Xiejiadong

Blog

[学习笔记] [数学] [数论] [线性筛] [莫比乌斯函数]
[莫比乌斯反演]

莫比乌斯反演学习笔记

2月 13, 2020

莫比乌斯反演

数论函数

定义域为正整数的函数称为数论函数。

积性函数

如果 $\forall a, b, (a, b) = 1, f(ab) = f(a)f(b)$ ，这样的数论函数称为积性函数。

常见的数论函数：

- 欧拉函数（如果 $(a, b) = 1$ ，则有 $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ）
- 莫比乌斯函数
- 除数函数，用 $d_k(n)$ 表示。其值等于所有 n 的因子的 k 次方之和。

完全积性函数

如果 $\forall a,b,f(ab)=f(a)f(b)$ ，这样的数论函数称为完全积性函数。

常见的完全积性函数有：

- $f(x)=e^x$
- $f(x)=x$

Dirichlet 卷积

两个数论函数 f,g 的 Dirichlet 卷积为：
$(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g(\frac{n}{d})$ 。

其中 Dirichlet 卷积的单位元定义为 e ，且
$e(n)=e(n)=\begin{cases}1\ (n=1)\\0\ (n\neq 1)\end{cases}$

【结论】如果 f,g 均为积性函数，则 $f*g$ 也为积性函数。

莫比乌斯函数

如果 n 含有平方因子，那么 $\mu(n)=0$ ；否则 $\mu(n)=(-1)^k$ ，其中 k 为 n 的本质不同的质因子个数。

【性质】$e(n)=\sum_{d|n}\mu(d)$.

【证明】我们令 $n=\prod p_i^{q_i},n'=\prod p_i$ 。

显然，枚举 n 的因子和枚举 n' 因子的差异就在于少枚举了含有平方因子的因子。

则有 $\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|n'}\mu(d)$ 。

此时的 d，我们就可以考虑在 $p_1,p_2,\cdots p_k$ 中任意选取组成一个因子了，于是就有
$\sum_{d|n'}\mu(d)=\sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\i\end{pmatrix}(-1)^i=\sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\i\end{pmatrix}(-1)^i\cdot 1^{(k-i)}=(-1+1)^k=0^k$ 。

也就是只有当 $k=0$ 的时候 $\sum_{d|n}\mu(d)=1$ ，其他时候 $\sum_{d|n}\mu(d)=0$ 。

而显然当 $k=0$ 的时候，$n=1$ ，于是就证明了。

莫比乌斯反演

Categories

选择分类目录

ARCHIVE

Archive

选择月份

SEARCH

Search ...

COMMENTS

QAQ发表在《圆方树学习笔记》

FRIENDS

Claris

frank_c1

Awd

zerol

设 $f(n),g(n)$ 是两个数论函数，如果有 $f(n)=\sum_{d|n}g(d)$ ，那么有 $g(n)=\sum_{d|n}f(d)\mu(\frac{n}{d})$ 。

【证明】因为我们有 $e=\mu*1$ ，而 $f(n)=\sum_{d|n}g(d)$ 其实就是 $f=g*1$ 。

于是 $\mu*f=g*1*\mu=g*(1*\mu)=g*e=g$ 即 $g=f*\mu$ 也就是 $g(n)=\sum_{d|n}f(d)\mu(\frac{n}{d})$ 。

不过一般情况下构造一个 $f(n)=\sum_{d|n}g(d)$ 形式的式子是比较难的，一般情况下我们会直接化成 $[gcd(i,j)=1]$ 的形式，然后通过 $\sum_{d|gcd(i,j)}\mu(d)$ 来计算。

一种比较常见的问题是这样的：求 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(gcd(i,j))(n\le m)$.

我们考虑枚举 $gcd(i,j)$ 的结果，假设 $d=gcd(i,j)$ ，于是就有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(gcd(i,j))$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}f(d)[gcd(i,j)=1]$

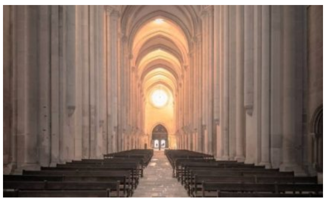
考虑将 $[gcd(i,j)=1]$ 部分反演，则有
$\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}f(d)[gcd(i,j)=1]$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}f(d)\sum_{d'|gcd(i',j')}\mu(d')$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{d'=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(d')f(d)\left\lfloor\frac{n}{dd'}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{dd'}\right\rfloor$

我们令 $g(T)=\sum_{d|T}f(d)\mu(\frac{T}{d})=f*\mu$

则有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(gcd(i,j))=\sum_{T=1}^{n}g(T)\left\lfloor\frac{n}{T}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{T}\right\rfloor$

【例9】HAOI2011 Problemb

【HAOI2011】Problem b



题意 求\(\sum_{i=a}^b \sum_{j=c}^d [gcd(i,j)=k]\)。 分析 因为 ... 继续阅读

Xiejiadong's Blog 0

【例10】SPOJ5971 LCMSUM

cubercsl

cxhscst2

Manchery

oldjang

lkmcfj

jxtxzzw

godweiyang

zkx06111

billChen

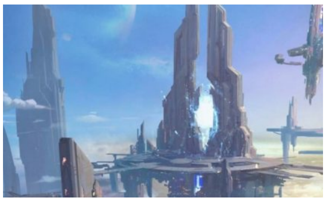
【SPOJ】LCM Sum

题意 求 \(\sum_{i=1}^n lcm(i,n)\) 。 分析 我们并不太会直接求 lcm ， 于是考虑 ... 继续阅读

Xiejiadong's Blog 0

【例11】hdu4944 FSF's game

【HDU4944】FSF's game



题意 求 \(\sum_{i=1}^n\sum_{j=i}^n\sum_{d|i,j}\frac{ij}{g ... 继续阅读

【例12】BZOJ3601 一个人的数论

【湖北省队互测】一个人的数论

题意 求所有 \(\le n\) 且与 \(n\) 互质的数的 \(m\) 次幂的和。分析 题目要求的就是 … 继续阅读

By Xiejiadong . No Comment

XIEJIADONG Edit your profile or check this video to know more

YOU MAY ALSO LIKE

“计算理论基础”学习笔记
3月 18, 2020

“数据库”学习笔记
3月 12, 2020

“编译原理”学习笔记
3月 11, 2020

LEAVE A COMMENT

Your Message

发表评论前，请滑动滚动条解锁

b

i

link

b-quote

del

ins

img

ul

ol

li

code

more

关闭标签

crayon

Your name *

Your email *

Your webiste

☐ 在此浏览器中保存我的姓名、电子邮件和站点地址。

发表评论