Universidade Federal de Viçosa

Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

$2^{\underline{a}}$ Lista - MAT 241 - Cálculo III - 2018/II

1. Um tanque para estocagem de oxigênio líquido em um hospital deve ter a forma de um cilindro circular reto de raio r e de altura h, com um hemisfério em cada extremidades. Determine o volume total do tanque em função da altura h e do raio r.

2. Calcule

   (a) $f(-y, y)$, $y \neq 0$

   (b) $f(1, h)$, $h \neq 1$

   (c) $f(h, 0)$, $h \neq 0$

   (d) $\dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$, $h \neq 0$

   (e) $\dfrac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$, $h \neq 0$

   nos casos em que $f(x, y) = x^5 - 3x^3y^2 - x + 1$ e quando $f(x, y) = \dfrac{x}{x-y}$.

3. Se $f(x, y, z) = (xyz)^2$, calcule

   (a) $f(0, 0, 0)$

   (b) $f(x, x, x)$

   (c) $f(y, z, z)$

   (d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$

   (e) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h}$

   (f) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}$

4. Determine e esboce o domínio da função f se

   (a) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

   (b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x-y}$

   (c) $f(x, y) = \dfrac{x+y}{xy}$

   (d) $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

   (e) $f(x, y) = |x|e^{\frac{y}{x}}$

   (f) $f(x, y) = \sqrt{1 - |x| - |y|}$

   (g) $f(x, y) = \dfrac{x-y}{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)}$

   (h) $f(x, y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$

   (i) $f(x, y, z) = xyz - x^4 + x^5 - z^7$

   (j) $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2 + z^2)$

   (k) $f(x, y, z) = \dfrac{y}{xz}$

   (l) $f(x, y, z) = x^2 \sec(y) + z$

   (m) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

   (n) $f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$

   (o) $f(x, y, z) = \sqrt[4]{z^2 - y^2 - x^2}$

   (p) $f(x, y, z) = \sqrt{400 - 16x^2 - 25y^2 - z^2}$

5. Esboce os conjuntos de nível de f, para os seguintes valores de c

(a) $f(x,y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$	$c = 0, 2, 10$
(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	$c = 0, 1, 2$
(c) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$	$c = 0, 2, 4$
(d) $f(x,y) = 3x - 7y$	$c = -1, 0, 1$
(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2+1}$	$c = 0, 1$
(f) $f(x,y) = (x-y)^2$	$c = 0, 1$
(g) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$	$c = -1, 0, 1$
(h) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$	$c = -1, 0, 1$
(i) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$	$c = -1, 0, 1$
(j) $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$	$c = -1, 0, 1$
(k) $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2$	$c = -1, 0, 1$
(l) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$	$c = -1, 0, 1$
(m) $f(x,y,z) = x - y^2 + z^2$	$c = -1, 0, 1$

6. Seja $u \in \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou $n = 3$. Uma função f é dita homogênea de grau $m \in \mathbb{Z}$, se para todo $t > 0$, $f(tu) = t^m f(u)$. Verifique que as seguintes funções são homogêneas e determine o grau

   (a) $f(x,y) = 3x^2 + 5xy + y^2$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{2}{x^2+y^2}$

   (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y^3} + \dfrac{y}{z^3} + \dfrac{z}{x^3}$

7. A temperatura em um ponto (x,y) de uma placa de metal plana é $T(x,y) = 9x^2 + 4y^2$ graus.

   (a) Encontre a temperatura no ponto $(1,2)$

   (b) Encontre a equação da curva ao longo da qual a temperatura tem um valor constante e igual a 36 graus

   (c) Esboce a curva do item anterior.

   Quando a função f que representa a temperatura, as curvas de nível são chamadas isotermas.

8. Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando as curvas de nível de f

   (a) $f(x,y) = 4 - x - y$

   (b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

   (c) $f(x,y) = 2 + \sqrt{17 - x^2 - y^2 + 4x + 4y}$

   (d) $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$

   (e) $f(x,y) = 1 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}$

   (f) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

   (g) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$

   (h) $f(x,y) = 1 + y^2 - x^2$

   (i) $f(x,y) = y^2$

   (j) $f(x,y) = \sqrt{1 + y^2 + x^2}$

   (k) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

   (l) $f(x,y) = \operatorname{sen} x$

   (m) $f(x,y) = 7 + x^2 + y^2 - 2x - 4y$

   (n) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

9. Seja $f(x,y) = \dfrac{4y}{1+y^2}$.

   (a) Determine o domínio e o conjunto imagem de f

   (b) Qual o valor máximo de f e em que ponto ocorre?

   (c) Faça um esboço do gráfico de f

   (d) Calcule $f(3, \operatorname{tg}\frac{\pi}{8})$

10. Seja $f(x,y) = 5 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

   (a) Dê o domínio de f

(b) Descreva o conjunto imagem de f

(c) Esboce o domínio de f

(d) Esboce o gráfico de f

11. Mostre que o gráfico de $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) + \cos(x + y)$ é uma superfície limitada por planos paralelos. Qual é a menor distância entre dois planos paralelos que limitam a superfície?

12. Nos seguintes problemas, calcule o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a $(0, 0)$, ao longo de cada um dos caminhos indicados

(a) $f(x, y) = \dfrac{5xy}{x^2 + y^2}$

(i) ao longo do eixo x;

(ii) ao longo da reta $y = x$.

(b) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y}$

(i) ao logo do eixo x

(ii) ao longo da curva $y = x^3 - x^2$

(c) $f(x, y) = \dfrac{3x^4y^4}{(x^4 + y^2)^3}$

(i) ao longo do eixo x

(ii) ao longo da curva $y = x^2$

13. Calcule os limites, se possível

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y}{x - y}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y - x^3}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 - y^2}$

14. Use a "Regra dos dois caminhos"para mostrar que os limites indicados abaixo não existem

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(-2x + y)^2}{(x - 1)(y - 2)}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^5 + y^3}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2}$

15. Mostre que

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} = 0$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(x^2 + y^2)z}{7(x^2 + y^2 + 4z^2)} = 0$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(2x + 6y)}{x + 3y} = 2$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x} = 0$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} = 1$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos\sqrt{xy}}{x} = 0$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{y^2 + 1} - 1} = 0$

16. Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x| + |y|}{x^2 + 5y^2} = \infty$.

17. Verifique se os limites abaixo existem, justificando sua resposta.

    (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2^{-\frac{1}{x^2}} \cos\left(\frac{x}{x+y}\right)$

    (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$

18. Mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ não é contínua na origem $(0,0)$.

19. Mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 2$ é contínua na origem $(0,0)$.

20. Dada a função $f(x,y) = x^2+y^2$ se $x^2+y^2 \leq 1$ e $f(x,y) = 0$ se $x^2+y^2 > 1$, faça um esboço do gráfico de f e determine em que pontos f é contínua.

21. Determine os pontos nos quais a função $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ é contínua.

22. A função $f(x,y) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2-1}$ se $x^2+y^2 \geq 1$ e $f(x,y) = 1$ se $x^2+y^2 < 1$ é contínua no ponto $(1,0)$? Justifique sua resposta.

23. A função $f(x,y) = x^2+y^2+7$ se $x^2+y^2 \leq 4$ e $f(x,y) = k$ se $x^2+y^2 > 4$. Determine o valor de k de modo que f seja contínua.

