Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Informática
INF330 – Teoria e Modelos de Grafos
Prova 01- 15/09/2011

Nome:____
Matrícula:___________

Obs:
-Todas soluções devem ser **JUSTIFICADAS**.
-As justificativas devem ser feitas com base em conceitos de “**Teoria de Grafos**”.

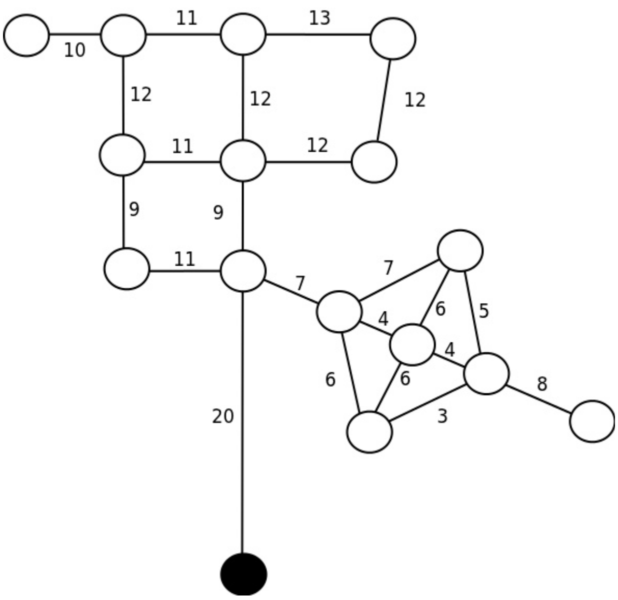
1_ A Universidade Federal de Vau-Açu (UFV) vem enfrentando graves problemas com a segurança dos alunos. Recentemente, várias pessoas têm relatado a ocorrência de assaltos nas diversas ruas da UFV. Tais assaltos muitas vezes são realizados por ladrões que, após roubarem a vítima, fogem utilizando carros ou motos. O problema é agravado pelo fato da UFV ser muito grande pois, mesmo quando a vítima consegue avisar a vigilância rapidamente, o bandido muitas vezes consegue fugir utilizando uma das várias saídas da universidade.

Preocupada com a situação, a reitora da universidade decidiu tomar uma medida drástica. Ela pretende destruir várias ruas da universidade para que a UFV só tenha uma saída e, além disso, para que haja um único caminho entre cada departamento da universidade e a saída. Dessa forma, ao detectar um assalto em determinada região, a vigilância saberá, com exatidão, qual será a única rota possível que o bandido poderá tomar para fugir e, com isso, será mais fácil prender os ladrões.

A empresa responsável por destruir as ruas cobrará 100 reais por metro de rua destruída (note que, por motivos de estética, uma rua não pode ser “parcialmente” destruída).

Você foi contratado para ajudar a planejar quais ruas deverão ser destruídas. Veja o mapa da universidade apresentado abaixo e indique as ruas que deverão ser removidas (justifique sua resposta descrevendo o método que você utilizou para encontrar essa solução).

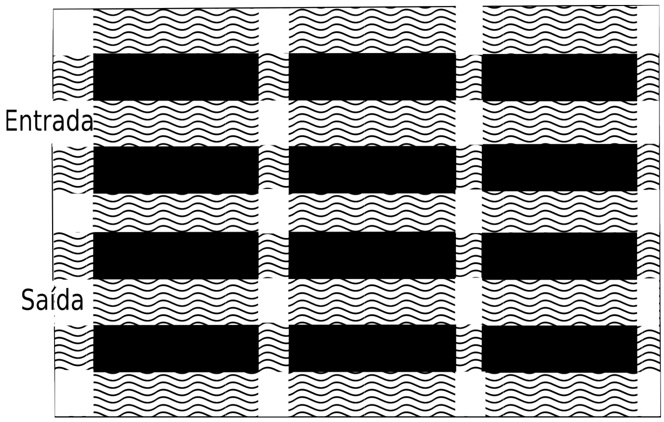
Obs: no mapa abaixo, as ruas são representadas por linhas (os valores associados a cada linha representam o tamanho da rua em metros), os departamentos são representados por círculos brancos e a saída é representada por um círculo preto.



