

Ciência da Computação

Geometria Analítica e Álgebra linear

Profa Vanussa G. D. de Souza

05/04/2016

Forma escalonada

Uma matriz é denominada de forma escalonada ou forma escada quando o número de zeros no lado esquerdo do primeiro elemento não nulo da linha, aumenta a cada linha.

Exemplo

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \ \, \text{\'e uma matriz escalonada, mas} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \ \, \text{\~n\~ao\'e}$$

No caso de ter esgotado o número de colunas, isto \acute{e} , quando uma linha tornar nula, todas linhas seguintes devem ser linhas nulas.

Exemplo

A quarta linha não aumentou os números de zeros por ter esgotado as colunas, mas é uma matriz escalonada.

Método de eliminação de Gauss (escalonamento)

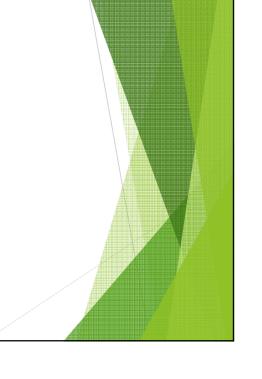
O procedimento consiste em converter a matriz aumentada numa matriz escalonada, aplicando uma sequência de operações elementares. Tais operações elementares são constituídas de três operações básicas:

- Somar múltiplo de outra linha:
- Troca de linhas:
- Multiplicar uma linha por número não nulo

Exemplo:
$$\left[\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & -7 \\ -3 & -6 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right] \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

Segunda linha: L_2 : 2 4 -2 3 -7

Terceira linha: L_3 : -3 -6 2 -1 6



O elemento pivô será escolhido inicialmente como sendo uma coluna a direita da etapa anterior. Caso ele for nulo, trocar com linha de baixo. Caso todos os elementos desta coluna nas linhas de baixo forem nulos, deslocar para a direita. No exemplo, o elemento pivô é nulo e todos elementos correspondentes nas linhas de baixo também. Logo, deslocamos uma coluna para a direita.

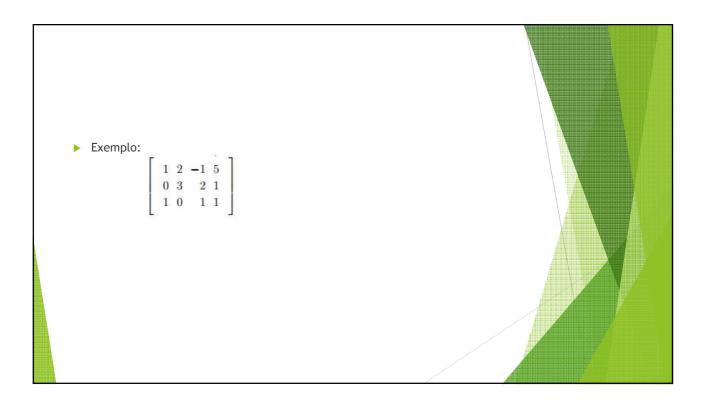
$$\begin{array}{c} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & \hline{0} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{array} \\ \end{array}$$
 O elemento pivô ainda é nulo, mas agora podemos trocar com a linha de baixo.

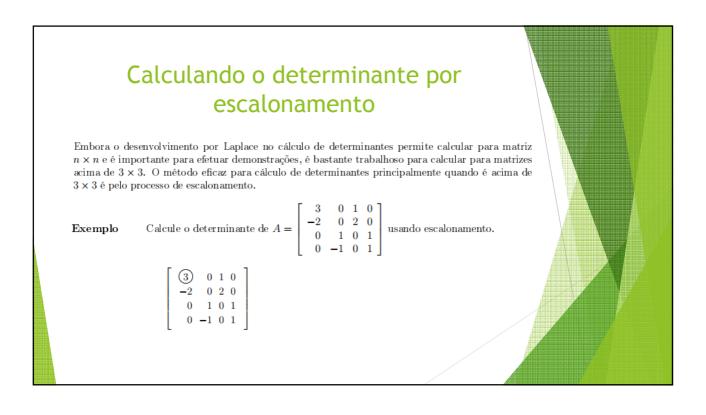
No caso de estar calculando o determinante, lembrar que a troca de linha muda o sinal do determinante. Tendo o elemento pivô não nulo, prosseguiremos com o procedimento de escalonamento, ainda na segunda etapa (linha de pivô é a segunda linha). Como a terceira linha já tem zero na coluna, nada precisa ser feita.

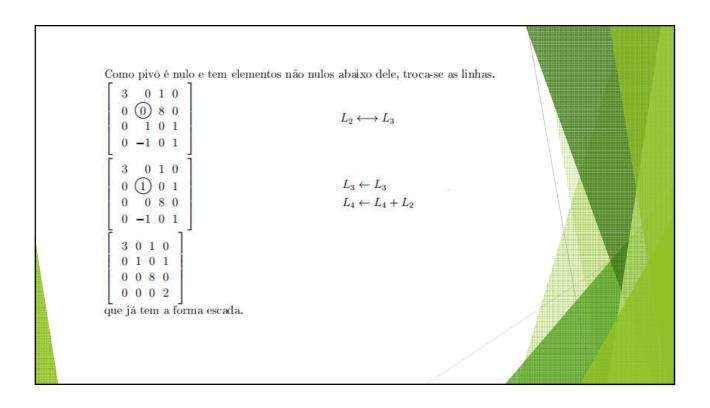
$$\operatorname{piv\^{o}} - \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \bigodot & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3$$

Assim, obtemos o sistema escalonada

$$\begin{bmatrix}
1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}$$







A matriz inversa e o escalonamento

O processo consiste em escalonar a matriz obtido, colocando a matriz desejada no lado esquerdo e a matriz identidade no lado direito. O processo de escalonamento é similar ao da resolução do sistema linear, mas as operações serão aplicadas em todas linhas que não sejam do pivô (acima e abaixo da linha de pivô). Assim, obteremos uma matriz diagonal no lado esquerdo. Dividindo cada linha com o elemento do diagonal do lado esquerdo usando a operação elementar $L_i \leftarrow \lambda L_i$, obteremos uma matriz identidade no lado esquerdo. A matriz no lado direito é a matriz inversa.

O processo de escalonar tanto para cima como para baixo da linha de pivô (e deixar o pivô como 1) para resolver o sistema ou inverter uma matriz é denominado de método de Gauss-Jordan.

