Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

$8^{\underline{a}}$ Lista - MAT 135 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

1. Entre as funções dadas abaixo, verifique quais são transformações lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x^2, y)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x, x + 1)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

2. Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + ky, x + k, y)$. Verifique em que casos T é linear: $k = x$, $k = 0$, $k = 1$, $k = y$.

3. Encontrar a imagem do quadrado de vértices $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$ e $P_4 = (1, 1)$ pela transformação linear dada por $T(x, y) = (-x + 2y, 2x - y)$. Esboce um desenho.

4. Seja $T : U \to V$ transformação linear tal que $T(u) = 3u$ e $T(v) = u - v$. Calcular em função de u e v :

   (a) $T(u + v)$

   (b) $T(3v)$

   (c) $T(4u - 5v)$.

5. Seja $T : U \to V$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais reais. Mostre que

   (a) Se T é transformação linear, então $T(0_U) = 0_V$.(Transformação linear leva vetor nulo em vetor nulo).

   (b) T é transformação linear se, e somente se, $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$, para quaisquer $u, v \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(1, 1, 1) = (1, 2)$, $T(1, 1, 0) = (2, 3)$ e $T(1, 0, 0) = (3, 4)$.

   (a) Determine $T(x, y, z)$.

   (b) Determine $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-3, -2)$.

   (c) Determine $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (0, 0)$.

7. Encontrar a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva um ponto (x, y) em:

   (a) sua reflexão em torno da reta $y = -x$.

   (b) sua reflexão através da origem.

   (c) sua projeção ortogonal sobre o eixo x.

8. Achar a transformação linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ que leva o ponto (x, y, z) em sua reflexão através do plano xy.

9. Dadas as transformações lineares $T : I\!R^n \to I\!R^m$, faça o que se pede:

   (i) Determinar o núcleo, uma base para este subespaço e a sua dimensão. T é injetora? Justifique.

   (ii) Determinar a imagem de T, uma base para este subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justifique.

   (iii) Quais dos seguintes vetores $(1, -1, 1)$, $(0, 0, 0)$, $(-3, 3, 3)$ pertencem ao núcleo de T na letra (b)?

   (a) $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$

   (b) $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

10. Considere $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Qual é o núcleo e a imagem da transformação linear? Neste caso, o que representam estes conjuntos geometricamente? Qual a relação entre a dimensão da imagem, a dimensão do núcleo e a dimensão do domínio da transformação?

11. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, mostre que $Im(T)$ e $N(T)$ são subespaços vetoriais de W e V respectivamente.

12. Determine uma transformação linear $T : I\!R^3 \to I\!R^2$ cujo núcleo seja gerado pelos vetores $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$.

13. Determine uma transformação linear $T : I\!R^2 \to I\!R^3$ cuja imagem seja gerada pelos vetores $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$.

14. Seja $F : V \to I\!R^5$ uma transformação linear.

   (a) Se F é sobrejetora e $dim\, N(F) = 2$, qual é a $dim\,(V)$?

   (b) Se F é injetora e sobrejetora, qual é a $dim\,(V)$?

15. Sejam V e U espaços vetoriais e $T : V \to U$ uma transformação linear. Mostre que:

   (a) Se os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ geram V, então os vetores $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n) \in U$ geram $Im(T)$.

   (b) Se $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é L.I., $S \subset V$ e T é injetora, então $\{T(v_1), T(v_2), ...T(v_n)\}$ é L.I. Mostre com um contra-exemplo que o fato de T ser injetora é essencial para que $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ seja L.I.

16. Considere os operadores lineares do $I\!R^3$ definidos por $T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$ e $T(x, y, z) = (x, x - y, 2x + y - z)$.
   Verifique quais dos operadores lineares acima são isomorfismos. Para os que forem, determine o isomorfismo inverso. Caso negativo ache uma base para $N(T)$ e $Im(T)$.

17. Se a matriz de uma transformação linear, $T : I\!R^2 \to I\!R^3$, é $[T]_C^B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, onde $B = \{(-1, 1), (1, 0)\}$ e $C = \{(1, 1, -1), (2, 1, 0), (1, 1, 0)\}$ são bases de $I\!R^2$ e $I\!R^3$ respectivamente,

(a) encontre a expressão de $T(x, y)$ e a matriz da transformação com respeito às bases canônicas de cada espaço.

