Universidade Federal de Viçosa

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

MAT 140 - Cálculo I 2016/I

Gabarito da $4^{\underline{a}}$ Lista - Derivadas e Aplicações

1. (a) $f'(x) = ln\, x + 1$

   (b) $f'(x) = e^{2x} + 2\,x\,e^{2x}$

   (c) $f'(x) = -\dfrac{ln\, x\, + 1}{x^2\, ln\, x}$

   (d) $f'(x) = \dfrac{ln\, x\, tg\, x + x\, ln\, x\, sec^2\, x\, - tg\, x}{ln^2\, x}$

   (e) $f'(x) = 3^x\, ln\, 3\, e^x + 3^x\, e^x$

   (f) $f'(x) = e^x\, cos\, x - e^x\, sen\, x$

   (g) $f'(x) = e^x\, arcsen\, x + \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - x^2}}$

   (h) $f'(x) = arccos\, x - \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

   (i) $f'(x) = \dfrac{3x^2\sqrt{1 - x^2}\, arcsen\, x - x^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}\, arcsen^2\, x}$

   (j) $f'(x) = 6x\, e^{3x^2+5}$

   (k) $f'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

   (l) $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^3 + 5x^2 + 4x}$

   (m) $f'(x) = 2x\, e^{x^2} - 4x\, sen\, (x^2 + 4)$

   (n) $f'(x) = \dfrac{6x\, cos\, (3x^2 - 5) - 2\, sen(3x^2 - 5)}{e^{2x}}$

   (o) $f'(x) = \dfrac{cos\, x - sen\, x}{sen\, x + cos\, x}$

   (p) $f'(x) = \dfrac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{ln\, (x^2 + 1)}}$

   (q) $f'(x) = 2\, e^{2x}\, arctg\, (3x) + \dfrac{3\, e^{2x}}{1 + 9x^2}$

   (r) $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{x + 1}}$

   (s) $f'(x) = \dfrac{x}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 2}}$

   (t) $f'(x) = cos\, x\, arcsec\, (3x) + \dfrac{sen\, x}{x\sqrt{9x^2 - 1}}$

   (u) $f'(x) = arcsen\, (x^2) + \dfrac{2x\, ln\, (2x)}{\sqrt{1 - x^4}}$

2. (a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y},\ \ y \neq 0.$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y + 1}{x + 1},\ \ x + 1 \neq 0.$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - xy\, ln\, y}{x^2 + 3xy^3},\ \ x^2 + 3xy^3 \neq 0.$

   (d) $\dfrac{dy}{dx} = 0$

   (e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x^2\, arctg\, y\, (1 + y^2)}{x^3 + sen\, y\, (1 + y^2)\, e^{cos\, y}},\ \ x^3 + sen\, y\, (1 + y^2)\, e^{cos\, y} \neq 0$

   (f) $\dfrac{dy}{dx} = 2x\, e^{x^2}\, y$

   (g) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y\, sec^2\, (x + y)}{tg\, (x + y) + y\, sec^2\, (x + y)},\ \ tg\, (x + y) + y\, sec^2\, (x + y) \neq 0.$

   (h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{cos\, x}\, sen\, x}{e^{sen\, y}\, cos\, y},\ \ e^{sen\, y}\, cos\, y \neq 0.$

3. (a) $y = \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{3}{2}$
   (b) $y = e^{2}\,x$
   (c) Não existe reta tangente em $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$
   (d) $y = 0$

4. $g'(0) = -\dfrac{1}{18}$

5. $h'(0) = -\dfrac{1}{9}$

6. $f'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -3$

7. (a) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n}\, n!\, x^{-(n+1)}$ e $f^{(n)}(2) = \dfrac{(-1)^{n}\, n!}{2^{n+1}}$.
   (b) $f^{(n)}(x) = 2^{n}\, e^{2x}$ e $f^{(n)}(1) = 2^{n}\, e^{2}$.
   (c) $\left\{\begin{array}{rcl} f^{(2n)}(x) & = & (-1)^{n}\, cos\, x \\ f^{(2n+1)}(x) & = & (-1)^{n}\, sen\, x \end{array}\right.$ e $f^{(50)}(0) = -1$.
   (d) $\left\{\begin{array}{rcl} f^{(2n+1)}(x) & = & (-1)^{n+1}\, 2^{2n}\, sen\,(2x) \\ f^{(2n+2)}(x) & = & (-1)^{n+1}\, 2^{2n+1}\, cos\,(2x) \end{array}\right.$ e $f^{(10)}(0) = -2^{9}$.

