[数学] [数论] [欧拉函数] [线性筛]

【SPOJ】LCM SUM

2月 13, 2020

题意

求 $\sum_{i=1}^{n} lcm(i,n)$ 。

分析

我们并不太会直接求 lcm ，于是考虑转换成 gcd 来做。

$$\sum_{i=1}^{n} lcm(i,n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{in}{gcd(i,n)}$$
$$=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{in}{gcd(i,n)}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{in}{gcd(i,n)})+n$$

对于 gcd 而言，显然有 $gcd(a,b)=gcd(b-a,b)$ ，于是：

$$\sum_{i=1}^{n} lcm(i,n)$$
$$=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{in}{gcd(i,n)}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{in}{gcd(n-i,n)})+n$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{in+(n-i)n}{gcd(i,n)}+n$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n^2}{gcd(i,n)}+n$$

考虑枚举 $gcd(i,n)$ 的值，如果 $gcd(i,n)=d$ ，显然有 $gcd(\frac{i}{d},\frac{n}{d})=1$ ，那么显然这样的 i 有 $\varphi(\frac{n}{d})$ 个。

于是有 $\sum_{i=1}^{n} lcm(i,n)$
$$=\frac{1}{2}\sum_{d|n}\frac{n^2\varphi(\frac{n}{d})}{d}+n$$
$$=\frac{n}{2}\sum_{d|n}d\varphi(d)+n$$

令 $g(n)=\sum_{d|n}d\varphi(d)$ ，这部分显然可以通过线性筛预处理出来，于是每次询问就 $O(1)$ 了。

```
Click To Expand Code
```

STATISTICS

在线用户: 1

累计访问: 93,051

TEAMS

NULL (2019)

One,Two,Three,AK (2018)

TEMPLATE

Template

CATEGORIES

Categories

选择分类目录

ARCHIVE

By Xiejiadong . No Comment

XIEJIADONG Edit your profile or check this video to know more

YOU MAY ALSO LIKE

“数论基础”课程学习笔记

3月 4, 2020

CODEFORCES ROUND #619

2月 15, 2020

【湖北省队互测】— 个人的数论

2月 14, 2020

LEAVE A COMMENT

Your Message

发表评论前，请滑动滚动条解锁

b

i

link

b-quote

del

ins

img

Archive

选择月份

SEARCH

Search ...

COMMENTS

QAQ发表在《圆方树学习笔记》

FRIENDS

Claris

frank_c1

Awd

zerol

cubercsl

cxhscst2

Manchery

oldjang

lkmcfj

ul

ol

li

code

more

关闭标签

crayon

jxtxzzw

godweiyang

zkx06111

billChen

*Your name **

*Your email **

Your webiste

在此浏览器中保存我的姓名、电子邮件和站点地址。

发表评论

沪ICP备19039963号