24. Determine as funções derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sendo

    (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+4y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3-2y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

25. Encontre as derivadas parciais das seguintes funções

    (a) $f(x,y) = 5x^2+6xy+e^{2x+y}$
    (b) $f(x,y,z) = 2^{xyz}$
    (c) $f(x,y) = 5x^4+6xy^3+\log(2xy)$
    (d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(\ln(xyz^2))$
    (e) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y)$
    (f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2-y^2+z^2}$
    (g) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{y^3}\right)$
    (h) $f(x,y,z) = \sec(xy^2z)$
    (i) $f(x,y) = \operatorname{senh}(\sqrt{xy})$
    (j) $f(x,y,z) = \sqrt[6]{xyz}$

26. Verifique que $w = \sqrt{x^2-y} + \dfrac{1}{y^2+5z}$ satisfaz a equação $5\dfrac{\partial w}{\partial x} + 10x\dfrac{\partial w}{\partial y} - 4xy\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$ em seu domínio.

27. Verifique que as funções dadas satisfazem a equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

    (a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = e^{-x}\cos y$ (c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x > 0$

28. Verifique que as funções dadas satisfazem a equação de Laplace em dimensão 3, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

    (a) $f(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2$ (b) $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos(5z)$

29. Verifique que a função $f(x,y) = \ln(x-y) + \operatorname{tg}(x+y)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ em seu domínio.

30. Determine duas funções distintas $f(x,y)$ tais que $f_x(x,y) = 6xy-9y^2+7$ e $f_y(x,y) = 3x^2-18xy+3y^2$.

31. Calcule o gradiente das seguintes funções

(a) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$
(b) $f(x,y,z)=\cos(xy)+\operatorname{sen}(yz)$
(c) $f(x,y,z)=\ln(xyz)$
(d) $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{z}$
(e) $f(x,y)=\cos(2x)\cos(3y)\operatorname{senh}(4x)$
(f) $f(x,y,z)=xye^z+yze^x$

32. Dada a função $f(x,y)=\begin{cases} 2x+y-3 & \text{se } x=1 \text{ ou } y=1 \\ 3 & \text{se } x\neq 1 \text{ e } y\neq 1 \end{cases}$

    (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$
    (b) A função f é diferenciável em $(1,1)$?

33. Determine os pontos nos quais a função f é diferenciável.

    (a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{2x^6+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$
    (b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

34. Mostre que $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ possui derivadas parciais contínuas. Conclua que f é diferenciável em $(0,0)$.

35. Mostre que a função $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ é diferenciável em $(0,0)$, mas não é de classe C^1.

36. Seja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função dada por $f(x,y,z)=x^2+y^3+z^4$, com $x=x(t,u,v)$, $y=y(t,u,v)$ e $z=z(t,u,v)$. Sabendo que $x(0,0,1)=5$, $y(0,0,1)=2$, $z(0,0,1)=-1$, $\dfrac{\partial x}{\partial t}(0,0,1)=\dfrac{\partial y}{\partial t}(0,0,1)=\dfrac{\partial z}{\partial t}(0,0,1)=1$, $\dfrac{\partial x}{\partial u}(0,0,1)=\dfrac{\partial y}{\partial u}(0,0,1)=\dfrac{\partial z}{\partial u}(0,0,1)=-1$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}(0,0,1)=\dfrac{\partial y}{\partial v}(0,0,1)=\dfrac{\partial z}{\partial v}(0,0,1)=3$, calcule as derivadas parciais de
$$F(t,u,v)=f(x(t,u,v),y(t,u,v),z(t,u,v))$$
no ponto $(0,0,1)$.

37. Seja $f(t)=f(e^{t^2},\operatorname{sen} t)$, onde $f(x,y)$ é uma função diferenciável. Expresse $F'(t)$ em termos da derivadas parciais de f. Calcule $F'(0)$ supondo $f_y(1,0)=5$.

38. Seja $g(x)=f(x,x^3+2)$, onde $f(x,y)$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Expresse $g'(x)$ em termos das derivadas parciais de f.

39. Seja $z=f(u^2+v^2,uv)$, onde $f(x,y)$ é uma função diferenciável. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

40. Seja $z=uf(u-v,u+v)$. Mostre que $u\dfrac{\partial z}{\partial u}+u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z+2u^2\dfrac{\partial f}{\partial y}$, onde $x=u-v$ e $y=u+v$.

