

# CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Antônio de A. e Silva & Marivaldo P. Matos

## Prefácio

Este texto é produto da experiência dos autores quando ministraram, por diversas vezes, disciplinas envolvendo cálculo diferencial e integral para os cursos de Ciências Exatas e Engenharias da UFPB e de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPBVirtual.

O principal objetivo deste texto é fazer com que os alunos compreendam com clareza os conceitos envolvendo funções de várias variáveis, de um ponto de vista geométrico e algébrico, e desenvolvam a capacidade de modelar problemas matemáticos e provas envolvendo conceitos topológicos, bem como as noções intuitivas de limites, continuidade, derivadas parciais, diferenciabilidade, comportamento de funções, integrais de linha e de superfície.

O público a que o livro se destina são os estudantes com conhecimento prévio de cálculo diferencial e integral, equivalente a um período letivo, familiarizados com as ideias de derivada e integral, em seus aspectos fundamentais, e com uma noção razoável sobre simbologia e lógica matemática, de modo a compreender etapas que vão da formulação à demonstração de resultados matemáticos pouco sofisticados. Conhecimentos básicos sobre cálculo vetorial, retas, planos, cônicas e quádricas são recomendados, mas não indispensáveis.

É nossa expectativa que este texto assuma o carater de espinha dorsal de uma experiência permanentemente renovável, sendo, portanto, bem vindas as críticas e/ou sugestões apresentadas por todos - professores ou alunos que dele fizerem uso.

Os termos ou expressões que consideramos pouco comuns foram grafados em *itálico* e indicam que estão sendo definidos naquele ponto do texto, ou que serão formalizados nas seções ou capítulos posteriores. Como parte do processo de treinamento e para desenvolver a capacidade do estudante de pensar por si mesmo em termos das novas definições, incluímos no final de cada seção uma extensa lista de exercícios.

O livro é composto de uma parte sobre cálculo diferencial e outra sobre cálculo integral, onde apresentamos os conceitos e métodos fundamentais, com vistas às aplicações. Por se tratar de um texto de cálculo, julgamos conveniente omitir a demonstração de alguns resultados, principalmente na parte de cálculo integral, mas levando em consideração dois aspectos: primeiro, a formulação matemática adequada e, depois, a exemplificação de como utilizá-los.

No capítulo 1 apresentaremos algumas definições e resultados sobre conceitos topológicos, funções reais de duas ou mais variáveis reais, limites e continuidade, que serão necessárias para o entendimento dos próximas capítulos.

No capítulo 2 apresentaremos as definições de derivadas parciais, diferenciabilidade, Regra da Cadeia, derivada direcional e gradiente que serão necessárias para as aplicações.

No capítulo 3 apresentaremos os problemas de maximazação e minimização, o Método dos Multiplicadores de Lagrange, derivação implícita e transformações.

No capítulo 4 apresentaremos algumas definições e resultados sobre integrais múltiplas e mudança de coordenadas.

No capítulo 5 apresentaremos algumas definições e resultados sobre campos de vetores, funções vetoriais, integrais de linha e independência do caminho.

Finalmente, no capítulo 6 apresentaremos os conceitos de superfícies parametrizadas e integrais de superfície, além dos teoremas clássicos do cálculo integral: Teorema de Green, Teorema da Divergência de Gauss e o Teorema de Stokes.

## Agradecimentos

Os autores reconhecem e agradecem a gentileza dos colegas Ailton Ribeiro de Assis, Inaldo Barbosa de Albuquerque, João Bosco Batista Lacerda, João Bosco Nogueira, Jorge Costa Duarte Filho, José Gomes de Assis e Shirley Santos e Souza, todos do Departamento de Matemática do CCEN - UFPB, pelas sugestões incorporadas ao texto e, sobretudo, pelo encorajamento para realizar esta obra. Agradecemos especialmente a Luizalba Santos e Souza pela leitura cuidadosa e revisão linguística da primeira versão. Aos nossos inúmeros ex-alunos, que de alguma forma contribuíram para o sucesso deste trabalho, registramos nossos sinceros agradecimentos.

Antônio de A. e Silva Marivaldo P. Matos

# Sumário

1.	C	Campos Escalares	1
	1.1	Conceitos Topológicos	1
		1.1.1 Posição Relativa Ponto $\times$ Conjunto $\dots$	2
		Exercícios e Complementos	7
	1.2	Funções Reais de Várias Variáveis	8
		Curvas e Superfícies de Nível	10
		Exercícios e Complementos	12
	1.3	Limite e Continuidade	13
		1.3.1 Motivação	13
		1.3.2 Conceito e Regras	14
		1.3.3 Continuidade	21
		Exercícios e Complementos	24
	Resp	postas & Sugestões	27
		Seção 1.1 - Conceitos Topológicos	27
		Seção 1.2 - Funções de Várias Variáveis	28
		Seção 1.3 - Limite & Continuidade	30
2.	D	Diferenciabilidade	33
	2.1	Derivadas Parciais	33
		2.1.1 Derivadas Parciais de Ordem Superior	35
		2.1.2 Exemplos Clássicos I	38
		Exercícios e Complementos	39
	2.2	Campos Diferenciáveis	40
		2.2.1 A Diferencial	46
		2.2.2 A Derivada como Aplicação Linear	48
		2.2.3 Exemplos Clássicos II	49
		Exercícios e Complementos	50
	2.3	Regra da Cadeia	51
		Exercícios e Complementos	54
	2.4	Derivada Direcional e Gradiente	56
		2.4.1 Variação Estimada	60
		2.4.2 Reta Tangente e Reta Normal	61
		Exercícios e Complementos	64
	Rest	postas & Sugestões	67
	•	Seção 2.1 - Derivadas Parciais	67
		Seção 2.2 - Campos Diferenciáveis	69

		Seção 2.3 - Regra da Cadeia	71
		Seção 2.4 - Derivada Direcional & Gradiente	73
0	ъ	Nauton dans audion 200	<b>'</b> 9
3.	3.1	• •	9 78
	5.1		33
		*	38
	2.0	•	91
	3.2	•	92
			98
		Exercícios e Complementos	
	3.3	Derivação Implícita	
		3.3.1 Uma Equação e duas Variáveis	
		3.3.2 Uma Equação e três Variáveis	
		3.3.3 Duas Equações e quatro Variáveis	
		Exercícios e Complementos	)9
	3.4	Transformações	10
		3.4.1 Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas	4
		Exercícios e Complementos	16
	Resp	postas & Sugestões	19
		Seção 3.1 - Máximos & Mínimos         11	19
		Seção 3.2 - multiplicadores de lagrange	20
		Seção 3.3 - derivação implícita	23
		Seção 3.4 - transformações	25
4.	Iı	ntegrais Múltiplas 12	29
	4.1	Integral Dupla	28
		4.1.1 Integral Dupla sobre Retângulos	29
		4.1.2 Integral Dupla sobre Regiões não Retangulares	
		4.1.3 Invertendo a Ordem de Integração	
		4.1.4 Considerações Físicas	
		4.1.5 Integral Dupla Imprópria	
		Exercícios e Complementos	
		4.1.6 Mudança de Variável em Integral Dupla	
		Exercícios e Complementos	
	4.2	Integral Tripla	
	1.2	4.2.1 Mudança de Variável em Integral Tripla	
		4.2.2 Considerações Físicas	
		Exercícios e Complementos	
	Dog		
	nes]	postas & Sugestões	
		Seção 4.1 - Integral Dupla	
		Seção 4.1.6 - Mudança de Variável	
		Seção 4.2 - Integral Tripla	<b>)</b> 8

5.	In	ntegral de Linha	171
	5.1	Campos Vetoriais	172
		5.1.1 Operadores Diferenciais	176
		Exercícios e Complementos	179
	5.2	Caminhos Regulares	181
		5.2.1 Curvas Orientadas	183
		Exercícios e Complementos	189
	5.3	Calculando Integral de Linha	190
		5.3.1 Integrando um Campo Vetorial	190
		5.3.2 Integrando um Campo Escalar	194
		5.3.3 Considerações Físicas	197
		Exercícios e Complementos	199
	5.4	Independência do Caminho	201
		5.4.1 O Potencial como Integral de Linha	208
		Exercícios e Complementos	210
	5.5	O Teorema de Green no Plano	211
		5.5.1 Regiões Multiplamente Conexas	215
		5.5.2 Aplicações do Teorema de Green	216
		Exercícios e Complementos	220
	Resp	postas & Sugestões	221
		Seção 5.1 - Campos Vetoriais	221
		Seção 5.2 - Caminhos Regulares	223
		Seção 5.3 - Calculando Integral de Linha	224
		Seção 5.4 - Independência do Caminho	225
		Seção 5.5 - Teorema de Green	226
c	т.,	ategral de Superfície	229
6.		Superfícies Regulares	229
	0.1		
		6.1.1 Superfícies Orientadas	
	6.2	Área de uma Superfície	
	0.2	6.2.1 Forma Parametrizada	
		Exercícios e Complementos	
	6.3	Integral de Superfície	
	0.0	6.3.1 Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia	
		6.3.2 Integrando Formas Diferenciais	
		Exercícios e Complementos	
	6.4	-	
	0.4	Fluxo e o Teorema de Gauss	
		6.4.1 Considerações Físicas	
	6 5	Circulação e o Teorema de Stokes	
	6.5		
		6.5.1 Interpretação do Rotacional	
		Exercicios e Compiementos	276

VIII	• • •
	viii

Res	postas & Sugestões	277						
	Seção 6.1 - Superfícies Regulares	277						
	Seção 6.2 - Área de uma Superfície	278						
	Seção 6.3 - Integral de Superfície	279						
	Seção 6.4 - Teorema de Gauss	280						
	Seção 6.5 - teorema de Stokes	281						
Referências Bibliográficas								
Índice	Remissivo	287						

## 1. Campos Escalares

Quando falamos que uma coisa é função de outra, queremos dizer, simplesmente, que a primeira delas depende da segunda. Situações de dependência, ou vinculação, estão presentes constantemente em nossa vida. Por exemplo, a área de um triângulo é igual a metade da base vezes a altura, ou seja, depende da base e da altura do triângulo.

A partir de agora, você está convidado a nos acompanhar neste passeio pelo mundo das funções reais de várias variáveis reais. Juntos analisaremos detalhadamente suas regras, conheceremos domínios, gráficos e curvas de nível, verdadeiras ferramentas de decoração utilizadas para exposição de mapas, e aprenderemos os conceitos de limites e continuidade de funções reais de várias variáveis reais.

A adequação de uma investigação sistemática, empírica ou crítica, nos leva à problematização ou à formulação de problemas com enunciados que devem ser explicitados de forma clara, compreensível e operacional. Portanto, um problema se constitui em uma pergunta científica quando explicita a relação entre as variáveis ou fatos envolvidos no fenômeno.

Como é comum no nosso dia-a-dia, os problemas envolvendo as funções reais de várias variáveis reais independentes aparecem com mais frequência do que as funções reais de uma variável real, e seu cálculo é ainda mais extenso. Suas derivadas são mais variadas e mais interessantes por causa das diferentes maneiras como as variáveis podem interagir. Considere, por exemplo, uma placa metálica circular com um metro de raio, colocada com centro na origem do plano xy e suponha que ela seja aquecida, de modo que a temperatura em um ponto P(x, y), medida em °C, seja dada por

$$T(x,y) = 16x^2 + 24xy + 40y^2,$$

com x e y medidos em metro. Um problema interessante de cálculo consiste em determinar os pontos da placa onde a temperatura é mais baixa e onde ela é mais alta.

## 1.1 Conceitos Topológicos

Nesta seção introduzimos os conceitos topológicos importantes para o estudo de funções reais de várias variáveis reais, mais precisamente funções cujo domínio é um subconjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , com ênfase no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  e no espaço  $\mathbb{R}^3$ , cuja imagem está contida em  $\mathbb{R}$ . Sempre que possível, é interessante esboçar graficamente um conjunto, que pode ser o gráfico de uma equação ou de uma inequação, porque a visualização geométrica nos propicia informações relevantes sobre esse conjunto.

Por conjunto de pontos, ou simplesmente subconjunto X do  $\mathbb{R}^n$ , entendemos qualquer coleção de pontos, finita ou infinita.

## Exemplo 1.1 Os conjuntos

$$X = \{(1,0),(0,1)\}, Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \ e \ Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

são conjuntos de pontos no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Dados um ponto  $P(a,b) \in \mathbb{R}^2$  e um número real  $\delta > 0$ , denomina-se  $\delta$ -vizinhança (circular) de P, em símbolos  $V_{\delta}(P)$ , ao conjunto de todos pontos  $Q(x,y) \in \mathbb{R}^2$  tais que

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

Se representarmos por |Q-P| a distância, em  $\mathbb{R}^n$ , entre os pontos P e Q, então

$$V_{\delta}(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^n : |Q - P| < \delta \}.$$

A δ-vizinhança (retangular) de P, também representada por  $V_{\delta}(P)$ , é o conjunto de todos pontos Q(x,y) do  $\mathbb{R}^2$  tais que

$$|x-a| < \delta \text{ e } |y-b| < \delta,$$

isto é,

$$V_{\delta}(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^2 : |x - a| < \delta \text{ e } |y - b| < \delta \}.$$

Abaixo exibimos graficamente as vizinhanças circular e retangular de um ponto P.

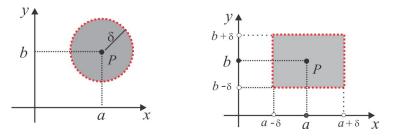


Figura 1.1: Vizinhanças circular e retangular

## 1.1.1 Posição Relativa Ponto × Conjunto

Dados um conjunto X e um ponto P do  $\mathbb{R}^n$ , o qual pode estar em X ou não, apenas uma das situações abaixo ocorre:

- Situação 1 existe um raio  $\delta > 0$ , tal que a vizinhança  $V_{\delta}(P)$  está inteiramente contida no conjunto X;
- Situação 2 existe um raio  $\delta > 0$ , tal que a vizinhança  $V_{\delta}(P)$  está inteiramente contida no complementar de X, isto é, não toca o conjunto X;
- Situação 3 seja qual for o raio  $\delta > 0$ , a vizinhança  $V_{\delta}(P)$  toca o conjunto X e também o seu complementar.

Quando ocorrer a situação 1, diremos que o ponto P é interior ao conjunto X; na situação 2 o ponto P é exterior ao conjunto X e, quando ocorrer a situação 3, diremos que o ponto P está na fronteira do conjunto X. Imagine-se viajando do estado da Paraíba (conjunto X) para o vizinho estado de Pernambuco (conjunto Y) e, de repente, surge uma placa de sinalização informando: divisa de estado PB-PE. A linha que separa os dois estados (conjuntos) é a fronteira; de um lado você está dentro (no interior) da Paraíba e do outro você está fora (no exterior) da Paraíba.

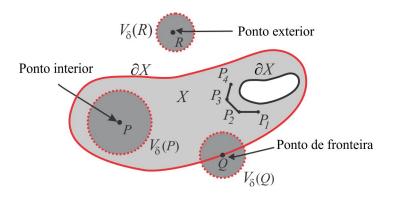


Figura 1.2: Posição relativa ponto × conjunto.

Na figura 1.2 exibimos as situações que descrevem a posição relativa de um ponto em relação ao um conjunto X e na sequência formalizaremos os conceitos de conjunto aberto, conjunto fechado, conjunto compacto e domínio.

Um conjunto X em  $\mathbb{R}^n$  denomina-se *aberto* se para cada ponto  $P \in X$ , existir uma  $\delta$ -vizinhança de P inteiramente contida em X, isto é,

$$\forall P \in X, \exists V_{\delta}(P) \text{ tal que } V_{\delta}(P) \subseteq X.$$

Neste caso, vemos que todos os pontos de X são pontos interiores.

**Exemplo 1.2** Consideremos os seguintes conjuntos em  $\mathbb{R}^2$ 

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \ e \ |y| < 1\}$$

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0\}$$

e verifiquemos que em  $\mathbb{R}^2$ , X e Y são abertos, enquanto Z não é um conjunto aberto.

**Solução** Dado um ponto  $P(a,b) \in X$ , temos que  $a^2 + b^2 < 1$  e se considerarmos  $\delta = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}$ , então a  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P)$  está contida em X. De fato, dado Q(x,y) na vizinhança  $V_{\delta}(P)$ , então  $|Q - P| < \delta$  e, sendo assim,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |Q - O| = |(Q - P) + (P - O)| \le |Q - P| + |P - O| < \delta + \sqrt{a^2 + b^2} = 1.$$

Portanto,  $Q \in X$  e X é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$ . Agora, dado um ponto  $P(a,b) \in Y$ , temos que  $0 \le |a| < 1$ ,  $0 \le |b| < 1$  e para construirmos uma  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P)$ , contida em Y, basta considerarmos

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}, \text{ sendo } \delta_1 = \min\{|a|, 1 - |a|\} \text{ e } \delta_2 = \min\{|b|, 1 - |b|\},$$

e teremos  $V_{\delta}(P) \subseteq Y$ , pois se  $Q(x,y) \in V_{\delta}(P)$ , então  $|Q-P| < \delta$  e, portanto,

$$|x-a| \le |Q-P| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |x| \le |x-a| + |a| < \delta_1 + |a| < 1.$$

Da mesma forma, obtemos

$$|y-b| \le |Q-P| < \delta \Rightarrow |y-b| < \delta_2 \Rightarrow |y| < 1.$$

Assim,  $Q \in Y$  e Y é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$ . Finalmente, para comprovar que Z não é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$ , basta observar que não existe uma  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P)$ ,  $\delta > 0$ , do ponto P(a,0) do conjunto Z, inteiramente contida em Z.

Um conjunto X em  $\mathbb{R}^n$  denomina-se fechado se seu complementar  $\mathbb{R}^n - X$  for aberto. Por exemplo,

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \ge 1\}$$

é um conjunto fechado em  $\mathbb{R}^2$ , pois seu complementar

$$\mathbb{R}^2 - X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$ .

Um ponto  $P \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de fronteira de um conjunto X em  $\mathbb{R}^n$ , se qualquer  $\delta$ -vizinhança de P contém pontos de X e pontos fora de X, isto é,

$$V_{\delta}(P) \cap X \neq \emptyset$$
 e  $V_{\delta}(P) \cap (\mathbb{R}^n - X) \neq \emptyset$ .

Dado um conjunto X em  $\mathbb{R}^n$ , denomina-se fronteira de X, e anota-se  $\partial(X)$ , o conjunto de todos os pontos de fronteira de X. É claro que  $\partial(\mathbb{R}^n)$  é o conjunto vazio  $\emptyset$  e para qualquer conjunto X temos que  $\partial(X) = \partial(\mathbb{R}^n - X)$ , isto é, um conjunto X e seu complementar  $\mathbb{R}^n - X$  têm a mesma fronteira. Podemos utilizar a fronteira de um conjunto para determinar se ele é aberto ou fechado. Um conjunto X é aberto quando ele não tiver ponto em comum com sua fronteira e ele será fechado quando sua fronteira estiver inteiramente contida nele. Resumindo, temos:

$$\partial X \subseteq X \Rightarrow X$$
 é fechado e  $\partial X \cap X = \emptyset \Rightarrow X$  é aberto.

**Exemplo 1.3** Consideremos em  $\mathbb{R}^2$  os seguintes conjuntos:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \ e \ Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Temos que

$$\partial(X) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \quad e \quad \partial(Y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Solução Para comprovar nossa afirmação, fixemos um ponto P(a,0) do eixo x e um raio  $\delta > 0$ . Se  $0 < y < \delta$ , então o ponto Q(a,y) está em X, porque 0 < y, e também na vizinhança  $V_{\delta}(P)$ , de onde resulta que  $V_{\delta}(P)$  toca o conjunto X. Por outro lado, o ponto  $P \in V_{\delta}(P) \cap (\mathbb{R}^2 - X)$  e isso mostra que  $V_{\delta}(P)$  toca o complementar de X. Logo, o ponto P está na fronteira de X. Reciprocamente, dado  $P(a,b) \in \partial(X)$ , se b < 0, a vizinhança  $V_{\delta}(P)$ , com  $0 < \delta < -b$ , está contida em  $\mathbb{R}^2 - X$ , o que é impossivel pois  $P \in \partial X$ ; se b > 0, a vizinhança  $V_{\delta}(P)$ , com  $0 < \delta < b$ , está contida em X, o que é impossivel, pela mesma razão. Logo, b = 0 e a fronteira de X é o eixo x, isto é,

$$\partial(X) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

Na Figura 1.3, esboçamos a costrução feita acima. O conjunto X e sua fronteira  $\partial X$  não tem ponto em comum e, por essa razão, X é um conjunto aberto. Procedendo de forma similar, encontramos  $\partial(Y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  e observamos que  $Y \cap \partial Y = \emptyset$ , de onde resulta que Y é um conjunto aberto.

CAPÍTULO 1 CAMPOS ESCALARES 5

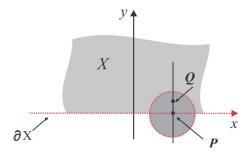


Figura 1.3: A fronteira de X.

Um conjunto X em  $\mathbb{R}^n$  denomina—se limitado se existir uma vizinhança  $V_r\left(O\right)$ , de centro na origem O de  $\mathbb{R}^n$  e raio r, suficientemente grande, tal que

$$X \subseteq V_r(O)$$
.

Em  $\mathbb{R}^2$  um conjunto X é limitado quando existir r > 0 tal que  $\sqrt{x^2 + y^2} < r$ , seja qual for o ponto (x, y) do conjunto X. De forma equivalente, X será limitado quando existir um número r > 0 tal que

$$|x| < r$$
 e  $|y| < r$ ,  $\forall (x, y) \in X$ .

De maneira intuitiva, em  $\mathbb{R}^2$  um conjunto X é limitado quando ele puder ser envolvido por uma circunferência ou por um retângulo.

**Exemplo 1.4** Vamos analisar, quanto a limitação, os seguintes subconjuntos do  $\mathbb{R}^2$ :

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1 \ e \ -1 \le y \le 2\} \ e \ Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

Solução Inicialmente observamos que o conjunto X é um retângulo com lados de comprimentos a=2 e b=3. Assim, considerando  $r=\max\{2,3\}=3$ , obtemos

$$X \subseteq V_3(O) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\},\$$

Portanto, X é um conjunto limitado em  $\mathbb{R}^2$ . Por outro lado, para cada r > 0 o ponto P(r+1,0) está no conjunto Y e não está na vizinhança  $V_r(O)$  de raio r e centro na origem. Isso mostra que não é possível se ter  $Y \subseteq V_r(O)$  e, sendo assim, Y não é um conjunto limitado em  $\mathbb{R}^2$ . Vejamos as ilustrações gráficas abaixo.

Um conjunto X em  $\mathbb{R}^n$  denomina-se compacto se ele é, ao mesmo tempo, limitado e fechado em  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto X do Exemplo 1.4 é compacto. Também é compacto o conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}.$$

O conjunto  $Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x\leq 0\}$  não é compacto, porque não é limitado, embora seja fechado. Já o conjunto  $Z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1\}$  não é compacto, porque não é fechado, embora seja limitado.

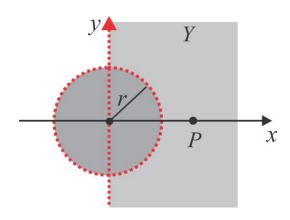


Figura 1.4: X é limitado

Figura 1.5: Y não é limitado

Um ponto  $P \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de acumulação de um subconjunto X em  $\mathbb{R}^n$ , se para qualquer número real  $\delta > 0$ , tem-se

$$(V_{\delta}(P) - \{P\}) \cap X \neq \varnothing.$$

Isto significa que toda vizinhança de P contém um ponto de X, diferente de P. Um ponto de acumulação pode estar no conjunto ou não. Por exemplo, a origem é um ponto de acumulação do conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

e não pertence a X. Observamos, ainda, que todos os pontos desse conjunto X são pontos de acumulação de X. O conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros não possui ponto de acumulação, pois dado  $x \in \mathbb{Z}$ , se considerarmos  $\delta = 1$  vemos que  $(V_{\delta}(x) - \{x\}) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ .

Um ponto  $P \in X$  que não é um ponto de acumulação de X recebe o nome de ponto isolado de X. Todos os pontos do conjunto  $\mathbb Z$  são isolados.

Um conjunto X em  $\mathbb{R}^n$  denomina-se conexo se quaisquer dois pontos distintos P e Q de X podem ser ligados por uma linha poligonal inteiramente contida em X (por linha poligonal entendemos uma curva constituída de um número finito de segmentos retilíneos em sucessão, tais que a extremidade de cada um coincida com a origem do seguinte). Um conjunto aberto e conexo recebe o nome de domínio. Por exemplo, o conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

é um domínio em  $\mathbb{R}^2$ . Vale ressaltar que um domínio não pode ser formado por dois conjuntos abertos disjuntos e não vazios. Assim, o conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$  não é um domínio em  $\mathbb{R}^2$ , pois

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$$

é a união de dois abertos disjuntos e não vazios.

Um conjunto X em  $\mathbb{R}^n$  aberto e conexo (um domínio) acrescido de alguns ou todos os seus pontos de fronteira denomina-se região. Uma região X é simplesmente conexa em  $\mathbb{R}^n$  se qualquer curva fechada em X pode ser reduzida, de maneira contínua, a um ponto em X, sem deixar X. Intuitivamente, uma região simplesmente conexa não possui buracos e isto significa que uma curva fechada em X só contém pontos de X no seu interior. Imaginemos um lago com uma ilha no seu interior; o espelho d'agua pode ser visto como uma região que não é simplesmente conexa. A título de ilustração, vamos

classificar topologicamente o conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1 \text{ e } -1 < y \le 2\},\$$

cujo gráfico está representado na Figura 1.6. Trata-se de um retângulo, cuja fronteira é constituída pelos segmentos (lados do retângulo)  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ . A fronteira de X não está inteiramente contida em X, fazendo com que X não seja fechado; não sendo fechado não será compacto, embora X seja limitado. O conjunto X não é aberto, tendo em vista que ele tem ponto em comum com sua fronteira; não sendo aberto não será domínio. Finalmente, X é um conjunto conexo.

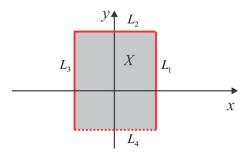


Figura 1.6: X é limitado e conexo.

**Exemplo 1.5** Se X é um conjunto compacto em  $\mathbb{R}^2$ , seu complementar  $Y = \mathbb{R}^2 - X$  não é um conjunto simplesmente conexo em  $\mathbb{R}^2$ .

Solução Sendo X um conjunto compacto em  $\mathbb{R}^2$ , ele é limitado e, portanto, existe uma vizinhança  $V_r(O)$  de centro na origem O de  $\mathbb{R}^2$  e raio r > 0 suficientemente grande, tal que

$$X \subseteq V_r(O)$$
.

Assim, a circunferência de centro na origem O de  $\mathbb{R}^2$  e raio r+1 está contida em Y, mas não pode ser reduzida de maneira contínua a um ponto qualquer em Y, sem deixar Y. Portanto, Y não é uma região simplesmente conexa em  $\mathbb{R}^2$ . Como consequência deduzimos que o conjunto

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2\}$$

não é simplesmente conexo em  $\mathbb{R}^2$ , porque é o complementar do conjunto compacto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}.$$

## Exercícios & Complementos

- 1. Em cada caso esboce o conjunto  $\mathcal{R}$  do plano  $\mathbb{R}^2$  e determine sua fronteira. Classifique  $\mathcal{R}$  em: aberto, fechado, limitado, compacto ou conexo.
  - (a)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0\}.$
  - (b)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0 \text{ e } x^2 + y^2 < 1\}.$
  - (c)  $\mathcal{R} = ]1, 2[ \times [0, +\infty[.$

- (d)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \le 2\}.$
- (e)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 < 9\}.$
- (f)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \text{ e } 1 \le y \le 2\}.$
- (g)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}.$
- (h)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1 \text{ e } -1 \le y < 2\}.$
- (i)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \ge 9\}.$
- (j)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{sen } x \le y \le \cos x, \ 0 \le x \le \pi/4 \}.$
- (k)  $\mathcal{R} = [0,1] \times [1,2]$ .
- (1)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}.$
- (m)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 y^2\}.$
- (n)  $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 1) y < 0\}.$
- (o)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 < y\}.$
- (p)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 2 \text{ e } 1 < x^2 + y^2\}.$
- (q)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y^2\}.$
- (r)  $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 2 \text{ e } 1 < x^2 + y^2 \}.$
- (s)  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 16 \text{ e } |x| \ge 2\}.$
- 2. Esboce o conjunto  $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 1) [(x-1)^2 + y^2 1] < 0\}$ , identifique sua fronteira e verifique que ele é aberto.

## 1.2 Funções Reais de Várias Variáveis

O conceito de função real de duas ou mais variáveis reais é análogo ao conceito de função real de uma variável real. Por exemplo, a equação

$$z = x^2 - y^2$$

exprime z como função de x e y. Diremos que z é uma função de x e y quando existir uma regra f que a cada ponto P(x,y) de um conjunto X em  $\mathbb{R}^2$ , denominado domínio de f, associar um único ponto  $z \in \mathbb{R}$ . Para indicar a conexão entre x, y e z usualmente escreve-se z = f(x,y) ou z = z(x,y). A Figura 1.7 ilustra a definição de uma função f de X em  $\mathbb{R}$ .

Escreveremos  $f:X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$  ou, simplesmente,  $f:X\to\mathbb{R}$  para indicar que f é uma função com domínio X e contradomínio  $\mathbb{R}$ . É comum usar D(f) para indicar o domínio da função f e no caso em que z=f(x,y), diremos que z é a imagem do ponto (x,y) pela função f ou que z é o valor da função f no ponto (x,y). As funções  $f:X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$  também são denominadas de campos ou funções escalares.

**Exemplo 1.6** A função f definida pela regra  $f(x,y) = x^2 + y^2$  tem para domínio todo o plano  $\mathbb{R}^2$ , já que a expressão  $x^2 + y^2$  pode ser calculada em qualquer (x,y) do  $\mathbb{R}^2$ .

CAPÍTULO 1 CAMPOS ESCALARES 9

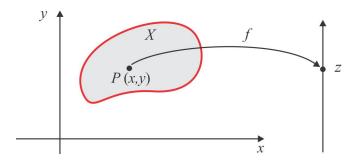


Figura 1.7: Ilustrando o conceito de função.

**Exemplo 1.7** Consideremos, agora, a função definida pela regra  $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ . Neste caso, para calcular a expressão  $\sqrt{1-x^2-y^2}$  devemos impor às variáveis x e y a restrição  $1-x^2-y^2 \ge 0$ , isto é,  $x^2+y^2 \le 1$ . Assim, o domínio da função f é o disco compacto  $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$  de centro na origem e raio 1.

**Exemplo 1.8** Determinar o domínio da função  $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida pela regra

$$f(x,y) = \log (36 - 4x^2 - 9y^2).$$

**Solução** No cálculo de uma variável aprendemos que o domínio da função  $t \mapsto \log t$  é o conjunto de todos os  $t \in \mathbb{R}$ , com t > 0. Logo, o domínio de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) do  $\mathbb{R}^2$  tais que  $t = 36 - 4x^2 - 9y^2 > 0$ , isto é,  $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 < 36\}$  é o interior da elipse  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$ , mostrado na Figura 1.8.

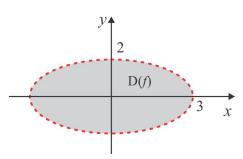


Figura 1.8: Domínio de  $f(x,y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$ .

Dada uma função  $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , o gráfico de f, denotado por G(f), é o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que z = f(x, y), isto é,

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f) \text{ e } z = f(x, y)\}.$$

A imagem da função f é o conjunto

$$\operatorname{Im}(f) = \{ z \in \mathbb{R} : z = f(x, y), \text{ para algum ponto } (x, y) \in D(f) \}.$$

É oportuno ressaltar que o gráfico de uma função real de duas variáveis reais representa um objeto do  $\mathbb{R}^3$ . A Figura 1.9 ilustra a definição do gráfico de uma função  $f:X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.9** Consideremos a função  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , cujo domínio é todo o plano  $\mathbb{R}^2$ . A imagem da função f é  $\operatorname{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\}$  e seu gráfico á a folha superior do cone  $z^2 = x^2 + y^2$ .

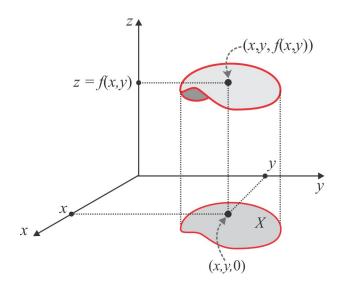


Figura 1.9: Gráfico da função z = f(x, y).

**Exemplo 1.10** O domínio da função  $f(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$  é o conjunto  $D(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  e sua imagem é a reta real  $\mathbb{R}$ . Não parece óbvio, mas seu gráfico é a superfície obtida por rotação da curva  $z = \log x^2$ ,  $x \neq 0$ , do plano xz, em torno do eixo z.

## 1.2.1 Curvas e Superfícies de Nível

Consideremos uma função de duas variáveis  $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , com z = f(x, y). Ao atribuirmos a z um valor constante k, geometricamente interceptamos o gráfico de f com o plano z = k e essa interseção recebe o nome de *conjunto de nível*. Em geral, a projeção no plano xy do conjunto de nível

$$C_k = \left\{ (x, y, k) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\left(f\right) \right\}$$

é uma curva, denominada curva de nível da função f correspondendo ao valor k, e esta é constituída dos pontos (x,y) de X, para os quais f(x,y) = k. A Figura 1.10 expõe de maneira intuitiva um conjunto de nível  $C_k$  e sua projeção no plano xy.

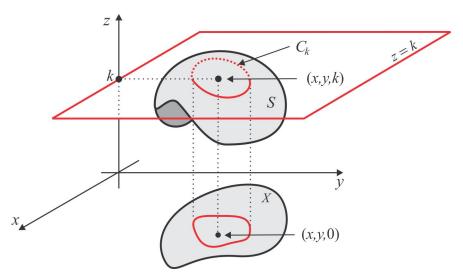


Figura 1.10: Curva de nível  $C_k$ .

No caso de uma função de três variáveis  $f: X \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ , sendo w = f(x, y, z), ao atribuirmos a

CAMPOS ESCALARES 11

w um valor constante k, o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z) \in X$  tais que w = k é, em geral, uma superfície  $S_k$ , denominada de superfície de nível da função f correspondente ao valor k.

**Exemplo 1.11** Consideremos o paraboloide  $z=x^2+y^2$  e vejamos algumas curvas de nível. No nível z=0, temos  $x^2+y^2=0$  e a curva se reduz ao ponto (0,0,0). No nível z=k, k>0, temos  $x^2+y^2=k$ , que representa uma circunferência de raio  $\sqrt{k}$  e centro C(0,0,k), cuja projeção no plano xy é a circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{k}$ . Na Figura 1.11 mostramos alguns conjuntos de nível e suas projeções no plano xy.

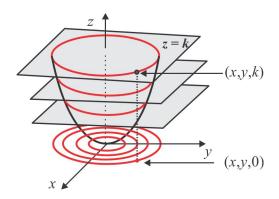


Figura 1.11: Curvas de nível de  $z = x^2 + y^2$ .

**Exemplo 1.12** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida pela regra  $f(x,y) = y^2 - x^2$ . As curvas de nível de f são determinadas de forma similar ao caso anterior. No plano xy elas correspondem aos gráficos da equação  $y^2 - x^2 = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , e há três casos a considerar:

- 1. se k > 0, então  $y^2 x^2 = k$  é uma hipérbole com vértices  $(0, \pm \sqrt{k})$ ;
- 2. se k = 0, então  $y^2 x^2 = k$  é o par de retas  $y = \pm x$ ;
- 3. se k < 0, então  $y^2 x^2 = k$  é uma hipérbole com vértices  $(\pm \sqrt{-k}, 0)$ .

Algumas curvas de nível e o gráfico da função f estão expostos na Figura 1.12.

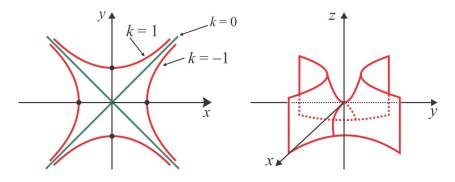


Figura 1.12: Paraboloide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$ .

**Exemplo 1.13** As superfícies de nível da função de três variáveis w = f(x, y, z) = x + y + z são os planos x + y + z = k. Já a função  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  tem para superfícies de nível as esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = k$ ,  $k \ge 0$ , de centro na origem e raio  $\sqrt{k}$ . No nível k = 0 a superfície correspondente se reduz ao ponto O(0,0,0).

**Exemplo 1.14** A função  $f(x,y) = \log(|x| - |y|)$  tem domínio  $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}$  e, no plano xy, as curvas de nível de z = f(x,y) são descritas por  $\log(|x| - |y|) = k$ , isto é, |x| - |y| = k $\exp(k)$ . As constantes  $c = \exp(k)$  são todas positivas e na Figura 1.13 mostramos o domínio de f e algumas curvas de nível. As curvas de nível nos proporciona uma visão geométrica do gráfico da função. Existem três entes geométricos distintos que merecem reflexão: o domínio, as curvas de nível e o gráfico da função.

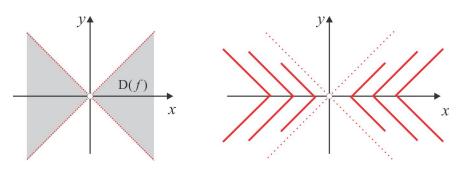


Figura 1.13: Domínio e curvas de nível de  $z = \log(|x| - |y|)$ .

## Exercícios & Complementos

1. Em cada caso identifique e represente graficamente o domínio da função z = f(x, y).

(a)	$z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$
(4)	$z = \sqrt{g}  x + \sqrt{2x}  g$

(g) 
$$z = \arccos(y - x)$$

(b) 
$$z = \sqrt{|x| - |y|}$$

(h) 
$$z = \sqrt{(x-3)(y-2)}$$

(c) 
$$4x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
,  $z \le 0$ 

(b) 
$$z = \sqrt{|x| - |y|}$$
 (h)  $z = \sqrt{(x-3)(y-2)}$   
(c)  $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \le 0$  (i)  $z = \arcsin[x/(x-y)]$ 

(d) 
$$z = \log\left(1 - 4x^2 - \frac{y^2}{9}\right)$$

(d) 
$$z = \log\left(1 - 4x^2 - \frac{y^2}{9}\right)$$
 (j)  $z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$  (e)  $z = \sqrt{\log(x^2 + y^2 - 3)}$  (k)  $z = \frac{x - y}{\sin x - \sin y}$ 

(e) 
$$z = \sqrt{\log(x^2 + y^2 - 3)}$$

(k) 
$$z = \frac{x - y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}$$

(f) 
$$z = x \exp(y) - \log x$$

(1) 
$$z = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}}$$

2. Em cada caso esboce algumas curvas de nível da função z = f(x, y), de modo a obter uma visualização do seu gráfico.

(a) 
$$z = x^2 + y^2$$

(i) 
$$z = 2x (x^2 + y^2)^{-1}$$

(b) 
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(i) 
$$z = xu$$

(c) 
$$z = (x^2 + y^2)^{-1}$$

(k) 
$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

(d) 
$$z = \log(1 + x^2 + y^2)$$

(1) 
$$z = \sqrt{1 - x^2/4 - y^2/9}$$

(e) 
$$z = x + y$$

(m) 
$$z = |x - y|$$

(f) 
$$z = \operatorname{sen}(x - y)$$

(1) 
$$z = |x| + |y|$$

(g) 
$$z = |x| - |y|$$

(n) 
$$z = x + y^2$$

(h) 
$$z = 8 - x^2 - 2y$$

(o) 
$$z = x - y^2$$

CAPÍTULO 1 CAMPOS ESCALARES

3. Esboce a curva de nível da função  $z = 2y - 4x^3$  que passa no ponto P(1,2). Observe o comportamento da função ao longo da tangente que passa no ponto P.

- 4. Identifique as superfícies de nível da função  $w = x^2 + y^2 + z^2$ , nos níveis 0, 1 e 2.
- 5. Identifique a superfície de nível da função  $w = x^2 + y^2 z^2$  que passa no ponto P(1,1,1).
- 6. Esboce o gráfico da função z = f(x, y) dada por:
  - (g)  $f(x,y) = \sqrt{x^2 y^2}$ (a) f(x,y) = 3
  - (h)  $f(x,y) = \sqrt{16 x^2 16y^2}$ (i)  $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ (j)  $f(x,y) = 1 x^2$

  - (b) f(x,y) = x(c) f(x,y) = 1 x y(d)  $f(x,y) = \exp \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)$ (e)  $f(x,y) = \exp \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)$ (f)  $f(x,y) = 3 x^2 y^2$ (h)  $f(x,y) = \sqrt{16 x^2 16y}$ (i)  $f(x,y) = \left( x^2 + y^2 \right)^{-1/2}$ (j)  $f(x,y) = 1 x^2$ (k)  $f(x,y) = \log \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)$
- 7. Descreva as superfícies de nível da função w = f(x, y, z).
  - (a) f(x,y,z) = x + 3y + 5z (b)  $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$  (c)  $f(x,y,z) = x^2 y^2 + z^2$  (d)  $f(x,y,z) = x^2 y^2$

#### Limite e Continuidade 1.3

Nesta seção apresentaremos as noções básicas sobre limites que serão necessárias para a formulação dos conceitos de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de uma função real de várias variáveis reais. Com o objetivo de tornar o texto mais leve, as demonstrações de alguns resultados serão omitidas.

#### 1.3.1 Motivação

Para motivar o que será desenvolvido, vamos considerar a função  $f(x,y) = \frac{xy}{r^2 + u^2}$  definida para  $(x,y) \neq (0,0)$ . Quando (x,y) se aproxima do ponto (1,0), indicamos isso escrevendo  $(x,y) \rightarrow (1,0)$ e lê-se (x,y) tende para (1,0), é razoável afirmar que os valores f(x,y) se aproximam de 0, que é o valor da função no ponto (1,0). Expressamos isso escrevendo

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f\left(x,y\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\y\to 0}} f\left(x,y\right) = 0.$$

Esse raciocínio não pode ser usado para investigar o comportamento da função na origem (0,0), porque a substituição direta de x e y por 0 na expressão  $\frac{xy}{x^2+y^2}$  produz a indeterminação 0/0. O que fazer neste caso? Essa questão será discutida posteriormente e ressaltamos que, neste caso, o valor do limite de f(x,y) em (0,0) depende do caminho que conduz o ponto (x,y) à origem. Vejamos o que ocorre com f(x,y), quando (x,y) tende para (0,0) através de dois caminhos distintos. Suponhamos inicialmente que  $(x,y) \to (0,0)$ , ao longo do eixo x, isto é, ao longo da reta y=0. Nesse caso, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to0\\y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to0} 0 = 0.$$

Se, por outro lado, (x, y) tende para (0, 0) ao longo da reta y = x, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} f\left(x,y\right) = \lim_{\substack{x\to0\\y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Quando lidamos com o limite  $\lim_{t\to a}g(t)$ , no cálculo de uma variável, só há duas maneiras do ponto t se aproximar do ponto a: ou  $t\to a^+$  ou  $t\to a^-$ , que resultam nos limites laterais  $\lim_{t\to a^+}g(t)$  e  $\lim_{t\to a^-}g(t)$  da função g(t). Se esses limites laterais forem iguais, então esse valor comum é o limite da função g(t) no ponto a. No caso do limite  $\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$  a situação é um pouco mais complexa, tendo em vista que há uma infinidade de caminhos segundo os quais (x,y) se aproxima do ponto (a,b) e é literalmente impossível efetuar o cálculo ao longo de todos os caminhos. Contudo, fica a lição:  $para que \ o \ limite \lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$  exista é necessário que os limites ao longo de todos os caminhos que conduzem (x,y) ao  $ponto\ (a,b)$  existam e sejam iguais.