8. (a) e
   (b) e^{3}
   (c) e^{-1}
   (d) e
   (e) $e^{\frac{9}{7}}$
   (f) e^{2}
   (g) e^{20}

9. (a) f é crescente em $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. f é decrescente em $[-1, 0)$ e $(0, 1]$.
   (b) f é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (c) f é crescente em $[1, +\infty)$. f é decrescente $(-\infty, 0)$ e $(0, 1]$.
   (d) f é crescente em $[1, +\infty)$. f é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, 1]$.
   (e) f é crescente em $(-\infty, 1]$. f é decrescente em $[1, +\infty)$.
   (f) f é crescente em $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. f é decrescente em $[-1, 0)$ e $(0, 1]$.

10.

11. (a) f é côncava para cima em $(1,+\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty,1)$. $(1,e^{-2})$ é ponto de inflexão de f.

    (b) f é côncava para cima em $(-\sqrt{3},0)$ e $(\sqrt{3},+\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty,-\sqrt{3})$ e $(0,\sqrt{3})$. $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$ e $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ são pontos de inflexão de f.

    (c) f é côncava para cima em $(0,+\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty,0)$. f não tem ponto de inflexão.

    (d) f é côncava para cima em todo seu domínio.

    (e) f é côncava para cima em todo seu domínio.

    (f) f é côncava para cima em $(-\pi,0)$ e $(\pi,2\pi)$ e côncava para baixo em $(-2\pi,-\pi)$ e $(0,\pi)$. $(-\pi,-\pi-1)$, $(0,0)$ e $(\pi,\pi-1)$ são pontos de inflexão de f.

12. (a) (i) f é crescente em $[-1,0]$ e $[1,+\infty)$ e é decrescente em $(-\infty,-1]$ e $[0,1]$.

    (ii) O valor máximo local de f é 3 e ocorre em $x=0$ e o valor mínimo local de f é 2 e ocorre em $x=-1$ e $x=1$.

    (iii) f é côncava para baixo em $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e é côncava para cima $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$. Os pontos de inflexão de f são $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{22}{9}\right)$ e $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{22}{9}\right)$

    (b) (i) f é crescente em $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\dfrac{5\pi}{4},2\pi\right]$ e é decrescente em $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$.

    (ii) O valor máximo local de f é $\sqrt{2}$ e ocorre em $x=\dfrac{\pi}{4}$ e o valor mínimo local de f é $-\sqrt{2}$ e ocorre em $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

    (iii) f é côncava para baixo em $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ e $\left(\dfrac{7\pi}{4},2\pi\right)$ e é côncava para cima $\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

    Os pontos de inflexão de f são $\left(-\dfrac{3\pi}{4},0\right)$ e $\left(\dfrac{7\pi}{4},0\right)$.

    (c) (i) f é crescente em $\left[-\dfrac{1}{3}\,ln\,2,+\infty\right)$ e e é decrescente em $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\,ln\,2\right]$.

    (ii) O valor mínimo local de f é $2^{-\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ e ocorre em $x=-\dfrac{1}{3}\,ln\,2$. Não existe ponto de máximo local.

