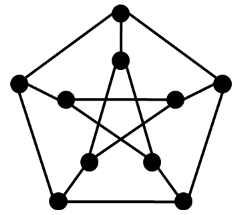
UFV - Universidade Federal de Viçosa
DPI - Departamento de Informática
Prof. André Gustavo dos Santos
INF 330 - Teoria e Modelos de Grafos - 2017/2

Prova 2
31/out/2017

GABARITO (respostas resumidas)



1. Considere o grafo ao lado, chamado grafo de Petersen.
Encontre seu número cromático e prove que seu resultado está correto. 3

2. Dado um grafo G, é possível $\chi(G) < \Delta(G)$? É possível $\chi'(G) < \Delta(G)$?
Obs.: χ é o número cromático, χ' é o índice cromático e Δ é o maior grau de vértice. Sim. Não.

3. Responda, considerando um grafo bipartido completo $K_{m,n}$:
(não precisa provar nesta questão)

(i) qual o tamanho do maior conjunto independente desse grafo? $\max(m,n)$
(ii) qual seu índice cromático (coloração de arestas)? $\Delta = \max(m,n)$
(iii) qual o tamanho do maior matching? $\min(m,n)$
(iv) qual o tamanho da menor cobertura? $\min(m,n)$
(v) qual o tamanho do maior clique desse grafo? 2

4. Prove as respostas de **pelo menos dois** dos valores respondidos na questão anterior. Além disso, informe **o que mudaria** nas respostas se o grafo fosse bipartido mas não completo.

5. Considere um grafo K_6 cujas arestas foram coloridas de azul e vermelho. Prove que existe pelo menos um K_3 azul ou um K_3 vermelho. Prova por construção ou usar o fato que Ramsey(3,3) = 6.

6. Dê condições necessárias e suficientes para que um digrafo tenha circuito euleriano orientado.

Fortemente conectado e $\delta^-(v) = \delta^+(v), \forall v \in V$.

7. Prove que, depois de disputadas todas as partidas de um campeonato *round-robin*[1], se nenhuma delas terminou empatada, é possível dar números aos n times de tal forma que o time T_1 venceu o time T_2, que venceu o time T_3, que venceu ... time T_{n-1}, que venceu o time T_n.

O digrafo é um torneio e todo torneio tem caminho hamiltoniano.

8. Enquanto estudavam para a prova de grafos, dois estudantes jogavam um jogo em um grafo G, escolhendo vértices **distintos** alternadamente. O jogador 1 começa escolhendo um vértice qualquer. Em cada jogada subsequente deve-se escolher um vértice ainda não escolhido adjacente ao último escolhido (pelo outro jogador). Note que as jogadas formam um caminho em G. Vence o último que puder jogar.

(i) Se G tiver um matching perfeito, que jogador possui estratégia vencedora? Qual é ela e por quê?

Jogador 2, sempre poderá escolher o vértice que faz matching (logo, adjacente) com o último do jog. 1

(ii) Se G não tiver matching perfeito, que jogador possui estratégia vencedora? Qual é ela e por quê?

9. Como resolver cada problema a seguir usando grafos?

(i) Numa excursão de crianças de uma escola, as n crianças devem ocupar as n poltronas do ônibus. Assim, cada criança estará sentada ao lado de exatamente alguma outra. Seus professores sabem que algumas crianças não se dão bem e por isso não devem sentar-se lado a lado. Será possível destribuí-las?

V = crianças, A = pares de crianças que se dão bem. Será possível se houver matching perfeito.

(ii) Dado um conjunto de n números inteiros, selecionar o maior conjunto de números que são primos entre si (ou seja, que não têm divisores em comum). Por exemplo, de $\{12, 14, 21, 22, 25\}$ podemos selecionar $\{21, 22, 25\}$.

V = números, A = se possui fator comum. Encontrar conjunto independente máximo.

[1] Campeonato em que cada time joga exatamente uma vez contra cada um dos outros