41. Sabendo que $x(\rho,\theta,\varphi)=\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, y(\rho,\theta,\varphi)=\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$ e $z(\rho,\theta,\varphi)=\rho\cos\varphi$, $f(x,y,z)=\dfrac{y}{x}e^{x^2+y^2+z^2}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e $F(\rho,\theta,\varphi)=f(x,y,z)$, calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial\varphi}\left(1,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

42. Suponha que $w=f(x,y)$ tem derivadas parciais de primeira e segunda ordens contínuas e que $F(r,\theta)=f(x(r,\theta),y(r,\theta))$, onde $x(r,\theta)=r\cos\theta$ e $y(r,\theta)=r\operatorname{sen}\theta$. Mostre que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}.$$

43. Um automóvel percorre uma estrada e num dado instante ele está no ponto tal que $x=1$, $y=1$ e a projeção do seu vetor velocidade no plano xy é $v=(-1,2)$. Sabendo que a altura dos pontos do terreno onde se situa a estrada é dada por $h(x,y)=xy$, diga se a altitude do carro está aumentando ou diminuindo no ponto considerado.

44. Considere a função diferenciável $f(x,y)$ e as funções $x(u,v) = v\cos(\pi + u) + e^{uv}$ e $y(u,v) = u^2 + v^2$. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,4) = 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,4) = 2$, determine $\dfrac{\partial F}{\partial u}(0,2)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial v}(0,2)$, onde $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

45. Suponha que $g(r,\theta) = f(x,y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, com $f(x,y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Sejam $u = \cos\theta i + \text{sen}\,\theta j$ e $v = -\,\text{sen}\,\theta i + \cos\theta j$. Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial u}(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial v}(x,y).$$

46. A função diferenciável $f(x,y,z)$ tem, no ponto $(1,1,1)$, derivada direcional igual a 1 na direção $4j + 3k$, igual a 2 na direção $-4i + 3j$ e igual a zero na direção j. Calcule o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,1,1)$.

47. Suponha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $f(3t, t^3) = \text{arctg}(t)$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1)$, admitindo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2$. Determine equações paramétricas da reta normal ao gráfico de f no ponto $(3,1,f(3,1))$.

48. Determine a derivada direcional da função dada no ponto P_0 e na direção de v

    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\quad P_0 = (2,1)$; $\quad v = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

    (b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$; $\quad P_0 = (1,0)$; $\quad v = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

    (c) $f(x,y) = e^y\cos x + e^x\cos y$; $\quad P_0 = (0,0)$; $\quad v = (1,1)$

    (d) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2$; $\quad P_0 = (1,1,1)$; $\quad v = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

    (e) $f(x,y,z) = \text{arcsec}(xyz)$; $\quad P_0 = (1,1,2)$; $\quad v = (0,1,1)$

49. Determine, por definição, a derivada direcional de f em P na direção de v, nos casos

    (a) $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$; $\quad P = (1,0)$; $\quad v = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

    (b) $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$; $\quad P = (1,2)$; $\quad v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

50. Determine o valor máximo da derivada direcional de f no ponto P_0 e a direção em que ocorre

    (a) $f(x,y) = 2^{2y}\,\text{arctg}\left(\frac{y}{3x}\right)$; $\quad P_0 = (1,3)$

    (b) $f(x,y,z) = cosh(xyz)$; $\quad P_0 = (1,0,1)$

51. Mostre que a derivada direcional de $f(x,y) = \dfrac{2y^2}{x}$ em qualquer ponto (x,y), $x \neq 0$, da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ na direção normal a ela (direção perpendicular a direção tangente à elipse no ponto) é nula.

52. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{640}{4x^2 + y^2 + 64}$.

    (a) Esboce as curvas de nível $c = 5$, $c = 8$ e $c = 10$.