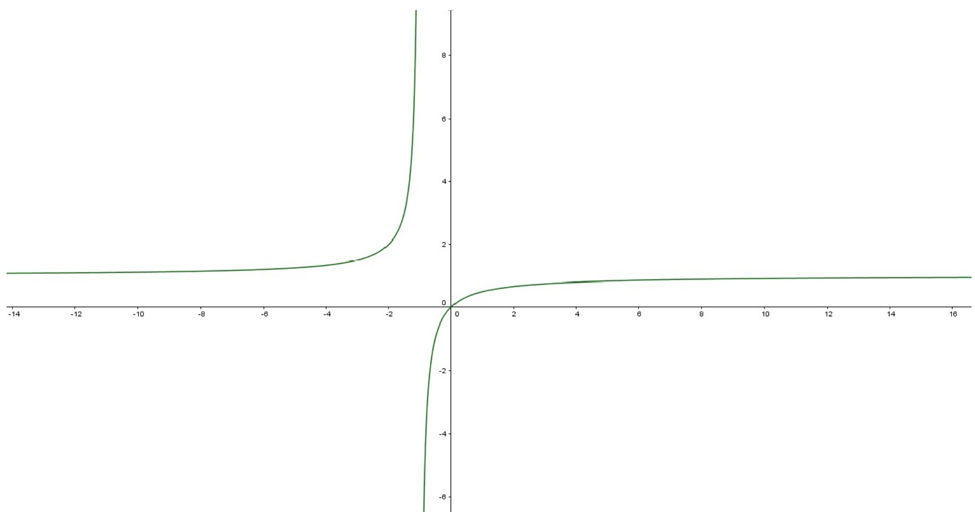
    (iii) f é côncava para cima em todo seu domínio. Não existem pontos de inflexão.

    (d) (i) f é crescente em $[0,e^2]$ e e é decrescente em $[e^2,+\infty)$.

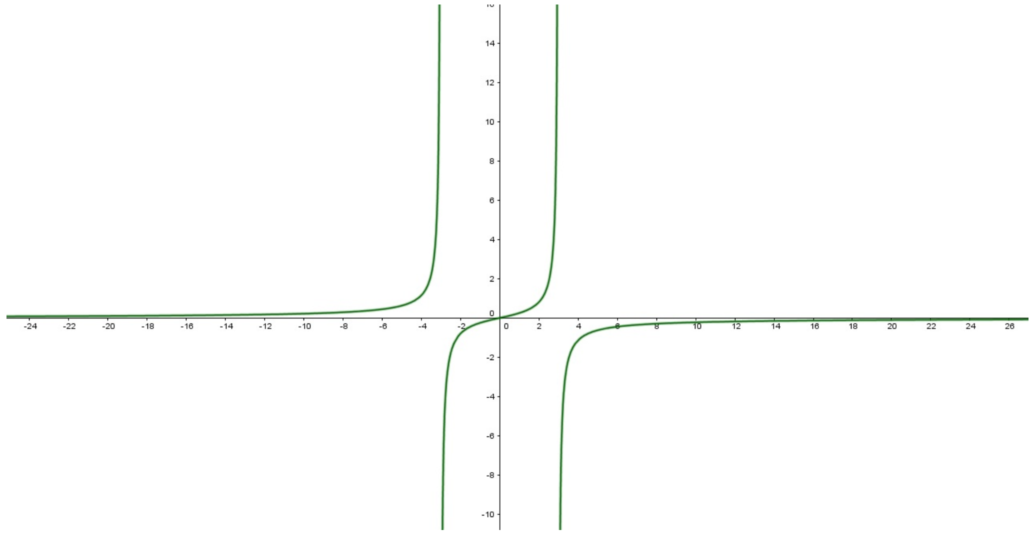
    (ii) O valor máximo local de f é $\dfrac{2}{e}$ e ocorre em $x=e^2$. Não existe ponto de mínimo local.

(iii) f é côncava para cima em $(e^{\frac{8}{3}}, +\infty)$ e é côncava para baixo em $(0, e^{\frac{8}{3}})$. $\left(e^{\frac{8}{3}}, -\dfrac{8}{3}\, e^{-\frac{4}{3}}\right)$ é ponto de inflexão de f.

