Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

$4^{\underline{a}}$ Lista - MAT 135 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

1. Obtenha, diretamente das equações, um ponto e um vetor diretor da reta dada.

$(a)\ \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 4 + t \end{cases},\ t \in I\!R \qquad (b)\ \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = \quad + 2t \\ z = 5 - t \end{cases},\ t \in I\!R$

$(c)\ \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{1-y}{4} = z + 5 \qquad (d)\ \dfrac{2-x}{8} = \dfrac{2y+4}{5} = \dfrac{z-1}{2}$

2. Dados $A = (2, 2, 5)$, $u = (1, -1, 3)$ e $v = (2, 2, 3)$, escreva equações paramétricas da reta r que passa por A, e é paralela ao vetor $v - u$.

3. Dadas as retas $r : \begin{cases} x = 1 + (m+1)\,t \\ y = 0 + 0\,t \\ z = 0 + 2\,t \end{cases},\ t \in I\!R$ $\ s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + m\,t \\ z = 1 + n\,t \end{cases},\ t \in I\!R$ e $l : x + 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$ calcule m e n sabendo que l é ortogonal as outras duas.

4. Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 2, 3)$ e $B = (0, 2, -2)$.

5. Definimos mediana do lado AB de um triângulo ABC como sendo o segmenro de reta com origem no vértice C e extremidade no ponto médio do lado AB, oposto ao vértice C. Determine as equações paramétricas e simétricas da reta que contém a mediana do lado AB do triângulo cujos vértices são $A(-2, 1, 0)$, $B(0, 3, -2)$ e $C(0, 0, -6)$.

6. Determine as coordenadas do ponto P_1, simétrico de $P = (1, 1, -2)$ em relação à reta $s : x + 1 = y - 1 = z$.

7. Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $Q = (2, 1, 0)$, é concorrente com a reta $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 + 3t \\ z = 0 + t \end{cases},\ t \in I\!R$ e forma ângulos iguais com os eixos x e y.

8. Determine as equações da reta r definida pelos pontos $A = (2, -1, 4)$ e $B = r_1 \cap r_2$, com $r_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{1-z}{2}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in I\!R$.

9. Estabeleça as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (-1, 4, 5)$ e que é perpendicular à reta $r : X = (-2, 1, 1) + t(1, -1, 2)$, $t \in I\!R$.

10. Estabeleça as equações simétricas da reta s, traçada pelo ponto $P = (1, 3, 1)$, que seja concorrente com a reta $r : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = z$ e seja ortogonal ao vetor $v = (2, 0, -1)$.

11. Determine o valor de m para que os pontos $A = (3, m, 1)$, $B = (1, 1, -1)$ e $C = (-2, 10, -4)$ sejam colineares.

12. Verifique se as retas de equações $r : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ e $s : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$, $t \in I\!R$, são coplanares.

13. Encontre o ponto de interseção das retas de equações $r : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4}$ e $s : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$, $t \in I\!R$.

14. Determinar a equação geral dos planos nos seguintes casos:

    (a) passa pelo ponto $D = (1, -1, 2)$ e é ortogonal ao vetor $v = (2, -3, 1)$;

    (b) possui o ponto $A = (1, 2, 1)$ e é paralelo aos vetores $u = i + j - k$ e $v = i + j - 2k$;

    (c) passa pelos pontos $A = (-2, 1, 0)$, $B = (-1, 4, 2)$ e $C = (0, -2, 2)$;

    (d) passa pelos pontos $P = (2, 1, 0)$, $Q = (1, 4, 2)$ e $R = (0, 2, 2)$;

    (e) passa pelos pontos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 1, 3)$ e $C = (4, 2, 3)$;

    (f) passa pelo ponto $E = (1, 2, 2)$ e é paralelo aos vetores $u = (2, -1, 1)$ e $v = (-3, 1, 2)$;

    (g) possui o ponto $P = (2, 1, 3)$ e é paralelo ao plano xz;

    (h) contém as retas $r : \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{1-z}{2}$ e $s : \dfrac{x-1}{2} = -\dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-5}{4}$;

    (i) contém as retas $r : \dfrac{x}{2} = y + 1 = z + 3$ e $s : \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$;

(j) contém as retas $r: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = \quad - t \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $s: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{2-y}{2}, z = 0.$

(k) contém a reta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = z - 1$ e é paralelo à reta $s: \dfrac{x-3}{2} = 2 - y = \dfrac{z-4}{4}.$