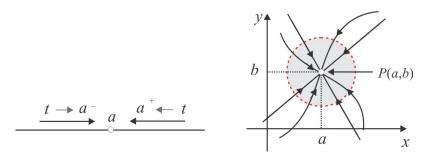


Figura 1.14: t tende para a e (x,y) tende para (a,b).

## 1.3.2 Conceito e Regras

Sabemos do cálculo de uma variável que uma função real de uma variável real y = f(x) tem limite L no ponto a, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se dado um número real  $\varepsilon > 0$ , existe em correspondência um  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D(f), \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Com respeito ao conceito de limite, vale ressaltar o seguinte: (i) a notação  $x \to a$  indica que a variável x se aproxima arbitrariamente de a, sem atingí-lo, isto é,  $x \neq a$ ; (ii) a condição  $|f(x) - L| < \varepsilon$  deve ser atendida para os valores de  $x \neq a$ , do domínio de f, que estejam na  $\delta$ -vizinhança  $(a - \delta, a + \delta)$  e (iii) não é necessário que f esteja definida em a para que ela tenha limite em a. Portanto, a noção de limite de uma função f em um ponto a está relacionada ao comportamento de f nos pontos próximos de a, excluindo o próprio a. Por exemplo,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = 4$$

mas claramente a função não está definida no ponto x=2.

Esse conceito de limite se estende de maneira natural para o cálculo de várias variáveis, substituindo o intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$  pela  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P)$ . Assim, dada uma função real de duas variáveis reais

CAPÍTULO 1 CAMPOS ESCALARES 15

f(x,y) definida em um conjunto D, do qual o ponto P(a,b) é um ponto de acumulação, então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

significa que dado um número real  $\varepsilon > 0$ , existe em correspondência um  $\delta > 0$  tal que

$$\forall (x,y) \in D, \ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Dada a arbitrariedade do número  $\varepsilon$ , não há perda de generalidade se na definição de limite esse  $\varepsilon$  for substituido por  $k\varepsilon$ , seja qual for a constante k>0. Intuitivamente, o conceito de limite estabelece que as imagens de todos os pontos da δ-vizinhança  $V_{\delta}(P)$ , exceto, possivelmente, o ponto P(a,b), estão dentro do intervalo de centro L e raio  $\varepsilon$ , como sugere a Figura 1.15.

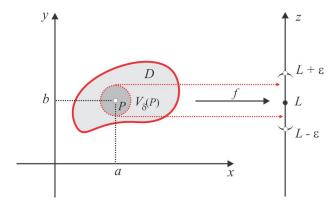


Figura 1.15: Limite de f(x, y) no ponto P.

As propriedades básicas do limite no cálculo de uma variável continuam válidas no cálculo de várias variáveis e algumas demonstrações serão deixadas como parte do processo de treinamento. Usaremos a letra P para indicar os pontos (x, y) do  $\mathbb{R}^2$  ou (x, y, z) do  $\mathbb{R}^3$ , indistintamente.

**Proposição 1.15** Sejam  $f, g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  duas funções e seja  $P_0(a, b)$  um ponto de acumulação do conjunto D. Se  $\lim_{P \to P_0} f(P) = L$  e  $\lim_{P \to P_0} g(P) = M$ , então:

- **1.** Linearidade:  $\lim_{P \to P_0} \{f(P) + \lambda g(P)\} = L + \lambda M$ , sendo  $\lambda$  uma constante real.
- **2.** Produto:  $\lim_{P \to P_0} \{f(P) \cdot g(P)\} = L \cdot M$ .
- **3.** Quociente:  $\lim_{P \to P_0} \left\{ \frac{f(P)}{g(P)} \right\} = \frac{L}{M}$ , desde que  $M \neq 0$ .
- **4.** Confronto:  $se\ L = M$  e  $f(P) \le h(P) \le g(P)$ ,  $\forall\ P,\ ent \~ao\ \lim_{P \to P_0} h(P) = L$ .

**Demonstração** Seja  $\varepsilon > 0$  dado e escolhamos dois raios  $\delta_1$  e  $\delta_2$  de modo que:

$$|f(P)-L| seja qual for o ponto  $P$  em  $D$ , tal que  $0<|P-P_0|<\delta_1$  e  $|g(P)-M| seja qual for o ponto  $P$  em  $D$ , tal que  $0<|P-P_0|<\delta_2.$$$$

1. Se  $\lambda = 0$ , nada há a demonstrar. Suponhamos  $\lambda \neq 0$  e seja  $\delta = \min\{\delta_1, \ \delta_2\}$ , o menor entre os números  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Se  $|P - P_0| < \delta$ , então teremos simultaneamente  $|P - P_0| < \delta_1$  e  $|P - P_0| < \delta_2$  e, sendo assim:

$$|f(P) + \lambda g(P) - L - \lambda M| \le |f(P) - L| + |\lambda| |g(P) - M| < (1 + |\lambda|) \varepsilon$$

seja qual for o ponto P em D tal que  $0 < |P - P_0| < \delta$ .

2. Observamos inicialmente que se  $P \in D$  e  $0 < |P - P_0| < \delta_1$ , então

$$|f(P)| \le |f(P) - L| + |L| < \varepsilon + |L|,$$

e, portanto,

$$|f(P)g(P) - LM| = |f(P)g(P) - f(P)M + f(P)M - LM|$$

$$\leq |f(P)||g(P) - M| + |M||f(P) - L| < (\varepsilon + |L|)\varepsilon + M\varepsilon = k\varepsilon,$$

desde que  $P \in D$  e  $0 < |P - P_0| < \delta$ .

4. se  $f(P) \le h(P) \le g(P)$ , então  $f(P) - L \le h(P) - L \le g(P) - L$  e, por conseguinte,

$$-\varepsilon < f(P) - L \le h(P) - L \le g(P) - L < \varepsilon,$$

desde que  $|P - P_0| < \delta$ . Logo,  $|h(P) - L| < \varepsilon$ , se  $|P - P_0| < \delta$  e com isso obtemos o resultado.

**Exemplo 1.16** Vamos usar a definição de limite para mostrar que  $\lim_{(x,y)\to(2,1)} (2x+y) = 5$ .

**Solução** Neste exemplo, a=2 e b=1 e devemos provar que a cada  $\varepsilon>0$  dado, corresponde um  $\delta>0$  tal que

$$0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta \Rightarrow |2x + y - 5| < \varepsilon.$$

O foco é a desigualdade  $|2x + y - 5| < \varepsilon$ , que envolve  $\varepsilon$ . Temos

$$|2x + y - 5| = |2(x - 2) + (y - 1)| \le 2|x - 2| + |y - 1|$$
(1.1)

e observando que

$$|x-2| = \sqrt{(x-2)^2} \le \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta$$
  
 $|y-1| = \sqrt{(y-1)^2} \le \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta$ 

resulta de (1.1) que  $|2x+y-5| \le 2|x-2|+|y-1| < 2\delta+\delta=3\delta$  e o próximo passo é escolher o  $\delta$  a partir do  $\varepsilon$ . A designaldade  $|2x+y-5| < 3\delta$  sugere que o  $\delta$  deve ser tal que  $3\delta \le \varepsilon$ . Se escolhermos, por exemplo,  $\delta = \varepsilon/3$ , teremos  $|2x+y-5| < \varepsilon$ , sempre que  $0 < \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} < \delta$ .

Exemplo 1.17 Imitando o que fizemos no Exemplo 1.16, vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (Ax + By) = aA + bB.$$

**Solução** Neste caso devemos provar que a cada  $\varepsilon > 0$  dado, corresponde um  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |Ax + By - aA - bB| < \varepsilon.$$

Mais uma vez o foco é a desigualdade  $|Ax + By - aA - bB| < \varepsilon$ . Temos

$$|Ax + By - aA - bB| = |A(x - a) + B(y - b)| < |A||x - a| + |B||x - b|$$
(1.2)

e observando que

$$|x-a| = \sqrt{(x-a)^2} \le \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
  
 $|y-b| = \sqrt{(y-b)^2} \le \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 

CAPÍTULO 1 CAMPOS ESCALARES 17

então  $|x-a| < \delta$  e  $|y-b| < \delta$ , sempre que  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ . Segue de (1.2) que

$$|Ax + By - aA - bB| < \delta(|A| + |B|), \tag{1.3}$$

e o  $\delta$  será escolhido a partir de (1.3). Admitindo que A ou B não é zero, do contrário nada há a demonstrar, escolhemos  $\delta = \varepsilon / (|A| + |B|)$  e teremos:

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |Ax + By - aA - bB| < \varepsilon,$$

como exige a definição.

Exemplo 1.18 Usando o Exemplo 1.17 e as propriedades do limite deduzimos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x^m + y^n) = a^m + b^n$$

e, de forma mais geral, se p(x,y) é um polinômio nas variáveis x e y, então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x,y) = p(a,b).$$

Por exemplo,

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(2x^2 + xy^2 + y^3\right) = 2 \times 1^2 + 1 \times (-1)^2 + (-1)^3 = 2.$$

**Exemplo 1.19** No caso do quociente de dois polinômios  $\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$ , em que o denominador q(x,y) não se anula no ponto (a,b), a propriedade do quociente estabelece que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \frac{p\left(x, y\right)}{q\left(x, y\right)} = \frac{\lim_{\left(x, y\right) \to \left(a, b\right)} p\left(x, y\right)}{\lim_{\left(x, y\right) \to \left(a, b\right)} q\left(x, y\right)} = \frac{p\left(a, b\right)}{q\left(a, b\right)}.$$

Por exemplo,

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{2x^2 + xy^2 + y^3}{x^2 - y} = \frac{\lim_{(x,y)\to(2,3)} \left(2x^2 + xy^2 + y^3\right)}{\lim_{(x,y)\to(2,3)} \left(x^2 - y\right)} = \frac{2 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 3^3}{2^2 - 3} = 35.$$

**Exemplo 1.20** Vamos usar a definição para mostrar que  $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x^2+y) = 5$ .

**Solução** Devemos provar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \Rightarrow |3x^2 + y - 5| < \varepsilon.$$

Como já vimos nos exemplos anteriores, o foco é decompor a expressão  $3x^2 + y - 5$  em parcelas onde devem figurar apenas os termos |x - 1| e |y - 2|, a menos de constantes multiplicativas. Temos

$$|3x^2 + y - 5| = |3(x^2 - 1) + (y - 2)| \le 3|x - 1||x + 1| + |y - 2|.$$
 (1.4)

A expressão (1.4) contém o termo |x+1| que não figura nos nossos planos e que deve ser majorado por uma constante. A noção intuitiva de limite nos leva a concluir que: quanto menor for o raio  $\delta$  maior será a chance da função f levar a  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P)$  dentro do intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ , de

modo que não há perda de generalidade em admitirmos que o  $\delta$  procurado seja menor do que 1. Logo, se  $|x-1| < \delta$  e  $\delta < 1$ , teremos

$$|x+1| = |x-1+2| \le 2 + |x-1| < 2 + \delta < 3,$$

e, dessa forma, obtemos

$$|3x^{2} + y - 5| \le 3|x - 1||x + 1| + |y - 2| < 3(3\delta) + \delta = 10\delta, \tag{1.5}$$

sempre que  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$ . A designaldade (1.5) sugere que  $\delta$  deve ser no máximo  $\varepsilon/10$  e a condição  $\delta < 1$ , imposta ao  $\delta$ , nos obriga a escolher  $\delta < \min\{1, \varepsilon/10\}$ . Com essa escolha do  $\delta$ , segue de (1.5) que

$$|3x^2 + y - 5| < 10\delta < \varepsilon$$
, se  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$ .

Portanto,  $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x^2 + y) = 5.$ 

Tivemos oportunidade de ver em alguns exemplos que o cálculo de limite por meio da definição pode ser complexo, até mesmo para funções simples, como é o caso de uma função quadrática, e o uso de técnicas facilitam o cálculo. Vejamos algumas dessas técnicas.

### ■ Usando os Limites Iterados

A fim de que a função f(x,y) tenha limite no ponto (a,b) é necessário, mas não suficiente, que os limites iterados

$$\lim_{x \to a} \left( \lim_{y \to b} f(x, y) \right) \quad \text{e} \quad \lim_{y \to b} \left( \lim_{x \to a} f(x, y) \right)$$

sejam iguais. Em outras palavras, se

$$\lim_{x \to a} \left( \lim_{y \to b} f(x, y) \right) \neq \lim_{y \to b} \left( \lim_{x \to a} f(x, y) \right),$$

então f(x,y) não tem limite no ponto (a,b). A igualdade entre os limites iterados, contudo, não assegura a existência do limite de f(x,y) no ponto (a,b).

Exemplo 1.21 Investigar, por meio dos limites iterados, a existência ou não do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

**Solução** Não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois a substituição direta de x e y por 0 na expressão  $\frac{x-y}{x+y}$  produz a forma indeterminada 0/0. Calculando os limites iterados, encontramos

$$\lim_{x \to 0} \left( \lim_{y \to 0} \frac{x - y}{x + y} \right) = \lim_{x \to 0} (1) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to 0} \left( \lim_{x \to 0} \frac{x - y}{x + y} \right) = \lim_{y \to 0} (-1) = -1$$

e, sendo os limites iterados diferentes, deduzimos que o limite não existe.

Exemplo 1.22 Usando o mesmo argumento do Exemplo 1.21, investigar o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}.$$

Solução Os limites iterados são, neste caso,

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}\right) = \lim_{x\to 0} (2) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}\right) = \lim_{y\to 0} (-1/3) = -1/3,$$

de onde resulta que o limite não existe.

## Usando Caminhos Particulares

Como enfatizamos no início desta seção, para que f(x,y) tenha limite no ponto (a,b) é necessário, mas não suficiente, que o valor do limite seja o mesmo ao longo de qualquer curva que conduza (x,y) ao ponto (a,b). Essa regra, como no caso anterior, é usada apenas para mostrar que o limite não existe e o procedimento é exibir dois caminhos (curvas) ao longo dos quais os limites são distintos.

**Exemplo 1.23** Investigar se a função 
$$f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^3 + y^3}$$
 tem limite na origem.

**Solução** Os limites iterados são, neste caso, iguais a zero, mas isso não assegura a existência do limite e muito menos que ele é zero. Fixemos os caminhos  $\gamma_1 : y = 0$  e  $\gamma_2 : y = x$  e calculemos o limite de f(x,y) ao longo desses caminhos.

no caminho 
$$\gamma_1$$
 :  $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to0\\y=0}} \frac{2xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{x\to0} \frac{0}{x^3} = \lim_{x\to0} 0 = 0.$ 

no caminho 
$$\gamma_2$$
:  $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to0\\y=x}} \frac{2xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{x\to0} \frac{2x^3}{2x^3} = \lim_{x\to0} 1 = 1.$ 

Ao longo dos caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  a função tem limites diferentes e isso mostra que ela não tem limite na origem.

**Exemplo 1.24** Investigar a existência do limite da função  $f(x,y) = \frac{x^2(y-1)}{x^4 + (y-1)^2}$ , no ponto (0,1).

**Solução** Se na expressão  $\frac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}$  substituirmos x por 0 e y por 1, chegaremos à forma inde-

terminada 0/0. Investigaremos o limite no ponto  $P_0(0,1)$ , o qual dever ser ponto de acumulação dos caminhos a serem considerados. Se considerarmos as retas  $\gamma_1: 1+mx$  e a parábola  $\gamma_2: y-1=x^2$ , teremos:

no caminho 
$$\gamma_1$$
:  $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in\gamma\\(x,y)\in\gamma}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to0\\y=1+mx}} \frac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2} = \lim_{x\to0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = 0.$ 

no caminho 
$$\gamma_2$$
:  $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in\gamma_2}} f\left(x,y\right) = \lim_{\substack{x\to0\\y-1=x^2}} \frac{x^2\left(y-1\right)}{x^4+\left(y-1\right)^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = 1/2.$ 

Observamos que o limite é zero ao longo de uma infinidade de retas e, ainda assim, o limite não existe, porque ao longo da parábola  $\gamma_2$  o valor do limite é 1/2.

**Exemplo 1.25** Verificar se a função  $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^3 + y^3}$  tem limite na origem.

**Solução** Os limites iterados na origem são iguais a zero, ao longo das retas y = mx e das parábolas  $y = kx^2$  a função f(x,y) tem limite zero na origem, e, ainda assim, ela não tem limite em (0,0). De fato, considerando o caminho  $\gamma : y = -xe^{-x}$  e usando a regra de L/Hôpital<sup>1</sup>, chegamos a:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma}}f\left(x,y\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\y=-xe^{-x}}}\frac{x^{4}e^{-2x}}{x^{3}(1-e^{-3x})}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x}}{1-e^{-3x}}=1/3.$$

Logo, o limite não existe, pois o seu valor depende do caminho que conduz o ponto P à origem.

## Usando a Limitação

Suponhamos exista um  $\delta > 0$ , tal que a função f(P) seja limitada no domínio  $V_{\delta}(P_0) - \{P_0\}$ , e que a função g(P) tenha limite zero em  $P_0$ . O produto h(P) = f(P)g(P) tem limite zero no ponto  $P_0$ . De fato, sendo  $\lim_{P\to P_0} g(P) = 0$  segue da definição que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|g(P)| < \varepsilon$ , para todo P na  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P_0)$ ,  $P \neq P_0$ , e sendo f limitada, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe uma constante positiva M tal que  $|f(P)| \leq M$ , com P na vizinhança  $V_{\delta}(P_0)$ ,  $P \neq P_0$ , Logo,

$$|h(P) - 0| = |f(P) \times g(P)| = |f(P)| \times |g(P)| < M\varepsilon,$$

desde que P esteja em  $V_{\delta}(P)$  e  $P \neq P_0$ , isto é,  $0 < |P - P_0| < \delta$ . Isso mostra que  $\lim_{P \to P_0} h(x, y) = 0$ .

**Exemplo 1.26** Mostrar que 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

**Solução** Vamos decompor a função  $h\left(x,y\right)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$  no produto de uma função limitada por outra que tem limite zero. Consideremos a decomposição

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\text{limitada}} \times \underbrace{y}_{\downarrow 0}$$

É claro que g(x,y) = y tem limite zero na origem e a função  $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  é limitada, porque

$$|f(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le 1, \quad \forall (x,y) \ne (0,0).$$

**Exemplo 1.27** Mostrar que função  $f(x,y,z) = \frac{3x^2y + yz^3}{x^2 + y^2 + z^2}$  tem limite zero na origem.

Solução De fato,

$$\frac{3x^2y + yz^3}{x^2 + y^2 + z^2} = \underbrace{3y}_{\downarrow 0} \times \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}}_{\text{limitada}} + \underbrace{yz}_{\downarrow 0} \times \underbrace{\frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}}_{\text{limitada}}$$

Logo,  $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0.$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704), um nobre francês que escreveu o primeiro texto introdutório de cálculo diferencial, em que a regra foi impressa pela primeira vez.

CAPÍTULO 1 CAMPOS ESCALARES 21

**Exemplo 1.28** A função  $f(x,y) = [x^2 + (y-1)] \operatorname{sen}(y^3 + 1/x^2)$  tem limite zero no ponto  $P_0(0,1)$ . Isto decorre do fato da função f(x,y) ser o produto da função  $g(x,y) = \operatorname{sen}(y^3 + 1/x^2)$ , que é limitada, pela função  $h(x,y) = x^2 + (y-1)$ , que tem limite zero no ponto  $P_0(0,1)$ . Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left[ x^2 + (y-1) \right] \operatorname{sen}(y^3 + 1/x^2) = 0.$$

Observação 1.29 No Exemplo 1.28 não podemos usar a propriedade sobre o limite do produto, porque naquela propriedade admite-se a existência de cada limite envolvido. Ressaltamos que a função  $g(x,y) = \text{sen}(y^3 + 1/x^2)$  não tem limite no ponto  $P_0(0,1)$ , embora seja limitada.

## Usando Coordenadas Polares

Certos limites na origem podem ser calculados com auxílio das coordenadas polares  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Como  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , segue que  $(x, y) \to (0, 0)$  se, e só se,  $r \to 0$  e, assim, se o valor do limite, com  $r \to 0$ , não depender da direção  $\theta$ , esse será o valor do limite original, com  $(x, y) \to (0, 0)$ .

**Exemplo 1.30** Usando coordenadas polares, vamos mostrar que  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0.$ 

Solução Efetuando a mudança para coordenadas polares, obtemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{3r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} \left(3r\cos^2\theta\sin\theta\right) = 0,$$

independente da direção  $\theta$ . Daí segue o que queríamos.

Observação 1.31 A mudança para coordenadas polares pode nos levar a conclusões falsas. Por exemplo, em coordenadas polares a função

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

assume a forma:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}, \quad quando \ r \neq 0,$$

e se fizermos  $\theta$  constante, de modo que sen  $\theta \neq 0$ , teremos  $\lim_{r \to 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$ . Esse cálculo induz a afirmação (falsa!) de que o limite da função na origem é igual a 0. Observamos que ao longo do parábola  $y = x^2$ , isto é,  $r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta$ , obtemos

$$f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right) = \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} = \frac{2r^2\cos^2\theta\cos^2\theta}{r^2\cos^4\theta + r^2\cos^4\theta} = 1$$

 $e, \ portanto, \ \lim_{r \to 0} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) = 1. \ Logo, \ a \ função \ f\left(x,y\right) \ não \ tem \ limite \ na \ origem.$ 

## 1.3.3 Continuidade

Consideremos uma função  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  e seja  $P_0(a, b)$  um ponto fixado no conjunto D, domínio da função f. Diremos que f é contínua no ponto  $P_0$ , se  $P_0$  for um ponto isolado de D ou se  $P_0$  for um ponto de acumulação de D e as seguintes condições forem satisfeitas:

1.  $\lim_{P\to P_0} f(x,y)$  existe, isto é,  $\lim_{P\to P_0} f(x,y)$  é um número real.

2.  $\lim_{P\to P_0} f(x,y) = f(P_0)$ .

Quando f for contínua em cada ponto P do conjunto D, diremos que f é contínua em D.

Formalmente, f ser contínua no ponto  $P_0$ , do domínio D de f, significa que a cada número real  $\varepsilon > 0$  dado, existe em correspondência um  $\delta > 0$  tal que

$$(x,y) \in D, \ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon.$$

Neste caso, teremos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(\lim_{x\to a} x, \lim_{y\to b} y).$$

Geometricamente, a função f ser contínua no ponto  $P_0$  significa que, para cada intervalo aberto  $I_{\varepsilon}$  com centro em  $f(P_0)$  e raio  $\varepsilon$  podemos encontrar uma  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P_0)$  de  $P_0$ , tal que  $f(x,y) \in I_{\varepsilon}$ , para cada  $(x,y) \in V_{\delta}(P_0)$ . A Figura 1.16 ilustra a definição de continuidade da função f no ponto  $P_0$ .

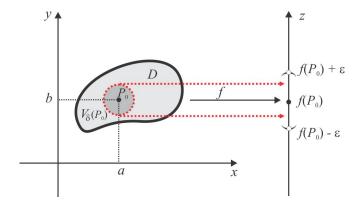


Figura 1.16: Continuidade de f(x, y) no ponto  $P_0$ .

Quando f não for contínua em  $P_0$ , diremos que f é descontínua no ponto  $P_0$  e isso ocorrerá se ao menos uma das condições da definição não for atendida. O ponto  $P_0$  é uma descontinuidade removível de f se existir  $\lim_{P\to P_0} f(x,y)$ , mas  $\lim_{P\to P_0} f(x,y) \neq f(P_0)$ . Quando não existir o limite  $\lim_{P\to P_0} f(x,y)$  o ponto  $P_0$  denominar-se-á descontinuidade essencial de f.

Como consequência das propriedades do limite, segue o seguinte resultado:

**Proposição 1.32** Se f e g são funções contínuas em  $P_0$  e  $\lambda$  é um número real, então as funções  $f + \lambda g$ , |f| e fg são contínuas em  $P_0$ . Se  $g(P_0) \neq 0$ , então o quociente f/g é uma função contínua em  $P_0$ .

**Exemplo 1.33** Os polinômios p(x,y) são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ ; as funções racionais (quociente de polinômios)  $\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$  são contínuas nos pontos em que  $q(x,y) \neq 0$ .

**Exemplo 1.34** Estudar a continuidade da função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

CAPÍTULO 1 CAMPOS ESCALARES 23

**Solução** A função f tem uma descontinuidade essencial na origem, porque o limite de f na origem não existe. Por outro lado, no conjunto aberto  $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$ , a função f é contínua por ser uma função racional com denominador diferente de zero. Portanto, o conjunto de continuidade de f é  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ .

**Exemplo 1.35** Estudar a continuidade da função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**Solução** No conjunto  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , isto é, nos pontos  $(x,y) \neq (0,0)$  a função é contínua, porque é uma função racional com denominador diferente de zero. Por outro lado, vimos no Exemplo 1.30, que  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$  e, portanto, f é contínua, também, em (0,0). O conjunto de continuidade de f é o plano  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 1.36** Classificar a descontinuidade da função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Solução** A única descontinuidade de f ocorre em (0,0). De fato, conforme vimos no Exemplo 1.26,  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$  e como f(0,0) = 1, então (0,0) é uma descontinuidade removível de f. Para remover essa descontinuidade, basta redefinir a função f na origem pondo f(0,0) = 0.

Exemplo 1.37 (função com inúmeras descontinuidades) Estudar a continuidade da função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & se \ x^2 + y^2 \le 1\\ 0, & se \ x^2 + y^2 > 1, \end{cases}$$

**Solução** Dado um ponto  $P_0(a,b)$  na circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ , então

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ |P| < 1}} f(x, y) = a^2 + b^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{P \to P_0 \\ |P| > 1}} f(x, y) = 0,$$

e isso mostra que cada ponto da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  é uma descontinuidade essencial da função f(x,y). Nos demais pontos do  $\mathbb{R}^2$  a função é contínua.

## Funções Elementares do Cálculo

Sabemos do cálculo de uma variável que  $e^t$ ,  $\log t$ ,  $\sin t$ ,  $\cos t$ ,  $\sqrt{t}$ ,  $\arccos t$ , etc. são funções contínuas em seus respectivos domínios. Essas são algumas das funções elementares, uma importante classe de funções do cálculo. São funções elementares: os polinômios, as funções racionais, exponenciais e logarítmos, as funções trigonométricas, além das composições e combinações dessas. Por exemplo, a função  $f(t) = \sqrt{\sin t} + \cos (t^2 + 1) - (\sin t + e^t) \log t$  é uma função elementar, contínua em seu domínio. O que dizer sobre a continuidade da função

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \arctan(xy)$$

no seu domínio? Sobre a composição de funções contínuas temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.38** Sejam  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  e  $g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  duas funções reais e suponhamos que  $\operatorname{Im}(f) \subseteq D(g)$ . Se f é contínua em  $P_0$  e g é contínua em  $t_0 = f(P_0)$ , então a função composta  $g \circ f: D \to \mathbb{R}$  é contínua em  $P_0$ .

Com os resultados já estabelecidos podemos investigar a continuidade das demais funções elementares do cálculo de várias variáveis. Vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.39** A função  $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$  tem para domínio o disco compacto  $D: x^2+y^2 \le 1$  e podemos escrever f(x,y) como composição de funções contínuas elementares. De fato, considerando  $g(t) = \sqrt{t}$ , definida e contínua para  $t \ge 0$ , e  $p(x,y) = 1-x^2-y^2$ , então

$$(g \circ p)(x,y) = g(p(x,y)) = g(1-x^2-y^2) = \sqrt{1-x^2-y^2} = f(x,y)$$

e resulta da Proposição 1.38 que f(x,y) é contínua no seu domínio D.

## Exercícios & Complementos

- 1. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por f(0,0) = 0 e  $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ , se  $(x,y) \neq (0,0)$ . Mostre que  $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,1) f(1,1)}{h} = 0 \text{ e } \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) f(0,0)}{k} = 0.$
- 2. Mostre que a função z = f(x, y) não tem limite quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

(a) 
$$z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$
 (e)  $z = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$  (i)  $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$ 

(b) 
$$z = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
 (f)  $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  (j)  $z = \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}$ 

(c) 
$$z = \frac{|x|}{x - y^3}$$
 (g)  $z = \frac{x^6}{(x^3 + y^2)^2}$  (k)  $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 

(d) 
$$z = \frac{xy}{2x^2 + 3y^2}$$
 (h)  $z = \frac{xy(x-y)}{x^4 + y^4}$  (l)  $z = \frac{x^4 + y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$ 

3. Verifique que a função

$$f\left( {x,y,z} \right) = \frac{{{x^2} + {y^2} - {z^2}}}{{{x^2} + {y^2} + {z^2}}}$$

não tem limite na origem.

4. Calcule os seguintes limites:

(a) 
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \log(xy+1)$$
 (f)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\exp \operatorname{sen}(x^2y) + \cos y}{\cos(xy)}$ 

(b) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-1)\sin x}{x}$$
 (g)  $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} z \sin\left[(x^2y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$ 

(c) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$
 (h) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y+1)\operatorname{sen}(xy)}{y}$$

(d) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{\sin x \sin y}$$
 (i)  $\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} [x\cos(y/4)+1]^{2/3}$ 

(e) 
$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \arctan(y/x)$$
 (j)  $\lim_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt{x^3+2y}$ 

(a) 
$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y) = 11$$
 (g)  $\lim_{(x,y)\to(3,-1)} (x^2+y^2-4x+2y) = -4$ 

(b) 
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x^2 - 2y) = -1$$
 (h)  $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{y^3 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$  (c)  $\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + y^2) = 2$  (i)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \sin(1/x) = 0$ 

(c) 
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2) = 2$$
 (i)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \sin(1/x) = 0$ 

(d) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$
 (j)  $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} (2x+y+z) = 4$ 

(e) 
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} (2x^2 - y^2) = -1$$
 (k)  $\lim_{(x,y)\to(1,-2)} (x^2 - y^2) = -3$ 

(f) 
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^2 - 1) = 0$$
 (l)  $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2(x-1)^2(y-2)}{3(x-1)^2 + 3(y-2)^2} = 0.$ 

6. Mostre que

(a) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{x} = 0$$
. Use  $1+\cos\sqrt{xy}$  como fator de racionalização.

(b) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\operatorname{cos}\sqrt{x^2+y^2}} = 2$$
. Use coordenadas polares e a regra de  $L'$ Hôpital.

(c) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = \infty$$
. Use a designal dade  $\sqrt{x^2+y^2} \le |x|+|y|$ .

7. Mostre que as funções

$$f(x,y) = \frac{xy}{y - x^3}$$
 e  $g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 - y^2}$ 

não têm limite na origem.

- 8. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x,y) = \frac{3x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$ . Calcule os limites de f(x,y) quando  $(x,y) \to (0,0)$ , ao longo dos seguintes caminhos: (a) eixo x; (b) reta y=x; (c) curva  $y = x^2$ . A função f tem limite em (0,0)? Por quê?
- 9. Verifique se a função  $z=f\left( x,y\right)$  é contínua no ponto P indicado.

(a) 
$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$
,  $P(-3, 4)$ .

(b) 
$$z = \exp(-xy)\log(7 + x^2 - 2y)$$
,  $P(0,0)$ .

(c) 
$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$
,  $P(0,0)$ .

(d) 
$$z = \frac{xy}{y - 2x}$$
, se  $y \neq 2x$  e  $f(x, 2x) = 1$ ,  $P(1, 2)$ .

10. Identifique a função z = z(x, y) como combinação de funções elementares do cálculo e deduza que ela é contínua em seu domínio.

(a) 
$$z = \sqrt{xy}$$
 (c)  $z = \frac{x}{y^2 - 1}$  (e)  $z = \arcsin(y/x)$ 

(b) 
$$z = \frac{4x^2 - y^2}{2x - y}$$
 (d)  $z = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$  (f)  $z = \log(xy - 2)$ 

11. Discuta a continuidade das seguintes funções:

(a) 
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$
, se  $x \neq y$  e  $f(x,x) = 1$ .

(b) 
$$f(x,y) = \exp\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)$$
, se  $x^2 + y^2 < 1$  e  $f(x,x) = 0$  se  $x^2 + y^2 \ge 1$ .

(c) 
$$f(x,y) = \frac{\exp(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$
, se  $(x,y) \neq (0,0)$  e  $f(0,0) = 1$ .

(d) 
$$f(x,y) = \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y}$$
, se  $x+y \neq 0$  e  $f(x,-x) = 1$ .

(e) 
$$f(x,y,z) = \frac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$
, se  $(x,y,z) \neq (0,0,0)$  e  $f(0,0,0) = 0$ .

(f) 
$$f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$$
, se  $4x^2 + 9y^2 \le 1$  e  $f(x,y) = 0$ , se  $4x^2 + 9y^2 > 1$ .

(g) 
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
, se  $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$  e  $f(x,y,z) = 0$ , se  $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ .

- 12. Sejam g e h funções definidas em  $\mathbb{R}^2$  por:  $g(0,0)=1,\ h(0,0)=1$  e para  $(x,y)\neq (0,0)$  considere  $g(x,y)=\frac{3x^2y}{x^2+y^2}$  e  $h(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ . Verifique que a origem é uma descontinuidade de g(x,y) e de h(x,y). Em que caso a descontinuidade pode ser removida? Recorde-se que remover uma descontinuidade significa redefinir a função de modo a torná-la contínua.
- 13. Verifique que a origem é uma descontinuidade da função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Essa descontinuidade pode ser removida?

14. Sabendo que

$$1 - \frac{x^2 y^2}{3} \le \frac{\arctan\left(xy\right)}{xy} < 1 \ \ \text{e} \ \ 2\left|xy\right| - \frac{x^2 y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{\left|xy\right|} < 2\left|xy\right|,$$

calcule os seguintes limites: (a)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(xy)}{xy}$  e (b)  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$ 

15. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verifique que f é contínua em todo ponto P(x,y) do  $\mathbb{R}^2$  e calcule os limites

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} \quad e \quad \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k)}{k}.$$

16. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^3}, & \text{se } x^2 + y^3 \neq 0\\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- (a) Calcule o limite de f na origem, ao longo das retas y = mx.
- (b) Calcule o limite de f na origem, ao longo da curva  $y = -x^{2/3}e^x$ .
- (c) Calcule o limite de f na origem, ao longo da curva em coordenadas polares  $r = \cos^2 \theta$ ,  $-\pi/2 \le \theta \le 0$ .
- (d) Investigue a continuidade de f.
- 17. Use o item (c) do Exercício 6 e mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

18. Use coordenadas polares e mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

### RESPOSTAS & SUGESTÕES

### SEÇÃO 1.1 CONCEITOS TOPOLÓGICOS

1. Tabela de classificação topológica.

Aberto	(e)	(g)	(o)	(q)											
Fechado	(a)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)								
Limitado	(b)	(d)	(h)	(j)	(k)	(1)	(r)	(s)							
Conexo	(a)	(b)	(c)	(d)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(1)	(o)	(p)	(r)	(s)
Compacto	(j)	(k)	(1)	(m)											

- 2. Identificando a fronteira. Como ilustração, faremos os detalhes dos itens (f) e (s).
  - (a)  $\partial \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$
  - (b)  $\partial \mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, \ x \ge 0\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 1\}.$
  - (c)  $\partial \mathcal{R} = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0\} \cup \{(2, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2\}.$
  - (d)  $\partial \mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}.$
  - (e)  $\partial \mathcal{R}$  é constituída das retas x = -3, x = -2, x = 2 e x = 3.
  - (f) Primeiro observamos que a região  $\mathcal{R}$  é descrita por duas sentenças juntas pelo conectivo "e": x>0 e  $1\leq y\leq 2$ . A inequação x>0, com y livre, representa graficamente o semiplano à direita do eixo y, confira Figura 1.17 (a), enquanto a inequação  $1\leq y\leq 2$ , com x livre, representa graficamente a faixa horizontal compreendida entre y=1 e y=2, confira Figura 1.17 (b). Portanto, o esboço da região é dado pela Figura 1.17 (c). Observando o esboço da região  $\mathcal{R}$  concluímos que  $\mathcal{R}$  não é aberta e nem fechada, não é limitada e nem compacta, mas é uma região simplesmente conexa. Além disso,

$$\partial \mathcal{R} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 2\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0\} \cup \{(x, 2) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0\}.$$

(g) 
$$\partial \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}.$$

Figura 1.17: Esboço da região  $\mathcal{R}$ .

- (h)  $\partial \mathcal{R} = \{(\pm 1, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 2\} \cup \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\} \cup \{(x, 2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\}.$
- (i)  $\partial \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 9\}.$
- (j)  $\partial \mathcal{R} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1\} \cup \{(x, \sin x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi/4\} \cup \{(x, \cos x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi/4\}.$
- (k)  $\partial \mathcal{R}$  é o quadrado de vértices (0,1), (0,2), (1,2) e (1,1).
- (l)  $\partial \mathcal{R}$  é o quadrado de vértices  $(0, \pm 1)$  e  $(\pm 1, 0)$ .
- (m)  $\partial \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y^2 = 1\}.$
- (n)  $\partial \mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty\}.$
- (o)  $\partial \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}.$
- (p)  $\partial \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}.$
- (q)  $\partial \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}.$
- (r)  $\partial \mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$
- (s) O conjunto  $\mathcal{R}$  é a interseção do interior mais a fronteira da elipse  $x^2 + 4y^2 \le 16$ , com os semiplanos  $x \le -2$  e  $x \ge 2$ . Portanto, um conjunto fechado e limitado, ou seja, um conjunto compacto e a fronteira é constituida dos segmenos de reta  $\{(\pm 1, y) : -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}\}$  e dos arcos

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 & : & \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 16, \ x \leq -2 \ \mathrm{e} & -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3} \right\} & \epsilon \\ \gamma_2 & : & \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 16, \ x \geq 2 \ \mathrm{e} & -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3} \right\}. \end{array}$$

3. A fronteira de  $\mathcal{R}$  é

$$\partial \mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}.$$

e temos que R é aberta, porque  $\mathcal{R} \cap \partial \mathcal{R} = \emptyset$ .

## SEÇÃO 1.2 FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1. Não esqueça de fazer o esboço de cada domínio!

- (a)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2 \text{ e } 2x \ge y\}.$
- (b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| < y < |x| \}.$
- (c)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \le 1\}.$
- (d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + \frac{y^2}{9} < 1\}.$
- (e)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \ge 4\}.$
- (f)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$
- (g)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x 1 \le y \le x + 1\}.$
- (h)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 3 \text{ e } y \le 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 3 \text{ e } y \ge 2\}.$
- (i)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le \frac{x}{x y} \le 1\}.$
- (j)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$
- (k)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq (-1)^n x + n\pi\}.$
- (1)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 1) (y^2 1)^{-1} \ge 0\}.$
- 2. Em cada caso faça  $z=k,\,k$  constante, para obter as curvas de nível. Faça um esboço de pelo menos duas curvas de nível!
- 3. No ponto P=(1,2) tem-se que z=0 e a curva de nível por P é  $y=2x^3$ . A reta tangente tem equação y=6x-4 (m=y'=6 é a inclinação da reta) e sobre essa reta  $z=f(x)=-4x^3+12x-8$ . Assim, quando  $x\to\pm\infty$ , a função f tende para  $\mp\infty$ .
- 4. A origem O = (0,0,0), a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ , respectivamente.
- 5. O hiperboloide de uma folha  $x^2 + y^2 z^2 = 1$ .
- 6. Faça um esboço!
  - (a) z=3, representa o plano passando por P=(0,0,3) e paralelo ao plano xy.
  - (b) z = x, representa o plano contendo a reta z = x.
  - (c) x + y + z = 1.
  - (d)  $z = \operatorname{sen} y$ , representa uma superfície em forma de telha contendo a curva  $z = \operatorname{sen} y$ , pois x é livre.
  - (e)  $z = \exp(\sqrt{x^2 + y^2})$ .
  - (f)  $z = 3 x^2 y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3 z$  ( $z \ge 3$ ), representa um paraboloide.
  - (g)  $z = \sqrt{x^2 y^2}$ .
  - (h)  $z = \sqrt{16 x^2 y^2}$ .
  - (i)  $z = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}2}$ .
  - (i)  $z = 1 x^2$ .
  - (k)  $z = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ .
  - (1)  $z = \text{sen}(x^2 + y^2)$ .

7. (a) planos (b) elipsoides (c) hiperboloides (d) cilindros.

#### SEÇÃO 1.3 LIMITE & CONTINUIDADE

- 2 Além dos caminhos canônicos como as retas, considere:  $y = \sqrt{x}$  em (e),  $y^2 = x^3$  em (g),  $y = x^2$  em (h),  $y = -x^2 e^x$  em (i) e  $y = -x e^x$  em (j).
- 4 (a) 0, (b) -1, (c) 1, (d)  $\frac{1}{2}$ , (e)  $\frac{\pi}{4}$ , (f) 2, (g) 0, (h) 0, (i)  $\left(1+\sqrt{2}/2\right)^{2/3}$ .
- 7 (a) Considere os caminhos y = 0 e  $y = x^k e^x$ , escolhendo k adequado (b) Idem.
- 8 (a) 0 (b) 0 (c)  $\frac{3}{8}$ . A função não tem limite em (0,0).
- 9 (a) Sim (b) Sim (c) Não (d) Não.
- 10 A função f(x,y) é combinação de funções elementares sendo, portanto, contínua em seu domínio.
  - (a)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0 \text{ e } y \le 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0 \text{ e } y \ge 0\}.$
  - (b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2x\}.$
  - (c)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm 1\}.$
  - (d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}.$
- 11 Note que a função está definida em todo plano  $\mathbb{R}^2$ .
  - (a) f é descontínua nos pontos da reta y=x, exceto no ponto  $P=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ .
  - (b) f é contínua em todos os pontos do  $\mathbb{R}^2$ .
  - (c) f é descontínua na origem.
  - (d) f não tem ponto de descontinuidade, isto é, ela é contínua em todo  $\mathbb{R}^2$ .
  - (e) f é descontínua na origem;
  - (f) f é descontínua nos pontos da elipse  $4x^2 + 9y^2 = 1$ .
  - (g) f é descontínua nos pontos da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
- 12 A função g é descontínua em (0,0), pois o limite de g(x,y) na origem é 0 e g(0,0) = 1. Para remover essa descontinuidade basta redefinir g na origem, pondo g(0,0) = 0. A função h(x,y) é descontínua em (0,0), pois não tem limite nesse ponto. Esse é o caso de uma descontinuidade que não pode ser removida, ou seja, uma descontinuidade essencial.
- 13 Usando coordenadas polares e a Regra de L'Hôpital, obtém-se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{1-\cos r} = \lim_{r\to 0} \frac{2r\cos r^2}{\sin r} = \lim_{r\to 0} \frac{2\cos r^2 - 2r\sin r^2}{\cos r} = 2.$$

Note que, sendo f(0,0) = 0, a função f é descontínua na origem. Essa descontinuidade pode ser removida redefinindo f na origem por f(0,0) = 2.

