**1** Limite :

Dizemos que o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y)$ tende a $(x_o,y_o)$ é o número L, e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L$$

**1.1** Teorema do Confronto : Sejam $f(x,y), g(x,y)$ e $h(x,y)$ tais que

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$$

se, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} h(x,y)$ então

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y) = L$$

**1.2** Corolário do Teorema do Confronto: Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ tais que $f(x,y)$ é limitada e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} g(x,y) = 0$, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y).g(x,y) = 0$$

**1.3** "Regra dos dois caminhos" :

Se existirem dois caminhos $c_1(t) = (x(t), y(t))$ e $c_2(t) = (x(t), y(t))$ tais que:
$\lim\limits_{t\to t_0} f(c_1(t)) \neq \lim\limits_{t\to t_0} f(c_2(t))$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ **não existe**.

- Desigualdades importantes :

a) $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$
b) $0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$
c) $0 \leq | y | \leq | x | + | y |$
d) $0 \leq | x | \leq | x | + | y |$
e) desigualdades com x y z

**2** Continuidade:

Sejam $f$ uma função de duas variáveis e $(x_o, y_o)$ um ponto do domínio de $f$. Dizemos que $f$ **é contínua em** $(x_o, y_o)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o, y_o)$$

**3** Derivadas Parciais:

Sejam $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais e $(x_o, y_o)$ um ponto do domínio de $f$.

- A **derivada parcial de $f$ em relação a $x$ no ponto** $(x_o, y_o)$ é definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h}$$

se este limite existir.

- A **derivada parcial de $f$ em relação a $y$ no ponto** $(x_o, y_o)$ é definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o, y_o + h) - f(x_o, y_o)}{h}$$

**4** Regra da Cadeia:

Sejam $x(u, v)$ e $y(u, v)$ funções deriváveis com respeito a $u$ e $v$. E seja $f(x(u, v), y(u, v))$ uma função derivável com respeito a $x$ e $y$. Então $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ é derivável com respeito a $u$ e $v$. A saber :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial v}$$

**5** Diferenciabilidade:

Uma função $f(x, y)$ é dita diferenciável num ponto $(x_0, y_0)$ se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - hf_x(x_0, y_0) - kf_y(x_0, y_0)}{\|(h, k)\|} = 0$$

- Se $f$ é de classe $C^1$ então $f$ é diferenciável.
- Se $f$ é diferenciável em $(x_0, y_0)$ então $f$ é contínua em $(x_0, y_0)$.
- Se $f$ não é contínua em $(x_0, y_0)$ então $f$ não é diferenciável em $(x_0, y_0)$.

***OBS*** : $f$ ser de classe $C^1$ significa que $f$ tem a primeira derivada contínua.

**6** Vetor Gradiente :

O **vetor gradiente de** $f(x,y)$ **em** $P_0$ é o vetor :

$$\nabla f(P_0) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \rangle$$

**7** Derivada Direcional:

- A derivada direcional de uma $f(x,y)$ em $P_0 = (x_0, y_0)$ na direção do vetor $\overrightarrow{u} = (a,b)$(**UNITÁRIO**) é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(a,b)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

se este limite existir.

- A derivada direcional de $f(x,y)$ em $P_0 = (x_0, y_0)$ na direção de $\overrightarrow{u}$, denotada por $\frac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ é **a taxa de variação de** $f(x,y)$ **em** $P_0$ **na direção de** $\overrightarrow{u}$.

- Se $f(x,y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$ então :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \left\langle \nabla f(P_0), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle$$

- Se $f$ é uma função diferenciável em $P_0$ tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$, então o **valor máximo** de $\frac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ ocorre quando $u$ tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$, sendo $\|\nabla f(P_0)\|$ **o valor máximo**.

**8** Plano Tangente:

Sejam $S$ uma superfície de nível de equação $f(x,y,z) = k$ (constante) e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $S$. Se $\nabla f(P_0) \neq 0$ , o **plano tangente a** $S$ **em** $P_0$ pela equação

$$\langle\ \nabla f(P_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\ \rangle = 0$$

Hugo Marinho