

**Exercícios #11**  
**Valor total: 3 pontos**

**Solução**

Quadro Simplex (maximização):

	$x_B$	$x_N$	
$f$	0	$-c_j + c_B B^{-1} a_j$	$c_B B^{-1} b$
$x_B$	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Problema de Maximização		Problema de Minimização
$\geq 0$	$\leftrightarrow$	$\geq$
Variáveis $\leq 0$	$\leftrightarrow$	$\leq$ Restrições
Livre	$\leftrightarrow$	$=$
$\leq$	$\leftrightarrow$	$\geq 0$
Restrições $\geq$	$\leftrightarrow$	$\leq 0$ Variáveis
$=$	$\leftrightarrow$	Livre

Baseado em (Hillier & Lieberman), pág. 48.

A NORI & LEETS CO., um dos maiores produtores de aço em sua região, localiza-se na cidade de Steeltown e é o único grande empregador nessa localidade. Steeltown cresceu e prosperou juntamente com a companhia que agora emprega cerca de 50.000 residentes. Portanto, o pensamento dos habitantes da cidade sempre foi: "Se é bom para a Nori & Leets, então é bom para a cidade". Entretanto, esse tipo de pensamento está mudando: a poluição descontrolada gerada pelos fornos da empresa está destruindo a aparência da cidade e colocando em risco a saúde da população.

Uma revolta recente dos acionistas resultou na eleição de uma nova diretoria mais esclarecida para a empresa. Esses novos diretores estão dispostos a seguir políticas socialmente corretas e vêm discutindo com governantes de Steeltown e representantes da sociedade o que fazer em relação ao problema da poluição do ar. Juntos, eles chegaram a rigorosos padrões de qualidade do ar para a camada atmosférica de Steeltown.

Os três tipos principais de poluentes nessa camada atmosférica são material particulado, óxido de enxofre e hidrocarbonetos. Os novos padrões requerem que a empresa reduza a emissão anual desses poluentes em pelo menos os volumes especificados na Tabela a seguir. A diretoria instruiu a gerência para que fizesse que o pessoal da engenharia determinasse como atingir essas reduções do modo mais econômico possível.

Poluente	Redução mínima necessária na taxa de emissão anual (em milhões de kg)
Particulados	60
Óxido de enxofre	150
Hidrocarbonetos	125

As siderúrgicas possuem duas fontes primárias de poluição: os alto-fornos para fabricar lingotes de gusa e os fornos Siemens-Martin para transformar esses lingotes em aço. Em ambos os casos os engenheiros decidiram que os tipos mais eficientes de métodos para redução de poluição seriam: (1) aumentar a altura das chaminés, (2) usar dispositivos filtrantes nas chaminés e (3) incluir materiais limpadores de alta qualidade entre os combustíveis usados nos fornos. Cada um desses métodos possui sua limitação tecnológica na intensidade em que pode ser utilizado (por exemplo, um aumento máximo permitido na altura das chaminés), mas ainda há uma flexibilidade considerável para emprego do método em uma fração de seu limite tecnológico. A Tabela a seguir ilustra a quantidade de emissão (em milhões de kg por ano) que pode ser eliminada de cada tipo de forno usando-se 100% do limite tecnológico para quaisquer dos métodos de redução de poluição.

	Chaminés mais Altas		Filtros		Combustíveis Melhores	
Poluente	Alto-fornos	Fornos Siemens-Martin	Alto-fornos	Fornos Siemens-Martin	Alto-fornos	Fornos Siemens-Martin
Particulados	12	9	25	20	17	13
Óxido de enxofre	35	42	18	31	56	49
Hidrocarbonetos	37	53	28	24	29	20

Para fins de análise, parte-se do pressuposto de que cada método pode ser utilizado em níveis inferiores ao máximo para atingir qualquer fração das reduções de taxas de emissão apresentadas nessa tabela. Além disso, as frações podem ser diferentes para os alto-fornos e para os fornos Siemens-Martin. Para cada tipo de forno,

a redução de emissão alcançada por método não é afetada substancialmente por quaisquer que sejam os outros métodos também usados. Após esses dados terem sido analisados, tornou-se evidente que nenhum método por si só seria capaz de alcançar todas as reduções exigidas. No entanto, combinar todos os três métodos a plena carga em ambos os tipos de fornos (o que teria um custo proibitivo caso os produtos da empresa tivessem de permanecer com preços competitivos) é muito mais adequado. Portanto, os engenheiros chegaram à conclusão que teriam de usar alguma combinação de métodos, talvez com capacidades parciais, baseados em custos relativos.

