MAT 241 - P2

Hugo Marinho

2021

1 Superfícies Quádricas

O gráfico no plano xy de uma equação do segundo grau

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

é uma cônica: uma parábola, uma elipse, uma circunferência, uma hipérbole, ou alguma forma degenerada de uma dessas curvas, tal como um ponto, um conjunto vazio ou um par de retas.

- Parábola - $y = (x - x_0)^2 + b$
- Elipse - $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- Circunferência - $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
- Hipérbole - $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Um equação do segundo grau nas variáveis x, y e z tem a forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + j = 0$$

e o gráfico de tal equação em R^3 é chamado de **superfície quádrica.**

O objetivo desse estudo é nos familiarizar com as superfícies quádricas mais comuns, cuja equação aparece na forma padrão.
Para visualizar, reconhecer e traçar o gráfico destas superfícies, mencionaremos sucintamente, algumas técnicas básicas. Estas técnicas envolvem a determinação dos **traços** e **seções** da superfície.
Os **traços** de uma superfície são as curvas de interseção da superfície com os planos coordenados. Por exemplo, a equação do traço yz de uma superfície é obtida fazendo $x = 0$ na equação da superfície. As equações do traço xz e xy são obtidas de modo análogo.
As **seções** de uma superfície são as curvas de interseção da superfície com os planos paralelos aos eixos coordenados. Por exemplo, as euqações das seções paralelas ao plano yz são obtidas fazendo $x = k(constante)$ na equação da superfície. As outras seções são obtidas de modo semelhante.

2 Quádricas Centrais

Uma superfície quádrica cuja equação padrão é da forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde a, b e c são constantes positivas, é chamada de **quádrica central.**

Uma superfície quádrica central apresenta simetria em relação a cada um dos planos coordenados. As superfícies quádricas são classificadas do seguinte modo:

1. Se os três sinais do lado esquerdo da equação são positivos, a superfície é chamada **elipsóide**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. Se apenas um dos sinais do lado esquerdo da equação é negativo, a superfície é chamada de **hiperbolóide de uma folha.**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3. Se dois sinais do lado esquerdo da equação são negativos e o outro é positivo a superfícia é chamada de **hiperbolóide de duas folhas.**

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3 Cones Elípticos

Uma superfície quedrática cuja equação padrão é da forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0$$

onde a, b e c são constantes positivas e nem todos sinais do lado esquerdo da equação são iguais, é chamada **cone elíptico.**

4 Parabolóides Elípticos e Hiperbólicos

Consideremos uma superfície quadrática cuja equação padrão possui uma das seguintes formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{a^2} = z$$

$$\pm\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = x$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = y$$

onde a, b e c são constantes positivas.

- Se os termos do lado esquerdo destas equações possuem o mesmo sinal, o gráfico de qualquer uma destas equações é chamado **parabolóide elíptico.**
- Se os termos do lado esquerdo destas equações possuem sinais opostos, o gráfico de qualquer uma destas equações é chamado **parabolóide hiperbólico.**

Parbolóide Elíptico

Suponha, por exemplo, que o parabolóide elíptico tenha equação:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Parabolóide Hiperbólico

Suponha, por exemplo, que o parabolóide hiperbólico tenha equação:

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Exercícios:

1. Identifique e esboce a superfície quádrica de equação
   a) $z^2 - 9x^2 - 16y^2 = 144$
   b) $9x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$
   c) $z = 4 - 2x^2 - 3y^2$

5 Função de Várias Variáveis

Definição: Uma função real f de n variáveis assia a cada n-upla $(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n) \in D \subset R^3$ um único número real $w = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$. O subconjunto D de R^3 é chamado domínio da função de f. Podemos denotar a função f por

$$f : D \subset R^n \longrightarrow R$$

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \longrightarrow w = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

Exemplos:

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$

b) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 - z^2}$

Gráfico no Espaço - Ideia geométrica

Domínio: Determine e esboce o domínio da função abaixo:

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Cuva de Nível: As curvas de nível são "cortes"na superfície de modo a determinar a sua "altura"e sua composição. Então, as curvas de nível (normalmente) são feitas adotando $z = k, k \in R$ e fazendo o estudo da curva que surge na equação.

Determine as curvas de nível da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ para os valores de $k = -1, 0, \dfrac{1}{2}, 1, 2, 4$

Exercícios: Dada das funções abaixo faça o que se pede.

I) $f(x,y) = \sqrt{-1 + x^2 + y^2}$
II) $f(x,y) = x^2 + y^2$
III) $f(x,y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$
IV) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
V) $f(x,y) = ln(x^2 + y^2 - 1)$

a) Determine o domínio da função e faça seu esboço.
b) Calcule as curvas de nível da função.
c) Esboce o gráfico da superfície em questão.

