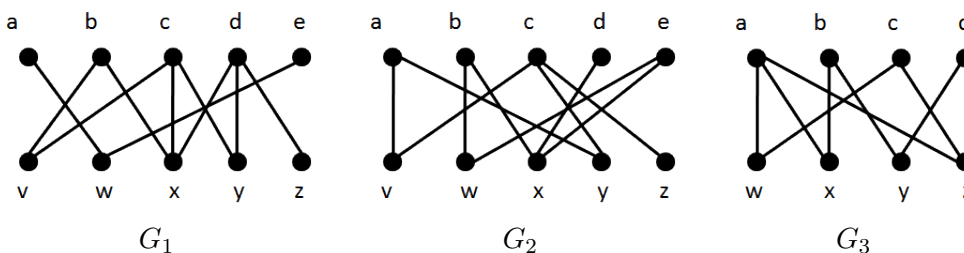




GABARITO resumido, as respostas não estão rigorosamente completas

1. Para cada grafo abaixo encontre um matching perfeito ou prove que não existe.



$G_1$ : não tem matching perfeito. Os 4 vértices  $v, x, y, z$  ligam-se apenas em 3.

$G_2$ : não tem matching perfeito. Os 3 vértices  $v, y, z$  ligam-se apenas em 2.

$G_3$ : tem matching perfeito.  $\{a, w\}, \{b, x\}, \{c, z\}, \{d, y\}$  é um deles

2. Um grafo conectado possui circuito euleriano se e somente se todo vértice tem grau par. Encontre uma propriedade semelhante para um **digrafo** euleriano.

Fortemente conectado e  $\delta^-(v) = \delta^+(v), \forall v \in V$

3. Um algoritmo guloso é um que constrói uma solução passo a passo, escolhendo sempre a alternativa que parece ser a melhor no momento. Assim, faz uma escolha ótima local, na esperança que isto leve até a solução ótima global do problema.

(i) Cite dois problemas em grafos que podem ser resolvidos de forma ótima por algoritmos gulosos.

caminho mínimo, árvore geradora mínima, circuito euleriano, ...

(ii) Cite dois problemas em grafos para os quais os algoritmos gulosos já criados **não** garantem encontrar a solução ótima.

ciclo hamiltoniano, caixeiro viajante, coloração, ...

4. Prove que sim ou que não:

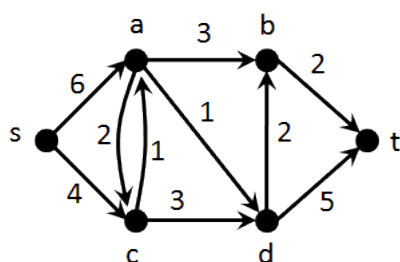
(i) Grafos  $W_n$  (roda) não possuem matching perfeito

NÃO. Todo  $W_n$  para  $n$  par tem matching perfeito

(ii) Se um grafo é hamiltoniano e tem número par de vértices, ele possui um matching perfeito

SIM. Um matching perfeito pode ser feito selecionando-se arestas alternadas do ciclo

5. Explique o que é o *max-flow min-cut theorem* e mostre sua aplicação na rede abaixo.



O valor do fluxo máximo  $s-t$  numa rede é igual ao valor do corte mínimo  $s-t$  na rede. Nesta rede específica o fluxo máximo é 6, mesmo valor do corte mínimo, formado pelos arcos  $(c, d)$ ,  $(a, d)$ ,  $(b, t)$ .

6. Quantos matching perfeitos diferentes pode ter uma árvore de  $n$  vértices? Justifique.

0 ou 1

7. Um hidrocarboneto é uma molécula formada por  $k$  átomos de carbono e  $l$  átomos de hidrogênio, ligados de tal forma que cada átomo de carbono tenha 4 ligações e cada átomo de hidrogênio apenas 1. Nos hidrocarbonetos alcanos nenhuma sequência de ligações forma um ciclo de átomos. Prove que para estes  $l = 2k + 2$ .

A molécula pode ser representado por um grafo em que os vértices são os átomos e as arestas as ligações entre eles. O número de vértices do grafo é  $n = k + l$ . O número de arestas é  $m = (4k + l)/2$  (metade da soma dos graus). Pela descrição, o grafo é uma árvore, logo  $n = m + 1$ . Basta agora substituir os valores.

8. A figura (a) mostra um famoso quebra-cabeça contendo 15 peças numeradas. Cada jogada consiste em mover uma das peças adjacentes à posição vazia para esta posição, deixando vazia a posição em que se encontrava.

Nesse caso é possível mover a peça 12 (figura (b)), ou a peça 7 (figura (c)), ou a peça 2 (não mostrado). Se for escolhido mover a peça 7 na figura (a), chega-se à configuração (c), e a partir dela há 4 movimentos possíveis.

O objetivo final é chegar na configuração (d).

5	13	4	3
1	9	14	10
6	7	8	15
2		12	11

(a)

5	13	4	3
1	9	14	10
6	7	8	15
2	12		11

(b)

5	13	4	3
1	9	14	10
6		8	15
2	7	12	11

(c)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(d)

(i) Proponha um grafo para encontrar uma solução para o quebra-cabeça utilizando busca. Cada configuração é um vértice, e arestas ligam configurações que podem ser obtidas com o movimento de uma peça. Basta fazer busca do vértice que representa a configuração inicial até encontrar o vértice que representa a configuração final. As arestas do caminho indicam os movimentos para resolver o quebra-cabeça.

(ii) Diga uma vantagem e uma desvantagem da busca em largura em relação à busca em profundidade para esse problema, se existirem. Justifique.

A busca em largura encontra a solução que necessita o mínimo de movimentos; já a busca em profundidade encontra uma solução qualquer, não necessariamente a de menos movimentos. Por outro lado, a busca em largura pode demorar mais e gastar mais memória, embora isso não seja garantido, depende da ordem de exploração dos adjacentes na busca em profundidade.