Universidade Federal de Viçosa

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

$1^{\underline{a}}$ Lista - MAT 135 - Geometria Analítica e Álgebra Linear 2017/II

1. Considere as matrizes A, B, C, D e E com respectivas ordens, 4×3, 4×5, 3×5, 2×5 e 3×5. Determine quais das seguintes expressões matriciais são possíveis e determine a respectiva ordem.

   $(a)\, AE + B^T$; $(b)\, C(D^T + B)$; $(c)\, AC + B$; $(d)\, E^T(CB)$.

2. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Determine:

   (a) a ordem de A;

   (b) os elementos a_{21}, a_{34} e a_{44}.

3. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = A.B$ e $D = B.A$.

   Determine os elementos c_{23} e d_{41}.

4. Determine a matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem 4 cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i - j\,, & \text{se } i < j \\ i^2 - 3j\,, & \text{se } i = j \\ -i + 3j\,, & \text{se } i > j \end{cases}.$$

5. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Determine:

   $(a)\, A^2$; $(b)\, A^3$; $(c)\, A^{31}$; $(d)\, A^{42}$.

6. Determine números reais x e y tais que

$$\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Determine em cada um dos casos abaixo, x, y e z números reais tais que a matriz A seja simétrica.

$(a)\, A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $(b)\, B = \begin{bmatrix} 4 & x+1 & -6 \\ -3 & 2 & -4 \\ 2y+2 & 2z & 9 \end{bmatrix}$, $(c)\, C = \begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix}$.

8. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quando possível, calcule o que se pede:

$(a)\, 4E - 2D$; $(b)\, 2A^T + C$; $(c)\, (2E^T - 3D^T)^T$; $(d)\, (BA^T - 2C)^T$.

9. Obtenha as matrizes que comutam com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

10. Diz-se que uma matriz B é uma *raiz quadrada* de uma matriz A se $B^2 = A$.

   (a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

   (b) Existem quantas raízes quadradas distintas de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$? Justifique.

   (c) Na sua opinião qualquer matriz 2×2 tem pelo menos uma raiz quadrada? Justifique.

11. Uma matriz quadrada A é dita *idempotente* se $A^2 = A$.

(a) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ é idempotente. Calcule A^3, A^4, ... , A^n.

(b) Qual é a única matriz idempotente não singular? Justifique sua resposta.

12. Uma matriz quadrada A é dita *nilpotente* se existir um número inteiro $p > 0$ tal que $A^p = 0$. Se p é o menor inteiro para o qual $A^p = 0$, A diz-se nilpotente de ordem p. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ é nilpotente e determine seu índice de nilpotência.

13. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Defina $A^0 = I$ e $A^n = A^{n-1}A$, para todo número natural $n \geq 1$. Mostre que: $A^{2n} = I$ e $A^{2n+1} = A$, para todo natural n.

14. Sejam A, B matrizes em $M_n(I\!R)$. Se $AB = BA$, mostre que:
    $(a)(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$; $(b)(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;
    $(c)(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

15. Seja A matriz em $M_n(I\!R)$. Mostre que:
    (a) as matrizes $A.A^T$ e $\dfrac{1}{2}(A + A^T)$ são simétricas;
    (b) a matriz $\dfrac{1}{2}(A - A^T)$ é antissimétrica;
    (c) toda matriz quadrada é a soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.

16. Dizemos que uma matriz A é *ortogonal* se é invertível e $A^{-1} = A^T$.
    (a) Determine os possíveis valores para o determinante de uma matriz ortogonal.
    (b) Determine quais matrizes reais de ordem 2 são simultaneamente antissimétricas e ortogonais.
    (c) Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é também uma matriz ortogonal.

17. Verifique quais das matrizes abaixo é ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

18. Dado um número real α, considere a matriz $T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.
    (a) Calcule $T_{\frac{\pi}{2}}$.
    (b) Dados α e β em $I\!R$, mostre que $T_\alpha . T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.
    (c) Calcule $T_{-\alpha}$.
    (d) Mostre que, para todo número α, a matriz T_α é ortogonal.

19. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, uma matriz quadrada de ordem n. O *traço* de A, denotado por $tr(A)$, é definido como sendo o número real

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn},$$

ou seja, o traço de A é a soma dos elementos da diagonal principal de A. Dadas A e B matrizes quadradas de ordem n, valem as seguintes propriedades:

$(a)\, tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;

$(b)\, tr(kA) = ktr(A),$ onde $k \in I\!R$;

$(c)\, tr(A^T) = tr(A)$;

$(d)\, tr(AB) = tr(BA)$.

