MAT 241 - P3

Hugo Marinho

2021

1 Máximos e Mínimos

1.1 Valores extremos de funções de duas variáveis

Definição: Consideremos a função real $z = f(x, y)$ definida num conjunto $D \subset R^2$ e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é um valor máximo relativo de f (respectivamente valor mínimo relativo de f) se existe uma bola aberta $B = B_r(x_0, y_0) \subset D$ tal que

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

(respectivamente $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$)
para todos (x, y) pertencente a B. Um valor máximo ou mínimo relativo de f é chamado valor extremo relativo. O ponto (x_0, y_0) onde f assume extremo relativo é dito ponto extremo relativo.

Teorema: Condição necessária para a existência de extremos relativos.
Sejam $z = f(x, y)$ uma função definida num conjunto $d \subset R^2$ cujo interior é não vazio e (x_0, y_0) um ponto interior a D. Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e $f(x, y)$ tem um extremo relativo em (x_0, y_0), então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ e \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Definição: Um ponto (x_0, y_0) interior ao domínio de uma função $z = f(x, y)$ é chamado **ponto crítico de** f se:

- $\nabla f(x_0, y_0)$ não existe; ou
- $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$

Exemplo:
1. Encontre os pontos de extremo das seguintes funções abaixo:
$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Para classificarmos os extremos relativos das funções nós precisaremos de uma ferramenta que envolve derivadas de segunda ordem.

Teorema - Teste da Derivada Segunda
Seja $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 numa bola aberta $B = B_r(x_0, y_0)$. Suponhamos que (x_0, y_0) é um ponto crítico de $f(x, y)$ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Denotemos por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = C$$

Se :

- $B^2 - AC < 0$ e $A < 0$, então f tem um vaor máximo relativo em (x_0, y_0);
- $B^2 - AC < 0$ e $A > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em (x_0, y_0);
- $B^2 - AC > 0$, então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0).

Exemplo: Encontre e classifique os pontos críticos da função:
$f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$

Teorema: Se $z = f(x, y)$ é uma função contínua num conjunto limitado e fechado $D \subset R^2$, então f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em D.

Note que este reorema nos garante a existência de pontos máximos e mínimos absolutos, mas não nos fornece um critério segundo o qual possamos localizá-los.

Se (x_0, y_0) é um extremo absoluto de uma função f em D, então (x_0, y_0) é um ponto interior a D ou pertence à fronteira de D. Portante, para localizarmos os extremos absolutos de f em D, encontramos os pontos críticos de f e comparamos os valores de f nestes pontos com os valores máximo e mínimo de f na fronteira de D.

Exemplo: Encontre o máximo e mínimo de $f(x, y) = (x - 2)^2 y + y^2 - y$ definida em
$D = \{(x, y) \in R^2; x \geq 0, y \geq 0 \ e \ x + y \leq 4\}$

2 Máximos e mínimos com restrições - Multiplicadores de Lagrange

Teorema: Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ funções definidas e de classe C^1 num subconjunto aberto U do plano xy que contém a curva C de equação $g(x,y) = 0$. Se $f(x,y)$ tem um valor máximo ou mínimo em $(x_0, y_0) \in C$ e $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$, então existe um número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

O número λ é chamado de **multiplicador de Lagrange**

Exemplos:

1. Encontre a menor e a maior distância da curva $x^6 + y^6 = 1$ à origem.

2. Se uma caixa retangular sem tampa deve ter um volume fixo V, que dimensões relativas minimizarão a área da superfície ?

3. Encontre o máximo e o mínimo de $f(x,y) = x + y^2$ na região

$$D = \{(x,y) \in R^2, (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

3 Integrais Múltiplas

Nesta parte da matéria estudaremos as integrais dupla e tripla, que são extensões naturais da integral de Riemann de funções de uma variável real.

3.1 Interpretação Geométrica da integral dupla

Consideremos uma função real $z = f(x, y)$ definida e contínua no retângulo

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in R^2 | a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$$

Se $f(x, y) \geq 0$ em R, o gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície situada acima do retângulo R. Esta superfície, o retângulo R e os quatro planos $x = a, x = b, y = c, y = d$ formam a fronteira de uma região W do espaço.

Representação gráfica.

Assumindo que a região W possua um volume, chamamos este volume de **integral dupla de f sobre R** e o denotamos por

$$\int\int_R f(x, y) dxdy \text{ ou } \int\int_R f(x, y) dA$$

3.2 Integral dupla sobre um retângulo

Toda a ideia que trabalharemos agora no estudo de integrais de várias variáveis será análogo ao que já foi estudado em funções de uma variável real.

Definição: Se a sequência (S_n) das somas de Riemann da função f tem limite $s \in R$ quando $n \to +\infty$ e este limite independe da escolha dos pontos c_{jk} no subretângulos R_{jk}, isto é,

$$s = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A$$

dizemos que f é integrável sobre R e escrevemos

$$\int\int_R f(x, y) dxdy = s$$

Teorema: Toda função contínua definida num retângulo R é integrável sobre R.

Exemplo: Calcule $\int\int_R (x^2 + y^2) dxdy$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$

Ideia geométrica do cálculo do volume dessa integral.

Teorema de Fubini: Se a função $z = f(x, y)$ é contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, então a integral dupla de f sobre R pode ser obtida através de integrais iteradas, ou seja:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

Exemplos:

1. Calcule a seguinte integral $\displaystyle\int_0^2 \int_2^4 x^2 sen\ ydxdy$

3.3 Integral dupla sobre regiões mais gerais

Até o momento estudamos integrais em regiões retangulares, estudaremos agora integrais em regiões mais gerais, que não sejam retângulos. Ou seja, nossas variáveis poderão variar não somente entre números, mas também entre funções.

Considere as seguintes regiões escritas abaixo:

$$D_1 = \{(x, y) \in R^2 | a \leq x \leq b \ ; \ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in R^2 | c \leq y \leq d \ ; \ g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

Teorema: Seja f uma função definida e contínua num subconjunto limitado e fechado $D \subset R^2$. Então:

$$\int\int_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

$$\int\int_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\right] dy$$

Exemplo:

1. Esboce a região de integração, faça a mudança na leitura da região e calcule a integral.
$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (x + y)dA$