Norma e Produto Escalar

A **norma de um vetor** (**||V||**) é utilizada para calcular comprimento de um vetor**.** Segue do **Teorema de Pitágoras** que a norma de um vetor pode ser calculada usando as suas componentes, pela fórmula:

$$\boxed{||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},} \quad \text{onde } V \in \Re^2$$

•**Observações importantes:**

- •A norma de um vetor nulo é sempre o vetor nulo;
- •Uma norma nunca pode ser negativa
- •Uma norma é uma função, que associa um vetor a um número real
- •Se somar dois vetores, a norma deve ser menor ou igual a soma desses vetores.

•Ex: a norma do vetor W (-1,2) é:

$$||W|| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} \cong 2.24$$

- •No Scilab, a norma é obtida através da função norm(W).
- •No Geogebra, pelo comando comprimento[w]

Fonte: Reginaldo J. Santos

Norma e Produto Escalar

- **Distância entre dois vetores:**
  - A distância entre dois vetores é igual a norma da multiplicação entre esses vetores. Então, a distância entre dois vetores P = (x1, y1) e Q = (x2, y2) no plano é:

$$\mathrm{dist}(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

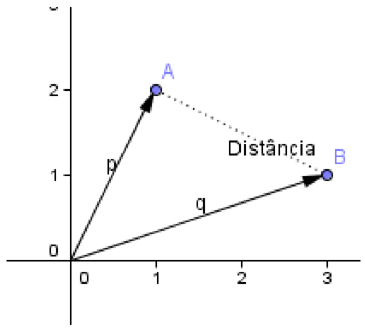
  - Exemplo: dado dois vetores P=(1,2) e Q=(3,1) encontre a distância entre eles:
  - R: Aplicando-se a fórmula da distância entre dois vetores, temos:

$$dist(P,Q) = \|\overrightarrow{P,Q}\| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \cong 2{,}24$$

  - Aplicando a fórmula da distância entre dois vetores no Scilab, temos:

dist=sqrt((3-1)^2+(1-2)^2)

  - No Geogebra, o cálculo é semelhante. Se quisermos obter a distância entre os vetores graficamente, traçamos o gráfico, com o os vetores posicionados; escolhemos a ferramenta “seguimento definido por dois pontos”. Clicamos no fim do vetor p e arrastamos até o fim do vetor q. Alteramos a propriedade, inserindo o nome do seguimento como distância e o estilo de linha tracejado. O gráfico resultante é mostrado abaixo:



Fonte: Reginaldo J. Santos

Norma e Produto Escalar

- **Ângulo entre dois vetores:**
  - Seja V=(x1,y1) e W=(x2,y2) dois vetores no plano. O produto escalar entre V e W define seu ângulo. Então, V×W é o resultado da combinação linear dos elementos de V e de W:

V×W=x1×x2+y1×y2

  - Aplicando-se a propriedade de multiplicação vetorial, podemos multiplicar dois vetores diretamente, fazendo a multiplicação da transposta do primeiro vetor pelo segundo:

Multiplicação(V,W) = V^t × W

  - Como o sistema de coordenadas vetoriais é polar (expressa em ângulos), a fórmula para encontrar o Ângulo entre dois vetores é:

$$\cos\theta = \frac{V \times W}{\|V\| * \|W\|}$$

  - **OBS:** O **ângulo** entre dois vetores sempre se dá no **sentido anti-horário** (do último vetor (**W**) para o primeiro (**V**)
    - **Exemplo**: Encontrar o ângulo entre os vetores P=(1,2) e Q=(3,1) .
    - R: Encontrando-se, inicialmente, as normas de P e Q, temos:

$$\|P\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \cong 2{,}24 \qquad \|Q\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \cong 3{,}16$$

