UFV - Universidade Federal de Viçosa
DPI - Departamento de Informática
Prof. André Gustavo dos Santos
INF 330 - Teoria e Modelos de Grafos - 2017/2

Prova 1
26/set/2017

GABARITO (respostas resumidas)

---

1. Seja G um grafo simples e conectado de n vértices. Quantas arestas G pode ter no máximo e no mínimo?

No máximo $n(n-1)/2$ quando for completo e no mínimo $n-1$ quando for árvore.

2. Certo grafo tem 20 vértices e 48 arestas. Todo vértice tem grau 3 ou 7. Quantos têm grau 3?

$$\begin{cases} v_3 + v_7 = 20 & \text{quantidade de vértices de grau 3 e 7} \\ 3v_3 + 7v_7 = 2 \times 48 & \text{Handshaking lemma} : \sum_v d(v) = 2m \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema, $v_3 = 11$.
Obs.: provas com $|A| = 46$, $v_3 = 12$.

3. Seja T uma árvore com número par de arestas. Prove que T tem pelo menos um vértice de grau par.

Em árvore, $|A| = |V| - 1$, se $|A|$ é par então $|V|$ é ímpar. Como não existe grafo com número ímpar de vértices de grau ímpar, não se pode ter todo vértice de V com grau ímpar.

4. Com 8 vitórias consecutivas nas eliminatórias da América do Sul, o Brasil se classificou para a Copa do Mundo de 2018 com quatro rodadas de antecedência. Foi o primeiro país classificado, além da anfitriã Rússia. Nas eliminatórias da América do Sul participam 10 países. Todos jogam contra todos em jogos de ida e de volta (isto é, duas vezes). Proponha um grafo apropriado para representar a competição e:

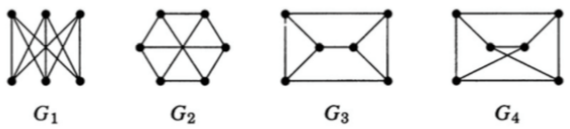
K_{10} com arestas duplicadas: vértices são países e arestas as partidas.

(i) calcule o número total de partidas disputadas usando o grafo proposto. 90.
(ii) determine se o grafo proposto é planar. Não, K_5 é subgrafo.

5. Seja G um grafo simples conectado planar de 100 arestas. Quantos vértices G pode ter?

No máximo 101, mais que isso deixa de ser conectado.
No mínimo 36, para atender $100 \leq 3n - 6$. Menos que isso deixa der planar.

6. [POSCOMP] Considere os grafos a seguir.



Pela análise desses grafos, verifica-se que:

(A) G_3 e G_4 são grafos completos
(B) G_1 e G_2 são grafos isomorfos
(C) G_3 e G_1 são grafos bipartidos
(D) G_2 e G_3 são grafos planares
(E) G_4 e G_1 são multigrafos

7. [POSCOMP] Considere T uma árvore binária cheia, em que n, n_e, n_i e h representam o número de nós, o número de nós externos, o número de nós internos e a altura de T, respectivamente. Portanto, a essa árvore T aplica-se a seguinte propriedade:

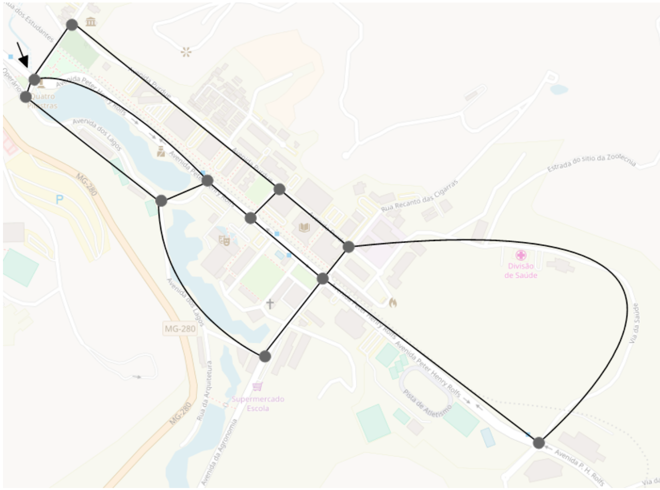
(A) $n_i = n_e + 1$
(B) $h - 1 \leq n_e \leq 2^h$
(C) $h + 1 \leq n_i \leq 2^h$
(D) $\log(n+1) \leq h \leq n - 1$
(E) $2h + 1 \leq n \leq 2^{(h+1)} - 1$

8. Suponha uma corrida de integração entre os estudantes pelo campus da UFV. A corrida usará as ruas destacadas no mapa ao lado, com partida e chegada nas 4 pilastras (local indicado pela seta). Utilize conceitos e teoria de grafos para responder às seguintes questões:

(i) é possível que a corrida passe exatamente uma vez por cada trecho de rua?

Não, pois o grafo não é euleriano, há vértices de grau ímpar.

(ii) é possível que a corrida passe exatamente uma vez por cada ponto destacado no mapa (exceto o de partida/chegada)?



Não, pois o grafo não é hamiltoniano. Se fosse, as arestas incidentes a vértices de grau 2 (vermelhas) deveriam estar do ciclo. Consequentemente as tracejadas em laranja não fariam parte, pois incidem em vértices já cobertos pelo ciclo. Um vértice ficou com grau 1, não pode ser incluído no ciclo.