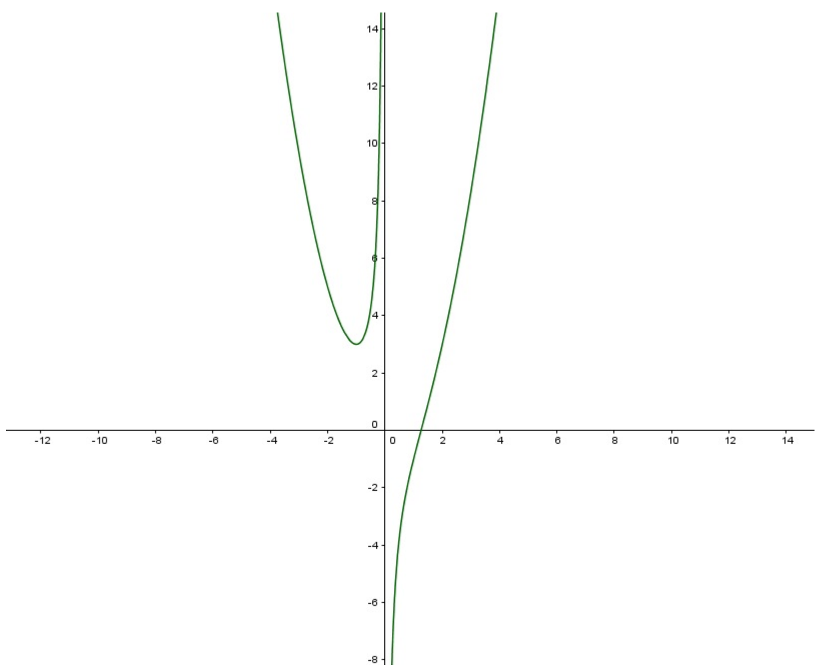
13. (a)
- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Interseções: $(0, 0)$.
- Assíntota vertical: $x = -1$ e assíntota horizontal: $y = 1$.
- f não possui pontos críticos.
- f é crescente em $(\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$.
- f não possui extremos relativos.
- f é côncava para cima em $(\infty, -1)$ e é côncava para baixo em $(-1, +\infty)$.
- Não existe ponto de inflexão.



(b)
- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.
- Interseções: $(0, 0)$.
- Assíntotas verticais: $x = -3$ e $x = 3$ e assíntota horizontal: $y = 0$.
- f não possui pontos críticos.
- f é crescente em $(\infty, -3)$, $(-3, 3)$ e $(3, +\infty)$.
- f não possui extremos relativos.
- f é côncava para cima em $(0, 3)$ e $(3, +\infty)$ e é côncava para baixo em $(-\infty, -3)$ e $(-3, 0)$.
- $(0, 0)$ é ponto de inflexão de f.

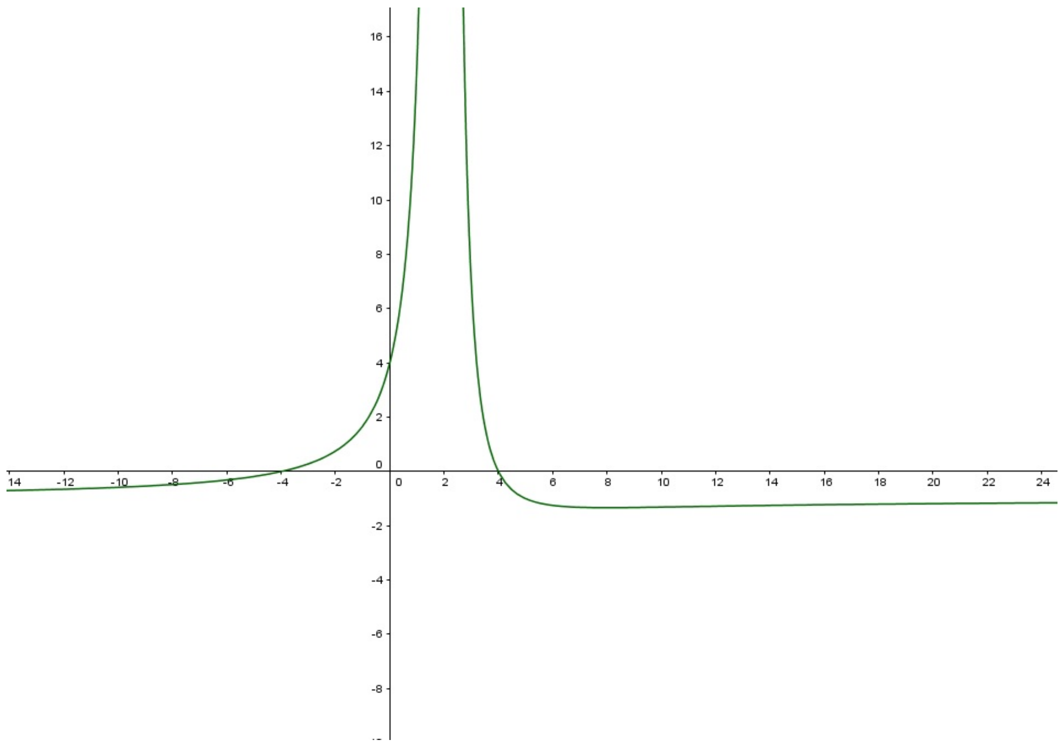


(c)
- $D(f) = \mathbb{R}^*$.
- Interseções: $(\sqrt[3]{2}, 0)$.
- Assíntota vertical: $x = 0$. Não existe assíntota horizontal.
- $(-1, 3)$ é ponto crítico de f.
- f é crescente em $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$ e é decrescente em $(-\infty, -1)$.
- $(-1, 3)$ é ponto de mínimo relativo de f.
- f é côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ e é côncava para baixo em $(0, \sqrt[3]{2})$.
- $(\sqrt[3]{2}, 0)$ é ponto de inflexão de f.

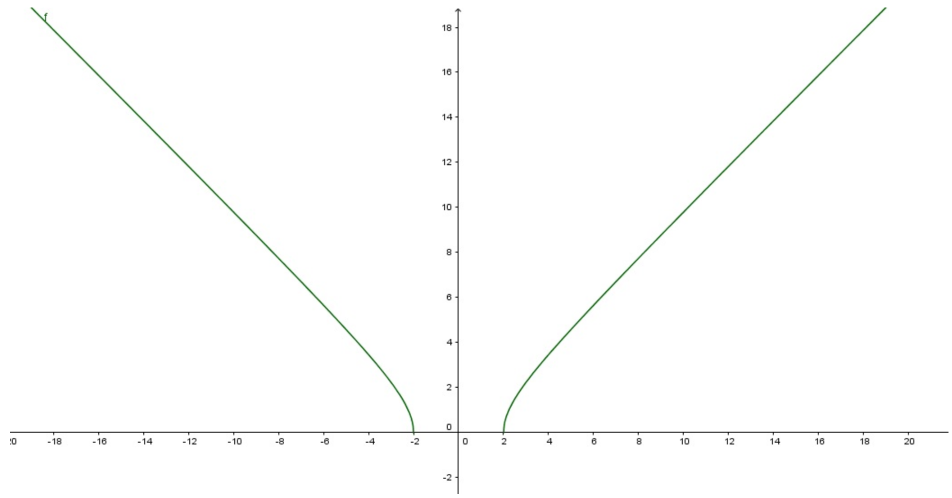


(d)
- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Interseções: $(-4, 0)$, $(0, 4)$ e $(4, 0)$.
- Assíntota vertical: $x = 2$. Assíntota horizontal: $y = -1$.
- $\left(8, -\dfrac{4}{3}\right)$ é ponto crítico de f.

