Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

MAT 140 - Cálculo I 2016/I
$2^{\underline{a}}$ Lista - Limites e Continuidade

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

   (a) $\lim\limits_{x\to -7}(2x+5)$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+4}-2}{x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

   (h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$

   (i) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$

2. Seja f a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 3-x & \text{se} \quad x<2 \\ \dfrac{x}{2}+1 & \text{se} \quad x>2 \end{cases}$$

   (a) Faça um esboço do gráfico de f.

   (b) Determine $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

   (c) Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$? Em caso afirmativo, qual é? Em caso negativo, por que não?

3. Seja f a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 3-x & \text{se} \quad x<2 \\ 2 & \text{se} \quad x=2 \\ \dfrac{x}{2} & \text{se} \quad x>2 \end{cases}$$

   (a) Faça um esboço do gráfico de f.

   (b) Determine $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ e $f(2)$.

   (c) Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$? Em caso afirmativo, qual é? Em caso negativo, por que não?

4. Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad x < -2 \\ 1 & \text{se} \quad x = -2 \\ -x-2 & \text{se} \quad -2 < x \leq -1 \\ -1 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f.

(b) Determine $\lim_{x \to -2^+} f(x)$, $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ e $f(-2)$.

(c) Existe $\lim_{x \to -2} f(x)$? Em caso afirmativo, qual é? Em caso negativo, por que não?

(d) Determine $\lim_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ e $f(-1)$.

(e) Existe $\lim_{x \to -1} f(x)$? Em caso afirmativo, qual é? Em caso negativo, por que não?

(f) Determine $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ e $f(0)$.

(g) Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$? Em caso afirmativo, qual é? Em caso negativo, por que não?

5. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to -2^+} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

(b) $\lim_{x \to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

(c) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

(d) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

6. Utilizando o primeiro limite fundamental, determine:

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(2x)}{2x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(ax)}{x}$, a constante.

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - cosx}{sen(2x)}$

(d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x\, cossec(2x)}{cos(5x)}$

(e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x + x\, cosx}{senx\, cosx}$

(f) $\lim_{x \to 0} \dfrac{senx}{sen(2x)}$

(g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{tg(3x)}{sen(8x)}$

7. Determine:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{5x+7}$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2+3}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+7}{x^2-2}$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3-4x+1}$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$

(g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{\sqrt{4x^2+25}}$

(h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4-3x^3}{\sqrt{x^6+9}}$

(i) $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{3x}$

(j) $\lim_{x\to2^-} \frac{3}{x-2}$

(k) $\lim_{x\to-8^+} \frac{2x}{x+8}$

(l) $\lim_{x\to7} \frac{4}{(x-7)^2}$

8. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x\to1} \frac{2x^3+cx+c}{x^2-1} = L$. Determine c e L.

9. Se $\lim_{x\to4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1$, determine $\lim_{x\to4} f(x)$.

10. Se $\lim_{x\to4} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, determine $\lim_{x\to2} \frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x\to2} f(x)$.

11. Seja f uma função tal que $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ para $-1 \le x \le 1$. Determine $\lim_{x\to0} f(x)$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $2 - x^2 \le f(x) \le 2\,cosx$ para qualquer x. Determine $\lim_{x\to0} f(x)$.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \le 2|x|$ para qualquer x. Calcule $\lim_{x\to0} \frac{f(x^3)}{x}$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $1 + x^2 + \frac{x^6}{3} \le f(x) + 1 \le sec(x^2) + \frac{x^6}{3}$ para qualquer $x \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. Calcule $\lim_{x\to0} f(x)$ e $\lim_{x\to0}\left(f(x)\,cos\left(\frac{1}{x+x^2}\right)\right)$.

15. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|senx| \le f(x) \le 3|x|$ e $0 \le x \le 1 + |senx|$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to0}(f(x)\,g(x) + cosx)$.

16. Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 2x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ -2x + 4 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

(a) f é contínua em $x = 0$? Justifique!

(b) f é contínua em $x = 1$? Justifique!

(c) f é contínua em $x = 2$? Justifique!

17. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua, justificando sua resposta.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 5 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} sen(x^2 - 4) + 5 & \text{se} \quad x > 2 \\ \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{se} \quad x < 2 \\ 5 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} & \text{se} \quad x \neq -2 \text{ e } x \neq 2 \\ 3 & \text{se} \quad x = 2 \\ 4 & \text{se} \quad x = -2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 4x + 3|}{x - 3} & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 1 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$

18. Determine o valor de a para que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$, justificando sua resposta.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se} \quad x \neq 3 \\ a & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ a & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x < 3 \\ 2ax & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^2x - 2a}{x^2 - 4} & \text{se} \quad x \geq 2 \\ 12 & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ ax - b & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 3 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$

19. Mostre que a equação $x^3 - x - 1 = 0$ admite uma raiz em $[1, 2]$.

20. Verifique que a equação $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, 1]$.