Usando algumas destas propriedades verifique que não existem matrizes quadradas A e B de ordem n tais que $AB - BA = I$.

20. Verifique que se A é uma matriz $m \times n$, então os traços de AA^T e A^TA estão definidos. Em seguida prove que $tr(AA^T) = tr(A^TA)$.

21. Mostre que se $A^TA = A$, então A é simétrica e $A = A^2$.

22. Prove que se A é invertível e $AB = AC$, então $B = C$.

23. É possível ter $AB = I$ e B não ser inversa de A? Justifique sua resposta.

24. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, mostre que:
    (a) Se A satisfaz a igualdade $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.
    (b) Se A é tal que $A^{n+1} = 0$, então $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^n$.

25. Seja A uma matriz quadrada de ordem 5, cujo determinante é igual a -3, pede-se:
    (a) O determinante da matriz P dada por $P = 4A^{-1}A^T$.
    (b) Decidir se P é ou não invertível.
    (c) O determinante da matriz B obtida de A após serem realizadas as seguintes operações: $L_3 \longleftrightarrow L_2$; $L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_5$; $L_4 \longrightarrow -3L_4$.
    (d) Decidir se a matriz $Q = AA^T$ é ou não invertível.

26. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$:
    (a) desenvolvendo-o pela segunda linha (usando cofatores).
    (b) pelo processo de triangularização (usando operações elementares sobre as linhas da matriz).

27. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det(AB)$; (b) A^{-1}; (c) B^{-1}; (d) $(AB)^{-1}$; (e) $\det(C)$, onde $CA^T = 2BC^2$.

28. Seja Q uma matriz quadrada de ordem n tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$. Determine o valor de $\det Q$.

29. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det A$ utilizando as operações elementares sobre as linhas de A;

(b) $\det A^T$; (c) $\det(A^2)$; (d) A^{-1}; (e) $\det(-A)$; (f) $3AA^T$.

30. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o polinômio $p(x) = \det(xI_3 - A)$, onde I_3 é a matriz identidade de ordem 3 e $x \in \mathbb{R}$.

(b) Verifique que $p(A) = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem 3.

(c) Use o item anterior para calcular a inversa de A.

31. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; (e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

32. Resolva as seguintes equações:

(a) $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$; (b) $\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16$; (c) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$.

33. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Generalize o resultado para uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ na qual $a_{ij} = 0$ sempre que $i + j \leq n$.

34. Diz-se que uma matriz A é *semelhante* à matriz B quando existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.

   (a) Mostre que se A é uma matriz semelhante a B, então B é semelhante a A.

   (b) Mostre que se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

   (c) Prove que matrizes semelhantes tem mesmo determinante.

35. Nos casos abaixo, pede-se: verificar se A é invertível; $cof(A)$, a matriz cofatora de A, e A^{-1}, a matriz inversa de A, se esta existir.

$$(a)\; A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \qquad (b)\; A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(c)\; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad (d)\; A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

36. Usando algumas propriedades dos determinantes, sem calcular diretamente, verifique que:

$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

37. Nos casos abaixo, determine A^{-1}, utilizando operações elementares, se esta existir.

$$(a)\; A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}; \qquad (b)\; A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(c)\; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (d)\; A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 \\ -6 & -9 & 24 \end{bmatrix}.$$

38. Sendo A e B matrizes invertíveis de ordem n, isolar a matriz X de cada equação abaixo:

$(a)\ AXB = I$; $(b)\ (AX)^T = B$; $(c)\ (AX)^{-1} = I$;
$(d)\ (A+X)^T = B$; $(e)\ AXB = BA$; $(f)\ (AX^{-1})^T = B$.

39. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Determine matrizes elementares E_1, E_2, E_3 e E_4 tais que $B = E_2E_1A$ e $C = E_4E_3A$. Explique como estas matrizes foram obtidas e confira seu resultado.

40. Encontre matrizes elementares $E_1, E_2, \cdots, E_k$ tais que $A = E_1E_2 \cdots E_k$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

41. Uma construtora está fazendo o orçamento de 65 estabelecimentos rurais sendo estes divididos em: 20 de alvenaria, 30 mistos e 15 de madeira. A tabela abaixo descreve a quantidade de material utilizado em cada tipo de construção.

