Departamento de Matemática - UFV
MAT 131-Introdução a Álgebra

Terceira Avaliação - PER2020- GABARITO

QUESTÕES OBJETIVAS - MÚLTIPLA ESCOLHA

1. **(1 pontos)** Sejam A, B, D, F conjuntos não vazios quaisquer e seja $T \subset (A - B) \times (D - F)$. É correto afirmar:

   (a) T é uma relação de B em F

   (b) T é uma relação de A em F

   (c) T é uma relação de A em D

   (d) T é uma relação de B em D

   SOLUÇÃO:

   Note que, pelo enunciado, T é uma relação de $A - B$ em $D - F$.

   Agora, sabemos que $A - B \subset A$ e $D - F \subset D$. Assim, por propriedades do produto cartesiano, $(A - B) \times (D - F) \subset A \times D$. De onde, $T \subset A \times D$.

   Portanto, T é uma relação de A em D.

2. **(2 pontos)** Sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, são definidas as relações R e T, dadas por $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (1, 1), (2, 2), (4, 2), (3, 1)\}$ e $T = \{(x, y) \in A^2 : (y, x) \in R\}$. Considerando as afirmações abaixo. Marcar a sequencia correta:

   (I) R não é transitiva e R não é simétrica

   (II) $R \cap T = \{(1, 1), (2, 2), (4, 2)\}$

   (III) $Dom(R) - Dom(T) \neq \emptyset$

   (a) VVF (b) FVV (c) VFF (d) FFV

   SOLUÇÃO:

   A afirmação (I) é verdadeira.

   R não é transitiva devido a fato de termos $(1, 3) \in R$ e $(3, 5) \in R$, mas $(1, 5) \notin R$.

   R não é simétrica, pois $(3, 5) \in R$, mas $(5, 3) \notin R$.

   A afirmação (II) é falsa, pois de acordo com a definição de T dada, $T = \{(1, 3), (2, 4), (1, 1), (2, 2), (4, 2), (3,$
   Daí, $R \cap T = \{(1, 3), (2, 4), (1, 1), (2, 2), (4, 2), (3, 1)\} \neq \{(1, 1), (2, 2), (4, 2)\}$.

   A afirmação (III) é falsa, pois $Dom(R) = Dom(T) = \{1, 2, 3, 4\}$. De onde, $Dom(R) - Dom(T) = \emptyset$.

   Portanto, a sequencia correta é VFF.

3. **(2 pontos)** Seja $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 4 - (x-1)^2$. É incorreto afirmar:

(a) $f(x-1) = 4 - (2-x)^2$ (b) $f(1-x) < f(x-1) \iff x < 1$

(c) $\exists x \in \mathbb{Z} / f(x+1) < 4$ (d) $f(1-x) = f(x+1)$

SOLUÇÃO: Pela forma da expressão que define f, temos:

(a) $f(x-1) = 4 - [(x-1)-1]^2 = 4 - (x-2)^2 = 4 - (2-x)^2$.

(b) $f(1-x) = 4 - [(1-x)-1]^2 = 4 - x^2$. Assim,

$f(1-x) < f(x-1) \iff 4 - x^2 < 4 - (x-2)^2 \iff 4x > 4 \iff x > 1$.

(c) $f(x+1) = 4 - x^2$. Assim, $f(x+1) < 4$ equivale a $x^2 > 0$. Logo, existe algum $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 > 0$.

(d) Pelo visto antes, $f(1-x) = 4 - x^2$ e $f(x+1) = 4 - x^2$.

Portanto, é incorreto afirmar $f(1-x) < f(x-1) \iff x < 1$.

4. **(2 pontos)** Seja f uma função real dada por $f(x) = \dfrac{3x - 4a}{5}$. É correto afirmar:

(a) Se $a = 5$, então $f^{-1}(3) = 1$

(b) Se $a = 3$, então $f^{-1}(5) = -1$

(c) Se $f^{-1}(3) + f(3) = 1$, então $a = 87$

(d) $f^{-1}(-2a) = f(-2a) = -2a$

SOLUÇÃO: Note que:

(i) f é injetora:

De fato, se $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos que $\dfrac{3x_1 - 4a}{5} = \dfrac{3x_2 - 4a}{5}$. De onde, $x_1 = x_2$.

(ii) f é sobrejetora: De fato, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe, $x = \dfrac{5y + 4a}{3}$ tal que $f(x) = y$.

De (i) e (ii), f é bijetora e daqui possui inversa. Sua inversa é dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{5x + 4a}{3}$. Com isto,

(a) $f^{-1}(3) = \dfrac{15 + 4a}{3}$ e quando $a = 5$, $f^{-1}(3) = \dfrac{15 + 20}{3} = \dfrac{35}{3} \neq 1$

(b) $f^{-1}(5) = \dfrac{25 + 4a}{3}$ e quando $a = 3$ $f^{-1}(5) = \dfrac{25 + 12}{3} = \dfrac{37}{3} \neq -1$.

