GABARITO - TRABALHO 2

(Valor: 10 pontos   Envio até às 23:30 de 26/10/2020)

1. Considerando os conjuntos

   $A = \{x \in \mathbb{Z} :\sim [x \leq -2 \vee x > 3]\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} :\sim [-1 < x \leq 3 \longrightarrow x = 5]\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} : (x < -2 \vee x \geq 2) \longrightarrow x > 1\}$. Determinar $F = (B \cap C) \triangle (A \cup B)$.

   Solução: Vamos determinar cada um dos conjuntos.

   (i) Note que $\sim [x \leq -2 \vee x > 3] \equiv x > -2 \wedge x \leq 3$. Assim, $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

   (ii) Note que $\sim [-1 < x \leq 3 \longrightarrow x = 5] \equiv -1 < x \leq 3 \wedge x \neq 5$. Assim, $B = \{1, 2, 3\}$

   (iii) Note que $(x < -2 \vee x \geq 2) \longrightarrow x > 1 \equiv (x \geq -2 \wedge x < 2) \vee x > 1$. Assim, $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

   Logo, $A \cup B = A$ e $B \cap C = B$, pois $B \subset A \subset C$.

   De onde, $F = (B \cap C) \triangle (A \cup B) = B \triangle A = (A \cup B) - (A \cap B) = A - B = \{-1, 0\}$.

   Portanto, $F = \{-1, 0\}$.

2. Mostrar, usando elementos, que:

   (a) $(A \cup B^c) \cap (B \cup A^c) = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$

   (b) $\mathcal{P}[(A \cap B) \cup C)] = \mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C)$

   Solução:

   (a) Devemos mostrar duas inclusões: $(A \cup B^c) \cap (B \cup A^c) \subset (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ e $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c \subset (A \cup B^c) \cap (B \cup A^c)$

   (i) Mostremos que $(A \cup B^c) \cap (B \cup A^c) \subset (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$

   Seja $x \in (A \cup B^c) \cap (B \cup A^c)$, então $x \in (A \cup B^c)$ e $x \in (B \cup A^c)$.

   Segue daqui, ($x \in A$ ou $x \in B^c$) e($x \in B$ ou $x \in A^c$). Aplicando distributividade e absorção obtemos ($x \in A$ e $x \in B$) ou ($x \in B^c$ e $x \in A^c$). Logo, $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (B^c \cap A^c)$. Pela lei de Morgan, temos $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cup B)^c$.

   Portanto, $x \in (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$.

   (ii) Mostremos que $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c \subset (A \cup B^c) \cap (B \cup A^c)$

   Seja $x \in (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$, então $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cup B)^c$. Aplicando a lei de Morgan, $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (B^c \cap A^c)$. Logo, ($x \in A$ e $x \in B$) ou ($x \in B^c$ e $x \in A^c$). Aplicando distributividade e absorção, temos ($x \in A$ ou $x \in B^c$) e($x \in B$ ou $x \in A^c$). De onde, $x \in (A \cup B^c)$ e $x \in (B \cup A^c)$.

   Portanto, $x \in (A \cup B^c) \cap (B \cup A^c)$

(b) Devemos mostrar as inclusões $\mathcal{P}[(A \cap B) \cup C)] \subset \mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C)$ e $\mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C) \subset \mathcal{P}[(A \cap B) \cup C)]$.

(i) Mostremos que $\mathcal{P}[(A \cap B) \cup C)] \subset \mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C)$
Seja $X \in \mathcal{P}[(A \cap B) \cup C)]$, então $X \subset [(A \cap B) \cup C)]$. Aplicando distributividade, temos $X \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Logo, $X \subset (A \cup C)$ e $X \subset (B \cup C)$. Isto nos diz, $X \in \mathcal{P}(A \cup C)$ e $X \in \mathcal{P}(B \cup C)$.
Portanto, $X \in \mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C)$.

(ii) Mostremos que $\mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C) \subset \mathcal{P}[(A \cap B) \cup C)]$
Seja $X \in \mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C)$, então $X \in \mathcal{P}(A \cup C)$ e $X \in \mathcal{P}(B \cup C)$. Logo, $X \subset (A \cup C)$ e $X \subset (B \cup C)$. Daqui, $X \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Isto é, $X \subset [(A \cap B) \cup C)]$.
Portanto, $X \in \mathcal{P}[(A \cap B) \cup C)]$.

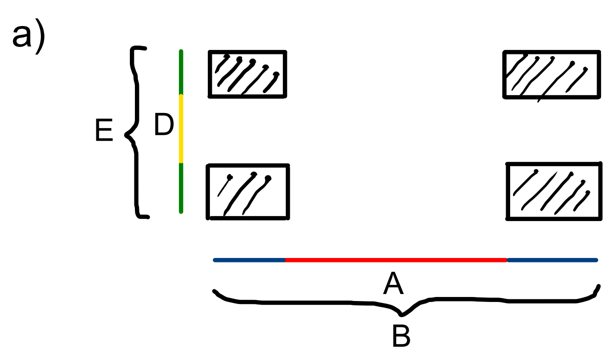
3. Considerando $A \subset B$ e $D \subset E$. Pede-se:

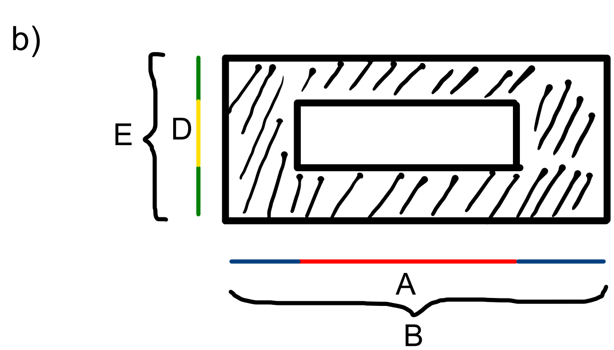
(a) Representar geometricamente $\mathcal{C}_B^A \times \mathcal{C}_E^D$