    (b) Esboce o gráfico de f.

    (c) Suponha que a função f descreve a topologia de uma montanha. Se uma pessoa está no ponto $(0,4,8)$ e deseja descer o mais rápido possível, determine um vetor de $\mathbb{R}^2$ que indica a direção inicial que a pessoa deve tomar. Justifique sua resposta.

    (d) Determine a taxa de decrescimento da altura na direção descrita no item anterior.

53. O potencial elétrico em uma região do espaço é dado por $V(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, sendo V em volts, x, y, z em cm.

    (a) Determine a derivada direcional de V na direção do vetor $v = 3i + 4j + 12k$ no ponto $A = (0,5,12)$

    (b) Dê o versor da direção, a partir de A, em que a taxa de variação do potencial é máxima e o valor desta taxa é máxima.

    (c) Determine o versor da direção normal superfície equipotencial que passa pelo ponto A.

54. A superfície de um lago é representada por uma região D no plano xy, de modo que a profundidade (em metros) sob o ponto (x, y) é dada pela função $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$.

(a) Em que direção um bote em $P = (4, 9)$ deve navegar para que a profundidade da água decresça mais rapidamente?

(b) Em que direção a profundidade permanece a mesma?

55. Em que direção a derivada direcional de $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no ponto $(1, 1)$ é zero?

56. Calcule a derivada direcional de $f(x, y, z) = 6x^2 - 3y^2 - 4z^2$ no ponto $(2, 1, 1)$ e na direção do vetor normal à superfície $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ no mesmo ponto. Escolha o vetor normal que forma ângulo agudo com o vetor $v = 4i - 3j - 7k$.

57. A altura dos pontos de uma montanha é dada por $h(x, y) = 4 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3}$. Quer-se, a partir do ponto $P = (0, 1)$, construir-se uma estrada que vá até o topo. Sabendo que a inclinação máxima é de $30°$, dê as possíveis direções em que se pode construir a estrada por P.

58. Suponha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sejam $u = \cos\dfrac{\pi}{4}i + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}j$ e $v = \cos\dfrac{3\pi}{4}i + \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}j$. Sabendo-se que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = 5\sqrt{2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = -3\sqrt{2}$, determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, 3)$.

59. Considere o elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 2$.

(a) Determine uma equação para cada plano tangente ao elipsoide e paralelo ao plano $x + y = 4$.

(b) Determine o ponto em que a reta normal ao elipsoide no ponto $(1, 0, \frac{1}{2})$ intercepta o plano xy.

60. Determine, no ponto indicado, uma equação do plano tangente e equações da reta normal ao gráfico das superfícies abaixo

(a) $z = \ln(x + y), \quad P = (2, -1, 0)$

(b) $z = e^x \cos y, \quad P = (0, \pi, -1)$

(c) $z = \dfrac{2}{\sqrt{4 - 2x^2 - y^2}}, \quad P = (1, 1, 2)$

(d) $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0, \quad P = (2, -3, 4)$

(e) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad P = (x_0, y_0, z_0)$

(f) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}, \quad P = (x_0, y_0, z_0)$

(g) $z = \ln\left(\dfrac{y}{2z}\right) - x = 0, \quad P = (0, 2, 1)$

61. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$, $(-1, 1, 1)$ e que é tangente ao gráfico de $g(x, y) = xy$.

62. Determine a equação do plano tangente à $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$.

63. Determine a equação da reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, que é paralela à reta $x + y = 0$.

64. Mostre que todas as retas normais a um esfera passam pelo centro da mesma.

65. Determine a equação da reta normal à parábola $y^2 = -8x$ que passa pelo ponto $(-5, 0)$.

66. Determine a equação de um plano que seja tangente a superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \dfrac{7}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

67. Determine um plano que passa pelos pontos $(5, 0, 1)$, $(1, 0, 3)$ e seja tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$.

