Departamento de Matemática - UFV
MAT 131-Introdução a Álgebra

Segunda Avaliação - PER2020 - GABARITO

QUESTÕES OBJETIVAS - MÚLTIPLA ESCOLHA

1. **(2 pontos)** Dado o conjunto $A = \{a, \{a\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$ e as afirmações: (I) $\{a\} \in A$ e $\{a\} \subset A$ (II) $\{a, \emptyset\} \subset A$ e $\{a\} \subset \mathcal{P}(A)$ e (III) $(\{\emptyset\}, \emptyset) \in A^2 \longrightarrow (\emptyset, \{\emptyset\}) \in D(A)$

   É correto afirmar:

   (a) Somente duas afirmações são verdadeiras

   (b) As três afirmações são falsas

   (c) Somente duas afirmações são falsas

   (d) Somente uma afirmação é falsa

   Solução: Vamos analisar cada informação dada.

   (I) $\{a\} \in A$ e $\{a\} \subset A$ é verdadeira, pois $\{a\}$ é elemento de A e $a \in A$, pelo que $\{a\} \subset A$.

   (II) $\{a, \emptyset\} \subset A$ e $\{a\} \subset \mathcal{P}(A)$ é falsa. Isto se deve a que $\{a, \emptyset\} \subset A$ é verdadeiro e $\{a\} \subset \mathcal{P}(A)$ é falso, pois $a \notin \mathcal{P}(A)$.

   (III) $(\{\emptyset\}, \emptyset) \in A^2 \longrightarrow (\emptyset, \{\emptyset\}) \in D(A)$ é falsa. Isto se deve a que $(\{\emptyset\}, \emptyset) \in A^2$ é verdadeira, mas $(\emptyset, \{\emptyset\}) \in D(A)$ é falsa, pois $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

   Com isto, somente duas afirmações são falsas. Portanto, a alternativa correta é (c).

2. **(2 pontos)** Para mostrar que $(B-C)\cap(B\cap C) = \emptyset$, foram apresentadas três provas. Indicar a prova correta:

   (I) Note que $(B - C) \cap (B \cap C) = \emptyset$, nos diz que $B - C$ e $B \cap C$ não possuem elementos em comum. Por outro lado, como $B \cap C \subset C$, qualquer elemento em B também está em C. Assim, para $x \in (B - C)$, temos $x \in B$ e $x \notin C$. Logo, $x \in C$ e $x \notin C$, que é um absurdo. Daqui, $x \in \emptyset$. Portanto, $(B - C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.

   (II) Se $x \in (B - C) \cap (B \cap C)$, então $x \in (B - C)$ e $x \in (B \cap C)$. De onde, $x \in B$ e $x \notin C$. Ou seja, $x \notin (B \cap C)$. Daqui, $x \in \emptyset$. Portanto, $(B - C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.

   (III) É suficiente mostrar que $(B - C) \cap (B \cap C) \subset \emptyset$, pois $\emptyset \subset (B - C) \cap (B \cap C)$ se cumpre naturalmente. Suponhamos que $(B-C)\cap(B\cap C) \not\subset \emptyset$, então existe $x \in (B-C)\cap(B\cap C)$ tal que $x \notin \emptyset$. Ora, se $x \in (B - C) \cap (B \cap C)$, temos ($x \in B$ e $x \notin C$) e ($x \in B$ e $x \in C$). Logo, $x \in B$ e ($x \in C$ e $x \notin C$). De onde, $x \in B$ e $x \in \emptyset$. Ou seja, $x \in \emptyset$. Mas, isto contradiz nossa suposição, $x \notin \emptyset$. Assim, $(B - C) \cap (B \cap C) \subset \emptyset$. Portanto, $(B - C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.

Solução: Analisamos cada prova apresentada.

(I) Esta prova não é correta. Devido a que não é correto afirmar a partir de $B \cap C \subset C$ todo elemento de B também está em C.

(II) Esta prova não é correta, pois só mostrou uma inclusão, sem fazer referência se a outra inclusão é correta.

(III) A prova é completa e correta.

3. **(2 pontos)** Defina a operação $*$ ente dois conjuntos por $A * B = (A \cup B) - A^c$. Marcar a afirmação correta:

   (a) $A * B = B * A$ para todo $A, B \subset U$

   (b) $A * (B \cap C) = (A * B) \cap (A * C)$, para todo $A, B, C \subset U$

   (c) $A \cap (B * C) = (A \cap B) * (A \cap C)$, para todo $A, B, C \subset U$

   Solução: Usando as propriedades da interseção, diferença e complementar, temos:

   $A * B = (A \cup B) - A^c = (A \cup B) \cap (A^c)^c = (A \cup B) \cap A = A$. Com isto,

   (a) É falsa, pois $A * B = A$ e $B * A = B$. Então para $A \neq B$ a igualdade $A * B = B * A$ não ocorre.

   (b) É verdadeira, pois $A * (B \cap C) = A$, $(A * B) = A$ e $(A * C) = A$. De onde, $A * (B \cap C) = (A * B) \cap (A * C)$ ocorre.