CAPÍTULO 1 CAMPOS ESCALARES

15 Sobre a continuidade de f(x, y). Fora da origem a função f é combinação de funções elementares sendo, portanto, contínua. Na origem, tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\exp\left(1/r^2\right)} = 0 = f(0,0).$$

Logo, f é contínua em todo plano  $\mathbb{R}^2$ . Pondo h=1/u, com h>0, use a Regra de L'Hôpital e deduza que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{u \to \infty} \frac{u}{\exp(u^2)} = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{2u \exp(u^2)} = 0.$$

Em que momento no cálculo do limite acima foi utilizada a Regra de L'Hôpital?

16 (a) Ao longo das retas y = mx, tem-se

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^3 x^3} = 0.$$

- (b) Na curva  $y = -x^{2/3}e^x$ , use a Regra de L'Hôpital e mostre que o limite não é 0.
- 18 Usando coordenadas polares e a Regra de L'Hôpital, deduza que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} (r^2 \log r) = \lim_{r\to 0} \frac{\log r}{1/r^2} = 0.$$

Em que momento no cálculo do limite acima foi utilizada a Regra de L'Hôpital?

# 2. Diferenciabilidade

Neste Capítulo vamos apresentar os conceitos e regras envolvendo derivadas parciais, com aplicações a diversos problemas práticos. Imaginemos que uma situação prática (por exemplo, uma distribuição de temperatura em uma placa, ou um mapa cartográfico) seja modelada por uma função de duas variáveis z = f(x, y) e desejamos determinar as direções nas quais a temperatura f(x, y) cresce (ou decresce) mais rapidamente, a partir de um ponto P(x, y) da placa, e a taxa de crescimento (ou decrescimento) nessas direções. Este e outros tipos de problemas práticos serão modelados e resolvidos oportunamente.

Vamos recordar inicialmente o conceito e as regras básicas de derivação para uma função de uma variável real, como motivação para o cálculo diferencial de várias variáveis reais. Consideremos uma função de uma variável y = f(x) definida em um intervalo I e fixemos um ponto c no interior desse intervalo. Seja  $h \neq 0$  e suponhamos |h| pequeno o bastante, de modo que c+h ainda esteja no intervalo I. A declividade da reta que passa nos pontos A(c, f(c)) e B(c+h, f(c+h)) depende, naturalmente, de h e é dada por

$$m(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$
(2.1)

Quando h tende a zero, o ponto B desliza sobre o gráfico em direção ao ponto A e a reta por A e B se aproxima da reta tangente ao gráfico de f no ponto A, como na Figura 2.1.

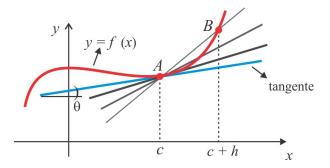


Figura 2.1: Visão geométrica da reta tangente.

A declividade da reta tangente é obtida de (2.1), com  $h \to 0$ , isto é,

$$m = \tan \theta = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Esse limite, caso exista, é a derivada no sentido de Newton-Leibniz<sup>2</sup> de f no ponto c, representada por f'(c), y'(c) ou  $\frac{df}{dx}(c)$ . Neste caso, a função f é derivável no ponto c.

São as seguintes as regras básicas de derivação:

- 1. linearidade:  $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$ ,  $\lambda$  constante.
- **2.** produto:  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ .
- 3. quociente:  $(f/g)' = \frac{f' \cdot g f \cdot g'}{g^2}$ ,  $g \neq 0$ .

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Sir. Issac Newton (1642-1727), físico e matemático inglês e Le Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão.

**4.** regra da cadeia:  $\frac{d}{dx} [f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  ou  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .

### 2.1 Derivadas Parciais

Seja D um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$ , contendo o ponto P(a,b) no seu interior, e consideremos uma função  $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ . Ao fixarmos y=b, obtemos uma função real de uma variável g(x)=f(x,b) definida em um intervalo I contendo a no seu interior e a derivada da função g no ponto a, caso exista, é denominada derivada parcial de f em relação à variável x, no ponto P(a,b). Essa derivada parcial é usualmente representada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$
,  $f_x(a,b)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)$ ,  $z_x(a,b)$ ,  $D_x f(a,b)$ ,  $\partial_x f(a,b)$  ou  $f_1(a,b)$ .

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$

se o limite existir. A derivada parcial  $f_x(a,b)$  mede a inclinação da reta T, tangente à curva de interseção da superfície z = f(x,y) com o plano y = b, isto é,  $\tan \theta = f_x(a,b)$ .

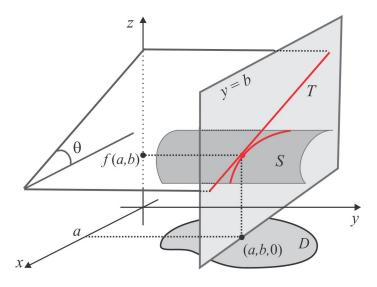


Figura 2.2: Visão geométrica da derivada parcial  $f_x(a, b)$ .

De modo similar, definimos a derivada parcial da função f com respeito à variável y como sendo o limite

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k},$$

caso o limite exista. Outras formas de representar essa derivada são

$$f_{y}\left(a,b\right), \ \frac{\partial z}{\partial y}(a,b), \ D_{y}f\left(a,b\right), \ \partial_{y}f\left(a,b\right) \ \text{ou} \ f_{2}\left(a,b\right).$$

Observação 2.1 Aparentemente não levamos em consideração o fato do ponto P ser interior ao domínio D da função f. Observamos que, no cálculo da derivada  $f_x(a,b)$ , é necessário calcular os valores f(a+h,b), para h próximo de zero, e isso é possível porque o ponto P sendo interior ao domínio D, os pontos (a+h,b+k) estão dentro do conjunto D, se h e k são suficientemente pequenos.

As derivadas parciais das funções elementares são calculadas usando as regras de derivação do cálculo de uma variável. Para calcular a derivada  $f_x$ , interpretamos y temporariamente como constante e derivamos a função f como se ela fosse função apenas da variável x. No caso de uma função f (x, y, z) de três variáveis, o processo é similar. Por exemplo, para calcular a derivada  $f_z$ , interpretamos x e y temporariamente como constantes e derivamos f com relação à varivel f0, como se fosse ela uma função apenas de f2.

**Exemplo 2.2** Calcular as derivadas parciais no ponto P(1,3) da função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por  $f(x,y) = 3x^2 + 5xy - 4y^2$ .

**Solução** Para calcular as derivadas  $f_x(x,y)$  e  $f_y(x,y)$  no ponto P(1,3), primeiro obtemos as expressões das derivadas e em seguida avaliamos essas derivadas no ponto desejado. Para calcular a derivada parcial  $f_x$  devemos manter y temporariamente constante. Se fizermos a = 5y e  $b = 4y^2$ , teremos  $f(x,y) = 3x^2 + ax - b$  e, consequentemente,

$$f_x(x,y) = 6x + a = 6x + 5y.$$

De forma similar, mantendo x constante, encontramos  $f_y(x,y) = 5x - 8y$ . Portanto,

$$f_x(1,3) = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 21$$
 e  $f_y(1,3) = 5.1 - 8.3 = -19$ .

**Exemplo 2.3** Determinar a reta tangente à curva de interseção da superfície  $z = 3x^2 - 5xy^3 - \text{sen}(xy)$  com o plano y = 0, no ponto Q(1, 0, 3).

**Solução** Consideramos a função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por  $f(x,y) = 3x^2 - 5xy^3 - \sin(xy)$ , cuja derivada parcial  $f_x(1,0)$  é a inclinação da reta tangente. Derivando parcialmente a função em relação à variável x, encontramos

$$f_x(x,y) = 6x - 5y^3 - y\cos(xy)$$
 e  $f_x(1,0) = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 0 - 0\cos(0) = 6$ .

A reta tangente tem declividade  $f_x(1,0)=6$  e é descrita por z=6x-3, y=0 ou, na forma paramétrica, x=t, y=0, z=6t-3.

Exemplo 2.4 (usando a definição) Em alguns casos, as derivadas parciais devem ser calculadas pela definição. A função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

é definida por duas sentenças (por isso ela não é uma função elementar) e (0,0) é o ponto de transição de uma sentença para a outra. As derivadas parciais, no ponto de transição (0,0), devem ser calculadas pela definição e, neste caso, temos

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{t \to 0} (0) = 0.$$

De forma similar, encontramos  $f_y(0,0) = 0$ .

Do ponto de vista prático, algumas propriedades de simetria da função f ajudam no cálculo das derivadas parciais. Vejamos dois casos:

### $\blacksquare$ A função f é simétrica:

Se f(x,y) = f(y,x),  $\forall (x,y)$ , dizemos que f é simétrica. Neste caso, temos  $f_y(x,y) = f_x(y,x)$  e permutando x e y na expressão de  $f_x$  obtemos a derivada  $f_y$ . Por exemplo, a função  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  é simétrica e nos pontos  $(x,y) \neq (0,0)$  usamos a regra do quociente, e obtemos:

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$
 (2.2)

A derivada  $f_y$  é obtida de (2.2) permutando x e y. Temos,

$$f_y(x,y) = f_x(y,x) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

De (2.2) e do Exemplo 2.4 obtemos

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

#### $\blacksquare$ A função f é antissimétrica:

Dizemos que f é antissimétrica se f(x,y)=-f(y,x),  $\forall (x,y)$ . Neste caso,  $f_y(x,y)=-f_x(y,x)$  e calculando uma derivada parcial temos a outra. Vamos considerar como ilustração desse caso a função  $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x+y}$ , definida no conjunto  $D=\{(x,y):x+y\neq 0\}$ . Temos

$$f(y,x) = \frac{y^2 - x^2}{y+x} = -\left(\frac{x^2 - y^2}{x+y}\right) = -f(x,y)$$

e, portanto, f(x,y) é antissimétrica. Pela regra do quociente, encontramos

$$f_x(x,y) = \frac{2x(x+y) - (x^2 - y^2)(1)}{(x+y)^2} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{(x+y)^2}, \text{ para } (x,y) \in D,$$

e a derivada  $f_y$  é dada por

$$f_y(x,y) = -f_x(y,x) = -\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{(x+y)^2}, \text{ para } (x,y) \in D.$$

### 2.1.1 Derivadas Parciais de Ordem Superior

A seguir fixaremos a notação para as derivadas parciais de ordem superior de uma dada função z = f(x, y). As derivadas de segunda ordem são:

1. 
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$
, também representada por:  $f_{xx}$ ,  $f_{11}$ ,  $\partial_{xx} f$  ou  $D_{xx} f$ .

2. 
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$
, também representada por:  $f_{yy}$ ,  $f_{22}$ ,  $\partial_{yy} f$  ou  $D_{yy} f$ .

4. 
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$
, também representada por:  $f_{xy}$ ,  $f_{12}$ ,  $\partial_{xy} f$  ou  $D_{xy} f$ .

A classe de funções para as quais as derivadas parciais mistas  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  são iguais é bem ampla, ela inclui todas as funções elementares do cálculo, mas existem casos onde essas derivadas são diferentes, como veremos no Exemplo 2.7.

As derivadas de terceira ordem são indicadas de forma semelhante. Por exemplo,

1. 
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$$
, também representada por:  $f_{xxx}$ .

2. 
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), \text{ também representada por: } f_{xxy}.$$

3. 
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$$
, também representada por:  $f_{xyx}$ .

e assim por diante.

**Exemplo 2.5** Calcular as derivadas  $f_x$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{xz}$  e  $f_{xzy}$ , sendo  $f(x, y, z) = x^2 + xy + xz^2$ .

Solução Das regras de derivação, obtemos:

$$f_x = 2x + y + z^2$$
,  $f_{xy} = 1$ ,  $f_{xz} = 2z$  e  $f_{xzy} = 0$ .

**Exemplo 2.6** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x,y) = x^3y^3 + \cos(xy)$ . Trata-se de uma função simétrica e as derivadas de primeira ordem de f são

$$f_x(x,y) = 3x^2y^3 - y\operatorname{sen}(xy) \ e \ f_y(x,y) = f_x(y,x) = 3x^3y^2 - x\operatorname{sen}(xy).$$

Derivando mais uma vez, encontramos

$$f_{xx} = 6xy^3 - y^2\cos(xy)$$
  $e$   $f_{xy} = 9x^2y^2 - \sin(xy) - xy\cos(xy)$ 

e também

$$f_{yx} = 9x^2y^2 - \sin(xy) - xy\cos(xy)$$
  $e$   $f_{yy} = 6x^3y - x^2\cos(xy)$ .

Sendo f(x,y) uma função elementar, a igualdade  $f_{xy} = f_{yx}$  já era esperada.

**Exemplo 2.7** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por  $f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ , se  $(x,y) \neq (0,0)$ , e f(0,0) = 0. Calcular as derivadas mistas  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  na origem.

**Solução** Nos pontos  $(x,y) \neq (0,0)$ , a derivada parcial  $f_x$  é calculada pela regra do quociente e obtemos

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Na origem, usando a definição, encontramos

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Logo,

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Como a função f é antissimétrica, segue que  $f_y(x,y) = -f_x(y,x)$  e, sendo assim,

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

As derivadas mistas  $f_{xy}(0,0)$  e  $f_{yx}(0,0)$  são calculadas pela definição. Temos

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial u}(f_x)(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k^5}{k^5} = -1$$

e

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y)(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1.$$

Portanto,  $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ .

Finalizamos esta seção com um resultado, devido a Schwarz<sup>3</sup>, que estabelece uma condição suficiente para se ter  $f_{xy}(P) = f_{yx}(P)$ .

Teorema 2.8 (Teorema de Schwarz) Se as derivadas parciais  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_{xy}$  são contínuas em uma vizinhança do ponto P(a,b), então  $f_{xy}(P) = f_{yx}(P)$ .

**Demonstração** O fundamento básico a ser utililizado é o Teorema do Valor Médio (TVM) para funções de uma variável. Seja g(x) = f(x, b + k) - f(x, b) definida em um intervalo fechado contendo a no seu interior. Segue do TVM que existe c entre a e a + h tal que

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)h$$
 (2.3)

e observando que  $g'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b)$ , resulta de (2.3) que

$$g(a+h) - g(a) = [f_x(c,b+k) - f_x(c,b)] h.$$
(2.4)

Usando mais uma vez o TVM, agora para expressão do lado direito de (2.4), no intervalo de extremos  $b \in b + k$ , segue que existe d entre  $b \in b + k$  tal que

$$f_x(c, b + k) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d) k$$

e, portanto,  $g(a+h) - g(a) = f_{xy}(c,d) hk$ , isto é,

$$[f(a+h,b+k) - f(a+h,b)] - [f(a,b+k) - f(a,b)] = f_{xy}(c,d)hk.$$
(2.5)

Para concluir, usaremos a continuidade de  $f_{xy}$  no ponto P, observando que  $c \to a$ , quando  $h \to 0$  e  $d \to b$ , quando  $k \to 0$ . Dividindo (2.5) por k e tomando o limite com  $k \to 0$ , obtemos

$$f_u(a+h,b) - f_u(a,b) = f_{xu}(c,b)h.$$
 (2.6)

Agora, dividimos (2.6) por h, tomamos o limite com  $h \to 0$  e obtemos

$$f_{ux}(a,b) = f_{xu}(a,b)$$
.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), matemático alemão.

**Exemplo 2.9** Vejamos o que ocorre com o polinômio  $f(x,y) = 3x^2 - xy^3 + y^4$ , que é uma função elementar do cálculo. Derivando a função f parcialmente, encontramos as funções contínuas (polinomiais)

$$f_x = 6x - y^3$$
,  $f_y = -3xy^2 + 4y^3$   $e$   $f_{xy} = -3y^2$ 

e do Teorema de Schwarz segue que  $f_{xy} = f_{yx}$ .

### 2.1.2 Exemplos Clássicos I

Nesta seção dicutiremos os primeiros exemplos clássicos, alguns dos quais já apresentados nas seções anteriores.

### Função descontínua e parcialmente derivável

No cálculo de uma variável aprendemos que se uma função y = f(x) é derivável no ponto c ela é necessariamente contínua em c. Em outras palavras, uma função descontínua em um ponto não pode ter derivada, ou não é derivável, nesse ponto.

No nosso contexto, a existência das derivadas parciais não assegura a continuidade da função. Esse é o caso da função do Exemplo 2.4, que tem derivadas parciais de primeira ordem nulas em (0,0) e, contudo, não é contínua na origem.

#### Função com derivadas parciais contínuas e derivadas mistas distintas

Ao contrário do que ocorre com as funções elementares do cálculo, a função do Exemplo 2.7 tem derivadas mistas  $f_{xy}(0,0)$  e  $f_{yx}(0,0)$  diferentes. A comprovação da continuidade das derivadas  $f_x$  e  $f_y$  deixamos no Exercício 4, como parte do processo de treinamento.

### Função com derivadas parciais descontínuas e derivadas mistas iguais

Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & \operatorname{se}(x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \operatorname{se}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

As derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são calculadas da maneira como fizemos no Exemplo 2.7. Fora da origem, usamos regras de derivação e na origem a definição de derivada parcial. Notamos que essa função é simétrica e é bastante calcular uma das derivadas parciais. Nos pontos  $(x, y) \neq (0, 0)$ , temos:

$$f_x(x,y) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

e na origem usamos a definição para encontrar:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} \operatorname{sen}(1/|h|) = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen}(1/|h|) = 0.$$

Logo,

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & \operatorname{se}(x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \operatorname{se}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e usando a simetria, obtemos

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 2y \sec\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A sequência de pontos  $P_n(1/n\pi,0)$  se aproxima da origem, à medida que  $n\to\infty$ , e nesses pontos temos  $f_x(P_n) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$  que não se aproxima de 0, como deveria, se  $f_x$  fosse contínua. Da mesma forma, a derivada  $f_y$  também não é contínua em (0,0). Um cálculo análogo ao que fizemos no Exemplo 2.7 nos dá  $f_{xy}(0,0) = 0$  e  $f_{yx}(0,0) = 0$ .

### Exercícios & Complementos.

- 1. Em cada caso, calcule as derivadas parciais  $z_x,\,z_y,\,z_{xx},\,z_{yy}$  e  $z_{yx}$ :
  - (a)  $z = 3x^2 + y^3$  (c)  $z = xy \exp(x^2 + y^2)$  (e)  $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  (b)  $z = \arctan(\frac{y}{x})$  (d)  $z = \sin(xy) + \log(x^2y)$  (f)  $z = \arccos(xy)$ .
- 2. Em cada caso, calcule a derivada parcial indicada da função z = f(x, y).
  - (a)  $z = x \arcsin(x y)$ ;  $f_x(1, \frac{1}{2})$  (c)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $f_{xy}(1, 0)$  e  $f_{yx}(1, 0)$ (b)  $z = \exp(xy) \sec(x/y)$ ;  $f_y(0, 1)$  (d)  $z = xy \log(x/y)$ ;  $f_y(1, 1)$ .
- 3. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine, caso existam, as derivadas parciais  $f_x(0,0)$ ,  $f_y(0,0)$ ,  $f_{xy}(0,0)$  e  $f_{yx}(0,0)$ .

- 4. Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  dada no Exemplo 2.7 e verifique a continuidade das derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  na origem.
- 5. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x,y) = x^2 + y^3$ . Calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^2, y) \in \frac{\partial}{\partial x} [f(x^2 + y^2, y)].$$

- 6. Mostre que a função  $z = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$  satisfaz à equação diferencial  $xz_x + yz_y = z$ .
- 7. Verifique que a função

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right),$$

com t>0 e k uma constante não nula, satisfaz a equação de transmissão de calor

$$u_t - ku_{xx} = 0.$$

8. O operador de Laplace<sup>4</sup>  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^2$  é definido por

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}.$$

Mostre que as funções

$$u(x,y) = \arctan(y/x)$$
 e  $u(x,y) = e^x \cos y$ 

satisfazem a equação de Laplace  $\Delta u = 0$ .

9. Determine condições sobre as constantes A, B, C, D, E e F para que a função

$$u(x,y) = Ax^{2} + Bxy + Cy^{2} + Dx + Ey + F$$

satisfaça à equação de Laplace.

10. Se u(x,y) e v(x,y) tem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem e satisfazem às equações de Cauchy-Riemann<sup>5</sup>  $u_x = v_y$  e  $u_y = -v_x$ , mostre que u e v satisfazem à equação de Laplace.

## 2.2 Campos Diferenciáveis

Na introdução deste capítulo vimos que, se  $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  é uma função real de uma variável real derivável em um ponto c, interior ao intervalo I, a reta tangente ao gráfico de f no ponto (c, f(c)) tem equação cartesiana y = f(c) + m(x - c), onde a declividade m é dada por

$$m = f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$
 (2.7)

Se fizermos h = x - c, segue de (2.7) que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{x - c} = 0, \ x \in I,$$

e considerando  $\varphi(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ , obtemos

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - \varphi(x)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{x - c} = 0, \quad x \in I.$$
 (2.8)

De (2.8) deduzimos o seguinte fato geométrico de fundamental importância no cálculo: se a função y = f(x) é derivável no ponto c, seu gráfico pode ser aproximado, em uma vizinhança de c, pela reta tangente, de maneira que o erro cometido na aproximação torna-se arbitrariamente pequeno. Nos referimos a essa aproximação linear do gráfico como a suavidade ou a diferenciabilidade da função f. Observação 2.10 Se f é derivável no ponto c, o erro E(h) da aproximação linear de f é definido por

$$E(h) = f(c+h) - f(c) - f'(c)h$$

e de (2.8) deduzimos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{h} = 0.$$
 (2.9)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Pierre Simon de Laplace (1749-1827), matemático francês.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês e Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão.

Essa relação nos proporciona uma nova versão para o conceito de função derivável. Sendo c um ponto interior ao intervalo I, existe  $\delta > 0$  tal que o intervalo  $I_{\delta}$ , de centro c e raio  $\delta$ , está contido no intervalo I e f é derivável no ponto c se existirem uma função E(h) definida em  $I_{\delta}$  e uma constante m, tais que

$$f(c+h) = f(c) + mh + E(h), com \lim_{h \to 0} \frac{E(h)}{h} = 0.$$

É claro que ocorrendo (2.9), teremos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

e se identificarmos o número m = f'(c) com a aplicação linear  $T_m : h \mapsto mh$  de  $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , então f é derivável (ou diferenciável) em c se

$$f(c+h) = f(c) + T_m \cdot h + E(h), \text{ com } \lim_{h \to 0} \frac{E(h)}{h} = 0.$$

Para generalizar o conceito de diferenciabilidade para funções reais de duas ou mais variáveis reais, devemos ter em mente que o quociente de Newton

$$\frac{f(P+\mathbf{H})-f(P)}{\mathbf{H}}$$

agora não faz sentido, tendo em vista que  $\mathbf{H}$  é um vetor, ou seja, um ponto em  $\mathbb{R}^n$ . Para contornar essa dificuldade, seguiremos a Observação 2.10 que sugere um modo de definir a diferenciabilidade sem envolver a divisão por  $\mathbf{H}$ .

Consideremos uma função  $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$  e fixemos um ponto P(a,b) no interior de D. Suponhamos que exista um plano  $T_Q$  de equação cartesiana

$$z = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b),$$

passando no ponto Q(a, b, f(a, b)) e que aproxima f no seguinte sentido:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \frac{f(x,y) - z}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0,$$

ou, de forma equivalente,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - A(x-a) - B(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$
 (2.10)

A equação (2.10) diz que a porção do gráfico de f, em uma vizinhança do ponto Q, é aproximada pela porção correspondente do plano tangente  $T_Q$ . Essa é a maneira intuitiva de dizer que a função f(x,y) é diferenciável no ponto P(a,b). A Figura 2.3 retrata a situação geométrica:

Formalmente temos a seguinte definição:

**Definição 2.11** Uma função  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto P(a,b), interior ao conjunto D, quando existirem constantes A e B tais que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - A(x-a) - B(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$

Se D é um domínio e f é diferenciável em cada ponto de D, dizemos que f é diferenciável em D.

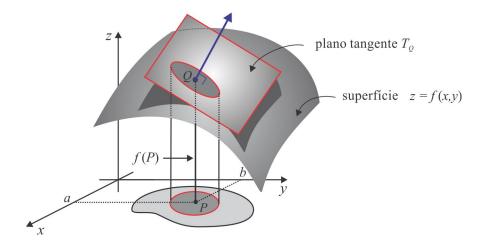


Figura 2.3: Visão geométrica do plano tangente.

Se fizermos x-a=h e y-b=k, então f é diferenciável em  $P\left(a,b\right)$  se, e somente se, existirem constantes A e B tais que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$
 (2.11)

A expressão f(a+h,b+k) - f(a,b) - Ah - Bk que figura em (2.11) é o erro real ou o resto da aproximação linear de f e será representada por E(h,k). Assim, f é diferenciável em P(a,b) quando existirem constantes A e B tais que

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + E(h,k),$$
 com  $\lim_{\substack{h \to 0 \ k \to 0}} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$  (2.12)

As funções elementares do cálculo são diferenciáveis em seus respectivos domínios e são elas que aparecem nas aplicações práticas. Ao substituir o valor f(a+h,b+k)-f(a,b) pela boa aproximação linear Ah + Bk, o erro cometido E(h,k), comparado com  $\sqrt{h^2 + k^2}$ , é próximo de zero.

**Exemplo 2.12** Verificar que a função  $f(x,y) = 2x^2 + y^3$ ,  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , é diferenciável em P(3,2).

**Solução** Seguindo (2.12) com a = 3 e b = 2, resulta

$$f(3+h,2+k) = 2(3+h)^{2} + (2+k)^{3} = 2(9+6h+h^{2}) + (8+6k^{2}+12k+k^{3}) =$$

$$= 26+12h+12k+(2h^{2}+6k^{2}+k^{3}) = f(3,2)+12h+12k+E(h,k),$$

onde  $E(h,k) = 2h^2 + 6k^2 + k^3$  e  $\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) / \sqrt{h^2 + k^2} = 0$  e, com isso, concluímos que f é diferenciável em (3,2). As constantes A e B que figuram em (2.12) são iguais a 12.

**Teorema 2.13** Se  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto P(a,b) do interior de D, então f é contínua no ponto P.

**Demonstração** Para provar que f é contínua em P(a, b) é suficiente provar que

$$\lim_{(b,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) = f(a,b).$$

Sendo f diferenciável no ponto P, segue de (2.12) que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \{f(a,b) + Ah + Bk + E(h,k)\}$$
 (2.13)

e tendo em vista que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right) \sqrt{h^2 + k^2} = 0$$

aplicamos a propriedade da soma de limites em (2.13) e chegamos ao resultado

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) = f(a,b).$$

**Teorema 2.14** Se  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto P(a,b) do interior de D, então as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existem no ponto P(a,b). Além disso, as constantes A e B que figuram em (2.12) são, respectivamente,  $f_x(a,b)$  e  $f_y(a,b)$  e o plano  $T_Q$ , tangente ao gráfico de f no ponto Q(a,b,f(a,b)), tem equação cartesiana

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

**Demonstração** Suponhamos f diferenciável no ponto P e sejam A e B números reais que satisfazem (2.11). Se considerarmos k = 0 em (2.11), obteremos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b) - Ah}{h} = 0 \tag{2.14}$$

e de (2.14) resulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A.$$

Portanto,  $f_x(a,b)$  existe e  $f_x(a,b) = A$ . Considerando h = 0 em (2.11) e fazendo  $k \to 0$ , deduzimos que  $f_y(a,b) = B$ .

Observação 2.15 Sejam  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  uma função e P(a,b) um ponto fixado no interior do conjunto D.

- 1. Segue do Teorema 2.13 que se f não é contínua no ponto P, então f não é diferenciável no ponto P.
- 2. Do Teorema 2.14 resulta que se uma das derivadas parciais de f não existir no ponto P, então f não é diferenciável no ponto P.
- 3. Para provar que f é diferenciável no ponto P, é suficiente provar que as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  da função f existem no ponto P e que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

4. Se f é diferenciável em P, o plano  $T_Q$ , tangente ao gráfico de f no ponto Q(a,b,f(a,b)), é governado pela equação cartesiana

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

onde 
$$A = f_x(a,b)$$
,  $B = f_y(a,b)$ ,  $C = -1$  e  $D = f(a,b) - af_x(a,b) - bf_y(a,b)$ .

**Exemplo 2.16** Determinar o plano tangente à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  no ponto  $Q(1, 1, \sqrt{2})$ .

**Solução** Consideramos o hemisfério  $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  que contém o ponto Q e calculamos as derivadas  $f_x(1, 1)$  e  $f_y(1, 1)$ . Temos:

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$
 e  $f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ 

de modo que  $f_x(1,1) = -1/\sqrt{2}$  e  $f_y(1,1) = -1/\sqrt{2}$  e o plano tangente tem equação

$$z = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1)$$
 ou  $x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$ .

**Exemplo 2.17** Mostrar que a função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , definida por  $f(x,y) = x^2 + y^2$ , é diferenciável em todo  $\mathbb{R}^2$ .

**Solução** Temos  $f_x(x,y) = 2x$  e  $f_y(x,y) = 2y$  e, no ponto P(a,b) do  $\mathbb{R}^2$ , obtemos  $f_x(a,b) = 2a$  e  $f_y(a,b) = 2b$ . O erro E(h,k) da aproximação linear é

$$E(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k = h^2 + k^2$$

e, portanto,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \sqrt{h^2 + k^2} = 0,$$

provando que f é diferenciável em todo ponto do  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.18** Vimos no Exemplo 1.34 do Capítulo 1 que a função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua na origem, embora as derivadas parciais  $f_x(0,0)$  e  $f_y(0,0)$  existam e são ambas nulas. Não sendo contínua em (0,0), a função f não é aí diferenciável. Fora da origem, isto é, no domínio  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  a função f é o quociente de dois polinômios (uma função elementar) com denominador diferente de zero sendo, portanto, diferenciável.

**Exemplo 2.19** A função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em (0,0), porque não é contínua nesse ponto. Aliás, a função f sequer tem limite na origem, já que ao longo das parábolas  $y = mx^2$ , com  $x \neq 0$ , temos

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{mx^4}{x^4 (1 + m^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

e o valor do limite depende do coeficiente m. Assim, f não é contínua no ponto (0,0) e muito menos diferenciável aí. No domínio  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  a função f é diferenciável, por ser uma função elementar.

**Exemplo 2.20** Verificar se a função  $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ ,  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , é diferenciável em (0,0).

**Solução** Primeiro calculamos as derivadas parciais de f em (0,0). Temos

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \text{ e } f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Em seguida analisamos o limite do quociente  $E(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}$ , com  $(h,k)\to (0,0)$ . Temos

$$E(h,k) = f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k = \sqrt[3]{hk}$$

e ao longo da parábola  $k = h^2$ , encontramos

$$\lim_{\substack{h \to 0^+ \\ k = h^2}} \frac{E(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\substack{h \to 0^+ \\ k = h^2}} \frac{\sqrt[3]{hk}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\substack{h \to 0^+ \\ k = h^2}} \frac{h}{\sqrt{h^2 + h^4}} = \lim_{\substack{h \to 0^+ \\ k = h^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} = 1.$$
 (2.15)

Segue de (2.15) que a razão  $E(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}$  não tem limite zero, quando  $(h,k) \to (0,0)$  e, portanto, a função f não é diferenciável na origem, embora aí seja contínua e tenha derivadas parciais.

Encerramos esta seção com um critério de diferenciabilidade, conhecido como Lema Fundamental. É com base nesse critério que afirmamos que as funções elementares do cálculo são diferenciáveis em seus respectivos domínios. Ao fazer tal afirmação tínhamos em mente o seguinte fato: as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  de uma função elementar f(x,y) são contínuas no domínio D de f. Aliás, as derivadas parciais de uma função elementar são ainda funções elementares.

Teorema 2.21 (Lema Fundamental) Suponhamos que as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  de uma função  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  existam em uma vizinhança de um ponto P(a,b) e sejam contínuas em P. Então f é diferenciável no ponto P.

**Demonstração** Consideremos uma δ-vizinhança  $V_{\delta}(P)$ , onde f é parcialmente derivável e apliquemos o TVM. Se  $0 < h^2 + k^2 < \delta$ , então

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = [f(a+h,b+k) - f(a+h,b)] + [f(a+h,b) - f(a,b)]$$
  
=  $hf_x(c,b) + kf_y(a+h,d)$ .

onde c está entre a e a+h e d está entre b e b+k. Logo

$$E(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf_x(a,b) - kf_y(a,b)$$
  
=  $hf_x(c,b) + kf_y(a+h,d) - hf_x(a,b) - kf_y(a,b)$ 

e, portanto,

$$|E(h,k)| \le |h| |f_x(c,b) - f_x(a,b)| + |k| |f_y(a+h,d) - f_y(a,b)|.$$
 (2.16)

Se dividirmos (2.16) por  $\sqrt{h^2 + k^2}$  e observarmos que

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \le 1$$
 e  $\frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \le 1$ ,

encontraremos

$$\left| \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \le |f_x(c,b) - f_x(a,b)| + |f_y(a+h,d) - f_y(a,b)|.$$
 (2.17)

Da continuidade das derivadas  $f_x$  e  $f_y$  no ponto P(a, b), segue que  $f_x(c, b)$  e  $f_y(a + h, d)$  tendem para  $f_x(a, b)$ , com  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , e podemos tomar o limite em (2.17) para obtermos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = 0.$$

Com isso concluímos a demonstração.

**Exemplo 2.22** Investigar, via Lema Fundamental, a diferenciabilidade da função f definida em  $\mathbb{R}^2$  por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Solução** Nos pontos  $(x,y) \neq (0,0)$ , as derivadas parciais

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$
 e  $f_y(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$ 

são contínuas (funções racionais com denominador não nulo) e, portanto, f é diferenciável em  $(x,y) \neq (0,0)$ . Na origem, temos  $f_x(0,0) = 0$  e  $f_y(0,0) = 0$  e, para mostrar que  $f_x$  e  $f_y$  são contínuas em (0,0), basta observar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{2r^5\cos\theta\sin^4\theta}{r^4} = 0, \quad \text{independente do } \theta,$$

e isso mostra que  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$ , isto é,  $f_x$  é contínua em (0,0). De modo similar mostramos a continuidade de  $f_y$  em (0,0). Pelo Lema Fundamental concluímos que f é diferenciável, também, em (0,0). Portanto, f é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

#### 2.2.1 A Diferencial

Seja  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  uma função diferenciável no ponto P(a,b) interior ao conjunto D. Representamos por  $\Delta f$  o incremento da função f entre P e P+H, isto é,

$$\Delta f = f(P+H) - f(P) = f(a+h,b+k) - f(a,b).$$

É comum representar os infinitésimos (quantidades próximas de zero) h e k por dx e dy, respectivamente, e com esta notação segue da definição de diferenciabilidade que

$$\Delta f = f_x(P) dx + f_y(P) dy + E(dx, dy),$$

onde o quociente  $E(dx, dy) / \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$  tende para zero, quando  $(dx, dy) \to (0, 0)$ . A expressão  $f_x(P) dx + f_y(P) dy$  recebe o nome de diferencial da função f no ponto P e é indicada por df(P). Assim,

$$\Delta f = f_x(P) dx + f_y(P) dy + E(dx, dy) = df(P) + E(dx, dy),$$

onde vemos que a diferencial df(P) é uma boa aproximação de  $\Delta f$  e podemos escrever

$$f(a+h,b+k) \approx f(a,b) + df(P). \tag{2.18}$$

Essa aproximação será tão melhor quanto menor forem  $|h| \in |k|$ , isto é,  $|dx| \in |dy|$ .

**Exemplo 2.23** Calcular, via diferencial, o valor approximado de tan[2.01 log(0.99)].

**Solução** Consideramos a função  $f(x,y) = \tan(x \log y)$ , que é diferenciável em uma vizinhança de P(2,1), e usamos (2.18) com a+h=2.01 e b+k=0.99. Conseguimos isto fazendo  $a=2,\ h=0.01,\ b=1$  e k=-0.01, de modo que

$$f(2.01, 0.99) \approx f(2, 1) + df(2, 1)$$
.

Temos que f(2,1) = 0 e por derivação direta encontramos

$$f_x(x, y) = \sec^2(x \log y) \log y \ e \ f_y(x, y) = \sec^2(x \log y) (x/y),$$

de onde segue que  $f_x(2,1) = 0$  e  $f_y(2,1) = 2$ . Portanto,

$$df = f_x(2,1)dx + f_y(2,1)dy = 2 \cdot (-0.01) = -0.02$$

e teremos  $\tan[2.01\log(0.99)] \approx -0.02 = -2 \times 10^{-2}$ .

Exemplo 2.24 Um tanque cilíndrico metálico tem altura h = 1.2m e raio R = 80cm em suas dimensões internas. Se a espessura das paredes é de 5mm, calcular, via diferencial, a quantidade de metal usada na fabricação do tanque.

**Solução** Representemos por V o volume do cilindro de raio R e altura h. Então,  $V(R, h) = \pi R^2 h$  e a diferencial dV é uma aproximação de  $\Delta V$ , quantidade de metal usada na fabricação. Usando centímetro como unidade padrão, temos:

$$dV = 2\pi Rhdr + \pi R^2 dh$$
,  $R = 80$ ,  $h = 120$ ,  $dR = 0.5$  e  $dh = 2 \times 0.5$ .

Portanto, a quantidade aproximada de metal é

$$dV = 2 \times 3.14 \times 80 \times 120 \times 0.5 + 3.14 \times (80)^{2} \times 2 \times 0.5 = 50.264, 7cm^{3}.$$

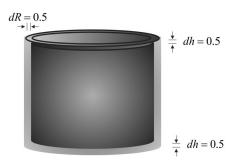


Figura 2.4: Ilustração para o Exemplo 2.24.

Exemplo 2.25 Dois lados de uma área triangular medem x = 200m e y = 220m, com possíveis erros de 10cm. O ângulo  $\alpha$  entre os lados x e y é de  $60^{\circ}$ , com possível erro de  $1^{\circ}$ . Calcular o erro aproximado da área triangular.

**Solução** Inicialmente vamos padronizar as unidades que serão usadas: metro será usado como unidade de comprimento e radiano como medida do ângulo. A altura relativa à base y é h=x sen  $\alpha$  e a

área triangular é a função de três variáveis  $A(x, y, \alpha) = \frac{1}{2}xy \operatorname{sen} \alpha$ . A diferencial dA é uma aproximação da diferença (erro) entre as áreas  $A(x + dx, y + dy, \alpha + d\alpha)$  e  $A(x, y, \alpha)$ . Temos

$$dA = (\frac{1}{2}y \sin \alpha)dx + (\frac{1}{2}x \sin \alpha)dy + (\frac{1}{2}xy \cos \alpha)d\alpha,$$

e os valores a serem utilizados são:  $x=200,\ y=220,\ \alpha=\pi/3,\ dx=dy=0.1$  e  $d\alpha=\pi/180.$  Usando  $\sqrt{3}=1.73$  e  $\pi=3.14,$  obtemos

$$dA = \frac{1}{2} \times 220 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 220 \times 200 \times 0.5 \times \frac{\pi}{180} = 210.05 m^2.$$

Se não houvesse erro nas medidas, o valor da área seria  $38060m^2$ , de modo que o erro cometido na aproximação da área representa menos de 6% do seu valor.

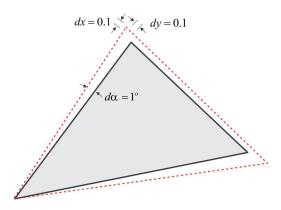


Figura 2.5: Ilustração geométrica para o Exemplo 2.25.

As variações da função f são de três naturezas: absoluta, relativa e percentual. No quadro abaixo especificamos essas variações.

	Real	Estimada	Erro
Variação absoluta	$\Delta f$	df	$\Delta f - df$
Variação relativa	$\Delta z/f\left(P\right)$	$df/f\left(P\right)$	$\left(\Delta f - df\right)/f\left(P\right)$
Variação percentual	$\left[\Delta f/f\left(P\right)\right] \times 100$	$[df/f(P)] \times 100$	$\left[ \left( \Delta f - df \right) / f \left( P \right) \right] \times 100$

### 2.2.2 A Derivada como Aplicação Linear

Quando uma função  $z=f\left(x,y\right)$  é diferenciável no ponto  $P\left(a,b\right)$ , sabemos determinar as derivadas parciais e o plano tangente que aproxima o gráfico de f. E a derivada da função f? O que é e como encontrá-la? Na expressão

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b) h + f_y(a, b) k + E(h, k)$$

que define a diferenciabilidade de f em  $P\left(a,b\right)$  destacamos a função linear  $f'\left(P\right):\mathbb{R}^{2}\rightarrow\mathbb{R}$  dada por

$$f'(P) \cdot (h,k) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k$$

que aproxima f em uma vizinhança do ponto P. Essa aplicação linear f'(P) é, por definição, a derivada de f no ponto P. Assim,

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f'(P) \cdot (h, k) + E(h, k)$$

onde a razão  $E(h,k)/\sqrt{x^2+y^2}$  tem limite zero, quando  $(h,k)\to (0,0)$ . Na notação matricial, a derivada f'(P) é a matriz  $1\times 2$ 

$$f'(P) = \begin{bmatrix} f_x(P) & f_y(P) \end{bmatrix},$$

denominada matriz Jacobiana. Temos, portanto:

$$f'(P) \cdot (x, y) = \begin{bmatrix} f_x(P) & f_y(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f_x(P) x + f_y(P) y.$$

**Exemplo 2.26** Como primeira ilustração, vamos determinar a derivada no ponto P(1,2) da função diferenciável  $f(x,y) = x^2 + xy$ . As derivadas parciais de f são  $f_x = 2x + y$  e  $f_y = x$ , de modo que  $f_x(1,2) = 4$  e  $f_y(1,2) = 1$ . A derivada f'(P) é a aplicação linear que associa a cada par (x,y) do  $\mathbb{R}^2$  o escalar 4x + y, isto é,

$$f'(P) \cdot (x, y) = 4x + y.$$

**Exemplo 2.27** Consideremos a função de três variáveis  $f(x,y,z) = x^2 + xyz + yz^2$  e determinemos sua derivada no ponto P(1,0,1). Em se tratando de uma função escalar de três variáveis, a derivada é uma aplicação linear de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}$ . Um cálculo direto nos dá  $f_x = 2x + yz$ ,  $f_y = xz + z^2$  e  $f_z = xy + 2yz$  e a derivada f'(P) é a aplicação linear

$$f'(P) \cdot (x, y, z) = f_x(P) x + f_y(P) y + f_z(P) z = x + 2y.$$

A matriz Jacobiana de f em P é

$$Jf(P) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$
.

