GABARITO TRABALHO 1

(Valor: 10 pontos Envio até às 23:30 de 21/09/2020)

1. Estabelecer o valor de verdade das seguintes afirmações, justificando sua resposta.

   (a) (**1 pt**) É suficiente que $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (r \longrightarrow p)$ seja falsa para que $p \longleftrightarrow q$ seja verdadeira.

   (b) (**1 pt**) É necessário que $p \longrightarrow s$ seja falsa para que $r \longrightarrow p$ seja falsa.

   Solução: Lembramos que a leitura de $p \longrightarrow q$ é: p é suficiente para q ou q é necessário para p.

   (a) Queremos saber se a partir da falsidade de $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (r \longrightarrow p)$, podemos concluir que $p \longleftrightarrow q$ é verdadeira.

   Vejamos se isto ocorre. Assumindo que $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (r \longrightarrow p)$ é falsa e lembrando do valor lógico dos conectivos, temos: $v(\sim p \wedge q) = V$ e $v(r \longrightarrow p) = F$. De onde, $v(r) = V$, $v(p) = F$ e $(q) = V$.

   Com estas informações, $v(p \longleftrightarrow q) = v(F \longleftrightarrow V) = F$.

   Assim, não é suficiente saber que $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (r \longrightarrow p)$ é falsa para saber que $p \longleftrightarrow q$ é verdadeira.

   Portanto, a afirmação é falsa.

   (b) Queremos saber se a falsidade de $r \longrightarrow p$ implica a falsidade de $p \longrightarrow s$.

   Se $r \longrightarrow p$ é falsa, então $v(r) = V$ e $v(p) = F$.

   Logo, $v(p \longrightarrow s) = v(F \longrightarrow s) = V$ e não falso como é afirmado.

   Portanto, a afirmação é falsa.

2. (**2 pts**) Encontrar a proposição mais simples equivalente à proposição

$$\{[p \longrightarrow (q \vee \sim r)] \vee [p \vee (q \longrightarrow r)]\} \wedge \{[p \vee q \vee (p \wedge q)] \vee [r \vee (\sim r \wedge q) \vee p]\}$$

   Solução: Faremos por partes a simplificação.

   (i) $[r \vee (\sim r \wedge q) \vee p] \equiv r \vee q \vee p$

   (ii) $[p \vee q \vee (p \wedge q)] \equiv p \vee q$

   (iii) Com isto, $\{[p \vee q \vee (p \wedge q)] \vee [r \vee (\sim r \wedge q) \vee p]\} \equiv p \vee q \vee r$.

   (iv) $\{[p \longrightarrow (q \vee \sim r)] \vee [p \vee (q \longrightarrow r)]\} \equiv (\sim p \vee q \vee \sim r) \vee (p \vee \sim q \vee r) \equiv V$

   Dos itens acima temos que

$$\{[p \longrightarrow (q \vee \sim r)] \vee [p \vee (q \longrightarrow r)]\} \wedge \{[p \vee q \vee (p \wedge q)] \vee [r \vee (\sim r \wedge q) \vee p]\} \equiv p \vee q \vee r$$

   Portanto, a proposição mais simples equivalente à proposição dada é $p \vee q \vee r$

3. Para o seguinte argumento, fazer o que se pede:

   Se um triângulo possui três ângulos, um quadrado possui quatro ângulos retos. Um triângulo possui três ângulos e a soma destes é igual a dois ângulos retos. Se os losangos possuem quatro ângulos retos, os quadrados não possuem quatro ângulos retos. Portanto, os losangos não possuem quatro ângulos retos.

(a) (**1 pt**) Escrever o argumento em linguagem proposicional;

(b) (**1 pt**) Verificar se esse argumento é um argumento válido.

Solução:

(a) Fazendo

p : Um triângulo possui 3 ângulos

q : Um quadrado possui quatro ângulos retos

r : A soma dos ângulos de triângulo é igual a dois ângulos retos

t : Os losangos possuem quatro ângulos retos

A simbologia do argumento dado é: $[(p \longrightarrow q) \wedge (p \wedge r) \wedge (t \longrightarrow \sim q)] \longrightarrow \sim t$.

