique sua resposta. **Obs.: considere os dados originais do problema e as soluções obtidas nas Questões 1 a 4.**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4/21 & -1/7 & 0 & -20/21 \\ -5/21 & 3/7 & 0 & 25/21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4/7 & 3/7 & 1 & 6/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 350 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.19 \\ 54.76 \\ 20 \\ -18.57 \end{bmatrix}$$

$$f = 50 \cdot 26.19 + 20 \cdot 54.76 + 25 \cdot 20 = 2904.762$$

| Base | x1 | x2 | x3 | s1 | s2 | s3 | s4 | RHS |
|------|----|----|----|--------|------|----|--------|----------|
| f | 0 | 0 | 0 | 100/21 | 10/7 | 0 | 25/21 | 2904.762 |
| x1 | 1 | 0 | 0 | 4/21 | -1/7 | 0 | -20/21 | 26.19 |
| x2 | 0 | 1 | 0 | -5/21 | 3/7 | 0 | 25/21 | 54.76 |
| x3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| s3 | 0 | 0 | 0 | -4/7 | 3/7 | 1 | 6/7 | -18.57 |

s1 entra na Base no lugar de s3...

| Base | x1 | x2 | x3 | s1 | s2 | s3 | s4 | RHS |
|------|----|----|----|----|----|------|------|------|
| f | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 25/3 | 25/3 | 2750 |
| x1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/3 | -2/3 | 20 |

| | | | | | | | | |
|-------------------------|---|---|---|---|--------|---------|--------|---------|
| x_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/4$ | $-5/12$ | $5/6$ | $125/2$ |
| x_3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| s_1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $-3/4$ | $-7/4$ | $-3/2$ | $65/2$ |

Essa solução já é a ótima, pois todos os $x_{ij} \geq 0$ e não há nenhum custo reduzido negativo.

8. Em certa ocasião, a direção da empresa cogitou a fabricação de um novo produto, que precisaria de 4 horas-máquina na Fresadora, 2 no Torno e 4 na Retificadora. Usando a restrição Dual correspondente, determine o lucro unitário mínimo para esse novo produto, de modo que sua produção seja interessante economicamente. **Obs.: considere os dados originais do problema e as soluções obtidas nas Questões 1 a 4.**

A nova coluna inserida no modelo Primal corresponderia a uma nova restrição no modelo Dual:

$$4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq c_4$$

onde y_1, y_2 e y_3 são os preços duais das três restrições. Assim, temos:

$$4 \cdot 4.761905 + 2 \cdot 1.428571 + 4 \cdot 0 \geq c_4 \therefore c_4 \leq 21.90$$

Ou seja, para que valha a pena fabricar o Produto 4, ele terá que apresentar um lucro superior a US\$ 21,90 por unidade.