IFRS - Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
Campus Ibirubá

Ciência da Computação

Geometria Analítica e Álgebra linear

Profª Vanussa G. D. de Souza

07/06/2016

Espaços vetoriais

Definição de um Espaço Vetorial;

Exemplos de Espaços Vetoriais;

Propriedades de Espaços Vetoriais.

Espaços Vetoriais

Vetores

Segmentos orientados que tem comprimento, direção e sentido Por exemplo, força, velocidade, aceleração, deslocamento, momento, campo elétrico, etc.

Ponto inicial *Posição final*

A cada vetor não nulo v corresponde um vetor oposto –v, que tem o mesmo módulo, a mesma direção, porém sentido contrário ao de v.

Um vetor v é unitário se |v| = 1

Dois vetores são colineares se tiverem a mesma direção (mesma reta ou retas paralelas)

Dois ou mais vetores são coplanares se pertencerem a um mesmo plano.

Dois vetores u e v são ortogonais se u.v = 0

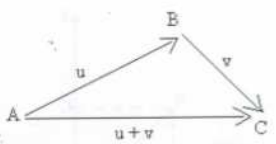
Dois vetores u e v são paralelos quando seus componentes são proporcionais

Espaços Vetoriais

Operações com vetores

Adição:

Sejam os vetores u e v representados pelos segmentos orientados AB e BC respectivamente:



Propriedades da adição

I) Associativa: (u + v) + w = u + (v + w)

II) Comutativa: u + v = v + u

III) Existe um só vetor nulo 0 tal que, para todo vetor v, se tem v + 0 = 0 + v = v

IV) Qualquer que seja o vetor v existe um só vetor – v tal que: v + (-v) = -v + v = 0

Espaços Vetoriais

Multiplicação de um número real por um vetor:

Dado um vetor $v \neq 0$ e um número real $k \neq 0$, chama-se produto do número real k pelo vetor v o vetor $p = kv$

a) módulo $|p| = |kv| = |k|\,|v|$;

b) direção: a mesma de v;

c) sentido: o mesmo de v se $k > 0$; e contrário ao de v se $k<0$

Observações:

1) Se $k=0$ ou $v=0$, o vetor $k.v$ é o vetor 0;
2) Se $k= -1$, o vetor $(-1).v$ é o oposto de v, isto é, $(-1).v= -v$.

Espaços Vetoriais

Propriedades

Se u e v são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

I) $a.(bu) = (ab).u$

II) $(a + b)\,u = au + bu$

III) $a.(u + v) = au + av$

IV) $1u = u$

Espaços Vetoriais

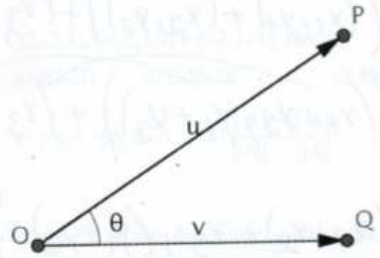
- ***O produto escalar*** entre dois vetores será dado por u.v, e representa um número real, ou seja:

$$u.\ v = (x_1x_2 + y_1y_2)$$

- ***Módulo*** de um vetor v = (x, y) representado por |v| é o número real não negativo:

$$|v| = \sqrt{v.v} = \sqrt{(x,y).(x,y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- ***Ângulo entre dois vetores*** $\cos\alpha = \dfrac{u.v}{|u|.|v|}$.



Espaços Vetoriais

- ***Paralelismo***. Dois vetores são paralelos (colineares) se existe um número k tal que: u = k.v

- ***Ortogonalidade***. Dois vetores são ortogonais quando o produto escalar entre eles é nulo, u.v = 0

Espaços Vetoriais

Um **espaço vetorial** é um conjunto **não vazio** de objetos, chamados **vetores**, sobre os quais estão definidas duas operações, chamadas **adição e multiplicação por escalar** que satisfazem as seguintes propriedades:

(I) **(comutativa)** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

(II) **(associativa)** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

(III) **(elemento neutro da adição)** Existe um vetor, chamado nulo, e denotado por $\vec{0}$ tal que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(IV) **(elemento simétrico)** Para todo vetor $\vec{u}$ existe um vetor, chamado simétrico, e denotado por $-\vec{u}$, tal que

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$$

Espaços Vetoriais

(V) **(associativa)** $\lambda(\mu \vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.

(VI) **(distributiva)** $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.

