



Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

5^a Lista - MAT 135 - Geometria Analítica e Álgebra Linear 2015/II

1. Nos itens a seguir são apresentados um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verifique se eles são espaços vetoriais. Para aquele que não for, citar os axiomas que não se verificam.

(a) $V = \mathbb{R}^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, as operações usuais de \mathbb{R}^2 .

(b) $V = \mathbb{R}^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, 0)$ e a multiplicação escalar usual.

(c) $V = \mathbb{R}^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ e $\lambda(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.

(d) $V = \mathbb{R}^3$; $(a, b, c) + (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z)$ e $\lambda(a, b, c) = (\lambda a, b, c)$.

(e) $V = \mathbb{R}^3$; $(a, b, c) + (x, y, z) = (3a + 3x, -b - y, c + z)$ e $\lambda(a, b, c) = (3\lambda a, -\lambda b, c)$.

2. Em cada item deste exercício são dados um espaço vetorial V e um subconjunto W de V . Verifique se W é um subespaço vetorial de V .

(a) $V = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$; $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \}$.

(b) $V = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$; $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z \leq 1 \}$.

(c) $V = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$; $W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \}$.

(d) $V = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$; $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y = z \}$.

(e) $V = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$; $W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{Q} \}$.

3. Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em \mathbb{R}^3 :

(a) Escreva $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v .

(b) O vetor $(2, -5, 4)$ pode ser escrito como combinação linear de u e v ? Justifique.

(c) Para que valores de k o vetor $w = (-8, 14, k)$ se escreve como combinação linear de u e v ?

(d) Encontre condições sobre a , b e c de modo que o vetor $w = (a, b, c)$ seja combinação linear de u e v .

4. Sejam $u = (-1, 2, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $w = (-2, -1, 0)$. Expressar cada um dos vetores $v_1 = (-8, 4, 1)$, $v_2 = (0, 2, 3)$ e $v_3 = (0, 0, 0)$ como combinação linear de u , v e w .

5. Para qual valor de k o vetor $u = (1, -2, k)$ em \mathbb{R}^3 será uma combinação linear dos vetores $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?

6. Encontre condições sobre a , b e c de modo que o vetor $w = (a, b, c)$ seja combinação linear de $u = (1, -3, 2)$ e $w = (2, -1, 1)$.
7. Os conjuntos abaixo são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Justifique! (Faça contas somente quando for realmente necessário!)
- (a) $\{(-1, 0, 2, 0, 1), (0, 1, 0, -2, 1), (-2, 3, 4, -6, 5)\} \subset \mathbb{R}^5$.
- (b) $\{(2, -1, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$.
- (c) $\{(2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$.
- (d) $\{(2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, 5, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.
- (e) $\{(1, 1, 2), (1, 0, 0), (4, 6, 12)\} \subset \mathbb{R}^3$.
- (f) $\{(1, 1, 1), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
8. Suponha que $\{u, v, w\}$ seja um conjunto L.I. Pergunta-se: $\{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ é um conjunto L.I. ou L.D.? Justifique.
9. Suponha que $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja L.I., mas $\{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ seja L.D. Mostre que w é combinação linear dos vetores de S .
10. Sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores L.I. de um espaço vetorial V e suponha que u é uma combinação linear desses vetores, digamos $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$. Mostre que a representação de u acima é única. Dê um exemplo em \mathbb{R}^3 mostrando que se o conjunto de vetores for L.D., então a representação não será única.
11. Mostre que:
- (a) Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto L.I., então $\{u + v, u + w, v + w\}$ também é um conjunto L.I.
- (b) Se um conjunto A em um espaço vetorial V é L.I., então qualquer subconjunto de A também é L.I.
12. Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços:
- (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$.
- (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$.
- (c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$.
- (d) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - 2y = 0 \text{ e } t + x = z\}$.

