IFRS - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul Campus Ibirubá

Ciência da Computação

Geometria Analítica e Álgebra linear

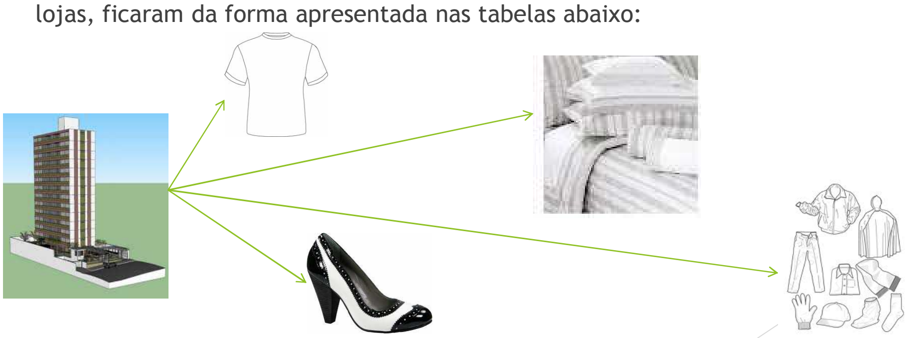
Profª Vanussa G. D. de Souza

22/03/2016

Matrizes

- Exemplo:

Uma grande empresa é composta por três lojas. Esta empresa comercializa roupas, calçados, artigos de cama, mesa e banho e roupas especiais para prática de esportes. A partir dos três pontos de venda, são atendidos os mercados do Estado de Minas Gerais, demais Estados da região Sudeste e países africanos de língua portuguesa. As vendas de um determinado mês, de cada uma das três lojas, ficaram da forma apresentada nas tabelas abaixo:



Loja 1

Produtos	Minas Gerais	Outros Estados	África
Roupas	50	65	122
Sapatos	22	32	85
Cama, mesa e banho	8	12	15
Roupas especiais	4	8	7

Loja 2

Produtos	Minas Gerais	Outros Estados	África
Roupas	58	25	50
Sapatos	26	16	0
Cama, mesa e banho	2	2,5	0
Roupas especiais	6	7	0

Loja 3

Produtos	Minas Gerais	Outros Estados	África
Roupas	32	12	0
Sapatos	28	14	0
Cama, mesa e banho	4	6	0
Roupas especiais	1,5	2	0

Observação: Valor das vendas mensais em milhões de reais.

Questionamentos

- Como foram organizadas as tabelas?
- As tabelas são formadas por linhas e colunas. O que representa cada linha e cada coluna?
- Analisando o item sapato, qual das lojas teve a maior arrecadação? Qual o volume total de vendas de sapatos da empresa, para Minas Gerais?

Continuação

Agora, supondo-se que as alíquotas de impostos para vendas dentro do Estado, fora do Estado e para exportação , no caso dos produtos desta loja, sejam respectivamente 18%, 12% e 0%, e que queiramos saber qual o volume total de impostos a ser pago, em relação às vendas de cada setor da empresa? Qual é o valor total de impostos pagos por esta empresa?

Conceitos básicos

O que é uma matriz?

- **Notação**
- **Ordem**

$$A = \begin{bmatrix} -5 & \sqrt{2} & -\pi \\ 0 & \dfrac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

2 x 3

linhas colunas

Definição:

- Matrizes:

  Conjunto de números organizados na forma de linhas e colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

diagonal principal $i = j$

diagonal secundária $i + j = n + 1$

Tipos de Matrizes

- Matriz Quadrada:

  É a matriz que apresenta o mesmo número de linhas e colunas.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- Matriz Diagonal:

  É uma matriz quadrada cujo os elementos que não se encontram na diagonal principal são nulos

$$B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- Matriz Identidade:

Matriz quadrada onde os elementos que pertencem à diagonal principal são sempre iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz Triangular Superior/Inferior:

Uma matriz de ondem n (quadrada) é triangular quando todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

$$B = \begin{bmatrix} -7 & \sqrt{5} & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

- Matriz Nula:

É uma matriz de qualquer ordem, sendo que todos os seus elementos são iguais a zero.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

- Adição:

Dada duas matrizes, A e B, as duas de ordem m x n. Então, A + B = C, com C de ordem m x n ↔ $A + B = C \leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Subtração:

Dada duas matrizes, A e B, as duas de ordem m x n. Então A – B = C de ordem m x n ↔ $A - B = C \leftrightarrow a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -5 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de Matrizes

Considerando as matrizes A, B e C, são válidas as seguintes propriedades:

- (i) Comutativa : A + B = B + A
- (ii) Associativa : A + (B + C) = (A + B) + C
- (iii) Elemento Neutro : A + 0 = 0 + A = A
- (iv) Para cada matriz A, m x n, existe uma única matriz D, m x n tal que A + D = 0. Denotaremos D por – A, e esta matriz recebe o nome de inversa aditiva ou negativa de A.

Multiplicação

Sendo A uma matriz do tipo m x n e B uma matriz do tipo n x p, define-se produto da matriz A pela matriz B a matriz C, do tipo m x p, tal que cada elemento de C (cij) satisfaz:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (\dots) + a_{in}b_{nj}$$

Em outras palavras, cada elemento de C é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz B e , a seguir, somando-se os produtos obtidos. Veja abaixo:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.3 + 3.2 & 2.1 + 3.4 \\ 1.3 + 0.2 & 1.1 + 0.4 \\ 4.3 + 5.2 & 4.1 + 5.4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 3 & 1 \\ 22 & 24 \end{bmatrix}$$

$$A_{3x2}.B_{2x2} = AB_{3x2}$$

Propriedades da Multiplicação

Considerando as matrizes A, B e C, são válidas as seguintes propriedades:

- (i) Associativa : A . (B . C) = (A . B) . C
- (ii) Distributiva (à esquerda \ à direita): A . (B + C) = A.B + A.C

  (A + B) . C = A.C + B.C

Potenciação de Matrizes

Dada uma matriz quadrada **A** e um número $k \in Z$ (conjunto dos números inteiros e positivos), definimos a *k-ésima potência da matriz* **A** como:

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{AAA}\cdots\mathbf{A}}_{\text{k vezes}}$$

Definição:

Sendo A uma matriz quadrada de ordem m, define-se:

$A^0 = I_m$, sendo $A \neq 0$;

$A^p = \underbrace{A \,.\, A \,.\, A \,.\, A \,.\, \ldots \,.\, A}_{p\ fatores}$, onde p é um inteiro positivo;

Propriedades da Potenciação

Sejam A e B matrizes quadradas e α e β inteiros não negativos, então:

(i) $A^{\alpha} A^{\beta} = A^{\alpha + \beta}$

(ii) $(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha \beta}$

(iii) Se A e B comutam, ou seja, se AB = BA, então $(AB)^{\alpha} = A^{\alpha} B^{\alpha}$

Propriedades da multiplicação por um escalar

Sejam A e B matrizes de mesmo tamanho e r e s escalares:

- (i) r (s A) = (rs) A .
- (ii) (r + s) A = r A + s A.
- (iii) r (A + B) = r A + r B.
- (iv) A (r B) = r (AB) = (r A) B.

Matriz Transposta

Dada uma matriz A de ordem m x n, a matriz transposta dela será representada por A^t de ordem "invertida" n x m.

Essa ordem invertida significa que para transformarmos uma matriz em matriz transposta, basta trocar os elementos das linhas pelo das colunas e vice-versa.

Exemplo:

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ então\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Transposição

- Considerando as matrizes A, B e a constante K $\in$ IR, as seguintes propriedades são válidas:
- (i) $(A^t)^t = A$
- (ii) $(A + B)^t = A^t + B^t$
- (iii) $(k A)^t = k A^t$
- (iv) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$