Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Informática
prof. André Gustavo dos Santos
INF 330 - Teoria e Modelos de Grafos - 2009/2

Prova 1
5/out/2009

GABARITO resumido, as respostas não estão rigorosamente completas

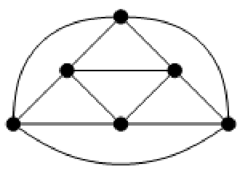
1. POSCOMP 2002-40: Considere um grafo G satisfazendo as seguintes propriedades:

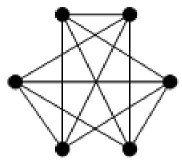
- G é conexo
- Se removermos qualquer aresta de G, o grafo obtido é desconexo

Então é correto afirmar que o grafo G é:

(a) Um circuito
(b) Não bipartido
(c) Uma árvore
(d) Hamiltoniano
(e) Euleriano

2. POSCOMP 2005-39: Os grafos $G = (V_G, E_G)$ e $H = (V_H, E_H)$ são isomorfos. Assinale a alternativa que justifica esta afirmação.


G


H

(a) As sequências dos graus dos vértices de G e H são iguais
(b) Os grafos tem o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas
(c) Existe uma bijeção de V_G para V_H que preserva adjacências
(d) Cada vértice de G e H pertence a exatamente quatro triângulos distintos
(e) Ambos os grafos admitem um circuito que passa por cada aresta exatamente uma vez

3. Considere um grafo simples conectado G com 50 arestas.

(i) Qual o número **mínimo** e **máximo** de vértices ele pode ter?
(ii) E se ele for bipartido?

Obs.: justifique suas respostas

(i) mínimo 11 (com 10 não passa das 45 do K_{10}) e máximo 51 (árvore)
(ii) mínimo 15 (com 14 não passa das 49 do $K_{7,7}$) e máximo 51 (árvore, exemplo $K_{1,50}$)

4. Sejam $V(G)$, $A(G)$ e $\omega(G)$ respectivamente o número de vértices, arestas e componentes de um grafo G.

(i) Encontre uma relação entre esses valores para um grafo G que é uma floresta.
(ii) Prove que sua relação está correta para qualquer floresta

(i) $V(G) = A(G) + \omega(G)$

(ii) Uma floresta de $\omega(G)$ componentes contém $\omega(G)$ árvores, e em cada árvore T_i vale a relação $V(T_i) = A(T_i) + 1$. Somando todas as árvores T_i, para $i = 1 \ldots \omega(G)$ chega-se a $V(G) = A(G) + \omega(G)$

(ii - outra forma): considere uma árvore T de $V(G)$ vértices supergrafo de G; ela tem apenas 1 componente, e cada aresta removida cria um novo componente. Logo, ela possui $\omega(G) - 1$ arestas a mais que G. T é árvore então vale a relação $V(T) = A(T) + 1$, que implica $V(G) = (A(G) + \omega(G) - 1) + 1$, ou seja, $V(G) = A(G) + \omega(G)$

5. Seja G um grafo bipartido e X e Y as partições do conjunto de vértices de G.

(i) Prove que se $|X| \neq |Y|$ então G não é hamiltoniano
(ii) Prove que G pode ser euleriano, mesmo se $|X| \neq |Y|$

(i) Não há arestas entre elementos de X e nem entre elementos de Y, logo o ciclo deve alternar vértices de X e Y. Assim, um ciclo hamiltoniano deveria ser da forma $x_0 \to y_0 \to x_1 \to y_1 \to \ldots x_n \to y_n \to x_0$, sendo x_i e y_i vértices de X e Y em alguma ordem e n o tamanho dos conjuntos. Só é possível incluir todos sem repetir se X e Y forem do mesmo tamanho.

(ii) O $K_{2,4}$ por exemplo é euleriano.

6. POSCOMP 2006-36: Seja $G = (V, E)$ um grafo simples conexo não-euleriano. Queremos construir um grafo H que seja euleriano e que contenha G como subgrafo. Considere os seguintes possíveis processos de construção:

(I) Acrescenta-se um novo vértice, ligando-o a cada vértice de G por uma aresta.
(II) Acrescenta-se um novo vértice, ligando-o a cada vértice de grau ímpar de G por uma aresta.
(III) Cria-se uma nova cópia G' de G e acrescenta-se uma aresta ligando cada par de vértices correspondentes.
(IV) Escolhe-se um vértice arbitrário de G e acrescentam-se arestas ligando este vértice a todo vértice de grau ímpar de G.
(V) Duplicam-se todas as arestas de G.
(VI) Acrescentam-se arestas a G até formar o grafo completo com $|V|$ vértices.

