+ REVOLVERMAPS

peng-ym

从头再来, 重新上线

首页

新随笔

联系

管理

随笔 - 17 文章 - 0 评论 - 127 阅读 - 10

莫比乌斯反演

莫比乌斯反演

(PS: 在评论区中众多dalao的催促下, 我认真的写了三天三夜写完了这篇<u>杜教筛</u>, 保证是精品!)

前言

(这大概是我第一次写学习笔记吧0v0)

可能每一个刚开始接触莫比乌斯反演的OIer,起初都会厌恶这个神奇的东西。(我也一样233)每一个人厌恶的原因有许多,可能是这个烦人的式子,也可能仅仅只是因为不理解µ函数而感到不爽。当然,莫比乌斯反演有一个小小的预备知识:**整除分块**

那么我们先从莫比乌斯反演中最基础的莫比乌斯函数 μ 开始说起:

莫比乌斯函数

- 首先,我们可以先明确一点,莫比乌斯函数并不是什么很高大上的东西,它其实只是一个由容斥系数所构成的函数。 $\mu(d)$ 的定义是:
- 1. 当d = 1时, $\mu(d) = 1$;
- 2. 当 $d=\Pi_{i=1}^k p_i$ 且 p_i 为互异素数时, $\mu(d)=(-1)^k$ 。(说直白点,就是d分解质因数后,没有幂次大于平方的质因子,此时函数值根据分解的个数决定);
- 3. 只要当d含有任何质因子的幂次大于等于2,则函数值为0.
- 当然, 莫比乌斯函数也有很多有趣的性质:
- 1. 对于任意正整数n, $\sum_{d|n} \mu(d) = [n=1]$ 。([n=1]表示只有当n=1成立时,返回值为1;否则,值为0;(这个就是用 μ 是容斥系数的性质可以证明)(PS:这一条性质是莫比乌斯反演中最常用的)
- 2. 对于任意正整数n, $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\phi(n)}{n}$ 。(这个性质很奇妙,它把欧拉函数和莫比乌斯函数结合起来,或许我之后写<u>杜教筛</u>的学习笔记时会去证明吧)
- 程序实现并不难,我们可以在线性筛素数的程序上略作修改,便可以筛出µ函数。
- 那我还是给一段线筛的代码吧

```
void get_mu(int n)
{
```

公告



一言 (ヒトコト)

昵称: pengym 园龄: 3年10个月 粉丝: 124 关注: 0 +加关注

<	2021年5月					
日	_	_	Ξ	四	五	\Rightarrow
25	26	27	28	29	30	1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	21
23	24	25	26	27	28	29
30	31	1	2	3	4	5

常用链接

我的随笔 我的评论 我的参与 最新评论

我的标签

我的标签

洛谷(8) 莫比乌斯反演(6) 学习笔记(4) 模拟退火(2) HNOI(2) 杜教筛(1) 数据结构(1)

```
mu[1]=1;
for(int i=2;i<=n;i++)
{
    if(!vis[i]) {prim[++cnt]=i;mu[i]=-1;}
    for(int j=1;j<=cnt&&prim[j]*i<=n;j++)
    {
        vis[prim[j]*i]=1;
        if(i*prim[j]==0)break;
        else mu[i*prim[j]]=-mu[i];
    }
}</pre>
```

• 那么, 莫比乌斯函数就这么告一段落了。

莫比乌斯反演

- 解决完莫比乌斯函数的问题后,我们便迎来了重头戏**莫比乌斯反演**
- 定理: F(n)和f(n)是定义在非负整数集合上的两个函数,并且满足条件:

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

那么存在一个结论:

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) F(\lfloor rac{n}{d}
floor)$$

这个定理就称作莫比乌斯反演定理。

• 莫比乌斯反演的证明主要有两种方式,其中一种就是通过定义来证明;另外一种,我则是会在<u>社教筛</u>中提到 (利用**狄利克雷卷积**)。那么我先来说一说第一种证明方法:

$$egin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) F(\lfloor rac{n}{d}
floor) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{i ert \lfloor rac{n}{d}
floor} f(i) \ &= \sum_{i ert n} f(i) \sum_{d ert \lfloor rac{n}{i}
floor} \mu(d) = f(n) \end{aligned}$$