15. Determine a equação da reta interseção dos planos, nos seguintes casos:

(a) $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - y + z - 3 = 0 \\ x + 3y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - 2y - z - 8 = 0 \\ 2x + 3y + 13 = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x - 2y - z - 1 = 0 \\ x + 2y - z - 7 = 0 \end{cases}$

16. Encontre a equação do plano que contém o ponto $M = (2, 1, 3)$ e que é perpendicular à reta $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = -z.$

17. Dados o ponto $P = (5, 2, 3)$ e o plano $\pi: 2x + y + z - 3 = 0$, determinar:

(a) a equação paramétrica da reta que passa por P e é perpendicular a π ;

(b) a projeção ortogonal de P sobre π;

(c) o ponto P' simétrico de P em relação a π;

(d) a distância de P ao plano π.

18. Determine a equação do plano que contém os pontos $A = (1, 2, 2)$ e $B = (3, 1, 2)$ e é perpendicular ao plano $\pi: 2x + y + z + 8 = 0$.

19. Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (-1, 0, 0)$ e é paralela a cada uma dos planos $\pi_1: 2x - y - z + 1 = 0$ e $\pi_2: x + 3y + z + 5 = 0$.

20. Determinar equação geral do plano π, que contém o ponto $A = (4, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1: 2x - y - 4z - 6 = 0$ e $\pi_2: x + y + 2z - 3 = 0$.

21. Determinar a equação do plano que contém o ponto $A = (3, 2, 1)$ e a reta $r: \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}.$

22. Determinar a equação do plano π, que passa pelo ponto $P = (2, 5, 3)$ e é perpendicular à reta r, interseção dos planos $\pi_1: x - 2y + z - 1 = 0$ e $\pi_2: 3x + 2y - 3z + 5 = 0$.

23. Determinar a equação do plano que passa pela reta $r : \begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0 \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$, é paralelo à reta $s : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = -\dfrac{z+1}{3}$.

24. Dados os planos $\pi_1 : 2x + y - 3z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + y + z + 1 = 0$ e $\pi_3 : x - 2y + z + 5 = 0$, encontre a equação do plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular a π_3.

25. Determine uma condição necessária e suficiente para que um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ seja ortogonal ao plano xz.

26. Dados os planos $\pi_1 : ax + 4y + 4z + d = 0$ e $\pi_2 : 6x + 8y + cz - 2 = 0$, determine as constantes a, c e d tais que:

   (a) $dist(\pi_1, \pi_2) = \sqrt{41}$.

   (b) O plano π_1 seja ortogonal ao plano π_2 e contenha o eixo x.

27. Considere os planos $\pi_1 : x - 2y - 2z - 2 = 0$ e $\pi_2 : 3x + y - 3z - 16 = 0$.

   (a) Qual a posição relativa entre π_1 e π_2? Determine a interseção, se houver.

   (b) Seja r a reta perpendicular ao plano π_1 e que passa pelo ponto $P = (0, -5, -5)$. Sendo $A = r \cap \pi_1$ e $B = r \cap \pi_2$, determine a distância ente A e B.

28. A interseção das retas $r : X = (3, -1, 2) + t(1, 3, -2)$, $t \in \mathbb{R}$, e $s : X' = (1, -2, 5) + t'(-3, -4, 5)$, $t' \in \mathbb{R}$, é um ponto P. Determine a distância de P ao plano $\pi : x+y+z-2 = 0$.

29. Determine a distância do ponto P, interseção dos planos $\pi_1 : 2x + 4y - 5z - 15 = 0$, $\pi_2 : x - y + 2z + 3 = 0$ e $\pi_3 : x + y + z - 2 = 0$ a reta $r : X = (0, 1, -2) + t(3, 2, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.

30. Sejam $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 2, 1)$ e $v = (1, 1, 1)$. Seja r a reta passando por P e paralela a v.

   (a) Dado um ponto X na reta r, calcule a distância de Q a X (como função do parâmetro t).

   (b) Mostre que existe precisamente um ponto X_0 na reta tal que esta distância atinge um mínimo.

   (c) Mostre que $\overrightarrow{X_0Q}$ é perpendicular à reta r.

31. Determine o ponto do plano $ax + by + cz = d$ mais próximo da origem.

32. Demonstrar que se (a, b, c) é unitário, então a distância da origem ao plano $ax + by + cz = d$ é $|d|$.