Departamento de Matemática - UFV
MAT 131-Introdução a Álgebra

Segunda Avaliação - PER2020

Pontuação: A prova tem valor de 15 pontos distribuídos da seguinte forma:

1. 8 pontos para as questões objetivas;
2. 7 pontos para as questões discursivas.

QUESTÕES OBJETIVAS - MÚLTIPLA ESCOLHA

1. **(2 pontos)** Dado o conjunto $A = \{a, \{a\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$ e as afirmações: (I) $\{a\} \in A$ e $\{a\} \subset A$ (II) $\{a, \emptyset\} \subset A$ e $\{a\} \subset \mathcal{P}(A)$ e (III) $(\{\emptyset\}, \emptyset) \in A^2 \longrightarrow (\emptyset, \{\emptyset\}) \in D(A)$

   É correto afirmar:

   (a) Somente duas afirmações são verdadeiras
   (b) As três afirmações são falsas
   (c) Somente duas afirmações são falsas
   (d) Somente uma afirmação é falsa

2. **(2 pontos)** Para mostrar que $(B-C)\cap(B\cap C) = \emptyset$, foram apresentadas três provas. Indicar a prova correta:

   (I) Note que $(B - C) \cap (B \cap C) = \emptyset$, nos diz que $B - C$ e $B \cap C$ não possuem elementos em comum. Por outro lado, como $B \cap C \subset C$, qualquer elemento em B também está em C. Assim, para $x \in (B - C)$, temos $x \in B$ e $x \notin C$. Logo, $x \in C$ e $x \notin C$, que é um absurdo. Daqui, $x \in \emptyset$. Portanto, $(B - C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.

   (II) Se $x \in (B - C) \cap (B \cap C)$, então $x \in (B - C)$ e $x \in (B \cap C)$. De onde, $x \in B$ e $x \notin C$. Ou seja, $x \notin (B \cap C)$. Daqui, $x \in \emptyset$. Portanto, $(B - C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.

   (III) É suficiente mostrar que $(B - C) \cap (B \cap C) \subset \emptyset$, pois $\emptyset \subset (B - C) \cap (B \cap C)$ se cumpre naturalmente. Suponhamos que $(B-C)\cap(B\cap C) \not\subset \emptyset$, então existe $x \in (B-C)\cap(B\cap C)$ tal que $x \notin \emptyset$. Ora, se $x \in (B - C) \cap (B \cap C)$, temos ($x \in B$ e $x \notin C$) e ($x \in B$ e $x \in C$). Logo, $x \in B$ e ($x \in C$ e $x \notin C$). De onde, $x \in B$ e $x \in \emptyset$. Ou seja, $x \in \emptyset$. Mas, isto contradiz nossa suposição, $x \notin \emptyset$. Assim, $(B - C) \cap (B \cap C) \subset \emptyset$. Portanto, $(B - C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.

3. **(2 pontos)** Defina a operação $*$ ente dois conjuntos por $A * B = (A \cup B) - A^c$. Marcar a afirmação correta:

   (a) $A * B = B * A$ para todo $A, B \subset U$
   (b) $A * (B \cap C) = (A * B) \cap (A * C)$, para todo $A, B, C \subset U$
   (c) $A \cap (B * C) = (A \cap B) * (A \cap C)$, para todo $A, B, C \subset U$

4. **(2 pontos)** Seja $n(A) = n(B) = 8$ e $n(C) = n(D) = 5$ e suponha que o número máximo de elementos de $(A \cup C)$ seja k e que o número máximo de elementos de $(B \cap D)$ seja h. É correto afirmar:

   (a) $k \cdot h = 60$

   (b) $k - h = 8$

   (c) $h^2 - k = 10$

QUESTÕES DISCURSIVAS

1. **(2 pontos)** Considerando o conjunto universo $U = \{\sqrt{2}, 5+3i, 1/2, -2, 2, 7\}$ e os conjuntos $A = \{x \in U : x \notin \mathbb{Q} \longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x \in U : (x \in \mathbb{N} \vee x \notin \mathbb{R}) \longrightarrow x \in \mathbb{C}\}$. Determinar os elementos de A e B.

2. **(2 pontos)** Seja U o conjunto universo e sejam $A, B, D \subset U$ conjuntos não vazios tais que $(A \cup B)^c \subset D$. Mostre que $(A \cup B) - D = \emptyset$ se, e somente se $D = U$.

3. **(2 pontos)** Sejam A, B, C e D conjuntos quaisquer. Mostre que $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$

4. **(1 ponto)** Sejam A, B, C, D conjuntos tais que $n(A) = n(B) = 8$ e $n(C) = n(D) = 5$. Determinar o número máximo de elementos de $(A \cup C)$ e o número máximo de elementos de $(B \cap D)$. **Justifique sua resposta!**

Boa Prova!