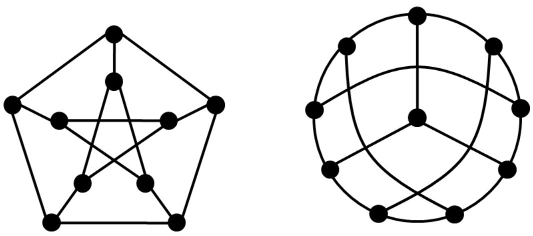
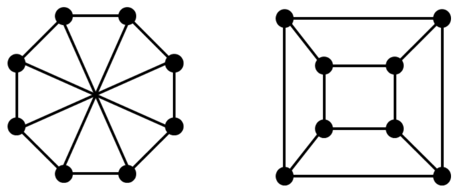
Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Informática
prof. André Gustavo dos Santos
INF 330 - Teoria e Modelos de Grafos - 2010/2

Prova 1
23/set/2010

GABARITO resumido, as respostas não estão rigorosamente completas

1. Diga se os seguintes pares de grafos são isomorfos ou não

A) 

B) 

(i) Sim (para provar deveria mostrar uma correspondência dos vértices)
(ii) Não (no da esquerda existe ciclo de tamanho 5, no da direita não)

2. (A) Para que valores de n o grafo K_n é simultaneamente euleriano e hamiltoniano?
Todo n ímpar. Se n for par, os vértices terão grau ímpar $(n-1)$ e não será euleriano. K_2 não é, mas n ímpar já o exclui
(B) Para que valores de n e m o grafo $K_{n,m}$ é simultaneamente euleriano e hamiltoniano?
Para $n = m$ e pares. Se $n \neq m$ não será hamiltoniano, e se se n ou m ímpar não será euleriano

3. Mostre que uma sequência de inteiros positivos $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ é uma sequência de graus de uma árvore se e somente se $\sum_{i=1}^{n} 2(n-1)$

4. A) Qual o **máximo** e o **mínimo** de vértices pode ter um grafo simples de 10 arestas e 3 componentes?
Mínimo 7: um K_5 e 2 vértices isolados
Máximo 13: quaisquer 3 árvores que totalizem 10 arestas
B) Qual a altura **mínima** de uma árvore ternária de 90 folhas? e de uma árvore m-ária com 90 folhas?

5. (A) Mostre que se G é um grafo simples com $m > \binom{n-1}{2}$ então G é conectado
Quanto mais componentes menos arestas, então suponha que G tenha apenas 2 componentes, um com x vértices e outro com $n-x$. O máximo de arestas ocorre num grafo completo, e se G é desconectado o máximo de arestas ocorre quando os componentes são completos, então seja $G = K_x \cup K_{n-x}$. O número total de arestas é então $x(x-1)/2 + (n-x)(n-x-1)/2$ e esse valor á máximo de x for 1 ou $n-1$, ou seja, de G for um $K_1 \cup K_{n-1}$, que tem $\binom{n-1}{2}$ arestas.
(B) Para $n > 1$ encontre um grafo G simples desconectado com $m = \binom{n-1}{2}$

6. Seja G um grafo conectado contendo somente vértices de grau par.
A) Prove que G não tem ponte.
Suponha que G tenha ponte. Seja essa ponte (u, v). Retirando a aresta (u, v), sobram dois componentes (pois (u, v) era ponte). Nesses componentes u e v terão uma aresta incidente a menos, logo terão grau ímpar (pois tinham grau par). Eles não podem ser o único de grau ímpar em cada componente, pois o número de vértices de grau ímpar é sempre par. Então deve haver vértice de grau ímpar no grafo original. Isso é uma contradição pois em G todo vértice tem grau par. Logo, G não pode ter ponte.
B) Mostre que G pode ter articulação.

7. Prove que todo grafo simples conectado planar tem pelo menos um vértice de grau no máximo cinco. *[Dica: prove por contradição]*

Suponha um grafo planar em que nenhum vértice tem grau no máximo cinco, ou seja, todos tem grau no mínimo 6. A soma dos graus é então no mínimo $6n$. Pelo *handshaking* isso é o dobro de arestas, logo $2m \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n$. Todo grafo planar deve satisfazer $m \leq 3n - 6$, então tal grafo não é planar. Uma contradição.

8. Nesse questão considere um vértice por time e uma aresta por partida disputada entre os times

A) Na Copa DPI deste semestre existem 6 times inscritos e será realizada no sistema de pontos corridos: todos os times jogam contra todos e o vencedor é o que obtiver o maior número de pontos. Que grafo representa essa Copa? Quantas partidas serão disputadas?

