[多项式] [拉格朗日插值法] [数学] [数论]
[莫比乌斯函数] [莫比乌斯反演]

【湖北省队互测】一个人的数论

2月 14, 2020

题意

求所有 $\leq n$ 且与 n 互质的数的 m 次幂的和。

分析

题目要求的就是 $\sum_{i=1}^{n} i^m[gcd(i,n)=1]$ 。

用莫比乌斯反演 $\sum_{i=1}^{n} i^m \sum_{d|i,n} \mu(d)$ 。

变换求和的顺序 $\sum_{d|n} \mu(d) d^m \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} i^m$ 。

显然 $\sum_{d|n} \mu(d) d^m$ 这部分是积性函数。于是考虑变换后一部分。

我们令 $f(n)=\sum_{i=1}^{n} i^m$ ，显然这是一个关于 n 的 $m+1$ 次多项式，于是可以用拉格朗日插值把系数都求出来，变成 $f(n)=\sum_{i=0}^{m+1} x_i n^i$ 。

于是原式就变成了 $\sum_{d|n} \mu(d) d^m \sum_{i=0}^{m+1} x_i (\frac{n}{d})^i$ 。

变换求和顺序变成 $\sum_{i=0}^{m+1} x_i \sum_{d|n} \mu(d) d^m (\frac{n}{d})^i$ 。

显然 $\sum_{d|n} \mu(d) d^m (\frac{n}{d})^i$ 是一个卷积的形式。

因为 $\mu(d) d^m$ 和 $(\frac{n}{d})^i$ 都是积性函数，那么 $\sum_{d|n} \mu(d) d^m (\frac{n}{d})^i$ 也是一个积性函数。

我们令 $g(n)=\sum_{d|n} \mu(d) d^m (\frac{n}{d})^i$ ，且有 $n=p_1^{a1} \times p_2^{a2} \times \cdots \times p_w^{aw}$ 。那么有 $g(n)=g(p_1^{a1}) \times g(p_2^{a2}) \times \cdots \times g(p_w^{aw})$

STATISTICS

在线用户: 1

累计访问: 93,054

TEAMS

NULL (2019)

One,Two,Three,AK (2018)

TEMPLATE

Template

CATEGORIES

Categories

选择分类目录

ARCHIVE

考虑对于任意的 $g(p_i^{a_i}) = \sum_{d|p_i^{a_i}} \mu(d)d^m(\frac{p_i^{a_i}}{d})^i$ ，只有当 $d=1$ 或者 $d=p_i$ 的时候 $\mu(d) \neq 0$ 于是只需要求这两项，即 $g(p_i^{a_i}) = (p_i^{a_i})^i - p_i^m(p_i^{a_i-1})^i$ 。

Click To Expand Code

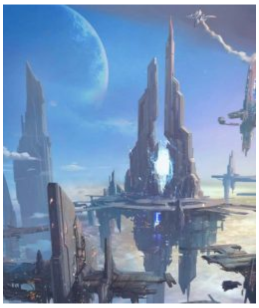
By Xiejiadong . No Comment

XIEJIADONG Edit your profile or check this video to know more

YOU MAY ALSO LIKE

“数论基础”课程学习笔记
3月 4, 2020

CODEFORCES ROUND #619
2月 15, 2020



【HDU4944】FSF’S GAME
2月 13, 2020

LEAVE A COMMENT

Your Message

发表评论前，请滑动滚动条解锁

b
i
link
b-quote
del
ins
img
ul
ol
li
code
more
关闭标签
crayon

jxtxzzw

godweiyang

zkx06111

billChen

*Your name **

*Your email **

Your webiste

在此浏览器中保存我的姓名、电子邮件和站点地址。

发表评论