#### 2.2.3 Exemplos Clássicos II

### Função contínua não diferenciável

A função  $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ ,  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , é contínua em (0,0) e as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são ambas nulas em (0,0), como é fácil de comprovar pela definição:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

O erro é  $E(h,k) = \sqrt{|hk|}$  e ao longo do caminho k = h, temos

$$\lim_{\substack{h \to 0^+ \\ k = h}} \frac{E\left(h, k\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\substack{h \to 0^+ \\ k = h}} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\substack{h \to 0^+ \\ k = h}} \frac{|h|}{\sqrt{2}\,|h|} = 1/\sqrt{2}$$

e, portanto,  $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E\left(h,k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ , caso exista, não é zero. Assim, f não é diferenciável em (0,0).

### Função diferenciável com uma derivada parcial descontínua

Para esta situação consideramos a função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por  $f(x,y) = \sqrt{|x|} \operatorname{sen} y$ . Temos:

1. f é diferenciável em (0,0), porque  $f_x(0,0)=0$ ,  $f_y(0,0)=0$  e o erro é  $E(h,k)=\sqrt{|h|}\sin k$ , de modo que,

$$\left| \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \frac{\left| \sqrt{h} \right| |\sin k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \le \frac{|\sin k|}{\sqrt{k^2}} = \left| \sqrt{h} \right| \left| \frac{\sin k}{k} \right|, \tag{2.19}$$

e como  $\lim_{h.k\to 0} \frac{h \operatorname{sen} k}{k} = 0$ , segue de (2.19) e da propriedade do confronto que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

2.  $f_x$  não tem limite em (0,0). De fato, nos pontos (x,y), x>0, a derivada parcial  $f_x$  é dada por  $f_x(x,y) = \frac{\sin y}{2\sqrt{x}}$  e teremos:

ao longo do eixo 
$$x$$
, isto é,  $y = 0$ : 
$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y = 0}} f_x(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y = \sqrt{x}}} \frac{\sin 0}{2\sqrt{x}} = 0.$$
ao longo da parábola  $y = \sqrt{x}$ : 
$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y = \sqrt{x}}} f_x(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y = \sqrt{x}}} \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 1/2.$$

Portanto, (0,0) é uma descontinuidade essencial de  $f_x$ . Observamos que  $f_y(x,y) = \sqrt{|x|} \cos y$  é contínua em todo  $\mathbb{R}^2$ .

### Função diferenciável com derivadas parciais descontínuas

Consideremos para este caso a função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(1/\sqrt{x^2 + y^2}), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Temos que:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(1/\sqrt{h^2})}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen}(1/\sqrt{h^2}) = 0 = f_y(0,0).$$

(i) f é diferenciável em (0,0). De fato, o erro é  $E\left(h,k\right)=\left(h^2+k^2\right)\sin(1/\sqrt{h^2+k^2})$  e , portanto:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} \operatorname{sen}(1/\sqrt{h^2+k^2}) = 0.$$

(ii) Nos Exemplos Clássicos I da seção 2.1 mostramos que as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são descontínuas em (0,0).

### Função contínua parcialmente derivável e não diferenciável

No Exemplo 2.20 mostramos que a função  $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$  tem essas características.

#### Exercícios & Complementos.

- 1. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida por: f(0,0) = 0 e  $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ , se  $(x,y) \neq (0,0)$ .
  - (a) Mostre que f é contínua na origem (0,0).
  - (b) Mostre que as derivadas  $f_x$  e  $f_y$  existem em todo  $\mathbb{R}^2$ , mas não são contínuas em (0,0).
  - (c) Mostre que f não é diferenciável na origem (0,0). Isso contradiz o Lema Fundamental?

2. Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em P(0,0).

- 3. Falso ou verdadeiro? Justifique
  - (a) Toda função diferenciável é contínua.
  - (b) Se f é diferenciável em P, então as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existem em P.
  - (c) Toda função contínua é diferenciável.
  - (d) Se z = f(x, y) tem derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  no ponto P, então f é contínua em P.
  - (e) Se uma função z = f(x, y) tem derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  contínuas, então f é diferenciável.
  - (f) Toda função diferenciável possui derivadas parcias de primeira ordem contínuas.
  - (g) Se as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existem em P, então f é diferenciável em P.
- 4. Use o Lema Fundamental e mostre que a função z = f(x, y) é diferenciável no domínio indicado.

  - $\begin{array}{ll} \text{(a)} & z=x^2y^4; \quad D=\mathbb{R}^2 \\ \text{(b)} & z=\frac{xy}{x^2+y^2}; \quad D=\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\} \\ \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(c)} & z=\log\left(x^2+y^2\right); \quad D=\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}. \\ \text{(d)} & z=\frac{\exp\left(xy\right)}{x-y}; \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\neq y\right\}. \end{array}$
- 5. Estude a diferenciabilidade da função z = f(x, y) no ponto P indicado:

  - $\begin{array}{lll} \text{(a)} & z = x \exp{(-y)}\,; & P\,(1,0) & \text{(d)} & z = \sqrt{|xy|}; & P\,(0,0) \\ \text{(b)} & z = \left|xy^2\right|\,; & P\,(0,1) & \text{(e)} & z = \sqrt{x^2 + y^2}; & P\,(0,0) \\ \text{(c)} & z = \sqrt{|y|}\cos{x}; & P\,(0,0) & \text{(f)} & z = \sqrt{|x|\,(1+y^2)}; & P\,(x,y) \end{array}$
- 6. Estude a diferenciabilidade da função z = f(x,y), definida por: f(x,y) = 1/xy, se  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , e f(0,0) = 0, no conjunto  $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$ .
- 7. Calcule a diferencial das funções seguintes:
  - (a)  $f(x,y) = 5x^3 + 4x^2y 2y^3$  (c)  $f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$ (b)  $f(x,y,z) = e^x yz$  (d)  $f(x,y) = \arctan(u/x)$
- 8. Mostre que a função  $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

não é diferenciável em (0,0,0), mas as derivadas parciais  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  existem na origem.

#### 2.3 Regra da Cadeia

No início deste capítulo apresentamos a regra da cadeia no cálculo de uma variável como uma regra básica de derivação. Recordemos que se  $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  e  $g:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  são duas funções reais de uma variável real, onde  $f(I) \subseteq J$ , tais que y = g(u) e u = f(x), então a função composta é dada por

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in I.$$

e, caso f e g sejam deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right) = g'\left(f\left(x\right)\right) \cdot f'\left(x\right) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Nesta seção apresentaremos algumas versões da Regra da Cadeia envolvendo as derivadas parciais e, por simplicidade, dividiremos a explanação em três casos.

**1**° caso: 
$$z = f(x, y), x = x(t) \in y = y(t)$$

Seja  $z=f\left(x,y\right)$  uma função diferenciável em  $P\left(a,b\right)$  e seja  $\gamma\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right),\ t\in I,$  uma curva contida no gráfico de f e passando em P, isto é,  $\gamma\left(t\right)=P$ , para algum t no intervalo I. A função  $\gamma\left(t\right)$  é derivável em t se, e somente se, as coordenadas  $x\left(t\right)$  e  $y\left(t\right)$  são deriváveis em t e, neste caso,  $\gamma'\left(t\right)=\left(x'\left(t\right),y'\left(t\right)\right)$ . Se usarmos  $\Delta x$  no lugar de h e  $\Delta y$  no lugar de k, obteremos da diferenciabilidade de f em P que

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = f_x(P) \Delta x + f_y(P) \Delta y + E(\Delta x, \Delta y)$$

e, portanto,

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f_x \left( P \right) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \left( P \right) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{E \left( \Delta x, \Delta y \right)}{\Delta t}. \tag{2.20}$$

Observando que  $\Delta x = x (t + \Delta t) - x (t)$  e  $\Delta y = y (t + \Delta t) - y (t)$  tendem para zero, com  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E(\Delta x, \Delta y)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} \frac{E(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right)$$

$$= \pm \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}} \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \times 0 = 0$$

e fazendo em (2.20)  $\Delta t \rightarrow 0$  chegamos a

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial z}{\partial x}(P)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}(P)\frac{dy}{dt}(t) \text{ ou } z' = x'f_x + y'f_y.$$
(2.21)

Deixando um pouco de lado o rigor matemático, vemos que a fórmula (2.21) é obtida "dividindo" a diferencial  $df = f_x dx + f_y dy$  por dt.

Na notação matricial a Regra da Cadeia (2.21) se escreve sob a forma

$$\begin{bmatrix} \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$
 (produto matricial)

Ainda com respeito à notação, a Regra da Cadeia pode se expressar como um produto escalar. Para isso, consideremos o vetor

$$\nabla f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(P)\mathbf{j}, \qquad \text{(também anotado grad } f(P)\text{)}$$

denominado vetor gradiente de f em P, e o vetor velocidade

$$\gamma'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

da curva  $\gamma(t)$ . Com esses ingredientes, a Regra da Cadeia assume a forma

$$\frac{d}{dt}\left[f\left(\gamma\left(t\right)\right)\right] = \nabla f\left(P\right) \bullet \gamma'\left(t\right). \qquad \text{(produto escalar)} \tag{2.22}$$

Como consequência da fórmula (2.22), deduzimos que o vetor gradiente  $\nabla f(P)$  é perpendicular à curva de nível de f que passa pelo ponto P. De fato, para uma tal curva de nível  $\gamma(t)$  temos:

$$f[\gamma(t)] = k \Rightarrow \frac{d}{dt}[f(\gamma(t))] = 0 \Rightarrow \nabla f(P) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

**Exemplo 2.28** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por  $f(x,y) = x^2 - y^2$  e, para  $t \neq -1$ , sejam x = 1/(1+t) e y = t/(1+t). Temos

$$f_x = 2x$$
,  $f_y = -2y$ ,  $x'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$   $e \ y'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ 

e pela Regra da Cadeia (2.21) obtemos

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{2}{1+t}\right) \left(\frac{-1}{(1+t)^2}\right) + \left(\frac{-2t}{1+t}\right) \left(\frac{1}{(1+t)^2}\right) = \frac{-2}{(t+1)^2}.$$

## **2** 2° caso: z = f(u, v), u = u(x, y) e v = v(x, y)

Suponhamos que as funções envolvidas f, u e v sejam diferenciáveis em seus domínios. As variáveis independentes são x e y e a variável z depende indiretamente de x e y, por meio das variáveis intermediárias u e v. Temos as seguintes regras de derivação:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$
 (2.23)

A forma matricial da Regra da Cadeia é, neste caso,

$$\begin{bmatrix} z_x & z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_u & z_v \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}.$$
 (produto matricial)

**Exemplo 2.29** Determinar  $z_x \ e \ z_y$ , sabendo que  $z = f(u, v) = u^2 + v^3$ ,  $u = 3x - y \ e \ v = x + 2y$ .

Solução Temos  $z_u=2u,\ z_v=3v^2,\ u_x=3,\ u_y=-1,\ v_x=1\ \mathrm{e}\ v_y=2\ \mathrm{e}\ \mathrm{usando}\ (2.23)$  obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6u + 3v^2 = 3x^2 + 12xy + 18x + 12y^2 - 6y$$
 e 
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2u + 6v^2 = 6x^2 + 24xy + 24y^2 - 6x + 2y.$$

caso: 
$$z = \varphi(t), t = t(x, y)$$

Observamos que z indiretamente depende das variáveis x e y e há duas derivadas parciais a calcular:

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$
 e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . Temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(t) \frac{\partial t}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(t) \frac{\partial t}{\partial y}.$$
 (2.24)

Exemplo 2.30 Seja  $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  uma função derivável e seja  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  o vetor posição do ponto P(x,y). Se  $f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ , o gradiente de f no ponto P é paralelo ao vetor  $\mathbf{r}$ . De fato, o gradiente de f em P é o vetor  $\nabla f(P) = f_x(P)\mathbf{i} + f_y(P)\mathbf{j}$  e as derivadas parciais de f são calculadas pela Regra da Cadeia (2.24). Temos que  $f(x,y) = \varphi(t)$ , onde  $t = \sqrt{x^2 + y^2}$  e, portanto

$$f_x = \varphi'(t) \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{x\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad e \quad f_y = \varphi'(t) \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{y\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Assim,

$$\nabla f(P) = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \frac{\varphi'(t)}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r}.$$

**Exemplo 2.31** Se no Exemplo 2.30 tivéssemos  $f(x, y, z) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ , sendo  $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  uma função derivável, então de modo similar encontraríamos

$$f_x = \frac{x\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f_y = \frac{y\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad e \quad f_z = \frac{z\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

onde 
$$t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
.

Um dispositivo prático para memorizar a Regra da Cadeia ou Regra da Derivação em Cadeia, nas versões apresentadas, é dado pelo diagrama em árvore da Figura 2.6.

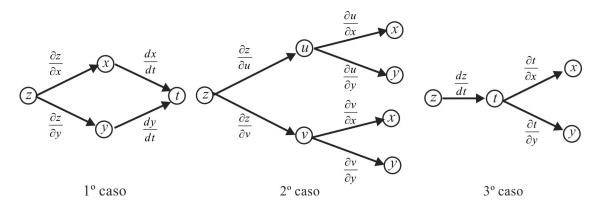


Figura 2.6: Diagrama em árvore da Regra da Cadeia.

No 1º caso, t é a variável independente, x e y são as variáveis intermediárias e z é a variável dependente; no 2º caso x e y são as variáveis independentes, u e v as variáveis intermediárias e z a variável dependente; finalmente, no 3º caso, x e y são as variáveis independentes, t é a variável intermediária e z a variável dependente.

#### Exercícios & Complementos.

1. Considere as funções f(x,y) e g(x,y) definidas por

$$f(x,y) = \int_{x}^{y} \log(1 + (\sin t)^{2}) dt$$
 e  $g(x,y) = \int_{x}^{x^{2}y} \exp(\cos t) dt$ .

Use o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia para calcular as derivadas parciais  $f_{xy}$  e  $g_{xy}$ .

- 2. Se  $f(x,y) = \operatorname{sen}(x/y) + \log(y/x)$ , mostre que  $xf_x + yf_y = 0$ .
- 3. Seja  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$  e defina  $f : D \to \mathbb{R}$  por

$$f(x,y) = \frac{|x+y|}{x+y} = \frac{\sqrt{x^2 + 2xy + y^2}}{x+y}.$$

Verifique que  $f_x$  e  $f_y$  são identicamente nulas em D, mas f não é constante.

4. Dada uma função derivável  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , considere

$$\varphi(x,y) = f(x-y)$$
 e  $\psi(x,y) = f(xy)$ .

 $\text{Mostre que } \varphi_x + \varphi_y = 0 \ \text{e} \ x \psi_x - y \psi_y = 0.$ 

- 5. Calcule  $\frac{dz}{dt}$  nos seguintes casos:
  - (a)  $z = ye^x + xe^y$ ; x = t e  $y = \operatorname{sen} t$
  - (b)  $z = \log(1 + x^2 + y^2)$ ;  $x = \log t \ e \ y = e^t$
  - (c)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $x = t^3 e$   $y = \cos t$
  - (d)  $z = u^2v + vw^2 + uvw^3$ ;  $u = t^2$ , v = t e  $w = t^3$ .
- 6. Calcule  $\frac{\partial w}{\partial x}$  e  $\frac{\partial w}{\partial y}$  nos seguintes casos:
  - (a)  $w = u^2 + v^3$ ; u = 3x y e v = x + 2y
  - (b)  $w = \log(t^2 + s^2)$ ;  $t = x^3 + y^2$  e s = 3xy
  - (c) w = 3u + 7v;  $u = x^2ye \ v = \sqrt{xy}$
  - (d)  $w = \cos(\xi + \eta)$ ;  $\xi = x + y$  e  $\eta = \sqrt{xy}$
- 7. Considere a função

$$f(x,y) = \int_{x}^{y} \exp(t^{2}) dt.$$

Calcule as derivadas parciais  $f_s$ ,  $f_r$  e  $f_{rs}$ , no caso em que  $x = rs^4$  e  $y = r^4s$ .

8. Sejam  $\mathbf{r} = xi + y\mathbf{j}$  o vetor posição do ponto P(x,y) e  $r = |\mathbf{r}|$ . Se  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  é uma função real de uma variável real duas vêzes derivável e z = f(r), mostre que

$$\Delta z = z_{rr} + \frac{1}{r}z_r.$$

9. Considere duas funções reais  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  e sejam w = f(u) e u = g(x, y). Admitindo a existência das derivadas envolvidas, deduza que

$$\Delta w = f''(u)\left(g_x^2 + g_y^2\right) + f'(u)\Delta g.$$

10. Uma função  $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$  diz-se homogênea de grau n quando

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \ \forall \ t \in \mathbb{R}_+^* \ e \ \forall \ (x, y) \in D.$$

Mostre que qualquer função homogêne<br/>afsatisfaz à  $Relação\ de\ Euler$   $^6$ 

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = nf(x,y)$$
 em  $D$ .

Verifique que as funções

$$z = x^2 + y^2$$
 e  $z = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}$ 

são homogêneas.

11. Com as hipóteses do Exercício 10 da Seção 2.1 e admitindo que  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , deduza as relações:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$
 e  $\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$ .

- 12. Se f(u, v) é diferenciável e  $\varphi(x, y) = f(x y, y x)$ , mostre que  $\varphi_x + \varphi_y = 0$ .
- 13. Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  funções reais deriváveis e suponha que  $\varphi'(1) = 4$ .
  - (a) Se  $f(x,y) = (x^2 + y^2) \psi(x/y)$ , mostre que  $xf_x + yf_y = 2f$ .
  - (b) Se  $g(x,y) = \varphi(x/y)$ , calcule  $g_x(1,1)$  e  $g_y(1,1)$ .

## 2.4 Derivada Direcional e Gradiente

As derivadas parciais  $f_x(a,b)$  e  $f_y(a,b)$  de uma função diferenciável z=f(x,y) foram interpretadas como a declividade das curvas  $x\mapsto f(x,b)$  e  $y\mapsto f(a,y)$ , respectivamente. Podemos interpretá-las, também, como taxa instantânea de variação da função f(x,y) nas direções dos eixo x e y. De fato, se representarmos por  $\mathbf{e}_1=(1,0)=\mathbf{i}$ , então

$$f_x\left(a,b\right) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(a+t,b\right) - f\left(a,b\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(P + t\mathbf{e}_1\right) - f\left(P\right)}{t}$$

e esse último limite é a taxa instantânea de variação da função f no ponto P, na direção do vetor  $\mathbf{e}_1$ . Da mesma forma, a derivada parcial  $f_y(a,b)$  representa a taxa instantânea de variação da função f no ponto P, na direção do vetor  $\mathbf{e}_2 = (0,1) = \mathbf{j}$ , isto é,

$$f_{y}\left(a,b\right) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(a,b+t\right) - f\left(a,b\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(P + t\mathbf{e}_{2}\right) - f\left(P\right)}{t}.$$

Consideremos, agora, o problema de medir a taxa instantânea de variação da função f no ponto P, na direção unitária  $\mathbf{u} = (\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}$  do  $\mathbb{R}^2$ . Estenderemos a noção de derivadas parciais a outras direções que não sejam os eixos x e y.

Seja P(a,b) um ponto interior ao conjunto D e consideremos uma função  $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ . Dada uma direção unitária

$$\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}$$

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Leonhard Euler (1707-1783), matemático suiço.

do  $\mathbb{R}^2$ , a derivada direcional de f no ponto P, na direção do vetor  $\mathbf{u}$ , é definida pelo limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(P+t\mathbf{u})-f(P)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\cos\theta,b+t\sin\theta)-f(a,b)}{t},$$

quando esse limite existir. As notações mais utilizadas para representar a derivada direcional são as seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P)$$
,  $\nabla_{\mathbf{u}} f(P)$  ou  $D_{\mathbf{u}} f(P)$ .

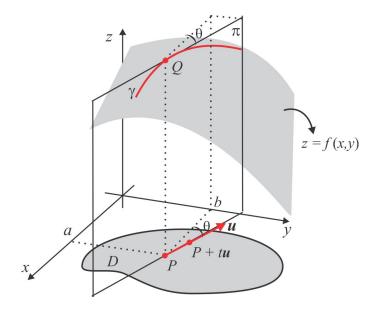


Figura 2.7: Visão geométrica da derivada direcional.

O plano  $\pi$  que passa no ponto P e é paralelo ao eixo z e ao vetor  ${\bf u}$  intercepta o gráfico de f na curva  $\gamma$ , cuja declividade é  $m=\frac{\partial f}{\partial {\bf u}}(P)$ , como mostra a Figura 2.7.

Observação 2.32 Conforme ressaltamos no início da seção, as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são derivadas direcionais específicas, nas direções  $\mathbf{i}$  (direção x) e  $\mathbf{j}$  (direção y), respectivamente. Quando a função f é diferenciável no ponto P, não apenas as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existem no ponto P, as derivadas direcionais de f no ponto P existem, em qualquer direção.

**Exemplo 2.33** Seja  $f(x,y) = y \exp(xy)$  definida em  $\mathbb{R}^2$  e determinemos a derivada direcional de f no ponto P(0,0), na direção do vetor  $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ . Temos que

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

e, considerando a direção unitária  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\left|\mathbf{v}\right| = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$ , colinear com  $\mathbf{v}$ , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{4}{5}t, \frac{3}{5}t\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{3}{5} \exp\left(\frac{12}{25}t^2\right) = 3/5.$$

O sinal positivo da derivada direcional indica um processo de crescimento de f.

Algumas funções do cálculo, embora descontínuas, têm derivada direcional em qualquer direção e outras só têm derivada direcional nas direções **i** e **j**. Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 2.34 Na seção Exemplos Cássicos I, apresentamos uma função descontínua e parcialmente derivável. Na verdade, a derivada direcional pode existir em qualquer direção e, ainda assim, a função ser descontínua. Vamos mostrar que isto ocorre com a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

que é descontínua em (0,0), mas a derivada directional  $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$  existe em qualquer direção.

**Solução** No caminho  $x = y^2$ , temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=y^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = 1/2 \neq f(0,0)$$

e, portanto, f é descontínua em (0,0). Se  $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  é uma direção unitária do  $\mathbb{R}^2$ , então

$$\frac{f(0+ta,b) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} \frac{ab^2}{a^2 + t^2b^4}, & \text{se } a \neq 0\\ 0, & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

e teremos

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+ta,b) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} b^2/a, & \text{se } a \neq 0 \\ 0, & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

**Exemplo 2.35** Verificar que as derivadas direcionais na origem da função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

só existem nas direções i e j.

**Solução** De fato, no Exemplo 2.4 vimos que as derivadas direcionais  $f_x(0,0)$  e  $f_y(0,0)$  são ambas iguais a zero e se  $\mathbf{u} = (\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}$  é uma direção unitária não paralela ao eixos, isto é, se  $\cos \theta \neq 0$  e sen  $\theta \neq 0$ , então

$$\frac{f\left(\mathbf{0}+t\mathbf{u}\right)-f\left(\mathbf{0}\right)}{t}=\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)}{t}=\frac{1}{t}\frac{t^{2}\cos\theta\sin\theta}{t^{2}}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{t}$$

de onde concluímos que  $\frac{f(\mathbf{0} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t}$  não tem limite quando  $t \to 0$ , isto é, a derivada direcional de f na origem, na direção  $\mathbf{u}$ , não existe.

**Teorema 2.36** Se  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  é uma função diferenciável no ponto P(a,b), interior ao conjunto D,  $e \mathbf{u} = (\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}$  é uma direção unitária do  $\mathbb{R}^2$ , então a derivada direcional de f no ponto P, na direção  $\mathbf{u}$ , existe e

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\sin\theta. \tag{2.25}$$

**Demonstração** Se f é diferenciável no ponto P, então

$$f(P + t\mathbf{u}) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (t\cos\theta) + f_y(a, b) \cdot (t\sin\theta) + E(t\mathbf{u}),$$

onde o erro  $E(t\mathbf{u})$  é tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{E(t\mathbf{u})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{E(t\cos\theta, t\sin\theta)}{t} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+t\mathbf{u}) - f(P)}{t} = f_x(a,b)\cos\theta + f_y(a,b)\sin\theta,$$

como queríamos

De (2.25) resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) = (f_x(P)\mathbf{i} + f_y(P)\mathbf{j}) \bullet \mathbf{u} \qquad \text{(produto escalar)},$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) = \nabla f(P) \bullet \mathbf{u} = |\nabla f(P)| \cos \phi,$$

sendo  $\phi$  o ângulo entre os vetores  $\nabla f(P)$  e **u**. Em outras palavras, a derivada direcional de f no ponto P nada mais é do que a componente do vetor gradiente na direção do vetor unitário **u**. Portanto, se  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  é uma função diferenciável no ponto  $P(a,b) \in D$ , então:

- 1. O maior valor da derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P)$  é  $|\nabla f(P)|$  e ocorre quando  $\phi = 0$ , isto é, quando  $\mathbf{u}$  apontar na direção do gradiente:  $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ .
- 2. O menor valor da derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P)$  é  $-|\nabla f(P)|$  e ocorre quando  $\phi = \pi$ , isto é, quando  $\mathbf{u}$  apontar na direção oposta ao gradiente.
- 3. Quando a derivada direcional é positiva, ela representa a taxa de crescimento da função e o gradiente aponta na direção segundo a qual a função cresce mais rápido.
- 4. Quando a derivada direcional é negativa, ela representa a taxa de decrescimento e na direção do gradiente a função decresce mais rápido.

No caso de funções de três ou mais variáveis, a definição e o cálculo da derivada direcional são semelhantes ao que descrevemos para funções de duas variáveis. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 2.37** Calcular a derivada direcional da função  $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ , no ponto P(2, 1, 3), na direção do vetor  $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ .

Solução Temos que  $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}$  e consideramos a direção unitária  $\mathbf{u}$  colinear com  $\mathbf{v}$ 

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}.$$

Um cálculo direto nos dá  $\nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = 4x \mathbf{i} + 6y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}$ , de modo que  $\nabla f(P) = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ . Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) = \nabla f(P) \bullet \mathbf{u} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

e o sinal negativo indica que a função decresce a partir do ponto P, na direção  $\mathbf{u}$ .

**Exemplo 2.38** O valor máximo da derivada direcional da função  $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, & se\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & se\ (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Solução Temos que

$$f_x = \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad f_y = \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \quad e \quad f_z = \frac{-2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

e no ponto  $P(1, \sqrt{2}, -1)$ , obtemos

$$f_x(P) = \frac{2}{16}$$
,  $f_y(P) = \frac{2\sqrt{2}}{16}$  e  $f_y(P) = -\frac{2}{16}$ .

O valor máximo da derivada direcional de f em  $P(1, \sqrt{2}, -1)$  é igual a

$$|\nabla f(P)| = \sqrt{f_x(P)^2 + f_y(P)^2 + f_z(P)^2} = \frac{1}{4}.$$

**Exemplo 2.39** A temperatura em um ponto (x,y) da placa circular  $D: x^2 + y^2 \le 4$  é dada por  $T(x,y) = x^3 + xy^2$ . A direção a partir do ponto P(1,1) da placa em que a temperatura cresce mais rápido é precisamente  $\mathbf{v} = \nabla T(P)$ , isto é,

$$\mathbf{v} = T_x(1,1)\,\mathbf{i} + T_y(1,1)\,\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

e a taxa máxima de crescimento da temperatura nessa direção é  $|\nabla T(P)| = \sqrt{20}$ .

### 2.4.1 Variação Estimada

Se  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto P(a,b), interior ao conjunto D, e  $\mathbf{u} = (\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}$  é uma direção unitária do  $\mathbb{R}^2$ , a derivada direcional  $D_{\mathbf{u}} f(P)$  mede a taxa de variação de f(x,y) em relação à distância medida na direção unitária  $\mathbf{u}$ . De fato, observando a Figura 2.8

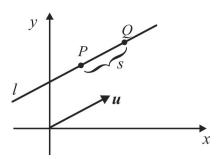


Figura 2.8: Variação em relação à distância.

vemos que  $\mathbf{PQ} = s\mathbf{u}$  e, portanto, a reta l tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a + s \cos \theta \\ y = b + s \sin \theta, \end{cases}$$

de onde resulta que  $x'(s) = \cos \theta$  e  $y'(s) = \sin \theta$ . Logo,

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = f_x(P)\cos\theta + f_y(P)\sin\theta = f_x(P)x'(s) + f_y(P)y'(s) = \frac{df}{ds}(P)$$
 (2.26)

De (2.26) deduzimos que  $df(P) = D_{\mathbf{u}}f(P) ds$  e ressaltamos aqui a semelhança com o caso unidimensional em que temos df = f'(x) dx.

**Exemplo 2.40** Determinemos a variação do valor de  $f(x,y) = x \exp(y)$ , se o ponto (x,y) se move ds = 0.1 unidade a partir do ponto P(2,0), em direção ao ponto Q(4,1).

**Solução** Temos  $f_x = \exp(y)$  e  $f_y = x \exp(y)$ , de modo que  $f_x(P) = 1$  e  $f_y(P) = 2$  e, portanto,  $\nabla f(P) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ . A derivada direcional de f no ponto P, na direção do vetor  $\mathbf{v} = \mathbf{PQ} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ , é

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \bullet \mathbf{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \bullet (\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}) = \frac{4}{\sqrt{5}},$$

onde  $\mathbf{u}$  é a normalização do vetor  $\mathbf{v}$ . Logo.

$$df = D_{\mathbf{u}}f(P) ds = \frac{4}{\sqrt{5}} \times (0.1) = \frac{0.4}{\sqrt{5}},$$

ou seja,  $df \approx 0.18$  unidade é a varivação crescente de f.

### 2.4.2 Reta Tangente e Reta Normal

As superfícies consideradas até o momento foram descritas por uma equação do tipo z = f(x, y), onde  $(x, y) \in D$ , e representaram gráficos de funções diferenciáveis. De forma mais geral, uma superfície S do  $\mathbb{R}^3$  é descrita, na forma implícita, por uma equação do tipo F(x, y, z) = 0, sendo F(x, y, z) uma função diferenciável em uma região  $\Omega$  do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos na superfície S uma curva  $\gamma(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \ a < t < b$ , cujo gráfico passa pelo ponto P(a, b, c) de S. Então  $F(\gamma(t)) = 0$  e da Regra da Cadeia resulta que

$$F_x(P) x'(t) + F_y(P) y'(t) + F_z(P) z'(t) = 0.$$
 (2.27)

Como no caso de duas variáveis, o vetor

$$\nabla F(P) = F_x(P)\mathbf{i} + F_y(P)\mathbf{j} + F_k(P)\mathbf{k}$$

recebe o nome de vetor gradiente de F no ponto P, também denotado por gradF(P), e de (2.27) deduzimos que

$$\nabla F(P) \bullet \gamma'(t) = 0$$
, (produto escalar)

de modo que o vetor  $\nabla F(P)$  é perpendicular ao vetor velocidade  $\gamma'(t)$ .

A totalidade dos vetores velocidade  $\gamma'(t)$  constituem o plano tangente à superfície S no ponto P. Assim, o plano tangente passa no ponto P e tem, para vetor normal, o vetor  $\nabla F(P)$ . A equação cartesiana do plano tangente é, portanto,

$$\mathbf{PQ} \bullet \nabla F(P) = 0 \text{ ou } F_x(P)(x-a) + F_y(P)(y-b) + F_z(P)(z-c) = 0.$$

A Figura 2.9 dá uma visão geométrica do plano tangente.

No caso em que a superfície é descrita na forma explícita por z = f(x, y), consideramos

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

e as derivadas parciais de F no ponto P(a, b, f(a, b)) são

$$F_x(P) = f_x(a,b), F_y(P) = f_y(a,b) \text{ e } F_z(P) = -1.$$

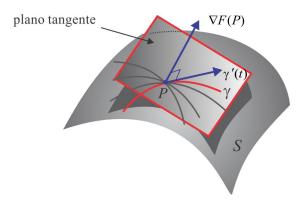


Figura 2.9: Visão geométrica do plano tangente.

O plano tangente é governado pela equação

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z-f(a,b)) = 0,$$

conforme foi estabelecido na Seção 2.2..

A reta normal à superfície S, no ponto P(a,b,c) da superfície, é a reta que passa em P, na direção do vetor  $\nabla f(P)$ . A equação vetorial da reta normal é

$$\mathbf{PQ} = t \ \nabla F(P), \ t \in \mathbb{R},$$

sendo Q(x,y,z) um ponto genérico da reta. Na forma paramétrica, a reta normal é descrita por

$$\begin{cases} x = a + tF_x(P) \\ y = a + tF_y(P) \\ z = a + tF_z(P) \end{cases}$$

e, no caso em que as derivadas parciais  $F_x(P)$ ,  $F_y(P)$  e  $F_z(P)$  são todas diferentes de zero, podemos expressar a reta normal na forma simétrica

$$\frac{x-a}{F_x(P)} = \frac{y-b}{F_y(P)} = \frac{z-c}{F_z(P)}.$$

**Exemplo 2.41** Determinar o plano tangente e a reta normal à superfície  $S: x^2 + y^2 + 3z^2 = 5$ , no ponto P(1,1,1).

Solução Neste caso, consideramos  $F(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2-5$  e o vetor gradiente de F no ponto P(1,1,1) é

$$\nabla F(P) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

O plano tangente à superfície S no ponto P tem equação cartesiana

$$2(x-1) + 2(y-1) + 6(z-1) = 0$$
 ou  $x + y + 3z - 5 = 0$ .

e a reta normal é

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 6t, \ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \text{ ou } \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{6}.$$

**Exemplo 2.42** Determinar as retas tangente e normal à curva  $\gamma: x^2 - xy + y^2 - 7 = 0$ , no ponto P(-1,2).

Solução Se  $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 7$ , então  $\nabla f(-1,2) = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$  e as retas tangente e normal no ponto P(-1,2) são descritas por

reta tangente: 
$$\mathbf{PQ} \bullet \nabla f(-1,2) = 0$$
  
reta normal:  $\mathbf{PQ} = t\nabla f(-1,2)$ ,

onde Q(x,y) é um ponto genérico da reta. Em coordenadas, as equações dessas retas são

reta tangente: 
$$4x - 5y + 14 = 0$$
  
reta normal:  $x = -1 + 4t$  e  $y = 2 + 5t$  ou  $5x + 4y - 3 = 0$ .

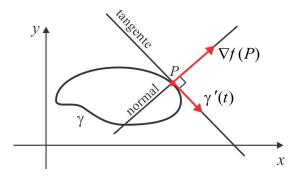


Figura 2.10: Retas tangente e normal.

Suponhamos que uma curva  $\gamma$  do  $\mathbb{R}^3$  seja determinada pela interseção de duas superfícies

$$S_1: F(x, y, z) = 0$$
 e  $S_2: G(x, y, z) = 0$ ,

como sugere a Figura 2.11. O vetor tangente à curva  $\gamma$  no ponto P(a,b,c) é o produto vetorial  $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$  dos vetores normais aos planos tangentes a  $S_1$  e  $S_2$  em P, e a equação vetorial da reta tangente é

$$\mathbf{PQ} = t \left[ \nabla F \left( P \right) \times \nabla G \left( P \right) \right],$$

sendo Q(x,y,z) um ponto genérico da reta. As equações paramétricas da reta tangente são

$$\begin{cases} x = a + t \left( F_y G_z - F_z G_y \right) \\ y = b + t \left( F_z G_x - F_x G_z \right) \\ z = c + t \left( F_x G_y - F_y G_x \right) \end{cases}$$

e na forma simétrica a reta tangente é descrita por

$$\frac{x-a}{F_y G_z - F_z G_y} = \frac{y-b}{F_z G_x - F_x G_z} = \frac{z-c}{F_x G_y - F_y G_x},$$
(2.28)

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto P. Os denominadores em (2.28) são precisamente as coordenadas do vetor  $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$ , supostas não nulas.

Exemplo 2.43 Consideremos as funções diferenciáveis

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$$
 e  $G(x, y, z) = x + 2y - 2z - 1$ ,

CAPÍTULO 2 DIFERENCIABILIDADE 65

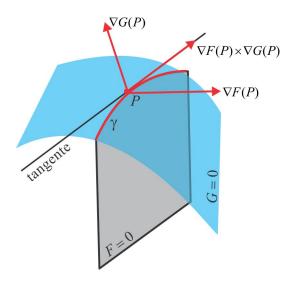


Figura 2.11: Interseção de duas superfícies.

e seja  $\gamma$  a curva interseção da esfera F(x,y,z)=0 com o plano G(x,y,z)=0. No ponto P(1,1,1) temos  $\nabla F(P)=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$  e  $\nabla G(P)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$  e o vetor tangente à curva  $\gamma$  no ponto P é, portanto:

$$abla F\left(P
ight) imes 
abla G\left(P
ight) = \left[ egin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{array} 
ight] = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

A reta tangente à curva  $\gamma$  em P é descrita por:

$$x = 1 - 8t$$
,  $y = 1 + 6t$   $e$   $z = 1 + 2t$ . (forma paramétrica) 
$$\frac{x - 1}{-8} = \frac{y - 1}{6} = \frac{z - 1}{2}.$$
 (forma simétrica)

### Exercícios & Complementos.

- 1. Calcule a derivada direcional da função z = f(x, y) no ponto P, na direção indicada:
  - (a)  $z = x^3 + 5x^2y$ ; P(2,1), na direção da reta y = x.
  - (b)  $z = y \exp(xy)$ ; P(0,0), na direção da reta  $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ .
  - (c)  $z = x^2 y^2$ ; P(2,3), na direção tangente à curva  $2x + 5y^2 = 15$ , no ponto  $(0,\sqrt{3})$ .
- 2. Calcule a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$  nos seguintes casos:
  - (a)  $f(x,y,z) = e^{-y} \sin x + \frac{1}{3}e^{-3y} \sin 3x + z^2$ ;  $P(\pi/3,0,1) \in \mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$ .
  - (b)  $f(x, y, z) = x^2y + 3yz^2$ ;  $P(1, -1, 1) \in \mathbf{u} = \frac{1}{3}\mathbf{i} \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ .
  - (c)  $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ ;  $P(1, 1, 1) \in \mathbf{u} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ .
- 3. Calcule o valor máximo da derivada direcional de w = f(x, y, z) no ponto P:

(a) 
$$w = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$$
;  $P(1, 2, -3)$  (b)  $w = \exp(x)\cos(yz)$ ;  $P(1, 0, \pi)$ .

- 4. Seja z = f(x, y) uma função diferenciável em cada ponto do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . Mostre que a derivada direcional de f no ponto (x,y) na direção tangente ao círculo é  $-yf_x + xf_y$ .
- 5. Encontre o plano tangente e a reta normal à superfície dada no ponto indicado:
  - (a)  $z = x^2 y^2$ ; P(1, 1, 0)
- (c)  $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$ ; P(3, -4, 15)
- (b)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ : P(1,1,1) (d)  $z = \sqrt{9 x^2 y^2}$ : P(-1,2,2).
- 6. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva  $\gamma$  dada, no ponto P indicado.

(a) 
$$\gamma : \begin{cases} 3x - 5y - z + 7 = 0 \\ y = 2; \quad P(1, 2, 0) \end{cases}$$
 (c)  $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x = 1; \quad P(1, 1, \sqrt{2}) \end{cases}$ 

(b) 
$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x = 1; & P(1, 3, 2). \end{cases}$$
 (d)  $\gamma : \begin{cases} z = 2xy(x^2 + y^2)^{-1} \\ y = -1; & P(1, -1, -1). \end{cases}$ 

- 7. Seja  $\gamma$  a curva em  $\mathbb{R}^3$  descrita por:  $x = \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t$  e  $z = \cos 2t, 0 \le t \le 2\pi$ . Mostre que a curva  $\gamma$  está contida no paraboloide  $x^2 + y^2 + z = 1$  e determine a reta tangente e o plano normal à curva no ponto correspondente a  $t = \pi/4$ .
- 8. Em cada caso verifique que  $\nabla f$  é normal às curvas ou superfícies de nível.
  - (a)  $f(x,y) = x^2 + y^2$ .
  - (b)  $f(x,y) = \exp(x^2 + y^2)$ .
  - (c)  $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 xz$ .
- 9. Seja f(x, y, z) = 3x + 5y + 2z e denote por **n** o vetor normal exterior à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Calcule a derivada directional  $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)$ .
- 10. Calcule a derivada direcional no ponto P(3,4,5) da função  $w=x^2+y^2+z^2$ , na direção tangente à curva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0\\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25 \end{cases}$$

no ponto P.

11. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verifique que f é contínua, tem derivada direcional na origem em qualquer direção, mas não é aí diferenciável.

- 12. Admitindo as operações possíveis e considerando a e b constantes reais, prove as seguintes regras de derivação:
  - (a)  $\nabla (af + bq) = a\nabla f + b\nabla q$ .
  - (b)  $\nabla (fg) = g\nabla f + f\nabla g$ .
  - (c)  $\nabla (f/g) = \frac{g\nabla f f\nabla g}{g^2}$ .

13. Seja  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  o vetor posição do ponto P(x, y, z) do  $\mathbb{R}^3$  e represente por  $r = |\mathbf{r}|$ . Se f(t) é uma função real de uma variável real, derivável, mostre que

$$\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Usando essa fórmula, calcule  $\nabla(r)$ ,  $\nabla(1/r)$  e  $\nabla(\log r)$ .

- 14. Sejam  $0 < \alpha < 1/2$  e  $f(x,y) = |xy|^{\alpha}$ . Mostre que:
  - (a)  $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ .
  - (b) f tem derivada direcional na origem apenas nas direções  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ .
- 15. Determine a reta tangente à curva  $\gamma$ , no ponto P indicado:

(a) 
$$\gamma: \begin{cases} 3x^2 + y^2 + z = 4 \\ -x^2 + y^2 + z^2 = 12; \end{cases}$$
 no ponto  $P(1, 2, -3)$ .

(b) 
$$\gamma : \begin{cases} 3xy + 2yz + 6 = 0 \\ x^2 - 2xz + y^2z = 1; \end{cases}$$
 no ponto  $P(1, -2, 0)$ .

- 16. Calcule a derivada direcional no ponto P(1,2,3) da função  $w=2x^2-y^2+z^2$ , na direção da reta que passa nos pontos A(1,2,1) e B(3,5,0).
- 17. Seja  $\gamma$  a curva de equações paramétricas  $x=t,\,y=t^2\,$  e  $z=t^3,\,$   $t\in\mathbb{R}.$ 
  - (a) Determine a reta tangente e o plano normal à curva  $\gamma$ , no ponto P(2,4,8).
  - (b) Determine a reta tangente à curva  $\gamma$ , que passa no ponto P(0, -1, 2).
  - (c) Verifique se existe reta tangente à curva  $\gamma$ , passando no ponto P(0,-1,3).
- 18. Sejam  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  uma função derivável, com f'(t) > 0,  $\forall t$ , e  $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$ . Mostre que a derivada direcional  $D_{\mathbf{v}}g(x, y)$  será máxima quando  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ .
- 19. Mostre que se  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  é uma função real de uma variável real derivável, então os planos tangentes à superfície de equação z = yf(x/y) passam todos pela origem.
- 20. Determine o plano tangente à superfície  $z=2x^2+y^2-3xy$ , paralelo ao plano de equação 10x-7y-2z+5=0.
- 21. Determine um plano que passa nos pontos P(5,0,1) e Q(1,0,3) e que seja tangente à superfície  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$ .
- 22. Determine os pontos da superfície  $z = 8 3x^2 2y^2$ , nos quais o plano tangente é perpendicular à reta x = 2 3t, y = 7 + 8t e z = 5 t.
- 23. Determine em que ponto da superfície  $z=3x^2-y^2$ o plano tangente é paralelo ao plano de equação 3x+y+2z=1.
- 24. Determine em que pontos da superfície  $z=x^2-xy+y^2-2x+4y$  o plano tangente é horizontal.
- 25. Mostre que qualquer reta normal à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  passa pelo centro da esfera.