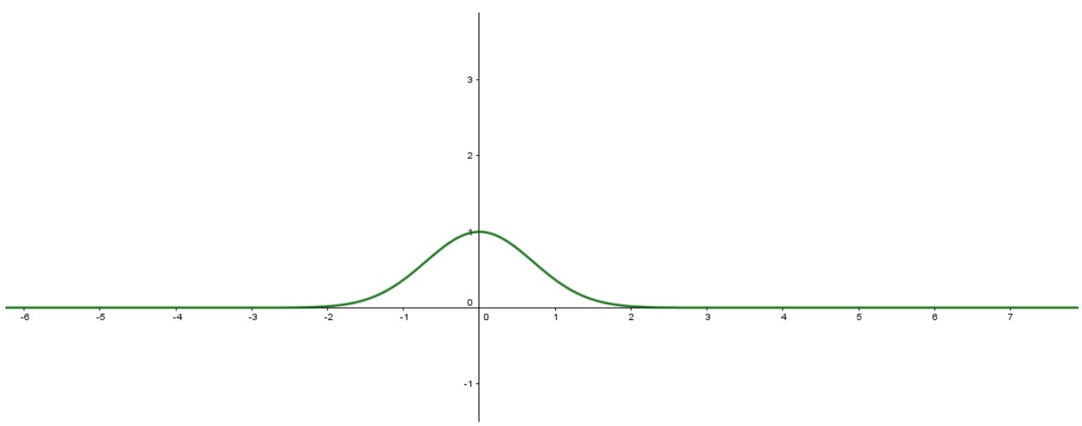
- f é crescente em $(\infty, 2)$ e $(8, +\infty)$ e é decrescente em $(2, 8)$.
- $\left(8, -\dfrac{4}{3}\right)$ é ponto de mínimo relativo de f.
- f é côncava para cima em $(-\infty, 2)$ e $(2, 11)$ e é côncava para baixo em $(11, +\infty)$.
- $\left(11, -\dfrac{35}{27}\right)$ é ponto de inflexão de f.



(e)
- $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$.
- Interseções: $(-2, 0)$ e $(0, 2.)$
- Não existem assíntotas verticais e horizontais.
- $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ são pontos críticos de f.
- f é crescente em $(-\infty, 2)$ e $(8, +\infty)$ e é decrescente em $(2, 8)$.
- f não possui extremos relativos.
- f é côncava para baixo em $(-\infty, -2)$ e $(2, +\infty)$.
- Não existe ponto de inflexão.

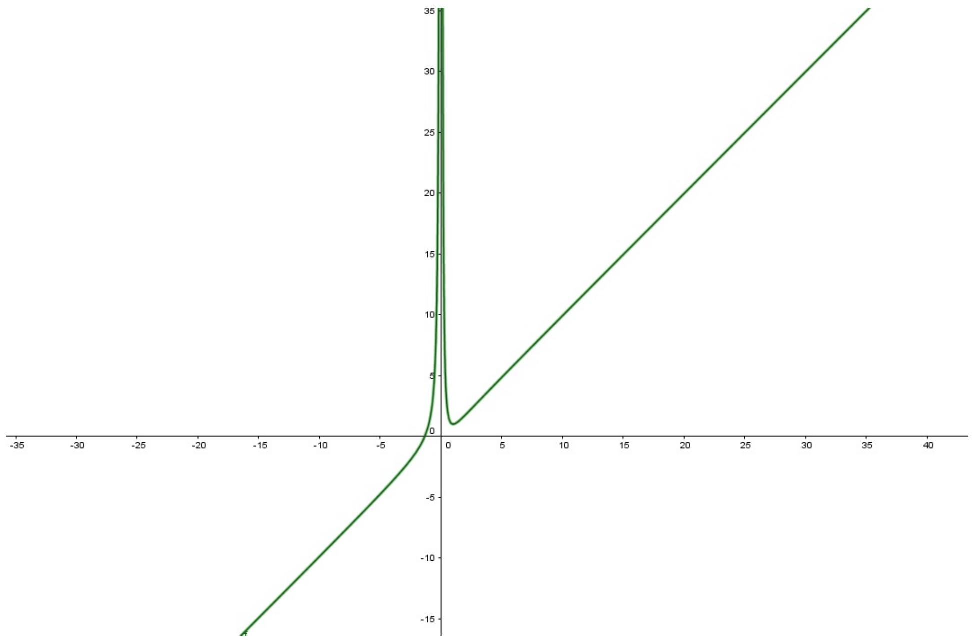


(f)
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- Interseção: $(0,1)$.
- Não existem assíntotas verticais. $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.
- $(0,1)$ é ponto crítico de f.
- f é crescente em $(-\infty, 0)$ e é decrescente em $(0, +\infty)$.
- $(0,1)$ é máximo relativo de f.
- f é côncava para cima em $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ e é côcava para baixo em $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ são pontos de inflexão de f.



