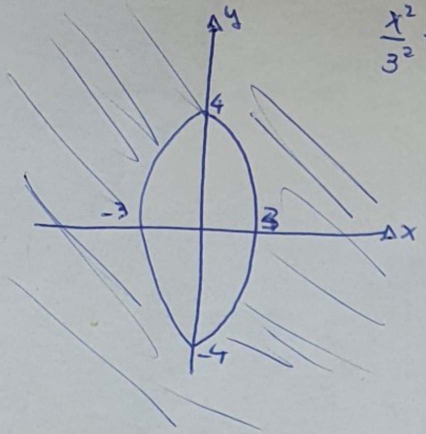
(1) a) $D_f = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 \geq 0\}$

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} \geq 1$



b) Fazendo $z = f(x,y)$, temos:

$z = k \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1}$

$\Rightarrow k^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{16} = k^2 + 1;\ k \geq 0.$

$Imf = \{z \in \mathbb{R} / z \geq 0\}$

Para $k = -1$ não existe curva de nível.

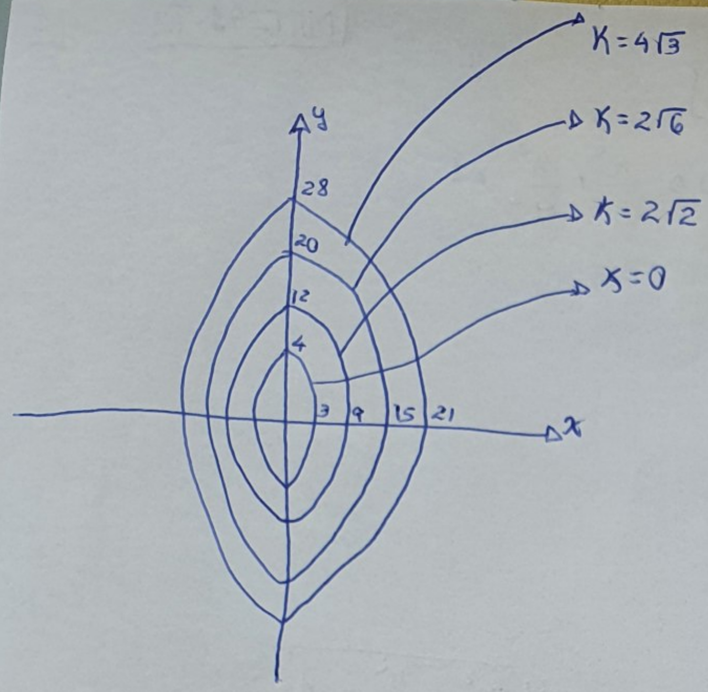
Para $k = 0$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

Para $k = 2\sqrt{2}$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = (2\sqrt{2})^2 + 1 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{(3.3)^2} + \frac{y^2}{(4.3)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$

Para $k = 2\sqrt{6}$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = (2\sqrt{6})^2 + 1 = 24 + 1 = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{(3.5)^2} + \frac{y^2}{(4.5)^2} = \frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$

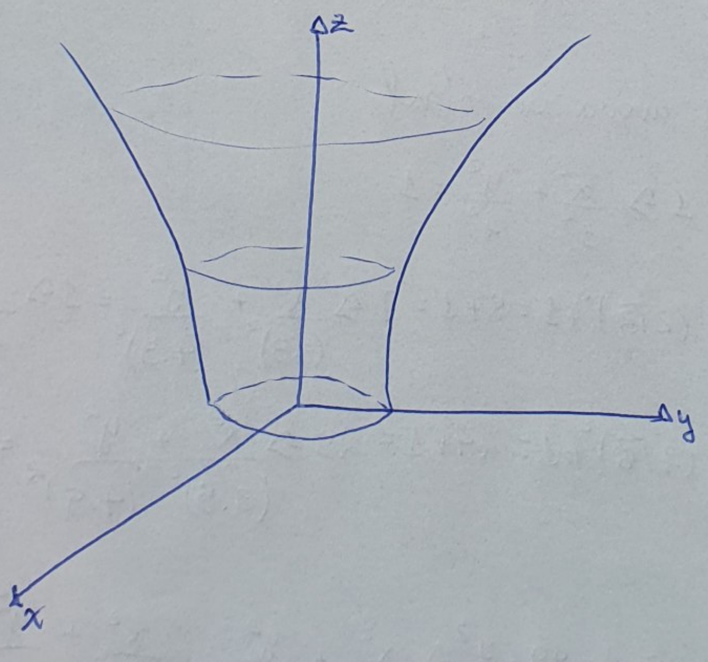
Para $k = 4\sqrt{3}$:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = (4\sqrt{3})^2 + 1 = 48 + 1 = 49 = 7^2 \Rightarrow \frac{x^2}{(3.7)^2} + \frac{y^2}{(4.7)^2} = \frac{x^2}{21^2} + \frac{y^2}{28^2} = 1$



(c) $z=\sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-1} \Rightarrow z^2=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-z^2=1.$

Hiperbolóide de uma folha; $z \geq 0$



① d) $f(3,4) = \sqrt{\frac{3^2}{9} + \frac{4^2}{16} - 1} = \sqrt{1+1-1} = \sqrt{1} = 1.$ MAT241 - T2

Daí, $P_0 = (3, 4, f(3,4)) = (3,4,1)$.