Além disso, em virtudes das diferenças entre os alto-fornos e os fornos Siemens-Martin, os dois tipos provavelmente não usariam a mesma combinação. Foi realizado um estudo para estimar o custo anual total para cada um dos métodos de redução de poluição. Essa análise levou a estimativas do custo anual total (em milhões de dólares) dados na Tabela a seguir para emprego dos métodos a plena capacidade. Também foi determinado que o custo de um método sendo usado em um nível mais baixo é proporcional à fração da capacidade de redução de poluição dada na Tabela anterior que é alcançada. Portanto, para qualquer fração atingida, o custo anual total seria essa fração da quantidade correspondente da Tabela de custos.

Método de Redução da Poluição	Alto-Fornos	Fornos Siemens-Martin
Chaminés mais Altas	8	10
Filtros	7	6
Combustíveis Melhores	11	9

1. Escreva um modelo de PL que permita resolver esse problema

Dica: considere uma variável de decisão  $x_{ij}$  = percentual do método de redução de poluição  $i$  usado na fonte primária de poluição  $j$ , onde:

$i = 1$  (Chaminé mais altas),  $2$  (Filtro) ou  $3$  (Combustível Melhor);

$j = 1$  (Alto-Forno) ou  $2$  (Forno Siemens-Martin).

Exemplo:  $x_{21} = 0,8$  significaria “usar 80% do método de Filtros nos Alto-Fornos”, o que implicaria em um custo de  $7 \times 0,8 = \text{US\$ } 5,6$  milhões, e traria uma redução de  $25 \times 0,8$  milhões de kg de Particulados,  $18 \times 0,8$  milhões de kg de óxido de enxofre, e  $28 \times 0,8$  milhões de kg de Hidrocarbonetos.

Obs.: além das restrições de redução mínima para cada poluente, teríamos a restrição  $x_{ij} \leq 1$  para todo  $(i,j)$ .

Minimizar custo =  $8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{21} + 6x_{22} + 11x_{31} + 9x_{32}$

s.a.

Particulados)  $12x_{11} + 9x_{12} + 25x_{21} + 20x_{22} + 17x_{31} + 13x_{32} \geq 60$

SO<sub>2</sub>)  $35x_{11} + 42x_{12} + 18x_{21} + 31x_{22} + 56x_{31} + 49x_{32} \geq 150$

Hidrocarb)  $37x_{11} + 53x_{12} + 28x_{21} + 24x_{22} + 29x_{31} + 20x_{32} \geq 125$

$x_{ij} \leq 1$  para todo  $(i,j)$ .

Forma Padrão c/ folgas:

Max -custo =  $-(8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{21} + 6x_{22} + 11x_{31} + 9x_{32})$

s.a.

$$\begin{array}{rcl}
 12x_{11} + 9x_{12} + 25x_{21} + 20x_{22} + 17x_{31} + 13x_{32} - f_1 & & = 60 \\
 35x_{11} + 42x_{12} + 18x_{21} + 31x_{22} + 56x_{31} + 49x_{32} - f_2 & & = 150 \\
 37x_{11} + 53x_{12} + 28x_{21} + 24x_{22} + 29x_{31} + 20x_{32} - f_3 & & = 125 \\
 x_{11} & + f_4 & = 1 \\
 & x_{12} & + f_5 & = 1 \\
 & & x_{21} & + f_6 & = 1 \\
 & & & x_{22} & + f_7 & = 1 \\
 & & & & x_{31} & + f_8 & = 1 \\
 & & & & & x_{32} & + f_9 & = 1
 \end{array}$$

2. Resolva o modelo de PL usando o LINGO ou outro software apropriado

Objective value: 32.15463

Variable	Value	Reduced Cost
X11	1.000000	0.000000
X12	0.6226975	0.000000
X21	0.3434794	0.000000
X22	1.000000	0.000000
X31	0.0475728	0.000000
X32	1.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
PARTICULADOS	0.000000	-0.1110470
SO2	0.000000	-0.1268171
HIDROCARB	0.000000	-0.0693256
_X11	0.000000	0.3362110
_X12	0.3773025	0.000000
_X21	0.6565206	0.000000
_X22	0.000000	1.816085
_X31	0.9524272	0.000000
_X32	0.000000	0.0441616

