Departamento de Matemática - UFV
MAT 131-Introduao a Algebra

Primeira Avaliação - PER2
25 de fevereiro de 2021
GABARITO

QUESTÕES OBJETIVAS - MÚLTIPLA ESCOLHA

1. (**3 pontos**) Indicar a única afirmação verdadeira:

   (a) $v(p \longrightarrow q) = F$ e $v(q \longrightarrow p) = F$, somente quando $v(p) = V$ e $v(q) = F$

   (b) Se $v(p \vee q) = V$ e $v(p \wedge q) = F$, então $v(p) = v(q)$

   (c) $v(p \longleftrightarrow q) = F$ ou $v(p \wedge q) = F$ quando $v(p) \neq v(q)$

   Solução: Vamos analisar cada uma das afirmações dadas:

   (a) A expressão, somente quando, é uma condição suficiente. Assim, devemos assumir como verdade $v(p) = V$ e $v(q) = F$. Com isto, $v(p \longrightarrow q) = F$, mas $v(q \longrightarrow p) = V$, contrário ao proposto. Assim, essa afirmação é falsa.

   (b) Suponha que $v(p \vee q) = V$ e $v(p \wedge q) = F$. Daqui, $[v(p) = v(q) = V$ ou $v(p) \neq v(q)]$ e $[v(p) = v(q) = F$ ou $v(p) \neq v(q)]$. Segue que $[v(p) = v(q) = V$ e $v(p) = v(q) = F]$ ou $v(p) \neq v(q)$. O que aparece no colchete é uma falacia. Logo, $[v(p) = v(q) = V$ e $v(p) = v(q) = F]$ ou $v(p) \neq v(q)$ é o mesmo que $v(p) \neq v(q)$. Assim, não é possível concluir que $v(p) = v(q)$. Portanto, a afirmação é falsa.

   (c) A expressão, quando, indica uma condição suficiente. Assim, devemos assumir que $v(p) \neq v(q)$. Com isto, $v(p \longleftrightarrow q) = F$, $v(p \wedge q) = F$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

2. (**2 pontos**) Uma proposição composta é formada a partir de n proposições simples. As n primeiras colunas contêm 64 valores V e 64 valores F, cada uma. É correto afirmar:

   (a) $n = 7$

   (b) $n = 6$

   (c) $2^n = 64$

   Solução: De acordo com o enunciado, a tabela-verdade dessa proposição composta contem 128 linhas. Por outro lado, sabemos que o número de linhas é igual a 2^n. Assim, $2^n = 128 = 2^7$. Logo, $n = 7$.

3. (**2 pontos**) Marcar a opção que representa um raciocínio lógico válido:

   (a) $((p \longrightarrow t) \wedge (\sim q \vee s)) \longrightarrow (p \longrightarrow t)$

   (b) $p \longrightarrow (p \wedge q)$

   (c) $(p \vee q) \longrightarrow q$

Solução: Para resolver este exercício, poderíamos construir a tabela-verdade de cada proposição dada ou aplicar o método prático ou simplificar e ver se obtemos uma tautologia.

Note que $p \longrightarrow (p \wedge q) \equiv \sim p \vee (p \wedge q) \equiv \sim p \vee q$, que é uma contingência e não uma tautologia.

Note também, que $(p \vee q) \longrightarrow q \equiv \sim (p \vee q) vq \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee q \equiv \sim p \vee q$, que é uma contingência e não uma tautologia.

Deste modo, a alternativa (a) seria a alternativa correta, mas não vamos dar resposta por descarte. Lembramos o seguinte:

Lei de simplificação: $(p \wedge q) \longrightarrow p$ ou $(p \wedge q) \longrightarrow q$

Com isto, considerando $p_1 : p \longrightarrow t$, $p_2 : \sim q \vee s$, temos que a proposição em (a) pode ser escrita como: $(p_1 \wedge p_2) \longrightarrow p_1$ é uma tautologia.

4. (**3 pontos**) A formalização correta do enunciado: "O polinômio $p(x) = x^2 - 3x - 18$ possui exatamente uma raiz real negativa"

   (a) $\exists a \in \mathbb{R} : a < 0, p(a) = 0$

   (b) $\forall a \in \mathbb{R} : p(a) = 0$

   (c) $\exists ! a \in \mathbb{R} : a < 0, p(a) = 0$

   Solução: A afirmação nos diz que existe um único valor real negativo que é raiz do polinômio $p(x)$.

   Assim, a simbolização correta é: $\exists ! a \in \mathbb{R} : a < 0, p(a) = 0$.

