Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Lista da Unidade I de MAT 147 - Cálculo II

2020-4

1. Determine os limites se existirem:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $(0<a\neq 1)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{\tan x - x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{3x}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln x}}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$, $a\neq 0$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\, e^{1/x}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cot 2x\,\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

2. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\operatorname{sen} t\,dt$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4+x^2}\,dx$

3. Responda se é convergente ou divergente as seguintes integrais impróprias, e justifique.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5+3x+1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^3}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^3+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx$

*(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$

*(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}t^2\,dt$

*(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\operatorname{sen}(at)\,dt$

*(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(at)\,dt$

* Veremos, mais no final do curso, que os itens $(e),(f),(g),(h)$ são as transformadas de Laplace das funções $1, t^2, \sin(at), \cos(at)$, respectivamente.

4. Calcule, se existir, a área das regiões abaixo, limitas pelas curvas y, e pelos intervalos indicados:

   (a) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, de $0 \leq x < 1$

   (b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$, de $0 \leq x < 3$

   (c) $y = \sec^2 x$, de $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

   (d) $y = \dfrac{1}{(x+1)^{2/3}}$, de $-2 \leq x \leq 7$

   (e) $y = \dfrac{x-2}{x^2-5x+4}$, de $2 \leq x < 4$

   (f) $y = \dfrac{1}{1-\cos x}$, de $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

   (g) $y = x^{-4/3}$, de $-1 \leq x \leq 1$

5. Estude a convergência da integral imprópria $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$, onde p é um número real qualquer.

6. Determine uma função f tal que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx$ exista e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ seja divergente.

7. Um circuito elétrico tem uma resistência de R ohms, uma indutância de L henrys e uma força eletromotriz de E volts, onde R, L e E são positivos. Se i ampères for a corrente passando no circuito t segundos depois que foi ligado, então $i = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$. Se t, E e L são constantes, ache $\displaystyle\lim_{R\to0^+} i$

8. Numa progressão geométrica, se a for o primeiro termo, r for a razão comum a dois termos sucessivos e S for a soma dos n primeiros termos, então se $r \neq 1$, $S = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$. Ache o $\displaystyle\lim_{r\to1} S$. O resultado será consistente com a soma dos n primeiros termos se $r = 1$?

9. Dê o termo de ordem n das sequências abaixo e verifique quais sequências convergem. As convergentes, dê o limite. Escreva também o termo de ordem $(n+1)$.

   (a) $(1, 4, 7, 10, ...)$

   (b) $\left(1 + \dfrac{1}{2}, 1 + \dfrac{3}{4}, 1 + \dfrac{7}{8}, \cdots\right)$

   (c) $\left(1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots\right)$

   (d) $\left(2, \dfrac{2^2}{1\cdot2}, \dfrac{2^3}{1\cdot2\cdot3}, \dfrac{2^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}, \dfrac{2^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}, \cdots\right)$

10. Verifique se as sequências abaixo convergem ou divergem. Se convergir, encontre seu limite:

   (a) $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen}^2 n}{n^5+1}$;

   (b) $a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-3}$;

   (c) $a_n = \dfrac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{n^2+1}\right)$;

   (d) $a_n = \ln\sqrt{n^3-n^2}$;

   (e) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$;

   (f) $a_n = n^2\left(1 - \cos\dfrac{a}{n}\right)$, para $a > 0$;

   (g) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, para $a \in \mathbb{R}$.

11. Considere a sequência $a_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^p} dx$.

   (a) Mostre que (a_n) não é limitada se $p \leq 1$.

   (b) Mostre que $a_n \longrightarrow \dfrac{1}{p-1}$ se $p > 1$.

12. Use o teorema da convergência monótona para mostrar que a sequência $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$ é convergente. Em seguida, determine o limite desta sequência.

13. Considere a sequência de termo geral dado por $a_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$. Faça o que se pede:

   (a) Exprima a_{n+1} em função de a_n;

   (b) Mostre que (a_n) é estritamente decrescente;

   (c) Mostre que (a_n) é convergente.

14. Considere a sequência dada por

$$a_1 = 2 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4), n \geq 1.$$

(a) Determine os cinco primeiros termos desta sequência e o 101^o termo.

(b) A sequência é monótona? Justifique!

(c) A sequência é convergente? Justifique!

15. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-n}{2^{n+1}}$ para resolver os itens abaixo.

(a) Encontre os três primeiros termos da sequência das somas parciais.

(b) Determine os números reais A, B que nos permite escrever

$$\frac{1-n}{2^{n+1}} = \frac{n+A}{2^{n+1}} + \frac{B\,n}{2^n}.$$

(c) Ache uma fórmula para a sequência das somas parciais $\{S_n\}$.

(d) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$.

(e) A série converge? Justifique. Caso afirmativo, qual é a sua soma?

16. Justifique as seguintes igualdades:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$

17. Escreva as frações decimais $0,412412412\cdots$ e $0,021343434343\cdots$ como:

(a) uma série infinita;

(b) encontre a soma da série e a escreva como o quociente de dois inteiros.

18. Determine se a série dada converge ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + sen3n}{n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n!}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n^2+n}$.

19. Assinale V ou F, justificando suas respostas:

( ) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

( ) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são divergentes, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n b_n)$ é divergente.

( ) Seja (S_n) a sequência de somas parciais de a_n. Se (S_n) é convergente, então $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

( ) Suponha que $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

( ) Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios com coeficientes inteiros em x, com $q(n) \neq 0$. Se o grau de p for menor que de q, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ converge.

20. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, sendo que:

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \left(\frac{1+\arctan n}{n}\right) \cdot a_n.$$

Determine se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge ou diverge.

21. Verifique se são convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n + 3}{6^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\ln n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n} + 5^{-n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5^n} + n\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{3^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$

22. Se $f(n) \to L$, então prove que $\sum_{n=1}^{+\infty} [f(n) - f(n+1)] = f(1) - L$.

23. Prove que:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k+5^k}{15^k} = \frac{3}{4}$

(b) $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \cdots = \frac{5}{8}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{3^k} = 1$

Sugestão: $2k-1 = 3k-(k+1) \Rightarrow \dfrac{2k-1}{3^k} = \dfrac{k}{3^{k-1}} - \dfrac{k+1}{3^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$

24. Classifique as afirmações abaixo como verdadeira (V) ou falsa (F) dando uma demonstração ou um contra-exemplo.

(a) ( ) Toda sequência limitada é convergente;

(b) ( ) Toda sequência limitada é monótona;

(c) ( ) Toda sequência monótona é limitada;

(d) ( ) Toda sequência divergente é não monótona;

(e) ( ) Toda sequência convergente é monótona;

(f) ( ) Toda sequência divergente é não limitada;

(g) ( ) Se (a_n) e (b_n) são sequências tais que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, então a $(a_n b_n)$ é convergente;

(h) ( ) A sequência (a_n) definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{n a_n}{n+1}$ é convergente;

(i) ( ) Se $a_n \leq b_n,\ \forall\ n$, tal que (b_n) é convergente, então (a_n) é convergente;

(j) ( ) Se $(|a_n|)$ é convergente, então (a_n) é convergente;

(k) ( ) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0,\ \forall\ n$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge;

(l) ( ) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergem, então $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ diverge;

(m) ( ) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=100}^{+\infty} a_n$ converge;

(n) ( ) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergem, então $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n b_n)$ converge;

(o) ( ) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \neq 0$;

(p) ( ) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2$ diverge;

(q) ( ) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge e $a_n \neq 0, \forall\ n \geq 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ converge;

(r) ( ) Se (a_n) é uma sequência constante, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge;

(s) ( ) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

(t) ( ) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

25. Seja (a_n) uma sequência de números reais e seja (s_n) a sequência definida por $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Considere as afirmativas abaixo:

(I) Se (s_n) é convergente, então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

(II) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, então (s_n) é convergente;

(III) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é convergente para todo $p \in \mathbb{N}$.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

26. Leia com atenção as afirmações:

(I) O limite $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{e^x}$ é uma indeterminação e seu valor é 0;

(II) O limite $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(4+3^x)}{e^x}$ é uma indeterminação e seu valor é 0;

(III) O limite $\lim_{x\to\infty} 1^{x^2}$ é uma indeterminação e seu valor é 1.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

27. Leia com atenção as afirmações:

(I) O limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$ é uma indeterminação e seu valor é 1;

(II) O limite $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ é uma indeterminação e seu valor é 0;

(III) O limite $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{e^x}$ é uma indeterminação e seu valor é 0.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

28. Leia com atenção as afirmações:

(I) A integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{cotg} x dx$ é imprópria e convergente;

(II) A integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x \ln x} dx$ não é imprópria, mas é divergente;

(III) A integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^5 + 3x + 1} dx$ é imprópria e divergente;

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

29. Leia com atenção as afirmações:

(I) Se (a_n) é uma sequência monótona e limitada, então (a_n) é convergente;

(II) Se (a_n) é uma sequência limitada, então (a_n) é convergente;

(III) Se (a_n) é uma sequência convergente, então (a_n) é monótona.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

30. Leia com atenção as afirmações:

(I) Se (a_n) é uma sequência é convergente e limitada, então (a_n) é monótona;

(II) A sequência $\left\{\dfrac{n!}{2^n}\right\}$ é monótona e convergente;

(III) A sequência $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ é convergente.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

31. Considere as séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ e leia com atenção as afirmações:

(I) Se $\sum a_n$ é convergente, então $\sum ka_n$ é convergente, para todo $k \in \mathbb{R}$;
(II) Se $\sum a_n$ é convergente e $\sum b_n$ é divergente, então $\sum a_n b_n$ é divergente;
(III) Se $\sum a_n, \sum b_n$ são divergentes, ainda assim $\sum a_n b_n$ pode ser convergente.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

32. Considere a série $\sum a_n$, $a_n \neq 0$, e leia com atenção as afirmações:

(I) Se ao aplicarmos o teste da razão obtivermos $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, o teste da raiz fornecerá a mesma resposta;
(II) Se ao aplicarmos o teste da razão obtivermos $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, então $\sum a_n$ pode convergir ou divergir;
(III) Se ao aplicarmos o teste da razão e o teste da raiz obtivermos 1, então $\sum a_n$ diverge.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

33. Considere as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, tais que $a_n > 0$ e $b_n > 0$ e leia com atenção as afirmações:

(I) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, então ambas convergem;
(II) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge;
(III) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e se $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV

34. Leia com atenção as afirmações:

(I) Se $\sum a_n$ converge absolutamente, então $\sum a_n$ converge;
(II) Se $\sum a_n$ converge, então $\sum |a_n|$ converge;
(III) Existem séries alternadas que convergem, mas não convergem absolutamente, ou seja, são condicionalmente convergentes.

A sequência correta que descreve a veracidade das afirmações é:

[ ] VVV [ ] FFF [ ] FVF [ ] VFF [ ] VVF [ ] FVV [ ] FFV [ ] VFV