13. Para cada um dos subconjuntos $S \subset V$, onde V é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S , isto é, $[S]$.
- (a) $S = \{ (1, 0), (2, -1) \}$, $V = \mathbb{R}^2$.
- (b) $S = \{ (1, 1, 1), (2, 2, 0) \}$, $V = \mathbb{R}^3$.
- (c) $S = \{ (1, 2, 3), (0, 0, 2), (-2, -4, -2) \}$, $V = \mathbb{R}^3$.
- (d) $S = \{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \}$, $V = \mathbb{R}^4$.
14. Mostre que os conjuntos $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ e $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .
15. Determine uma base e dimensão dos subespaços vetoriais:
- (a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 2y = 0\}$.
- (b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - 2y = 0 \text{ e } t + x = z\}$.
- (c) $W = [(1, 2, 3), (0, 0, 2), (-2, -4, -2)]$.
- (d) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + t + z = 0\}$.
16. Dados U, W subespaços do espaço vetorial V determinar, nos seguintes casos:
- (i) uma base e a dimensão de U .
- (ii) uma base e a dimensão de W .
- (iii) uma base e a dimensão de $U + W$.
- (iv) uma base e a dimensão de $U \cap W$.
- (a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$, $W = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$.
- (b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = t - z = 0\}$, $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / z = t = 0\}$, $V = \mathbb{R}^4$.
- (c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$, $W = [(2, 2, 0), (1, 2, 3), (7, 12, 21), (-1, -2, -3)]$, $V = \mathbb{R}^3$.
- (d) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + t + z = 0 = 0\}$, $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - t + z = 0\}$, $V = \mathbb{R}^4$.
17. Determine uma base de \mathbb{R}^5 que contenha o conjunto $\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0)\}$. Justifique sua resposta.
18. Mostre que os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (3, 0, 2)$ e $v_4 = (2, -1, 1)$ geram o \mathbb{R}^3 e encontrar uma base para \mathbb{R}^3 dentre esses vetores.
19. Verifique que \mathbb{R}^3 é a soma direta de $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\}$.

20. Verifique se \mathbb{R}^2 é a soma direta de $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$.
21. Determine as coordenadas do vetor $v = (1, 0, 0)$ em relação à base $\gamma = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$.
22. Determine as coordenadas do vetor $u = (4, 5, 3)$ de \mathbb{R}^3 em relação às seguintes bases:
- (a) Canônica;
 - (b) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$;
 - (c) $\{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.
23. Considere a base ordenada $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbb{R}^3 onde $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$. Encontre as coordenadas do vetor $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base ordenada γ .
24. Considere o espaço vetorial real \mathbb{R}^2 . A matriz de mudança da base ordenada $\gamma = \{(1, 1), (-2, 2)\}$ para a base ordenada $\alpha = \{v_1, v_2\}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determine a base ordenada α . Determine o elemento $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $[u]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

25. Considere as bases $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ de \mathbb{R}^3 , relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 = 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 = 3u_1 + 3u_3 \end{cases}.$$

(a) Determine as matrizes de mudança de base $[I]_\gamma^\beta$ e $[I]_\beta^\gamma$.

(b) Sabendo que $[u]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, determine o vetor u com relação à base γ .

26. Considere a seguinte matriz de mudança de base

$$[I]_{\beta'}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontre:

$$(a) [v]_{\beta}, \text{ sabendo que } [v]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$(b) [v]_{\beta'}, \text{ sabendo que } [v]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

27. Mostre que $\gamma = \{ (1, 1, 1), (1, 0, -1), (1, -2, 1) \}$ é uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 . γ é uma base ortonormal? Caso negativo, obtenha uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 a partir de γ .
28. Dada a base $\gamma = \{ (1, 0), (1, 1) \}$ de \mathbb{R}^2 , utilize o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 .
29. Dada a base $\alpha = \{ (1, 1, 1), (-1, 0, -1), (-1, 2, 3) \}$ de \mathbb{R}^3 , utilize o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 .
30. Considerando o produto interno usual de \mathbb{R}^3 , determine uma base ortonormal para o subespaço $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \}$ de \mathbb{R}^3 .