Norma e Produto Escalar

- **Ângulo entre dois vetores(cont):**
  - Aplicando-se as normas de P e Q, na fórmula do cosseno de teta, temos:

$$\cos\theta = \frac{(1,2)^t \times (3,1)}{2,24 \times 3,16} \cong 0,707$$

  - Para encontrar o ângulo de teta, aplicamos a fórmula:

$$\hat{A}ngulo(\theta) = \frac{arco\cos(0,707) \times 180^{o}}{\pi}$$

  - Assim:

$$\hat{A}ngulo(\theta) = \frac{0,785 \times 180^{o}}{\pi} = \frac{141,3}{\pi} \cong 45^{o}$$

- Exemplo: Encontrar o ângulo entre os vetores P=(1,2) e Q=(3,1) .
- R: Encontrando-se, inicialmente, as normas de P e Q, temos:

Norma e Produto Escalar

- **Ângulo entre dois vetores: resolução pelo Scilab e pelo Geogebra:**
  - **Scilab:**
    - Digita-se as coordenadas dos vetores P e Q (P=[1;2] Q=[3;1]);
    - Aplica-se o cálculo do cosseno de teta, utilizando-se a função norm:

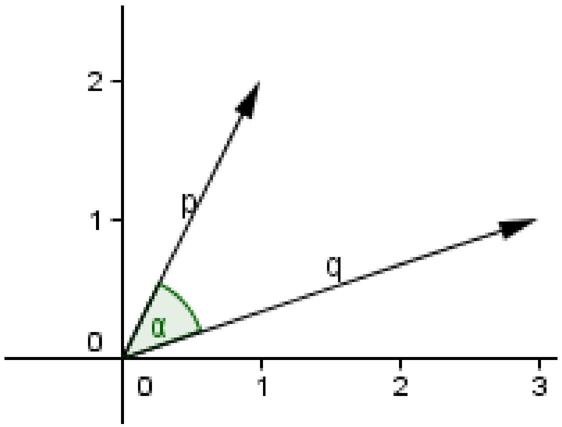
      teta= (P'*Q)/(norm(P)*norm(Q)),

      cujo valor será aproximadamente igual a **0,7**;

    - Calcula-se, agora, o ângulo de teta:

      ang_teta = acos(teta)*180/%pi, cujo valor será aproximadamente 45º

  - **Geogebra:**
    - Posicionamos os dois vetores (P e Q) no gráfico
    - Na caixa de texto entrada, digitamos o comando **ângulo[q,p]**, visto que o ângulo entre dois vetores se dá no sentido anti-horário (**de Q para P**) que resultará no ângulo de 45º, como ilustrado abaixo:



Norma e Produto Escalar

FIM DA PARTE 3,unidade 2 – FAZER LISTA DE EXERCÍCIOS 8 (próximo slide)

Norma e Produto Escalar– lista de exercícios 8

1 – Dado o sistema de equações lineares abaixo:

A) $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} -2x-4y=3 \\ 8x+5y=8 \end{cases}$ B) $\begin{cases} 2x+40y=30 \\ 10x+50y=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x-4y=50 \\ 6x+2y=-4 \end{cases}$

Resolva os sistemas de equações lineares por Gauss-Jordan e, em cada um dos pares de cada item, monte os respectivos vetores (vetores V e U para o item A e vetores P e Q para o item B). Após, calcule:

1.1 - A norma dos vetores V, U, P e Q.
1.2 – A distância entre V e U, P e Q, V e P e U e Q
1.3 - O ângulo entre V e U, P e Q, V e P e U e Q

2 – Baseado nas respostas dos itens, de 1.1 a 1.3, esboce o gráfico com todos os vetores, suas normas, respectivas distâncias e ângulos (se ficar confuso, construa gráficos separados pelos pares de vetores envolvidos nas questões 1.2 e 1.3), utilizando o GeoGebra.

OBS: Só serão válidos os itens que apresentarem os passos de Gauss-Jordan e o cálculo detalhado dos itens, de 1.1 a 1.3.