26. A temperatura T no ponto (x,y) de uma placa metálica circular, com centro na origem, vem dada por

$$T(x,y) = \frac{400}{2 + x^2 + y^2} \, {}^{\circ}C.$$

Qual a direção que se deve tomar a partir do ponto A(1,1), de modo que a temperatura aumente o mais rápido possível e com que velocidade T(x,y) aumenta ao passar pelo ponto A nessa direção?

27. Um ponto P se move ao longo de uma curva  $\gamma$  em um campo escalar diferenciável w = f(x, y, z) a uma velocidade  $\frac{ds}{dt}$ . Se **u** representa o vetor tangente unitário à curva  $\gamma$ , prove que a taxa instatânea de variação de w em relação ao tempo, no ponto P, é

$$(\nabla f \bullet \mathbf{u}) \frac{ds}{dt}.$$

- 28. A superfície de um lago é representada por uma região D do plano xy de modo que a profundidade (medida em metros) sob o ponto (x,y) é  $p(x,y) = 300 x^2 y^2$ . Em que direção um bote no ponto A(4,9) deve navegar para que a profundidade da água decresça mais rapidamente? Em que direção a profundidade permanece a mesma?
- 29. A temperatura no ponto (x, y, z) do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  vem dada por

$$T(x, y, z) = xy + z \, {}^{\circ}C.$$

Qual a taxa instantânea de variação da temperatura, em relação a t, ao longo da  $h\'elice~x=\cos t$ ,  $y=\sin t~e~z=t$ ? Qual a taxa no ponto  $P\left(1,0,0\right)$  da h'elice?

30. A temperatura no ponto (x, y) de uma placa retangular é  $T(x, y) = x \operatorname{sen} 2y$  °C. Um ponto P se move no sentido horário, ao longo do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , a uma velocidade constante de 2 unidades de comprimento de arco por segundo. Qual a velocidade de variação de temperatura no instante em que o ponto P se situar em  $(1/2, \sqrt{3}/2)$ ?

#### RESPOSTAS & SUGESTÕES

#### SEÇÃO 2.1 DERIVADAS PARCIAIS

1. No Exercício 1 as derivadas são calculadas usando regras básicas de derivação. Por simplicidade, no item (c) substituímos a expressão  $e^{x^2+y^2}$  por A.

	$z_x$	$z_y$	$z_{xx}$	$z_{yy}$	$z_{yx}$
(a)	6x	$3y^2$	6	6y	0
(b)	$\frac{-y}{x^2 + y^2}$	$\frac{x}{x^2 + y^2}$	$\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$	$\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$	$\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$
(c)	$\left(2x^2+1\right)yA$	$\left(2y^2+1\right)xA$	$\left(6+4x^2\right)xyA$	$\left(6+4y^2\right)xyA$	$\left(1+2x^2+2y^2\right)A$
(d)	$y\cos xy + \frac{2}{x}$	$x\cos xy + \frac{1}{y}$	$-y^2 \operatorname{sen} xy - \frac{2}{x^2}$	$-x^2 \operatorname{sen} xy - \frac{1}{y^2}$	$\cos xy - xy \sin xy$
(e)	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$	$\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$	$\frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
(f)	$\frac{-y}{1-x^2y^2}$	$\frac{-x}{1-x^2y^2}$	$\frac{-2xy^3}{(1-x^2y^2)^2}$	$\frac{-2x^3y}{(1-x^2y^2)^2}$	$\frac{x^2y^2 - x - 2x^2y^3}{(1 - x^2y^2)^2}$

2. (a) 
$$\pi/6 + 2/\sqrt{3}$$
 (b) 0 (c)  $f_{xy}(1,0) = f_{yx}(1,0) = 0$  (d)  $-1$ .

3. Se fizermos  $A = A(x,y) = \exp\left(-1/\left(x^2 + y^2\right)\right)$ , então no ponto  $(x,y) \neq (0,0)$ , teremos

$$f_x(x,y) = \frac{2xA}{(x^2+y^2)^2} \text{ e } f_y(x,y) = \frac{2yA}{(x^2+y^2)^2}$$

e na origem as derivadas são calculadas pela definição. Usando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0 \text{ e } f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{e^{-1/k^2}}{k} = 0.$$

Agora,

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0.$$

De modo inteiramente análogo, prova-se que  $f_{yx}\left(0,0\right)=0$ . Note que  $f_{xy}\left(0,0\right)=f_{yx}\left(0,0\right)$ .

4. As derivadas  $f_x$  e  $f_y$  ja foram calculadas no Exemplo 2.7 e para verificar a continuidade da derivada parcial  $f_x$  na origem, use a propriedade do confronto. Se  $(x, y) \neq \mathbf{0}$ , então

$$0 \le |f_x(x,y)| = \left| \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right| \le \frac{|y|y^4 + |y|x^4 + 4x^2y^2|y|}{(x^2 + y^2)^2} \le 6|y|,$$

de onde resulta  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$  e, consequentemente,  $f_x$  é contúnua em (0,0). De modo inteiramente análogo, prova-se que  $f_y$  é contúnua em (0,0).

5. Como  $f(x,y) = x^2 + y^3$ , então  $f_x = 2x$  e, sendo assim,  $f_x(P) = 2(x^2 + y^2)$ . Por outro lado,

$$f(P) = (x^2 + y^2)^2 + y^3 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + y^3$$

de onde resulta

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(P)] = 4x\left(x^2 + y^2\right).$$

6. Como  $z_x = -(x^2 - y^2)y^2(x^2 + y^2)^{-2}$  e  $z_y = 2x^3y(x^2 + y^2)^{-2}$ , temos que

$$xz_x + yz_y = -\frac{x(x^2 - y^2)y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = z.$$

7. Procedimento semelhante ao Exercício 6.

- 8. Procedimento semelhante ao Exercício 6.
- 9. Como  $u_{xx} = 2A$  e  $u_{yy} = 2C$ , temos que  $\Delta u = 0$  se, e somente se, A + C = 0.
- 10. Das relações  $u_x=v_y$  e  $u_y=-v_x$ , segue que  $u_{xx}=v_{yx}$  e  $u_{yy}=-v_{xy}$ .e como  $v_{xy}=v_{yx}$ , então

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

#### SEÇÃO 2.2 CAMPOS DIFERENCIÁVEIS

1. (a) Usando coordenadas polares, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{3r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = 0,$$

independente de  $\theta$  e, portanto,  $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ , de onde segue a continuidade de f em (0,0).

(b) As derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são dadas por:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{6xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Assim, considerando os caminhos y = 0 e y = x, vê-se que  $f_x$  e  $f_y$  não têm limite em (0,0), e portanto,  $f_x$  e  $f_y$  são descontínuas em (0,0).

(c) Considerando os caminhos h = 0 e k = h, vê-se que

$$\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{3h^2k}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

não tem limite em (0,0). Portanto, f não é diferenciável em (0,0). Isto não contradiz o Lema Fundamental, pois neste caso ele não se aplica.

2. As derivadas parciais  $f_x(0,0)$  e  $f_y(0,0)$  existem e

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)}{x} = -1 \text{ e } f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y)}{y} = 1.$$

Por outro lado,

$$E(h,k) = f(h,k) - \varphi(h,k) = \frac{h^2k - hk^2}{h^2 + k^2} \text{ e } \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = -\frac{h^2k + hk^2}{\sqrt{(h^2 + k^2)^3}},$$

e ao longo do caminho k = mh, com h > 0, tem-se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0} -\frac{h^3(m+m^2)}{h^3\sqrt{(1+m^2)^3}} = -\frac{m+m^2}{\sqrt{(1+m^2)^3}}$$

e o limite em (0,0) não existe. Portanto, a função f não é diferenciável em (0,0).

- (b) Verdadeiro. (Teorema 2.13).
- (c) Falso. A função do Exercício 1 é um contraexemplo
- (d) Falso. (Exemplo 2.4)
- (e) Verdadeiro. Esta afirmação é o Lema Fundamental!
- (f) Falso. veja um contraexemplo na seção 2.1.2 Exemplos Clássicos II.
- (g) Falso. A existência das derivadas  $f_x$  e  $f_y$  não garante sequer a continuidade.
- 4. Todas as funções apresentadas e suas derivadas  $z_x$  e  $z_y$  são funções elementares do cálculo sendo, portanto, contínuas no interior de seus respectivos domínios. Como as derivadas parciais são contínuas temos, pelo Lema Fundamental, que as funções são diferenciáveis.
- 5. Antes de responder, confira o Exercício 3.
  - (a) Como  $f_x(x,y) = \exp(-y)$  e  $f_y(x,y) = -x \exp(-y)$  são contínuas no ponto P(1,0), segue do Lema Fundamental, que f é diferenciável em P
  - (b) Como  $f_x$  não existe em P, então a função f não pode ser diferenciável em P.
  - (c) A derivada  $f_y$  não existe em P(0,0) e a função não pode ser aí diferenciável.
  - (d) Veja a seção 2.2.3 Exemplos Clássicos II.
  - (e) As derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  não existem em P(0,0) e a função não é diferenciável em P(0,0).
  - (f) No domínio  $D^+ = \{(x,y) : x > 0\}$  a função reduz-se a  $z = \sqrt{x(1+y^2)}$ , com derivadas parciais

$$f_x(x,y) = \frac{1+y^2}{2\sqrt{x(1+y^2)}} \text{ e } f_y(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x(1+y^2)}}$$

contínuas em  $D^+$ . Deduza, a partir do Lema Fundamental, que f é diferenciável em  $D^+$ . No domínio  $D^- = \{(x,y) : x < 0\}$  a conclusão é a mesma. Em um ponto P(0,b), a derivada parcial  $f_x$  não existe, fazendo com que a função f não seja diferenciável. Concluímos então que z é diferenciável em  $D^- \cup D^+$ .

- 6. Calcule as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  e use a definição  $df = f_x dx + f_y dy$ .
  - (a)  $df = (15x^2 + 8xy) dx + (4x^2 6y^2) dy$ .
  - (b)  $df = yze^x dx + ze^x dy + ye^x dz$ .
  - (c)  $df = \left[ \sin \frac{y}{1+x^2} \frac{2x^2y}{(1+x^2)^2} \cos \frac{y}{1+x^2} \right] dx + \left[ \frac{x}{1+x^2} \cos \frac{y}{1+x^2} \right] dy$ .
  - (d)  $df = \frac{xdy ydx}{x^2 + y^2}$
- 7. Note que f(x, y, z) = f(y, x, z) = f(z, y, x) e

$$f_x(x,y,z) = \begin{cases} \frac{yz(-x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Usando simetria, segue que  $f_y(x, y, z) = f_x(y, x, z)$  e  $f_y(x, y, z) = f_x(z, y, x)$ , ou seja, as derivadas parciais existem. Além disso,

$$\frac{E(h, k, l)}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = \frac{hkl}{(h^2 + k^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

temos, ao longo do caminho  $h=t,\,k=t$  e  $l=t,\,{\rm que}$ 

$$\lim_{(h,k,l)\to(0,0,0)} = \frac{hkl}{(h^2 + k^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{(3t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Portanto, f não é diferenciável em P(0,0,0).

#### SEÇÃO 2.3 REGRA DA CADEIA

1. Se F(t) é uma primitiva de  $\log(1 + \sin^2 t)$ , isto é, se  $F'(t) = \log(1 + \sin^2 t)$ , segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$f(x,y) = F(y) - F(x)$$

e da Regra da Cadeia, obtém-se

$$f_x(x,y) = F'(y)\frac{\partial y}{\partial x} - F'(x)\frac{\partial y}{\partial x} = -[\log(1 + (\sin x)^2)].$$

Portanto,  $f_{xy} = 0$ . De modo inteiramente análogo,

$$g_{xy} = 2x \exp(\cos x^2 y) \left[1 - x^2 y \sin(x^2 y)\right].$$

De forma geral, se  $f(x,y) = \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \varphi(t) dt$ , então  $f_x = \varphi(\beta(x,y)) \beta_x - \varphi(\alpha(x,y)) \alpha_x$ .

2. Como

$$f_x = -\frac{1}{xy} (y - x \cos(x/y))$$
 e  $f_y = \frac{1}{y^2} (y - x \cos(x/y))$ ,

temos que

$$xf_x + yf_y = -\frac{x}{xy}(y - x\cos(x/y)) + \frac{y}{y^2}(y - x\cos(x/y)) = 0.$$

- 3. Use regras de derivação e mostre diretamente que  $f_x=0$  e  $f_y=0$ .
- 4. Se u = u(x, y) = x y segue da Rega da Cadeia que

$$\varphi_x = f_u u_x = f_u$$
 e  $\varphi_y = f_u u_y = -f_u$ 

e, portanto,  $\varphi_x + \varphi_y = f_u - f_u = 0$ . A outra relação prova-se de modo similar.

5. Usando a Regra da Cadeia  $z'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t)$ , encontra-se

(a) 
$$z'(t) = (\operatorname{sen} t + \cos t) \exp(t) + (1 + t \cos t) \exp(\operatorname{sen} t)$$
.

(b) 
$$z'(t) = \frac{2 \log t + 2t \exp(2t)}{t \left[1 + \exp(2t) + (\log t)^2\right]}.$$

(c) 
$$z'(t) = \frac{3t^5 - \cos t \sin t}{\sqrt{t^6 + \cos^2 t}}$$
.

(d) 
$$z'(t) = 12t^{11} + 7t^6 + 5t^4$$
.

6. Da Regra da Cadeia, resulta

(a) 
$$w_x = 3x^2 + 12y^2 + 12xy + 18x - 6y e w_y = 6x^2 + 24y^2 + 24xy - 6x + 2y$$
.

(b) 
$$w_x = \frac{6x^4 + 18y^2}{x^5 + 9xy^2} e w_y = \frac{4xy + 18y}{x^4 + 9y^2}.$$

(c) 
$$w_x = \frac{1}{2\sqrt{xy}} (6xy + 7y) e w_y = \frac{1}{2\sqrt{xy}} (3x^2 + 7x).$$

(d) 
$$w_x = -\operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right) - \frac{y\operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right)}{2\sqrt{xy}},$$
  
 $w_y = -\operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right) + \frac{x\operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right)}{2\sqrt{xy}}.$ 

7. Usando o mesmo raciocínio do Exercício 1 da Seçao 2.3, obtém-se

$$f_r = -s^4 e^{r^2 s^8} + 4r^3 s e^{r^8 s^2}, f_s = -4r s^3 e^{r^2 s^8} + r^4 e^{r^8 s^2}$$
  
$$f_{rs} = -4s^3 (1 + 2r^2 s^8) e^{r^2 s^8} + 2r^{12} e^{r^8 s^2}.$$

8. Da Regra da Cadeia, resulta

$$z_{xx} = z_{rr} \frac{x^2}{r^2} + z_r \frac{y^2}{r^3}$$
 e  $z_{yy} = z_{rr} \frac{y^2}{r^2} + z_r \frac{x^2}{r^3}$ .

Logo,

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} \frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{1}{r} z_r \frac{x^2 + y^2}{r^2} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r$$

9. Da Regra da Cadeia, resulta

$$w_x = f'(u) u_x$$
 e  $w_{xx} = f''(u) u_x^2 + f'(u) u_{xx}$ 

e também  $w_{yy} = f''(u) u_y^2 + f'(u) u_{yy}$ . Logo,  $\Delta w = f''(u) \left(u_x^2 + u_y^2\right) + f'(u) \Delta u$ .

10. Derivando a equação  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  em relação a t, chega-se a

$$f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y = nt^{n-1}f(x, y),$$

e considerando t = 1, resulta

$$f_x(x,y)x + f_y(x,y)y = n f(x,y).$$

11. Da Regra da Cadeia, segue

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r$$
 e  $v_\theta = v_x x_\theta + v_y y_\theta$ 

e, usando as relações  $u_x=v_y,\ u_y=-v_x,\ x_r=\cos\theta,\ y_r=\sin\theta,\ x_\theta=-r\sin\theta$  e  $y_\theta=r\cos\theta,$  obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos \theta v_y - \sin \theta v_x = \frac{1}{r} (-r \sin \theta v_x + r \cos \theta v_y) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

De modo inteiramente análogo chega-se a  $v_{\theta} = -\frac{1}{r}u_{\theta}$ .

12. Da Regra da Cadeia, resulta

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x \quad \text{com} \quad z_y = f_u u_y + f_v v_y,$$

com u = x - y e v = y - x. Como  $u_x = v_y = 1$  e  $u_y = v_x = -1$  temos que

$$z_x + z_y = (f_u u_x + f_v v_x) + (f_u u_v + f_v v_y) = (f_u - f_v) + (-f_u + f_v) = 0.$$

13. Pondo u = x/y e usando a Regra da Cadeia, resulta

(a) 
$$f_x = 2x\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2 + y^2\right)\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right)$$
 e  $f_y = 2y\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2 + y^2\right)\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y}\right)$  e, portanto,

$$xf_x + yf_y = 2(x^2 + y^2)\psi(x/y) = 2f.$$

(b) 
$$g_x = \frac{1}{y}\varphi'(x/y)$$
 e  $g_y = \frac{-x}{y^2}\varphi'(x/y)$ . Logo,  $g_x(1,1) = 1$  e  $g_y(1,1) = -1$ .

#### SEÇÃO 2.4 DERIVADA DIRECIONAL & GRADIENTE

- 1. (a)  $26\sqrt{2}$ , (b)  $\frac{3}{5}$  e (c)  $\pm \frac{1}{\sqrt{76}} \left(6 + 20\sqrt{3}\right)$ .
- 2. (a)  $\frac{5-\sqrt{6}}{4}$ , (b)  $\frac{-22}{3}$  e (c)  $\frac{2}{9}$ .
- 3. (a)  $\frac{\sqrt{14}}{98}$  e (b) e.
- 4. Como  $\mathbf{n} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$  é o vetor normal ao círculo  $x^2 + y^2 = 1$  temos que  $\mathbf{v} = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$  é o vetor tangente ao círculo  $x^2 + y^2 = 1$  e

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

é o vetor unitário tangente. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \nabla f \bullet \mathbf{u} = (f_x, f_y) \bullet (-y, x) = -yf_x + xf_y.$$

5. A equação do plano  $T_P$ , tangente à superfície F(x,y,z)=0, no ponto P(a,b,c) é:

$$T_P: \nabla F(P) \bullet \overrightarrow{PQ} = 0.$$

(a) 
$$\nabla F(P) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$
,  $T_P: 2x - 2y - z = 0$  e

reta normal: 
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = -z.$$

(b) 
$$\nabla F(P) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$
,  $T_P: x + 2y + 3z = 6$  e

reta normal: 
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{6}$$
.

(c) 
$$\nabla F(P) = \frac{43}{5}\mathbf{i} + -\frac{24}{5}\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$$
,  $T_P: 43x - 24y - 5z = 15$  e

reta normal: 
$$\frac{5(x-3)}{43} = \frac{5(y+4)}{24} = -z + 15$$

reta normal: 
$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{4}$$
.

6. Confira o Exemplo 2.43.

(a) Se 
$$F(x, y, z) = 3x - 5y - z + 7$$
 e  $G(x, y, z) = y - 2$ , então

$$\nabla F(P) = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 1\mathbf{k}, \quad \nabla G(P) = \mathbf{j} \text{ e } \mathbf{v} = \nabla F(P) \times \nabla G(P) = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$$

e a reta tangente é: x = 1 + t, y = 2 e z = 3t,  $t \in \mathbb{R}$ .

(b) 
$$x = 1$$
,  $y = t$  e  $z = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

(c) 
$$x = 1$$
,  $y = t$  e  $z = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

(d) 
$$x = t$$
,  $y = -1$  e  $z = t - 2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

7. Para mostrar que  $\gamma$  está contida no paraboloide  $x^2+y^2+z=1$ , basta substituir as coordenadas de  $\gamma$  na equação do paraboloide e comprovar a identidade. O vetor tangente à curva  $\gamma$  é

$$\mathbf{v} = \gamma'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

e no ponto  $t_0$ ,  $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ . A reta tangente é

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t$$
,  $y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t$  e  $z = -2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

O plano normal passa no ponto P e é ortogonal ao vetor  ${\bf v}$ . Sua equação é

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4z = 2.$$

- 8. Os gradientes são: (a)  $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ , (b)  $\nabla f = 2x\exp(x^2 + y^2)i + 2y\exp(x^2 + y^2)\mathbf{j}$  e (c)  $\nabla f = (4x z)\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} x\mathbf{k}$ . Em (a) e (b) as curvas de nível são circunferências e o vetor tangente no ponto (x, y) é  $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ . Logo,  $\nabla f \bullet \mathbf{v} = 0$ .
- 9. Se  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 r^2$ , então  $\mathbf{n} = \nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$  e, portanto,

$$D_{\mathbf{u}}g\left(x,y,z\right) = \nabla g \bullet \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{2r} \left( 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \right) \bullet \left( 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \right) = \frac{1}{r} (3x + 5y + 2z).$$

10. Confira o Exercício 6. O vetor  $\mathbf{v} = 80\mathbf{i} - 60\mathbf{j}$  é tangente a curva e a derivada direcional é

$$\nabla w \bullet \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 0.$$

11. Seja  $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  uma direção unitária qualquer. Então

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(at,bt)}{t} = a^2b.$$

Em particular,  $f_{x}\left(0,0\right)=0$  e  $f_{y}\left(0,0\right)=0$  e o erro da aproximação linear de f é

$$E(h,k) = f(h,k) - \varphi(h,k) = \frac{h^2k}{h^2 + k^2},$$

de modo que a razão  $E(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}$  não tem limite na origem e, consequentemente, f não é diferenciável em (0,0).

12. Basta observar que

$$\frac{\partial}{\partial x}(af + bg) = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial g}{\partial x}$$

e usar a definição do gradiente.

13. Se  $w = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ , segue da Regra da Cadeia que

$$w_x = \frac{x}{r} f'(r), \ w_y = \frac{y}{r} f'(r) \ e \ w_z = \frac{z}{r} f'(r).$$

Logo,

$$\nabla w = \frac{f'(r)\mathbf{r}}{r}$$

e considerando

$$f(t) = t$$
,  $f(t) = \frac{1}{t}$  e  $f(t) = \log t$ ,

chega-se, respectivamente, às relações

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \ \nabla \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \ \mathrm{e} \ \nabla (\log r) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$

- 14. Confira o Exercício 11.
- 15. Confira o Exercício 6.

(a) 
$$\mathbf{v} = -28\mathbf{i} + 34\mathbf{j} + 32\mathbf{k}$$
; reta tangente:  $\frac{1-x}{28} = \frac{y-2}{34} = \frac{z+3}{32}$ 

(b) 
$$\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$
; reta tangente:  $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{4} = -\frac{z}{6}$ .

16. A direção unitária é  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$  e, portanto,

$$D_{\mathbf{u}}w = \nabla w \bullet \mathbf{u} = (4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \bullet \frac{1}{\sqrt{14}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) = -\frac{10}{\sqrt{14}}.$$

Note que o sinal negativo significa que w decresce na direção considerada.

- 17. Confira Exercício 7.
  - (a) x=2+t, y=4+4t e  $z=8+12t, t\in\mathbb{R}$ . O plano normal é x+4y+12z.
  - (b) Em um ponto genérico da curva, o vetor tangente é  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$  e, representando por Q o ponto de tangência, ao resolver a equação  $\mathbf{PQ} = \lambda v$  encontra-se t = -1 e o ponto Q é (-1, 1 1). Portanto, a reta tangente é

$$x+1 = \frac{1-y}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

- (c) Para mostrar que não há reta tangente pelo ponto P(0,-1,3), basta observar que não existe um ponto Q solução da equação  $\overrightarrow{PQ} = \lambda v$ .
- 18. A derivada direcional  $D_{\mathbf{u}}g$  será máxima quando u apontar na direção do vetor gradiente. Agora, basta observar que

$$\nabla g(x,y) = 2f'\left(x^2 + y^2\right)\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right)$$

e que  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  aponta na direção de  $\nabla g$ .

19. Basta provar que o plano tangente é governado por uma equação do tipo Ax + By + Cz = 0. A equação do plano tangente que passa no ponto P(a, b) é

$$z = f_x(P)(x - a) + f_y(P)(y - b) + c$$
, com  $c = bf(a/b)$ 

e usando a Regra da Cadeia, encontra-se

$$f_x(P) = f'(a/b)$$
 e  $f_y(P) = f(a/b) - \frac{a}{b}f'(a/b)$ 

e o plano tangente é  $f'(a/b) x + \left[ f(a/b) - \frac{a}{b} f'(a/b) \right] y - z = 0.$ 

- 20. Determina-se d tal que 10x 7y 2z + d = 0. O vetor  $\mathbf{n} = 10\mathbf{i} 7\mathbf{j} 2\mathbf{k}$  é normal ao plano 10x 7y 2z + 5 = 0 da equação  $\nabla F = \lambda \mathbf{n}$ , onde  $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 3xy z$ , resulta o ponto de tangência P(1/2, -1, 3) e a equação do plano tangente é 10x 7y 2z 6 = 0.
- 21. Se o plano que passa nos pontos P(5,0,1) e Q(1,0,3) deve ser tangente à superfície  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$ , então deve-se ter  $\nabla F \bullet \mathbf{PQ} = 0$ , onde  $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 7$ . Assim, obtém-se z = 2x e considerando x = 1, encontra-se z = 2. Levando os valores x = 1 e z = 2 na equação da superfície, encontra-se  $y = \pm 1$  e seleciona-se o ponto de tangência P(1,1,2). Agora, determina-se o plano que passa por P(1,1,2) e é normal ao vetor  $\nabla F(P) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ . Esse plano tem equação 2x + 4y + 4z = 14.
- 22. Se  $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \mathbf{k}$  é a direção da reta, então  $\nabla F = \lambda \mathbf{v}$ , onde  $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z 8$ . Assim, resolvendo o sistema  $\nabla F = \lambda \mathbf{v}$ , obtém-se o ponto de tangência P = (1/2, -2, -3/4) e o plano procurado passa no ponto P e é normal ao vetor  $\mathbf{v}$ . Sua equação é 12x 32y + 4z = 67.
- 23. O vetor  $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  é normal ao plano 3x + y + 2z 1 = 0 e se  $F(x, y, z) = 3x^2 y^2 z$ , então  $\nabla F = \lambda \mathbf{n}$  e resolvendo essa equação encontra-se o ponto de tangência (-1/4, 1/4, 1/8) e o plano tangente é 3x + y + 2z + 5/8 = 0.
- 24. Se  $F(x, y, z) = x^2 xy + y^2 2x + 4y z$ , então  $\nabla F = (2x y 2)\mathbf{i} + (-x + 2y + 4)\mathbf{j} \mathbf{k}$ , e como o plano tangente deve ser horizontal, então  $\nabla F = \lambda \mathbf{k}$ , de onde resulta x = 0, y = -2 e z = 4. Portanto, o plano horizontal que passa em P(0, -2, 4) é z = 4.
- 25. Se P(a,b,c) é um ponto da esfera e  $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2$ , então $\nabla F(P)=2\overrightarrow{OP}$  e a reta normal em P é dada por  $\overrightarrow{PQ}=t\nabla F(P),\,t\in\mathbb{R}$ , isto é,

$$x = a + 2at$$
,  $y = b + 2bt$  e  $z = c + 2ct$ .

Em t = -1/2, obtém-se o ponto O(0,0,0) da reta que é o centro da esfera.

- 26. A temperatura T(x,y) aumenta mais rapidamente na direção  $\nabla T(1,1) = -50\mathbf{i} 50\mathbf{j}$ , com velocidade  $|\nabla T(1,1)| = 50\sqrt{2}$  °C/cm.
- 27. A derivada direcional  $D_{\mathbf{u}}w(P)$  mede a variação de w em relação à distância s, medida na direção  $\mathbf{u}$ . Portanto, a taxa de variação de w, em relação ao tempo t, é

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dt} = (\nabla w(P) \bullet \mathbf{u})\frac{ds}{dt}.$$

28. A profundidade permanece a mesma quando  $\tan\theta=p_y/p_x=m$ , com inclinação m constante. Assim,

$$m = \frac{-2y}{-2x} \Rightarrow y = mx.$$

Em particular, no ponto A(4,9), obtemos  $m=\frac{9}{4}$  e  $y=\frac{9}{4}x$ .

- 29. Confira o Exercício  ${\color{red}27}$  da Seça<br/>o ${\color{gray}2.4.}$
- 30. Confira o Exercício 27 da Seça<br/>o 2.4.  $-\cos\left(\sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\right)$ .

# 3. Derivadas: aplicações

Neste Capítulo vamos aplicar os conceitos e regras envolvendo funções de várias variáveis, abordados nos capítulos anteriores, a problemas práticos de maximizar e minimizar funções, derivar implicitamente uma equação contendo várias variáveis, etc., com aplicações em Economia, Administração, Engenharia e outras áreas do conhecimento. Alguns problemas serão modelados e resolvidos, ocasião em que encontraremos os valores máximos e mínimos de funções reais de várias variáveis reais e descobriremos onde eles ocorrem; por exemplo, determinaremos a maior temperatura de uma placa de metal aquecida e em que ponto da placa a temperatura máxima ocorre. Outro problema que será resolvido consiste em determinar onde uma dada superfície atinge seu ponto mais alto sobre uma região do plano. Responderemos a essas questões usando as derivadas parciais de algumas funções apropriadas. Além disso, veremos o Método dos Multiplicadores de Lagrange<sup>7</sup>, um poderoso método para encontrar os valores de máximo e mínimo de funções sujeitas a condições ou vínculos externos; por exemplo, dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual aquele de maior área? Suponhamos que os lados do triângulo sejam x, y e z, de modo que o perímetro fixo do triângulo é dado por 2p = x + y + z, e queremos encontrar o ponto P(x,y,z) que maximiza a função A(x,y,z), área do triângulo, dada pela fórmula de Heron8

$$A(x,y,z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Outro problema envolvendo área pode assim ser formulado: suponhamos que uma região  $R_{xy}$  do plano xy seja transformada em uma região  $R_{uv}$  do plano uv, por meio de uma transformação  $T: \mathbb{R}^2_{xy} \to \mathbb{R}^2_{uv}$ , que pode ser linear ou não, e que desejamos saber como as áreas  $A(R_{xy})$  e  $A(R_{uv})$  estão relacionadas. Este é um problema que envolve Jacobianos e que será tratado oportunamente.

## 3.1 Máximos e Mínimos

Os conceitos e resultados apresentados a seguir para funções de duas variáveis reais são, em sua maioria, facilmente generalizados para funções de três ou mais variáveis reais. No que se segue, z = f(x, y) representa uma função real de duas variáveis reais, definida em um subconjunto  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

**Definição 3.1** Um ponto P, interior ao conjunto D, é um ponto de máximo local, ou máximo relativo de f, quando existir uma  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P)$  do ponto P, tal que

$$f(Q) \le f(P), \ \forall \ Q \in V_{\delta}(P).$$

Neste caso, f(P) é o valor máximo atingido por f em  $V_{\delta}(P)$ . Quando ocorrer

$$f(Q) \le f(P), \ \forall \ Q \in D,$$

diremos que P é um ponto de máximo global, ou máximo absoluto de f, e f(P) será o valor máximo de f em D.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Joseph Louis Lagrange (1736-1813), matemático francês.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Heron de Alexandria (aproximadamente 100 anos d. C.)

**Definição 3.2** Um ponto P interior ao conjunto D é um ponto de mínimo local, ou mínimo relativo de f, quando existir uma  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P)$  do ponto P, tal que

$$f(Q) \ge f(P), \ \forall \ Q \in V_{\delta}(P).$$

Neste caso, f(P) é o valor mínimo atingido por f em  $V_{\delta}(P)$ . Quando ocorrer

$$f(Q) \ge f(P), \ \forall \ Q \in D,$$

diremos que P é um ponto de mínimo global, ou mínimo absoluto de f, e f(P) será o valor mínimo de f em D.

Um ponto de máximo ou minimo de f será denominado ponto extremo. É claro que um extremo absoluto interior ao domínio da função é um extremo local e existem extremos locais que não são absolutos. O seguinte quadro resume os conceitos de extremos locais e absolutos de z = f(x, y):

$$f\left(Q\right) \leq f\left(P\right), \ \forall \ Q \in V_{\delta}(P) \longrightarrow P$$
 é ponto de máximo local  $f\left(Q\right) \leq f\left(P\right), \ \forall \ Q \in D \longrightarrow P$  é ponto de máximo absoluto  $f\left(Q\right) \geq f\left(P\right), \ \forall \ Q \in V_{\delta}(P) \longrightarrow P$  é ponto de mínimo local  $f\left(Q\right) \geq f\left(P\right), \ \forall \ Q \in D \longrightarrow P$  é ponto de mínimo absoluto

e a Figura 3.1 ilustra as diversas situações:  $P_1$  e  $P_5$  são pontos de máximo local e  $P_3$  ponto de máximo absoluto;  $P_2$  é ponto de mínimo absoluto e  $P_4$  ponto de mínimo local.

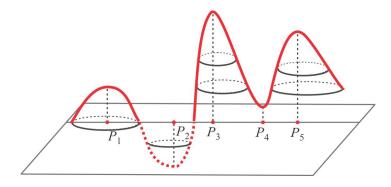


Figura 3.1: Ilustração dos pontos extremos.

**Exemplo 3.3** A origem é um ponto de mínimo absoluto de  $f(x,y) = x^2 + y^2$  e de máximo absoluto de  $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . De fato, isto decorre do seguinte

1. 
$$f(0,0) = 0$$
  $e$   $f(x,y) \ge 0$ ,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$2. \ g\left(0,0\right)=1 \quad e \quad g\left(x,y\right) \leq 1, \ \forall \ \left(x,y\right) \in \mathbb{R}^{2}.$$

O valor mínimo de f é zero e o valor máximo de g é 1. A Figura 3.2 ilustra nossas afirmações.

Com relação ao Exemplo 3.3, ressaltamos que

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f\left(x,y\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} g\left(x,y\right) = -\infty,$$

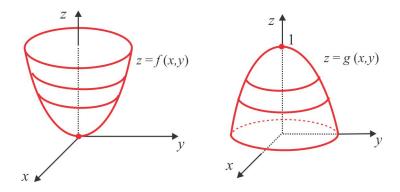


Figura 3.2: Máximo e mínimo absolutos.

de onde concluímos que f(x,y) não tem máximo absoluto, porque seus valores tornam-se arbitrariamente grandes  $(\uparrow +\infty)$ , enquanto g(x,y) não tem mínimo absoluto, porque seus valores tornam-se arbitrariamente pequenos  $(\downarrow -\infty)$ . Essa é uma boa maneira de mostrar que uma dada função f(x,y) não tem extremos absolutos. Se ao longo de um caminho  $\gamma$  o limite de f for  $+\infty$ , então a função f não terá máximo absoluto; se o limite de f ao longo de  $\gamma$  for  $-\infty$ , a função f não terá mínimo absoluto.

**Exemplo 3.4** A origem (0,0) não é máximo local nem mínimo local de  $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ .

Solução Consideremos  $V_{\delta}(O)$  uma vizinhança qualquer da origem. Nos pontos P(x,0) dessa vizinhança temos  $f(x,0) = x^2$ , de modo que f assume valores positivos arbitrariamente próximos de zero; nos pontos Q(0,y) da mesma vizinhança temos que  $f(0,y) = -y^2$  e nesses pontos f assume valores negativos e arbitrariamente próximos de zero. Como f(0,0) = 0, deduzimos que a origem O(0,0) não é ponto de máximo local nem de mínimo local de f. Por outro lado,

$$\lim_{x \to \infty} f(x, 0) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y \to \infty} f(0, y) = -\infty$$

o que mostra que f não tem ponto de máximo absoluto nem de mínimo absoluto.

Exemplo 3.5 (usando as curvas de nível) As curvas de nível de f(x,y) = 2x - y podem ser usadas para selecionar candidatos a pontos extremos no domínio

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le y \ e \ x + y \le 3\}.$$

**Solução** A Figura 3.3 exibe as curvas de nível  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , e  $\gamma_3$ , passando por A(0,3), B(3/2,3/2) e O(0,0), respectivamente. Observando o crescimento de z, é razoável pensar em A(0,3) como um ponto de mínimo e em B(3/2,3/2) como um ponto de máximo. Para comprovar nossa suspeita, observamos que

$$f(P) - f(A) = f(x,y) - f(0,3) = 2x - y + 3 = \underbrace{2x}_{+} + \underbrace{3 - y}_{+} \ge 0 \quad e$$

$$f(P) - f(B) = f(x,y) - f(3/2,3/2) = 2x - y - 3/2 = \underbrace{x - y}_{-} + \underbrace{x - 3/2}_{-} \le 0,$$

seja qual for o ponto P(x, y) no conjunto D. Logo, A(0,3) é ponto de mínimo absoluto e B(3/2, 3/2) é ponto de máximo absoluto.

Figura 3.3: Extremos absolutos de z = 2x - y.

**Exemplo 3.6** Encontrar os extremos locais e/ou absolutos da função z = f(x, y) definida em  $\mathbb{R}^2$  por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{se } x^2 + y^2 \le 4\\ 1 - x^2 - (y - 3)^2, & \text{se } x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

**Solução** Em primeiro lugar, observamos que  $f(x,y) \le 4$ , para todo ponto (x,y), e nos pontos da circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  a função f atinge o seu valor máximo 4. No disco aberto  $x^2 + y^2 < 4$ , a função f atinge seu valor mínimo na origem, isto é, (0,0) é um ponto de mínimo local. A função não tem mínimo absoluto, porque  $\lim_{x\to\infty} f(x,3) = -\infty$  e no aberto  $x^2 + y^2 > 4$ , temos que

$$f(x,y) = 1 - x^2 - (y-3)^2 \le 1$$
 e  $f(0,3) = 1$ 

e, portanto, f tem um ponto de máximo local em P(0,3).

Observação 3.7 Um fato que nos parece óbvio é que se  $f(P) \leq k$ ,  $\forall P \in X$ , e no ponto Q do conjunto X a função f atinge o valor k, isto é, f(Q) = k, então Q é um ponto de máximo de f em X. Da mesma forma, se  $f(P) \geq k$ ,  $\forall P \in X$ , e no ponto Q do conjunto X temos f(Q) = k, então Q é um ponto de mínimo de f em X.

**Definição 3.8** Seja z = f(x,y) uma função definida em um subconjunto  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e seja P(a,b) um ponto do interior do conjunto D. O ponto P denomina-se ponto crítico ou ponto estacionário de f se  $\nabla f(P) = \mathbf{0}$  ou  $\nabla f(P)$  não estiver definido.

**Exemplo 3.9** O único ponto crítico de  $f(x,y) = x^2 - y^2$  é (0,0). De fato,  $\nabla f(x,y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$  e, portanto,  $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$  se, e somente se, x = 0 e y = 0.

**Exemplo 3.10** Verificar que a função  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definida por  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , se  $(x,y) \neq (0,0)$ , e f(0,0) = 0, não tem derivada parcial em seu único ponto crítico (0,0).

83

**Solução** Nos pontos  $(x,y) \neq (0,0)$ , temos

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
 e  $f_y(x,y) = f_x(y,x) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 

e nesses pontos  $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ . Por outro lado,

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \pm 1,$$

de onde resulta que  $f_x(0,0)$  não existe. Logo,  $\nabla f(0,0)$  não está definido e, assim, a origem é o único ponto crítico de f.

Sobre os pontos críticos são necessárias as seguintes considerações:

1. O problema de encontrar pontos críticos de uma função diferenciável se reduz a resolver a equação vetorial  $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ , que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0\\ f_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

- 2. Por que os pontos críticos são importantes? Como veremos adiante, os possíveis extremos locais de uma função diferenciável estão entre seus pontos críticos.
- 3. Finalmente, ressaltamos que um ponto crítico não é, necessariamente, um extremo local. A função do Exemplo 3.4 tem (0,0) como único ponto crítico e este não é máximo nem mínimo local. Um tal ponto crítico denomina-se *Ponto de Sela*. Um ponto de sela é, portanto, um ponto crítico que não é extremo local.

**Teorema 3.11** Se P(a,b) é um extremo local (máximo ou mínimo) de uma função diferenciável  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , então  $D_{\mathbf{u}}f(P) = \mathbf{0}$ , em qualquer direção  $\mathbf{u}$ . Em particular,  $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ , isto é, P é um ponto crítico de f.

**Demonstração** Suponhamos que P(a,b) seja um ponto de máximo local de f e seja  $\mathbf{u}$  uma direção unitária em  $\mathbb{R}^2$ . Existe uma δ-vizinhança  $V_{\delta}(P)$ , do ponto P, tal que

$$f(Q) < f(P), \ \forall \ Q(x,y) \in V_{\delta}(P),$$

e se considerarmos  $\delta$  suficientemente pequeno de modo que  $P + t\mathbf{u}$  esteja em  $V_{\delta}(P)$ , para  $|t| < \delta$ , teremos  $f(P + t\mathbf{u}) \le f(P)$ ,  $|t| < \delta$ . A função de uma variável  $g(t) = f(P + t\mathbf{u})$ ,  $-\delta < t < \delta$ , tem um máximo local em t = 0 e, sendo assim, g'(0) = 0. Ora, da Regra da Cadeia resulta

$$g'(t) = \nabla f \left( P + t \mathbf{u} \right) \bullet \mathbf{u}$$

e a condição g'(0) = 0 acarreta  $\nabla f(P) \bullet \mathbf{u} = 0$ , isto é,  $D_{\mathbf{u}} f(P) = 0$ .

**Exemplo 3.12** Localizar os pontos críticos da função  $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$ .

**Solução** A função f é diferenciável e seus pontos críticos, caso exista algum, são as soluções do sistema  $f_x = 0$ ,  $f_y = 0$  que, neste caso, se reduz a

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 & \text{(I)} \\ 3y^2 - 3 = 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) segue que x = 0 ou x = 1 e de (II) obtemos y = 1 ou y = -1. A combinação desses valores de x e y resulta nos pontos críticos  $P_1(0,1)$ ,  $P_2(0,-1)$ ,  $P_3(1,1)$  e  $P_4(1,-1)$ .

