望舒草

独行万里，只为曾允你一诺

管理 随笔 - 199 文章 - 0 评论 - 297 阅读 - 47680

min25筛学习笔记

话说我们现在要求一个函数f的前缀和。即求$F(n)=\sum_{i=1}^{n}f(i)$。

min25筛这个算法的主要思想是把$1\dots n$这些数按质数和合数分类，然后分别考虑质数和合数的贡献。

STEP1 质数贡献

我们尝试先解决一个小问题：求$G(m)=\sum_{i=1}^{m}[i\in prime]f(i)$，即$m$以下的质数的$f$值之和。其中$m\in\{\lfloor\frac{n}{1}\rfloor,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,\dots,\lfloor\frac{n}{n}\rfloor\}$，共有$O(\sqrt{n})$种取值。

这玩意很难直接求，于是考虑DP。设$g(j,m)=\sum_{i=1}^{m}[i\in prime\ or\ minp(i)>p[j]]f'(i)$，其中$minp(i)$表示$i$的最小质因子。这个式子的含义是"$i$为质数或$i$的最小质因子$>p[j]$的函数值$f'(i)$"之和。其中$f'(i)$并不一定是我们要求的$f(i)$，它可以是我们构造出来的另一个函数，但它必须满足以下条件：

1. f'在质数处的取值与f相同。即$\forall p\in prime$有$f'(p)=f(p)$。
2. f'是完全积性函数。
3. f'可以快速求前缀和。

显然DP的边界是$g(0,m)=\sum_{i=2}^{m}f'(i)$。

考虑转移，求$g(j,m)$。当$p[j]^2>m$时，m以内不可能有任何最小质因子是$p[j]$的合数，即$p[j]$无法筛掉任何数，因此$g(j,m)=g(j-1,m)\quad(p[j]^2>m)$。

否则，我们只需要在$g(j-1,m)$里"筛掉"$\leq m$的最小质因子为$p[j]$的合数即可。而它们都可以表示为"$p[j]\times$一个$\lfloor\frac{m}{p[j]}\rfloor$以内的最小质因子**大于等于**$p[j]$的数"。于是有：

$$g(j,m)=g(j-1,m)-f'(p[j])\times\left(g(j-1,\lfloor\frac{m}{p[j]}\rfloor)-\sum_{i=1}^{j-1}f'(p[i])\right)\qquad(p[j]^2\leq m)$$

这时f'作为一个完全积性函数的好处就体现出来了，它可以直接乘以后面的一坨东西而不用担心是否互质。请读者认真理解这个式子的含义。

令$|P|$表示$\leq m$的质数个数，则$g(|P|,m)$就是我们前面要求的$G(m)$的值了。显然，我们可以把DP的第一维滚掉。

在具体实现时，我们先预处理出$\sqrt{n}$以内的质数（线性筛），以及所有m的值（用数论分块）。暴力的做法我们可以用STL-map来记录所有m的值的编号，但这里可以更巧妙一些。我们开两个数组 `id1` 和 `id2` ，大小都是$\sqrt{n}$，巧妙地利用"对所有$>\sqrt{n}$的数x，n/x一定$<\sqrt{n}$"，就可以记下所有m的编号了。

```
int n,val[N*2],id1[N],id2[N];
//主函数（预处理）
int sqrt_n=sqrt(n),tot=0;
for(int i=1,j;i<=n;i=j+1) {
    j=n/(n/i);
    int w=n/i;val[++tot]=w;
    if(w<=sqrt_n) id1[w]=tot;
    else id2[n/w]=tot;
}
//查询某个m的编号
inline int get_id(int m) {
    if(m<=sqrt_n) return id1[m];
    else return id2[n/m];
}
```

这一部分的时间复杂度被证明是$O(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n})$的。

公告

如果我博客里代码，在OJ提交TLE了，那是因为我写博客时自动去掉了快读。请您在这里 复制上快读的板子，粘贴到代码前面即可！
如果觉得文章还不错，拜托各位点个推荐+关注，这对我非常重要！
昵称： dysyn1314
园龄： 1年9个月
粉丝： 87
关注： 14
+加关注

