TRANSFORMADA DE LAPLACE E PVI

por
Abílio Lemos

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática-CCE
Aulas de MAT 147 - 2019

13 e 18 de junho de 2019

Definição 1

Seja f uma função definida para todo $t \geq 0$. A **transformada de Laplace** de f , denotada por $L[f(t)]$, é dada por

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

sempre que a integral imprópria for convergente.

Notação: $L[f(t)] = F(s)$.

Exemplo: Determine a $L[f(t)]$ nos seguinte casos:

(a) $f(t) = 1, t \geq 0$;

(b) $f(t) = e^{at}, t \geq 0$.

Teorema 1

Suponha que f seja contínua ou possuia apenas descontinuidades tipo salto no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$ e que existam constantes $K > 0$, $M > 0$ e a tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para todo $t \geq M$. Então a transformada de Laplace de f existe para todo $s > a$.

Exemplo: Determine $F(s), s > 0$, onde $f(t) = \cos at$, $t > 0$.
Exercício: Determine $F(s), s > 0$, onde $f(t) = sen\, at$, $t > 0$.
Resposta: $L[sen\, at] = F(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

Vamos listar 3 propriedades da transformada de Laplace.

(1) $L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)]$;

(2) $L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$, $s > a$;

(3) $L[f''(t)] = s^2 L[f(t)] - sf(0) - f'(0)$, $s > a$;

(4) $L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \cdots - f^{(n-1)}(0)$, $s > a$.

A propriedade (1) nos diz que a transformada de Laplace é um **operador linear**.

Exemplo: Determine $L[f(t)]$, onde $f(t) = \cosh at$, $t > 0$.

Exercício: Determine $L[f(t)]$, onde $f(t) = t sen\, at$, $t > 0$.

Resposta: $L[t sen\, at] = F(s) = \dfrac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$, $s > a$.

Exercício: Determine $L[f(t)]$, onde $f(t) = senh\, at$, $t > 0$.

Resposta: $L[senh\, at] = F(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$, $s > |a|$.

Exemplo: Determine $L[f(t)]$ nos seguinte casos:

(a) $f(t) = t^n, t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$;

(b) $f(t) = e^{bt} \cos at, t \geq 0$;

(c) $f(t) = e^{bt} sen\, at, t \geq 0$;

(d) $f(t) = t^n e^{at}, t \geq 0$.

Respostas:

(a) $L[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$;

(b) $L[e^{bt} \cos at] = \dfrac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}, s > b$;

(c) $L[e^{bt} sen\, at] = \dfrac{a}{(s-b)^2 + a^2}, s > b$;

(d) $L[t^n e^{at}] = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$.

Para provarmos os itens $(b), (c)$ e (d) acima podemos usar o **Teorema do Deslocamento** abaixo.

Teorema 2

Seja $a \in \mathbb{R}$. Se a transformada de Laplace da função $f(t), t \geq 0$ é $F(s)$, para $s > c$, então a transformada de Laplace da função $g(t) = e^{at}f(t)$ é

$$G(s) = F(s-a), para\ s > a + c$$

Uma importante propriedade que deve ser destacada é que a **transformada de Laplace inversa** é também um **operador linear**. Noutras palavras,

$$L^{-1}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L^{-1}[f_1(t)] + c_2 L^{-1}[f_2(t)]$$

Exemplo: Determine $f(t)$ nos seguinte casos:

(a) $L[f(t)] = F(s) = \dfrac{2s-3}{s^2+2s+10}$;

(b) $L[f(t)] = F(s) = \dfrac{s+3}{s^2-3s+2}$;

(c) $L[f(t)] = F(s) = \dfrac{2s+3}{(s+1)^2}$.

Respostas:

(a) $f(t) = 2e^{-t}\cos(3t) - \dfrac{5}{3}e^{-t}sen(3t)$;

(b) $f(t) = -4e^{t} + 5e^{2t}$;

(c) $f(t) = (2+t)e^{-t}$.

A ideia no uso da transformada de Laplace para a resolução de problemas de valor inicial é a seguinte:

(i) Aplique a transformada de Laplace à equação diferencial e use suas propriedades para transformar a equação diferencial em outro problema (mais simples) envolvendo a função $F(s) = L[y(t)]$;

(ii) Resolva esse problema, encontrando a função F;

(iii) Recupere a função desejada $y = f(t)$ de sua transformada F, **invertendo a transformada**, $f(t) = L^{-1}[F(s)]$.

Exemplo: Use transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial (PVI) dado.

(a) $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}, y(0) = 2, y'(0) = 1;$

(b) $y'' + \omega^2 y = \cos(2t), \omega^2 \neq 4, y(0) = 1, y'(0) = 0;$

(c) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos(2t), y(0) = 1, y'(0) = 0;$

(d) $y^{iv} - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0.$

Respostas:

(a) $y(t) = (2t^2 + 3t + 2)e^{-t};$

(b) $y(t) = \dfrac{1}{4-\omega^2}\left[(5-\omega^2)\cos(\omega t) - \cos(2t)\right];$

(c) $y(t) = e^{-t}\left[(t + 1/2)sen(2t) + \cos(2t)\right];$

(c) $y(t) = \dfrac{\cosh\ t + \cos\ t}{2};$