(c) $f^{-1}(3) + f(3) = \dfrac{15 + 4a}{3} + \dfrac{9 - 4a}{5} = 1$, implica $a = -\dfrac{87}{8} \neq 87$.

(d) $f^{-1}(-2a) = \dfrac{-10a + 4a}{3} = -2a$ e $f(-2a) = \dfrac{-6a - 4a}{5} = -2a$.

Portanto, é correto afirmar que $f^{-1}(-2a) = f(-2a) = -2a$.

QUESTÕES DISCURSIVAS

1. **(2 pontos)** Sejam A, B, D, F conjuntos não vazios quaisquer e seja $T \subset (A - B) \times (D \cap F)$. Mostre que T é uma relação de A em F.

   SOLUÇÃO: Sabemos que $A - B \subset A$ e $D \cap F \subset F$. Assim, $T \subset (A - B) \times (D \cap F) \subset A \times F$. Portanto, R é uma relação de A em F.

2. **(2 pontos)** Seja f uma função real dada por $f(x) = \dfrac{3x - 4a}{5}$, tais que $f^{-1}(3) = 2a - 3b$ e $f^{-1}(5) = 3a + 5b$. Determinar $f^{-1}(a - 3b)$.

   SOLUÇÃO: De acordo com o feito na questão 4 das questões fechadas, temos que $f^{-1}(x) = \dfrac{5x + 4a}{3}$. Assim,

   $f^{-1}(3) = \dfrac{15 + 4a}{3} = 2a - 3b$. De onde, $2a - 9b = 15$ (I)

   $f^{-1}(5) = \dfrac{25 + 4a}{3} = 3a + 5b$. De onde, $a + 3b = 5$ (II)

   Resolvendo (I) e (II) obtemos, $a = 6$ e $b = -\dfrac{1}{3}$.

   Agora, $f^{-1}(a - 3b) = f^{-1}(7) = \dfrac{35 + 24}{3} = \dfrac{59}{3}$.

3. **(2 pontos)** Seja R uma relação definida no conjunto $A \neq \emptyset$. Mostre que se $R \cap R^{-1} \subset D(A)$, então R é antissimétrica.

   SOLUÇÃO: Sejam $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $(x, y) \in R$ e $(x, y) \in R^{-1}$. Daqui, $(x, y) \in (R \cap R^{-1})$. Como, $R \cap R^{-1} \subset D(A)$, segue que $(x, y) \in D(A)$.

   Sabemos que a diagonal de A, $D(A)$, está formado unicamente por elementos da forma (x, x) para todo $x \in A$. Assim, x deve de ser igual a y. Isto é, $x = y$.

   Portanto, R é antissimétrica.

4. **(2 ponto)** Sejam R_1, R_2, R_3 três relações definidas em $\mathbb{Z}$ satisfazendo a seguinte propriedade: Se $(a, b) \in R_1$ e $(c, d) \in R_2$ então $(a - c, b - d) \in R_3$.

   Mostre que se R_1 e R_2 são relações de equivalência, então R_3 também é uma relação de equivalência.

   SOLUÇÃO: Vejamos:

   (i) R_3 é reflexiva: De fato, para todo $x \in \mathbb{Z}$, sabemos que $(x, x) \in R_1$ e $(x, x) \in R_2$, pois ambas são relações reflexivas. Da mesma forma, $(2x, 2x) \in R_1$. Pela propriedade que as três relações satisfazem, temos $(2x, 2x) \in R_1$ e $(x, x) \in R_2$, então $(2x - x, 2x - x) \in R_3$. Ou seja, $(x, x) \in R_3$.

   (i) R_3 é simétrica: De fato, seja $(x, y) \in R_3$. Ora, $(x, y) = (2x - x, 2y - y)$. Então pela propriedade que as três relações satisfazem, é suficiente que $(2x, 2y) \in R_1$ e $(x, y) \in R_2$, para $(x, y) \in R_3$. Como R_1 e R_2 são simétricas, $(2y, 2x) \in R_1$ e $(y, x) \in R_2$. Novamente, pela propriedade, $(2y - y, 2x - x) = (y, x) \in R_3$.

   (iii) R_3 é transitiva: De fato, sejam $(x, y) \in R_3$ e $(y, z) \in R_3$. Pelo mesmo argumento dado na simetria, é suficiente termos:

   (a) $(2x, 2y) \in R_1$ e $(x, y) \in R_2$, para termos $(x, y) \in R_3$.

(b) $(2y, 2z) \in R_1$ e $(y, z) \in R_2$, para termos $(y, z) \in R_3$.

Como R_1 e R_2 são transitivas, temos:

$(2x, 2z) \in R_1$ e $(x, z) \in R_2$. De onde, pela propriedade, $(x, z) \in R_3$.

Portanto, sendo R_3 reflexiva,simétrica e transitiva, temos que R_3 é uma relação de equivalência.