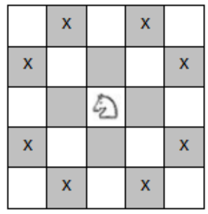
Quais dos processos acima sempre constroem corretamente o grafo H ?

São verdadeiras:
(a) Somente (II) e (IV)
(b) Somente (II), (IV) e (V)
(c) Somente (III), (V) e (VI)
(d) Somente (II), (IV), (V) e (VI)
(e) Somente (I), (III), (IV) e (V)

7. Seja $T_{n,n}$ um tabuleiro de xadrez $n \times n$. Denominamos *circuito equestre* em $T_{n,n}$ um percurso de um cavalo, movendo-se como num jogo de xadrez, que passa por cada uma das casas de $T_{n,n}$ exatamente uma vez, e que começa e termina numa mesma casa (arbitrária).

(i) Mostre como modelar esse problema utilizando conceitos de grafos
(ii) Utilizando o modelo proposto, prove que não há solução para $n = 3$
(iii) Faça o mesmo para $n = 4$
(iv) Faça o mesmo para n ímpar *[Sugestão: vide questão 5]*

Obs.: pelas regras do xadrez, um cavalo se move em "L": ele salta para uma casa que está a 2 coordenadas numa direção e 1 na outra. A figura ao lado mostra os possíveis movimentos, marcados com um "x", a partir da casa marcada com o cavalo. Note que para as casas próximas da borda não existem esses 8 movimentos.



(i) Vértices representam as casas do tabuleiro, e são adjacentes se o cavalo pode saltar de uma pra outra. Um ciclo hamiltoniano resolve o problema
(ii) O vértice do meio fica isolado, logo não há ciclo hamiltoniano
(iii) Pegue dois vértices de extremos opostos. Eles tem grau dois, e as duas únicas arestas devem fazer parte do ciclo. Isso forma um subciclo de 4 vértices, sem incluir todos
(iv) Pelo desenho percebe-se que de uma casa branca o cavalo só vai para casa preta e vice-versa. Logo o grafo é bipartido (vértices "brancos"e "pretos"). Com n ímpar, o número de vértices n^2 também é ímpar, e então o número de vértices brancos e pretos é diferente. Pela questão 5, tal grafo não tem ciclo hamiltoniano.

8. Seja G um grafo representando uma comunidade. Cada pessoa da comunidade é representada por um vértice. Dois vértices são adjacentes se representam pessoas amigas (e que portanto, uma tem o contato da outra). Quando alguém recebe uma nova notícia, no minuto seguinte conta para todos seus contatos (exceto, é claro, para quem lhe contou).

Suponha que alguém fora da comunidade conte uma notícia X à pessoa da comunidade representada pelo vértice v.

(i) Em que tipo de grafo uma pessoa recebe uma notícia que ela mesma contou?
(ii) Em que tipo de grafo alguma pessoa ficará sem receber uma notícia?
(iii) Que método determina em quanto tempo a notícia X chegará ao vértice w?
(iv) Comente a afirmativa: é melhor que v seja um vértice de maior grau que um vértice no centro do grafo, pois assim a notícia atinge a todos os possíveis em menor tempo
(vi) Se G é uma árvore m-ária completa de altura h com raiz v, quantas pessoas não contam a notícia a ninguém ?
(vii) Na pergunta anterior, faria diferença se a árvore fosse cheia, mas não completa? Justifique.

(i) Grafo com ciclo (nesse caso, ciclo de tamanho maior que 2 pois loops e ciclo com 2 vértices não fazem sentido)
(ii) Grafo desconectado
(iii) Qualquer método de caminho mínimo, por exemplo Dijkstra e Floyd
(iv) Errada, deve ser o do centro, pois sua excentricidade é mínima, ou seja, tem o menor caminho até o mais distante
(v) ?
(vi) são as folhas, m^h
(vii) sim, pois o número de folhas seria menor que m_h. Por exemplo uma árvore em que apenas um dos filhos da raiz não é folha