(b) Qual a imagem do vetor $(2, -3)$ pela T?

(c) Se $T(v) = (2, 4, -2)$, calcule v.

18. Seja $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ um operador linear tal que $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 0, -1)$ e $T(0, 1, 1) = (0, 0, 1)$.

    (a) Determine $T(x, y, z)$.

    (b) Determine a matriz da transformação com respeito à base canônica de $I\!R^3$.

    (c) T é isomorfismo? Se for, calcule sua inversa.

19. Sejam $S : I\!R^2 \to I\!R^2$ dada por $S(x, y) = (y, x)$ e $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ dada por $T(x, y) = (-x, y)$. Geometricamente, S e T produzem reflexões em relação às retas $y = x$ e $x = 0$, respectivamente. Determine:

    (a) $S^{-1}(x, y)$.

    (b) $T^{-1}(x, y)$.

    (c) $(S \circ T)(x, y)$ e interprete geometricamente.

    (d) $(T \circ S)(x, y)$ e interprete geometricamente.

20. Seja $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ a reflexão em torno da reta $y = 3x$. Encontre uma base B de $I\!R^2$ tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

21. Sejam $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (a, 0, 1)$ e $u_3 = (1, b, c)$ e T um operador linear em $I\!R^3$ tal que $Im(T) = [u_1, u_2, u_3]$.

    (a) Encontre condições sobre a, b e c para que o operador seja um isomorfismo.

    (b) Encontre condições sobre a, b e c para que o núcleo de T tenha dimensão 1.

    (c) Encontre condições sobre a, b e c para que o núcleo de T tenha dimensão 2.

    (d) A dimensão do núcleo de T pode ser 3?

22. Seja $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ um operador linear tal que $T(x, y, z) = (x - y, x + 2y - z, y - z)$.

    (a) Encontre $[T]_C^B$, sendo $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ e $C = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

    (b) Se $[T(v)]_C = (12 - 1)$, encontre v.

23. Sejam os vetores $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (-1, 4)$ e a matriz $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, onde $B = \{v_1, v_2\}$.

    (a) Determine $[T(v_1)]_B$ e $[T(v_2)]_B$.

    (b) Encontre $T(v_1)$ e $T(v_2)$.

    (c) Encontre $T(x, y)$.

24. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B^C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, onde $B = \{(1,1),(0,1)\}$ e $C = \{(0,3,0),(-1,0,0),(0,1,1)\}$.

25. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dadas por $T_1(x,y) = (3x - y, -3x + y)$ e $T_2(x,y) = (x + y, x, 2y)$.

   (a) Calcule $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

   (b) Mostre que $T_2 \circ T_1$ é uma transformação linear.

   (c) Calcule $[T_1]_B$, $[T_2]_B^C$ e $[T_2 \circ T_1]_B^C$, onde C e B são as bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

   (d) Compare as matrizes $[T_2]_B^C \cdot [T_1]_C^C$ e $[T_2 \circ T_1]_B^C$. O que você observa?

26. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que dobra o comprimento do vetor $u = (2,1)$ e triplica o comprimento do vetor $v = (1,2)$ sem alterar as direções e nem inverter os sentidos.

   (a) Determine $T(x,y)$.

   (b) Qual é a matriz do operador T na base $\{(2,1),(1,2)\}$.

27. Verifique se o vetor v dado é autovetor do correspondente operador linear.

   (a) $v = (-2,1)$, $[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e C base canônica de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $v = (1,1,2)$, $[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e C é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

28. Determine os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x + 2y, x + 3y)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$.

29. Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ associados aos autovetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (-1,0)$, respectivamente.

30. Suponha que o polinômio característico do operador linear T seja $p(x) = x(x+2)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Responda, justificando cada item.

   (a) Qual a dimensão do domínio de T ?

   (b) T é invertível?

   (c) Quantos autoespaços tem T?