(VII) **(distributiva)** $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

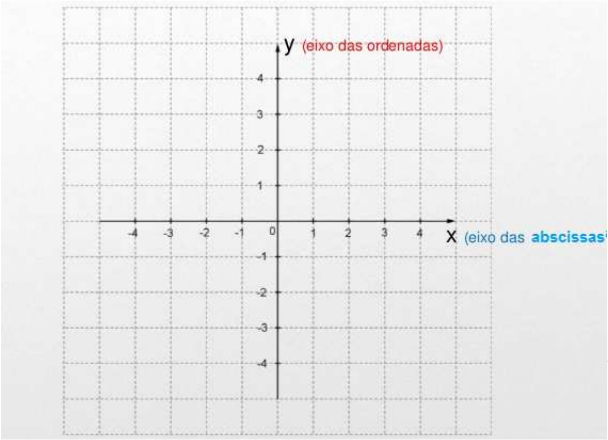
(VIII) **(elemento neutro da multiplicação)** $1\vec{u} = \vec{u}$

para todos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\lambda, \mu \in IR$.

Espaços Vetoriais

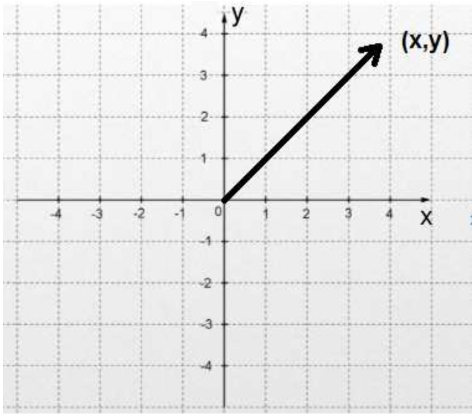
(a) Os vetores do plano cartesiano

$IR^2 = \{(x, y); x, y \in IR\}$.



Espaços Vetoriais

Associamos um ponto (x, y) do plano cartesiano ao vetor cuja origem é (0, 0) e cuja extremidade é (x, y).



Espaços Vetoriais

Definimos as seguintes operações para vetores do plano.

Sejam $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)$ vetores e λ ϵ R:

•Adição: $\vec{u}+\vec{v}=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.

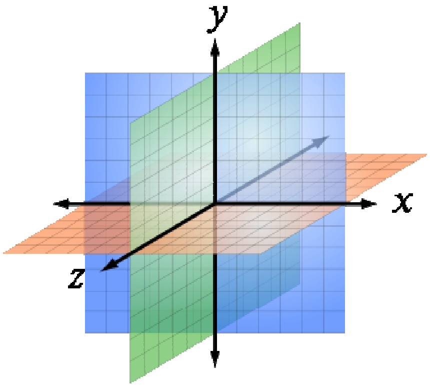
•Multiplicação por escalar: $\lambda\,\vec{u} = \lambda\,(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Note que $\vec{0}=(0,0)$ e se $\vec{u}=(a,b)$, então $-\vec{u}=(-a,-b)$.

Espaços Vetoriais

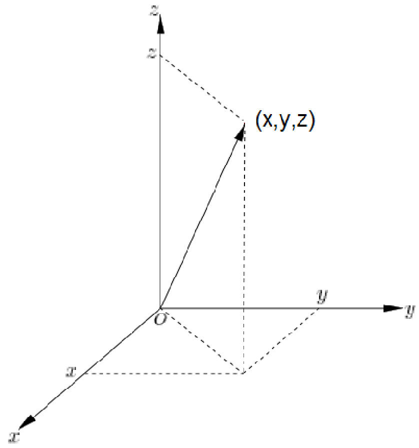
(b) Os vetores do espaço cartesiano

R³ = {(x, y, z); x, y, z ϵ IR}



Espaços Vetoriais

Associamos um ponto (x, y, z) do espaço cartesiano ao vetor cuja origem é (0, 0, 0) e cuja extremidade é (x, y, z).



Espaços Vetoriais

Definimos as seguintes operações para vetores do plano.

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores e λ ϵ IR.

- Adição:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

- Multiplicação por escalar:

$$\lambda \vec{v} = \lambda(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2).$$

Note que $\vec{0} = (0,0,0)$, e se $\vec{u} = (a, b, c)$ então $-\vec{u} = (-a, -b, -c)$.

Espaços Vetoriais

(c) O conjunto das matrizes de ordem 2

O conjunto $M_2(\mathrm{IR})$ $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathrm{IR} \right\}$ munido da adição de matrizes e da multiplicação por escalar, é claramente um espaço vetorial.

Note que $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

E se $\vec{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $-\vec{u} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$.

Espaços Vetoriais

(d) O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2

Vamos definir o conjunto dos polinômios

$P_2(\mathrm{IR}) = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2;\ a_0, a_1, a_2 \in \mathrm{IR}\}$.

Sejam $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ e $\lambda \in \mathrm{IR}$.

- Adição: $p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2$.
- Multiplicação por escalar: $\lambda p(t) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + (\lambda a_2)t^2$.

Espaços Vetoriais

$P_2(IR)$ é um espaço vetorial.