搜索

随笔分类

博主的沙雕朋友们

yzhang
hjmmm姐姐
黄队(黄队稳了)
徐队(传说带妹子保送)
nfls学长 徐源xyleo
无敌myt本体
nfls神仙学弟ycx-akioi
nfls神仙学弟tzc
nfls学长 新加坡之王-泽远
wlzhouzhuan转转转
nfls大给给ztr
罗马尼亚大师rainair
George1123

可能给你带来帮助的神仙们

STEP2 贡献加和

现在我们用刚刚搞出来的$G(m) = \sum_{i=1}^{m} [i \in prime] f(i)$，求出所有$f$的和。

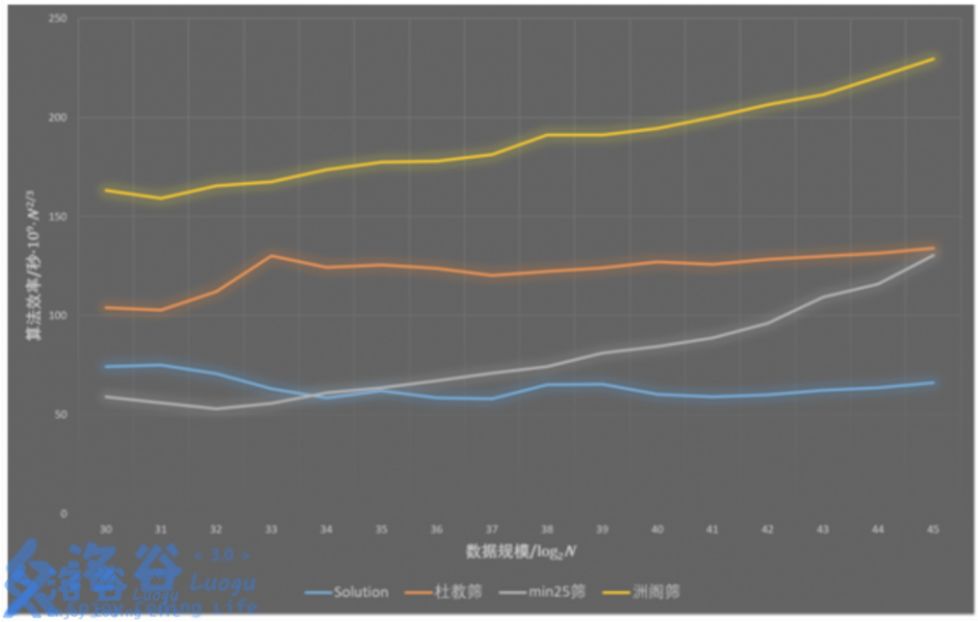
设$S(n,j) = \sum_{i=1}^{n} [minp(i) \geq p[j]] f(i)$。则显然最终答案是$f(1) + S(n,1)$。

正如一开始所说的，我们分别考虑质数和合数对$S(n,j)$的贡献。显然质数的贡献是$G(n) - \sum_{i=1}^{j-1} f(p[i])$。对于合数的贡献，我们可以枚举这个合数的“最小质因子及其次数”，然后进行递推。容易列出递推式：

$$S(n,j) = G(n) - \sum_{i=1}^{j-1} f(p[i]) + \sum_{i=j}^{p[i]^2 \leq n} \sum_{e=1}^{p[i]^{e+1} \leq n} \left(f(p[i]^e) S(\lfloor \frac{n}{p[i]^e} \rfloor, i+1) + f(p[i]^{e+1}) \right)$$

式子里的二重循环就是在枚举合数的“最小质因子及其次数”，注意合数可以有多个不同的质因子（继续递归）或只有一个质因子的若干次方，这些都在式子里得以体现，请读者仔细理解。