   (c) É verdadeira, pois $B * C = B$. Logo, $A \cap (B * C) = A \cap B$. Por outro lado, $(A \cap B) * (A \cap C) = A \cap B$. Assim, a igualdade $A \cap (B * C) = (A \cap B) * (A \cap C)$ ocorre.

4. **(2 pontos)** Seja $n(A) = n(B) = 8$ e $n(C) = n(D) = 5$ e suponha que o número máximo de elementos de $(A \cup C)$ seja k e que o número máximo de elementos de $(B \cap D)$ seja h. É correto afirmar:

   (a) $k \cdot h = 60$

   (b) $k - h = 8$

   (c) $h^2 - k = 10$

   Solução: Note que $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) \leq n(A) + n(C)$. Assim, o número máximo de elementos de $A \cup C$ é $k = 13$. Observe também que a desigualdade acima torna-se igualdade quando $A \cap C = \emptyset$. Por outro lado, como $B \cap D$ é formado por elementos comuns a B e D e sendo $n(D) < n(B)$, o máximo número de elementos de $D \cap B$ não pode ser maior do que 5. Assim, $h = 5$. Portanto, é correto que $k - h = 13 - 5 = 8$.

QUESTÕES DISCURSIVAS

1. **(2 pontos)** Considerando o conjunto universo $U = \{\sqrt{2}, 5 + 3i, 1/2, -2, 2, 7\}$ e os conjuntos $A = \{x \in U : x \notin \mathbb{Q} \longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x \in U : (x \in \mathbb{N} \vee x \notin \mathbb{R}) \longrightarrow x \in \mathbb{C}\}$. Determinar os elementos de A e B.

   Solução: Determinemos os elementos de cada conjunto.

   (i) Note que os elementos do conjunto A são aqueles $x \in U$ que tornam $x \notin \mathbb{Q} \longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ verdadeira. Ora, para isto ser assim, $x \notin \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{Z}$ devem de ter o mesmo valor de verdade. Assim, o único $x \in U$ que torna isto possível é $x = 1/2$. Desse modo, $A = \{1/2\}$.

(ii) Note que $x \in \mathbb{C}$ é sempre verdadeiro para qualquer $x \in U$, assim, a condicional $(x \in \mathbb{N} \vee x \notin \mathbb{R}) \longrightarrow x \in \mathbb{C}$, que define o conjunto B é sempre verdadeira. Portanto, $B = U$.

2. **(2 pontos)** Seja U o conjunto universo e sejam $A, B, D \subset U$ conjuntos não vazios tais que $(A \cup B)^c \subset D$. Mostre que $(A \cup B) - D = \emptyset$ se, e somente se $D = U$.

   Solução: Devemos mostrar duas implicações. Mas antes de fazer isto, note que de $(A \cup B)^c \subset D$, segue que $D^c \subset (A \cup B)$.

   (i) Se $(A \cup B) - D = \emptyset$, então $D = U$.

   Lembrando que $X - Y = X \cap Y^c$, temos $(A \cup B) - D = (A \cup B) \cap D^c = D^c$. E como $(A \cup B) - D = \emptyset$, segue que $D^c = \emptyset$, de onde $D = U$.

   (ii) Se $D = U$, então $(A \cup B) - D = \emptyset$.

   Novamente, $(A \cup B) - D = (A \cup B) \cap D^c = D^c$ e como $D = U$, $D^c = \emptyset$. De onde, $(A \cup B) - D = \emptyset$.

3. **(2 pontos)** Sejam A, B, C e D conjuntos quaisquer. Mostre que $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

   Solução: Seja $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$, então $(x, y) \in (A \times B)$ ou $(x, y) \in (C \times D)$. Logo, $(x \in A$ e $y \in B)$ ou $(x \in C$ e $y \in D)$. Aplicando distributividade, temos

   $(x \in A$ ou $x \in C)$ e $(x \in C$ ou $y \in B)$ e $(x \in A$ ou $y \in D)$ e $(y \in B$ ou $y \in D)$

   Aplicando a lei de simplificação da lógica, obtemos

   $(x \in A$ ou $x \in C)$ e $(y \in B$ ou $y \in D)$. Segue, $x \in (A \cup C)$ e $y \in (B \cup D)$. De onde, $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.

4. **(1 ponto)** Sejam A, B, C, D conjuntos tais que $n(A) = n(B) = 8$ e $n(C) = n(D) = 5$. Determinar o número máximo de elementos de $(A \cup C)$ e o número máximo de elementos de $(B \cap D)$. **Justifique sua resposta!**

   Solução:

   (i) Sabemos que $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) \leq n(A) + n(C)$. Assim, o número máximo de elementos de $A \cup C$ é $n(A) + n(C) = 8 + 5 = 13$.

   (ii) Sabemos que $(B \cap D) \subset B$, $(B \cap D) \subset D$ e que a interseção é formada por elementos comuns a B e a D. Como $n(D) < n(B)$, temos $n(B \cap D)$ tem como máximo $n(D)$ elementos. Assim, o número máximo de elementos de $B \cap D$ é 5.

Boa Prova!