EDO de 1ª Ordem

- **Teorema da Existência e Unidade**

Considere o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$R = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \Big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

R é um retângulo que contém x_0 e y_0

Existência: Se f(x,y) é contínua em R, existe solução y = y(x) definida em J ⊆ ℝ, tal que $x_0 \in$ J.

Unidade: Se δf(x,y) é contínua em R, então a solução é única parta algum intervalo I ⊆ J tal que $x_0 \in$ I.

- **Teorema de Variáveis Separáveis**

$$y' = g(x) \times h(y)$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x)dx, h(y) \neq 0, \forall y$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{h(y)} = \int g(x)dx \Rightarrow H(y) = G(x) + k$$

Aplicar T.E.U se necessário.

- **Fator Integrante**

$$y' = \pm p(x)y = q(x)$$

Encontrar $\mu(x)$ tal que $\mu(x) \cdot (y' + p(x)y) = (\mu(x) \cdot y)' = \mu(x) \cdot q(x)$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

A solução estará em algum intervalo I no qual $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas.

Equação de Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \forall n \in \mathbb{R}^* - \{1\}$$

$$\Rightarrow y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

$$v(x) = y^{1-n} \Rightarrow v' = (1-n)y'y^{-n} \Rightarrow y'y^{-n}\frac{v'}{(1-n)}$$

$$\Rightarrow \frac{v'(x)}{(1-n)} + p(x)v(x) = q(x)$$

EDOs de 2ª Ordem

$$y'' = f(x, y, y')$$

- **Teorema da Existência e Unidade**

Considere o PVI: $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 = h_0 \text{ e } y'(x_o) = y_1 = h_1 \end{cases}$

$p(x), q(x) \text{ e } g(x)$ contínuas em I tal que $x_0 \in I$

- **Teorema - Princípio da Superposição**

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da EDO em um intervalo I, então $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ também é solução no intervalo I.

- **Soluções Fundamentais**

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ funções definidas em um intervalo I. O determinante

$$W(y_1, y_2)_{(x)} = det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

é chamado **Wronskiano** das funções y_1 e y_2 em $x \in I$.

Se y_1 e y_2 são soluções da EDO $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em um intervalo I, tal que $p(x)$ e $q(x)$ sejam contínuas em I, e $W(y_1, y_2)_{(x)} \neq 0$, para $x \in I$, então y_1 e y_2 são soluções da EDO no intervalo I.

- **Teorema**

Se y_1 e y_2 são soluções fundamentais de uma EDO em um intervalo I, então a família $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2$ é solução da EDO em $I, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- **Redução de ordem**

Sejam a EDO $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ linear e homogênea. Se $y_1(x)$ é solução da EDO no intervalo I e $y_1(x) \neq 0, \forall x \in I$, então $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ é solução no intervalo I e $W(y_1, y_2)_{(x)} \neq 0, \forall x \in I$.

$$v(x) = \int e^{-\int p(x)dx}/y_1(x)^2dx$$

Como achar $v(x)$? Substitua y_2, y_2' e y_2'' na EDO. Ficará apenas com $v''(x)$ e $v'(x)$. Faça $w(x) = v'(x)$ e encontre $w(x)$. De $w(x)$, encontre $v(x)$.

- **Coeficientes constantes**

$$ay'' + by' + cy = 0, \;\; a, b, c \in \mathbb{R}, \neq 0$$

$y(x) = e^{rx}$ é solução se, e somente se, $ar^2 + br + c = 0$.
$ar^2 + br + c = 0$ é chamada equação característica da EDO.

1° Caso: $\Delta > 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$

$y_1(x) = e^{r_1x}$ e $y_2(x) = e^{r_2x}$ serão soluções fundamentais da EDO em $I = \mathbb{R}$, pois $W(y_1, y_2)_{(x)} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, se $\Delta > 0$.

Assim, a solução geral é

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}, x \in \mathbb{R}$$

2° Caso: $\Delta = 0 \Rightarrow r = r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a}$

$y_1(x) = e^{rx} = e^{-\frac{b}{2a}x}, x \in \mathbb{R}$

Por redução de ordem, $y_2(x) = v(x) \cdot y_1(x) = v(x)e^{rx}$.

Substituindo y_2, y_2' e y_2'' na EDO, encontramos que $v(x) = Ax + B, x \in \mathbb{R}$ e A, B constantes.

Fazendo $A = 1$ e $B = 0$, teremos que $y_2(x) = xe^{rx}$ e $w(y_1, y_2)_{(x)} = e^{2rx} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Assim, $y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}, x \in \mathbb{R}$.

3° Caso: $\Delta < 0 \Rightarrow r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_2 = \alpha - \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$

Como no 1° caso, $r_1 \neq r_2$, e assim, $y_1(x) = e^{(\alpha+\beta i)x}$ e $y_2(x) = e^{(\alpha-\beta i)x},\ x \in \mathbb{R}$, são soluções fundamentais da EDO.

Aplicando a Fórmula de Euler, descobrimos que $y_1(x) = e^{\alpha x} cos\beta x$ e $y_2(x) = e^{\alpha x} sen\beta x,\ x \in \mathbb{R}$, são soluções fundamentais reais da EDO, pois $W(y_1, y_2)_{(x)} = \beta e^{2\alpha x}$, a solução geral é $y(x) = c_1 e^{\alpha x} cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} sen\beta x,\ x \in \mathbb{R} = I$.

- **Equações não homogêneas:**

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

A solução geral da EDO é dada na forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x),\ x \in I$

sendo $p(x), q(x)$ e $f(x)$ contínuas em I, $y_h(x)$ solução geral da equação homogênea associada à EDO (1): $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ x \in I$

e $y_p(x)$, chamada solução particular, uma solução da EDO não homogênea (1), no intervalo I.

- **Método de Variação dos Parâmetros**

Seja $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),\ x \in I$. $y_p(x)$ é da forma $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x),\ x \in I$.

Para encontrar $u(x)$ e $v(x)$, devemos substituir $y_p(x), y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na EDO não homogênea. Em seguida, supõe-se que $u'y_1 + v'y_2 = 0$ e chegamos em $u'y_1 + v'y_2 = f(x)$.

Resolvemos o sistema composto por essas duas equações e, assim, descobrimos u' e v'.

- **Método dos coeficientes indeterminados**

Encontrar $y_p(x)$ de EDOs da forma
$ay'' + by' + cy = f(x), \;\; a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$,
na qual $f(x)$ é uma função

- Polinomial: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$
- Exponencial: $f(x) = e^{rx}$
- Trigonométrica: $f(x) = sen(kx)$ ou $f(x) = cos(kx), \;\; k \in \mathbb{R}$
- de somas e produtos finitos das equações acima:

$$f(x)$$
$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 x^0, a_i \in \mathbb{R}$$
$$e^{rx}, r \in \mathbb{R}$$
$senkx$ ou $coskx$ ou $senkx + coskx, k \in \mathbb{R}$

$$y_p(x)$$
$$x^s(A_n x^n + \cdots + A_0)$$
$$x^s(A_n x^n + \cdots + A_0)e^{rx}$$
$$x^s(A \cdot coskx + B \cdot senkx)$$
$$x^s[(A_q x^q + \cdots + A_0)e^{rx}coskx + (B_q x^q + \cdots + B_0)e^{rx}senkx]$$
$$q = max\,\{n, m\}$$

s é o menor inteiro que elimina repetição de soluções entre $y_h(x)$ e $y_p(x)$.