(b) Suponha que o argumento não seja válido. Isto é, $v(\sim t) = F$, $v(p \longrightarrow q) = V$, $v(p \wedge r) = V$ e $v(t \longrightarrow \sim q) = V$.

De $v(\sim t) = F$, temos $v(t) = V$

De $v(p \wedge r) = V$, temos $v(p) = v(r) = V$.

De $v(t \longrightarrow \sim q) = V$ e $v(t) = V$, temos $v(q) = F$.

De $v(p \longrightarrow q) = V$ e $v(q) = F$, temos $v(p) = F$.

Com isto, $v(p) = V$ e $v(p) = F$, que é uma contradição ao princípio do terceiro excluído.

Portanto, a suposição é errada e daqui o argumento é válido.

4. (**2 pts**) Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+5)$ é divisível por 6.

Solução: Vamos mostrar usando o Princípio de Indução. Seja $p(n) : n(n+1)(n+5) = 6m$.

(a) $p(1)$ é verdadeira, pois $1(1+1)(1+5) = 6$ é divisível por 6;

(b) Suponha que que $p(k)$ é verdadeira, para $k > 1$. Queremos mostrar que $p(k+1)$ também é válida. Vejamos:

$$\begin{aligned}(k+1)(k+2)(k+6) &= (k+1)[(k+1)+1][(k+5)+1] = k[(k+1)+1][(k+5)+1]+(k+2)(k+6)\\ &= k(k+1)(k+5) + k(k+1) + k(k+6) + (k+2)(k+6)\\ &= k(k+1)(k+5) + k^2 + k + k^2 + 6k + k^2 + 8k + 12\\ &= k(k+1)(k+5) + 3k^2 + 15k + 12\\ &= k(k+1)(k+5) + 3(k+4)(k+1)\end{aligned}$$

Note que a primeira parcela é divisível por 6 por hipótese de indução e, se verificarmos que $3(k+4)(k+1)$ é divisível por 6 para $k \geq 2$, concluímos que $p(k+1)$ é verdadeira. Comprovemos isto último por indução. Para $k = 2$ isto é verdade, já que $3(2+4)(2+1)$ é divisível por 6. Suponha então que para $k > 2$ é divisível por 6. Então,

$$\begin{aligned}3[(k+1)+4][(k+1)+1] &= 3[(k+4)+1][(k+1)+1]\\ &= 3[(k+4)(k+1) + (k+4) + (k+1) + 1]\\ &= 3(k+4)(k+1) + 3(2k+6)\\ &= 3(k+4)(k+1) + 6(k+3)\end{aligned}$$

Claramente, a primeira parcela é divisível por 6 por hipótese de indução e a segunda parcela também é divisível por 6. Assim, fica provado que $3(k+4)(k+1)$ é divisível por 6, para todo $k \geq 2$.

Assim, $(k+1)(k+2)(k+6) = k(k+1)(k+5) + 3(k+4)(k+1) = 6m + 6l = 6(m+l)$. Ou seja, $(k+1)(k+2)(k+6)$ é divisível por 6 e $p(k+1)$ é verdadeira.

Portanto, $n(n+1)(n+5)$ é divisível por 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. (**2 pts**) Mostre que $3^n \geq 2^n + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: A prova será feita por Indução.

Considerando $p(n) : 3^n \geq 2^n + n$, temos:

(a) $p(1)$ é verdadeira, pois $3 \geq 2 + 1$;

(b) Suponha que $p(k)$ é verdadeira para $k > 1$. Queremos mostrar que $p(k+1)$ é válida também. Vejamos:
$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3(2^k + k) > 2(2^k + k)$.
Logo, $3^{k+1} \geq 2^{k+1} + 2k$.
Mas, como $k > 1$, temos $2k > k + 1$.
Assim, $3^{k+1} \geq 2^{k+1} + (k+1)$.
Segue que $p(k+1)$ é verdadeira.
Portanto, segundo o PIF $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.