Universidade Federal de Viçosa

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

$5^{\underline{a}}$ Lista - MAT 135 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

---

1. Nos itens a seguir são apresentados um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verifique se eles são espaços vetoriais. Para aquele que não for, citar os axiomas que não se verificam.

   (a) $V = I\!R^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, as operações usuais de $I\!R^2$.

   (b) $V = I\!R^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, 0)$ e a multiplicação escalar usual.

   (c) $V = I\!R^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ e $\lambda(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.

   (d) $V = I\!R^3$; $(a, b, c) + (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z)$ e $\lambda(a, b, c) = (\lambda a, b, c)$.

   (e) $V = I\!R^3$; $(a, b, c) + (x, y, z) = (3a + 3x, -b - y, c + z)$ e $\lambda(a, b, c) = (3\lambda a, -\lambda b, c)$.

2. Em cada item deste exercício são dados um espaço vetorial V e um subconjunto W de V. Verifique se W é um subespaço vetorial de V.

   (a) $V = (I\!R^3, +, .)$; $W = \{\, (x, y, z) \in I\!R^3 \,/\, x + y + z = 0 \,\}$.

   (b) $V = (I\!R^3, +, .)$; $W = \{\, (x, y, z) \in I\!R^3 \,/\, x + y + z \leq 1 \,\}$.

   (c) $V = (I\!R^2, +, .)$; $W = \{\, (x, y) \in I\!R^2 \,/\, x \geq 0 \,\}$.

   (d) $V = (I\!R^3, +, .)$; $W = \{\, (x, y, z) \in I\!R^3 \,/\, x + 3y = z \,\}$.

   (e) $V = (I\!R^2, +, .)$; $W = \{\, (x, y) \in I\!R^2 \,/\, y \in \mathbb{Q} \,\}$.

3. Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $I\!R^3$:

   (a) Escreva $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.

   (b) O vetor $(2, -5, 4)$ pode ser escrito como combinação linear de u e v ? Justifique.

   (c) Para que valores de k o vetor $w = (-8, 14, k)$ se escreve como combinação linear de u e v?

   (d) Encontre condições sobre a, b e c de modo que o vetor $w = (a, b, c)$ seja combinação linear de u e v.

4. Sejam $u = (-1, 2, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $w = (-2, -1, 0)$. Expressar cada um dos vetores $v_1 = (-8, 4, 1)$, $v_2 = (0, 2, 3)$ e $v_3 = (0, 0, 0)$ como combinação linear de u, v e w.

5. Para qual valor de k o vetor $u = (1, -2, k)$ em $I\!R^3$ será uma combinação linear dos vetores $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1 - 5)$?

6. Encontre condições sobre a, b e c de modo que o vetor $w = (a, b, c)$ seja combinação linear de $u = (1, -3, 2)$ e $w = (2, -1, 1)$.

7. Os conjuntos abaixo são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Justifique! (Faça contas somente quando for realmente necessário!)

   (a) $\{ (-1, 0, 2, 0, 1), (0, 1, 0, -2, 1), (-2, 3, 4, -6, 5) \} \subset I\!R^5$.

   (b) $\{ (2, -1, 3) \} \subset I\!R^3$.

   (c) $\{ (2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0) \} \subset I\!R^3$.

   (d) $\{ (2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, 5, 2) \} \subset I\!R^3$.

   (e) $\{ (1, 1, 2), (1, 0, 0), (4, 6, 12) \} \subset I\!R^3$.

   (f) $\{ (1, 1, 1), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (0, 0, 1) \} \subset I\!R^3$.

8. Suponha que $\{u, v, w\}$ seja um conjunto L.I. Pergunta-se: $\{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ é um conjunto L.I. ou L.D.? Justifique.

9. Suponha que $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ seja L.I., mas $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n, w \}$ seja L.D. Mostre que w é combinação linear dos vetores de S.

10. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores L.I. de um espaço vetorial V e suponha que u é uma combinação linear desses vetores, digamos $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$. Mostre que a representação de u acima é única. Dê um exemplo em $I\!R^3$ mostrando que se o conjunto de vetores for L.D., então a representação não será única.

11. Mostre que:

    (a) Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto L.I., então $\{u + v, u + w, v + w\}$ também é um conjunto L.I.

    (b) Se um conjunto A em um espaço vetorial V é L.I., então qualquer subconjunto de A também é L.I.

12. Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços:

    (a) $W = \{ (x, y, z) \in I\!R^3 \,/\, x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0 \}$.

    (b) $W = \{ (x, y, z) \in I\!R^3 \,/\, x + 2y - 3z = 0 \}$.

    (c) $W = \{ (x, y, z, t) \in I\!R^4 \,/\, x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0 \}$.

    (d) $W = \{ (x, y, z, t) \in I\!R^4 \,/\, 2x - 2y = 0 \text{ e } t + x = z \}$.

13. Para cada um dos subconjuntos $S \subset V$, onde V é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.

   (a) $S = \{ (1,0), (2,-1) \}$, $V = I\!R^2$.

