

Séries

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2019

26 e 29 de Agosto de 2019

A soma dos termos de uma **sequência** $\{a_n\}$ é denominado **série** e é denotado por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\sum a_n$.

Podemos nos equivocar ao tentar calcular a soma de forma usual. Veja o exemplo abaixo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots & = -1 \\ (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots & = 0 \end{cases}$$

Somas Parciais:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, s_n = \sum_{i=1}^n a_i, \dots$$

Essas somas formam um sequência (s_n) que pode ou não possuir um limite. Cada s_n é chamado **soma parcial de ordem n** e os termos a_n são chamados os **termos da série**.

Definição 1

A série $\sum a_n$ é dita **convergente** se a sequência (s_n) for **convergente**. Caso contrário a série é dita **divergente**.

Se a sequência $(s_n) \rightarrow L$ dizemos que a série $\sum a_n$ converge e sua soma é L .

Notação: $\sum a_n = L$.

Note que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)$.

Exemplos: 1) Faça um estudo sobre a convergência das séries abaixo. Para as convergentes determine sua soma.

(a) **Série Geométrica:** $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, $a \neq 0$, r é chamado **razão** da série;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 5(-2/3)^{n-1}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 8^{n+1}$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n;$

(f) **Série Telescópica:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$

(g) **Série Harmônica:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

2) Escreva o número $2,3\overline{17} = 2,3171717\dots$ como uma razão de números inteiros.

Teorema: Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Teste da Divergência: Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existe, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo: Mostre que as séries abaixo divergem.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/n};$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1/n}.$

Teorema 1: Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes, ou seja, $\sum a_n = L$ e $\sum b_n = R$ e $c \in \mathbb{R}$. Então:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cL;$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = L \pm R.$$

Exemplo: Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$.

Teorema 2: Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries que diferem apenas pelo seus m primeiros termos (isto é, $a_k = b_k$ se $k > m$), então ambas convergem ou ambas divergem.

Exemplo: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$ diverge ou converge?

Teorema 3: Se $\sum a_n$ diverge e $\sum b_n$ converge, então $\sum ca_n$, $c \in \mathbb{R}^*$ e $\sum(a_n + b_n)$ divergem.

Exemplo: A série $\sum \left(\frac{1}{10n} + \frac{2}{3^n} \right)$ diverge ou converge?

OBS: Se ambas $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem, então não se pode afirmar nada sobre $\sum(a_n + b_n)$. Por exemplo tome $a_n = -b_n$ fazendo $b_n = n$.

Teste da Integral: Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, suponhamos que exista uma função $f(x) > 0$, contínua e decrescente em $[1, \infty)$ tal que $f(n) = a_n$. Então

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e só se, $\int_1^{\infty} f(x) dx$ é convergente.

Exemplos: 1) Verifique se as séries abaixo são convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$

(c) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2};$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1};$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

2) **Série Hiper-Harmônica:** Estude a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}.$$

Teste da Comparação: Considere as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, tais que $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Então

- (i) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente e $a_n \leq b_n, \forall n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente;
- (ii) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente e $b_n \leq a_n, \forall n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplos: Verifique se as séries abaixo são convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1};$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5^n + 2};$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{3n^3 + 5n + 3};$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!};$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Teste da Comparação por Limite: Considere as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, tais que $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Então

- (i) se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, então ambas convergem ou ambas divergem;
- (ii) se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge;
- (iii) se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e se $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

Exemplos: Verifique se as séries abaixo são convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{n^5 + 5}}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.