Universidade Federal de Viçosa

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

MAT 140 - Cálculo I   2016/I

$4^{\underline{a}}$ Lista - Derivadas e Aplicações

1. Determine a derivada de cada função a seguir:

   (a) $f(x) = x\,ln\,x$

   (b) $f(x) = x\,e^{2x}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x\,ln\,x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x\,tg\,x}{ln\,x}$

   (e) $f(x) = 3^{x}\,e^{x}$

   (f) $f(x) = e^{x}\,cos\,x$

   (g) $f(x) = e^{x}\,arcsen\,x$

   (h) $f(x) = x\,arccos\,x$

   (i) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{arcsen\,x}$

   (j) $f(x) = e^{3x^2+5}$

   (k) $f(x) = arcsen\,(e^{x})$

   (l) $f(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x^2+4x}\right)$

   (m) $f(x) = e^{x^2} + 2\,cos\,(x^2+4)$

   (n) $f(x) = \dfrac{sen\,(3x^2-5)}{e^{2x}}$

   (o) $f(x) = ln\,(sen\,x + cos\,x)$

   (p) $f(x) = \sqrt{ln\,(x^2+1)}$

   (q) $f(x) = e^{2x}\,arctg\,(3x)$

   (r) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

   (s) $f(x) = arctg\,(\sqrt{x^2+2})$

   (t) $f(x) = sen\,x\,arcsec\,(3x)$

   (u) $f(x) = ln\,(2x)\,arcsen\,(x^2)$

2. Utilizando derivação implícita, determine $\dfrac{dy}{dx}$:

   (a) $x^2 + y^2 = \sqrt{7}$

   (b) $x\,y + x + y = 5$

   (c) $x\,ln\,y + y^3 = ln\,x$

   (d) $cos^2\,y + sen^2\,y = y + 2$

   (e) $e^{cos\,y} = x^3\,arctg\,y$

   (f) $e^{x^2} + ln\,y = 0$

   (g) $y\,tg\,(x+y) = 4$

   (h) $e^{cos\,x} + e^{sen\,y} = \dfrac{1}{4}$

3. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto indicado:

   (a) $x\,y^2 = 1$ em $(1,-1)$.

   (b) $ln\,(x\,y) = 2x$ em $(1, e^2)$.

   (c) $sen\,(x\,y) = x$ em $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

   (d) $y^2 = \dfrac{x^2}{x\,y-4}$ em $(4,2)$.

4. A função $f(x) = x^3 - 9x$ é crescente para $x < -\sqrt{3}$. Se g é a função inversa de f neste intervalo, encontre $g'(0)$.

5. A função $f(x) = x^3 - 9x$ é decrescente para $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Se h é a função inversa de f neste intervalo, encontre $h'(0)$.

6. Dada a função $f(x) = x\, sen\, x$, calcule $f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

7. Para cada item a seguir, faça o que se pede:

   (a) Dada a função $f(x) = \frac{1}{x}$, determine a derivada de ordem n e calcule $f^{(n)}(2)$.

   (b) Dada a função $f(x) = e^{2x}$, determine a derivada de ordem n e calcule $f^{(n)}(1)$.

   (c) Dada a função $f(x) = sen\, x$, determine a derivada de ordem n e calcule $f^{(50)}(0)$.

   (d) Dada a função $f(x) = cos^2\, x$, determine a derivada de ordem n e calcule $f^{(10)}(0)$.

8. Calcule, se possível, os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\frac{2}{7}}{x+1}\right)^{x}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{4}{x}}$

9. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

   (b) $f(x) = 2 - e^{-x}$

   (c) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x}$

   (d) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

   (e) $f(x) = x\, e^{-x}$

   (f) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

10. Seja f a função definida por $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+3}$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Verifique que f' é contínua em $\mathbb{R}$.

    (b) Verifique que $f'(x) \neq 0$ para todo x em $\mathbb{R}$.

    (c) Tendo em vista que $f'(0) > 0$, conclua que f é estritamente crescente.

11. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão:

(a) $f(x) = xe^{-2x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(c) $f(x) = x\,e^{1/x}$

(d) $f(x) = x\,ln\,x$

(e) $f(x) = e^{-2x}$

(f) $f(x) = x + sen\,x$

12. Para cada uma das funções a seguir, determine:

(i) Os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente,

(ii) Os valores de máximo e mínimo local de f,

(iii) Os intervalos nos quais f possui concavidade para baixo ou para cima e os pontos de inflexão, se existirem.

