Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Informática
prof. André Gustavo dos Santos
INF 330 - Teoria e Modelos de Grafos - 2012/2

Prova 1
24/jan/2012

GABARITO resumido, as respostas não estão rigorosamente completas

1. Uma árvore pode ser um grafo k-regular? Se sim, para que valores de k?

SIM, mas apenas para $k = 0$ e $k = 1$. Como toda árvore não trivial tem vértices de grau 1, não será k-regular para $k > 1$.

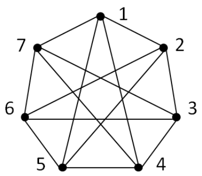
2. Um *hidrocarboneto saturado* é uma molécula $C_m H_n$ em que cada átomo de carbono (C) tem quatro ligações, cada átomo de hidrogênio (H) tem uma ligação, e nenhuma sequência de ligações forma um ciclo. Mostre que, se existe um hidrocarboneto saturado $C_m H_n$, então $n = 2m + 2$.

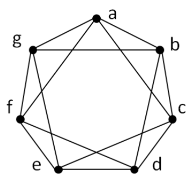
Pela descrição, o grafo que representa o $C_m H_n$ é uma árvore com $|V| = n + m$ vértices. Pelo *handshaking lemma* $|A| = (4m + n)/2$. Em toda árvore vale a relação $|V| = |A| + 1$. Basta substituir $|A|$ e $|V|$.

3. Sr. e Sra. Silva receberam 3 casais para jantar em sua casa. Antes do jantar, eles se cumprimentaram. Ninguém cumprimentou a si mesmo e nem seu respectivo cônjuge. E ninguém cumprimentou a mesma pessoa mais de uma vez. Sr. Silva perguntou a cada pessoa quantas ela havia cumprimentado, e pra sua surpresa, cada uma das 7 pessoas deu uma resposta diferente. Quantas pessoas a Sra. Silva cumprimentou?
[Obs.: nesta questão, "cumprimento" = "aperto de mão", um ato recíproco entre duas pessoas]

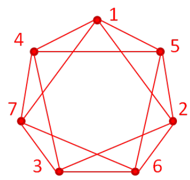
Seja G um grafo com vértices representando as pessoas e arestas os cumprimentos. Nesse grafo, o grau representa o número de cumprimentos, e o grau máximo é 6. Como houve 7 respostas diferentes, elas devem ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Estes são os graus dos vértices (sem contar o Sr. Silva, que deverá repetir um desses pois não há outra opção). Desenhe as arestas do vértice de grau 6 e concluirá que seu cônjuge é o de grau 0. Desenhe os de grau 5 e 4 e concluirá quem são os casais, e que a Sr. Silva cumprimentou 3 pessoas.

4. Os seguintes grafos são isomorfos ou não?





SIM



5. Seja G um grafo conectado com exatamente 4 vértices de grau ímpar. Prove que G tem duas trilhas disjuntas de arestas tal que toda aresta de G pertença a exatamente uma delas.
[Obs.: trilha é um passeio que não repete aresta]

Acrescente uma aresta entre dois dos vértices de grau ímpar e o grafo será semi-euleriano, existindo uma trilha euleriando entre os vértices que permanecem com grau ímpar. Desta trilha euleriana, retire a aresta incluída, e terá as duas trilhas desejadas.

6. Seja G um grafo com um número par p de vértices que tem exatamente 2 componentes completos.
- Prove que o número mínimo de arestas de G é $(p^2 - 2p)/4$

Se um componente tem x vértices, o outro tem $p - x$. Esses componentes são o K_x e K_{p-x}, que tem um total de $x^2 - px + (p^2 - p)/2$ arestas. Essa função tem valor mínimo quando $x = p/2$.

- Se G tiver exatamente este número de arestas, como ele é?

Dois $K_{p/2}$

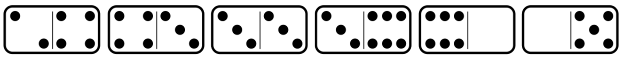
7. Mostre que toda árvore T tem pelo menos $\Delta(T)$ vértices de grau 1.
[Obs.: Δ é o grau máximo dos vértices]

Redesenhe T como uma árvore com raiz em v, sendo v um vértice de grau $\Delta(T)$. Este vértice terá $\Delta(T)$ filhos, cada um deles raiz de uma subárvore. Cada subárvore tem pelo menos uma folha, logo T com raiz em v tem pelo menos $\Delta(T)$ folhas, que são vértices de grau 1 em T.

8. Seja T uma árvore com raiz. Qual a relação entre o diâmetro e a altura de T?

$h \leq d \leq 2h$

9. No jogo de dominós, as pedras possuem dois números, um em cada ponta. Os números podem variar de 0 a 6, e existe exatamente uma pedra para cada combinação de números possível (inclusive com números iguais nas duas pontas). Durante o jogo, a ponta de uma pedra pode ser conectada à ponta de outra pedra se possuem os mesmos números. Então, cada pedra pode ser conectada a duas outras pedras, uma em cada ponta. A figura mostra uma possível sequência de pedras:



É possível montar uma sequência circular utilizando todas as pedras?

SIM. Seja G um grafo com $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se a pedra de valores u, v é representada por uma aresta $\{u, v\}$, o conjunto de arestas de G é $A = \{\{u, v\}, \forall u, v \in V\}$. G é então um K_7 acrescido de loops em todos os vértices. Todos os vértices de G tem grau 8 (par), logo G é euleriano. Um circuito euleriano é a sequência circular desejada.

[Dica: modele um grafo onde cada pedra é representada por uma aresta]

10. Dois grafos são complementares se ambos possuem o mesmo conjunto de vértices, e existe uma aresta $\{u, v\}$ em um se e somente se tal aresta não existe no outro. O complementar de um grafo G é denotado por $\overline{G}$. Descreva os grafos $\overline{K_n}$ e $\overline{K_{m,n}}$.

$\overline{K_n}$: n vértices isolados; $\overline{K_{m,n}}$: dois componentes, um K_m e um K_n