EDO III

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE

Aulas de MAT 147 - 2019

06 e 11 de junho de 2019

Considere a EDO linear, de 2ª ordem, não homogênea, com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x), \tag{1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $g(x)$ é uma função polinomial, $sen\beta x$, $\cos\beta x$, $e^{\beta x}$ ($\beta \in \mathbb{R}$), ou combinações de somas e produtos envolvendo tais funções. A solução geral de (1) é dada por

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x),$$

onde y_c é a solução geral da EDO homogênea associada (chamada **solução complementar**) $ay'' + by' + cy = 0$ e y_p é uma solução particular de (1).

1º Caso: $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Neste caso, deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^s(A_0 + \cdots + A_n x^n),$$

onde s **é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de** $y_p(x)$ **seja solução da EDO homogênea associada**. Os coeficientes $A_0, \ldots, A_n$ devem ser determinados.

Exemplo: Determine a solução geral da EDO $y'' + y' = 2 + x^2$.

2^{o} **Caso**: $g(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)e^{ax}$, $a_0, \ldots, a_n, a \in \mathbb{R}$.
Neste caso, deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^s(A_0 + \cdots + A_n x^n x)e^{ax},$$

onde s **é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de** $y_p(x)$ **seja solução da EDO homogênea associada**. Os coeficientes $A_0, \ldots, A_n$ devem ser determinados.

Exemplo: Determine a solução geral da EDO
$y'' + 2y' + y = (2 + x)e^{-x}$.

$3^{\mathbf{o}}$ **Caso**: $g(x) = (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)e^{ax}\cos bx + (\sum_{i=0}^{m} b_i x^i)e^{ax} sen bx$, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m, a, b \in \mathbb{R}$.
Neste caso, deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^s[(A_0 + \cdots + A_q x^q)e^{ax}\cos bx + (B_0 + \cdots + B_q x^q)e^{ax} sen bx],$$

onde $q = \text{máx}\{n, m\}$ e s **é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de** $y_p(x)$ **seja solução da EDO homogênea associada**. Os coeficientes $A_0, \ldots, A_q, B_0, \ldots, B_q$ devem ser determinados.

Exemplo: Determine a solução geral da EDO
$y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x$.

Exercícios: Determine a solução das EDO's e dos PVI's abaixo.

(a) $y'' + 5y' + 6y = xe^{-5x}$;

(b) $y'' + 4y = 2sen(2x) + x$;

(c) $y'' + 2y = e^x + 2$;

(d) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{-x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$;

(e) $y'' + 2y' + y = 3sen(2x)$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Esse método funciona para qualquer EDO do tipo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{2}$$

para a qual se conheça duas soluções fundamentais $y_1(x), y_2(x)$ da EDO homogênea associada. Neste caso, $y_c(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ é solução complementar. Procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x), \tag{3}$$

com a condição que

$$y_p'(x) = A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x),$$

ou equivalentemente

$$A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0. \tag{4}$$

Substituindo $y_p(x), y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na EDO (2) obtemos

$$A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x), \tag{5}$$

e portanto temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) & = & 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) & = & f(x) \end{cases}$$

cuja solução é

$$A(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}\,dx \text{ e } B(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}\,dx.$$

Assim, a solução geral da EDO (2) é

$$\begin{aligned} y(x) &= Ay_1(x) + By_2(x) - y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}\,dx \\ &\quad + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}\,dx \end{aligned}$$

Exemplo: Determine a solução geral das EDO's $y'' + y = \sec x$ e $y'' + y = cossecx$.

Exercícios: Determine a solução geral das EDO's.

(a) $y'' - 2y' + y = e^x/x$;

(b) $y''' - 3y'' + 2y' = e^x/(1 + e^{-x})$;

(c) $y'' - 4y' + 3y = e^x/(1 + e^x)$;;

(d) $y'' - 2y' + y = e^x/x^3$;

(e) $y'' + 4y = 4\sec^2(2x)$.