(g)
- $D(f) = \mathbb{R}^*$.
- Interseções: pelo Teorema do Valor Intermediário, o gráfico f intersecta o eixo x em $c \in \left[-\dfrac{3}{2}, -1\right]$.
- $x = 0$ é aasíntota vertical ao gráfico de f. Não existem assíntotas horizontais.
- $(1,1)$ é ponto crítico de f.

- f é crescente em $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$ e é decrescente em $(0, 1)$.
- $(1, 1)$ é mínimo relativo de f.
- f é côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e $(0, 3)$ e é côncava para baixo em $(3, +\infty)$.
- $\left(3, \dfrac{25}{9}\right)$ é ponto de inflexão de f.



14. (a) f é crescente em $(-\infty, -5]$, $[-4, 0)$ e $(0, +\infty)$ e onde é decrescente em $[-5, -4]$.

    (b) a reta tangente ao gráfico de f é horizontal em $x = -4$ e $x = -\dfrac{3}{2}$.

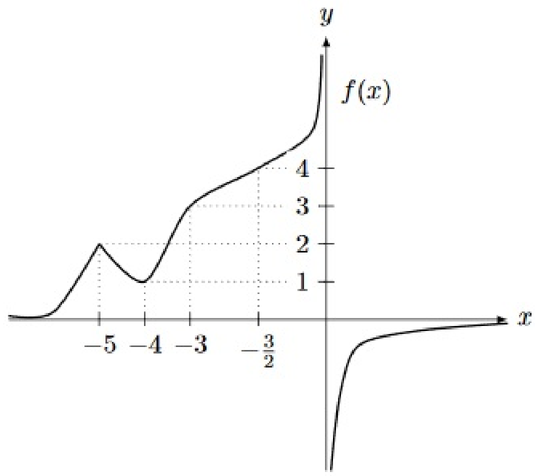
    (c) $(-5, 2)$ é ponto de máximo relativo de f e $(-4, 1)$ é ponto de mínimo relativo de f.

    (d) f é côncava para cima em $(-\infty, -5)$, $(-5, -3)$ e $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$ e é côncava para baixo em $\left(-3, -\dfrac{3}{2}\right)$ e $(0, +\infty)$.

    (e) $(-3, 3)$ e $\left(-\dfrac{3}{2}, 4\right)$ são pontos de inflexão de f.

    (f) $x = 0$ é assíntota vertical e $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

    (g)



15. **Sugestão:** Aplique os teoremas do valor intermediário e de Rolle.

16. **Sugestão:** Aplique o teorema do valor médio.

17. **Sugestão:** Aplique o teorema do valor médio.

18.

19. O trânsito é mais rápido às 14 horas e é mais lento às 17 horas.

20. O percurso mais econômico é estender o fio $1800\,m$ por terra e o restante por água.

21. O maior rendimento é de $R\$\,125.000,00$.

22. $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}\right)$ e $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}\right)$ são os pontos sobre a curva $y = x^2$ mais próximos do ponto $P = (0, 2)$.

23. O retângulo de maior área que pode ser inscrito no círculo de raio 3 é o quadrado de lado $3\sqrt{2}$.

24. Os quadrados a serem recortados devem ter $2cm$ de lado para que o volume da caixa seja o maior possível.

25. **Correção no enunciado:** volume fixo

    A quantidade de material utilizada na fabricação da lata será mínima quando a razão entre a altura e o raio da base for 2.