Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Lista da Unidade II de MAT 147 - Cálculo II

2020-4

1. Determine o intervalo e o raio de convergência das séries de potências a seguir:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{\sqrt{3n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-2)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n^{3/2}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x^n}{n!}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{n-1}}{n^2}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}x^{2n}}{n+3}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3}(x-2)^n$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$

2. Classifique (V) ou (F), justificando as suas respostas:

(a) ( ) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ é convergente, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente no intervalo $[-1,1]$.

(b) ( ) Uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pode convergir em apenas dois valores $x \in \mathbb{R}$.

(c) ( ) Se uma série de potências é absolutamente convergente em um dos extremos de seu intervalo de convergência, então ela também converge absolutamente no outro extremo.

(d) ( ) Se uma série de potências converge em um extremo de seu intervalo de convergência e diverge no outro, então a convergência naquele extremo é condicional.

(e) ( ) Se $R > 0$ é o raio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, então $\sqrt{R}$ é o raio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$.

(f) ( ) Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 0$ então o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ é $\frac{1}{L}$.

(g) ( ) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ tem raio de convergência R, então as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ também têm raio de convergência R.

3. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x-2)^n$.

   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Calcule $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
   (c) Escreva a série de potências que define a função f'.
   (d) Encontre o domínio de f'.

4. Obtenha uma representação em série de potências para as funções:

   (a) $y = e^{-x}$
   (b) $y = \ln(x+1)$
   (c) $y = \text{arctg} x$

5. Ache uma representação em série de potências em torno de a, dado abaixo, para as funções a seguir e determine o intervalo de convergência:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$
   (b) $f(x) = \ln(x+1)$, $a = 1$
   (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$
   (d) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$, $a = 0$
   (e) $f(x) = \text{sen}^2 x$, $a = 0$
   (f) $f(x) = 2^x$, $a = 0$

6. Ache uma representação em série de potências para a integral dada e determine o seu raio de convergência:

   (a) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$
   (b) $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt$
   (c) $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+4} dt$
   (d) $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t) dt$

7. (a) Ache uma série de potência para xe^x, e integre a série resultante termo a termo de 0 a 1.
   (b) Use o resultado do item (a) para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$.

8. (a) Utilize a série de potências de $g(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, para determinar uma representação em série de potências para $f(x) = \frac{x^2}{(1-x^3)^2}$, e determine o raio de convergência.
   (b) Use o resultado do item (a) para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{3n-1}}{2^{3n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

9. Calcule a solução geral das seguintes equações lineares:

   (a) $ty' - y = (t-1)e^t$
   (b) $ty' - y = t\cos t - \text{sen} t$
   (c) $y' + 3y = t + e^{-2t}$
   (d) $ty' + 2y = \text{sen} t$
   (e) $2y' + y = 3t^2$

10. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y' - y = 2te^{2t}$, $y(0) = 1$

(b) $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$

(c) $ty' + 2y = \text{sen}t$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

11. Resolva as seguintes equações, explicitando a solução (quando possível):

(a) $y' = \frac{t^2}{y(1+t^3)}$

(b) $y' + y^2\text{sen}t = 0$

(c) $y' = (\cos^2 t)(\cos^2 2y)$

(d) $\frac{dy}{dt} = \frac{t-e^{-t}}{y+e^y}$

(e) $3e^x \tan y dx + (1-e^x)\sec^2 y dy = 0$

12. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $tdt + ye^{-t}dy = 0$, $y(0) = 1$

(b) $y' = ty^3(1+t^2)^{-1/2}$, $y(0) = 1$

(c) $y' = \frac{e^{-x}-e^x}{3+4y}$, $y(0) = 1$

(d) $\text{sen}2xdx + \cos 3ydy = 0$, $y(\pi/2) = \pi/3$

13. Calcule a solução geral das seguintes equações:

(a) $2t\frac{dy}{dt} + 2y = ty^3$

(b) $yy' + y^2 \tan t = \cos^2 t$

(c) $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$

(d) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x-2}y = 5(x-2)\sqrt{y}$

14. Leia com atenção as afirmações:

(I) Ao derivarmos uma série de potências seu raio de convergência pode mudar;

(II) Ao derivarmos uma série de potências seu intervalo de convergência pode mudar;

(III) Ao integrarmos uma série de potências seu raio de convergência permanece o mesmo, mas seu intervalo de convergência pode mudar.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

15. Leia com atenção as afirmações:

(I) A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{2^n(n+1)}$ converge para $x = -2$;

(II) O raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{2^{n+1}}$ é $R = 2$;

(III) A expansão de $\dfrac{1-\cos(3x)}{3x}$, em torno do zero, é $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{3^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n)!}$.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

16. Leia com atenção as afirmações:

(I) A expansão em série de Taylor de $f(x) = 2^x$, em torno de $a = 2$, é $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n (x-2)^n}{n!}$;
(II) A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{3^n}$ converge apenas para $x \in [-1, 5)$;
(III) A expansão de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, em torno do zero, é $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

17. Leia com atenção as afirmações:

(I) A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n5^n}$ converge apenas para $x \in (-3, 7]$;

(II) A expansão em série de Taylor de $f(x) = x^2 \cos(4x)$, em torno de zero, é $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{4n} x^{2n+2}}{(2n)!}$;

(III) A representação em séries de potências da função $f(x) = \ln(1 + 2x)$ é $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^n \frac{x^n}{n}$ e seu intervalo de convergência é $(-1/2, 1/2]$.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

18. Leia com atenção as afirmações:

(I) A função $y = \phi(x)$ definida implicitamente por $x^2 + 2y^2 + 1 = ke^{y^2}$, $k \in \mathbb{R}$, é solução da EDO $y' = \dfrac{x}{x^2y + 4y^3}$;

(II) O intervalo de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$ é $(-9, 9]$;

(III) A EDO $y'' + (3 - y)y' + (e^x + 5)y = ye^x - yy'$ é uma EDO homogênea e linear.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

19. Leia com atenção as afirmações:

(I) Se $G(x, y) = 0$ é uma solução implícita de uma EDO de 1^a ordem, então $G(x, y) = c, c \in \mathbb{R}$, também o é;
(II) A EDO $y' + xy = ye^x$ é homogênea, mas não é linear;
(III) Um fator integrante para resolver a EDO $xy' + 3y = e^x$ é $\mu(x) = x^3$.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV