Exercícios #09 **Solução**
Valor total: 3 pontos

	x_B	x_N	
f	**0**	$-c_j + c_B B^{-1} a_j$	$c_B B^{-1} b$
x_B	**I**	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Forma Canônica da Tabela Simplex

[Baseado em Hillier & Lieberman, pág. 93]

Obs.: esse problema é *parecido* com a Questão 7 dos Exercícios #02.

A Mercantil Web vende produtos domésticos mediante um catálogo on-line. A empresa precisa de bastante espaço em depó-sitos para armazenar os produtos. Por enquanto estão sendo feitos planos para aluguel desse espaço para os próximos cinco meses. Quanto de espaço será necessário em cada um destes meses é desconhecido. Entretanto, já que essas exigências de espaço são bem distintas, pode ser que seja mais econômico alugar somente o espa-ço necessário para cada mês, em um regime mensal. No entanto, o custo adicional para alugar espaço para meses adicionais é muito menor que o do primeiro mês, de forma que poderia ser muito mais barato alugar o espaço máximo necessário para todos os cinco meses. Outra opção é uma solução intermediária de alterar o total de espaço alugado (acrescentando-se um novo aluguel e/ou um alu-guel provisório) pelo menos uma vez, porém nem todos os meses.

A exigência de espaço e os custos do aluguel para os diversos períodos são os seguintes:

Mês	**Espaço Necessário (m²)**
1	30.000
2	20.000
3	40.000
4	10.000
5	50.000

Período de Aluguel (Meses)	**Custo do Aluguel (US$/m²)**
1	65
2	100
3	135
4	160
5	190

O objetivo é minimizar o custo total de aluguel para atender às exigências de espaço.

a) Escreva o modelo de PL para resolver esse problema.

```
xij = qtd. de m² alugados a partir do mês i por um período de j meses

Mês
1    2    3    4    5
x11
x12  x12
x13  x13  x13
x14  x14  x14  x14
x15  x15  x15  x15  x15
     x21
     x22  x22
     x23  x23  x23
     x24  x24  x24  x24
          x31
          x32  x32
          x33  x33  x33
               x41
               x42  x42
                    x51
```

```
MIN = 65 * (x11 + x21 + x31 + x41 + x51) +
      100 * (x12 + x22 + x32 + x42) +
      135 * (x13 + x23 + x33) +
      160 * (x14 + x24) +
      190 * x15;

[M1] x11 + x12 + x13 + x14 + x15 >= 30000;
[M2] x12 + x13 + x14 + x15 + x21 + x22 + x23 + x24 >= 20000;
[M3] x13 + x14 + x15 + x22 + x23 + x24 + x31 + x32 + x33 >= 40000;
[M4] x14 + x15 + x23 + x24 + x32 + x33 + x41 + x42 >= 10000;
[M5] x15 + x24 + x33 + x42 + x51 >= 50000;
```

b) Resolva o problema usando o LINGO. Alterne entre as restrições do tipo “>=” e “=” e escolha a que der melhor resultado.

Usando restrições “=”, temos:

```
Objective value: 7800000.
```

Usando restrições “>=”, temos:

```
Objective value: 7650000.
```

Conclusão: usando restrições menos “apertadas”, temos uma economia de US$ 150 mil e ainda ganhamos uma “sobra” de metros quadrados em alguns meses!

Segue o resultado completo:

```
Objective value:    7650000.

     Variable           Value        Reduced Cost
          X11        0.000000            5.000000
          X21        0.000000            65.00000
          X31        10000.00            0.000000
          X41        0.000000            65.00000
          X51        20000.00            0.000000
          X12        0.000000            40.00000
          X22        0.000000            35.00000
          X32        0.000000            35.00000
          X42        0.000000            35.00000
          X13        0.000000            10.00000
          X23        0.000000            70.00000
          X33        0.000000            5.000000
          X14        0.000000            35.00000
          X24        0.000000            30.00000
          X15        30000.00            0.000000

          Row    Slack or Surplus      Dual Price
           M1        0.000000           -60.00000
           M2        10000.00            0.000000
           M3        0.000000           -65.00000
           M4        20000.00            0.000000
           M5        0.000000           -65.00000
```

c) Identifique as Variáveis Básicas da solução ótima e escreva a matriz B correspondente.

As 5 variáveis básicas (VB) são: x31, x51, x15, M2, M4.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Calcule a matriz B^{-1} usando algum APP apropriado (e.g. https://matrixcalc.org/pt/ ou Python).

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e) O resultado ótimo obtido é único, ou existem outras soluções ótimas? Justifique.

