UFV - Universidade Federal de Viçosa

CCE - Departamento de Matemática

2^a Lista de exercícios de MAT 147 - Cálculo II

2019-II

1. Determine o intervalo e o raio de convergência das séries de potências a seguir:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}(x-1)^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{\sqrt{3n}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-2)^n$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n^{3/2}}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x^n}{n!}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$

(r) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{n-1}}{n^2}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}x^{2n}}{n+3}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n (x-3)^n$

(w) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n$

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3}(x-2)^n$

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$

2. Classifique (V) ou (F), justificando as suas respostas:

(a) ( ) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ é convergente, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente no intervalo $[-1,1]$.

(b) ( ) Uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pode convegir em apenas dois valores $x \in \mathbb{R}$.

(c) ( ) Se uma série de potências é absolutamente convergente em um dos extremos de seu intervalo de convergência, então ela também converge absolutamente no outro extremo.

(d) ( ) Se uma série de potências converge em um extremo de seu intervalo de convergência e diverge no outro, então a convergência naquele extremo é condicional.

(e) ( ) Se $R > 0$ é o raio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, então $\sqrt{R}$ é o raio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$.

(f) ( ) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 0$ então o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ é $\frac{1}{L}$.

(g) ( ) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ tem raio de convergência R, então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ também têm raio de convergência R.

3. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(x-2)^n$.

   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Calcule $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
   (c) Escreva a série de potências que define a função f'.
   (d) Encontre o domínio de f'.

4. Seja f a função definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + ... + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + ...$$

   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Escreva a série de potências que define a função f' e determine o domínio de f'.

5. Obtenha uma série de potências que represente a função $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

6. Considere a função $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

   (a) Encontre a série de potências para a derivada f' e o raio de convergência.
   (b) Integre termo a termo a série do item (a) para calcular a soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

7. Obtenha uma representação em série de potências para as funções:

   (a) $y = e^{-x}$
   (b) $y = \ln(x+1)$
   (c) $y = \text{arctg} x$

8. Ache uma representação em série de potências em torno de a, dado abaixo, para as funções a seguir e determine o intervalo de convergência:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$
   (b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $a = 0$
   (c) $f(x) = \ln(x+1)$, $a = 1$
   (d) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$
   (e) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$, $a = 0$
   (f) $f(x) = \text{sen}^2 x$, $a = 0$
   (g) $f(x) = 2^x$, $a = 0$
   (h) $f(x) = 4x^4 - 15x^3 + 20x^2 - 10x + 14$, $a = -1$

9. Ache uma representação em série de potências para a integral dada e determine o seu raio de convergência:

(a) $\int_0^x e^{-t^2} dt$

(b) $\int_0^x e^t dt$

(c) $\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt$

(d) $\int_2^x \frac{dt}{4-t} dt$

(e) $\int_0^x \frac{dt}{t^2+4} dt$

(f) $\int_0^x \ln(1+t) dt$

10. (a) Ache uma série de potência para xe^x, e integre a série resultante termo a termo de 0 a 1.

    (b) Use o resultado do item (a) para mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$.

11. (a) Utilize a série de potências de $g(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, para determinar uma representação em série de potências para $f(x) = \frac{x^2}{(1-x^3)^2}$, e determine o raio de convergência.

    (b) Use o resultado do item (a) para mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{3n-1}}{2^{3n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

12. Use a série binomial para encontrar a série de Taylor, para as funções dadas à seguir e calcule seu raio de convergência.

    (a) $f(x) = \sqrt{1+x}$

    (b) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$

13. Calcule o valor da quantidade dada com três casas decimais de precisão, usando uma série binomial.

    (a) $\sqrt{24}$

    (b) $\sqrt[3]{66}$

14. Calcule a solução geral das seguintes equações lineares:

    (a) $ty' - 2y = -t$

    (b) $ty' - y = (t-1)e^t$

    (c) $y' + \frac{1}{t}y = \frac{1+t}{t}e^t$

    (d) $ty' - y = t\cos t - \text{sen}t$

    (e) $y' + 3y = t + e^{-2t}$

    (f) $y' - 2y = t^2e^{2t}$

    (g) $ty' + 2y = \text{sen}t$

    (h) $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$

    (i) $2y' + y = 3t^2$

15. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

    (a) $y' - y = 2te^{2t}$, $y(0) = 1$

    (b) $y' + 2y = te^{-2t}$, $y(1) = 0$

    (c) $y' - 2y = e^{2t}$, $y(0) = 2$

    (d) $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$

    (e) $ty' + 2y = \text{sen}t$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

16. Resolva as seguintes equações, explicitando a solução (quando possível):

(a) $y' = \frac{t^2}{y}$
(b) $y' = \frac{t^2}{y(1+t^3)}$
(c) $y' + y^2 \text{sen} t = 0$
(d) $y' = \frac{3t^2-1}{3+2y}$
(e) $y' = (\cos^2 t)(\cos^2 2y)$
(f) $ty' = \sqrt{1-y^2}$
(g) $\frac{dy}{dt} = \frac{t-e^{-t}}{y+e^y}$
(h) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$
(i) $3e^x \tan y dx + (1-e^x) \sec^2 y dy = 0$

17. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $tdt + ye^{-t}dy = 0$, $y(0) = 1$
(b) $y' = \frac{2t}{y+t^2y}$, $y(0) = -2$
(c) $y' = ty^3(1+t^2)^{-1/2}$, $y(0) = 1$
(d) $y' = \frac{2t}{1+2y}$, $y(2) = 0$
(e) $y' = \frac{t(t^2+1)}{4y^3}$, $y(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
(f) $y' = \frac{e^{-x}-e^x}{3+4y}$, $y(0) = 1$
(g) $\text{sen} 2x dx + \cos 3y dy = 0$, $y(\pi/2) = \pi/3$
(h) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, $y(0) = 1$
(i) $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}$, $r(1) = 2$

18. Calcule a solução geral das seguintes equações:

(a) $2t\frac{dy}{dt} + 2y = ty^3$
(b) $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = y^3$
(c) $yy' + y^2 \tan t = \cos^2 t$
(d) $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0$
(e) $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right) dy = 0$
(f) $t^2y' + 2ty - y^3 = 0$
(g) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x-2}y = 5(x-2)\sqrt{y}$
(h) $3\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 2x^4y^4$

19. Calcule a solução geral das seguintes equações homogêneas de coeficientes constantes:

(a) $y'' - 2y' + y = 0$
(b) $y'' + 3y' + 2y = 0$
(c) $4y'' - 4y' - 3y = 0$
(d) $2y'' - 3y' + y = 0$
(e) $y'' + 2y' + 2y = 0$
(f) $y'' - 2y' + 6y = 0$
(g) $16y'' + 24y' + 9y = 0$
(h) $y'' - 2y' + 2y = 0$
(i) $4y'' - 9y = 0$
(j) $y'' - 2y' + 10y = 0$
(k) $y'' + 5y' = 0$
(l) $y'' + 6y' + 13y = 0$
(m) $y'' - 2y' - 2y = 0$
(n) $4y'' + 9y = 0$
(o) $2y'' + 2y' + y = 0$

20. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

(b) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

(d) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$

(e) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = 2$

(f) $9y'' + 6y' + 82y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

(g) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

(h) $y'' + y = 0$, $y(\pi/3) = 2$, $y'(\pi/3) = -4$

(i) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 1$