Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Informática
prof. André Gustavo dos Santos
INF 330 - Teoria e Modelos de Grafos - 2010/2

Prova 3
25/nov/2010

GABARITO resumido, as respostas não estão rigorosamente completas

Justifique suas respostas!

1. [4,0 PTS] Dado um grafo G com peso nas arestas (nenhum negativo), o método de Dijkstra pode ser usado para encontrar de forma eficiente o caminho de menor peso de um dado vértice até cada um dos demais.

(a) Se todas as arestas de G têm peso 1, a busca em largura poderia ser usada? Prove que sim ou que não.
Sim, ela explora os vértices em ordem de distância em relação ao número de arestas

(b) Se todas as arestas de G têm peso 1, a busca em profundidade poderia ser usada? Prove que sim ou que não.
Não. Considere um ciclo C_n e seja u e v dois vértices adjacentes, no sentido horário. A busca a partir de v no sentido horário encontra um caminho até u com $n-1$ arestas, mas existe caminho com 1.

(c) Se o objetivo é apenas saber se há um caminho qualquer entre dois dados vértices, não necessariamente mínimo, qual das buscas deveria ser usada?
Qualquer uma, pois se existir caminho ambas encontram algum.
Existem alguns argumentos a favor da busca em profundidade que também seriam aceitos.

2. [3,0 PTS] **Cite um problema** em grafos para o qual ainda não se conhece método eficiente para resolvê-lo. **Cite ou explique uma heurística** que encontra uma "boa" solução para esse problema (que resolve o problema em vários grafos, ou pelo menos chega perto da solução). **Prove que** essa heurística não encontra sempre a "melhor" solução (pode ser com exemplo).

Obs: um método é considerado eficiente se tem complexidade polinomial em função do tamanho da entrada
Coloração, caixeiro viajante, ...

3. [3,0 PTS] Seja G um grafo bipartido. Prove que $\alpha(G) = n(G)/2$ se e somente se G tem um matching perfeito.

Obs: α é o tamanho do maior conjunto independente de vértices, e n é o número de vértices do grafo

4. [9,0 PTS] Proponha uma forma de resolver cada um dos seguintes problemas utilizando grafos:

(a) Seguindo as regras de movimento do xadrez, é possível um cavalo fazer um *tour* passando por todas as casas do tabuleiro, uma única vez em cada uma?
Seja G um grafo com um vértice para casa e uma aresta entre vértices se o cavalo pode mover de uma casa para a outra com um único movimento. O *tour* é possível se e somente se G tem caminho hamiltoniano.

(b) Três missionários e três canibais caminham juntos e encontram um rio. Todos devem atravessá-lo usando uma canoa, que comporta apenas 2 pessoas, então ela será usada várias vezes. Os missionários precisam achar uma estratégia que não deixa, em nenhum momento e em nenhuma das margens, mais canibais que missionários (senão eles podem não sobreviver pra contar a história!)
Seja G um grafo com vértices representando cada configuração possível, por exemplo, chamados xy/wz, sendo x e y respectivamente o número de missionários e canibais de um lado do rio, e w e z o número de missionários e cabinais do outro ($x + w = 3$, $y + z = 3$, $x \geq y$, $y \geq z$). Existe uma aresta entre dois vértices u e v em G se a configuração u pode ser obtida de v com uma única travessia de canoa. Basta achar um caminho em G de 33/00 até 00/33.

(c) Cinco estudantes devem ser entrevistados por cinco professores: professor 1 deve entrevistar os estudantes B e D; professor 2 os estudantes A, B e E; professor 3 os estudantes B, C e E; professor 4 os estudantes A e C; professor 5 os estudantes B, D e E. Se toda entrevista tem a mesma duração, encontrar o número mínimo de horários de entrevista que são necessários.
Seja G um grafo bipartido com um vértice para cada professor e um vértice para cada estudantes, existindo aresta entre um professor e cada um dos estudantes que deve entrevistar. Basta achar o índice cromático (coloração de arestas).

5. [3,0 PTS] Resolva **um** dos problemas da questão anterior usando o modelo de grafo proposto.

6. [3,0 PTS] Escolha e resolva **um** dos seguintes problemas usando os dados do grafo abaixo:

(a) Os pesos dos arcos representam distâncias. Mostre os passos do método de Dijkstra para encontrar o menor caminho do vértice s até o vértice t, e explique porque o método funciona (com distâncias ≥ 0).

(b) Os pesos dos arcos representam capacidades. Mostre os passos do método de Ford-Fulkerson para encontrar o fluxo máximo do vértice s até o vértice t, e explique o teorema *max-flow min-cut*.