3. Obtenha a Análise de Sensibilidade para o problema usando o LINGO ou outro software apropriado.

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X11	8.000000	0.3362110	INFINITY
X12	10.00000	0.4294463	0.6669616
X21	7.000000	0.3816327	2.011460
X22	6.000000	1.816085	INFINITY
X31	11.00000	2.975225	0.0446384
X32	9.000000	0.0441616	INFINITY

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
PARTICULADOS	60.00000	14.29714	7.480000
SO2	150.0000	20.45312	1.689655
HIDROCARB	125.0000	2.041667	21.69196

4. Descreva a solução obtida (apenas variáveis de decisão e Função Objetivo)

Método de Redução da Poluição	Alto-Fornos	Fornos Siemens-Martin
Chaminés mais Altas	100%	62,3%
Filtros	34,4%	100%
Combustíveis Melhores	4,76%	100%

Custo mínimo: US\$ 32.154.630,00

5. Monte a matriz B correspondente à Base ótima

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 25 & 20 & 17 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & 42 & 18 & 31 & 56 & 49 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 53 & 28 & 24 & 29 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Suponha que um engenheiro da empresa criou uma nova tecnologia para reduzir os níveis de emissão de óxido de enxofre a um custo de US\$ 100 mil por milhão de kg, independente do tipo de forno. Isso seria vantajoso para a empresa? Se sim, calcule a vantagem econômica (melhora nos custos) e determine o quanto esse método poderia ser aplicado mantendo-se essa vantagem econômica calculada.

O Preço Dual do  $\text{SO}_2$  é de aproximadamente 0,1268. Como os valores estão em de US\$ milhões e os recursos estão em milhões de kg, isso implica em uma melhora nos custos de cerca de US\$ 126,8 mil para cada milhão de kg. Se ele consegue fazer isso por US\$ 100 mil, então seria vantajoso sim.

O limite para a aplicação desse Preço Dual está na Análise de Sensibilidade: decréscimo máximo de 1,689655 milhões de kg.

7. Mostre o que aconteceria com a solução do problema se o custo para a instalação de Filtros nos Alto-Fornos aumentasse em US\$ 200 mil. Mostre os valores que seriam alterados, se for o caso. Use a Análise de Sensibilidade para justificar sua resposta.

O limite para esse custo na Análise de Sensibilidade indica um aumento máximo de 0,3816327, ou mais de US\$ 381 mil. Portanto, um aumento de US\$ 200 mil não alteraria a Base. Os valores das variáveis continuariam os mesmos. Teríamos apenas um custo total aumentado em US\$  $(0,200 \times 0,3434794)$  milhões = US\$ 68.695,88.

8. Após alguns meses de operação das novas medidas, um novo poluente foi detectado: compostos nitrogenados. A Tabela a seguir ilustra a quantidade de emissão (em milhões de kg por ano) que pode ser eliminada de cada tipo de forno usando-se 100% do limite tecnológico para quaisquer dos métodos de redução para esse poluente.

	Chaminés mais Altas		Filtros		Combustíveis Melhores	
Poluente	Alto-fornos	Fornos Siemens-Martin	Alto-fornos	Fornos Siemens-Martin	Alto-fornos	Fornos Siemens-Martin
Compostos nitrogenados	8	7	15	9	8	8

A quantidade mínima a ser reduzida desse poluente foi estipulada em 50 milhões de kg. Verifique se essa nova restrição é satisfeita pela solução ótima atual.

Montando a nova restrição, temos:

$$\text{Comp.Nitr.) } 8x_{11} + 7x_{12} + 15x_{21} + 9x_{22} + 8x_{31} + 8x_{32} \geq 50$$

O que resulta em  $34,89 \geq 50$ , o que é falso. Ou seja, essa nova restrição NÃO é satisfeita, e a Base ótima será alterada.

9. Caso a resposta à questão anterior seja “não”, mostre o que poderia ser feito para obter uma nova solução sem termos que resolver o problema todo de novo, ou seja, partindo da solução ótima original. Não precisa fazer contas, apenas descrever o que deve ser feito.

Para obtermos uma nova solução, podemos usar o Simplex Dual. Para isso, adicionamos essa nova restrição na tabela, junto com sua variável de folga e ajustamos a tabela para que retrate uma solução canônica. Nesse ponto a nova variável de folga estará na Base, mas com um valor negativo. Usamos então o Dual Simplex para restabelecer a viabilidade da solução e obtermos a nova solução ótima.