Mat 241 - Cálculo 3 - Prova 1... What I need to Know...

1) Vetores no Espaço
2) Retas
3) Planos
4) Esfera (Superfícies).

1) Vetores no Espaço

- Distância entre Pontos:

$P = (x_0, y_0, z_0)$ e $Q = (x_1, y_1, z_1)$.

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

Obs: A distância sempre será positiva ou zero se os pontos forem iguais

- Vetores: $(\vec{v} = v_1, v_2, v_3))$

Vetor: $\begin{cases} \text{- Módulo} \\ \text{- Sentido} \\ \text{- Direção} \end{cases}$

• módulo (distância entre seu ponto inicial e seu ponto final:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

Ex: $P = (1,2)$ e $Q = (5,6)$.

$\vec{v} = \vec{PQ} = Q - P = (5,6) - (1,2) = (5-1, 6-2) = (4,4)$ (como se levasse p/ origem)

$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

• Soma entre vetores:

$\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3)$.

$\vec{v} - \vec{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3)$.

• Produto Vetorial.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

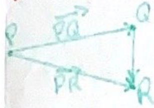
onde: $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$

$= u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_1 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_1, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$

- Propriedades:

1. $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
2. $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ e $\langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$.
3. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
4. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
5. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
6. $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \lambda\vec{v}$
7. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$.
8. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$.
9. $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ = área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
10. $\dfrac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2}$ = área do triângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Ex.: $P = (2,-2,1)$, $Q = (3,-1,2)$ e $R = (3,-1,1)$.
Determinar a área do triângulo formado pelos pontos P, Q e R.



$\vec{PQ} = Q - P = (1,1,1)$. / $\vec{PR} = R - P = (1,1,0)$.

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

, são neg.

$= 0\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} - (\vec{k} + \vec{i} + 0\vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k} = (-1,1,0)$.

$\|\vec{PQ} \times \vec{PR}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

$A = \dfrac{\|\vec{PQ} \times \vec{PR}\|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Produto entre vetores:

* Produto Escalar (Produto Interno)

$\langle v, u \rangle$ ou $u \cdot v$:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$.

- Propriedades:

1. $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$
2. $\langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
3. $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle$
4. $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$
5. $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$.

Ex.: Valor de x de modo que $\vec{v} = (x,1,3)$ $\vec{u} = (x,-1,-1)$ sejam ortogonais. $\perp$

$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle (x,1,3), (x,-1,-1) \rangle = x^2 - 1 - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

• Ângulo entre Vetores:

Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad ; \quad \text{sen}\,\theta = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

c/ $0° \leq \theta \leq 180°$

- $\langle u, v \rangle > 0 \Rightarrow 0 \leq \theta < 90°$: ângulo agudo.
- $\langle u, v \rangle < 0 \Rightarrow 90° < \theta \leq 180°$: ângulo obtuso

• Vetores Paralelos:

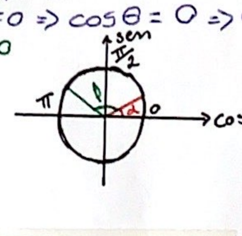
$\vec{u} \parallel \vec{v}$ se, e somente se $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

• Vetores Ortogonais:

$\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$: ângulo reto.

$90° < \beta < 180$
$\cos\beta < 0$
$\text{sen}\,\beta > 0$



$0° < \alpha < 90°$
$\cos\alpha > 0$.
$\text{sen}\,\alpha > 0$

... continuação 1) Vetores no Espaço:

• Produto Misto:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = K \in \mathbb{R}.$$

- Propriedades:

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos tais que seus pontos iniciais coincidem:

1. $|\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle|$ é o volume do paralelepípedo que tem $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ como arestas adjacentes.

2. $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0$, significa que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ estão no mesmo plano... são COPLANARES

Ex.: Valor de K, de forma que $u=(2,-1,1)$, $v=(1,2,-3)$ e $w=(3,K,5)$ sejam coplanar

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \left|\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & K & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & K \end{matrix}$$

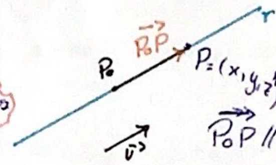
$= 20 + 9 + K - (6 - 6K - 5) = 0. \Rightarrow 29 + K - 6 + 6K + 5 = 0$

$\Rightarrow 28 + 7K = 0 \Rightarrow 7K = -28 \Rightarrow K = \frac{-28}{7} \Rightarrow K = -4$

2) Retas no Espaço

P/ montar eq. da reta precisamos de um ponto P_0 e de um vetor $\vec{v}$ chamado de vetor diretor da reta.

Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, vetor diretor da reta r.



O ponto $P=(x,y,z)$ será um ponto da reta se o vetor PP_0 for paralelo ao vetor diretor da reta.

$\vec{P_0P} \parallel \vec{v} \Rightarrow$ existe $t \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{P_0P} = t.\vec{v}$

• $\vec{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

• $t.\vec{v} = t(a,b,c) = (at, bt, ct)$.

Assim, temos:

$\vec{P_0P} = t.\vec{v} \Rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (at, bt, ct)$.

1.) $\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = \underbrace{z_0}_{P_0} + \underbrace{c}_{\vec{v}}t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. (Equação Paramétrica da Reta)

Agora, isolando t, temos:

2.) $t = \frac{x - x_0}{a}$; $t = \frac{y - y_0}{b}$; $t = \frac{z - z_0}{c}$ (Equação Simétrica da Reta)

Igualando os t's, temos:

3.) $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ (Equação Reduzida da Reta).