$\vec{\eta} = \nabla S = \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z} \right) = \left(\frac{2x}{9}, \frac{2y}{16}, -2z \right) = \left(\frac{2x}{9}, \frac{y}{8}, -2z \right)$

$\nabla S(3,4,1) = \left(\frac{6}{9}, \frac{4}{8}, -2.1 \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -2 \right)$

Equação do Plano tangente:

$\langle \nabla S(3,4,1), (x-3, y-4, z-1) \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -2\right), (x-3, y-4, z-1) \rangle = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{3}(x-3) + \frac{1}{2}(y-4) - 2(z-1) = 0$

$\Rightarrow \frac{2x}{3} - 2 + \frac{y}{2} - 2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} - 2z = 2}$

---

② a) Para $(x,y) \neq (0,0)$ f é uma divisão de funções polinomiais, que são contínuas, e uma divisão de funções contínuas é uma função contínua. Logo, para $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y)$ é contínua.

Agora, para $(x,y) = (0,0)$, temos:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5 y}{x^4+y^2} = \lim \frac{x^4}{x^4+y^2} \cdot xy$;

Observe que, $0 \leq x^4 \leq x^4+y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^4}{x^4+y^2} \leq 1$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, essa parte da função é limitada. E, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$. Logo, pelo corolário do Teorema do confronto, $\lim \frac{x^5 y}{x^4+y^2} = 0 = f(0,0)$. Ou seja, $f(x,y)$ é contínua na origem.

② b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{5x^4y(x^4+y^2) - x^5y\,4x^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{5x^8y + 5x^4y^3 - 4x^8y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{x^8y + 5x^4y^3}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5(x^4+y^2) - x^5y.2y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{x^9 + x^5y^2 - 2x^5y^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{x^9 - x^5y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

Para $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim \frac{f(h,0)}{h} = \lim \frac{\frac{h^5 . 0}{h^4+0^2}}{h} = \lim 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim \frac{f(0,h)}{h} = \lim \frac{\frac{0^5 . h}{0^4+h^2}}{h} = \lim 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^8y + 5x^4y^3}{(x^4+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^9 - x^5y^2}{(x^4+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

MAT241 - T2 3

2 c) Observe que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ são uma divisão de polinômios, que são funções contínuas, e divisão de funções contínuas é uma função contínua, assim as derivadas parciais em $(x,y) \neq (0,0)$ são contínuas. Dessa forma, podemos afirmar que $f(x,y)$ é diferenciável em todo $(x,y) \neq (0,0)$.

d) Vejamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ existem, agora:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - \overset{=0}{f(0,0)} - h\overset{=0}{f_x(0,0)} - k\overset{=0}{f_y(0,0)}}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim \frac{\frac{h^5 \cdot k}{h^4+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim \frac{h^5 \cdot k}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim \frac{h^4 \cdot h \cdot k}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$; Observe que,

$0 \leq h^4 \leq h^4+k^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{h^4}{h^4+k^2} \leq 1$ (Limitada)

$0 \leq h^2 \leq h^2+k^2 \Rightarrow 0 \leq h \leq \sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow 0 \leq \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$ (Limitada)

E, $\lim_{(h,k)\to(0,0)} k = 0$. Então, pelo corolário do Teorema do Confronto, $\lim \frac{h^5 \cdot k}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = 0$.

Logo, $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

③ $x(u,v) = e^{2u} + v^2 + 2$

$y(u,v) = \text{sen}\, u + u \cdot v^2 + 1$

$\frac{\partial F}{\partial u}(0,1) = ?$

$F(0,1) = f(x(0,1), y(0,1))$; $x(0,1) = e^{2\cdot 0} + 1^2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$

$y(0,1) = \text{sen}\, 0 + 0 \cdot 1^2 + 1 = 1$

Assim,

$F(0,1) = f(4,1)$. Então,

$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(4,1) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\Big|_{(0,1)} + \frac{\partial f}{\partial y}(4,1) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\Big|_{(0,1)}$.

$\frac{\partial x}{\partial u} = 2e^{2u} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u}\Big|_{(0,1)} = 2e^{2\cdot 0} = 2$

$\frac{\partial y}{\partial u} = \cos u + v^2 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial u}\Big|_{(0,1)} = \cos 0 + 1^2 = 2$

Dessa forma:

$\frac{\partial F}{\partial u}(0,1) = 8 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 = 16 - 6 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}(0,1) = 10$.

---

④ $f(x,y) = \ln(x^4 + y^4)$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^3}{x^4 + y^4}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^4 + y^4}$; As derivadas parciais são contínuas em $(x,y) \neq (0,0)$, especialmente em $P_0 = (1,2)$.

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{4x^3}{x^4+y^4}, \frac{4y^3}{x^4+y^4} \right) \Rightarrow \nabla f(1,2) = \left(\frac{4}{1+2^4}, \frac{4 \cdot 2^3}{1+2^4} \right)$

$\Rightarrow \nabla f(1,2) = \left(\frac{4}{17}, \frac{32}{17} \right)$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \neq 1$. $\frac{\vec{u}}{\|u\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \hat{v}$

$\frac{\partial f}{\partial v} = \left\langle \nabla f(2,1), \vec{v} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{4}{17}, \frac{32}{17} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle = \frac{8}{17\sqrt{5}} + \frac{32}{17\sqrt{5}}$

$= \frac{40}{17\sqrt{5}}$.

4) b) A maior Taxa de crescimento acontece na direção do vetor gradiente.

MAT2411 T2 | 4

Então,

$$\nabla f(2,2) = \left(\frac{4\cdot 2^3}{2^4+2^4}, \frac{4\cdot 2^3}{2^4+2^4}\right) = \left(\frac{16}{32}, \frac{16}{32}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

E a maior Taxa é

$$\|\nabla f(2,2)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$