68. (a) Determinar o ponto situado no primeiro octante da superfície de equação $x^2 + 3y^2 + \dfrac{3}{2}z^2 = 18$ no qual a reta normal é perpendicular ao plano $x + y + z = 10$.

(b) Determine a equação do plano tangente à superfície neste ponto.

69. Classifique os pontos críticos das funções abaixo

(a) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 6x - 27y + 2$

(b) $f(x,y) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 + x + y$

(c) $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$

(d) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$

(e) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

(f) $f(x,y) = \dfrac{2x+2y+1}{x^2+y^2+1}$

(g) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

70. A distribuição de temperatura na chapa retangular R definida por

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 3\}$$

é dada por $T(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$. Ache as temperaturas máxima e mínima da chapa, bem como os pontos onde elas ocorrem.

71. A temperatura no ponto (x,y) da placa circular $x^2 + y^2 \leq 1$ é dada por $T(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy + 4$. Determine o ponto mais quente e o ponto mais frio da placa.

72. Uma calha deve ser construída com uma folha de aço, de largura a e comprimento b. Se a seção transversal da calha é um trapézio isósceles, qual deve ser a largura da base e a inclinação das faces para que sua capacidade seja máxima?

73. Encontre os pontos de máximo e mínimo absoluto da função $f(x,y) = x + 3y + 5$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.

74. Encontre os pontos de máximo e mínimo absoluto de $f(x,y) = x^2 + y^2 + y$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

75. Ache os extremos de $f(x,y) = y^2 - 4xy + 4x^2$, sujeito ao vínculo $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

76. Uma aplicação num doente de x miligramas de um remédio A e y miligramas de um medicamento B ocasiona uma resposta $R(x,y) = x^2y^3(c - x - y)$, $c > 0$. Que quantidade de cada remédio dará a melhor resposta?

77. Determine a equação do elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ que passa pelo ponto $(1,2,3)$ e tem menor volume. (O volume do elipsoide é $V = \dfrac{4abc\pi}{3}$).

78. Um depósito cilíndrico fechado de aço deve conter 2 litros de um fluido. Determine as dimensões do depósito de modo que a quantidade de material usada em sua construção seja mínima.

79. Um fio de cobre de comprimento a, deve ser dividido em três partes tais que o produto dos comprimentos das partes seja máximo. Determine o comprimento dessas partes.

80. Determine os pontos da curva $x^6 + y^6 = 1$ mais afastados e os mais próximos da origem.

81. Determine o valor máximo de $f(x,y,z) = 2x + 2y - z$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

82. Determine o valor mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sobre o plano $x - y - z = 1$.

83. Determine a distância mínima entre a superfície $4x^2 + y^2 - z = 0$ e o ponto $(0,0,8)$.

84. Se uma caixa retangular sem tampa deve ter um volume fixo V, que dimensões relativas minimizarão a área da superfície?

85. De todos os paralelepípedos retangulares cuja soma das três arestas é constante e igual a a $(a > 0)$, qual é o que tem volume máximo?

86. Determine as dimensões do paralelepípedo retangular de volume máximo sabendo que as 3 faces do paralelepípedo estão nos planos coordenados e um vértice pertence ao plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ $(a,b,c > 0)$. Calcule o volume.

87. Ache o volume do maior paralelepípedo que pode ser inscrito no elipsoide $x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 1$, se as faces devem ser paralelas aos eixos coordenados.

88. Determine o ponto da reta interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $3x + 2y + z = 6$ mais próximo da origem.

89. Determine o ponto $x + 2y + 3z = 6$ mais próximo da origem.

90. Encontre o mínimo de $f(x,y,z) = x + y + z$ na superfície de equação $xyz = k$, onde $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$. Use o resultado para mostrar que

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z), x > 0, y > 0, z > 0.$$

91. O material da base de um depósito retangular custa o dobro do preço p do material para os lados e a tampa. Para um volume fixo V, ache as dimensões relativas que minimizem o custo.