Mat 241 - Cálculo 3 Provas Passadas

PER 1 - Prova 2 - Turma: 1.

Questão 1 [15 pontos] Considere a função $f(x,y)=\sqrt{x^2-4y^2-16}$.

a) Determine o domínio de f e represente-o no plano xy.

b) Grafe, no mesmo plano coordenado, as curvas de nível $K=0,3,4$ e 5.

c) Faça um esboço do gráfico de f.

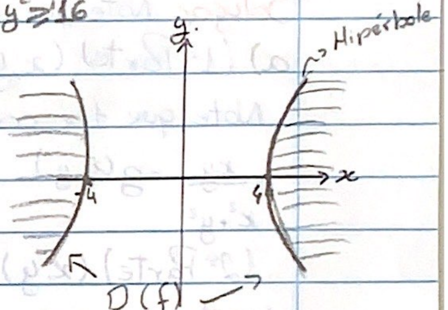
Solução: $x^2-4y^2-16 \geq 0 \therefore x^2-4y^2 \geq 16$

a) $D(f)=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2-4y^2 \geq 16\}$

// se $y=0$; $x^2-4.0^2 \geq 16$

$x \geq \pm\sqrt{16} = \pm 4$

$x \geq \pm 4$ $\quad -4 \leq x$ e $x \geq 4$



Obs.: $x^2 - 4y^2 \geq 16 \to$ Hipérbole

$x^2 + 4y^2 \geq 16$ Elipse

b) Curva de nível é a altura.

$C_K(f)=\{(x,y)\in D(f) / f(x,y)=K\}$.

$f(x,y)=K \Rightarrow \sqrt{x^2-4y^2-16}=K \Rightarrow x^2-4y^2=16+K^2$

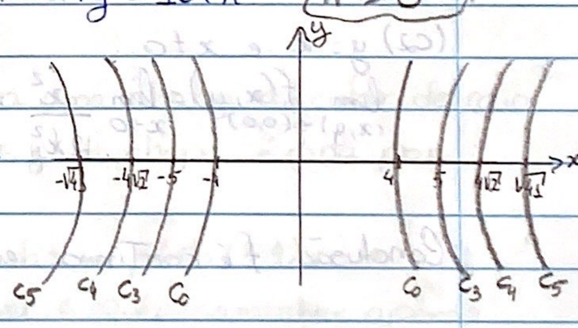
Tem q ser: $K\geq 0$

$C_0(f)=\{(x,y)\in D(f) / x^2-4y^2=16\}$

$C_3(f)=\{(x,y)\in D(f) / x^2-4y^2=25\}$.

$C_4(f)=\{(x,y)\in D(f) / x^2-4y^2=32\}$.

$C_5(f)=\{(x,y)\in D(f) / x^2-4y^2=41\}$.

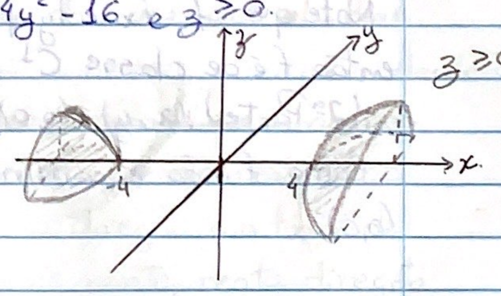


c) $z=f(x,y)=\sqrt{x^2-4y^2-16}\geq 0 \Rightarrow z^2=x^2-4y^2-16$ e $z\geq 0$

$\Rightarrow x^2-4y^2-z^2=16$ e $z\geq 0$

se $y=0$ e $z=0$, sabe-se que será um hiperbolóide de duas (2) folhas

(pois $x=\pm\sqrt{16}$)



Questão 2 [20 pontos] Considere a função:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determine o conjunto de todos os pontos onde f é contínua.

b) Determine o conjunto de todos os pontos onde f é diferenciável.

Solução: Note que $D(f)=\mathbb{R}^2$ (pois podemos jogar todos os valores) = ou ≠ 0

a) (1^a Parte) $(x,y)\neq(0,0)$ (verifica onde é contínua)

Note que f é contínua por ser uma função racional.

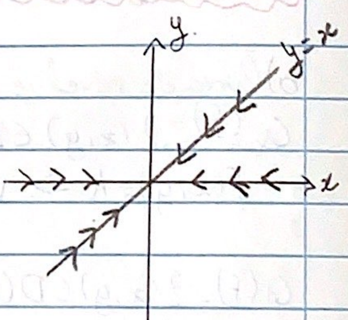
$$\frac{xy}{x^2+y^2}=g(x,y).$$

(2^a Parte) $(x,y)=(0,0)$.

Mostraremos que f não é contínua em $(0,0)$, pois:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe pela Regra dos Dois Caminhos.

Considere os caminhos.



(C_1) $y=0$ e $x\neq0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to0}0=0$$

(C_2) $y=x$ e $x\neq0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Conclusão: f é contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

b) (1^a Parte) $(x,y)\neq(0,0)$

Note que f, f_x e f_y por serem funções racionais são contínuas, então f é de classe C^1 e portanto diferenciável.

(2^a Parte) $(x,y)=(0,0)$.

Como f não é contínua em $(0,0)$, f não é diferenciável em $(0,0)$.

Questão 3 [15 pontos] Ache o limite, caso exista. Se não existir, justifique a sua não existência.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

Solução

Seja $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ e note que $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Considere as funções,

$g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ e $h(x,y) = 3y$.

Afirmo que:

(i) g é limitada em $D(f)$.

De fato, $0 \leq x^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$; $\forall (x,y) \in D(f)$.

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3y = 0$

Portanto, pelo Corolário do Teorema do Confronto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) \cdot g(x,y) = 0$$

Questão 4 [30 pontos] A figura mostra uma chapa circular de raio 9 cm. A temperatura de um ponto (x,y) da chapa é dada por $T(x,y) = 100 - x^2 - y^2 - 2x$ em °C.

Três formigas F_1, F_2 e F_3 estão situadas no ponto $(3,4)$:

a) F_1 acha a temperatura aí agradável, e quer caminhar apenas para esticar as pernas, passando por pontos sempre de mesma temperatura, igual à de $(3,4)$; dê a equação da curva que ela deve seguir e represente-a graficamente;

b) F_2 está desgostosa da vida e quer morrer queimada caminhando na direção e no sentido em que a temperatura cresce o mais rapidamente possível; dê um vetor unitário nesta direção e a taxa de variação da temperatura (em °C/cm) neste ponto, nesta direção;

c) F_3 quer seguir na direção e no sentido em que a temperatura decresce o mais rapidamente possível, pois a heroína da estória é F_2; dê um vetor unitário dando a direção e sentido que F_3 deve seguir e a taxa de variação da temperatura (em °C/cm) correspondente.

Questão 5 [20 pontos] Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva de interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e do elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ no ponto $P(1, 1, 2)$.