Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Informática
prof. André Gustavo dos Santos
INF 330 - Teoria e Modelos de Grafos - 2009/2

Prova 2
5/nov/2009

GABARITO resumido, as respostas não estão rigorosamente completas

1. Prove que sim ou que não:

(i) Existe árvore com número cromático maior que 2
(ii) Existe árvore com clique máximo maior que 2

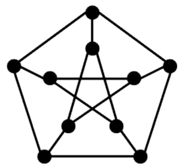
(i) Não, toda árvore é um grafo bipartido, e grafo bipartido tem número cromático 2
(ii) Não, clique maior que 2 tem ciclo e árvore não tem ciclo

2. Prove que sim ou que não:

(i) Se um grafo tem clique de tamanho ≥ 5 ele certamente **não** é planar
(ii) Se um grafo **não** tem clique de tamanho ≥ 5 ele certamente é planar

(i) Sim, pois contém K_5 como subgrafo, que não é planar
(ii) Não, o $K_{3,3}$ é um contra-exemplo

3. Considere o grafo ao lado, chamado de grafo de Petersen:



(i) Prove que esse grafo não é planar
(ii) Encontre seu número cromático e prove que o resultado está correto

(i) Uma das formas é remover estrategicamente algumas arestas e contrair vértices de grau 2 para mostrar que ele tem um subgrafo homeomorfo ao $K_{3,3}$
(ii) Como há ciclo de tamanho ímpar (5 vértices), $\chi \geq 3$ (limite inferior). Deve ser mostrada uma coloração com 3 cores (limite superior), e assim conclui-se que $\chi = 3$.

4. Considere um grafo bipartido completo $K_{m,n}$

(i) qual o tamanho do maior conjunto independente desse grafo?
(ii) qual o tamanho do maior clique desse grafo?
(iii) qual seu índice cromático (coloração de arestas)?
(iv) qual o tamanho do maior matching?
(v) prove as respostas de pelo menos dois dos valores anteriores
(vi) e se o grafo for bipartido mas não for completo, o que muda nas respostas anteriores?

(i) **max(m,n)**. Os vértices de uma partição são certamente conjunto independente pois não são adjacentes. Não há como aumentar esse conjunto pois os vértices da outra partição são adjacentes aos vértices do conjunto. Logo, a maior partição forma o maior conjunto independente.

(ii) **2**. Não há clique de tamanho 3 pois não há triângulo em grafo bipartido. Isto exclui também cliques maiores que 3.

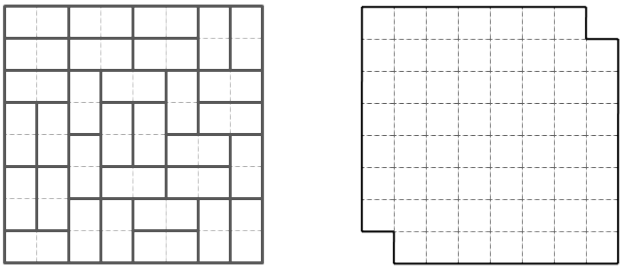
(iii) **max(m,n)**. O índice cromático de um grafo bipartido é o maior grau.

(iv) **min(m,n)**. Basta escolher uma aresta incidente a cada vértice do menor conjunto. Sempre é possível escolher arestas não adjacentes pois cada um se liga a todos os outros vértices da outra partição. Não há como aumentar esse matching pois qualquer outra aresta é incidente a alguma aresta já escolhida, pois todos os vértices da menor partição já fazem parte do matching.

(v) Respondido acima

(vi) conjunto independente pode aumentar, clique não se altera (a não ser que não exista aresta), e os demais podem diminuir

5. Considere uma sala quadrada de tamanho 8x8 que deve ser totalmente coberta por pisos de tamanho 1x2. A figura da esquerda mostra uma das muitas soluções possíveis. Prove que será impossível cobrir a sala caso dois cantos opostos sejam retirados (figura da direita).



Dica: o resultado de alguma outra questão da prova pode ajudar...

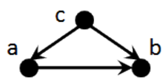
Construa um grafo com um vértice para cada quadrado 1x1 e arestas ligando quadrados adjacentes na horizontal ou vertical. Cada aresta corresponderá a um piso 1x2. Um matching perfeito soluciona o problema.

Colorindo-se a sala como num tabuleiro de xadrez, percebe-se que o grafo é bipartido pois só há aresta entre vértices de cores diferentes.

Retirando-se dois cantos opostos, restarão 30 vértices de uma cor e 32 de outra. O matching de um grafo bipartido é no máximo o tamanho do menor conjunto (vide questão 5), logo não há matching maior que 30. Como isso cobre apenas 60 quadrados, pelo menos 2 ficarão descobertos.

6. Suponha um grafo de um campeonato de tênis construído da seguinte maneira: cada jogador é representado por um vértice; cada partida é representada por um arco, com a direção indicando quem venceu (não há empates). O grafo a seguir representa 3 partidas, tendo o jogador b vencido duas delas.

(i) O que é DAG e por que nem todo grafo assim construído é DAG ?
(ii) O que é ordenação topológica e por que ela só existe para DAG's?
(iii) Se o grafo de um certo campeonato é DAG, que conclusões podem ser tiradas de uma ordenação topológica de seus vértices?



(i) DAG é um grafo sem ciclo direcionado. Se no exemplo o jogador c tivesse vencido b, haveria um ciclo direcionado, então não seria DAG
(ii) É uma sequência de vértices de tal forma que não haja arco de um vértice a outro anterior na sequência. Não há como ordenar vértices de tal forma se houver ciclo.
(iii) Supondo a ordenação topológica $v_1, v_2, \ldots, v_n$, cada jogador v_i não foi derrotado por nenhum dos jogadores $v_1 \ldots v_{i-1}$ e não venceu nenhum dos jogadores $v_{i+1} \ldots v_n$