Tipo de construção/ Material	Tábuas (unidade)	Tijolos (mil)	Telhas (mil)	Tinta (litros)	Mão-de-obra (dias)
Alvenaria	50	15	6	70	25
Madeira	500	1	5	20	30
Misto	200	8	7	50	40

Pede-se:

(a) Determinar, utilizando o produto de matrizes, a matriz A que descreve quantas unidades de cada componente serão necessárias para cumprir o orçamento.

(b) Dar o significado do produto de matrizes AB, sendo A a matriz obtida no item (a) e B é a matriz obtida pela tabela abaixo.

	Valor da Compra (a unidade em reais)	Transporte (a unidade em reais)
Tábuas	12	0,08
Tijolos	100	20
Telhas	300	10
Tinta	3	0,50
Mão-de-obra	40	1,50

42. Considere os adubos I,II,III e IV com características e preços descritos nas tabelas abaixo:

Substância po kg	Fósforo	Nitrato	Potássio
Adubo I	25g	15g	70g
Adubo II	30kg	25g	40g
Adubo III	60g	10g	55g
Adubo IV	15g	30g	60g

Adubos	I	II	III	IV
Preço por Kg	R$7,50	R$5,00	R$4,50	R$6,50

Um agricultor necessita de uma mistura com a seguinte especificação: 6 kg do adubo I, 7 kg do adubo II, 5 kg do adubo III e 8 kg do adubo IV. Usando o produto de matrizes, determine a quantidade de cada substância na mistura descrita acima e o preço desta mistura.

43. Decida se a afirmação é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

(a) ( ) Se a primeira coluna de A for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira coluna de qualquer produto AB.

(b) ( ) Se a primeira linha de A for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira linha de qualquer produto AB.

(c) ( ) Se a soma de matrizes $AB + BA$ estiver definida, então A e B devem ser matrizes quadradas.

(d) ( ) Se A é uma matriz quadrada com duas linhas idênticas, então A^2 tem duas linhas idênticas.

(e) ( ) Se A é uma matriz quadrada e A^2 tem uma coluna constituída somente de zeros, então necessariamente A tem uma coluna constituída somente de zeros.

(f) ( ) Se AA^T é uma matriz singular, então A não é invertível.

(g) ( ) Se A é invertível e $AB = 0$, então necessariamente B é a matriz nula.

(h) ( ) A soma de duas matrizes invertíveis é sempre uma matriz invertível.

(i) ( ) Se A é uma matriz quadrada tal que $A^4 = 0$, então

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3.$$

(j) ( ) $\det(2A) = 2\det(A)$.

(k) ( ) $\det(I + A) = 1 + \det(A)$.

(l) ( ) Não existe matriz real quadrada A tal que $\det(AA^T) = -1$.

(m) ( ) Se $\det(AA^T) = 4$, então $\det(A) = 2$.

(n) ( ) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

(o) ( ) Se $\det(A) \neq 0$ e $AB = 0$, então B é invertível.

(p) ( ) Se $A \in M_n(I\!R)$ e n é par, então $\det(A) = \det(-A)$.

(q) ( ) Se A^{100} é invertível, então $3A$ também o é.

(r) ( ) Se $AB = 0$ e B é invertível, então $A = 0$.

(s) ( ) Sejam A, B e P matrizes reais de ordem n, tais que $B = P^T.A.P$, sendo P invertível. Então $\det(A) = \det(B)$.

(t) ( ) Dada a equação matricial $X^2 + 2X = 0$, onde X é uma matriz quadrada de ordem n, não singular. Então esta equação tem única solução.

(u) ( ) Se $A, B \in M_n(I\!R)$ são tais que $A.B = 0$ (matriz nula), então $B.A$ também é a matriz nula.

(v) ( ) Se $A, B \in M_n(I\!R)$ são tais que $A.B = 0$ (matriz nula), então $A = 0$ ou $B = 0$.

(w) ( ) A soma de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.

(x) ( ) O produto de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.

(y) ( ) Se $A.B = C$ e duas das matrizes são invertíveis, então a terceira também o é.

(z) ( ) Se $A.B = C$ e duas das matrizes são singulares, então a terceira também o é.