# Sequências

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2020

12 e 17 de março de 2020

## Definição 1

Uma **sequência** ou uma **sucessão** é uma função onde o domínio é $\mathbb{N}$, ou seja, $f : \mathbb{N} \to C$, onde $C$ pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Neste curso estudaremos apenas as sequências cujo o contra-domínio é $\mathbb{R}$.

*Exemplos*:

$$0; 1; 2; 3; \ldots n; \ldots \text{ ou } \frac{1}{\ln 2}; \frac{1}{\ln 3}, \ldots; \frac{1}{\ln n}; \ldots$$

*Notação*:

$a_1; a_2; a_3; \ldots a_n; \ldots$ que pode ser representado por $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ou simplesmente por $\{a_n\}$ ou $(a_n)$;

Uma sequência também pode ser definida por uma fórmula de recorrência. Por exemplo a **sequência de Fibonacci**: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$. Os primeiros termos são: $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \ldots$.

## Definição 2

(i) Dada uma sequência $(a_n)$, dizemos que o número $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $(a_n)$ e escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ou $(a_n) \to L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N$ tal que se $n > N$, então $|a_n - L| < \epsilon$;

(ii) Dada uma sequência $(a_n)$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $(a_n) \to \infty$ se para cada número positivo $M$ existe um inteiro $N$ tal que se $n > N$, então $a_n > M$.

*OBS*: Se a sequência $(a_n)$ tem limite $L$, dizemos que ela é **convergente** e que converge para $L$. Caso contrário, dizemos que ela **diverge**.

*Prove usando a definição que:*

(a) $\left(\dfrac{1}{n}\right) \to 0$;

(b) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \to 1$.

**Propriedades das Sequências**: Sejam $(a_n), (b_n)$ duas sequências convergentes, isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$;

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n = L_1/L_2, L_2 \neq 0$;

(iv) $\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = k \cdot L_1, k \in \mathbb{R}$;

(v) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = (\lim_{n\to\infty} a_n)^p = L_1^p$, se $p > 0$ e $L_1 > 0$;

*Exemplo*: Prove que $\left(\dfrac{n^2}{2n+1}\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{n}\right)$ é convergente e determine seu limite.

**Teorema da Substituição**: Seja $f$ uma função tal que $f(n) = a_n$, quando $n \in \mathbb{N}$. Então

(i) Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, com $L \in \mathbb{R}, L = \infty$ ou $L = -\infty$;

(ii) Se $f$ é crescente, então $(a_n)$ é crescente (lembre-se que a sequência é uma função);

(iii) Se $f$ é decrescente, então $(a_n)$ é decrescente.

*Exemplos*

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0, r > 0$, pois $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0, r > 0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ n}{n} = 0$, pois $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ x}{x} = 0$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, pois $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

(d) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, pois $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$;

**Teorema do Confronto**: Se $a_n \leq b_n \leq c_n$, para $n > n_0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

*Exemplo*: A sequência $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ é convergente?

**Teorema**: Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Exemplo*: Podemos usar esse teorema para provar que a sequência $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ é convergente.

**Teorema**: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e se a função $f$ for contínua em $L$, então $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$.

*Exemplos*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{\pi}{n}) = \cos(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}) = \cos 0 = 1$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}+1} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)} = \sqrt{1} = 1$.