   (b) $S = \{ (1,1,1), (2,2,0) \}$, $V = I\!R^3$.

   (c) $S = \{ (1,2,3), (0,0,2), (-2,-4,-2) \}$, $V = I\!R^3$.

   (d) $S = \{ (1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1) \}$, $V = I\!R^4$.

14. Mostre que os conjuntos $\{(1,-1,2),(3,0,1)\}$ e $\{(-1,-2,3),(3,3,-4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $I\!R^3$.

15. Determine uma base e dimensão dos subespaços vetoriais:

   (a) $W = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, 2x - 2y = 0\}$.

   (b) $W = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4 \,/\, 2x - 2y = 0$ e $t + x = z\}$.

   (c) $W = [(1,2,3),(0,0,2),(-2,-4,-2)]$.

   (d) $W = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4 \,/\, x - y + t + z = 0\}$.

16. Dados U, W subespaços do espaço vetorial V determinar, nos seguintes casos:

   (i) uma base e a dimensão de U.

   (ii) uma base e a dimensão de W.

   (iii) uma base e a dimensão de $U + W$.

   (iv) uma base e a dimensão de $U \cap W$.

   (a) $U = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, x+y+z = 0 \}$, $W = \{ (x,y,0) \,/\, x,y \in I\!R \}$, $V = I\!R^3$.

   (b) $U = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \,/\, x+y = t-z = 0 \}$, $W = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \,/\, z = t = 0 \}$, $V = I\!R^4$.

   (c) $U = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, x = 0 \}$, $W = [(2,2,0),(1,2,3),(7,12,21),(-1,-2,-3)]$, $V = I\!R^3$.

   (d) $U = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \,/\, x-y+t+z = 0 = 0 \}$, $W = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \,/\, x+y-t+z = 0 \}$, $V = I\!R^4$.

17. Determine uma base de $I\!R^5$ que contenha o conjunto $\{ (1,1,0,0,0), (1,0,1,0,0) \}$. Justifique sua resposta.

18. Mostre que os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$, $v_3 = (3,0,2)$ e $v_4 = (2,-1,1)$ geram o $I\!R^3$ e encontrar uma base para $I\!R^3$ dentre esses vetores.

19. Verifique que $I\!R^3$ é a soma direta de $U = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, x+y+z = 0 \}$ e $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, x = y = 0 \}$.

20. Verifique se $I\!R^2$ é a soma direta de $U = \{ (x,y) \in I\!R^2 \,/\, 2x + 3y = 0 \}$ e $W = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x - y = 0 \}$.

21. Determine as coordenadas do vetor $v = (1,0,0)$ em relação à base $\gamma = \{ (1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$.

22. Determine as coordenadas do vetor $u = (4,5,3)$ de $I\!R^3$ em relação às seguintes bases:

(a) Canônica;

(b) $\{ (1,1,1), (1,2,0), (3,1,0) \}$;

(c) $\{ (1,2,1), (0,3,2), (1,1,4) \}$.

23. Considere a base ordenada $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ de $I\!R^3$ onde $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (1,0,0)$, Encontre as coordenadas do vetor $u = (a,b,c) \in I\!R^3$ com relação à base ordenada γ.

24. Considere o espaço vetorial real $I\!R^2$. A matriz de mudança da base ordenada $\gamma = \{ (1,1), (-2,2) \}$ para a base ordenada $\alpha = \{ v_1, v_2 \}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determine a base ordenada α. Determine o elemento $u \in I\!R^2$ tal que $[u]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

25. Considere as bases $\beta = \{ u_1, u_2, u_3 \}$ e $\gamma = \{ w_1, w_2, w_3 \}$ de $I\!R^3$, relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 = 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 = 3u_1 + 3u_3 \end{cases}.$$

(a) Determine as matrizes de mudança de base $[I]^\beta_\gamma$ e $[I]^\gamma_\beta$.

(b) Sabendo que $[u]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, determine o vetor u com relação à base γ.

26. Considere a seguinte matriz de mudança de base

$$[I]^\beta_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontre:

(a) $[v]_\beta$, sabendo que $[v]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $[v]_{\beta'}$, sabendo que $[v]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

27. Mostre que $\gamma = \{\, (1,1,1), (1,0,-1), (1,-2,1) \,\}$ é uma base ortogonal de $I\!R^3$. γ é uma base ortonormal? Caso negativo, obtenha uma base ortogonal de $I\!R^3$ a partir de γ.

28. Dada a base $\gamma = \{\, (1,0), (1,1) \,\}$ de $I\!R^2$, utilize o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $I\!R^2$.

29. Dada a base $\alpha = \{\, (1,1,1), (-1,0,-1), (-1,2,3) \,\}$ de $I\!R^3$, utilize o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $I\!R^3$.

30. Considerando o produto interno usual de $I\!R^3$, determine uma base ortonormal para o subespaço $W = \{\, (x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, x - y + z = 0 \,\}$ de $I\!R^3$.