EDO II

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2019

16, 21 e 23 de maio de 2019

Considere a EDO homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

Teorema (Princípio da Superposição): Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de (2), então

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, também é solução de (2). Vamos chamar a solução $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ de solução geral da EDO.
Exemplo: Determine a solução geral da EDO $y'' - 2y' - 15y = 0$.

Teorema (D'Alembert): Sejam $y_1(x)$ uma solução, não nula, da EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

então a substituição $y(x) = v(x)y_1(x)$ transforma a EDO (2) em uma EDO linear homogênea de ordem 1 para $v' = \dfrac{dv}{dx}$. Além disso, se $v_1(x)$ é uma solução, não nula, dessa EDO de ordem 1, então $v_1(x)y_1(x)$ é outra solução de (2). Assim, toda solução de (2) é da forma $y(x) = Av_1(x) + Bv_1(x)y_1(x)$, com $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Verifique que $y_1(x) = x$ é solução da EDO $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ e depois determine a solução geral da EDO.

2º **Caso**: As raízes r_1 e r_2 da equação $ar^2 + br + c = 0$ são reais e iguais, ou seja, $r_1 = r_2 = r$.
Neste caso, $y_1(x) = e^{rx}$ e $y_2(x) = v(x)e^{rx}$ são soluções da EDO $ay'' + by' + cy = 0$ e portando qualquer solução da EDO é da forma $y(x) = Ae^{rx} + Bv(x)e^{rx}$, com $A, B \in \mathbb{R}$.
Exemplo: Determine a solução geral da EDO $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

3^{o} **Caso**: As raizes r_1 e r_2 da equação $ar^2 + br + c = 0$ são complexas conjugadas, ou seja, $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_2 = \alpha - \beta i$.
Neste caso, $\tilde{y}_1(x) = e^{(\alpha+\beta i)x}$ e $\tilde{y}_2(x) = e^{(\alpha-\beta i)x}$ são soluções da EDO $ay'' + by' + cy = 0$ (só que são complexas). Usando alguns argumentos algébricos podemos mostrar que $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x} sen\beta x$ são soluções da EDO e portando qualquer solução da EDO é da forma $y(x) = Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x} sen\beta x$, com $A, B \in \mathbb{R}$.
Exemplo: Determine a solução geral da EDO $y'' + 2y' + 5y = 0$.
Exercício: Determine a solução geral da EDO $y'' + b^2 y = 0$, com $b \in \mathbb{R}$.

Definição 1

Um problema de valor inicial (PVI) é uma EDO com uma condição inicial, ou seja,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$$

Exemplo: Determine a solução do PVI's abaixo.

(a) $y'' + y' - 2y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2;$

(b) $6y'' - 5y' + y = 0,\ y(0) = 4, y'(0) = 0;$

(c) $y'' + 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = -1;$

(d) $y'' + 8y' - 9y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0;$

(e) $y'' + y' - 6y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Teorema 1

O PVI

$$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x),\ y(x_0) = y_0 \text{ e } y'(x_0) = y'_0, \qquad (3)$$

para $p(x), q(x)$ *e* $f(x)$ *contínuas em um intervalo aberto* I *contendo* x_0, *tem única solução em* I.

Considere o PVI:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \qquad (4)$$

em que y_0 e y_0' são condições iniciais dadas no problema.
Teorema: Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da EDO (2) tais que, em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o PVI (4) tem uma única solução $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$.

Definição 2

(1) O determinante

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix}$$

é chamado **Wronskiano** das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ em x_0.

(2) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de (2) tais que $W[y_1, y_2] \neq 0$ em $x_0 \in \mathbb{R}$, então essas soluções são chamadas **soluções fundamentais**.

(3) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais de (2), então a família de soluções $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, com $A, B \in \mathbb{R}$, é chamada **solução geral de** (2). Duas soluções satisfazendo (2) e (3) formam um **conjunto fundamental de soluções**.

Exemplo: Determine se conjunto formado pelas soluções das EDO's abaixo formam um conjunto fundamental de soluções.

(a) $y'' + y' - 2y = 0$;

(b) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

(c) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

(d) $y'' + 8y' - 9y = 0$;

(e) $y'' + y' - 6y = 0$.

Exercícios: (1) Determine o Wronskiano de cada par de funções abaixo.

(a) $e^{2x}, e^{-3x/2}$;

(b) e^{-2x}, xe^{-2x};

(c) $e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos\, x$;

(d) $\cos^2 x, 1 + \cos\, 2x$;

(2) Determine se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções das EDO's e se elas formam um conjunto fundamental de soluções.

(a) $y'' + 4y = 0; y_1(x) = \cos\, 2x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} 2x$;

(b) $y'' - 2y' + y = 0; y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^x$;

(c) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0; x > 0; y_1(x) = x$ e $y_2(x) = xe^x$;

(d) $(1 - x \operatorname{cotg} x)y'' - xy' + y = 0; 0 < x < \pi; y_1(x) = x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} x$.