4.) Caso Particular da Equação da Reta Reduzida (3.)

$\vec{v} = (1, b, c)$ e $P_0 = (0, y_0, z_0)$.

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + bx \\ z = z_0 + cx. \end{cases}$

Ex.: Dada a reta, identifique um ponto e um vetor diretor dessa reta, depois de uma equação reduzida da reta.

$r \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 6t \\ z = -2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

P/ $t=0$: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 0. \end{cases}$ P/ $t=2$: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 11 \\ z = -4. \end{cases}$

$P_0 = (2, -1, 0)$ $\vec{v} = (1, 6, -2)$.

$t = x - 2$ $t = \frac{y+1}{6}$ $t = \frac{z}{-2}$.

$r: \{ x - 2 = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{-2}$

• Retas Paralelas.

Formam um ângulo de 0° ou 180° entre si:

$r \parallel s$ se $\vec{v_r} \parallel \vec{v_s} \Rightarrow \vec{v_r} = \lambda \vec{v_s}$

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid v_r = \lambda v_s \Rightarrow (a, b, 2) = \lambda(1, b, 2)$

$a = 1$, $b \in \mathbb{R}$.

• Retas Ortogonais: Formam ângulo de 90°.

$r \perp s$ se $\vec{v_r} \perp \vec{v_s}$ ∴ $\langle \vec{v_r}, \vec{v_s} \rangle = 0$

• Retas Coplanares: retas que pertencem a um mesmo plano, ou seja por essas retas pode-se passar um plano.

r e s são coplanares se: $\langle \vec{v_r}, \vec{v_s} \times \vec{P_rP_s} \rangle = 0$.

• Retas Reversas: retas que não são coplanares.

r e s são reversas, se $\langle \vec{v_r}, \vec{v_s} \times \vec{P_rP_s} \rangle \neq 0$.

• Retas Concorrentes: são retas que se tocam, ou seja, existem um ponto P que pertence a reta r e s.

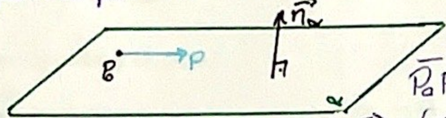
I) r e s NÃO podem ser paralelas.

II) r e s devem ser coplanares.

3) Planos no Espaço:

Def: $\vec{n}$ = vetor não nulo e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ for um ponto dado, então o conjunto de todos os pontos P, para os quais o vetor $\overrightarrow{PP_0}$ e $\vec{n}$ são ortogonais, será definido como um plano que passa por P_0, tendo $\vec{n}$ como um vetor normal.

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{n} = (a, b, c)$
$P = (x, y, z)$



+ Condição p/ q 1 ponto qualquer pertença a este plano:

$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Rightarrow \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = 0$

$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. (Equação Geral do Plano).

... continuando.

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0.$

$\Rightarrow ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{=d} \Rightarrow ax + by + cz = d.$ (Equação Reduzida do Plano).

• Ângulo entre Planos:

ângulo entre os vetores normais aos dois planos.

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta} \rangle}{\|\vec{n_\alpha}\| \, \|\vec{n_\beta}\|} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\|\vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta}\|}{\|\vec{n_\alpha}\| \cdot \|\vec{n_\beta}\|}$$

Há 2 ângulos entre os dois planos, se um for θ, o outro é o complemento de θ.

• Posição entre planos.

• Planos Paralelos: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \vec{n_\alpha} \parallel \vec{n_\beta}$
$\vec{n_\alpha} = \lambda \vec{n_\beta}$

- Planos Perpendicular: $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n_\alpha} \perp \vec{n_\beta}$
$\langle \vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta} \rangle = 0.$

• Ângulo entre uma Reta e um Plano: será dado pelo complementar do ângulo entre o $\vec{v_r}$ e o $\vec{n_\alpha}$.

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{v_r}, \vec{n_\alpha} \rangle}{\|\vec{v_r}\| \, \|\vec{n_\alpha}\|}, \text{ sendo } \alpha = 90^\circ - \theta$$

• Posição entre Reta e Plano:

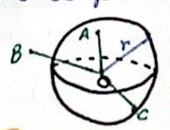
- Reta Paralela ao Plano: $r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{v_r} \perp \vec{n_\alpha}$
$\langle \vec{v_r}, \vec{n_\alpha} \rangle = 0.$

- Reta Ortogonal ao Plano: $r \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{v_r} \parallel \vec{n_\alpha}$
$\vec{v_r} = \lambda . \vec{n_\alpha}, \lambda \in \mathbb{R}$

4) Esferas.

Def.: ponto $O = (x_0, y_0, z_0)$ e uma distância $r > 0$. Uma esfera S de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância r do ponto O.

$O = (x_0, y_0, z_0)$.
$r > 0$.



+ Condição de 1 ponto qualquer pertencer à esfera:

$P = (x, y, z)$.

$d(P, O) = r. \Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$

$= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ (Equação Geral da Esfera).

• Posição Relativa entre Ponto e Esfera

- P está dentro da Esfera quando $d(P, O) < r$.
- P está fora da Esfera quando $d(P, O) > r$.
- P está na Esfera quando $d(P, O) = r$.