Universidade Federal de Viçosa

Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

$3^{\underline{a}}$ Lista - MAT 241 - Cálculo III - 2018/II

1. Em cada caso, esboce a região de integração e calcule a integral.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} x^2y^2 dxdy$

(b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)dydx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y-1}^{0} e^{x+y}dxdy + \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x+y}dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}dydx$

(e) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2}dydx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sen} x^2 dxdy$

(g) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x}\operatorname{sen} x dxdy$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{\operatorname{sen} y}{y}dydx$

2. Use uma integral dupla para encontrar o volume do sólido limitado pelos gráficos das equações dadas.

(a) $z = xy,\ z = 0,\ \ y = x,\ \ x = 1$ (primeiro octante)

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a > 0$

(c) $x^2 + z^2 = 1,\ \ y^2 + z^2 = 1$ (primeiro octante)

(d) $z = \dfrac{1}{1+y^2},\ \ x = 0,\ x = 2,\ y \geq 0.$

3. Calcule, em coordenadas polares.

(a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dydx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xydydx$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2dxdy$

4. Escreva a soma, das integrais abaixo, como uma única integral dupla usando coordenadas polares e calcule.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx.$

(b) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xydydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xydydx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydydx.$

5. Prove que $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dydx = \frac{1}{2}$. E se a integração for primeiro em x?

6. Use uma integral dupla em coordenadas polares para encontrar o volume de uma esfera de raio a.

7. Encontre k de modo que o volume dentro do hemisfério $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ e fora do cilindro $x^2+y^2 = k^2$ seja a metade do volume do hemisfério.

8. Calcule o volume do sólido delimitado pelo elipsoide dado por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, onde $a, b, c > 0$.

9. Em cada caso, use a mudança de variáveis indicada para calcular a integral dupla dada.

(a) $\displaystyle\iint_R \frac{\sqrt{x+y}}{x}$, $x = u,\ y = uv$, R é o triângulo com vértices em $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,4)$.

(b) $\displaystyle\iint_R y\,\mathrm{sen}(xy)dydx, x = \frac{u}{v}, y = v$, R é a região entre os gráficos de $xy = 1, xy = 4, y = 1, y = 4$.

10. Considere a região R do plano xy dada por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e a transformação $x = au,\ y = bv$. Esboce a região R e sua imagem inversa S sob essa transformação, e encontre $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

11. Calcule o volume do sólido limitado superiormente pela superfície $z = 16 - x^2 - y^2$ e inferiormente pela região elíptica $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1$.

12. Calcular, por dupla integração, a área da região acima do eixo x, limitada pela parábola semi-cúbica $y^2 = x^3$ e a reta $y = x$,

   (a) integrando primeiro em relação a x;

   (b) integrando primeiro em relação a y.

13. Achar o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica $x^2 + az = a^2$, $a > 0$ e pelos planos $x + y = a$, $y = 0$ e $z = 0$.

14. Descrever a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ pela transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = \left(\dfrac{x}{4}, y\right)$.

15. Descrever as imagens das retas $x = c$ pela transformação $T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (e^x \cos y, e^x\,\mathrm{sen}\,y)$. Esboce os gráficos de tais retas e de suas imagens.

16. Calcule o volume do sólido acima do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

17. Calcule o volume do sólido compreendido entre os paraboloides $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - 7x^2 - y^2$.

18. O volume V abaixo do paraboloide hiperbólico $z = xy$ e acima de uma região R no plano xy é dada por

$$V = \int_0^1 \int_0^y xydxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} xydxdy.$$

   Esboce a região R do plano xy, expresse V como uma integral dupla na qual a ordem de integração é invertida e calcule V.

19. Calcule o volume do sólido que é imagem de uma bola de raio a pela transformação linear representada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

20. Achar o volume do sólido removido quando se abre um furo de raio a em numa esfera de raio $2a$, sendo o eixo do furo um diâmetro da esfera.

21. Sendo R a região limitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 1$, calcule a integral dupla

$$\iint_R \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

22. Utilizando integração dupla, calcule a área do conjunto B dado

   (a) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ln x \leq y \leq 1 + \ln x, y \geq 0 \text{ e } x \leq e\}$

   (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

   (c) B é determinado pelas desigualdades $xy \leq 2$, $x \leq y \leq x + 1$ e $x \geq 0$.

   (d) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, \dfrac{4}{x} \leq y \leq -3x^2 + 7x\}$

23. Determine o volume do sólido

   (a) Abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$

   (b) Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices $(1,1)$, $(4,1)$ e $(1,2)$

24. Calcule a integral trocando a ordem de integração

(a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy$

(b) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1} dydx$

25. Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares

(a) $\iint_D xydA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 3

(b) $\iint_R \cos(x^2+y^2)dA$, onde R é a região à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

(c) $\iint_D e^{-x^2-y^2} dA$, onde D é a região delimitada pelo semicírculo $x=\sqrt{4-y^2}$ e o eixo y.

26. Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares

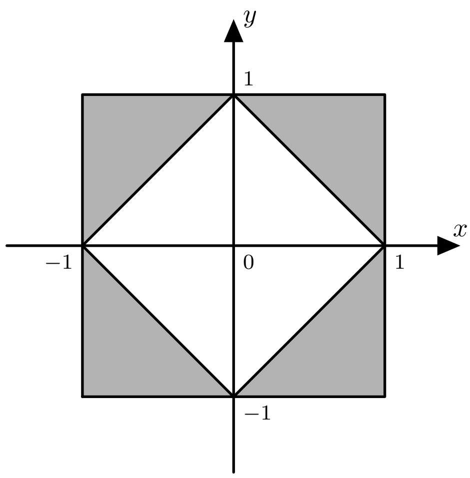
(a) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)dydx$

(b) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x+y)dxdy$

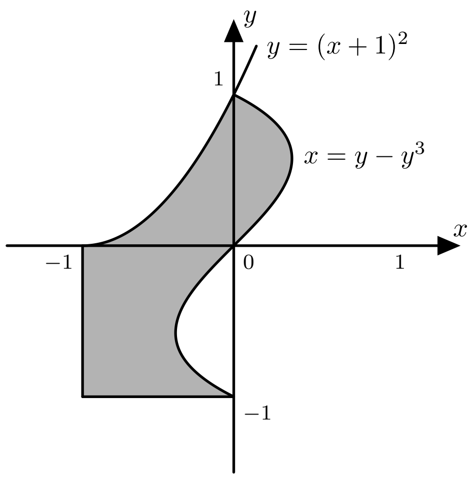
27. Expresse D como união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral

(a) $\iint_D x^2 dA$

(b) $\iint_D ydA$



(a)



(b)

28. (a) Definimos a integral imprópria (sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dA,$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi.$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria acima é

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} dA,$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esse resultado para mostrar que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right) = \pi.$$

(c) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

29. Calcule $\iint_R x dA$, onde R é a região limitada por $x = \ln y$, $x = 0$ e $y = e$.

30. Use uma integral dupla para calcular a área da região, no primeiro quadrante, delimitada pela curva $y = \dfrac{1}{x}$, pela reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$, e pela reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

31. Dada a soma de integrais $\displaystyle\int_{-4}^{0}\int_{-x}^{4} e^{x/y} dydx + \int_{0}^{2}\int_{2x}^{4} e^{x/y} dydx$, inverta a ordem de integração e calcule a integral.

32. Calcule o volume do sólido dado por $0 \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e $x^2 + y^2 \le 4$, com $y \ge 0$.

33. Calcule $\displaystyle\iiint_Q 12xy^2z^3 dV$ na caixa retangular $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 2\}$.

34. Seja Q a cunha no primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \le 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$. Calcule $\displaystyle\iiint_Q z dV$

35. Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido contido no cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e entre os planos $z = 1$ e $x + z = 5$.

36. Reescreva a integral $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\frac{4-x}{2}} \int_0^{\frac{12-3x-6y}{4}} dzdydx$ na ordem $dydxdz$.

37. Calcule o volume sólido S dado por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \le z\}$.

38. Calcule $\displaystyle\iiint_D z dV$, onde D é o tetraedro de vértices $(0,0,0), (1,1,0), (1,0,0), (1,0,1)$.

39. Use coordenadas cilíndricas para calcular $\displaystyle\iiint_S z\sqrt{x^2 + y^2} dV$, onde S é a metade do cone circular reto de vértice $(0,0,h)$, com $h > 0$ e base $x^2 + y^2 \le a^2$ compreendido na parte $y \ge 0$.

40. Expresse $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^3 dzdydx$ em coordenadas esféricas e calcule.

41. Calcule o volume do sólido S, no primeiro octante, limitado pela esfera $r = 4$, pelos planos coordenados, o cone $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ e o cone $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

42. Usando coordenadas esféricas, calcule

    (a) $\displaystyle\iiint_B z dxdydz$, onde B é o conjunto $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ e $z \ge 0$.

    (b) $\displaystyle\iiint_B z dxdydz$, onde B é o conjunto $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

    (c) $\displaystyle\iiint_B z dxdydz$, onde B é a interseção da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ e $z \ge 0$ com o cilindro $x^2 + y^2 \le 1$.

43. Use uma integral tripla para determinar o volume

    (a) Do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$.

    (b) Do sólido delimitado pelo cilindro elíptico $4x^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $y = 0$ e $y = z + 2$.

    (c) Do sólido limitado pelo cilindro $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $x + z = 1$.

44. Escreva as equações em coordenadas cilíndricas

(a) $z = x^2 + y^2$

(b) $x^2 + y^2 = 2y$

45. Dê o volume do sólido descrito, em coordenadas cilíndricas, pelas desigualdades $0 \leq r \leq 2$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq z \leq 1$.

46. Calcule $\iiint_E xDV$, onde E está delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = x+y+5$ e pelos cilindros $x^2+y^2 = 4$ e $x^2+y^2 = 9$.

47. Calcule a integral $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dV$ utilizando coordenadas cilíndricas.

48. Escreva, em coordenadas esféricas, as equações

(a) $z^2 = x^2 + y^2$

(b) $9 = x^2 + z^2$

49. Dê o volume do sólido descrito, em coordenadas esféricas, pelas desigualdades dadas

(a) $\rho \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(b) $\rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$

50. Resolva, utilizando coordenadas esféricas

(a) $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV$, onde B é a bola centrada na origem de raio 5

(b) $\iiint_E z dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.

(c) $\iiint_E x^2 dV$, onde E é limitado pelo plano xz e pelos hemisférios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ e $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.