Sim, existe apenas esse resultado ótima acima, já que todas as VNBs possuem custo reduzido ou preço dual diferente de zero.

f) Suponha que a Mercantil Web identificou a possibilidade da demanda de área do mês 4 aumentar para 40 mil m^2. Use a equação $B^{-1}b$ para determinar a nova solução e, caso seja inviável, use o algoritmo Dual Simplex para obter a nova solução ótima para esse caso.
Dica: para determinar a nova solução pelo Dual Simplex, você não precisa do quadro todo do Simplex. Basta fazer o seguinte:

1. Obtenha a matriz N, formada pelas colunas das VNBs;
2. Calcula $B^{-1}N$, que é a parte da matriz do Simplex que aparece abaixo das VNBs;
3. Divida o vetor de custos reduzidos (incluindo os preços duais) pela linha r de $B^{-1}N$, onde r é a linha correspondente à VB que deverá sair da Base. Você irá considerar apenas os valores negativos de denominador, conforme visto no algoritmo Dual Simplex;
4. Pegue o menor valor (em módulo) obtido nessa divisão, que indicará qual variável irá entrar na Base;
5. Altere a matriz B obtida no item (c), substituindo a coluna apropriada;
6. Recalcula $B^{-1}b$ para obter o valor da nova Base. Caso ela seja viável, então...
7. ... recalcule todos os custos reduzidos usando a equação $-c_N + c_B B^{-1} N$ e veja se todos os valores são ≥ 0. Se forem, é porque a nova solução é ótima. Só tome cuidado para usar as matrizes (c_N, c_B, N) correspondentes à NOVA Base, e o vetor de custos c na Forma Padrão.

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30000 \\ 20000 \\ 40000 \\ 40000 \\ 50000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 \\ 20000 \\ 30000 \\ 10000 \\ -10000 \end{bmatrix}$$

As 15 VNBs são: x11, x21, x41, x12, x22, x32, x42, x13, x23, x33, x14, x24, M1, M3, M5.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora devemos dividir o vetor de custos reduzidos (incluindo os “preços duais”) pela última linha da matriz $B^{-1}N$, que corresponde à linha de M4 no quadro Simplex que sairá da Base, mas considerando apenas os denominadores negativos:

x11	x21	x41	x12	x22	x32	x42	x13	x23	x33	x14	x24	M1	M3	M5
-	-	65	-	-	35	35	-	70	5	-	30	60	-	-

O menor valor é 5, o que significa que x33 entrará na Base no lugar de M4. Com isso teremos uma nova matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando o valor da nova Base, temos:

$$\begin{bmatrix} x31 \\ x51 \\ x15 \\ M2 \\ x33 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30000 \\ 20000 \\ 40000 \\ 40000 \\ 50000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10000 \\ 30000 \\ 10000 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

Essa solução é viável, mas para saber se é ótima, precisamos ter $-c_j + c_B B^{-1} a_j \geq 0$ para toda VNB, ou seja:

$$-c_N + c_B B^{-1} N \geq 0$$

Substituindo a coluna de x33 pela coluna de M4 na matriz N, temos:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O vetor de custos para as VNB fica assim (após a conversão para a Forma Padrão):

$$c_N = \begin{bmatrix} -65 & -65 & -65 & -100 & -100 & -100 & -100 & -135 & -135 & 0 & -160 & -160 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E para as VBs, temos:

$$c_B = \begin{bmatrix} -65 & -65 & -190 & 0 & -135 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} N = \begin{bmatrix} -55 & 0 & -5 & -55 & -65 & -70 & -70 & -120 & -70 & 5 & -125 & -135 & 55 & 65 & 65 \end{bmatrix}$$

$$-c_N + c_B B^{-1} N = \begin{bmatrix} 10 & 65 & 60 & 45 & 35 & 30 & 30 & 15 & 65 & 5 & 35 & 25 & 55 & 65 & 65 \end{bmatrix}$$

Com isso, temos que a nova solução é ótima.

g) Considerando o problema original com b_4 = 10.000, determine a Análise de Sensibilidade completa usando o LINGO.

```
 Ranges in which the basis is unchanged:

                           Objective Coefficient Ranges:

                          Current        Allowable        Allowable
 Variable             Coefficient         Increase         Decrease
      X11               65.00000         INFINITY         5.000000
      X21               65.00000         INFINITY         65.00000
      X31               65.00000         5.000000         5.000000
      X41               65.00000         INFINITY         65.00000
      X51               65.00000         5.000000         5.000000
      X12               100.0000         INFINITY         40.00000
      X22               100.0000         INFINITY         35.00000
```

X32	100.0000	INFINITY	35.00000
X42	100.0000	INFINITY	35.00000
X13	135.0000	INFINITY	10.00000
X23	135.0000	INFINITY	70.00000
X33	135.0000	INFINITY	5.000000
X14	160.0000	INFINITY	35.00000
X24	160.0000	INFINITY	30.00000
X15	190.0000	5.000000	60.00000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
M1	30000.00	10000.00	10000.00
M2	20000.00	10000.00	INFINITY
M3	40000.00	INFINITY	10000.00
M4	10000.00	20000.00	INFINITY
M5	50000.00	INFINITY	20000.00

h) Se o custo do aluguel por um período de 1 mês for aumentado de US$ 65 para US$ 75, o custo total aumentará em US$ 100 mil? Justifique sua resposta usando apenas os resultados já obtidos do problema.

Não, porque nesse caso a Base irá mudar, como mostra a análise de sensibilidade para X31 e X51.

i) Se o custo do aluguel por um período de 3 mês for reduzido de US$ 135 para US$ 129, haverá alguma alteração no resultado? Justifique sua resposta usando apenas os resultados já obtidos do problema.

Sim, porque nesse caso a Base irá mudar, como mostra a análise de sensibilidade para X33.