K_6: 15 partidas

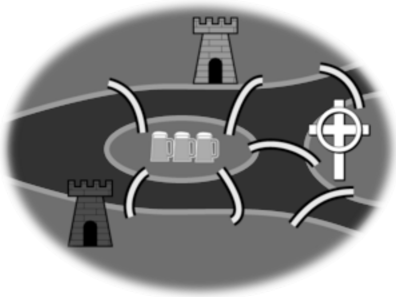
B) A Copa do Mundo FIFA de Futebol é disputada por 32 países classificados. Na fase de grupos as 32 seleções são divididas em oito grupos com quatro seleções cada. Todas as seleções de um grupo jogam contra todas do mesmo grupo. Que grafo representa essa fase? Quantas partidas são disputadas?

8 K_4: 48 partidas

C) A França se classificou para a Copa de 2010 com um passe de mão do jogador Thierry Henry que resultou em gol, eliminando a Irlanda. Insistentemente a associação de futebol e até mesmo o governo da Irlanda tentaram o anulamento da partida junto à Fifa. Como não foram atendidos, solicitaram uma 33ª vaga na Copa, e também não foram atendidos. Usando o modelo do grafo anterior, que consequência (dificuldade) prática traria essa 33ª vaga?

um grupo teria 5 times, seria um K_5, e cada time desse grupo disputaria uma partida a mais. Para que todos disputem o mesmo número de partidas, deveria haver 11 grupos de 3 ou 3 grupos de 11...

9. Considere a seguinte situação na cidade de Königsberg: na parte norte do rio está o castelo do príncipe azul, e na parte sul o castelo do príncipe vermelho, seu irmão; no lado leste está a igreja e no centro o bar da cidade.



É costume entre os habitantes, depois de horas no bar, caminhar pelas pontes e voltar para o bar dizendo que conseguiram passar por todas sem repetir. Entretanto, ninguém conseguiu isso em plena luz do dia...

A) O príncipe azul concluiu que não é possível tal trajeto, e construiu uma ponte de tal forma que ele pudesse começar o trajeto no seu castelo e terminar no bar da cidade, cantando vitória. É claro, isso foi feito de tal forma que seu irmão não pudesse fazer o mesmo. Onde ele construiu a ponte?

Ligando a igreja ao castelo do irmão; assim, só seu castelo e o bar teriam grau ímpar

B) Com raiva, o príncipe vermelho construiu mais uma ponte de tal forma que ele pudesse começar o trajeto no *seu* castelo e terminar no bar da cidade, cantando vitória na cara do irmão (e é claro, que seu irmão não pudesse mais fazer o trajeto). Onde ele construiu a ponte?

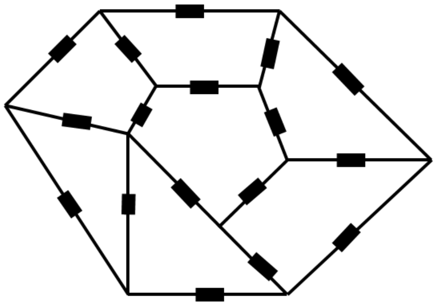
Ligando seu castelo ao castelo do irmão; assim, só seu castelo e o bar teriam grau ímpar

C) O bispo da cidade cansou dessa briga entre os príncipes, e pior ainda, que isso tenha contribuído para aumentar a bebedeira na cidade. Ele então construiu mais uma ponte, de tal forma que todo habitante da cidade pudesse fazer o trajeto e voltar para suas próprias casas. Onde ele construiu tal ponte?

Ligando o castelo do vermelho ao bar, assim todos teriam grau par

10. Desde o início de agosto um grupo de trabalhadores chilenos está preso numa mina de cobre, após um desabamento ter bloqueado a saída do local. Eles foram encontrados com vida em um dos refúgios subterrâneos, uma construção própria para emergências, mas estima-se que os trabalhos de resgate possam durar até o natal, pois estão presos a 700 metros de profundidade.

No caso chileno todos estão num mesmo local. Suponha o caso em que um grupo de mineiros está distribuído em 7 "salas", conforme a figura abaixo, que mostra uma vista aérea do local. Para resgatá-los é necessário abrir buracos nas paredes que dividem as salas e algum para o exterior. Devido ao grande risco de novos desabamentos, a equipe de resgate deve abrir o menor número possível de buracos e ainda assim permitir que os mineiros de todas as salas possam escapar.



A) Será necessário abrir buracos em quantas paredes?
7 buracos (6 entre as "salas" e 1 para o exterior)

B) Como usar grafos para resolver o problema mais geral?
Árvore geradora no grafo dual: um vértice para cada sala (+1 para o exterior), e uma aresta para cada parede; uma árvore geradora conecta todos os vértices com o mínimo de arestas, logo conecta todas as salas (e o exterior) com o mínimo de buracos.