IFRS - Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
Campus Ibirubá

Ciência da Computação

Geometria Analítica e Álgebra linear

Profª Vanussa G. D. de Souza

05/04/2016

Forma escalonada

Uma matriz é denominada de forma escalonada ou forma escada quando o número de zeros no lado esquerdo do primeiro elemento não nulo da linha, aumenta a cada linha.

Exemplo $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz escalonada, mas $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é.

No caso de ter esgotado o número de colunas, isto é, quando uma linha tornar nula, todas linhas seguintes devem ser linhas nulas.

Exemplo $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz escalonada.

A quarta linha não aumentou os números de zeros por ter esgotado as colunas, mas é uma matriz escalonada.

Método de eliminação de Gauss (escalonamento)

O procedimento consiste em converter a matriz aumentada numa matriz escalonada, aplicando uma sequência de operações elementares. Tais operações elementares são constituídas de três operações básicas:

- **Somar múltiplo de outra linha:**
- **Troca de linhas:**
- Multiplicar uma linha por número não nulo

- Exemplo: $\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & -7 \\ -3 & -6 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right]$ $\quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$

Segunda linha:

$$\begin{array}{rrrrrrl} L_2: & 2 & 4 & -2 & 3 & -7 & \\ -2L_1: & -2 & -4 & 2 & -2 & 6 & (+) \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \end{array}$$

Terceira linha:

$$\begin{array}{rrrrrrl} L_3: & -3 & -6 & 2 & -1 & 6 & \\ 3L_1: & 3 & 6 & -3 & 3 & -9 & (+) \\ \hline & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & \end{array}$$

O elemento pivô será escolhido inicialmente como sendo uma coluna a direita da etapa anterior. Caso ele for nulo, trocar com linha de baixo. Caso todos os elementos desta coluna nas linhas de baixo forem nulos, deslocar para a direita. No exemplo, o elemento pivô é nulo e todos elementos correspondentes nas linhas de baixo também. Logo, deslocamos uma coluna para a direita.

$$\begin{array}{r} \\ \text{pivô}\rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

O elemento pivô ainda é nulo, mas agora podemos trocar com a linha de baixo.

$$\begin{array}{r} \\ \text{pivô}\rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

No caso de estar calculando o determinante, lembrar que a troca de linha muda o sinal do determinante. Tendo o elemento pivô não nulo, prosseguiremos com o procedimento de escalonamento, ainda na segunda etapa (linha de pivô é a segunda linha). Como a terceira linha já tem zero na coluna, nada precisa ser feita.

$$\begin{array}{r} \\ \text{pivô}\rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3$$

Assim, obtemos o sistema escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante por escalonamento

Embora o desenvolvimento por Laplace no cálculo de determinantes permite calcular para matriz $n \times n$ e é importante para efetuar demonstrações, é bastante trabalhoso para calcular para matrizes acima de 3×3. O método eficaz para cálculo de determinantes principalmente quando é acima de 3×3 é pelo processo de escalonamento.

Exemplo Calcule o determinante de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ usando escalonamento.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como pivô é nulo e tem elementos não nulos abaixo dele, troca-se as linhas.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que já tem a forma escada.

A matriz inversa e o escalonamento

O processo consiste em escalonar a matriz obtido, colocando a matriz desejada no lado esquerdo e a matriz identidade no lado direito. O processo de escalonamento é similar ao da resolução do sistema linear, mas as operações serão aplicadas em todas linhas que não sejam do pivô (acima e abaixo da linha de pivô). Assim, obteremos uma matriz diagonal no lado esquerdo. Dividindo cada linha com o elemento do diagonal do lado esquerdo usando a operação elementar $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, obteremos uma matriz identidade no lado esquerdo. A matriz no lado direito é a matriz inversa.

O processo de escalonar tanto para cima como para baixo da linha de pivô (e deixar o pivô como 1) para resolver o sistema ou inverter uma matriz é denominado de método de Gauss-Jordan.

Exemplo Obter a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

A matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Exemplo:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Exemplo: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

- Exercício: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$