Prova 2 **Turma 2** **Solução**
Valor total: 25 pontos

Matrícula:_________________ Nome:____

Quadro Simplex (maximização):

	x_B	x_R	
-f	0	$c_j - c_B B^{-1} a_j$	$c_B B^{-1} b$
x^B	I	$B^{-1}R$	$B^{-1}b$

Problema de Maximização			**Problema de Minimização**	
Variáveis	≥ 0	$\leftrightarrow$	$\geq$	**Restrições**
	≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$	
	Livre	$\leftrightarrow$	$=$	
Restrições	$\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0	**Variáveis**
	$\geq$	$\leftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\leftrightarrow$	Livre	

Uma extrusora de aço produz dois tipos de perfis em I: leve e pesado. Esses perfis podem ser obtidos por qualquer uma das três máquinas disponíveis na fábrica: A, B e C. Cada máquina pode produzir uma determinada quantidade de cada perfil, dado em ton./hora, conforme a tabela abaixo:

	A	B	C
Perfil leve	3	6	8
Perfil pesado	2	3	6

O custo de operação por hora de cada máquina é de \$30, \$50 e \$80, respectivamente. A demanda da fábrica é de pelo menos 100 toneladas de perfil leve e 60 de perfil pesado.

2 pts.

1. Escreva o modelo de programação linear para determinar quantas horas cada máquina deve ser usada de forma a obter uma produção de custo mínimo.

Variáveis de decisão:
XA- Horas de trabalho da máquina A;
XB- Horas de trabalho da máquina B;
XC- Horas de trabalho da máquina C;

Min f = $30XA + 50XB + 80XC$
s.a. $3XA + 6XB + 8XC \geq 100$
$2XA + 3XB + 6XC \geq 60$

2. Observe que não é possível resolver esse problema manualmente através do Simplex Primal com a Base inicial sendo as variáveis de folga. Descreva então um método que poderíamos usar para resolver esse problema manualmente.

2 pts.

Poderíamos usar variáveis artificiais através do método Simplex de Duas Fases ou então o método do Grande M. Nos dois casos teríamos que inserir variáveis artificiais no modelo e alterar a F.O. de modo a forçar a remoção gradual dessas variáveis artificiais.

Outra abordagem seria inicial com uma base inviável (s1 = -100 e s2 = -60) e usar o Dual Simplex.

Usando o LINDO para resolver esse problema, temos:

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      900.0000

  Variable           Value        Reduced Cost
        XA        0.000000            1.666667
        XB        10.00000            0.000000
        XC        5.000000            0.000000

       Row    Slack or Surplus      Dual Price
         1        900.0000           -1.000000
         2        0.000000           -5.000000
         3        0.000000           -6.666667

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

     Objective Coefficient Ranges:
                      Current        Allowable        Allowable
  Variable        Coefficient         Increase         Decrease
        XA          30.00000         INFINITY         1.666667
        XB          50.00000         10.00000         10.00000
        XC          80.00000         6.666667         13.33333

     Righthand Side Ranges:
                      Current        Allowable        Allowable
       Row                RHS         Increase         Decrease
         2          100.0000         20.00000         AS2b
         3          60.00000         15.00000         10.00000
```

3. Descreva a solução obtida (variáveis de decisão, F.O., folgas).

2 pts.

Usar 10h da máquina B e 5h da máquina C, obtendo um custo de $ 900,00. Não haverá excesso de fabricação dos perfis.

4. Mostre explicitamente quais serão as matrizes da equação $x_B = B^{-1}b$ obtida na solução ótima:

2 pts.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} XB \\ XC \end{bmatrix}}_{x_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 100 \\ 60 \end{bmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\text{valores de } x_B}$$

5. O aumento no custo total indicado pelos preços duais pode ser garantido se aumentarmos a demanda de Perfil Pesado em 10%? Explique.

2 pts.

Um aumento de 10% resultaria em uma demanda de 66, o que está dentro do limite máximo, que é de 75. Portanto, os preços duais seriam válidos sim.

6. Para que a Máquina A contribua para a redução do custo total, qual deve ser o custo de operação por hora dela?

2 pts.

Para que a máquina A seja interessante economicamente, seu custo deveria ser de no máximo:

30 – 1,67 = $28,33.

7. Em um determinado período, a demanda de Perfis Leve foi de 140 ton. Use o Dual Simplex para calcular a solução ótima nesse caso partindo do tableau ótimo.

5 pts.

Nota: Você mesmo pode montar esse tableau, bastando apenas calcular $B^{-1}R$, onde R é a matriz formada pelas colunas da matriz A das variáveis não básicas. Para inverter B, podemos usar a fórmula conhecida:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{6 \cdot 6 - 8 \cdot 3} = \frac{1}{12}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{4}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{-3}{4} + 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Base	XA	XB	XC	S1	S2	b
-g = f	-1,67	0	0	-5	-6,67	900
XB	1/6	1	0	-1/2	2/3	10
XC	1/4	0	1	1/4	-1/2	5

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 140 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70-40 \\ -35+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$f = 50 \cdot 30 + 80 \cdot (-5) = 1100$$

Base	XA	XB	XC	S1	S2	b
-g = f	-1,67	0	0	-5	-6,67	1100
XB	1/6	1	0	-1/2	2/3	30
XC	1/4	0	1	1/4	-1/2	-5

Sai XC e entra S2:

Base	XA	XB	XC	S1	S2	b
-g = f	-5	0	-13,33	-8,33	0	1166,67
XB	1/2	1	4/3	-1/6	0	23,33
S2	-1/2	0	-2	-1/2	1	10

Novo resultado:

Usar apenas 23,33h da máquina B, obtendo um custo de $ 1.166,67. Haverá excesso de 10 toneladas dos perfis Pesados.

Agora retornando novamente ao problema original:

8. Determine o valor de **AS2b** assinalado na Análise de Sensibilidade.

4 pts.

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100+a \\ 60 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{cases} 50 + \frac{a}{2} - 40 \geq 0 \\ -25 - \frac{a}{4} + 30 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + 10 \geq 0 \\ 5 - \frac{a}{4} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq -20 \\ a \leq 20 \end{cases}$$

Portanto, AS2b = 20.

9. Foi disponibilizada uma Máquina D para ajudar na fabricação dos perfis. Essa máquina pode produzir 5 perfis Leves e 3 Pesados por hora, e custa \$40/hora. Verifique se vale a pena usar a Máquina D.

4 pts.

A adição dessa nova coluna no modelo Primal equivale à inserção de uma nova restrição no modelo Dual:

$$5y_1 + 3y_2 \geq -40$$

Substituindo os valores dos Preços Duais obtidos no quadro ótimo do Simplex nessa inequação, temos:

$$5(-5) + 3(-6{,}67) \geq -40$$
$$-45 \geq -40$$

O que é falso. Portanto, como a restrição dual seria violada, significa então a Base atual não seria ótima, e compensaria sim usar a Máquina D.