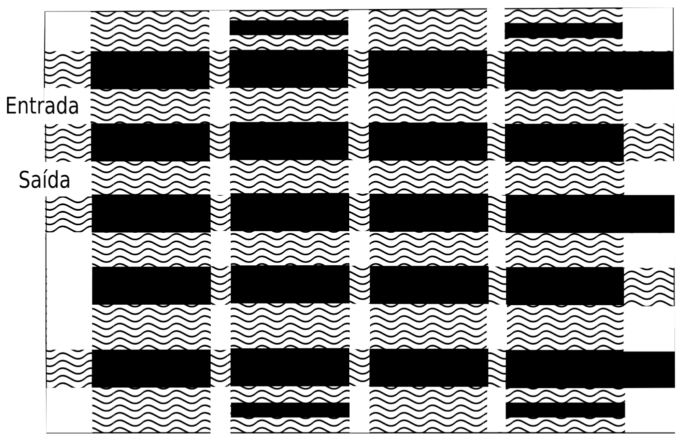
2_ Alice, esposa de Bob, adora ir ao supermercado fazer as compras para a família. Porém, ela é muito impulsiva e compra demais. Bob, cansado de pagar contas caríssimas no supermercado, falou com sua esposa que, a partir de agora, ela só poderá ir ao supermercado uma vez por semana e, em cada uma dessas idas, ela só poderá passar no máximo uma vez por cada corredor do supermercado que contiver produtos supérfulos. Assim, espera-se que ela diminua um pouco sua tentação de comprar cada vez mais.

Como a cidade onde Alice mora possui três supermercados, ela fez mapas destes supermercados (apresentados abaixo): as regiões onduladas representam corredores nos quais ela deve passar exatamente uma vez e as regiões marcadas em branco são regiões por onde ela pode passar livremente (elas não possuem produtos ou então não possuem produtos supérfulos). Ao modelar o problema, suponha que Alice esteja, inicialmente, na entrada do supermercado e, ao final das compras, ela deverá estar na saída (onde ficam os caixas).

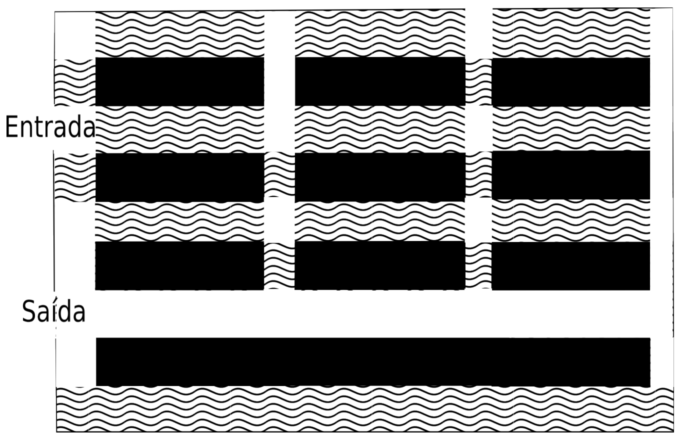
Para cada um dos mapas, diga se Alice poderá ou não fazer suas compras passando exatamente uma vez em cada corredor marcado por regiões onduladas:



Supermercado "Colégio"



Supermercado "A mãe do tio"



Supermercado "Caribe"

3_ Uma das maiores alegrias dos estudantes da UFVRP (Universidade Federal de Vau-Açu – Campus de Rio Pomba) é poder comer no Restaurante Universitário. Além de poderem saborear pratos de ótima qualidade, os alunos também gostam do RU porque o horário de almoço é muito bom para conversarem e descontrairem.

Recentemente, com o aumento do número de alunos na UFVRP, houve uma necessidade de trocar as mesas do restaurante por mesas maiores. Os alunos adoraram a idéia visto que, com isso, há mais facilidade de se encontrar cadeiras vazias nas mesas.