在求S时我们直接递归，不用记忆化。这一部分的时间复杂度，被证明也是$O(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n})$。反正你只要知道它能跑很大的数据（$10^{10}$的数据大约1秒搞定）就可以了。



一些栗子

wqy大神的良心模板题

预处理$f_1(i) = i^2$和$f_2(i) = i$在质数处的前缀和，在需要用到时减一下即可。

参考代码：

```
//P5325
#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define pb push_back
#define mk make_pair
#define pii pair<int,int>
#define fst first
#define scd second
using namespace std;
inline ll read() {
    ll f=1,x=0;char ch=getchar();
    while(!isdigit(ch)){if(ch=='-')f=-1;ch=getchar();}
    while(isdigit(ch)){x=x*10+ch-'0';ch=getchar();}
    return x*f;
}
inline void write(ll x) {
    if(!x)putchar('0');if(x<0)x=-x,putchar('-');
    static int sta[20];register int tot=0;
    while(x)sta[tot++]=x%10,x/=10;
    while(tot)putchar(sta[--tot]+48);
}
const int MAXN=1e6+5;
const int MOD=1e9+7,INV6=166666668;
ll n,sqrtn,prm[MAXN],sump[MAXN],sum2p[MAXN],cnt,g1[MAXN],g2[MAXN];
bool v[MAXN];
```

复制

租酥雨
cz_xuyixuan
4+7司公子
yyb
jiangly
command-block
zjc神仙
Soulist
PinkRabbit
xht
dqa

最新评论

1. Re:正睿1595 「20联赛集训day1」打字机（区间编辑距离查询问题）
@Flandre-Zhu 以改正，感谢提醒。...
--dysyn1314
2. Re:正睿1595 「20联赛集训day1」打字机（区间编辑距离查询问题）
感觉dyls讲的很棒，完全明白了思路是怎么来的，比zr题解不知道高到哪里去了
--Flandre-Zhu
3. Re:正睿1595 「20联赛集训day1」打字机（区间编辑距离查询问题）
dp2的转移第三条里的条件是 $S_{i+1} = T_{j+1}$ 吧
（我想了一下是这样，您代码里也是这样写的）
--Flandre-Zhu
4. Re:LOJ3340 「NOI2020」命运
orz
--ducati❤OI
5. Re:拉格朗日插值学习笔记
Dlstxdy!
--maoyiting

