IFRS - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
Campus Ibirubá

Ciência da Computação

Geometria Analítica e Álgebra linear

Profª Vanussa G. D. de Souza

10/05/2016

Sistemas lineares

- Todo sistema formado por equações lineares é chamado de sistema linear.

$$S \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Definição. Um **sistema de** m **equações lineares** em n variáveis (ou incógnitas) é um conjunto de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 ... + a_{mn}x_n = b \end{cases}$$

onde a_{ij}, b_k para $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ e $k = 1, ..., m$, são constantes reais, chamados os **coeficientes do sistema**.

- Usando a notação de matrizes, o sistema pode ser representado pela equação matricial:

AX = B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz A é chamada de matriz do sistema.

Definição. Uma **solução** do sistema linear $AX = B$ é uma matriz coluna de números reais

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

tal que todas as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n.$$

Ou seja, S satisfaz

$$AS = B.$$

O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado o **conjunto solução** do sistema.

Exemplo O sistema linear

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 180 \\ 4x_1 + 2x_2 = 120 \end{cases} .$$

é representado pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

Este sistema possui uma única solução

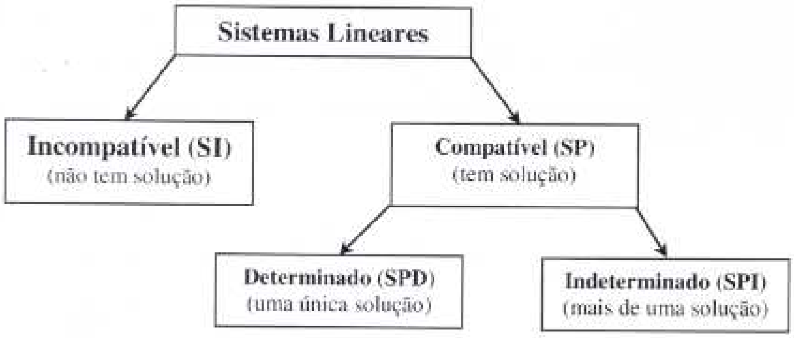
$$X = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$x_1 = 20,$$
$$x_2 = 20.$$

- ***Matriz Incompleta:*** é a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.
- ***Matriz Completa:*** é a matriz , que obtemos ao acrescentarmos à matriz incompleta uma última coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$



Sistema Normal

Quando o número de equações for o mesmo do número de incógnitas e o determinante da matriz incompleta associado ao sistema for diferente de zero, diremos que um sistema é normal.

Regra de Cramer

Todo sistema normal ($\Delta \neq 0$ e o número de incógnitas igual ao número de equações) tem uma única solução; portanto possível e determinado. A solução desse sistema será dada por:

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \text{ou} \quad x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$$

onde

- $i = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$
- D ou $\Delta \rightarrow$ determinante da matriz incompleta associada ao sistema.
- D_i ou $\Delta x_i \rightarrow$ determinante obtido através da substituição, na matriz incompleta da coluna i pela coluna formada pelos termos independentes.

- Exemplo:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-3y+z=13 \\ -x+2y-3z=-20 \end{cases}$$

Propriedades dos sistemas equivalentes

1) Trocando de posição as equações de um sistema, obtemos um outro equivalente ao primeiro.
2) Multiplicando uma ou mais equações de um sistema por um número $k \in \Re^*$, obtemos um sistema equivalente ao primeiro.
3) Adicionando a uma das equações de um sistema o produto de outra equação, desse mesmo sistema, por um número $k \in \Re^*$, obtemos um sistema equivalente ao primeiro.

Exemplo

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=1 \quad (x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ -x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ 3y=3 \end{cases}$$

EQUIVALENTES

Solução de Sistemas Lineares

Operações Elementares:

1. Trocar duas equações do sistema de posição.
2. Substituir uma equação pela mesma equação multiplicada por um escalar diferente de 0.
3. Substituir uma equação pela mesma equação somada a outra equação multiplicada por um escalar.

Teorema. *Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$ são tais que a matriz aumentada $[C|D]$ é obtida de $[A|B]$ aplicando-se operações elementares, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.*

Método de Gauss-Jordan

Definição. Uma matriz está na **forma escalonada reduzida** quando ela satisfaz as seguintes condições:

1. O primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula (chamado o **pivô** da linha) é igual a 1.
2. O pivô da linha $i+1$ ocorre à direita do pivô da linha i.
3. Se uma coluna contém um pivô, então todas os outros elementos desta coluna são iguais a 0.
4. Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não-nulas.

Exemplos As matrizes abaixo estão na forma escalonada reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \pi \end{bmatrix}.$$

A solução de cada um destes sistemas é imediata: no primeiro sistema, x_2 é uma variável livre, enquanto que no segundo x_1 e x_4 são ambas variáveis livres; os dois sistemas têm portanto infinitas soluções. O terceiro sistema não tem solução e o quarto sistema tem solução única.

Já a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

está apenas na forma escalonada, não na forma escalonada reduzida.