**Exemplo 3.13** Localizar os pontos críticos de  $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} (x+y)$  no retângulo aberto  $D: 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi.$ 

Solução Os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 0 = f_x = \cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} (x+y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos (x+y) & (I) \\ 0 = f_y = \operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} (x+y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos (x+y) & (II) \end{cases}$$

e no domínio D temos que sen  $x \neq 0$  e sen  $y \neq 0$ . Por outro lado, sen  $(x + y) \neq 0$ , do contrário teríamos, por (I), que  $\cos(x + y) = 0$ , o que não é possível, pois as funções sen t e  $\cos t$  não se anulam simultaneamente. Subtraindo (I) de (II), resulta

$$\operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} (x+y) = \cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} (x+y). \tag{3.1}$$

e de (3.1) obtemos  $\cot y = \cot y$  e, portanto, x = y. De (II),  $\cot x = y$ , vem

e como  $0 < x < \pi$ , segue que sen x sen 3x = 0 se, e só se,  $3x = \pi$  ou  $3x = 2\pi$  e, portanto,  $x = \pi/3$  ou  $x = 2\pi/3$ . Considerando que x = y, temos os pontos  $P_1(\pi/3, \pi/3)$  e  $P_2(2\pi/3, 2\pi/3)$  e observamos que apenas o ponto  $P_1(\pi/3, \pi/3)$  está no domínio D, sendo este o único ponto crítico de f em D.

**Exemplo 3.14** Verificar que a função  $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$  não tem ponto crítico na região  $D: 0 < x^2+y^2 \le 1$ . Há extremos absolutos de f em D?

**Solução** Na região D as derivadas parciais de f são

$$f_x = \frac{x(x^2 + y^2 - 2)}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$
 e  $f_y = \frac{y(x^2 + y^2 - 2)}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ 

que não se anulam simultaneamente em ponto algum de D, pois em D temos  $x^2 + y^2 - 2 < 0$  e  $\nabla f = \mathbf{0}$  acarretaria x = y = 0. Nos pontos da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ , a função f atinge seu valor mínimo 0. Por outro lado, f não tem máximo absoluto em D, já que  $\lim_{x\to 0} f(x,0) = +\infty$ .

#### 3.1.1 Classificação dos Pontos Críticos

A natureza de um ponto crítico será estabelecida pelo *Teste do Hessiano*, devido a Otto Hesse, estambém na versão conhecida como *Teste da Segunda Derivada*. Vamos recordar o Teste da Segunda Derivada no cálculo de uma variável, para compararmos com o teste no caso de funções de duas variáveis. Se c é um ponto crítico de uma função  $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ , duas vêzes derivável, então:

- 1. se f''(c) > 0, então c é um ponto de mínimo local de f;
- 2. se f''(c) < 0, então c é um ponto de máximo local de f.

 $<sup>^{9}</sup>$ Ludwig Otto Hesse (1811-1874) matemático alemão.

Suponhamos, agora, que z = f(x, y) seja uma função parcialmente derivável até a segunda ordem em um domínio D do  $\mathbb{R}^2$ . A matriz Hessiana de f no ponto P(a, b) é, por definição, a matriz  $2 \times 2$ 

$$\mathcal{H}\left(P\right) = \left[ \begin{array}{cc} f_{xx}\left(P\right) & f_{xy}\left(P\right) \\ f_{yx}\left(P\right) & f_{yy}\left(P\right) \end{array} \right],$$

cujo determinante é

$$\det \mathcal{H}(P) = f_{xx}(P) f_{yy}(P) - f_{xy}(P) f_{yx}(P).$$

No caso em que  $f_{xy}(P) = f_{yx}(P)$ , e isso certamente ocorrerá se as derivadas de segunda ordem forem contínuas, então

$$\det \mathcal{H}(P) = f_{xx}(P) f_{yy}(P) - f_{xy}(P)^{2}. \tag{3.2}$$

A diferenciabilidade de f no ponto P acarreta

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + E(h,k),$$
 (3.3)

onde a razão  $E(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}$  tende para zero, com  $(h,k)\to (0,0)$ . Se P é um ponto crítico de f, então fazendo H=(h,k) segue de (3.3) que

$$f(P+H) - f(P) = E(h,k)$$

e a natueza (máximo local, mínimo local ou sela) do ponto crítico P é determinada pelo sinal de f(P+H)-f(P) e, naturalmente, depende do sinal do erro E(h,k).

Para motivar o Teste do Hessiano, vamos reconsiderar três casos simples já abordados nos exemplos. Cada uma das funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
,  $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$  e  $h(x,y) = x^2 - y^2$ ,

tem a origem P(0,0) como único ponto crítico e, conforme vimos nos exemplos, P(0,0) é mínimo local de f, máximo local de g e um ponto de sela da função h. Na tabela a seguir mostramos os valores das derivadas parciais de segunda ordem e do determinante Hessiano, na origem, para cada uma dessas funções.

	$\partial_{xx}\left(P\right)$	$\partial_{xy}\left(P\right)$	$\partial_{yy}\left(P\right)$	$\det \mathcal{H}(P)$	Natureza
$f = x^2 + y^2$	2	0	2	4	mínimo local
$g = 1 - x^2 - y^2$	-2	0	-2	4	máximo local
$h = x^2 - y^2$	2	0	-2	-4	sela

A natureza do ponto crítico na tabela está relacionada aos sinais da derivada parcial  $\partial_{xx}(P)$  e do determinante Hessiano det  $\mathcal{H}(P)$ , mais precisamente:

- 1. se det  $\mathcal{H}(P) > 0$  e  $f_{xx}(P) > 0$ , então o ponto crítico P é um mínimo local;
- 2. se det  $\mathcal{H}(P) > 0$  e  $f_{xx}(P) < 0$ , então o ponto crítico P é um máximo local;
- 3. se det  $\mathcal{H}(P) < 0$ , então o ponto crítico P é um ponto de sela;

Antes de formalizar o teste para classificar o ponto crítico, vejamos alguns preliminares algébricos. Dada uma matriz quadrada  $M = [a_{ij}]_{n \times n}$ , os *autovalores* da matriz M são as raízes do polinômio  $p(\lambda) = \det(\lambda I - M)$ , denominado *polinômio característico* de M, onde I representa a matriz identidade  $n \times n$ . No caso n = 2, temos

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad e \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e o polinômio característico de M é, portanto,

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \det\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det M.$$

Não parece óbvio, embora seja verdadeiro, se a matriz M é simétrica, isto é,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall i, j = 1, 2, 3, ..., n$ , então os autovalores de M são todos reais

Exemplo 3.15 Encontrar os autovalores da matriz

$$M = \left[ egin{array}{cc} -2 & 2 \ 2 & 1 \end{array} 
ight]$$

**Solução** Vemos que  $a_{11} = -2$ ,  $a_{22} = 1$  e  $a_{12} = a_{21} = 2$  e, portanto, a matriz M é simétrica. Seus autovalores são as raízes reais da equação  $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ , isto é,  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = -3$ .

Suponhamos que M seja a matriz Hessiana  $\mathcal{H}(P)$  de uma função z = f(x, y), com derivadas mistas  $f_{xy}(P)$  e  $f_{yx}(P)$  iguais, o que torna a matriz simétrica, e representemos por  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os autovalores reais de  $\mathcal{H}(P)$ , isto é,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes da equação

$$\lambda^{2} - \left[ f_{xx} \left( P \right) + f_{yy} \left( P \right) \right] \lambda + \det \mathcal{H} \left( P \right) = 0,$$

onde o determinante Hessiano det  $\mathcal{H}(P)$  é dado por (3.2). Temos que:

- 1.  $\det \mathcal{H}(P) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \in \lambda_2$  tem sinais opostos. Então, P é um ponto de sela se, e só se,  $\lambda_1 \in \lambda_2$  tem sinais opostos;
- 2.  $\det \mathcal{H}(P) > 0 \Leftrightarrow f_{xx}(P) f_{yy}(P) f_{xy}(P)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \in \lambda_2 \text{ têm o mesmo sinal.}$ 
  - (a) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem positivos, então

$$f_{xx}\left(P\right) + f_{yy}\left(P\right) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$$

e, portanto,  $f_{xx}(P)$  e  $f_{yy}(P)$  são positivos, já que  $f_{xx}(P) f_{yy}(P) > f_{xy}(P)^2$ . Neste caso, o ponto P é um mínimo local.

(b) Da mesma forma, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem negativos, então  $f_{xx}(P)$  e  $f_{yy}(P)$  são negativos e, neste caso, o ponto P é um máximo local.

A seguinte versão do Teste do Hessiano, conhecido como Teste da Segunda Derivada, não faz referência explícita aos autovalores da matriz Hessiana, embora eles estejam presentes. Observamos que a derivada parcial  $f_{xx}$  desempenha o papel de f'' no teste do ponto crítico no cálculo de uma variável.

Teorema 3.16 (Teste da Segunda Derivada ) Seja  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em uma  $\delta$ -vizinhança de um ponto crítico P(a,b), e sejam

$$A = f_{xx}(P), \quad B = f_{xy}(P) = f_{yx}(P) \quad e \quad C = f_{yy}(P).$$

Então:

- 1. Se  $B^2 AC < 0$  e A < 0, então P é um ponto de máximo local de f.
- 2. Se  $B^2 AC < 0$  e A > 0, então P é um ponto de mínimo local de f.
- 3. Se  $B^2 AC > 0$ , então P é um ponto de sela de f.
- 4. Se  $B^2 AC = 0$ , então o teste não se aplica.

Observamos que a quantidade  $AC - B^2$  é precisamente  $\det \mathcal{H}(P)$ .

**Exemplo 3.17** No interior do compacto  $K = [0,1] \times [0,1]$  a função  $f(x,y) = 8x^3 - 3xy + y^3$  tem um único ponto crítico, o qual é um mínimo local de f.

Solução De fato,

$$\begin{cases} 0 = f_x = 24x^2 - 3y & \text{(I)} \\ 0 = f_y = -3x + 3y^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

e segue de (I) que  $y = 8x^2$  e substituindo em (II), obtemos

$$-x + 64x^4 = 0 \Rightarrow x(-1 + 64x^3) = 0 \Rightarrow x = 0$$
 ou  $x = 1/4$ 

e P(1/4, 1/2) é o único ponto crítico de f no interior do compacto K. Para classificá-lo, notamos que

$$f_{xx} = 48x, \ f_{xy} = f_{yx} = -3 \ \text{e} \ f_{yy} = 6y$$

e, portanto,  $A = f_{xx}(P) = 12$ ,  $B = f_{xy}(P) = f_{yx}(P) = -3$  e  $C = f_{yy}(P) = 3$ . Assim, A > 0 e  $B^2 - AC = -27 < 0$  e o ponto P é um mínimo local.

**Exemplo 3.18** Quando  $B^2 - AC = 0$  o teste da derivada segunda não dá informação sobre a natureza do ponto crítico. Por exemplo, a origem O(0,0) é um ponto de mínimo local de  $f(x,y) = x^4 + y^4$  e, contudo,  $B^2 - AC = 0$ .

**Exemplo 3.19** Classificar os pontos críticos  $P_1(0,1)$ ,  $P_2(0,-1)$ ,  $P_3(1,1)$  e  $P_4(1,-1)$  da função  $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$  do Exemplo 3.12.

Solução Temos

$$f_{xx} = 12x - 6$$
,  $f_{xy} = f_{yx} = 0$  e  $f_{yy} = 6y$ 

e como há vários pontos críticos é aconselhável construir uma tabela de classificação.

P(a,b)	$A = f_{xx}\left(P\right)$	$B = f_{xy}\left(P\right)$	$C = f_{yy}\left(P\right)$	$B^2 - AC$	Natureza
$P_1\left(0,1\right)$	-6	0	6	36	sela
$P_2\left(0,-1\right)$	-6	0	-6	-36	máximo local
$P_{3}(1,1)$	6	0	6	-36	mínimo local
$P_4(1,-1)$	6	0	-6	36	sela

**Exemplo 3.20** Classificar os pontos críticos da função  $f(x,y) = x^4 + 2x^3y^2 + 4x$ .

Solução Os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 0 = f_x = 4x^3 + 6x^2y^2 + 4 & \text{(I)} \\ 0 = f_y = 4x^3y. & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) segue que x = 0 ou y = 0 e o valor x = 0 é incompatível com (I). Logo, y = 0 e substituindo em (I), encontramos x = -1. O ponto crítico de f é P(-1,0). Temos

$$A = f_{xx}(-1,0) = 12, \quad B = f_{xy}(-1,0) = 0 \quad e \quad C = f_{yy}(-1,0) = -4$$

e, portanto,  $B^2 - AC = 48 > 0$  e o ponto (-1,0) é um ponto de sela.

#### Generalização do Teste

Vimos no caso de funções de duas variáveis que a natureza do ponto crítico é determinada pelos sinais dos autovalores da matriz Hessiana. No caso n=3, isto é, para funções de três variáveis o resultado é análogo. Suponhamos que f(x,y,z) tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas, para que a matriz Hessiana  $\mathcal{H}(P)$  seja simétrica. A natureza de um ponto crítico de f será determinada pelos sinais dos autovalores de  $\mathcal{H}(P)$ . Neste caso, a matriz Hessiana é

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{bmatrix}$$

e temos o seguinte critério para classificar os pontos críticos de f:

- 1. Se os autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são positivos, então o ponto P é um mínimo local;
- 2. Se os autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são negativos, então o ponto P é um máximo local;
- 3. Se dois dos autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  têm sinais opostos, então o ponto P é uma sela;

**Exemplo 3.21** Localizar e classificar os pontos críticos da  $f(x, y, z) = x^2 + xy + yz^2$ .

**Solução** Os possíveis pontos críticos são as soluções da equação vetorial  $\nabla f = \mathbf{0}$ , a qual é equivalente ao sistema

$$\begin{cases}
0 = f_x = 2x + y & \text{(I)} \\
0 = f_y = x + z^2 & \text{(II)} \\
0 = f_z = 2yz. & \text{(III)}
\end{cases}$$

De (II) segue que  $x=-z^2$  e substituindo em (I) obtemos  $y=2z^2$ . Levando esse valor de y em (III), resulta z=0 e o ponto crítico é  $P\left(0,0,0\right)$ . A matriz Hessiana de f em P é

$$\mathcal{H}(P) = \left[ egin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e os autovalores de  $\mathcal{H}(P)$  são as raízes da equação det  $[\lambda I - \mathcal{H}(P)] = 0$ , isto é,

$$\lambda \left[ \left( \lambda - 2 \right) \lambda - 1 \right] = 0. \tag{3.4}$$

CAPÍTULO 3 DERIVADAS: aplicações 89

Resolvendo a equação (3.4) encontramos os autovalores  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2} > 0$  e  $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2} < 0$  e como dois autovalores têm sinais opostos, segue que o ponto crítico P(0,0,0) é um ponto de sela da função f.

#### 3.1.2 Funções Contínuas em Compactos

Consideremos a função  $f(x,y) = x^3 - 3xy + y$ , definida no compacto  $K = [0,1] \times [0,1]$ . É fácil verificar que o ponto P(1/3,1/9) é o único ponto crítico de f no interior de K e trata-se de um mínimo local. Seria P um mínimo absoluto de f em K? Observamos que f(P) = 1/27 e no ponto Q(1/2,1/2) a função f atinge o valor -1/8, menor do que f(P) e, portanto, o ponto P não é mínimo absoluto de f no compacto K; se a função f atingir um valor mínimo em K, esse valor será assumido em um ponto da fronteira de K. Antes de fazer a análise de f na fronteira  $\partial K$ , deixe-nos mencionar um resultado importantíssimo de análise matemática, devido a Weierstrass<sup>10</sup>, que estabelece a existência de extremos absolutos de uma função contínua em um conjunto compacto.

**Teorema 3.22 (Teorema de Weierstrass)**  $Se\ K \subseteq \mathbb{R}^2$  um subconjunto compacto  $e\ f: K \to \mathbb{R}$  é uma função contínua, então f possui ao menos um ponto de máximo e ao menos um ponto de mínimo absolutos em K.

O roteiro para encontrar os extremos absolutos de funções contínuas em conjuntos compactos divide-se em três etapas:

- **Etapa 1:** Localização e classificação dos pontos críticos no interior do compacto.
- **Etapa 2:** Análise da função na fronteira do compacto.
- **Etapa 3:** Avaliação da função nos possíveis pontos extremos.

**Exemplo 3.23** Determinar o máximo e o mínimo da função  $f(x,y) = 8x^3 - 3xy + y^3$  no compacto  $K = [0,1] \times [0,1]$ .

**Solução** Vimos no Exemplo 3.17 que f tem um mínimo local em P(1/4, 1/2) e, como veremos, não se trata de um mínimo absoluto. De acordo com o Teorema de Weierstrass a função f tem extremos absolutos e estes estão localizados na fronteira de K, a qual é constituida dos segmentos  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,$  e  $\gamma_4$ , descritos por:

$$\gamma_1: \left| \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ y = 0 \end{array} \right| \quad \gamma_2: \left| \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \end{array} \right| \quad \gamma_3: \left| \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 1 \\ x = 0 \end{array} \right| \quad \gamma_4: \left| \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 1 \\ x = 1 \end{array} \right|$$

Em cada segmento, além dos pontos críticos no interior, devemos selecionar os pontos de fronteira correspondentes às extremidades do intervalo.

Sobre  $\gamma_1: f=8x^3, \ 0 \le x \le 1$ , sem ponto crítico no interior do intervalo e selecionamos  $P_1(0,0), P_2(1,0)$ .

Sobre  $\gamma_2$ :  $f = 8x^3 - 3x + 1$ ,  $0 \le x \le 1$ , ponto crítico  $x_1 = \sqrt{2}/4$  e selecionamos  $P_3(1,1)$ ,  $P_4(0,1)$  e  $P_5(\sqrt{2}/4,1)$ .

Sobre  $\gamma_3: f=y^3, \ 0\leq y\leq 1$ , sem ponto crítico no interior do intervalo e selecionamos  $P_6\left(0,0\right),\ P_7\left(1,0\right).$ 

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.

Sobre  $\gamma_4: f=8-3y+y^3, \ 0 \le y \le 1$ , sem ponto crítico no interior do intervalo e selecionamos  $P_8(1,0), \ P_9(1,1)$ .

Os pontos de máximo e mínimo absolutos de f estão entre os pontos:

$$P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(1,1), P_5(\sqrt{2}/4,1) \in P_7(1,0).$$

Avaliando a função f nesses pontos, encontramos

$$f(P) = \frac{-1}{8}$$
,  $f(P_1) = 0$ ,  $f(P_2) = 1$ ,  $f(P_3) = 6$ ,  $f(P_5) = 1 - \sqrt{2}$ , e  $f(P_7) = 8$ 

e os extremos absolutos de f ocorrem em  $P_5$  (mínimo absoluto) e em  $P_7$  (máximo absoluto).

**Exemplo 3.24** Encontrar os extremos da função  $f(x,y) = (x-2)^2y + y^2 - y$ , no compacto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0 \ e \ x + y \le 4\}.$$

**Solução** Do Teorema de Weierstrass deduzimos que f possui extremos absolutos em K e seguiremos o roteiro para encontrá-los.

Etapa 1: (pontos críticos no interior de K) O(s) ponto(s) crítico(s), caso exista algum, são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 0 = f_x = 2y(x-2) & \text{(I)} \\ 0 = f_y = (x-2)^2 + 2y - 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

e de (I) segue que x=2 ou y=0. Se x=2, obtemos de (II) y=1/2 e selecionamos o ponto  $P_1(2,1/2)$ ; a condição y=0 é descartada, porque os pontos P(x,0) não estão no interior de K. Temos  $f_{xx}(P_1)=4$ ,  $f_{yy}(P_1)=2$  e  $f_{xy}(P_1)=-4$  e, portanto, A>0 e  $B^2-AC<0$ , de onde deduzimos que  $P_1$  é um ponto de mínimo local.

Etapa 2: (análise de f na fronteira de K) A fronteira de K é constituída dos segmentos  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , como mostra a Figura 3.4, e a análise é feita em cada um deles, separadamente.

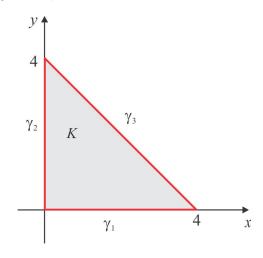


Figura 3.4: Esboço do conjunto K.

Sobre  $\gamma_1$  temos y = 0 e  $f(x, 0) \equiv 0, 0 \le x \le 4$ .

Sobre  $\gamma_2$  temos x = 0 e  $f(0, y) = y^2 + 3y$ ,  $0 \le y \le 4$ . Como a função  $g(y) = y^2 + 3y$  é crescente no intervalo  $0 \le y \le 4$ , pois g'(y) > 0, segue que os extremos absolutos de g ocorrem nas extremidades do intervalo e selecionamos os pontos  $P_2(0, 0)$  e  $P_3(0, 4)$ .

Sobre  $\gamma_3$  temos x = 4 - y e  $f(4 - y, y) = y^3 - 3y^2 + 3y$ ,  $0 \le y \le 4$ . Como a função  $h(y) = y^3 - 3y^2 + 3y$ tem derivada  $h'(y) = 3(y-1)^2 > 0$ , ela é crescente e os extremos absolutos de h ocorrem nas extremidades do intervalo. Selecionamos  $P_4(4,0)$  e  $P_5(0,4)$ .

#### (avaliação de f nos pontos selecionados) Etapa 3:

$$f(P_1) = 1/4$$
,  $f(P_2) = 8$ ,  $f(P_3) = f(P_5) = 28$  e  $f(P_4) = 0$ .

Observando os valores assumidos por f concluímos que  $P_5(0,4)$  é o ponto de máximo absoluto e os pontos do segmento  $\gamma_1$ , onde f atinge valor zero, são pontos de mínimo absoluto.

**Exemplo 3.25** No compacto  $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \le 1\}$ , encontrar o máximo e o mínimo da função

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

A função f é contínua e, portanto, possui extremos absolutos em K. Nos pontos  $(x,y) \neq$ Solução (0,0), as derivadas parciais de f são

$$f_x = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}$$
 e  $f_y = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}$ 

que não se anulam simultaneamente, de modo que f não tem ponto crítico no interior de K e passaremos para a Etapa 2 do roteiro. A fronteira de K é a circunferência  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ , de onde obtemos

$$y^2 = 1 - (x - 2)^2 = -3 + 4x - x^2$$

e na fronteira f se reduz à função de uma variável  $g(x) = \frac{1}{4x-3}$ ,  $1 \le x \le 3$ , que não tem ponto crítico, de modo que os extremos de f ocorrem nos pontos de fronteira  $P_1(1,0)$  e  $P_2(3,0)$ , indicados na Figura 3.5. Temos  $f(P_1) = 1$  e  $f(P_2) = 1/9$  e, assim, o valor máximo de f em K é 1, assumido em  $P_1$ , enquanto que o valor mínimo é 1/9 e é assumido no ponto  $P_2$ .

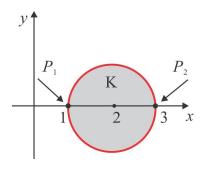


Figura 3.5: Extremos de  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$  em K.

Exemplo 3.26 Uma placa metálica circular com um metro de raio, colocada com centro na origem O(0,0) do plano xy, é aquecida, de modo que a temperatura em um ponto P(x,y) é dada por

$$T(x,y) = (16x^2 + 24x + 40y^2) \, {}^{\circ}C.$$

Determinar a temperatura mais alta e a temperatura mais baixa da placa.

A placa pode ser vista como o conjunto compacto Solução

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\},\$$

e a função temperatura T(x,y) sendo contínua em K, segue do Teorema de Weierstrass que ela possui extremos absolutos em K. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 0 = T_x = 32x + 24 \\ 0 = T_y = 80y, \end{cases}$$

vemos que  $P_1(-3/4,0)$  é o único ponto crítico de T no interior de K e para classificá-lo, notamos que  $A = T_{xx}(P_1) = 32, B = T_{xy}(P_1) = 0 e C = T_{yy}(P_1) = 80, de modo que A > 0 e B^2 - AC < 0,$ caracterizando  $P_1$  como um ponto de mínimo local. A fronteira de K é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ , cujos pontos em coordenadas polares são  $(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $0 \le \theta \le 2\pi$ , e sobre a fronteira temos

$$g(\theta) = T(\cos \theta, \sin \theta) = 16 + 24\cos \theta + 24\sin^2 \theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Os pontos críticos de  $q(\theta)$ , no intervalo  $0 < \theta < 2\pi$ , são as soluções da equação

$$g'(\theta) = -24 \operatorname{sen} \theta + 48 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = -24 \operatorname{sen} \theta (1 - 2 \cos \theta) = 0,$$

isto é,  $\theta_1 = \pi$ ,  $\theta_2 = \pi/3$  e  $\theta_3 = 5\pi/6$ , que produzem os pontos

$$P_2(-1,0), P_3(1/2,\sqrt{3}/2), P_4(1/2,-\sqrt{3}/2),$$

respectivamente. Temos

$$q(\theta_1) = -8^{\circ}C, \quad q(\theta_2) = 46^{\circ}C \quad \text{e} \quad q(\theta_3) = 46^{\circ}C$$

e observamos, ainda, que  $g(0) = g(2\pi) = 24^{\circ}C$  e no ponto crítico  $P_1(-3/4,0)$  a temperatura é  $T(P_1) = -9^{\circ}C$ . Logo, a temperatura mais baixa é  $-9^{\circ}C$  e ocorre no ponto  $P_1(-3/4,0)$  no interior da placa e a mais alta é  $46^{\circ}C$  e ocorre nos pontos  $P_3\left(1/2,\sqrt{3}/2\right)$  e  $P_4\left(1/2,-\sqrt{3}/2\right)$  da fronteira ou borda da placa.

### Exercícios & Complementos.

- 1. Localize e classifique os pontos críticos da função z = f(x, y) e determine se ela tem extremo absoluto em seu domínio
  - (g)  $z = 1 x^2 2y^2$ (a) z = xy
  - (a) z = xy (b)  $z = \frac{1}{2}x^4 2x^3 + 4xy + y^2$  (b)  $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 3x 4y 3$  (c)  $z = xy^2 + x^2y xy$  (i)  $z = \log(xy) 2x 3y$  (d)  $z = x^2 xy + y^2$  (j)  $z = x^2 2xy + y^2$  (e)  $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 6y$  (k)  $z = xy^2 + 3y^2 3xy + 2x 4y + 1$

  - (f)  $z = x^4 + y^3 + 32x 9y$  (l)  $z = x^3 3xy^2 + y^3$
- 2. Verifique que no domínio  $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0\ \mathrm{e}\ y>0\}$  a função f do Exercício 1 item (i) não tem mínimo. Qual o maior valor que f assume em D? Construa uma função contínua em D que não possua máximo nem mínimo absolutos.

CAPÍTULO 3 DERIVADAS: aplicações 93

3. Determine o máximo e o mínimo (absolutos) de z = f(x, y) no conjunto D indicado:

(a) 
$$z = xy$$
,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \le 1\}$ .

(b) 
$$z = x + y$$
,  $D$  é o quadrado de vértices  $(\pm 1, \pm 1)$ .

(c) 
$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$
,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \le 1\}$ .

(d) 
$$z = xe^{-x}\cos y$$
,  $D = [-1, 1] \times [-\pi, \pi]$ .

(e) 
$$z = x^2 + 2y^2 - x$$
,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ .

(f) 
$$z = x^3 + y^3 - 3x - 3y$$
,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \text{ e } |y| \le 2\}$ .

- 4. Determine o(s) ponto(s) da curva  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  e  $z = \sin(t/2)$  mais distante(s) da origem.
- 5. Quais das funções seguintes tem um máximo ou mínimo em todo plano  $\mathbb{R}^2$ ?

(a) 
$$z = \exp(x^2 - y^2)$$
 (b)  $z = \exp(-x^2 - y^2)$  (c)  $z = x^2 - 2x(\sin y + \cos y)$ .

- 6. Seja  $f: X \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^2$  aberto, a função definida por  $f(x,y) = x^2(1-y)^3 + y^2$ . Mostre que f contém um ponto crítico, mas sem máximo ou mínimo absoluto.
- 7. A temperatura T em um disco  $x^2 + y^2 \le 1$  é dada por  $T(x, y) = 2x^2 + y^2 y$ . Em que ponto do disco a temperatura é mais alta e em que ponto ela é mais baixa?
- 8. Mostre que (0,0) é o único ponto crítico de  $f(x,y) = x^2 (1-y)^3 + y^2$ , o qual é mínimo local, mas não absoluto.

## 3.2 Multiplicadores de Lagrange

Na Seção 3.1 abordamos o problema de determinar os pontos de máximo e mínimo de uma função em uma região compacta. Nesta seção vamos apresentar um método para determinar, sob certas condições, os pontos críticos de uma função diferenciável na fronteira de uma região compacta. Para motivar o método, inicialmente vamos considerar o seguinte problema geométrico: encontrar o ponto da curva  $\gamma:g(x,y)=0$  mais próximo da origem. Para resolvê-lo, deixe-nos representar por f(x,y) a distância do ponto P(x,y) à origem. A curva de nível z=r da função z=f(x,y) é constituída dos pontos distantes r unidades da origem. Começando com r=0 e deixando r crescer até o valor em que a curva de nível correspondente tocar a curva  $\gamma$ , então cada ponto de contato é um ponto de  $\gamma$  mais próximo da origem e em cada um desses pontos o gradiente de f é paralelo ao gradiente de g, isto é, existe um escalar  $\lambda$ , tal que  $\nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0}$ , como sugere a Figura 3.6. Este é um problema de extremos vinculados ou condicionados: buscamos o ponto da curva g=0 (vínculo) mais próximo da origem.

De forma geral podemos formular o seguinte problema:

Problema de Extremos Vinculados: Encontrar os extremos locais de w = f(x, y, z) na superfície S: g(x, y, z) = 0 ou, de forma equivalente, encontrar os pontos P(x, y, z) de S para os quais  $D_{\mathbf{v}}f(P) = 0$ , em qualquer direção v tangente a S em P.

Figura 3.6: Extremos vinculados.

Suponhamos que o ponto P de S seja um ponto crítico de f e consideremos, em S, uma curva suave  $\gamma: [-a,a] \to \mathbb{R}^3$  passando pelo ponto P, isto é,  $\gamma'(t) \neq 0$  e  $\gamma(0) = P$ . Sendo P um extremo local de f, então t = 0 é um extremo local de f ( $\gamma(t)$ ) e, portanto,

$$\frac{d}{dt} \left[ f(\gamma(t)) \right] \Big|_{t=0} = 0, \text{ isto \'e}, \nabla f(P) \bullet \gamma'(0) = 0.$$

O vetor  $\mathbf{v} = \gamma'(0)$  sendo tangente à curva  $\gamma(t)$  no ponto P, concluímos que  $\nabla f(P)$  é ortogonal ao plano tangente à superfície S em P. Ora,  $\nabla g(P)$ , suposto não nulo, é um vetor ortogonal ao plano tangente e, sendo assim,  $\nabla f(P)$  e  $\nabla g(P)$  são paralelos e daí deduzimos que

$$\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0},\tag{3.5}$$

para algum escalar  $\lambda$  real. Os pontos críticos de f na superfície S são, portanto, as soluções da equação vetorial (3.5) e este método de encontrar os pontos críticos de f, sujeita ao vínculo g=0, é devido a Lagrange e, em sua homenagem, o método recebeu o nome de  $M\acute{e}todo~dos~Multiplicadores~de~Lagrange$ . O número real  $\lambda$  que figura em (3.5) é denominado multiplicador~de~Lagrange. Formalmente, em dimensão n=2, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.27 (Método dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam  $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  funções com derivadas parciais primeiras contínuas em uma  $\delta$ -vizinhança  $V_{\delta}(P)$  de um ponto P, e suponhamos que P seja um extremo local de f. Se a curva  $\gamma$  de equação cartesiana g(x,y) = 0 passa no ponto P e  $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$ , então existe um  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0}.$$

**Demonstração** Veremos oportunamente que a condição  $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$  propicia à curva  $\gamma$  uma parametrização  $\gamma(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , com vetor tangente

$$\gamma'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} \neq \mathbf{0},$$

e, como vimos, a relação  $\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0}$  é consequência da Regra da Cadeia.

Observação 3.28 Se considerarmos a função de três variáveis

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

o Teorema 3.27 estabelece que os extremos locais da função z = f(x, y) na curva  $\gamma : g(x, y) = 0$  estão entre os pontos críticos de F, isto é, são soluções do sistema

$$\begin{cases}
0 = F_x = f_x + \lambda g_x \\
0 = F_y = f_y + \lambda g_y \\
0 = F_\lambda = g.
\end{cases}$$
(3.6)

O resultado pode ser estendido para um número qualquer de variáveis.

Observação 3.29 Ao resolver um problema de extremos vinculados, em primeiro lugar devemos identificar o vínculo g(x,y) = 0 e a função que desejamos minimizar ou maximizar. Nos problemas envolvendo distâncias, recomendamos usar, por simplicidade, o quadrado da distância como função a ser minimizada ou maximizada. Um ponto que minimiza (ou maximiza) a distância é o mesmo que minimiza (ou maximiza) o seu quadrado.

**Exemplo 3.30** Qual o ponto da hipérbole xy = 1 mais próximo da origem?

**Solução** Neste problema o vínculo é a hipérbole xy = 1 e a função que queremos minimizar é  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ , que representa a distância do ponto P(x, y) à origem. O cálculo torna-se mais simples se minimizarmos a função  $f = x^2 + y^2$ , quadrado da distância à origem. O sistema de Lagrange (3.6) é, neste caso,

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 & \text{(I)} \\ 2y + \lambda x = 0 & \text{(II)} \\ xy - 1 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) por x, (II) por y e subtraindo os resultados, obtemos  $x^2 = y^2$  e, portanto,  $y = \pm x$ . Substituindo em (III), resulta  $x^2 = 1$  ou  $x = \pm 1$ . Os pontos procurados são  $P_1(1,1)$  e  $P_2(-1,-1)$  e a distância mínima é  $d = \sqrt{2}$ . Para mostrar que  $P_1$  e  $P_2$  são, de fato, pontos de mínimo de f, notamos que  $f(P_1) = f(P_2) = 2$  e na hipérbole xy = 1 temos  $f(x,y) \ge 2$ . De fato,

$$f(x, 1/x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \ge 2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \ge 0.$$

Observamos, ainda, que

$$\lim_{x \to \infty} f(x, 1/x) = \lim_{x \to \infty} \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

e isso significa que f não tem máximo na hipérbole, isto é, não há na hipérbole um ponto  $mais\ distante$  da origem.

Exemplo 3.31 (distância de ponto a reta) A distância do ponto  $P_0(x_0, y_0)$  à reta

$$r: ax + by + c = 0$$

é dada por

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Solução** O vínculo é g(x,y) = ax + by + c = 0 e devemos minimizar a função

$$f(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$
,

quadrado da distância do ponto P(x,y) da reta ao ponto  $P_0$ . O sistema de Lagrange para este caso é

$$\begin{cases} 2(x - x_0) + a\lambda = 0 & \text{(I)} \\ 2(y - y_0) + b\lambda = 0 & \text{(II)} \\ ax + by + c = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I) e (II) obtemos, respectivamente,  $x = x_0 - a\lambda/2$  e  $y = y_0 - b\lambda/2$  que substituídos em (III) resulta

$$\lambda = \frac{2\left(ax_0 + by_0 + c\right)}{a^2 + b^2}$$

e, portanto,

$$x - x_0 = \frac{-a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$$
 e  $y - y_0 = \frac{-b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$ .

A distância d procurada é

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Imitando o que fizemos neste Exemplo, pode-se mostrar que a distância do ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ao plano  $\alpha : ax + by + cz + d = 0$  é

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Exemplo 3.32** A distância da parábola  $y = x^2 + 1$  à reta x - y = 2.

**Solução** A distância de um ponto P(x,y) da parabóla  $y=x^2+1$  à reta r:x-y-2=0 é dada por

$$d(P,r) = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$$

e, mais uma vez, vamos minimizar a função  $f(x,y) = \frac{1}{2}(x-y-2)^2$ , quadrado da distância, sujeita ao vínculo  $g(x,y) = y - x^2 - 1 = 0$ . O sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} x - y - 2 - 2\lambda x = 0 & \text{(I)} \\ -x + y + 2 + \lambda = 0 & \text{(II)} \\ y - x^2 - 1 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

e somando (I) e (II), obtemos  $\lambda(2x-1)=0$ , de onde resulta  $\lambda=0$  ou x=1/2. Se  $\lambda=0$ , segue de (I) que y=x-2 e levando em (III) chegamos à equação  $x^2-x+3=0$ , sem solução real. Resta-nos a opção x=1/2, o que acarreta por (III) y=5/4. Portanto,

$$d(P,r) = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{5}{4} - 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|-\frac{11}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{8}.$$

**Exemplo 3.33** Determinar as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo e lados paralelos aos planos coordenados, que pode ser inscrita no elipsoide

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144.$$

**Solução** Se x, y e z representam os comprimentos dos lados da caixa, a função a ser maximizada é o volume da caixa f(x, y, z) = 8xyz, sujeita ao vínculo

$$g(x, y, z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0.$$

Temos

$$\nabla f(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$
 e  $\nabla g(x, y, z) = 32x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 18z\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ 

e o sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} 8yz + 32\lambda x = 0 & \text{(I)} \\ 8xz + 8\lambda y = 0 & \text{(II)} \\ 8xy + 18\lambda z = 0 & \text{(III)} \\ 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) por x, (II) por y, (III) por z e somando, obtemos

$$24xyz + 2(16x^2 + 4y^2 + 9z^2)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xyz}{12}$$

e, assim,

$$8yz(1 - \frac{1}{3}x^2) = 0$$
,  $8xz(1 - \frac{1}{12}y^2) = 0$  e  $2xy(4 - \frac{3}{4}z^2) = 0$ .

Como x > 0, y > 0 e z > 0 temos que  $x = \sqrt{3}$ ,  $y = 2\sqrt{3}$  e  $z = 4\sqrt{3}/3$  e, portanto, o volume é igual a  $64\sqrt{3} \approx 111$  u. v. A Figura 3.7 ilustra a porção da caixa situada no primeiro octante.

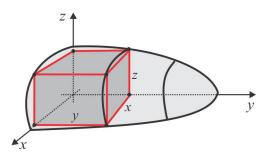


Figura 3.7: Caixa inscrita no elipsoide.

Exemplo 3.34 Dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero tem a maior área.

**Solução** Sejam x, y e z os lados do triângulo, com perímetro 2p = x + y + z. Portanto, queremos encontrar o ponto P(x, y, z) que maximiza a função área do triângulo, dada pela fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p(x-p)(y-p)(z-p)}.$$

Neste caso, devemos maximizar a função f(x,y,z)=p(x-p)(y-p)(z-p), sujeita ao vínculo g(x,y,z)=x+y+z-2p=0. Temos que  $\nabla g=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\neq \mathbf{0}$  e

$$\nabla f(x,y,z) = p(y-p)(z-p)\mathbf{i} + p(x-p)(z-p)\mathbf{j} + p(x-p)(y-p)\mathbf{k}$$

e o sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} p(y-p)(z-p) + \lambda = 0 & \text{(I)} \\ p(x-p)(z-p) + \lambda = 0 & \text{(II)} \\ p(x-p)(y-p) + \lambda = 0 & \text{(III)} \\ x+y+z-2p = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) por x - p, (II) por y - p, (III) por z - p e somando, obtemos

$$3p(x-p)(y-p)(z-p) - p\lambda = 0,$$

de onde segue que

$$\lambda = 3(x - p)(y - p)(z - p).$$

Assim.

$$(y-p)(z-p)(3x-2p) = 0$$
,  $(x-p)(z-p)(3y-2p) = 0$  e  $(x-p)(y-p)(3z-2p) = 0$ 

e, sendo  $p>x,\, p>y$  e p>z, segue que x=y=z=2p/3 e o triângulo é equilátero.

Exemplo 3.35 (Média Aritmética × Média Geométrica) Se x, y e z são números reais positivos, então

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3},$$

ou seja, a média geométrica é menor ou igual à média aritmética.

Solução Inicialmente vamos determinar três números positivos x, y e z, cuja soma seja k e o produto seja máximo. Maximizaremos a função f(x, y, z) = xyz, sujeita ao vínculo g(x, y, z) = x + y + z - k = 0. Temos  $\nabla g = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$  e  $\nabla f = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$  e o sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} yz + \lambda = 0 & \text{(I)} \\ xz + \lambda = 0 & \text{(II)} \\ xy + \lambda = 0 & \text{(III)} \\ x + y + z - k = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) por x, (II) por y, (III) por z e somando os resultados, resulta  $3xyz + k\lambda = 0$  e, por conseguinte,  $\lambda = -\frac{3}{k}xyz$ . Assim,

$$yz(1-\frac{3}{k}x) = 0$$
,  $xz(1-\frac{3}{k}y) = 0$  e  $xy(1-\frac{3}{k}z) = 0$ 

e como x>0, y>0 e z>0, obtemos x=y=z=k/3. Sendo  $P\left(k/3,k/3,k/3\right)$  o ponto de máximo de f, então

$$f(x, y, z) \le f(k, k, k) = \frac{k^3}{27}$$

para todos x, y, z positivos e tais que x + y + z = k, ou seja,

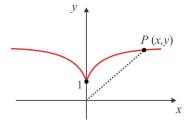
$$xyz \le \frac{k^3}{27} \Leftrightarrow \sqrt[3]{xyz} \le \frac{k}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}.$$
 (3.7)

A relação (3.7) pode ser generalizada para n números reais positivos  $x_1, \ldots, x_n$ , usando um raciocínio semelhante, aplicado à função  $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$  (veja o Exercício 24).

**Exemplo 3.36** A distância da origem à curva  $\gamma : x^2 - (y-1)^3 = 0$ , com  $y \ge 1$ .

**Solução** Observando o gráfico da curva  $y = 1 + \sqrt[3]{x^2}$ , na Figura 3.8, vemos que o ponto P(0,1) é o ponto da curva  $\gamma$  mais próximo da origem.

A distância da origem a um ponto P(x,y) da curva  $\gamma$  é d(O,P) = $\sqrt{x^2+y^2}$  e minimizaremos a função  $f(x,y)=x^2+y^2$ , sujeita ao vínculo  $g(x,y) = x^2 - (y-1)^3 = 0$ . É fácil verificar que  $\nabla f(x,y) =$  $2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \in \nabla g(x,y) = 2x\mathbf{i} - 3(y-1)^2\mathbf{j}$  e temos que  $\nabla g(x,y) = \mathbf{0}$ se, e somente se, x=0 e y=1. Se existisse um número  $\lambda$  tal que  $\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = \mathbf{0}$ , teríamos



 $\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 & \text{(I)} \\ 2y - 3\lambda (y - 1)^2 = 0 & \text{(II)} \\ x^2 - (y - 1)^3 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$ 

Figura 3.8: Curva  $y = 1 + x^{2/3}$ 

De (I) obtemos x=0 ou  $\lambda=-1$ ; se x=0, segue de (III) que y=1 e de (II) resulta z=0, o que é impossível; o valor  $\lambda = -1$  é incompatível com a equação (II) e, portanto, o sistema de Lagrange não tem solução. Este exemplo mostra que a hipótese  $\nabla g(x,y) \neq 0$  no Teorema 3.27 não pode ser omitida.

