Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Informática
prof. André Gustavo dos Santos
INF 330 - Teoria e Modelos de Grafos - 2010/2

Prova 2
25/out/2010

GABARITO resumido, as respostas não estão rigorosamente completas

Justifique suas respostas!

1. [6,0 PTS] Considere os seguintes grafos de $2n$ vértices: $K_{n,n}$ e K_{2n}

(i) Qual o número cromático de cada um deles? 2 e $2n$
(ii) Qual o tamanho do conjunto independente máximo de cada um deles? n e 1
(iii) Qual o tamanho do clique máximo de cada um deles? 2 e $2n$
(iv) Qual o tamanho do matching máximo de cada um deles? n e n
(v) O que acontece com esses valores se for retirada exatamente 1 aresta de cada um deles?
$\chi(K_{2n} - a) = 2n - 1$, $\alpha(K_{2n} - a) = 2$, clique$(K_{2n} - a) = 2n - 1$, os demais permanecem

2. [1,5 PTS] POSCOMP 2010: Qual é o número cromático do grafo $K_{3,2}$?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

3. [1,5 PTS] POSCOMP 2009: *Esta questão foi anulada no POSCOMP. Por que?*

Assinalar a alternativa correta, em relação a um grafo completo G com $n > 2$ vértices

(a) O grau de cada vértice é n
(b) O número cromático de G é igual a $n - 1$
(c) G não pode ser um grafo bipartido
(d) G possui caminho hamiltoniano
(e) G possui ciclo euleriano

4. [2,0 PTS] Prove que todo grafo hamiltoniano com número par de vértices tem matching perfeito.
Se é hamiltoniano existe um caminho que passa por todos os vértices sem repetir. Um matching perfeito pode ser formado tomando-se alternadamente arestas deste caminho.

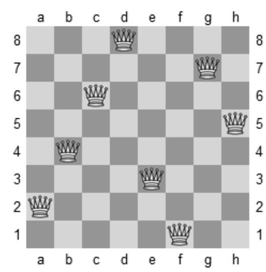
5. [3,0 PTS] Quantos *matchings* perfeitos diferentes pode ter uma árvore?
0 ou 1: comece selecionando arestas das folhas e notará que só existe 1, se existir

6. [3,0 PTS] Considere um grafo simples (possivelmente desconectado) de 10 vértices e m arestas.

(i) Para que valores de m tal grafo certamente **não** é planar?
Para ser planar, $m \leq 3n - 6 \Rightarrow m \leq 24$, logo para $m \geq 25$

(ii) Tal grafo será certamente planar se $m < 10$?
Não, $G = K_{3,3} \cup$ 4 vértices isolados é um contra-exemplo

7. [3,0 PTS]
O problema das 8 rainhas consiste em distribuir 8 rainhas em um tabuleiro de xadrez de tal forma que nenhuma fique sob ataque de outra. Para isso, é necessário que duas rainhas quaisquer não estejam numa mesma linha, coluna ou diagonal. A figura ao lado mostra uma das possíveis soluções.
Proponha uma forma de resolver esse problema por grafo usando clique, coloração, conjunto independente, cobrimento ou matching.
Seja G um grafo contendo um vértice para cada casa, e uma aresta para cada par de vértices na mesma coluna, linha ou diagonal. Encontrar um conjunto independente de vértices.



8. [3,0 PTS] Um *torneio* é um digrafo obtido associando uma direção a cada aresta de um grafo completo não direcionado. Ou seja, é um grafo dirigido onde cada par de vértices é conectado por exatamente um arco direcionado. Como era de se esperar, um digrafo *torneio* pode ser usado para representar um torneio do tipo *round-robin*, em que todos os times jogam contra todos, uma vez contra cada um.

Suponha um torneio do tipo *round-robin* em que toda partida tenha um vencedor (não há empate), e que a classificação final é unicamente pelo número de vitórias (ou seja, o 1º lugar do torneio é o time com maior número de vitórias)

(i) Se 5 times disputam o torneio, mostre que é possível que todos terminem empatados em 1º lugar.
Basta desenhar um K_5 e direcionar as arestas de tal forma que todo vértice tenha grau de entrada 2

(ii) Se 6 times disputam o torneio, mostre que é **im**possível que todos terminem empatados em 1º lugar.
Deveríamos direcionar as 15 arestas de um K_6 de tal forma que todos os 6 vértices tenham o mesmo grau de entrada, mas 15 não é divisível por 6.

9. [3,0 PTS] Considere um grafo K_6 cujas arestas foram coloridas de azul e vermelho. Prove que existe um K_3 azul ou um K_3 vermelho.
Usando número de Ramsey $r(3,3) = 6$, que indica que qualquer grafo de 6 vértices tem clique de tamanho 3 ou conjunto independente de tamanho 3: retire todas as arestas vermelhas; se as arestas restantes não formarem um clique (K_3 azul), então existe conjunto independente de tamanho 3 (K_3 vermelho).
Também poderia ser provado por construção.