(b) Representar geometricamente $\mathcal{C}_{B \times E}^{A \times D}$

(c) Mostrar que $\mathcal{C}_B^A \times \mathcal{C}_E^D \subset \mathcal{C}_{B \times E}^{A \times D}$

Solução: As representações solicitadas em a) e b) aparecem na figura a seguir:





c) Queremos mostrar que $\mathcal{C}_B^A \times \mathcal{C}_E^D \subset \mathcal{C}_{B \times E}^{A \times D}$
Seja $(x, y) \in \mathcal{C}_B^A \times \mathcal{C}_E^D$, então $x \in \mathcal{C}_B^A$ e $y \in \mathcal{C}_E^D$. Logo, por definição de complementar, temos $x \in B$ e $x \notin A$ e $y \in E$ e $y \notin D$. Associando, obtemos ($x \in B$ e $y \in E$) e ($x \notin A$ e $y \notin D$).

Note que se $x \notin A$ e $y \notin D$, então $(x, y) \notin A \times D$.

Assim, ($x \in B$ e $y \in E$) e ($x \notin A$ e $y \notin D$), temos $(x, y) \in B \times E$ e $(x, y) \notin A \times D$. De onde, $(x, y) \in \mathcal{C}_{B\times E}^{A\times D}$.

4. Se A, B, C, D são conjuntos tais que $C \subset A^c, A \subset B^c$, e $C \cup D = D$. Simplificar

$$[(A^c \cup B^c) \cap (C^c \cup D^c)] \cup [([(C \cup B) \cap A] \cup C^c) \cap B]$$

Solução: Note que:

(a) De $C \subset A^c$ concluímos que $C \cap A = \emptyset$, $A \subset C^c$ e $A \cup C^c = C^c$;

(b) De $A \subset B^c$ concluímos que $A \cap B = \emptyset$ e $B \subset A^c$;

(c) De $C \cup D = D$, concluímos que $C \subset D$ e $C \cap D = C$.

A partir destas conclusões, vamos simplificar por partes:

(i) Primeiro $[(A^c \cup B^c) \cap (C^c \cup D^c)]$

Como $(A^c \cup B^c) = (A \cap B)^c = U$, $(C^c \cup D^c) = (C \cap D)^c = C^c$.

Resulta, $[(A^c \cup B^c) \cap (C^c \cup D^c)] = C^c$

(ii) Segundo $([(C \cup B) \cap A] \cup C^c) \cap B$

Aplicando a propriedade distributiva e associativa e, considerando que $C \cup C^c = U$, temos

$([(C \cup B) \cap A] \cup C^c) \cap B = [(C \cup B \cup C^c) \cap (A \cup C^c)] \cap B = (A \cup C^c) \cap B = B \cap C^c$

Assim, de (i) e (ii), aplicando absorção, temos:

$[(A^c \cup B^c) \cap (C^c \cup D^c)] \cup [([(C \cup B) \cap A] \cup C^c) \cap B] = C^c \cup (B \cap C^c) = C^c$

5. Ao todo são 92 pessoas entre Matemáticos (M), Físicos (F) e Engenheiros (E). Considerando as informações a seguir e sabendo que uma pessoa pode formar-se em mais de uma profissão.

I. São M e F apenas, 15 pessoas.

II. São M e E apenas, 12 pessoas.

II. São E e F apenas, 7 pessoas.

IV. Dentre aqueles que se formaram em apenas uma dessas profissões, há quatro físicos a mais que matemáticos, e quatro engenheiros a mais que físicos.

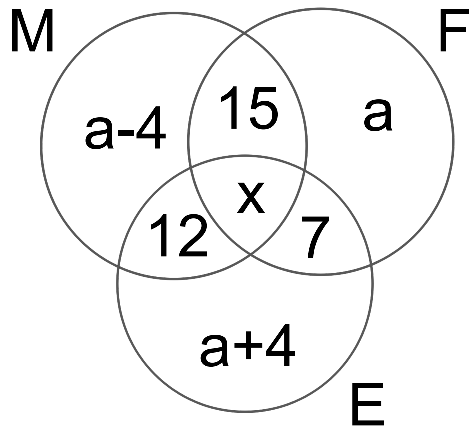
V. Os que se formaram em apenas uma profissão, ao todo, são quatro a menos do que aqueles que se formaram nas três profissões.

Pede-se:

(a) Determinar o número de pessoas que se formaram em exatamente duas profissões.

(b) Determinar o número total de matemáticos, físicos e engenheiros.

Solução: A partir das informações do enunciado, montamos a figura a seguir:



Além disso, pela informação V, temos: $(a-4)+a+(a+4)=x-4$. De onde, $x=3a+4$.

Como, ao todo são 92 pessoas, temos: $(a-4)+a+(a+4)+15+12+7+(3a+4)=92$. De onde, $6a=54$. E, daqui $a=9$.

Assim,

(a) O número de pessoas que se formam em exatamente duas profissões é: $15+12+7=34$.

(b) O número total de matemáticos é: $a-4+15+12+x=27+4a=27+36=63$.

O número de total de físicos é: $15+7+a+x=22+4a+4=26+36=62$

O número total de engenheiros é: $12+7+x+a+4=27+4a=27+36=63$