Método de Gauss-Jordan

Resolva o sistema linear seguinte pelo método de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 5x + 5y & = & 15 \\ 2x + 4y + z & = & 10 \\ 3x + 4y & = & 11 \end{cases}$$

Método de Gauss-Jordan

Resolva o sistema linear seguinte pelo método de Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3z-9w & = & 6 \\ 5x+15y-10z+40w & = & -45 \\ 4x+12y-2z+14w & = & -24 \\ x+3y-z+5w & = & -7 \end{array}\right.$$

Método de Gauss-Jordan

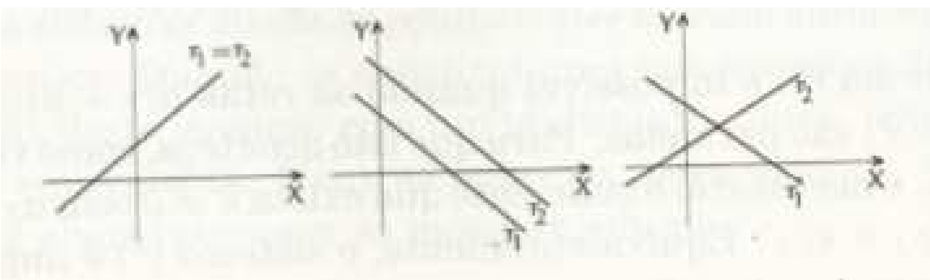
Resolva o sistema linear seguinte pelo método de Gauss-Jordan.

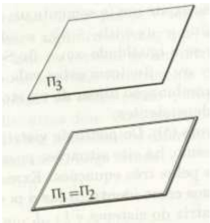
$$\left\{\begin{array}{rcr} x+3y+13z & = & 9 \\ y+5z & = & 2 \\ -2y-10z & = & -8 \end{array}\right.$$

Definição: Dada uma matriz A_{mxn}, seja B_{mxn} a matriz escalonada equivalente a A. O posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B.

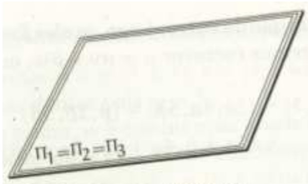
Teorema

1. Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se e somente se o <u>posto da matriz completa é igual ao posto da matriz incompleta;</u> caso contrário o sistema é impossível.
2. Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e p = n, <u>a solução será única</u> (n = número de incógnitas).
3. Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e p < n, podemos escolher n - p incógnitas (variáveis livres - nulidade) e outras p incógnitas serão dadas em função destas; portanto teremos infinitas soluções.

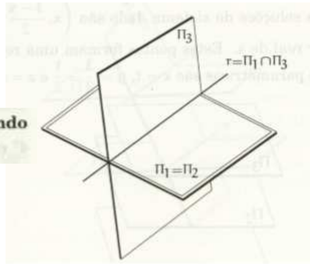




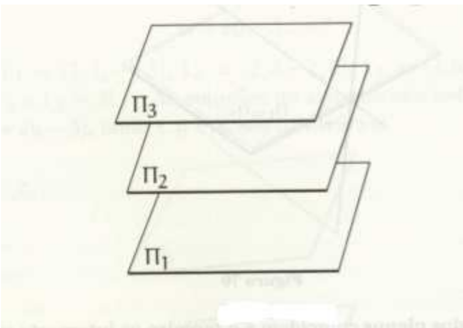
Dois dos planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles



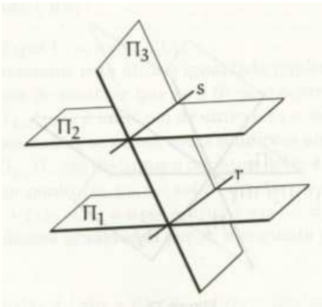
Os três planos coincidem



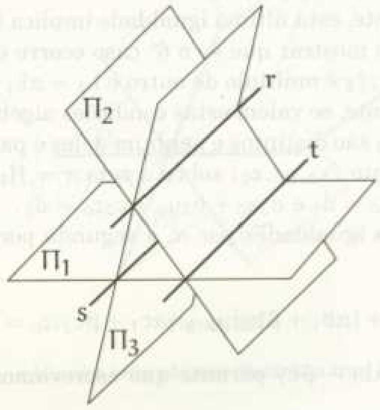
Dois dos planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta



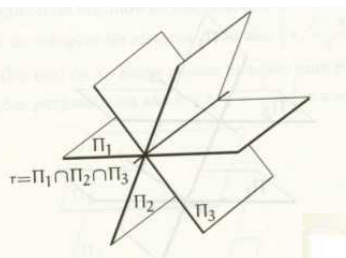
Os planos Π_1, Π_2 e Π_3 são paralelos dois a dois



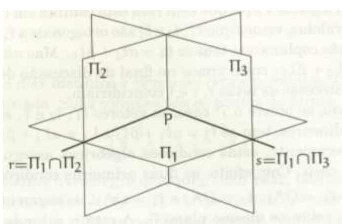
Os planos Π_1 e Π_2 são paralelos e Π_3 os intersecta segundo retas paralelas r e s



Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $s = \Pi_1 \cap \Pi_3$ e $t = \Pi_2 \cap \Pi_3$, paralelas umas às outras.



Π_1, Π_2 e Π_3 são três planos distintos que têm uma reta r em comum



Os três planos Π_1, Π_2 e Π_3 têm um único ponto em comum

Exemplo

Resolver os sistemas através do processo de escalonamento.

1. $S = \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ 4x - 3y + z = 5 \end{cases}$

S={(1, -1, -2)}

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $p_c = p_a = 3$

m = 3, n = 3 e p = 3. Então, a solução é única (3, -2, 2)

3. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ $p_c = p_a = 2$

m = 2, n = 3 e p = 2. Temos um grau de liberdade: $x_1 = -10 - 7x_3$, $x_2 = -6 - 5x_3$

4. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $p_c = p_a = 2$

m = 3, n = 4 e p = 2. Temos dois graus de liberdade: $x_1 = -10 + 10x_3 + 2x_4$, $x_2 = 4 - 7x_3 - x_4$