Extra: Esboce o gráfico da seguinte função abaixo:

$$f(x,y) = \begin{cases} 6 - x^2 - y^2 & , x^2 + y^2 \leq 4 \\ 4 - \sqrt{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

6 Limite

Um ponto variável x no eixo coordenado pode se aproximar de um ponto fixo x_0 de dois modos: à direita de x_0 ou à esquerda de x_0. Um ponto variável (x, y) no plano coordenado pode se aproximar de um ponto fixo (x_0, y_0) po um número infinito de caminhos.

Ideia Geométrica de Limite no Espaço

Dizemos que (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) se a distância entre eles tende a zero, independente do percurso feito por (x, y), onde a distância entre (x, y) e (x_0, y_0) é dada por :

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Definição: Sejam $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis definida em $D \subset R^2$ e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D. Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) é o número L, e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Todas as propriedades de limite de funções de uma variável se estendem às funções de várias veriáveis. O limite da soma, diferença, produto e quociente é a soma, diferença, produto e quociente dos limites, respectivamente, contanto que esses limites existam e que os denominadores não se anulem.

Teorema do Confronto: Sejam

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y), \forall (x, y) \in R^2$$

funções positivas.

Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y) = L$, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = L.$$

Corolário do Teorema do Confronto: Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funções tais que:

$f(x, y)$ é limitada e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = 0$, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).g(x, y) = 0$$

Exemplos:

a) Seja $f(x,y) = 2xy - \dfrac{4x^2 + y}{x + y}$. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$

b) Calcule o limite das seguintes funções abaixo:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2.y}{3x^2 + y^2}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2.y}{x^4 + y^2}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x.y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^5}{x^2 + y^4}$

Regra dos dois caminhos: Considere o seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Se existirem dois caminhos $c_1(t) = (x(t), y(t))$ e $c_2(t) = (x(t), y(t))$ tais que:

$$\lim_{t\to t_0} f(c_1(t)) \neq \lim_{t\to t_0} f(c_2(t))$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

não existe.

Exemplos: Faça o que se pede:

a) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ao longo dos seguintes caminhos:

i) Eixo x;

ii) Eixo y;

iii) Da reta $y = x$

O que podemos concluir ??

b) Calcule o seguinte limite ou mostre que ele não existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.y}{x^2 + y^2}$$

c) Calcule o seguinte limite ou mostre que ele não existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2.y}{x^4 + y^2}$$

7 Continuidade

Definição: Sejam f uma função real de duas variáveis e (x_0, y_0) um ponto do domínio de f. Dizemos que f é **contínua** em (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Exemplos:

a) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2.y}{x^2+y^4} & , se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Verifique sua continuidade no ponto $(0, 0)$

b) Seja $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & , se\ x^2+y^2 \leq 4 \\ 0 & , se\ x^2+y^2 > 4 \end{cases}$ Estude a continuidade de $f(x, y)$ em R^2.

Ideia geométrica.

8 Derivadas Parciais

Se $y = f(x)$ é uma função real de uma variável real, sua derivada é definida por

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. No caso de uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis independentes, necessitamos de uma definição semelhante que determine a taxa com que z muda quando x e y variam. O procedimento é fazer com que apenas uma variável varie de cada vez, enquanto a outra é mantida constante. Especificamente, para funções de várias variáveis, derivamos em relação a apenas uma variável por vez, considerando todas as outras como constantes.

Definição: Sejam $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais e (x_0, y_0) um ponto do domínio de f. **A derivada parcial de f em relação a x no ponto** (x_0, y_0) é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se este limite existir.

As notações utilizadas para representar as derivadas parciais são : $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, f_x, z_x$

Analogamente, a **derivada parcial de f em relação a y no ponto** (x_0, y_0) é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

se este limite existir.

Exemplos: Calcule as derivadas parciais das seguintes funções abaixo:

a) $f(x, y) = artcg(x^2 + y^2)$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & , se\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , se\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Observação: Todo o conhecimento de derivadas parciais para funções de duas variáveis é aplicado para funções de três variáveis.

9 Diferenciabilidade

Podemos dizer que uma função $y = f(x)$ é diferenciável em x_0 se existe uma reta não vertical passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ que se confunde com o gráfico de f "nas proximidades"do ponto $(x_0, f(x_0))$.
De maneira mais simples, f é diferenciável em x_0, se e só se, $f'(x_0)$ existe. Neste caso $f'(x_0) = m$, o coeficiente angular da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0).

De modo análogo e intuitivo, podemos dizer que uma função de duas variáveis x e y é diferenciável em (x_0, y_0) se existe um plano não vertical contendo o ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Definição: Sejam $z = f(x, y)$ uma função definida num conjunto $U \subset R^2$ e $(x_0, y_0) \in U$. Dizemos que f é **diferenciável** em (x_0, y_0) se, e somente se, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e também,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h.f_x(x_0, y_0) - k.f_y(x_0, y_0)}{\|(h, k)\|} = 0$$