Regra de L'Hôpital

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2019

03 de março de 2020

As formas indeterminadas são as seguintes:
$0/0, \pm\infty/\pm\infty, 0\cdot(\pm\infty), \infty-\infty, 0^0, (\pm\infty)^0$ e $1^{\pm\infty}$. As últimas 5, para serem resolvidas, devem ser transformadas nas duas primeiras.
Exemplos de Formas indeterminadas:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-2^x}$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{x^3}{e^x}$;

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$;

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Regra de L'Hôpital I: Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em $a \in I$.Suponha que para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$. Então se $\lim_{x\to a} f(x) = 0\ (\pm\infty)$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0\ (\pm\infty)$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, segue que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Obs:

(i) A regra continua valendo se em a forem considerados limites laterais à esquerda ou à direita;

(ii) A regra continua valendo se trocarmos L por $\pm\infty$;

(iii) A regra pode ser aplicada várias vezes.

Regra de L'Hôpital II: Sejam f e g funções diferenciáveis para todo $x > n$, $n \in \mathbb{R}_+^*$. Suponha que para todo $x > n$, $g'(x) \neq 0$. Então se $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\ (\pm\infty)$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0\ (\pm\infty)$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, segue que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Obs:

(i) A regra continua valendo se trocarmos $x \to \infty$ por $x \to -\infty$;

(ii) A regra continua valendo se trocarmos L por $\pm\infty$;

(iii) A regra pode ser aplicada várias vezes.