Departamento de Matemática - UFV
MAT 131-Introduao a Algebra
Primeira Avaliação - PER2020 - GABARITO

Pontuação: A prova tem valor de 15 pontos distribuídos da seguinte forma:

1. 9 pontos via plataforma;
2. 6 pontos via redação das questões 1b, 4 e 5b.

---

1. A proposição w é dada pelo esquema abaixo. Pede-se:

$$[(p \longrightarrow q) \vee r] \vee \{[(\sim p \vee q) \wedge (\sim s \vee r \vee t)] \vee [(p \vee \sim q) \wedge (\sim s \vee r \vee t)]\}$$

   (a) Indicar uma condição suficiente para que $v(w) = V$. Justifique!

   (b) Determinar a menor proposição equivalente a proposição dada.

Solução:

(a) Sabemos que $V \vee p \equiv V$. Desse modo, para $v(w) = V$ é suficiente que $v[(p \longrightarrow q) \vee r] = V$ ou $v[(\sim p \vee q) \wedge (\sim s \vee r \vee t)] = V$ ou $v[(p \vee \sim q) \wedge (\sim s \vee r \vee t)] = V$.
Escolhemos $v[(p \longrightarrow q) \vee r] = V$, que para ser verdadeira, é suficiente que $v(r) = V$.
Assim, uma condição suficiente para saber que $v(w) = V$ é saber que $v(r) = V$.

(b) Para encontrar a menor proposição equivalente, devemos simplificar a proposição dada.
Simplifiquemos primeiro:

(i) $$\begin{aligned} [(\sim p \vee q) \wedge (\sim s \vee r \vee t)] \vee [(p \vee \sim q) \wedge (\sim s \vee r \vee t)] &\equiv [(\sim p \vee q) \vee (p \vee \sim q)] \wedge (\sim s \vee r \vee t) \\ &\equiv [(\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q)] \wedge (\sim s \vee r \vee t) \\ &\equiv V \wedge (\sim s \vee r \vee t) \\ &\equiv (\sim s \vee r \vee t) \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} [(p \longrightarrow q) \vee r] \vee (\sim s \vee r \vee t) &\equiv (\sim p \vee q \vee r) \vee (\sim s \vee r \vee t) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim s) \vee (q \vee r \vee t) \\ &\equiv \sim (p \wedge s) \vee (q \vee r \vee t) \\ &\equiv (p \wedge s) \longrightarrow (q \vee r \vee t) \end{aligned}$$

Assim, a proposição mais simples equivalente à proposição dada é $(p \wedge s) \longrightarrow (q \vee r \vee t)$.

2. Para o enunciado abaixo. Pede-se:

   (a) Formalizar e negar em linguagem proposicional;

   (b) Verificar se o argumento dado neste enunciado é válido.

> Se um futuro brilhante me aguarda, então receberei uma substanciosa herança ou terei que estudar muito. Mas, não receberei a substanciosa herança. Consequentemente, se eu não estudar muito, então não me espera um futuro promissor ou é indiferente para mim ter sucesso na vida.

Solução:

(a) Fazendo p : Me aguarda um futuro brilhante, q : Eu receberei uma substanciosa herança, r : Eu terei que estudar muito, t : Para mim é indiferente ter sucesso na vida
Com isto, a formalização do enunciado é:

$$\{[p \longrightarrow (q \vee r)] \wedge \sim q\} \longrightarrow \{\sim r \longrightarrow (\sim p \vee t)\}$$

(b) Vamos supor que este argumento não é válido. Nesse caso, $v\{[p \longrightarrow (q \vee r)] \wedge \sim q\} = V$ e $v\{\sim r \longrightarrow (\sim p \vee t)\} = F$.
De $v\{\sim r \longrightarrow (\sim p \vee t)\} = F$, temos $v(r) = F$ e $v(\sim p \vee t) = F$. E daqui, $v(p) = V$ e $v(t) = F$.
De $v\{[p \longrightarrow (q \vee r)] \wedge \sim q\} = V$, temos $v(q) = F$ e $[p \longrightarrow (q \vee r)] = V$.
Como $v(r) = F$, $v(q) = F$ e $[p \longrightarrow (q \vee r)] = V$, resulta que $v(p) = F$.
Assim, $v(p) = V$ e $v(p) = F$, que contradiz o princípio do terceiro excluído. Isto indica que nossa suposição do argumento ser falso não é adequada, pois nos leva a uma contradição.
Portanto, o argumento dado é válido.

3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$. Mostre que se $\sqrt{xy} \neq \dfrac{x+y}{2}$, então $x \neq y$.

Solução: Suponha que $x = y$. Então, $\sqrt{xy} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, pois $x > 0$. Logo, $\sqrt{xy} = x = \dfrac{x+x}{2} = \dfrac{x+y}{2}$, que é a negação da hipótese.

Portanto, de acordo com a prova pela contrapositiva, é válido que se $\sqrt{xy} \neq \dfrac{x+y}{2}$, então $x \neq y$.

4. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Solução: Usaremos o princípio de indução finita para mostrar a afirmação.

Seja $p(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

(a) $p(1)$ é verdadeira, pois $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$.

(b) Suponhamos que $p(k) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ é verdadeira, para $k > 1$. Queremos mostrar que $p(k+1)$ também é verdadeira. De fato,
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$. Acrescentando $(k+1)^3$ a ambos os lados da igualdade temos

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2[\frac{k^2}{4} + (k+1)] \\
&= (k+1)^2[\frac{k^2+4k+4}{4}] \\
&= (k+1)^2[\frac{(k+2)^2}{4}] \\
&= \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}
\end{aligned}$$

Assim, $p(k+1)$ é válido.

Portanto, pelo PIF, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. O Zé Carioca, estudando lógica, criou o operador lógico @, definido por $p@q \equiv \sim p \wedge \sim q$. Ele notou que $\sim p \equiv \sim p \wedge \sim p \equiv p@p$. Isto lhe sugeriu que todos os operadores lógicos padrões podem ser escritos em função do operador @. Ajude o Zé Carioca a escrever as seguintes proposições em função do operador @.

   (a) $p \wedge q$ (b) $p \longrightarrow q$

   Solução:

   (a) $p \wedge q \equiv \sim (\sim p) \wedge \sim (\sim q) \equiv (\sim p)@(\sim q) \equiv (p@p)@(q@q)$
   $p \wedge q \equiv (p@p)@(q@q)$

   (b) $p \longrightarrow q \equiv (\sim p) \vee q \equiv \sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim [\sim (\sim p) \wedge \sim q] \equiv \sim [(\sim p)@q]$
   $p \longrightarrow q \equiv \sim [(p@p)@q] \equiv [(p@p)@q]@[(p@p)@q]$
   $p \longrightarrow q \equiv [(p@p)@q]@[(p@p)@q]$

Boa Prova!