阅读排行榜

1. 2020省选联考翻车记(2270)
2. NOI2020游记(2245)
3. NOIP2020 游记(1842)
4. NOIP/CSP-S 考前注意事项(1618)
5. CSP-J/S2019试题选做(1270)
6. 「NOI Online 2021 #1」岛屿探险(1156)
7. 莫比乌斯反演 (入门级别) 学习笔记(1039)
8. 题解 CF1326E Bombs(852)
9. 构造题, 交互题选做(805)
10. 【2020杭电多校round1 1005】HDU6755 Fibonacci Sum（二项式定理）(721)
11. 快速读入、输出，及其他模板(718)
12. 【2020杭电多校round1 1006】HDU6756 Finding a MEX(717)
13. 题解 CF1340 A,B,C Codeforces Round #637 (Div. 1)(652)
14. 题解 洛谷P6477 [NOI Online #2 提高组] 子序列问题(577)
15. 题解 LOJ3265 3266 3267 USACO 2020.2 Platinum(全)(560)
16. min25筛学习笔记(547)
17. 题解 CF1328 D,E,F Carousel, Tree Queries, Make k Equal(541)
18. 仓鼠的DP课 学习笔记(541)
19. CF1404C Fixed Point Removal(533)
20. 题解 洛谷P6478 [NOI Online #2 提高组] 游戏(518)

```
void sieve(int n) {
    cnt=0;
    for(int i=2;i<=n;++i) {
        if(!v[i]) {
            prm[++cnt]=i;
            sump[cnt]=(sump[cnt-1]+i)%MOD;
            sum2p[cnt]=(sum2p[cnt-1]+(ll)i*i%MOD)%MOD;
        }
        for(int j=1;j<=cnt && prm[j]*i<=n;++j) {
            v[prm[j]*i]=1;
            if(i%prm[j]==0) break;
        }
    }
}
ll val[MAXN];
int id1[MAXN],id2[MAXN];
inline int get_id(ll x){return ((x<=sqrtn)?id1[x]:id2[n/x]);}
ll getS(ll x,ll y) {
    if(x<prm[y] || x<=1) return 0;
    int k=get_id(x);
    ll res=((g2[k]-g1[k]+MOD)%MOD-(sum2p[y-1]-sump[y-1]+MOD)%MOD+MOD)%MOD;
    for(int i=y;i<=cnt && prm[i]*prm[i]<=x;++i) {
        ll t1=prm[i],t2=prm[i]*prm[i];
        for(int j=1;t2<=x;++j,t1=t2,t2*=prm[i]) {
            ll tt1=t1%MOD,tt2=t2%MOD;
            res=(res+getS(x/t1,i+1)*tt1%MOD*(tt1-1)%MOD+tt2*(tt2-1)%MOD)%MOD;
        }
    }
    return res%MOD;
}
int main() {
    ios::sync_with_stdio(0);/*syn加速*/
    n=read();
    sieve(sqrtn=sqrt(n));
    int tot=0;/*O(sqrt(n))级别*/
    for(ll i=1,j;i<=n;i=j+1) {
        j=n/(n/i);
        ll w=n/i;
        val[++tot]=w;
        if(w<=sqrtn) id1[w]=tot;
        else id2[n/w]=tot;

        w%=MOD;
        g1[tot]=w*(w+1)/2%MOD;
        g2[tot]=w*(w+1)%MOD*(2LL*w+1)%MOD*INV6%MOD;

        g1[tot]=(g1[tot]-1+MOD)%MOD;
        g2[tot]=(g2[tot]-1+MOD)%MOD;
    }
    for(int j=1;j<=cnt;++j) {
        for(int i=1;i<=tot && prm[j]*prm[j]<=val[i];++i) {
            int k=get_id(val[i]/prm[j]);
            g1[i]=(g1[i]-prm[j]*(g1[k]-sump[j-1]+MOD)%MOD+MOD)%MOD;
            g2[i]=(g2[i]-prm[j]*prm[j]%MOD*(g2[k]-sum2p[j-1]+MOD)%MOD+MOD)%MOD;
        }
    }
    //for(int i=1;i<=tot;++i)cout<<val[i]<<" "<<g1[i]<<" "<<g2[i]<<endl;
    write((getS(n,1)+1)%MOD);puts("");
    return 0;
}
```

意外搞定了杜教筛的模板

先看$\sum_{i=1}^n \varphi(i)$。首先$\varphi(p)=p-1\quad(p\in prime)$。于是我们预处理$f_1(i)=i$和$f_2(i)=1$的前缀和，按与上一题相同的方法相减即可求出$G(m)$。

另外，$\varphi(p^c)=p^{c-1}(p-1)$（自己yy可得），这样在求$S$时，质数的整次幂的函数值也很好求。

然后是$\mu(i)$，显然$\mu(p)=-1\quad(p\in prime)$。于是我们只要对前面已经求好的$f_2(i)=1$求个相反数即可。

另外，$\mu(p^k)=0\quad(k>1)$，因此求S时不需要枚举最小质因子的次数。

参考代码：


```
//P4213 min_25
#include <bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define pb push_back
#define mk make_pair
#define pii pair<int,int>
#define fst first
```