Note que $\vec{0} = 0 + 0t + 0t^2 = \vec{0}$ (polinômio nulo);

e se $\vec{u} = p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, então

$-\vec{u} = -p(t) = -a_0 + (-a_1)t + (-a_2)t^2$.

Espaços Vetoriais

(e) Seja $V = \{x \in IR;\ x > 0\}$

Se considerarmos em *V* as operações usuais de + e . , *V* não é um espaço vetorial. (Por quê?)

Vamos agora alterar a noção de "adição" e "multiplicação por escalar" em *V*:

$x \oplus y = x \cdot y$ e $\lambda \odot x = x^{\lambda}$

Neste caso, *V* munido de $\oplus$, $\odot$ é um espaço vetorial.

Propriedades:

I) Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro da adição).

II) Cada vetor $u \in V$ admite apenas um simétrico $(-u) \in V$.

III) Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$, então $u = v$.

IV) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se $-(-v) = v$, isto é, o oposto de $-v$ é v.

V) Quaisquer que sejam $u, v \in V$, existe um e somente um $x \in V$ tal que: $u + x = v$; esse vetor x será representado por $x = v - u$.

Propriedades:

VI) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $0.v = 0$. Naturalmente, o primeiro zero é o número real zero, e o segundo é o vetor $0 \in V$.

VII) Qualquer que seja $\lambda \in R$, tem-se: $\lambda.0 = 0$.

VIII) $\lambda.0 = 0$ implica $\lambda = 0$ ou $v = 0$.

IX) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $(-1).v = -v$

X) Quaisquer que sejam $v \in V$ e $\lambda \in R$, tem-se: $(-\lambda).v = \lambda.(-v) = -(\lambda.v)$

Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto de V. O subconjunto S é um *subespaço vetorial* de V se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas no espaço vetorial V.

Para mostrar que um subconjunto S é um subespaço vetorial de V, deveríamos testar os oito axiomas de espaço vetorial relativos à adição e à multiplicação por escalar.

Teorema

Um subconjunto S, *não-vazio*, de um espaço vetorial V é um subespaço de V se estiverem satisfeitas as condições:

I) para quaisquer u, v $\in$ S, tem-se:

$u + v \in S$

II) para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, u $\in$ S, tem-se:

$a.u \in S$

Se válidas essas duas condições em S, os oito axiomas de espaço vetorial se verificam em S.

Subespaços Vetoriais

Todo espaço vetorial de V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto {0}, chamado de subespaço zero ou subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial V. Esses dois são os subespaços *triviais* de V. Os demais subespaços são denominados *subespaços próprios* de V.

Por exemplo, os subespaços triviais de $V = R^3$ são $\{(0, 0, 0)\}$ e o próprio R^3. Os subespaços próprios de R^3 são as retas e os planos que passam pela origem.

Para $V = R^2$, os subespaços triviais são: $\{(0, 0)\}$ e R^2, enquanto os subespaços próprios são as retas que passam pela origem.

Subespaços Vetoriais

Exemplo

Verificar se S é um subespaço vetorial de V

a) $V = R^2$ e $S = \{(x, y) \in R^2 / y = 2x\}$

b) $V = R^2$ e $S = \{(x, 4 - 2x); x \in R\}$

1. Seja A(3,1,-4), B(4,1,-1), C(2,-5,4), D(-2,1,7) e E(2,1,-1), calcule:

a) A+B b) 3A+2B c) 3C-2D d) C-B+2E e) 4B+5E-D+2A

f) 1/3(A+B-C+D-E) g) $|A|.A-|A|.B$ h) $\left|\frac{B}{|B|}\right|+3\left|\frac{A}{|A|}\right|$ i) $|2A+5C|$

j) A.B k) A(-C)+A.E

2. Verifique se são unitários os vetores, se não, determine o vetor unitário correspondente:

a) v=(1,2) b) v=(5/2,-3) c) v=(4,1/2,-1/3) d) v=(-4/3,5/2)

e) v=(1,6,-12) f) v= $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

3. Dados os pontos P(x,4), Q(5,6), R(7,8) e S(10,11) determine "x" para que os vetores PQ e RS sejam ortogonais.

Respostas:

1. a) (7,2,-5) b) (17,5,-14) c) (10,-17,-2) d) (2,-4,3)

e) (34,10,-24) f) (1/3,7/3,-1/3) g) $(-\sqrt{26}, 0, -3\sqrt{26})$ h) 4 i) $\sqrt{929}$

j) 17 k) 26

2. a) $|v|=\sqrt{5}$ b) $|v|=\frac{\sqrt{61}}{2}$ D c) $|v|=\frac{17}{6}$ E d) $|v|=\sqrt{181}$

C e) $|v|=\frac{\sqrt{589}}{6}$ f) $|v|=1$

3. x=7