   (d) O que podemos dizer sobre as dimensões dos autoespaços de T?

   (e) O que podemos dizer sobre as dimensões dos autoespaços de T, se soubermos que T é diagonalizável?

(f) Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto L.I. de autovetores de T, todos associados ao mesmo autovalor. O que podemos dizer sobre este autovalor?

31. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

    (a) Toda transformação linear sobrejetora tem obrigatoriamente núcleo de dimensão zero.

    (b) Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $dim(V) < dim(W)$, então T não pode ser sobrejetora.

    (c) Seja $T : V \to V$ uma transformação linear . Se $dim(V) = n$, então uma condição suficiente para que T seja diagonalizável é que T tenha n autovalores distintos.

32. Sejam $T : V \to V$ e $S : W \to W$ operadores lineares, onde $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $[S]_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, para determinadas bases B e C de V e W, respectivamente. Procure observar neste exercício as seguintes propriedades:

    (a) Se um operador admite $\lambda = 0$ como autovalor, então T não é invertível.

    (b) Se ao invés das matrizes acima, tivéssemos a sua transposta, os autovalores permaneceriam os mesmos.

    (c) Os autovalores de uma transformação liner cuja matriz com respeito a uma base é triangular, os autovalores são os elementos da diagonal principal.

33. Seja $[T]$ um operador linear em $I\!R^3$ e a matriz de T com respeito a base canônica é dada por $[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

    (a) Encontre o polinômio característico de T, os autovalores e autovetores correspondentes.

    (b) Ache $[T]_B$, onde $B = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$. O que você observou?

34. Verifique se a transformação linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, x - 3y + 2z)$ é diagonalizável. Caso a resposta seja positiva, indique a matriz diagonal de T e a base em relação a qual T é diagonalizável.

35. Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T : I\!R^2 \to I\!R^2$. Mostre que:

    (a) Os autovetores v_1 e v_2 correspondentes são L.I.

    (b) $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são L.I.

36. Seja T um operador linear em $I\!R^2$. Sabendo que T duplica o vetor $(1, -1)$ e triplica o vetor $(0, 1)$ sem alterar o sentido deles, determine $T(x, y)$. A transformação linear T é diagonalizável? Justifique sua resposta. Se for, dê a base do $I\!R^2$ com relação à qual a matriz de T é diagonal e escreva a matriz de T com relação a esta base.

37. Dê exemplos de:

    (a) Um operador linear em $I\!R^2$ que não possui autovalores reais.

    (b) Um operador linear em $I\!R^3$ que satisfaça todas as condições a seguir:

i. T é diagonalizável;

ii. T não é injetora;

iii. $T(v) \neq v$, para qualquer vetor não nulo;

iv. $\lambda = 2$ é autovalor de T;

v. $v_0 = (1, 0, -1)$ é autovetor de T;

vi. $T(v_0) \neq v_0$;

vii. $(0, 0, 2) \in Im(T)$.

38. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Se $T(v) = \lambda v$ para algum escalar não-nulo λ, então v é autovetor de T.

(b) Se λ é um autovalor de T, $([T]_B - \lambda I)X = 0$ só tem a solução trivial.

(c) Se v_1, v_2 e v_3 são vetores de autoespaços distintos, então é impossível escrever v_3 como combinação linear de v_1 e v_2.

39. Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão n.

(a) Defina autovalor de T.

(b) Se λ é autovalor de T, então 2λ é autovalor de $2T$.

(c) Se λ é autovalor de T, mostre que λ^2 é autovalor de $T^2 = T \circ T$.

40. O Teorema de Hamilton-Cayley afirma que uma matriz quadrada A é uma raiz de seu polinômio característico, isto é, se $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ é o polinômio característico de A então $a_0 I + a_1 A = a_2 A^2 + ... + a_n A^n = 0$ (matriz nula).

(a) Verifique este resultado para $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Este teorema proporciona um método para calcular a inversa e potências n de uma matriz, tendo conhecimento de potências inferiores. Verifique que isto é verdade tomando por exemplo uma matriz 2×2 com polinômio característico $c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

(c) Calcule agora A^2 e A^3 sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e calcule a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.