

Questão 1 [20%] Considere a função $f(x, y) = \sqrt{y^2 - 4x^2 - 16}$

a) Determine o domínio de f e represente-o no plano xy .

b) Faça um esboço do gráfico de f .

Questão 2 [20%] Considere a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x - y}, & \text{se } x - y \neq 0 \\ 3, & \text{se } x - y = 0 \end{cases}$

Determine o conjunto dos pontos no qual f é contínua.

Questão 3 [20%] Considere a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Determine o conjunto dos pontos no qual f é diferenciável.

Questão 4 [20%] No estudo da penetração da geada em uma rodovia, a temperatura T no instante t horas e à profundidade x pode ser dada aproximadamente por:

$$T(x, t) = T_0 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x), \text{ em que } T_0, \omega \text{ e } \lambda \text{ são constantes}$$

a) Calcule e interprete $\frac{\partial T}{\partial t}$ e $\frac{\partial T}{\partial x}$.

b) Mostre que T verifica a equação unidimensional do calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ em que } K \text{ é uma constante}$$

Questão 5 [20%] Determine a equação do plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.