(PS:如果不知道最后一步怎么来的,可以再去看性质一,至于和式的变换,就自己脑补一下吧)

• 当然, 莫比乌斯反演有另外的一种形式, 当F(n)和f(n)满足:

$$F(n) = \sum_{n|d} f(d)$$

可以推出:

$$f(n) = \sum_{n|d} \mu(rac{d}{n}) F(d)$$

• 感觉这个式子,可能在莫比乌斯反演中更加好用。

那么,莫比乌斯反演的基本内容就说完了。知道了这些内容,就已经可以解决一些有关的问题了。我做了一些关于莫比乌斯反演的题,具体题解可以看看我博客中的内容。

题目

YY**的**gcd

[POI2007]ZAP-Queries

[SD0I2015]约数个数和

[HAOI2011]Problem b

洛谷P1829 [国家集训队]Crash的数字表格

(未完,待更新)

标签: 莫比乌斯反演 , 学习笔记

```
可持久化并查集(1)
JSOI(1)
感受(1)
更多
```

积分与排名

积分 - 32926 排名 - 35506

随笔档案

2019年1月(1) 2018年8月(2)

2018年6月(3)

2018年4月(1)

2018年3月(10)

友情链接

zjp_shadow大佬的blog CYH大佬的blog Orange大佬的blog 蒟蒻自己在洛谷的blog ylsoi大佬的blog Hany01大佬的blog Shichengxiao大佬的blog dyx大佬的blog redbag大佬的blog gaylunch大佬的blog lstete大佬的blog chinhh大佬的blog

最新评论

1. Re:莫比乌斯反演 如果对和式变换看不懂的可以看看维基百 里面的讲解,很好懂

--LEEEEEEEEEEEE

2. Re:杜教筛

啧啧,这证明太香了,妙啊

--blanc_ 3. Re:[SD0I2015]约数个数和

orz

--ACwishe

4. Re:记OI退役

@思益益 bjtu...

4/L

5. Re:记0I退役

大佬现在在哪里

--思益

阅读排行榜

- 1. 莫比乌斯反演(32627)
- 2. 杜教筛(26310)
- 3. 整除分块(13053)
- 4. 洛谷【P2257】YY的GCD(7291)
- 5. 可持久化并查集(6127)
- 6. 模拟退火(5053)
- 7. [POI2007]ZAP-Queries(3396)
- 8. [SD0I2015]约数个数和(2915)
- 9. 记0I退役(1873)
- 10. 洛谷P1829 [国家集训队]Crash的数字表格(1806)

评论排行榜

- 1. 莫比乌斯反演(36)
- 2. 杜教筛(30)
- 3. 整除分块(14)
- 4. 记0I退役(9)
- 5. 洛谷P1829 [国家集训队]Crash的数: 表格(9)





« 上一篇: <u>洛谷【P2257】YY的GCD</u> » 下一篇: [POI2007]ZAP-Queries

posted @ 2018-03-26 19:53 pengym 阅读(32628) 评论(36) 编辑 收藏

0

推荐排行榜

- 1. 莫比乌斯反演(37)
- 2. 杜教筛(36)
- 3. 整除分块(15)
- 4. 洛谷【P2257】YY的GCD(8)
- 5. 模拟退火(7)

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论, 立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】阿里云爆品销量榜单出炉,精选爆款产品低至0.55折

【推荐】7大类400多种组件,HarmonyOS鸿蒙三方库来了,赶紧收藏!

【推荐】大型组态、工控、仿真、CAD\GIS 50万行VC++源码免费下载!

【推荐】限时秒杀! 国云大数据魔镜,企业级云分析平台

园子动态:

· 致园友们的一封检讨书: 都是我们的错 · 数据库实例 CPU 100% 引发全站故障

・发起一个开源项目: 博客引擎 fluss

最新新闻:

・菜鸟: 2021财年全年收入372.5亿元, 同比增68%

· 阿里第四财季营收1874亿元,净亏损54.79亿元

· 小鵬汽车: Q1营收29.5亿元 净亏损7.866亿元

· B站发布Q1财报: 总营收39亿元, 同比增长68%

· HTC发布VIVE FOCUS 3等系列新品 虚拟代言人也来了

» 更多新闻...

Copyright © 2021 pengym Powered by .NET 5.0 on Kubernetes