21. LOJ3277 「JOISC 2020 Day3」星座 3(463)
22. CF1402C 「CEOI2020」Star Trek(460)
23. 题解 CF1375E Inversion SwapSort（构造）(455)
24. 正睿2020提高组十连测 选做(433)
25. 【2020杭电多校round6】HDU6834 Yukikaze and Smooth numbers(432)
26. 题解 CF1369 D,E,F Codeforces Round #652 (Div. 2)(426)
27. 题解 CF1335 E,F Three Blocks Palindrome, Robots on a Grid(414)
28. 题解 LOJ3278 「JOISC 2020 Day3」收获(396)
29. 题解 CF1332G No Monotone Triples(387)
30. 【2020省选Day1T1】LOJ3299 「联合省选 2020 A | B」冰火战士(384)

```
#define scd second
using namespace std;
/*  -----  by:duyi  -----  */
const int N=5e4;
const int MAXN=N*2+5;
int n,sn,cnt,tot,p[MAXN],sum[MAXN],id1[MAXN],id2[MAXN],val[MAXN];
ll g1[MAXN],g2[MAXN];
bool v[MAXN];
void sieve() {
    v[1]=1;
    for(int i=2;i<=N;++i) {
        if(!v[i]) p[++cnt]=i;
        for(int j=1;j<=cnt && (ll)i*p[j]<=N;++j) {
            v[i*p[j]]=1;
            if(i%p[j]==0) break;
        }
    }
    for(int i=1;i<=cnt;++i) sum[i]=sum[i-1]+p[i];
}
inline int get_id(int x) {
    if(x<=sn) return id1[x];
    else return id2[n/x];
}
ll S_phi(int x,int y) {
    if(x<=1 || p[y]>x) return 0;
    ll res=g1[get_id(x)]-g2[get_id(x)]-(sum[y-1]-(y-1));
    for(int i=y;i<=cnt && (ll)p[i]*p[i]<=x;++i) {
        ll pre=1,cur=p[i];
        for(int j=1;cur*p[i]<=x;++j) {
            res+=pre*(p[i]-1LL)*S_phi(x/cur,i+1)+cur*(p[i]-1LL);
            pre=cur;cur=cur*p[i];
        }
    }
    return res;
}
ll S_mu(int x,int y) {
    if(x<=1 || p[y]>x) return 0;
    ll res=-g2[get_id(x)]+y-1;
    for(int i=y;i<=cnt && (ll)p[i]*p[i]<=x;++i) {
        res+=(-S_mu(x/p[i],i+1));
    }
    return res;
}
void solve() {
    cin>>n;
    sn=sqrt(n);tot=0;
    for(int i=1,j;i<=n;i=j+1) {
        j=n/(n/i);int w=n/i;
        val[++tot]=w;
        if(w<=sn) id1[w]=tot;
        else id2[n/w]=tot;
        g1[tot]=(ll)w*(w+1LL)/2LL-1LL;
        g2[tot]=w-1;
    }
    for(int i=1;i<=cnt;++i) {
        for(int j=1;j<=tot && (ll)p[i]*p[i]<=val[j];++j) {
            int t=get_id(val[j]/p[i]);
            g1[j]-=(ll)p[i]*(g1[t]-sum[i-1]);
            g2[j]-=(g2[t]-(i-1));
        }
    }
    cout<<S_phi(n,1)+1LL<<" "<<S_mu(n,1)+1LL<<endl;
}
int main() {
    ios::sync_with_stdio(0);/*syn加速*/
    sieve();
    int T;cin>>T;while(T--)solve();
    return 0;
}
```

总结一下

用min_25做题主要是要想清楚两个问题：

1. 该函数在质数处的取值怎么求和？（找到合适的f'）
2. 质数的次幂处的取值$f(p^c)$能否快速求？

本文写得比较粗浅，欢迎大家补充。如有纰漏欢迎指正。

分类: 算法-数学-数论 , 文章分类-学习笔记

« 上一篇: 【2020杭电多校round5】HDU6818 Array Repairing
» 下一篇: 【2020杭电多校round6】HDU6834 Yukikaze and Smooth numbers

posted @ 2020-08-06 21:19 dysyn1314 阅读(547) 评论(3) 编辑 收藏