(a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

(b) $f(x) = sen\,x + cos\,x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

(c) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

(d) $f(x) = \dfrac{ln\,x}{\sqrt{x}}$

13. Esboce os gráficos das funções a seguir indicando: o domínio, as interseções com os eixos (se houver), as assíntotas (se houver), os pontos críticos (se houver), os intervalos de crescimento e decrescimento, os extremos relativos (se houver), os intervalos onde o gráfico possui concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão (se houver).

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x}{9-x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x}$

(d) $f(x) = \dfrac{16-x^2}{(x-2)^2}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

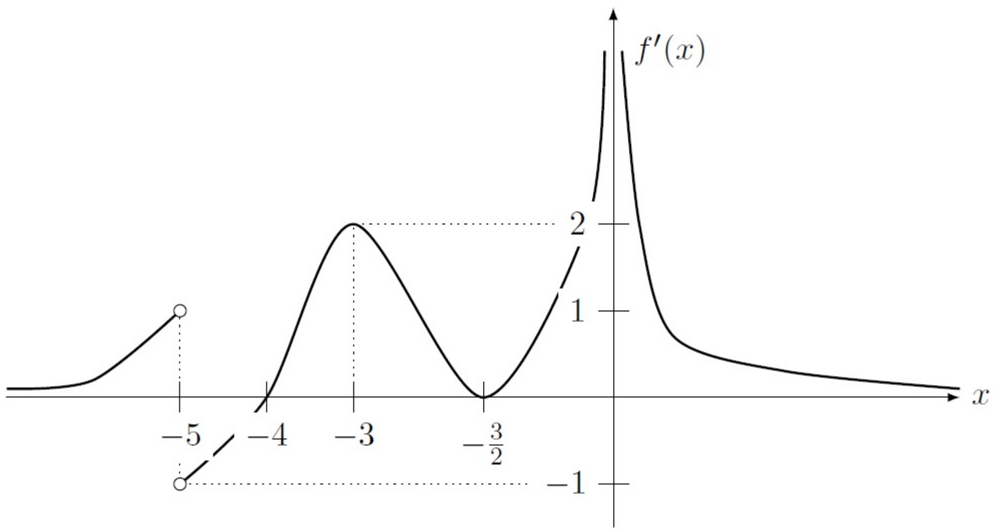
(f) $f(x) = e^{-x^2}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^3-x+1}{x^2}$

14. Seja $y = f(x)$ uma função definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, contínua em todo o seu domínio e satisfazendo as seguintes condições:

$$f(-5) = 2, f(-4) = 1, f(-3) = 3, f(-3/2) = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Suponha que o gráfico de $f'(x)$ seja dado pela figura a seguir:



Responda, justificando, o que se pede:

(a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente;

(b) os pontos onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal;

(c) os pontos de máximos e mínimos relativos, caso existam;

(d) os intervalos onde o gráfico de f possui concavidade para cima e onde possui concavidade para baixo;

(e) os pontos de inflexão, caso existam;

(f) as assíntotas verticais e horizontais, caso existam;

(g) esboce o gráfico de uma função f que satisfaça as condições acima.

15. Mostre que $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$ tem exatamente uma raiz real.

16. Suponha que f seja uma função ímpar e que seja derivável em todo seu domínio. Demonstre que para todo número positivo b existe $c \in (-b, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)}{b}$.

17. Mostre que $|sen\, a - sen\, b| \leq |a - b|$, para todo a, $b \in \mathbb{R}$.

18. Sabendo que f' é crescente e $f(0) = 0$, mostre que $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente no intervalo $(0, +\infty)$.

19. Durante várias semanas, o departamento de trânsito de uma certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por um certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 13 e 18 horas, a velocidade média neste cruzamento é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$ km/h, onde t é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?

20. Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de $900\,m$ de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, $3.000\,m$ rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de $R\$\,5,00$ o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa $R\$\,4,00$ o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

21. Se numa indústria forem produzidas de 200 a 230 unidades de uma peça, haverá um rendimento semanal de $R\$\,540,00$ por cada unidade. Entretanto se forem produzidas mais de 230 peças, o rendimento semanal em cada peça será reduzido em $R\$\,2,00$ por cada peça a mais. Determine o maior rendimento semanal da indústria.

22. Achar os pontos sobre a curva $y = x^2$ mais próximos do ponto $P = (0, 2)$.

23. Determinar as dimensões do retângulo de maior área, que pode ser inscrito no círculo de raio igual a 3.

24. Uma caixa sem tampa será construída recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho que mede $12\,cm \times 12\,cm$ e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados da borda devem ter para que a caixa tenha a capacidade máxima?

25. Se uma lata fechada com um volume fio deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a razão entre a altura e o raio da base se a quantidade de material usado na fabricação for mínima.