QUESTÕES DISCURSIVAS

1. (**2 pontos**) Determinar a proposição equivalente mais simples à proposição

$$\sim \{\sim [p \vee (\sim q \longrightarrow p)] \vee \sim [(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]\}$$

Solução: Vamos simplificar primeiro as proposições que estão dentro dos colchetes.

(a) $[p \vee (\sim q \longrightarrow p)] \equiv p \vee (q \vee p) \equiv p \vee q \ldots$ Lei da condicional, associativa, comutativa e idempotência.

(b) $[(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)] \equiv \sim [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee (q \wedge \sim p) \ldots$ Lei condicional e bicondicional

$[(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)] \equiv [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \vee (q \wedge \sim p) \ldots$ Lei de Morgan

$[(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)] \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \ldots$ Absorção

Com isto,

$\sim \{\sim [p \vee (\sim q \longrightarrow p)] \vee \sim [(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]\}$ é equivalente a

$\sim \{\sim [p \vee q] \vee \sim [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]\}$

Agora,

$\sim \{\sim [p \vee q] \vee \sim [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]\} \equiv (p \vee q) \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$ Lei de Morgan e dupla negação

$$\equiv [p \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [p \wedge (q \wedge \sim p)] \vee [q \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [q \wedge (q \wedge \sim p)] \text{ Distributiva}$$
$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee F \vee F \vee (q \wedge \sim p) \text{ Lei da negação}$$
$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \text{ Neutro para a disjunção}$$

Portanto, a proposição mais simples equivalente à proposição dada é $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

2. (**2 pontos**) Estabelecer a validade do seguinte argumento: "Se $x = 0$, então $x + y = y$. Se $y = z$ então $x + y \neq y$. Portanto, se $x = 0$ então $y \neq z$"

Solução: Sejam $p : x = 0$, $q : x + y = y$, $r : y = z$.

O argumento dado, simbolicamente é: $[(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow \sim q)] \longrightarrow (p \longrightarrow \sim r)$

Suponha que o argumento não seja válido. Nesse caso, $v(p \longrightarrow q) = V$, $v(r \longrightarrow \sim q) = V$ e $v(p \longrightarrow \sim r) = F$

De $v(p \longrightarrow \sim r) = F$, obtemos $v(p) = V$ e $v(r) = V$

Considerando $v(p \longrightarrow q) = V$ e $v(p) = V$, obtemos $v(q) = V$

Considerando $v(r \longrightarrow \sim q) = V$ e $v(r) = V$, obtemos $v(q) = F$

Assim, q assume dois valores de verdade ao mesmo tempo, o que é um absurdo.

Portanto, a nossa suposição é equivocada e o argumento dado é válido.

3. (**3 pontos**) Sejam $x, y \in \mathbb{N}$. Mostre que se $x \cdot y$ é par, então x é par ou y é par.

   Solução: Faremos uma prova pela contra positiva. Isto é, vamos assumir a validade da negação de x é par ou y é par.

   Assim, se x é ímpar e y é ímpar, temos que existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $x = 2a+1$ e $y = 2b+1$. De onde, $x.y = (2a+1)(2b+1) = 2(2ab+a+b)+1$ que é um número ímpar, que é contrária a afirmação $x.y$ é par.

   O que conclui a prova do enunciado, considerando a equivalência entre a proposição direta $p \longrightarrow q$ e a proposição contra positiva $\sim q \longrightarrow \sim p$.

   OBS.: Também pode ser feita uma prova por redução ao absurdo, sendo a contradição $x.y$ é par e $x.y$ é ímpar.

4. (**3 pontos**) Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

   Solução: Seja $p(n) : 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$

   (a) $p(0)$ é válida, pois $3^0 = 1 = \dfrac{3^{0+1} - 1}{2}$

   (b) Suponha que $p(k) = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k = \dfrac{3^{k+1} - 1}{2}$ é válida, para $k \geq 1$

   Vamos mostrar que $p(k+1)$ é válida. Isto é, $p(k+1) = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{k+1} = \dfrac{3^{k+2} - 1}{2}$

   De fato, $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k + 3^{k+1} = (1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k) + 3^{k+1} = \dfrac{3^{k+1} - 1}{2} + 3^{k+1}$

   $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k + 3^{k+1} = \dfrac{3^k - 1 + 2.3^{k+1}}{2} = \dfrac{3.3^{k+1} - 1}{2} = \dfrac{3^{k+2} - 1}{2}$

   Portanto, de acordo com o princípio de indução finita, $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Boa Prova!