#### 3.2.1 Considerações Finais

Encerramos esta seção com algumas considerações que julgamos relevantes sobre o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

1. Quando o vínculo S: g=0 está contido no domínio de f, então os pontos críticos de f em Ssão os pontos críticos da restrição  $f|_S$ , já que

$$\nabla f(P) = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla f(P) \bullet \mathbf{v} = 0,$$

para todo vetor v no plano tangente a S em P. A recíproca não é verdadeira, como mostra o exemplo: a função f(x,y) = y não tem ponto crítico e, contudo,  $P(0,\pm 1)$  são pontos críticos da restrição de f ao vínculo  $S: x^2 + y^2 = 1$ , porque  $\nabla f(P) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{j}) \cdot (\pm \mathbf{i}) = 0$ .

- 2. A condição  $\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0}$  significa que a superfície (ou curva, se n=2) S: g=0 é tangente à superfície (ou curva) de nível de f, que passa no ponto estacionário de  $f|_S$ .
- 3. Se o vínculo S é compacto e existirem em S apenas dois pontos críticos de f satisfazendo ao sistema de Lagrange  $\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0}$ , então um deles é o ponto de máximo e o outro é ponto de mínimo. Em alguns problemas práticos, pode não haver ponto de máximo ou de mínimo, como ocorre com alguns problemas envolvendo distância. Por exemplo, não existe um ponto da reta x + y = 1 mais distante da origem e neste caso a solução do sistema de Lagrange é um ponto de mínimo.

Para classificar os pontos críticos da restrição  $f|_{S}$  mencionamos dois resultados.

**Teorema 3.37** Sejam  $f, g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  funções com derivadas parciais de segunda ordem contínuas e suponhamos que o conjunto de nível

$$S = \{ P \in D : g(P) = c \}$$

seja não vazio. Dado P em S tal que  $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$  e  $\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0}$ , consideramos a função  $h = f + \lambda g$  e definimos

$$d(P) = \det \begin{bmatrix} 0 & g_x(P) & g_y(P) \\ g_x(P) & h_{xx}(P) & h_{xy}(P) \\ g_y(P) & h_{xy}(P) & h_{yy}(P) \end{bmatrix}.$$

- 1. Se d(P) > 0, então P é um ponto de máximo de  $f|_{S}$ .
- 2. Se d(P) < 0, então P é um ponto de mínimo de  $f|_S$ .

Observação 3.38 No caso n = 3, isto é, para funções de três variáveis, consideramos o determinante

$$d^{*}(P) = \det \begin{bmatrix} 0 & g_{x}(P) & g_{y}(P) & g_{z}(P) \\ g_{x}(P) & h_{xx}(P) & h_{xy}(P) & h_{xz}(P) \\ g_{y}(P) & h_{xy}(P) & h_{yy}(P) & h_{yz}(P) \\ g_{z}(P) & h_{xz}(P) & h_{yz}(P) & h_{zz}(P) \end{bmatrix}$$

e formulamos o seguinte teste:

- 1. se d(P) e  $d^*(P)$  têm mesmo sinal, então P é um ponto de mínimo de  $f|_S$ ;
- 2. se d(P) e  $d^*(P)$  têm sinais opostos, então P é um ponto de máximo de  $f|_S$ .

**Exemplo 3.39** O mínimo de f(x,y) = xy, sujeita ao vínculo S: x + y = 1.

**Solução** Se considerarmos g(x,y) = x + y - 1, teremos  $\nabla g = \mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$  e

$$\nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = 1/2 \text{ e } y = 1/2$$

e P(1/2, 1/2) é o único ponto crítico de f em S. Na Figura 3.9 a reta (vinculo) S: x + y - 1 = 0 é tangente à curva de nível de f que passa pelo ponto estacionário P(1/2, 1/2).

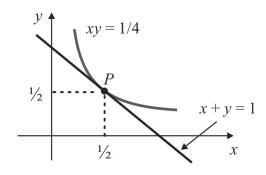


Figura 3.9: Máximo de xy na reta x + y = 1.

Para classificar o ponto P, observamos que

$$d(P) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 > 0$$

CAPÍTULO 3 DERIVADAS: aplicações 101

e, portanto, P é ponto de máximo de  $f|_S$ . Quando  $x \to +\infty$ , então  $y = 1 - x \to -\infty$  e, assim,  $xy \to -\infty$ , o que nos leva a concluir que f(x,y) não tem mínimo em S.

#### Problema com dois Vínculos

Se o problema envolve dois vínculos, digamos  $S_1: g(x,y,z)=0$  e  $S_2: h(x,y,z)=0$ , com  $\nabla g(P) \times \nabla h(P) \neq \mathbf{0}$ , então a derivada direcional de f no ponto crítico P, na direção da tangente à curva  $\gamma = S_1 \cap S_2$ , em P, deve ser zero. Esta derivada direcional é a projeção do vetor  $\nabla f(P)$  na direção tangente á curva  $\gamma$  e, portanto,  $\nabla f(P)$  jaz no plano normal à curva  $\gamma$  em P, o qual é gerado por  $\nabla g(P)$  e  $\nabla h(P)$ . Logo, existem escalares  $\lambda$  e  $\mu$  tais que

$$\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P) = \mathbf{0}. \tag{3.8}$$

**Exemplo 3.40** Determinar sobre a elipse  $\gamma$ , interseção do plano x+z=4 com o cilindro  $x^2+y^2=1$ , o ponto mais próximo e o ponto mais distante da origem.

**Solução** Na Figura 3.10 ilustramos a situação geométrica e indicamos os pontos  $P_1$  e  $P_2$  que serão encontrados a seguir.

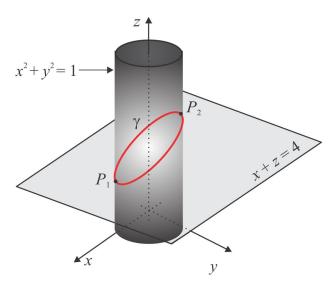


Figura 3.10: Extremos com dois vínculos.

Devemos encontrar o máximo e o mínimo de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , sujeita aos vínculos

$$g(x, y, z) = x + z - 4 = 0$$
  $\leftarrow$  plano  
 $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$   $\leftarrow$  cilindro.

Temos que  $\nabla g = \mathbf{i} + \mathbf{k}$  e  $\nabla h = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$  e, portanto,  $\nabla g \times \nabla h = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ , de onde segue que  $\nabla g \times \nabla h = \mathbf{0}$  se, e só se, x = y = 0. O sistema de Lagrange (3.8) para este caso é

$$\begin{cases} 2x + \lambda + 2\mu x = 0 & \text{(I)} \\ 2y + 2\mu y = 0 & \text{(II)} \\ 2z + \lambda = 0 & \text{(III)} \\ x + z - 4 = 0 & \text{(IV)} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & \text{(V)} \end{cases}$$

De (II) segue que y=0 ou  $\mu=-1$ . Se y=0, resolvemos (IV) e (V) simultaneamente para encontrar os pontos correspondentes  $P_1(1,0,3)$  e  $P_2(-1,0,5)$  sobre a elipse. Se  $\mu=-1$ , obtemos de (I)  $\lambda=0$  e de (III) z=0. Com z=0, resulta de (IV) que x=4 e esse valor de x é incompativel com (V). Avaliando f em  $P_1$  e  $P_2$ , obtemos  $f(P_1)=10$  e  $f(P_2)=26$ , de onde concluímos que  $P_1$  é o ponto da elipse  $\gamma$  mais próximo da origem e  $P_2$  o mais distante.

#### Exercícios & Complementos.

- 1. Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, resolva os seguintes problemas de extremos vinculados:
  - (a) z = 3x + 4y;  $x^2 + y^2 = 1$ .
  - (b)  $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ ;  $x y = \frac{\pi}{4}$  e  $0 \le x \le \pi$ .
  - (c) z = x + y; xy = 16, x > 0 e y > 0.
  - (d) w = xy + yz + xz;  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
  - (e)  $z = x^2 + y^2$ ;  $x^4 + y^4 = 1$ .
  - (f) w = xyz; xy + yz + xz = 2,  $x \ge 0$ ,  $y \ge 0$  e  $z \ge 0$ .
  - (g) w = x + y + z;  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
  - (h)  $w = (x + y + z)^2$ ;  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ .
  - (i)  $z = x^2 + 2y^2$ ; 3x + y = 1.
  - (j)  $z = x^2y^2$ ;  $4x^2 + y^2 = 8$ .
- 2. Determine a distância do ponto P = (1,0) à parábola  $y^2 = 4x$ .
- 3. Determine a distância da origem à curva  $5x^2 + 5y^2 + 6xy = 1$ .
- 4. Determine os pontos da curva interseção do elipsoide  $x^2+4y^2+4z^2=1$  com o plano x-4y-z=0 mais próximos da origem.
- 5. Determine três números positivos cuja soma seja k e o produto o maior possível.
- 6. Determine o ponto do paraboloide  $z = x^2 + y^2$  mais próximo do ponto P = (3, -6, 4).
- 7. Determine na elipse  $x^2 + 4y^2 = 16$  o ponto mais próximo e o mais distante da reta x y = 10.
- 8. Determine o maior valor da expressão  $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} (x+y)$  na região compacta

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le \pi \ e \ 0 \le x + y \le \pi\}.$$

9. Determine os extremos da função  $f(x,y) = 8x^3 - 3xy + y^3$  no quadrado

$$Q = [0,1] \times [0,1]$$
.

10. Determine o maior valor da expressão x(y+z), quando  $x^2+y^2=1$  e xz=1.

CAPÍTULO 3 DERIVADAS: aplicações 105

11. Entre todos os pontos do paraboloide  $z = 10 - x^2 - y^2$ , encontre aquele acima e mais afastado do plano x + 2y + 3z = 0.

- 12. Identifique os pontos críticos da função  $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$  sujeita à condição  $x^2yz = 1$ .
- 13. Determine a menor distância da origem à hipérbole de equação cartesiana  $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ .
- 14. Determine o máximo e o mínimo de  $f(x,y) = xy^2 + 2x + y^4 + 1$  no compacto  $K: x^2 + y^2 \le 1$ .
- 15. Determine a distância do paraboloide  $z = x^2 + y^2 + 10$  ao plano 3x + 2y 6z = 0.
- 16. Quais os pontos da elipse  $x^2 + xy + y^2 = 3$  mais próximos e mais distantes da origem?
- 17. A temperatura T em um ponto P(x, y, z) da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  é dada por  $T(P) = 100xy^2z$ . Em qual ponto da esfera a temperatura é máxima e em qual ponto ela é mínima?
- 18. Uma caixa retangular sem tampa deve ter  $32 m^3$  de volume. Determine suas dimensões, de modo que sua área total seja mínima.
- 19. Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio a.
- 20. Mostre que, dentre todas as caixas retangulares com mesma área, o cubo tem o maior volume.
- 21. Um paralelepípedo retângular possui três de suas faces nos planos coordenados. Seu vértice oposto à origem está no plano 4x + 3y + z = 36 e no primeiro octante. Determine esse vértice de tal forma que o paralelepípedo tenha volume máximo.
- 22. Uma indústria fabrica caixas retangulares de  $8 m^3$  de volume. Quais as dimensões que tornam o custo mínimo, se o material para a tampa e base custa o dobro do material para os lados?
- 23. Determine o retângulo de maior perímetro inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

24. Determine o valor máximo de  $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ , se os números positivos  $x_1, x_2, ..., x_n$  são tais que  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ . Usando o resultado mostre a relação entre as médias aritmética e geométrica:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

25. Qual o ponto do plano  $\alpha: x+y+z=1$  mais próximo da reta r: x=t, y=1, z=-2t?

### 3.3 Derivação Implícita

Ao derivar parcialmente uma relação do tipo

$$F\left(x, y, z\right) = 0\tag{3.9}$$

devemos ter em mente quais variáveis são independentes e quais são dependentes. Quando a equação (3.9) puder ser resolvida para expressar z como função de x e y, então entendemos x e y como variáveis independentes e z como variável dependente. Neste caso,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$
 e  $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ .

Por exemplo, próximo do ponto P(1,1,1) a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  define uma das variáveis como função das outras duas:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$
  $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$  e  $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ 

e as derivadas parciais são calculadas como de costume. Quando uma das variáveis for condicionada, devemos ter atenção no cálculo das derivadas parciais. Por exemplo, se

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$
 e  $z = x^2 + y^2$ 

a derivada parcial  $F_x$  assume dois valores, dependendo de quais variáveis são consideradas independentes. Se as variáveis independentes são x e y, então

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow F_x = 2x + 4x^3 + 4xy^2.$$

Por outro lado, se as variáveis independentes são x e z, então  $y^2=z-x^2$  e obtemos

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 = z + z^2 \Rightarrow F_x = 0.$$

Apresentaremos três casos do Teorema da Função Implícita que aparecem com mais frequência nos cursos de cálculo.

#### 3.3.1 Uma Equação e duas Variáveis

A equação em duas variáveis

$$\sqrt{2 - x^2 - y^2} + \log(xy) = 0 \tag{3.10}$$

não pode ser resolvida para expressar y como função de x ou x como função de y, embora ela tenha solução; é claro que o ponto P(1,1) é solução de (3.10). Já a equação

$$x(1+y)\cos y + y^4 = 2 \tag{3.11}$$

não pode ser resolvida, próxima da origem, para expressar y como função de x, mas ela define implicitamente x como função de y. De fato, resolvendo a equação (3.11), obtemos

$$x = \frac{2 - y^4}{(1+y)\cos y}.$$

Como saber se a equação F(x,y) = 0 pode ser resolvida de modo que possamos interpretar uma das variáveis como função da outra, isto é,

$$y = f(x)$$
 ou  $x = g(y)$ 

e se isso é possível, como calcular a derivada y' ou x', sem resolver a equação? Observamos inicialmente que se a tangente à curva F(x,y)=0 no ponto P(a,b) for paralela ao eixo y, certamente a variável y não pode ser interpretada como uma função de x em vizinhança alguma de x=a. Isso está ilustrado na Figura 3.11.

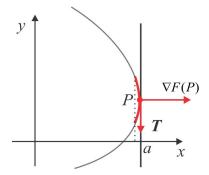


Figura 3.11: y não é função de x.

Se  $\mathbf{T} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$  é o vetor tangente à curva no ponto P, então  $\mathbf{T} \bullet \nabla F(P) = 0$  e, portanto,

$$\alpha F_x(P) + \beta F_y(P) = 0. \tag{3.12}$$

Se escolhermos  $\alpha = F_y(P)$  e  $\beta = -F_x(P)$  como solução de (3.12) e observarmos que **T** é paralelo ao eixo y, teremos  $F_y(P) = 0$ . Portanto, uma condição necessária para que a equação F(x, y) = 0 defina y como função de x é que  $F_y(P) \neq 0$ .

O Teorema da Função Implícita que enunciaremos a seguir é um dos resultados mais importantes de análise matemática. Sua demonstração é um pouco delicada e não será apresentada aqui.

**Teorema 3.41 (Função Implícita - 1º caso)** Seja  $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  uma função com derivadas parciais  $F_x$  e  $F_y$ , contínuas em uma vizinhança de um ponto P(a,b), e suponhamos que F(P) = 0 e  $F_y(P) \neq 0$ . Então, existe um intervalo I contendo a no seu interior e uma função y = f(x) derivável em I tal que

- 1.  $(x, f(x)) \in D$ , para todo x no intervalo I, e f(a) = b.
- 2.  $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in I$ .
- 3. Vale a fórmula de derivação

$$y'(a) = -\frac{F_x(P)}{F_y(P)}.$$

Neste caso, a equação F(x,y) = 0 define implicitamente y como função de x.

A regra de derivação implícita contida no Teorema 3.41 é consequência da Regra da Cadeia. De fato, se fizermos z = F(x, y), com y = f(x), então

$$0 = F(x, f(x)) \Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \Rightarrow F_x + F_y y' = 0$$

e daí segue a fórmula de derivação implícita

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

A Figura 3.12 ilustra o gráfico da função y=f(x) como a imagem inversa do valor 0 pela função F, isto é,  $G(f)=F^{-1}(0)$ .

Figura 3.12: O gráfico de y = f(x).

**Exemplo 3.42** Em uma vizinhança de P(2,1), a equação  $y^3 - xy + x^2 = 3$  pode ser resolvida para explicitar y como uma função diferenciável de x.

**Solução** A função  $F(x,y) = y^3 - xy + x^2 - 3$  atende às condições do Teorema da Função Implícita e, por conseguinte, podemos definir em uma vizinhança de x = 2 uma função diferenciável y = y(x), tal que:

$$F(x, y(x)) = 0$$
 e  $y'(2) = -\frac{F_x(2, 1)}{F_y(2, 1)} = -3.$ 

Exemplo 3.43 (calculando a segunda derivada) A partir da relação  $F_x + F_y y' = 0$ , deduzir uma expressão para a segunda derivada y''.

**Solução** Suponhamos que F(x, y) tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Derivando a equação  $F_x + F_y y' = 0$  com respeito à variável x, encontramos

$$\underbrace{F_{xx} + F_{xy}y'}_{\partial_x(F_x)} + \underbrace{\left(F_{yx} + F_{yy}y'\right)y' + F_yy''}_{\partial_x(F_yy')} = 0$$

e substituindo y' por  $-F_x/F_y$ , encontramos:

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

**Exemplo 3.44** Determinar y', supondo que y = f(x) seja definida pela relação

$$y^4 + 3y - 4x^3 - 5x + 1 = 0.$$

Solução Se no Teorema 3.41 considerarmos  $F(x,y) = y^4 + 3y - 4x^3 - 5x + 1$ , teremos  $F_x = -12x^2 - 5$  e  $F_y = 4y^3 + 3$  e, consequentemente,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}.$$

Exemplo 3.45 (Teorema da Função Inversa) Seja  $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  uma função com derivada contínua no ponto  $c \in I$  e suponhamos  $f'(c) \neq 0$ . Então existe uma função x = g(y) diferenciável em um intervalo aberto contendo d = f(c) tal que f(g(y)) = y e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Se F(x,y) = f(x) - y, então  $F_x(c,d) = f'(c) \neq 0$  e pelo Teorema Função Implícita existe uma função x = g(y), diferenciável em um intervalo aberto contendo d = f(c), tal que

$$F(g(y), y) = f(g(y)) - y = 0,$$

ou seja, f(g(y)) = y. Como  $F_x = f'(x)$  e  $F_y = -1$  temos que

$$g'(y) = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{-1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

#### 3.3.2 Uma Equação e três Variáveis

A generalização para o caso de uma equação e três variávis é natural. Suponhamos que a equação

$$F\left(x,y,z\right) = 0\tag{3.13}$$

defina implicitamente z como função de x e y, digamos z = f(x, y). Conforme ressaltamos no início, as variáveis x e y são independentes e as derivadas  $z_x$  e  $z_y$  são obtidas derivando parcialmente a relação (3.13). Se w = F(u, v, z), sendo u(x, y) = x, v(x, y) = y e z(x, y) = f(x, y), resulta da Regra da Cadeia

$$w_x = F_u u_x + F_v v_x + F_z z_x = F_u + F_z z_x,$$
 (usamos  $u_x = 1$  e  $v_x = 0$ )  
 $w_y = F_u u_y + F_v v_y + F_z z_y = F_v + F_z z_y,$  (usamos  $u_y = 0$  e  $v_y = 1$ ).

Considerando que w = F(x, y, f(x, y)) = 0, então  $w_x = 0$  e  $w_y = 0$  e, resumindo, encontramos:

$$F\left(x,y,z\right)=0 \Rightarrow F_x+F_zz_x=0$$
 (I)  $\leftarrow$  derivando em relação a  $x$   $F\left(x,y,z\right)=0 \Rightarrow F_y+F_zz_y=0$  (II)  $\leftarrow$  derivando em relação a  $y$ 

$$F(x,y,z) = 0 \Rightarrow F_y + F_z z_y = 0$$
 (II)  $\leftarrow$  derivando em relação a y

De (I) e (II) resultam as seguintes regras de derivação implícita:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$
 e  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ 

onde, naturalmente, admitimos as operações possíveis. De forma precisa, temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.46 (Função Implícita - 2º caso)** Seja  $F:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$  uma função com derivadas parciais  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  contínuas em uma vizinhança de um ponto P(a,b,c) e suponhamos que F(P)=0 $e F_z(P) \neq 0$ . Existe uma  $\delta$ -vizinhança  $V_\delta(Q)$  do ponto Q(a,b) e uma função diferenciável z = f(x,y), tal que

- 1.  $(x, y, f(x, y)) \in D$ ,  $\forall (x, y) \in V_{\delta}(Q)$ , e f(a, b) = c.
- 2.  $F(x, y, f(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in V_{\delta}(Q)$ .
- 3. São válidas as fórmulas de derivação

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$
  $e$   $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ .

Neste caso, a equação F(x,y,z) = 0 define implicitamente z como função de x e y.

**Exemplo 3.47** Determinar  $z_x$  e  $z_y$ , supondo que z = f(x,y) seja definida pela relação

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0.$$

**Solução** Se  $F(x, y, z) = x^2 z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5$ , então

$$F_x = 2xz^2 + y^2$$
,  $F_y = 2xy + 4z$  e  $F_z = 2x^2z - 3z^2 + 4y$ 

e do Teorema 3.46 resulta

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4y} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}.$$

#### 3.3.3 Duas Equações e quatro Variáveis

Sejam  $\xi(u,v)$  e  $\eta(u,v)$  duas funções reais com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . O determinante funcional

$$\frac{\partial \left( \xi, \eta \right)}{\partial \left( u, v \right)} = \left| \begin{array}{cc} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{array} \right| = \xi_u \eta_v - \xi_v \eta_u,$$

em homenagem a Jacobi<sup>11</sup>, recebe o nome de *Jacobiano* de  $\xi$  e  $\eta$  em relação a u e v. Quando não houver ambiguidade, esse Jacobiano será indicado por J(u, v).

**Teorema 3.48 (Função Implícita - 3º caso)** Sejam F(x, y, u, v) e G(x, y, u, v) duas funções reais definidas em um domínio  $D \subseteq \mathbb{R}^4$ , com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança do ponto P(a, b, c, d), e suponhamos que

$$F(P) = 0, \ G(P) = 0 \ e \ J = J(u, v) = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\Big|_{(P)} \neq 0.$$

Então o sistema

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

define, ao menos implicitamente, u e v como funções diferenciáveis de x e y em uma vizinhança  $V_{\delta}(Q)$  do ponto Q(a,b). As funções u = u(x,y) e v = v(x,y) são tais que

- 1.  $(x, y, u, v) \in D, \forall (x, y) \in V_{\delta}(Q)$ .
- 2. F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0  $e G(x, y, f(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in V_{\delta}(Q)$ .
- 3. São válidas as fórmulas de derivação

$$u_x = -\frac{J(x,v)}{I}, \ v_x = -\frac{J(u,x)}{I}, \ u_y = -\frac{J(y,v)}{I} \ e \ v_y = -\frac{J(u,y)}{I}.$$
 (3.14)

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Carl Gustav Jacob Jocobi (1804-1851), matemático alemão.

Como nos casos anteriores, as fórmulas de derivação (3.14) são determinadas pela Regra da Cadeia. De fato, derivando com respeito a x as relações F(x, y, u, v) = 0 e G(x, y, u, v) = 0, levando em conta que x e y são independentes, chegamos ao sistema não homogêneo

$$\begin{cases} F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0 \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_u u_x + F_v v_x = -F_x \\ G_u u_x + G_v v_x = -G_x \end{cases}$$

cujo determinante principal é  $J \neq 0$ . Da Regra de Cramer segue que

$$u_{x} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} -F_{x} & F_{v} \\ -G_{x} & G_{v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (x, v)} \quad \text{e} \quad v_{x} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_{u} & -F_{x} \\ G_{u} & -G_{x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (u, x)}.$$

Para encontrar as derivadas  $u_y$  e  $v_y$ , repetimos o processo derivando as equações

$$F(x, y, u, v) = 0$$
 e  $G(x, y, u, v) = 0$ 

com respeito a y e usamos a Regra de Cramer.

**Exemplo 3.49** Calcular  $u_x e v_x$ , admitindo que o sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + y - u^2 + v = 0 \\ x - 2y - u + 2v^2 = 0 \end{cases}$$

defina u e v como funções de x e y.

**Solução** Na origem O(0,0,0) as funções

$$F(x, y, u, v) = 3x^2 + y - u^2 + v \text{ e } G(x, y, u, v) = x - 2y - u + 2v^2$$

satisfazem as hipóteses do Teorema 3.48 e as derivadas parciais de F e G são

$$F_x = 6x$$
,  $F_y = 1$ ,  $F_y = -2u$ ,  $F_y = 1$ ,  $G_x = 1$ ,  $G_y = -2$ ,  $G_y = -1$ ,  $G_y = 4v$ .

Temos J(u, v) = -8uv + 1, J(x, v) = 24xv - 1 e J(u, x) = -2u + 6x e, portanto,

$$u_x = \frac{24xv - 1}{8uv - 1}$$
 e  $v_x = \frac{-2u + 6x}{8uv - 1}$ 

O Teorema da Função Implícita pode ser generalizado para o caso de m equações e n variáveis, sendo m < n. Neste caso, com hipóteses similares àquelas dos casos particulares tratados, demonstrase que m variáveis se expressam como funções diferenciáveis das n-m variáveis independentes que restam. Como ilustração, vejamos um exemplo em que temos três equações e cinco variáveis.

#### Exemplo 3.50 Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0\\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2\\ xy - \sin u\cos v + z = 0 \end{cases}$$
(3.15)

e o ponto P de coordenadas x = 1, y = 1, z = 0,  $u = \pi/2$  e v = 0. Verificar que o sistema (3.15) define x, y e z como funções de u e v e calcular a derivada  $x_u$ .

Solução O sistema (3.15) com 3 equações e 5 variáveis permite explicitar três variáveis em função das duas variáveis independentes que restam. Temos

$$J = \frac{\partial \left( F, G, H \right)}{\partial \left( x, y, z \right)} = \left| \begin{array}{ccc} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 2x & \cos \left( uv \right) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{array} \right|$$

e no ponto *P* temos F(P) = 0, G(P) = 0, H(P) = 0 e

$$J = rac{\partial \left( F, G, H 
ight)}{\partial \left( x, y, z 
ight)} = \left| egin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \ 2 & 2 & 0 \ 1 & 1 & 1 \end{array} 
ight| = 2 
eq 0.$$

Decorre do Teorema da Função Implícita que existe uma vizinhança do ponto  $Q(\pi/2,0)$ , na qual as variáveis  $x,y \in z$  são funções diferenciáveis de  $u \in v$  e as derivadas são calculadas pelas fórmulas:

$$x_{u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \left(F, G, H\right)}{\partial \left(u, y, z\right)}, \quad y_{u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \left(F, G, H\right)}{\partial \left(x, u, z\right)} \quad \text{e} \quad z_{u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \left(F, G, H\right)}{\partial \left(x, y, u\right)}.$$

Fórmulas semelhantes se obtém para as derivadas  $x_v$ ,  $y_v \in z_v$ :

$$x_v = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G, H)}{\partial (u, v, z)}, \quad y_v = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G, H)}{\partial (x, v, z)} \quad e \quad z_v = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G, H)}{\partial (x, y, v)}.$$

No ponto P, temos

$$\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (u, y, z)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies x_u(P) = 0.$$

#### Exercícios & Complementos.

- 1. Verifique a aplicabilidade do Teorema da Função Implícita e determine y'(P) e y''(P).

- (a)  $y^3 xy + x^2 3 = 0$ ; P(2,1) (c)  $x \log x + y \exp(y) = 0$ ; P(1,0)(b)  $\log(xy) + xy^2 1 = 0$ ; P(1,1) (d)  $\log(xy) 2xy + 2 = 0$ ; P(1,1).
- 2. Use o Teorema da Função Implícita e calcule  $\frac{dx}{dy}$  no ponto P especificado.
  - (a)  $y^3 + x^3 \cos(xy) = 0$ : P = (1,0)
  - (b)  $2x^2 + y^2 \log(x^2 + y^2) = 2$ : P = (1, 0)
- 3. Determine  $z_x$  e  $z_y$ , com z = f(x, y) definida implicitamente pela equação:
  - (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (b)  $xy(1+x+y) z^2 = 0$  (c)  $xz^2 3yz + \cos z = 0$ .
- 4. Resolva o sistema

$$\begin{cases} u + v + \sin(xy) = 0\\ 3u + 2v + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

e determine u e v como funções de x e y.

5. Um gás ideal obedece à seguinte lei: PV = kT, sendo k uma constante real, P, V e T, respectivamente, a pressão, o volume e a temperatura. Deduza a relação

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

6. Seja F(x,y,z)=0, sendo w=F(x,y,z) uma função diferenciável tal que

$$F(P) = 0, F_x(P) \neq 0, F_y(P) \neq 0 \text{ e } F_z(P) \neq 0.$$

Usando derivação implícita mostre que, em P, vale a relação

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

7. Admitindo a continuidade das derivadas envolvidas, prove as seguintes relações:

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\cdot\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(z,w\right)}=\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(z,w\right)}\ e\ \frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\cdot\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}=1.$$

8. Admita que o sistema

$$\begin{cases} u^3 - 2u - v - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - u - 4 = 0 \end{cases}$$

defina u e v como funções de x e y. Determine as derivadas  $v_x$  e  $v_y$ , no ponto em que x=1 e y=2.

9. Considere x, y e z como funções de u e v, definidas pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0\\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2\\ xy - \sin u\cos v + z = 0 \end{cases}$$

Calcule  $x_u$  e  $y_v$ , no ponto de coordenadas  $x=1, y=1, z=0, u=\frac{\pi}{2}$  e v=0.

10. Admita que o sistema

$$\begin{cases} x^2 - xt - y^2t^2 + 2s + 2 = 0 \\ y^2 - 2yt + xt^2 - ys + s^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

defina x e y como funções de s e t. Determine as derivadas  $x_s$ ,  $x_t$ ,  $y_s$  e  $y_t$ , no ponto em que x=2, y=0, s=1 e t=1.

#### 3.4 Transformações

Nesta seção vamos apresentar as transformações que são funções  $T: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ , definidas em uma parte não vazia X do  $\mathbb{R}^2$  ou  $T: X \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ , no caso tridimensional. Daremos ênfase às transformações lineares e às mudanças de coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas, que serão bastante utilizadas no cálculo integral. Essas mudanças de coordenadas têm por finalidade simplificar a descrição de certas regiões ou funções.

Dada uma transformação  $T: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ , a imagem de um subconjunto  $\mathcal{R}$  de X pela transformação T é representada por  $T(\mathcal{R})$ , isto é,

$$T(\mathcal{R}) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v) = T(x, y), \text{ para algum } (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Neste caso, diremos que T transforma  $\mathcal{R}$  sobre  $T(\mathcal{R})$ ; é comum representar uma transformação por meio das equações simultâneas

$$u = u(x, y) e v = v(x, y),$$
 (3.16)

sendo T(x,y) = (u,v). As regiões do plano xy e do plano uv são representadas por  $\mathcal{R}_{xy}$  e  $\mathcal{R}_{uv}$ , respectivamente. No caso em que a transformação T é invertível, nos referimos às equações (3.16) como uma mudança de coordenadas.

As curvas  $u(x,y) = c_1$  e  $v(x,y) = c_2$  do plano xy são as imagens das retas  $u = c_1$  e  $v = c_2$  do plano uv pela transformação T, como ilustra a Figura 3.13, e as quantidades u e v são denominadas coordenadas curvilíneas. Neste caso, a imagem de um retângulo  $R_{uv}$  no plano uv é uma figura curvilinear delimitada pelas curvas de nível  $u = c_1$  e  $v = c_2$ , respectivamente.

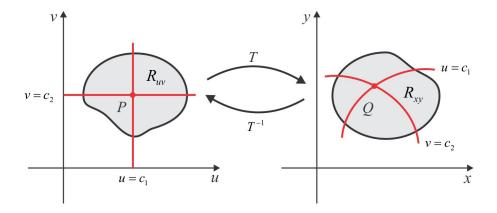


Figura 3.13: Representação grágica da ação de T.

**Exemplo 3.51** Seja  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  a transformação linear dada por

$$T: \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}$$
 (3.17)

e suponhamos que o Jacobiano  $J=ad-bc\neq 0$ . Determinar a imagem de uma reta do plano xy pela transformação T.

**Solução** Como  $J \neq 0$ , o sistema (3.17) pode ser resolvido e encontramos a transformação inversa  $T^{-1}$ , dada por

$$T^{-1}: \begin{cases} x = \frac{1}{J} (du - bv) \\ y = \frac{1}{J} (-bu + av) \end{cases}$$
 (3.18)

Dada uma reta do plano xy descrita pela equação Ax + By = C, substituindo os valores de x e y dados em (3.18) na equação da reta, encontramos

$$(dA - bB) u + (aB - bA) v = JC,$$

que representa uma reta no plano uv.

**Exemplo 3.52** Seja a transformação  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  definida por

$$x = r \cos \theta$$
  $e$   $y = r \sin \theta$ .

Determinar a imagem pela transformação T da reta reta r = 1 e do retângulo

$$\mathcal{R} = \{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 1 \ e \ 0 \le \theta \le 2\pi \}.$$

Solução A reta r=1 é transformada no círculo  $x^2+y^2=1$ , já que  $r^2=x^2+y^2$ . Por outro lado, o retângulo  $\mathcal{R}$  é transformado no disco  $x^2+y^2\leq 1$ .

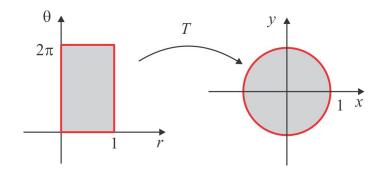


Figura 3.14: A transformação  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

Exemplo 3.53 (trajetórias ortogonais) Seja  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  a transformação definida por

$$u = u(x, y)$$
  $e$   $v = u(x, y)$ .

onde u e v têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e satisfazem às equações de Cauchy-Riemann:  $u_x = v_y$  e  $u_y = -v_x$ . As famílias de curvas de nível  $u = c_1$  e  $v = c_2$  são ortogonais. Investiguemos o caso  $u = x^2 - y^2$  e v = 2xy, esboçando algumas curvas de nível.

**Solução** As curvas  $u=c_1$  e  $v=c_2$  serão ortogonais quando as retas tangentes às curvas forem perpendiculares. Temos

$$u = c_1 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}$$

e a declividade da reta tangente à curva  $u=c_1$  é  $m_1=-u_x/u_y$ . De forma similar obtemos  $m_2=-v_x/v_y$  como sendo a declividade da curva  $v=c_2$ . Assim, considerando que  $u_x=v_y$  e  $u_y=-v_x$ , resulta

$$m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{u_x}{u_y}\right) \left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = \left(-\frac{u_x}{u_y}\right) \left(\frac{u_y}{u_x}\right) = -1$$

e as famílias de curvas de nível  $u=c_1$  e  $v=c_2$  são ortogonais. No caso  $u=x^2-y^2$  e v=2xy, temos  $u_x=2x=v_y$  e  $u_y=-2y=-v_x$  e as trajetórias ortogonais estão ilustradas na Figura 3.15.

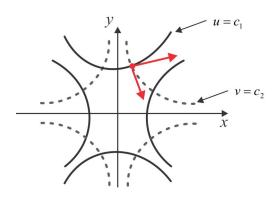


Figura 3.15: Trajetótrias ortogonais.

Suponhamos que a transformação  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  definida por

$$T: \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

$$(3.19)$$

tenha Jacobiano não nulo, isto é,

$$J = \left| \begin{array}{cc} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{array} \right| \neq 0.$$

Então a transformação T é invertível e o sistema (3.19) pode ser resolvido para explicitar x e y como funções diferenciáveis de u e v, digamos

$$T^{-1}: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v). \end{cases}$$
 (3.20)

Os sistemas (3.19) e (3.20) denominam-se fórmulas de mudança de coordenadas. O cálculo das derivadas parciais  $x_u$ ,  $x_v$ ,  $y_u$ ,  $y_v$  da transformação inversa é feito por derivação implícita. De fato, se considerarmos as funções F(x, y, u, v) = u(x, y) - u e G(x, y, u, v) = v(x, y) - v, teremos

$$\frac{\partial (F,G)}{\partial (x,y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0$$

e das fórmulas de derivação (3.14), resulta

$$x_u = -\frac{1}{J} \frac{\partial \left( F, G \right)}{\partial \left( u, y \right)} = -\frac{1}{J} \left| \begin{array}{cc} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{array} \right| = -\frac{1}{J} \left| \begin{array}{cc} -1 & F_y \\ 0 & G_y \end{array} \right| = \frac{G_y}{J} = \frac{v_y}{J}.$$

De forma similar, obtemos as outras derivadas. Temos, então, o seguinte resultado:

Teorema 3.54 (Teorema da Função Inversa) Suponhamos que u(x, y) e v(x, y) tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança  $V_{\delta}(a, b)$  do ponto P(a, b) e que o Jacobiano

$$J = J(T) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

não se anula no ponto P. Então as equações u = u(x,y) e v = v(x,y) podem ser resolvidas implicitamente para x e y em função de u e v e as derivadas parciais  $x_u$ ,  $x_v$ ,  $y_u$ ,  $y_v$  são dadas por

Observação 3.55 Se  $J\left(T^{-1}\right)$  é o Jacobiano da transformação inversa  $T^{-1}$ , então

$$J\left(T^{-1}\right) = x_u y_v - x_v y_u$$

e usando as fórmulas de derivação (3.21) deduzimos a relação entre os Jacobianos de T e  $T^{-1}$ :

$$J(T) \times J(T^{-1}) = 1.$$

#### 3.4.1 Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas

#### Coordenadas Polares

As coordenadas polares  $(r, \theta)$  do ponto P(x, y) do plano  $\mathbb{R}^2$  são definidas pelas equações:

$$x = r\cos\theta \quad e \quad y = r\sin\theta, \quad r > 0 \quad e \quad 0 \le \theta < 2\pi,$$
(3.22)

deduzidas a partir da Figura 3.16.

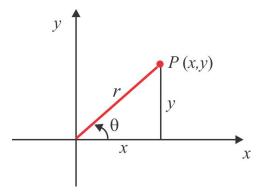


Figura 3.16: Coordenadas Polares  $r \in \theta$ .

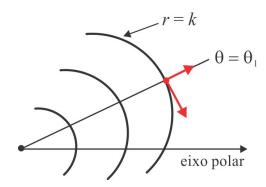


Figura 3.17: Trajetórias ortogonais.

Segue de (3.22) que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r > 0$$

e se  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  é a mudança de coordenadas definida por  $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ , então T é invertível, porque J(T) > 0, e a transformação inversa  $T^{-1}$  é definida por  $r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta(x,y) = \arctan(y/x)$ . As trajetórias r = cte e  $\theta = \text{cte}$  são ortogonais, já que os gradientes

$$\nabla r = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j}$$
 e  $\nabla \theta = -\frac{y}{r}\mathbf{i} + \frac{x}{r}\mathbf{j}$ 

são perpendiculares. Algumas trajetórias estão mostradas na Figura 3.17.

**Exemplo 3.56** A equação polar  $r=a,\ a>0,\ representa\ a\ circunferência\ x^2+y^2=a^2.$ 

#### ■ Coordenadas Cilíndricas

As coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  do ponto  $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  são definidas pelas relações:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad e \quad z = z,$$
 (3.23)

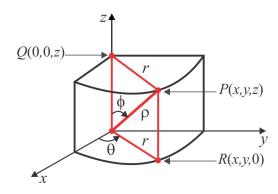


Figura 3.18: Coordenadas cilíndricas e esféricas.

sendo r e  $\theta$  as coordenadas polares do ponto R(x,y,0), projeção do ponto P no plano xy, como na Figura 3.18. De (3.23) deduzimos que

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

e, assim, a representação  $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  definida por  $T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  possui inversa  $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  definida por

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ z = z. \end{cases}$$

**Exemplo 3.57** Determinar as coordenadas cilíndricas do ponto P(3,3,7).

**Solução** Como x = y = 3 temos que  $r = 3\sqrt{2}$  e  $\theta = \pi/4$ . Portanto,  $(3\sqrt{2}, \pi/4, 7)$  são as coordenadas cilíndricas do ponto P(3, 3, 7).

**Exemplo 3.58** Em coordenadas cilíndricas, o cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  é representado pela equação

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = a^2 \Leftrightarrow r = a.$$

ou seja, a equação do cilindro é r = a.

#### Coordenadas Esféricas

Fixado um ponto  $P\left(x,y,z\right)$  no espaço  $\mathbb{R}^3$ , as coordenadas esféricas  $(\rho,\theta,\phi)$  do ponto P são definidas como segue: consideramos  $\rho=|OP|,\phi$  o ângulo entre o vetor  $\mathbf{OP}$  e o vetor unitário  $\mathbf{k}$  e  $\theta$  o ângulo polar associado à projeção de P no plano xy. A Figura 3.18 além de ilustrar graficamente as coordenadas esféricas do ponto P, nos dá as relações

$$r = |PQ|, \ x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ z = \rho\cos\phi \in |PQ| = \rho\sin\phi,$$

de onde resulta

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi \quad e \quad z = \rho \cos \phi.$$
 (3.24)

Das relações (3.24), obtemos

$$\frac{\partial \left(x,y,z\right)}{\partial \left(\rho,\theta,\phi\right)} = \left| \begin{array}{ccc} x_{\rho} & x_{\theta} & x_{\phi} \\ y_{\rho} & y_{\theta} & y_{\phi} \\ z_{\rho} & z_{\theta} & z_{\phi} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \cos\theta \sin\phi & -\rho \sin\theta \sin\phi & \rho \cos\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi & \rho \cos\theta \sin\phi & \rho \sin\theta \cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho \sin\phi \end{array} \right| = -\rho^{2} \sin\phi.$$

Assim, a representação  $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  definida pelo sistema (3.24), com  $\rho > 0$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$  e  $\phi \in (0, \pi]$ , tem inversa  $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  definida por

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \phi = \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2} / |z|\right) \quad \text{ou} \quad \phi = \arccos\left(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right). \end{cases}$$

**Exemplo 3.59** Determinar as coordenadas retangulares do ponto P que tem coordenadas esféricas  $(4, \pi/3, \pi/6)$ .

**Solução** Como  $\rho = 4$ ,  $\theta = \pi/3$  e  $\phi = \pi/6$ . temos que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 & \text{(I)} \\ y/x = \sqrt{3} & \text{(II)} \\ \sqrt{x^2 + y^2} / |z| = \sqrt{3}/3. & \text{(III)} \end{cases}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (III), obtemos

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 16 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}z^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = 12,$$

de onde segue  $z=2\sqrt{3}$  e  $x^2+y^2=4$ . Agora, elevando ao quadrado ambos os membros de (II), obtemos

$$\frac{y^2}{x^2} = 3 \Rightarrow 4 = x^2 + y^2 = x^2 + 3x^2 \Rightarrow x^2 = 1.$$

Logo, x = 1 e  $y = \sqrt{3}$  e o ponto P tem coordennadas  $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ .

**Exemplo 3.60** Em coordenadas esféricas, a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  é representado pela equação

$$\rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi = a^2 \Leftrightarrow \rho = a.$$

ou seja, a equação da esfera é  $\rho = a$ .

#### Exercícios & Complementos.

1. Em cada caso, determine o Jacobiano da transformação T

(a) 
$$T: \begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 4y \end{cases}$$
 (d)  $T: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$  (g)  $T: \begin{cases} u = 3x + 2y \\ v = x - y \end{cases}$ 

(b) 
$$T: \left\{ \begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{array} \right.$$
 (e)  $T: \left\{ \begin{array}{l} u=2x+y \\ v=2y-z \\ w=3x \end{array} \right.$  (h)  $T: \left\{ \begin{array}{l} x=\rho\cos\theta\sin\phi \\ y=\rho\sin\theta\sin\phi \\ z=\rho\cos\phi. \end{array} \right.$ 

(c) 
$$T: \begin{cases} u = \exp(x) - y \\ v = x + 5y \end{cases}$$
 (f)  $T: \begin{cases} u = x \cos y - z \\ v = x \sin y + 2z \end{cases}$  (i)  $T: \begin{cases} u = ax \\ v = by \\ w = cz \end{cases}$ 

- 2. Considere a transformação  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  definida por  $u = e^x + y^3$  e  $v = 3e^x 2y^3$ .
  - (a) Calcule o Jacobiano da transformação T e de sua inversa  $T^{-1}$ .

- (b) Calcule as derivadas  $\frac{\partial x}{\partial u}$  e  $\frac{\partial y}{\partial v}$  no ponto em que x=0 e y=1.
- 3. Considere a transformação  $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)),$$

com Jacobiano  $J(u, v, w) \neq 0$ . Mostre que

$$u_x = \frac{1}{J} \frac{\partial (y, z)}{\partial (v, w)}$$
 e  $u_y = -\frac{1}{J} \frac{\partial (x, z)}{\partial (v, w)}$ .

Deduza expressões análogas para as derivadas:  $u_z, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y$  e  $w_z$ .

- 4. Verifique que a mudança de coordenadas  $\rho = x + ct$  e  $\sigma = x ct$  transforma a equação de ondas  $u_{tt} c^2 u_{xx} = 0$  na equação simplificada  $u_{\rho\sigma} = 0$ .
- 5. Mostre que a mudança de coordenadas u = ax + by e v = cx + dy transforma o quadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1) em um paralelogramo de área

$$\left| \frac{\partial \left( u,v \right)}{\partial \left( x,y \right)} \right|.$$

- 6. Verifique que a mudança de coordenadas u = x/a e v = y/b transforma a elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  no círculo unitário de centro na origem do plano uv.
- 7. Defina uma mudança de coordenadas  $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  que aplica o elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

na esfera unitária.

- 8. Qual a imagem da circunferência  $x^2 + y^2 = a^2$  pela transformação T(x,y) = (4x,y)?
- 9. Qual a imagem da reta x = c pela transformação  $T(x, y) = (\exp(x)\cos y, \exp(x)\sin y)$ ?
- 10. Esboce a região  $\mathcal{R}_{xy}$  delimitada pelas parábolas  $x^2=y, \ x^2=2y, \ y^2=x$  e  $y^2=2x,$  e determine a imagem  $\mathcal{R}_{xy}$  pela mudança de coordenadas  $x^2=yu$  e  $y^2=xv$ .
- 11. Determine a imagem dos subconjuntos

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\} \text{ e } \mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$

pela mudança de coordenadas u = x + y e v = x - y.

12. Seja  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  uma função real com derivada contínua e positiva. Mostre que a transformação  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(u,v) = (f(u), -v + uf(u))$$

tem Jacobiano não nulo em qualquer ponto (u, v) sendo, portanto, invertível. Verifique que

$$T^{-1}(x,y) = (f^{-1}(x), -y + xf^{-1}(x)).$$

- 13. Em cada caso é dada uma mudança de coordenadas (u,v)=T(x,y). Descreva as retas u=k e v=k nos dois sistemas de coordenadas (plano xy e plano uv), para os valores: k=-2,-1,0,
  - 1, 2. Determine a transformação inversa  $T^{-1}$ .
- (d)  $T(x,y) = (x+1,2-y^3)$
- (a) T(x,y) = (3x,5y) (d) T(x,y) = (x+1,(b) T(x,y) = (x-y,2x+3y) (e)  $T(x,y) = (e^x,e^y)$
- (c)  $T(x,y) = (x^3, x+y)$
- (f)  $T(x,y) = (e^{2x}, e^{-3y}).$
- 14. Em cada caso encontre a imagem da curva  $\gamma$  pela mudança de coordenadas T(x,y).
  - (a)  $\gamma$  é o retângulo de vértices (0,0), (0,1), (2,1), (2,0) e T(x,y) = (3x,5y).
  - (b)  $\gamma \notin \text{ o c\'irculo } x^2 + y^2 = 1 \text{ e } T(x, y) = (3x, 5y).$
  - (c)  $\gamma$  é o triângulo de vértices (0,0), (3,6), (9,4) e T(x,y) = (y/2,x/3).
  - (d)  $\gamma$  é a reta 3x 2y = 4 e T(x, y) = (y/2, x/3).
  - (e)  $\gamma$  é a reta x + 2y = 1 e T(x, y) = (x y, 2x + 3y).
  - (f)  $\gamma$  é o quadrado de vértices (0,0), (1,-1), (2,0), (1,1) e T(x,y) = (5x+4y,2x-3y).
  - (g)  $\gamma$  é o círculo  $x^2 + y^2 = 1$  e T(x, y) = (5x + 4y, 2x 3y).
- 15. Seja  $\gamma$  a curva do plano xy descrita pela equação  $a\left(x^2+y^2\right)+bx+cy+d=0.$ 
  - (a) Considere a possibilidade de a ou d ser zero e identifique  $\gamma$  como sendo um círculo ou uma reta.
  - (b) Determine a imagem da curva  $\gamma$  pela transformação  $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

16. Complete a seguinte tabela de coordenadas:

Cartesianas: $(x, y, z)$	Cilíndricas:	$(r, \theta, z)$	Esféricas: $(\rho, \theta, \phi)$
$\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$			
			$(12, \pi/6, 3\pi/4)$
$(1,1,-\sqrt{2})$			

- 17. Identifique a superfície descrita em coordenadas cilíndricas por:
  - (a) r = 4 (c) z = 2r (e)  $r^2 + z^2 = 16$

- (b)  $\theta = \pi/4$  (d)  $3r^2 + z^2 = 9$  (f)  $r \sec \theta = 4$ .
- 18. Identifique a região do  $\mathbb{R}^3$  descrita em coordenadas esféricas por:
  - (a)  $\rho = 6\cos\theta \sin\phi$  (e)  $\phi = \pi/4$
- (i)  $\tan \theta = 4$
- (b)  $\rho = 5 \csc \phi$  (f)  $\rho^2 3\rho = 0$  (j)  $\rho = a$

- (c)  $\theta = \pi/6$
- (g)  $\rho \cos \theta \sin \phi = 1$  (k)  $\rho^2 3\rho + 2 \le 0$

- (d)  $\cos \phi = 4$
- (h)  $\rho = 2\cos\phi$  (l)  $\rho = \csc\phi\cot\phi$ .
- 19. As superfícies dadas abaixo estão representadas por suas equações cartesianas. Passe as equações para coordenadas cilíndricas e esféricas.
  - (a) Esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  (d) Hiperboloide:  $x^2 + y^2 z^2 = 1$
- (b) Cilindro:  $x^2 + y^2 = 4$ . (e) Plano: 3x + y 4z = 0(c) Cone:  $x^2 + y^2 4z^2 = 0$  (f) Paraboloide:  $4z = x^2 + y^2$

20. Sejam x = x(u, v) e y = y(u, v) definidas implicitamente pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 u = v \\ x + y^2 = u \end{cases}$$

$$(3.25)$$

- (a) Expresse as derivadas  $x_u$  e  $y_v$  em termos de x, y, u e v.
- (b) Determine um par de funções x = x(u, v) e y = y(u, v) definidas implicitamente pelo sistema (3.25)

#### **RESPOSTAS & SUGESTÕES**

#### SEÇÃO 3.1 MÁXIMOS & MÍNIMOS

1. Na tabela abaixo apresentamos os pontos críticos com a seguinte classificação: S (sela), mL (mínimo local) e ML (máximo local). Em alguns casos a existência ou não de extremos absolutos pode ser investigada por observação do limite da função.

	pontos críticos	natureza	mA	MA
(a)	(0,0)	S	não	não
(b)	$(0,0),(-1,2) \in (4,-8)$	S, mL e mL	$\sin$	não
(c)	(0,0), (1,0), (0,1) e (1/3,1/3)	S, S, S e mL	não	não
(d)	(0,0)	$\mathrm{mL}$	$\sin$	não
(e)	(-3/2, -1/2)	$\mathrm{mL}$	$\sin$	não
(f)	$(-2,\sqrt{3}) \ \mathrm{e} \ (-2,-\sqrt{3})$	mL e S	não	não
(g)	(0,0)	ML	não	$\sin$
(h)	$(\sqrt{3},1), (\sqrt{3},-1), (-\sqrt{3},1), (-\sqrt{3},-1)$	mL, S, S e ML	não	não
(i)	(1/2, 1/3)	ML	não	$\sin$
(j)	infinitos $(x,x)$	o teste falha	não	não
(k)	(2,1) e(-8,2)	mL e ML	não	não
(1)	(0,0)	o teste falha	não	não

2. O ponto P=(1/2,1/3) é um ponto de máximo absoluto da função de  $z=f\left(x,y\right)$  em D. A função

$$g(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$$

é contínua em D, mas não possui máximo nem mínimo.

3. Cada uma das funções é contínua e está definida em um conjunto compacto. Assim, pelo Teorema de Weierstrass, cada função tem ao menos um ponto de máximo e um ponto de mínimo absolutos.

	pontos de máximo	pontos de mínimo
(a)	$(1/2, \sqrt{2}/2)$ e $(-1/2, -\sqrt{2}/2)$	$\left(-1/2, \sqrt{2}/2\right) e \left(1/2, -\sqrt{2}/2\right)$
(b)	(1, 1)	(-1, -1)
(c)	(1,0)	(3,0)
(d)	$(-1,\pm\pi)$	$(1,\pm\pi)$
(e)	(-1,0)	(1/2,0)
(f)	(0,-1) e $(0,2)$	(1,1)

4. Já vimos que a distância da origem a um ponto P = (x, y, z) dessa curva é dada por

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Portanto, devemos maximizar a função  $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ , ou seja,

$$g(t) = f(t, t, t) = 1 + [\operatorname{sen}(t/2)]^{2}$$
.

Como

$$g'(t) = 2 \operatorname{sen}(t/2) \cos(t/2) = \operatorname{sen} t = 0$$

temos que  $t=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ , são os pontos críticos de g. Logo,  $g''(t)=\cos t<0$  em  $t=\pi+2m\pi,$   $m\in\mathbb{Z}$ . Portanto, P=(-1,0,1) e Q=(-1,0,-1) são os pontos desejados.

- 5. Vamos fazer um esboço da solução, por isso, tente completar!
  - (a) Note que se  $z = f(x, y) = \exp(x^2 y^2)$ , então  $f_x = 2x \exp(x^2 y^2)$  e  $f_x = -2y \exp(x^2 y^2)$ . Logo,  $\nabla f = (0, 0)$  se, e somente se, x = 0 e y = 0. Assim, (0, 0) é o único ponto crítico de f e f(0, 0) = 1. Agora, se fixarmos y = 0 e  $x \neq 0$ , então  $g(x) = f(x, 0) = \exp(x^2)$ , com

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0,$$

isto é, g é estritamente crescente. Neste caso, g não tem máximo e nem mínimo absoluto. Se fixarmos x = 0 e  $y \neq 0$ , então  $h(x) = f(0, y) = \exp(-y^2)$ , com

$$\lim_{y \to +\infty} h(y) = 0 \text{ e } \lim_{y \to -\infty} h(y) = \infty,$$

isto é, h é estritamente decrescente. Neste caso, não tem máximo e nem mínimo absoluto. Portanto, f não tem máximo e nem mínimo absoluto.

- (b) Não tem mínimo absoluto. A origem é um ponto de máximo, com valor máximo.
- (c) Não tem máximo absoluto. Os pontos

$$P_k\left(\sqrt{2}, k\pi + \pi/4\right) \in Q_k\left(-\sqrt{2}, k\pi + 5\pi/4\right), \ k \in \mathbb{Z}$$

são pontos de mínimo absoluto, com o valor mínimo igual a -2.

6. Como  $f_x = 2x(1-y)^3$  e  $f_y = -3x^2(1-y)^2 + 2y$  temos que  $\nabla f(x,y) = (0,0)$  se, e somente se,  $2x(1-y)^3 = 0$  e  $-3x^2(1-y)^2 + 2y = 0$ . Logo, x = 0 ou y = 1. Se x = 0, então y = 0. Se y = 1, então 2 = 0, o que é impossível. Assim, (0,0) é o único ponto crítico de f e f(0,0) = 0. Note que  $f_{xx}(x,y) = 2(1-y)^3$ ,  $f_{xy}(x,y) = -6x(1-y)^2$  e  $f_{yy}(x,y) = 6x^2(1-y) + 2$ . Daí, se P(0,0), então

$$B^2 - AC = 0^2 - 2 \cdot 2 = -4 < 0 \text{ e } A = 2 > 0.$$

Assim, P(0,0) é um ponto de mínimo local de f. Agora, veja o item (a) do Exercício 5.

7.  $-\frac{1}{4}^{\circ}C$  e  $\frac{3}{2}^{\circ}C$  são os valores de menor e maior temperatura na placa, nos pontos (0,1/2) e  $(\pm\sqrt{3}/2,-1/2)$ , respectivamente.

1.	Usando o	Método	dos	Multiplicadores	de	Lagrange.	obtemos
т.	Country C	moodo	CLOD	TIT GIT OF THE GOLD OF	ac	Lugiungo,	ODUCITIOD

	pontos de máximo	pontos de mínimo
(a)	(3/4, 4/5)	(-3/4-,4/5)
(b)	$(\pi/8, -\pi/8)$	$(5\pi/8, 3\pi/8)$
(c)	não há	(4,4)
(d)	$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	pontos da curva
(e)	$(\pm 1,0) e (0,\pm 1)$	$\left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$
(f)	$\left(\sqrt{2/3},\sqrt{2/3},\sqrt{2/3}\right)$	P(x, y, z) tal que $x = 0$ , ou $y = 0$ ou $z = 0$
(g)	$\left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$	$(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$
(h)	$\left(\pm\sqrt{\frac{6}{11}},\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}},\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$	pontos do plano $x + y + z = 0$
(i)	não há	(6/19, 1/19)
(j)	$(\pm 1, \pm 2)$	não há.

2. d = 1 u c.

3. 
$$P = (1/4, 1/4)$$
 e  $Q = (-1/4, -1/4)$ ;  $d = \sqrt{2}/4$  u c.

4. 
$$P = (0, \frac{1}{\sqrt{68}}, -\frac{4}{\sqrt{68}})$$
 e  $Q = (0, -\frac{1}{\sqrt{68}}, \frac{4}{\sqrt{68}})$ ;  $d = 0.25$  u c.

5. 
$$x = y = z = \frac{k}{3}$$
.

6. 
$$P = (1, -2, 5)$$
.

7. 
$$P = (\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}); d = \sqrt{10}(\sqrt{5} - 1)$$
 u c.

8. 
$$f(\pi/3, \pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$
.

9. Máximo no ponto M=(1,0) e mínimo no ponto m=(1/4,1/2).

10. O maior valor da expressão  $x\left(y+z\right)$  é 1 e ocorre quando  $x=\frac{\sqrt{2}}{2},\,y=\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $z=\sqrt{2};$  ou  $x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\,y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $z=-\sqrt{2}.$ 

11. 
$$P = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}).$$

12. 
$$P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (1, -1, -1), P_3 = (-1, 1, 1) \in P_4 = (-1, -1, -1).$$

13. Já vimos que a distância da origem a um ponto P=(x,y) dessa hipérbole é dada por  $d(O,P)=\sqrt{x^2+y^2}$ . Portanto, devemos minimizar a função  $f(x,y)=x^2+y^2$  sujeita à restrição  $g(x,y)=x^2+8xy+7y^2-225$ . É fácil verificar que  $\nabla f(x,y)=(2x,2y)$  e  $\nabla g(x,y)=(2x+8y,8x+14y)$ . Logo,  $\nabla g(x,y)=(0,0)$  se, e somente se, x=y=0. Como  $g(0,0)\neq 0$  temos que existe um  $\lambda\in\mathbb{R}$  tal que

$$\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = (0,0),$$

com (x,y) satisfazendo g(x,y)=0. Agora, vamos resolver o sistema para obtermos os pontos críticos de f.

$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x + 8y) = 0\\ 2y + \lambda(8x + 14y) = 0\\ x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0 \end{cases}$$

As duas primeiras equações desse sistema são equivalentes a:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + 4\lambda y = 0\\ 4\lambda x + (1+7\lambda)y = 0 \end{cases}$$

e se  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = -1$ , então x = y = 0 é uma solução do sistema, o que é impossível, pois  $g(0,0) \neq 0$ . Logo,  $\lambda \neq 0$  e  $\lambda \neq -1$ . Assim,

$$x = -\frac{4\lambda}{1+\lambda}y \Rightarrow \left(-\frac{16\lambda}{1+\lambda} + 1 + 7\lambda\right)y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{7} \text{ ou } \lambda = 1,$$

pois  $y \neq 0$ . Se  $\lambda = \frac{1}{7}$ , então y = -2x. Logo, a equação  $x^2 - 16x^2 + 28x^2 - 225 = 0$  tem soluções  $x = \pm \frac{15\sqrt{13}}{13}$ . Portanto,

$$\left(-\frac{15\sqrt{13}}{13}, \frac{30\sqrt{13}}{13}\right)$$
 e  $\left(\frac{15\sqrt{13}}{13}, -\frac{30\sqrt{13}}{13}\right)$ 

são os pontos mais próximos da origem, pois se  $\lambda=1$ , então x=-2y. Logo, a equação  $4y^2-16y^2+7y^2-225=0$  não tem solução. Portanto,  $d(O,P)=\frac{15\sqrt{65}}{13}$  u c.

14. Como  $f_x(x,y) = y^2 + 2 > 0$ , em todos os pontos do interior de D, temos, pelo Teorema de Weierstrass, que os pontos de máximos e mínimos de f ocorrem na fronteira de D. Sejam  $(1,\theta)$  as coordenadas polares do ponto  $(x,y) \in X$ . Então  $x = \cos \theta$  e  $y = \sin \theta$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Assim,  $P = (\cos \theta, \sin \theta)$  percorre toda a fronteira de X. Como

$$g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta \sin^2 \theta + 2\cos \theta + \sin^4 \theta + 1$$

temos que

$$g'(\theta) = -\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta - 2\sin\theta + 4\cos\theta\sin^3\theta = \sin^3\theta(4\cos\theta - 3) = 0$$

se, e somente se,  $\theta=0,\,\theta=\pi,\,\cos\theta=\frac{3}{4}$  e sen  $\theta=\pm\frac{\sqrt{17}}{6}$  Assim,

$$P = (-1,0), \ \ Q = (1,0), \ \ R = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \ \ \text{e} \ \ S = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

É fácil verificar que

$$f(P) = -1$$
,  $f(Q) = 3$  e  $f(R) = f(S) = \frac{823}{256} > 3$ ,

ou seja, P é ponto de mínimo e R, S pontos de máximos.

Outra maneira de resolver o problema é via Multiplicadores de Lagrange. Seja  $g(x,y)=x^2+y^2-1$ . Então é fácil verificar que  $\nabla f(x,y)=(y^2+2,2xy+4y^3)$  e  $\nabla g(x,y)=(2x,2y)$ . Logo,  $\nabla g(x,y)=(0,0)$  se, e somente se, x=y=0. Como  $g(0,0)\neq 0$  temos que o ponto (0,0) não está na curva. Assim, existe um  $\lambda\in\mathbb{R}$  tal que

$$\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = (0,0),$$

com (x,y) satisfazendo g(x,y)=0. Logo, devemos resolver o sistema para obtermos os pontos críticos de f.

$$\begin{cases} y^2 + 2 + 2\lambda x = 0\\ 2xy + 4y^3 + 2\lambda y = 0\\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Note que a segunda equação

$$xy + 2y^3 + \lambda y = 0 \Leftrightarrow y(x + 2y^2 + \lambda) = 0.$$

Logo, temos duas possibilidades: se y=0, obtemos  $x=\pm 1$ . Se  $y\neq 0$ , então

$$x + 2y^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -x - 2y^2$$
.

Substituindo na primeira equação e usando a terceira, obtemos

$$y^{2} + 2 - 2x^{2} - 4xy^{2} = 0 \Rightarrow 1 - x^{2} + 2 - 2x^{2} - 4x(1 - x^{2}) = 0 \Rightarrow 4x^{3} - 3x^{2} - 4x + 3 = 0.$$

Assim,  $x = \frac{3}{4}$ , pois  $x = \pm 1 \Rightarrow y = 0$ . Portanto, os pontos críticos são:

$$P = (-1,0), \ Q = (1,0), \ R = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \ e \ S = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

É fácil verificar que

$$f(P) = -1$$
,  $f(Q) = 3$  e  $f(R) = f(S) = \frac{823}{256} > 3$ ,

ou seja, P é ponto de mínimo e R, S pontos de máximos.

- 15.  $d = \frac{1427}{168}$  u c.
- 16. Máximos  $(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$  e mínimos  $(\pm1, \pm1)$ .
- 17. Em um ponto P(x, y, z) em que alguma coordenada é 0, a temperatura é T(P) = 0 e esta, seguramente, não é a temperatura máxima nem mínima. De fato,

$$T(1,1,\sqrt{2}) = 100\sqrt{2} > 0$$
  $e$   $T(1,1,-\sqrt{2}) = -100\sqrt{2} < 0$ .

A temperatura máxima é 200°C, e ocorre nos pontos  $(\pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm 1)$ ; a temperatura mínima é -200°C e ocorre nos pontos  $(-1, \pm \sqrt{2}, 1)$  e  $(1, \pm \sqrt{2}, -1)$ 

- 18. x = 4 m, y = 4 m e z = 2 m.
- 19. Para um cilindro de raio r e altura h, devemos maximizar a área lateral  $f=2\pi rh$ , sujeita ao vínculo  $g=r^2+(h/2)^2-a^2=0$ . Encontramos  $r=a/\sqrt{2}$  e  $h=a\sqrt{2}$ .
- 20. Semelhante ao Exemplo 3.17.
- 21. V = (3, 4, 12).
- 22. Base quadrada de lado  $\sqrt[3]{4}$  m e altura  $2\sqrt[3]{4}$  m
- 23. O retângulo de lados

$$x = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
 e  $y = \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

#### SEÇÃO 3.3 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

1. (a) 
$$y' = -3$$
 e  $y'' = -62$ ; (b)  $y' = -\frac{2}{3}$  e  $y'' = \frac{23}{27}$ ; (c)  $y' = -1$  e  $y'' = -3$ ; (d)  $y' = -1$  e  $y'' = 2$ .

2. (a) 
$$x' = \frac{dx}{dy} = 0$$
; (b)  $x' = \frac{dx}{dy} = 0$ .

- 3. (a)  $z_x = -x/z$  e  $z_y = -y/z$ ; (b)  $z_x = (y + 2xy + y^2)/2z$  e  $z_y = (x + 2xy + x^2)/2z$ ; (c)  $z_x = z^2/(\sin z + 3y 2xz)$  e  $z_y = 3z/(2xz 3y \sin z)$ .
- 4.  $u = 2 \operatorname{sen}(xy) x^2 y^2 e v = -3 \operatorname{sen}(xy) + x^2 + y^2$
- 5. Derivando implicitamente a equação PV kT = 0, em que P é uma função de V, obtemos

$$\frac{\partial P}{\partial V}V + P = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{P}{V}.$$

De modo inteiramente análogo, obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{k}{P} \;\; \mathrm{e} \;\; \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{k}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{P}{V}\cdot\frac{k}{P}\cdot\frac{V}{k} = -1.$$

6. Semelhante ao Exercício anterior com a equação F(x, y, z) = 0, em que x é uma função de y, obtemos

$$F_x \frac{\partial x}{\partial y} + F_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}.$$

7. Se x = f(u, v) e y = g(u, v), com u = h(z, w) e v = k(z, w), então usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{\partial (x,y)}{\partial (z,w)} = \begin{vmatrix} x_z & x_w \\ y_z & y_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u u_z + x_v v_z & x_u u_w + x_v v_w \\ y_u u_z + y_v v_z & x_u u_w + x_v v_w \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_z & u_w \\ v_z & v_w \end{vmatrix} = \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \cdot \frac{\partial (u,v)}{\partial (z,w)}.$$

Em particular, pondo x = z e y = w, obtemos

$$\frac{\partial \left( x,y \right)}{\partial \left( u,v \right)} \cdot \frac{\partial \left( u,v \right)}{\partial \left( x,y \right)} = \frac{\partial \left( x,y \right)}{\partial \left( x,y \right)} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 1.$$

8. Sejam  $F(x, y, u, v) = u^3 - 2u - v - 3$  e  $G(x, y, u, v) = x^2 + y^2 - u - 4$ . Então use as relações

$$v_x = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (v, y)} \text{ e } v_y = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (x, v)}$$

para determinar que  $v_x = 4$  e  $v_y = 2$ .

9. Semelhante ao Exercício anterior.

10. Sejam  $F(x, y, s, t) = x^2 - xt - y^2t^2 + 2s + 2$  e  $G(x, y, s, t) = y^2 - 2yt + xt^2 - ys + s^2 - 6$ . Então  $J = \frac{\partial (F, G)}{\partial (x, y)} = -9.$ 

Agora, usando as fórmulas de derivação encontramos

$$x_s = \frac{2}{3}, \ x_t = -\frac{2}{3}, \ y_s = \frac{4}{9} \ e \ y_t = -\frac{14}{9}.$$

#### SEÇÃO 3.4 TRANSFORMAÇÕES

- 1. (a) J = 9; (b) J = r; (c)  $J = 5 \exp(x) + 1$ ; (d) J = r; (e) J = -3; (f)  $J = 2(x^2 2y)\cos y 2(2x^2 + y)\sin y$ ; (g) J = -5, (h)  $J = \rho^2 \sin \phi$ , (i) J = abc.
- 2. (a)  $J(T) = -15 \exp(x) y^2 J$  e  $J(T^{-1}) = -\frac{1}{15 \exp(x) y^2}$ , nos pontos com  $y \neq 0$ ; (b) Em x = 0 e y = 1, obtemos J = -15. Portanto,

$$x_u = \frac{1}{J}v_y = \frac{6}{15} \text{ e } y_v = \frac{1}{J}u_x = -\frac{1}{15}.$$

- 3. Confira a prova do Teorema 3.32.
- 4. Note que  $u = f(\rho, \sigma), \rho = g(x, t)$  e  $\sigma = h(x, t)$ . Assim, pela Regra da Cadeia, obtemos

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad e \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

e como

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 1$$
,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = c$ ,  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -c$ 

resulta  $u_x = u_\rho + u_\sigma$  e  $u_t = c(u_\rho - u_\sigma)$ . Logo,

$$u_{xx} = \partial_x (u_\rho) + \partial_x (u_\sigma) = u_{\rho\rho} \rho_x + u_{\rho\sigma} \sigma_x + u_{\sigma\rho} \rho_x + u_{\sigma\sigma} \sigma_x = u_{\rho\rho} + 2u_{\rho\sigma} + u_{\sigma\sigma} \sigma_x$$

e

$$u_{tt} = c \left[ \partial_t \left( u_\rho \right) - \partial_t \left( u_\sigma \right) \right] = c \left( u_{\rho\rho} \rho_t + u_{\rho\sigma} \sigma_t - u_{\sigma\rho} \rho_t + u_{\sigma\sigma} \sigma_t \right) = c^2 \left( u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} \right).$$

Portanto,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 (u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma}) - c^2 (u_{\rho\rho} + 2u_{\rho\sigma} + u_{\sigma\sigma}) = -2c^2 u_{\rho\sigma} \Rightarrow u_{\rho\sigma} = 0.$$

5. Note que o vetor  $\mathbf{z}_1 = (1,0)$  no plano xy é transformado no vetor  $\mathbf{w}_1 = (a,c)$  no plano uv, e o vetor  $\mathbf{z}_2 = (0,1)$  no plano xy é transformado no vetor  $\mathbf{w}_2 = (b,d)$  no plano uv. Já vimos que a área do paralelogramo determinada pelos vetores  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  é dada por

$$|ad - bc| = |\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2| = |\mathbf{w}_1| |\mathbf{w}_2| \operatorname{sen} \theta = |\mathbf{w}_1| (|\mathbf{w}_2| \operatorname{sen} \theta) = b \cdot h,$$

com  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ . Por outro lado,

$$\frac{\partial \left(u,v
ight)}{\partial \left(x,y
ight)} = \left|egin{array}{cc} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{array}
ight| = \left|egin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}
ight| = ad - bc.$$

Portanto,

$$\left| \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \right| = |ad - bc| = |\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|.$$

6. Como x = au e y = bv temos que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(au)^2}{a^2} + \frac{(bv)^2}{b^2} = u^2 + v^2 \Rightarrow u^2 + v^2 = 1.$$

7. A mudança de coordenadas é u = x/a, v = y/b e w = z/c.

- 8. Note que se u = 4x e v = y, então a imagem é a elipse  $u^2 + 16v^2 = 16a^2$ .
- 9. Note que se  $u = \exp(x)\cos y$  e  $v = \exp(x)\sin y$ , então a imagem da reta x = c é o círculo  $u^2 + v^2 = \exp(2c)$ .
- 10. A imagem da região é o quadrado de vértices (1/2, 1/2), (1/2, 1), (1, 1/2) e (1, 1).
- 11. A imagem da região  $\mathcal{R}$  é o quadrado  $[-1,1] \times [-1,1]$  no plano uv. Como  $x = \frac{1}{2}(u+v)$  e  $y = \frac{1}{2}(u-v)$ , temos que

$$xy = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(u+v)\right)\left(\frac{1}{2}(u-v)\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{4} = 1,$$

e a imagem da hipérbole  $\mathcal{H}$  é a hipérbole  $\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2 = 1$  do plano uv.

12. Note que x = f(u) e y = -v + uf(u). Logo,

$$J(T) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(u) & 0 \\ f(u) + uf'(u) & -1 \end{vmatrix} = -f'(u) \neq 0.$$

pois f'(u) > 0, para todo u. Como f é contínua e f'(u) > 0 temos, pelo Teorema da Função Inversa, que existe uma função u = g(x),  $g = f^{-1}$  tal que f(g(x)) = x. Portanto,  $u = f^{-1}(x)$  e  $v = -y + xf^{-1}(x)$ , ou seja,

$$T^{-1}(x,y) = (f^{-1}(x), -y + xf^{-1}(x)).$$

13. Vamos fazer apenas o item (a). Como u=3x e v=5y temos que  $x=\frac{k}{3}$  e  $y=\frac{k}{5}$  são retas no plano xy paralelas aos eixos dos y e dos x, respectivamente. Faça um esboço. Neste caso,

$$T^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{3}, \frac{v}{5}\right).$$

- 14. A imagem em cada caso é:
  - (a) O retângulo de vértices (0,0), (6,0), (6,5) e (0,5).
  - (b) A elipse  $25x^2 + 9y^2 = 225$ .
  - (c) O triângulo de vértices (0,0), (3,1) e (2,3).
  - (d) A reta 4u 9v = 1.
  - (e) A reta u 3v + 5 = 0.
  - (f) O paralelogramo de vértices (0,0), (1,5), (10,4) e (9,-1).
  - (g) A elipse  $13u^2 + 41v^2 + 4uv = 529$ .
- 15. (a) Representa um círculo se  $a \neq 0$  e  $b^2 + c^2 4ad > 0$ ; representa uma reta se a = 0 e  $b \neq 0$  ou  $c \neq 0$ . (b) Se

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
 e  $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ ,

então a imagem de  $\gamma$  por esta transformação é a curva do plano uv desrita por

$$d(u^{2} + v^{2}) + bu - cv + a = 0,$$

que representa um círculo, se  $d \neq 0$ , ou uma reta se d = 0.

#### 16. A tabela completa é:

Cartesianas: $(x, y, z)$	Cilíndricas: $(r, \theta, z)$	Esféricas: $(\rho, \theta, \phi)$
$\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$	$(2,\pi/4,2\sqrt{3})$	$(4, \pi/4, \pi/6)$
$(3\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$	$(6\sqrt{2}, \pi/6, -6\sqrt{2})$	$(12, \pi/6, 3\pi/4)$
$(1,1,-\sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \pi/4, -\sqrt{2})$	$(2,\pi/4,3\pi/4)$

- 17. (a) o cilindro  $x^2 + y^2 = 16$ ; (b) o par de planos (x y)(x + y) = 0; (c) a folha superior do cone  $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ ; (d) o elipsoide  $9x^2 + 9y^2 + 3z^2 = 27$ ; (e) a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ; (f) o cilindro circular reto  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ .
- 18. (a) a esfera de centro (3,0,0) e raio 3; (b) o cilindro circular reto de raio 5; (c) os planos  $x \pm \sqrt{3}y = 0$ ; (d) o plano z = 4; (e) o cone  $x^2 + y^2 = z^2$ ; (f) a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , juntamente com a origem; (g) o plano x=1; (h) a esfera  $x^2+y^2+(z-1)^2=9$ ; (i) um par de palnos; (j) a esfera de centro na origem e raio a; (k) a região entre as esferas de raios 1 e 2 centradas na origem; (1) o paraboloide  $z = x^2 + y^2$ .
- 19. As identificações são:

(a) 
$$r^2 + z^2 = 4 \text{ e } \rho = 2$$
 (d)  $r^2 - z^2 = 1 \text{ e } \rho^2 \cos 2\phi = 1$ 

(b) 
$$r = 2 e^{2} \sin^{2} \phi = 4$$
 (e)  $4z = r(3\cos\theta + \sin\theta) e(3\cos\theta + \sin\theta) \operatorname{tg} \phi = 1$   
(c)  $r^{2} - 4z^{2} = 0 e \operatorname{tg} \phi = 2$  (f)  $4z = r^{2} e^{2} - 4 \cot \phi \operatorname{cosec} \phi$ 

(c) 
$$r^2 - 4z^2 = 0$$
 e tg  $\phi = 2$  (f)  $4z = r^2$  e  $\rho = 4 \cot \phi \csc \phi$ 

20. Sejam 
$$F(x, y, u, v) = x^2 + y^2u - v = 0$$
,  $G(x, y, u, v) = x + y^2 - u = 0$  e

$$J = \frac{\partial \left( F, G \right)}{\partial \left( x, y \right)}.$$

(a) Agora, usando as fórmulas de derivação implícita, obtemos

$$x_u = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (u, y)}$$
 e  $y_v = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (x, v)}$ .

(b) Resolvendo o sistema encontramos, por exemplo,

$$x = \frac{1}{2} \left( u - \sqrt{4v - 3u^2} \right)$$
 e  $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{u + \sqrt{4v - 3u^2}}$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, G., Cálculo, Vol. 3, Editora LTC, 7<sup>a</sup> Edição, 2006.
- [2] Boulos, P. & Abud, Z., Cálculo Diferencial e Integral, Vol. 2, Editora Makron Books, 2000.
- [3] Courant, R. & John, F. Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II, Springer-Verlag, 1989.
- [4] Guidorizzi, H. L., Um Curso de Cálculo, Vol. 3, Editora LTC, 5<sup>a</sup> Edição, 2002.
- [5] Munem M. A. & Foulis D. J., Cálculo, Vol. 2, Editora Guanabara Dois, 1983.
- [6] Protter, M. H. & Morrey, C. B., Modern Mathematical Analysis, Editora Addison-Wesley, 1964.
- [7] Spiegel, M. R., Cálculo Avançado, Editora MacGraw-Hill, 1976.
- [8] Swokowski, E., Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2, Editora Makron Books, 2ª Edição, 1983.
- [9] Thomas, G. B., Cálculo, Vol. 2, Editora Addison-Wesley, 10<sup>a</sup> Edição, 2003.
- [10] Williamson, R. E., Crowell, R. H. & Trotter, H. F., Calculus of Vector Functions, Editora Prentice-Hall, 3<sup>a</sup> Edição, 1972.

# Índice Remissivo

$\mathbf{A}$	limitado, 5		
Ângulos diretores, 176	Coordenadas		
Área	polares, 21, 114		
de uma superfície, 238	cilíndricas, 114		
elementar, 130, 238	esféricas, 115		
em coordenadas cilíndricas, 244	Curva		
em coordenadas esféricas, 244	de nível, 10		
infinitesimal, 130	integral, 188		
Aproximação linear, 40	D		
$\mathbf{C}$	Densidade		
Campo	de circulação, <mark>275</mark>		
conservativo, 174	de corrente elétrica, 263		
de forças, 170	linear, 171		
escalar, 9	superficial, 141		
gradiente, 174	volumétrica, 163		
gravitacional, 174	Derivada		
quadradoinverso, 174	de Newton-Leibniz, 32		
radial, 173	directional, 57		
tangencial, 173	parcial, 33		
Centro de massa	parcial de ordem superior, 35		
de uma placa, $142$	parcial mista, 36		
de uma superfície 252	Descontinuidade		
Circulação, 218, 266	essencial, 22		
Classe de equivalência, 236	removível, $22$		
Compenente tangencial, 198	Distribuição de carga elétrica, 264, 265		
Componentes	Divergente, 177		
de um campo vetorial, 172	Domínio 6		
Conjunto de nível, 10	admissível, 207		
Conjunto	estrelado, $209$		
aberto, 3	${f E}$		
compacto, 5	Elemento linear, 254		
conexo, 6	Energia		
de pontos, 1	cinética, 142, 170		
fechado, 4	potencial, 206		
fronteira de um, $4$	Equação		

de conservação da carga elétrica, 263	Green, ver Fórmula de Green
de conservação da massa, 263	,
de continudade, 178	I
de Laplace, 40	Identidade de Green, 220
de Poisson para o potencial, 265	Infinitésimos, 46
de transmissão de calor, 39	Integral de linha
fundamental da eletrostática, 264	independente do caminho, 201
Equações de Cauchy-Riemann, 40	Integral dupla, 129, 130
Extremos	imprópria, <mark>144</mark>
condicionados, 92	convergente, 144
vinculados, 92	divergente, 144
,	Integral
$\mathbf{F}$	de Riemann, 129
Fluxo, 255, 258	de superfície, 247
Forma Diferencial, 172, 207	iterada, 131
de segunda ordem, $253$	repetida, 131
exata, 207	simples, 128
total, 207	Intensidade de corrente elétrica, 263
Fórmula de Gauss	${f J}$
bidimensional, 217	Jacobiano, 107
tridimensional, 258	Jacobiano, 107
Fórmula de Green, 212	${f L}$
Fórmula de Stokes	Laplaciano, 177
bidimensional, 219	Lei de Coulomb, 264
tridimensional, 268	Lema Fundamental, 45
Fórmula da Divergência, $ver$ Fórmula de Gauss	Limite, 14
Função, 8	iterados, 18
valor de uma, $9$	propriedades básicas
antissimétrica, 35	confronto, 15
contínua, 21	linearidade, $15$
derivável, 32	produto, $15$
diferenciável, 41	quociente, 15
diferencial de uma, 46	Linhas de um campo, 262
elementar, 23	NA
gráfico de uma, $9$	M
homogênea, 56	Massa
imagem de uma, 9	elementar, 142
incremento da, 46	de uma superfície, 252
$simétrica, \frac{35}{}$	Matriz
valor máximo de uma, 78	autovalores de uma, 85
valor mínimo de uma, 79	Jacobiana, 49, 177
,	Hessiana, 84, 87
$\mathbf{G}$	polinômio característico de uma, 85
Gauss, ver Fórmula de Gauss	simétrica, 85

Máximo	de acumulação, $6$
absoluto, 78	de fronteira, 2, 4
global, 78	de sela, 82
local, 78	estacionário, 81
relativo, 78	exterior, 2
Método	extremo, 79
de Indução Finita, <mark>131</mark>	interior, 2
dos Multiplicadores de Lagrange, $93$	isolado, 6
Mínimo	Potencial eletrostático 264
absoluto, 79	Primeira Forma Fundamental, $255$
global, 79	Produto Vetorial Fundamental, 229
local, 79	$\mathbf{R}$
relativo, 79	
Momento, 142	Região, 6
Momento de inércia	simplesmente conexa, 6
de uma placa, 142	horizontal simples, 134
de uma superfície, 252	vertical simples, 134
polar, 142	Regra da Cadeia
Mudança de coordenadas, 111	1º caso, 52
Mudança de Variável	2º caso, 53
em integral dupla, 147	3° caso, 53
em integral tripla, 160	diagrama em árvore, 54
Multiplicador de Lagrange, 93	Regra de Cramer, 108
0	Regras de derivação, 65
0	Reta normal
Operador	equação vetorial, 62
divergente, 177	Reta tangente
gradiente, 176	no espaço, 63
rotacional, 178	no plano, $32$
Ordem de integração,	${f S}$
na integral dupla, 131	Somas de Riemann, 129
invertendo a ordem, 138	Superfície
na integral tripla, 158	de revolução, <mark>232</mark>
P	meridianos de uma, 233
Paralelepípedo, 157	paralelos de uma, 233
Parametrização	de nível, 10
da esfera, 231	fechada, 237
do cilindro, 230, 231	forma cartesiana explicita, 227
do cone, $\frac{231}{}$	forma cartesiana implícita, 227
de uma superfície de revolução, <mark>232</mark>	forma paramétrica, 228
Plano tangente, 41, 61, 229	orientada, 234
Ponto	parametrizada, 228
crítico, 81	parcialmente regular, 232

290 ÍNDICE REMISSIVO

```
regular por partes, 232
    regular, 229
    simples, 237
Stokes, ver Fórmula de Stokes
Superfícies equivalentes, 236
\mathbf{T}
Taxa instantânea de variação, 56
Teorema da Divergência, 258
Teorema da Média
    para integral dupla, 130
    para integral tripla, 262
Teorema de Gauss, 258
Teorema de Green, 213
    Formulação Vetorial, 219
Teorema de Stokes, 269
Teorema
    da Função Implícita 1, 104
    da Função Implícita 2, 106
    da Função Implícita 3, 107
    da Função Inversa, 105, 113
    de Fubini, 131, 134
    de Weierstrass, 88
    do valor médio - TVM, 45
    Fundamental do Cálculo, 54
Teste
    da Segunda Derivada, 83, 86
    do Hessiano, 83, 84
Toro de revolução, 237
Trabalho, 170
Trajetórias ortogonais, 112
Transformações, 110
Vetor gradiente, 61
Vizinhança
    circular, 2
    retangular, 2
Volume elementar, 134, 157
    em coordenadas cilíndricas, 161
    em coordenadas esféricas, 162
```