Universidade Federal de Viçosa

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

$6^{\underline{a}}$ Lista - MAT 135 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

1. Encontre as coordenadas do ponto $P = (4, 3, -1)$ em relação ao novo sistema de coordenadas cuja origem coincide com a origem $(0, 0, 0)$ e cuja base é dada pelos vetores $(1, 2, -1)$, $(3, 0, 4)$ e $(0, -1, 1)$.

2. Encontre as coordenadas do ponto $P = (4, 3, -1)$ em relação ao novo sistema de coordenadas cuja origem coincide com a origem $(0, 0, 0)$ e cuja base é dada pelos vetores ortonormais $u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $u_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

3. Considere o subconjunto de vetores $\beta = \{\, (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1) \,\}$.

   (a) Mostre que β é uma base para $I\!R^3$.

   (b) Encontre a matriz de mudança de coordenadas A da base canônica $\{\, i, j, k \,\}$ de $I\!R^3$ para a base β. Qual é a matriz de mudança de coordenadas A' da base β para a base canônica?

   (c) Quais são as coordenadas dos vetores canônicos i, j e k em relação à base β?

   (d) Se o ponto P tem coordenadas $(1, -2, 5)$ no sistema $\{\, O, i, j, k \,\}$, quais são as coordenadas de P no sistema $\{\, O, \beta \,\}$?

4. Considere o subconjunto de vetores $\beta = \{\, (1, 1, -2), (1, -1, 0), (1, 1, 1) \,\}$.

   (a) Mostre que β é uma base para $I\!R^3$.

   (b) Encontre a matriz de mudança de coordenadas A da base canônica $\{\, i, j, k \,\}$ de $I\!R^3$ para a base β. Qual é a matriz de mudança de coordenadas A' da base β para a base canônica?

   (c) Quais são as coordenadas dos vetores canônicos i, j e k em relação à base β?

   (d) Se o ponto P tem coordenadas $(1, -2, 5)$ no sistema $\{\, O, i, j, k \,\}$, quais são as coordenadas de P no sistema $\{\, O, \beta \,\}$?

5. Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos em um espaço vetorial V com produto interno. Seja $v \in V$ um vetor qualquer.

   (a) Prove a desigualdade de Bessel:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle v, v_k \rangle|^2}{\|v_k\|^2} \leq \|v\|^2 .$$

(b) Mostre que a igualdade vale se, e somente se,

$$v = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k.$$

6. Determine o polinômio característico, os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes:

$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad (b) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad (d) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$(e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad (f) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Determine uma base para cada um dos autoespaços associados a cada autovalor encontrado para as matrizes do exercício anterior.

8. Decida se cada uma das matrizes do exercício 6 é diagonalizável, justificando sua resposta. Quando for, encontre uma matriz P tal que $P^{-1}AP = D$.

9. Dada a diagonalização da matriz A na forma $P^{-1}AP = D$, explicite os autovalores de A e bases para os correspondentes autoespaços:

$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$(b) \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

10. Diagonalize cada matriz dada A por meio de uma matriz ortogonal, ou seja, ache uma matriz ortogonal P tal que P^tAP seja diagonal:

$(a) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$ tenha dimensão 1.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{para algum vetor} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

12. Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule A^{10}.

13. Demonstre que se A e B são semelhantes, então possuem os mesmos polinômios característicos e, portanto, os mesmos autovalores.

14. Demonstre que se A é uma matriz triangular superior, então os autovalores de A são os elementos da diagonal principal de A.

15. Demonstre que A e A^t possuem os mesmos autovalores. O que podemos dizer sobre os autovetores de A e A^t ?

16. Seja λ um autovalor de A com autovetor associado v. Demonstre que λ^k é um autovalor de $A^k = A \dots A$ associado a v, em que k é um inteiro positivo.

17. Seja λ um autovalor da matriz não singular A com autovetor associado v. Mostre que $\dfrac{1}{\lambda}$ é um autovalor de A^{-1} com autovetor associado v.