Porém, com mais gente sentando em uma mesa, há uma maior dificuldade dos alunos conversarem com seus amigos. Por exemplo, se três pessoas sentarem lado a lado e as que estiverem nas beiradas resolverem conversar, haverá muita dificuldade já que a pessoa do meio irá “tampa-las” e, além disso, as pessoas que estiverem conversando irão ficar falando por cima do prato (ou melhor, da bandeja) da pessoa que estiver no meio.

Dessa forma, o ideal é que as pessoas que conversam mais entre si fiquem sentadas em lados opostos da mesa. Assim, elas irão sempre conversar “de frente”.

a) Dados os grupos de amigos abaixo, indique se é possível que eles sentem em uma mesa do RU (suponha que cada mesa possua um número suficiente de cadeiras em cada um dos dois lados) de modo que cada par de amigos que gostam de conversar fiquem em lados opostos da mesa.

Pessoa	Conversa mais com
X	Y,J,S
P	J,S
Y	F,H,X
S	Q,F,P,H,X

Pessoa	Conversa mais com
H	Y,J,S
F	Y,S
Q	S,J
J	X,Q,P,H

b) Qual propriedade o grafo modelado a partir das informações de amizade deve apresentar para que os alunos possam se sentar à mesa do RU de forma adequada?

4_ (POSCOMP - 2008) Denomina-se complemento de um grafo G(V,E) o grafo H que tem o conjunto de vértices igual ao de G e tal que, para todo par de vértices distintos v,w em V, temos que a aresta (v,w) é aresta de G se e somente se (v,w) não é aresta de H.
A esse respeito, assinale a afirmativa CORRETA.

A) G e H são grafos isomorfos.
B) Se o grafo G é conexo, então H é conexo.
C) Se o grafo G não é conexo, então H é conexo.
D) Se o grafo G não é conexo, então H não é conexo.
E) Os grafos G e H têm o mesmo número de componentes conexas.

5_ (POSCOMP – 2008) Um grafo G(V,E) é uma árvore se G é conexo e acíclico.
Assinale a definição que NÃO pode ser usada para definir árvores.

A) G é conexo e o número de arestas é mínimo.
B) G é conexo e o número de vértices excede o número de arestas por uma unidade.
C) G é acíclico e o número de vértices excede o número de arestas por uma unidade.
D) G é acíclico e, para todo par de vértices v, w, que não são adjacentes em G, a adição da aresta (v,w) produz um grafo contendo exatamente um ciclo.
E) G é acíclico, e o número de arestas é mínimo.

6_ (POSCOMP – 2008) Seja G (V, E) um grafo tal que |V| = *n* e |E| = *m* .
Analise as seguintes sentenças:
I. Se G é acíclico com no máximo *n*-1 arestas, então G é uma árvore.
II. Se G é um ciclo, então G tem *n* árvores geradoras distintas.
III. Se G é conexo com no máximo *n* - 1 arestas, então G é uma árvore.
IV. Se G é conexo e tem um ciclo, então para toda árvore geradora T de G, E(G)-E(T) $\neq \emptyset$
A análise permite concluir que:
A) apenas os itens I e III são verdadeiros.
B) apenas os Itens II e III são verdadeiros.
C) apenas o item I é falso.
D) todos os itens são verdadeiros.
E) apenas os itens II e IV são verdadeiros.

7_ Seja G um grafo conexo e *e* uma aresta de E(G). Mostre que *e* está em toda árvore geradora de G ↔ *e* for uma ponte.

8_ Um grafo autocomplementar é um grafo que é isomorfo ao seu complemento. Mostre que o número de vértices de um grafo autocomplementar é da forma 4*k* ou 4*k*+1.

9_ Abaixo são apresentadas a matriz de adjacência de um grafo G e a matriz de incidência de um grafo H.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	0	1	0	1	0	0
B	0	0	1	0	1	0	0
C	1	1	0	0	0	1	0
D	0	0	0	0	1	1	1
E	1	1	0	1	0	0	1
F	0	0	1	1	0	0	1
G	0	0	0	1	1	1	0

Matriz de adjacência de G

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
Q	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
Y	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
M	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
T	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
X	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
W	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
J	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Matriz de incidência de H

a) Desenhe G.

b) Qual o grau de cada vértice de G.

c) G é isomorfo ao grafo H?