



## 「笔记」Dirichlet卷积

## 莫比乌斯反演的前置知识

## 定义

设 $f, g$ 是数论函数, 考虑数论函数 $h$ 满足

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

则称 $h$ 为 $f$ 和 $g$ 的狄利克雷卷积, 记作 $h = f * g$ , 这里的 $*$ 表示卷积。

比如 $h(6) = f(1) * g(6) + f(2) * g(3) + f(3) * g(2) + f(6) * g(1)$

## 性质

1. 单位函数 $\epsilon$ 是狄利克雷卷积的单位元, 即对于任意函数 $f$ , 有 $\epsilon * f = f * \epsilon = f$ 。
2. 狄利克雷卷积满足交换律和结合律。
3. 如果 $f, g$ 都是积性函数, 那么 $f * g$ 也是积性函数。

许多关系都可以用狄利克雷卷积来表示。

下面用 $1$ 来表示取值恒为 $1$ 的常函数, 定义幂函数 $\text{Id}_k(n) = n^k$ ,  $\text{Id} = \text{Id}_1$ 。

除数函数的定义可以写为:

$$\sigma_k = 1 * \text{Id}_k$$

欧拉函数的性质可以写为:

$$\text{Id} = \varphi * 1$$

## 计算狄利克雷卷积

设 $f, g$ 是数论函数, 计算 $f$ 和 $g$ 的狄利克雷卷积在 $n$ 处的值需要枚举 $n$ 的所有约数。

如果要计算 $f$ 和 $g$ 的狄利克雷卷积的前 $n$ 项, 可以枚举 $1$ 到 $n$ 中每个数的倍数, 根据调和数的相关结论, 这样做的复杂度是 $O(n \log n)$ 。

## 求函数的逆

狄利克雷卷积有一个性质: 对每个 $f(1) \neq 0$ 的函数 $f$ , 都存在一个函数 $g$ 使得 $f * g = \epsilon$

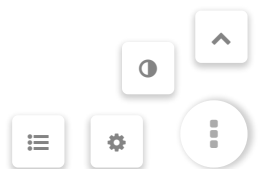
那么我们如何求出一个函数的逆呢?

只需要定义:

$$g(n) = \frac{1}{f(1)} \left( [n=1] - \sum_{i|n, i \neq 1} f(i)g\left(\frac{n}{i}\right) \right)$$

这样的话

$$\begin{aligned} & \sum_{i|n} f(i)g\left(\frac{n}{i}\right) \\ &= f(1)g(n) + \sum_{i|n, i \neq 1} f(i)g\left(\frac{n}{i}\right) \end{aligned}$$





一步直接把 $g(n)$ 的定义带进去就好

即

$$= f(1) * \frac{1}{f(1)} ([n = 1] - \sum_{i|n, i \neq 1} f(i)g(\frac{n}{i})) + \sum_{i|n, i \neq 1} f(i)g(\frac{n}{i})$$

## 例题

### P2303 [SDOI2012]Longge的问题

给定正整数 $n$ ，求

$$\sum_{i=1}^n gcd(i, n), n \leq 2^{32}$$

枚举gcd:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n gcd(i, n) &= \sum_{d|n} d \sum_{i=1}^n [gcd(i, n) = d] \\ &= \sum_{d|n} d \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} [gcd(i, \frac{n}{d}) = 1] \\ &= \sum_{d|n} d \varphi(\frac{n}{d}) \end{aligned}$$

枚举 $n$ 的约数直接求。答案是积性的。

```
#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>
#define int long long
using namespace std;

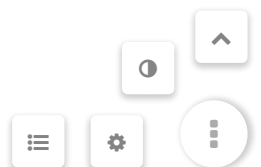
inline int read() {
    char c = getchar(); int x = 0, f = 1;
    for ( ; !isdigit(c); c = getchar()) if(c == '-') f = -1;
    for ( ; isdigit(c); c = getchar()) x = x * 10 + (c ^ 48);
    return x * f;
}

int n, ans;

int euler(int x) {
    int ans = x, rt = sqrt(x);
    for (int i = 2; i <= rt; i++) {
        if (x % i == 0) {
            ans = ans - ans / i;
            while (x % i == 0) x /= i;
        }
    }
    if (x > 1) ans = ans - ans / x;
    return ans;
}

signed main() {
    n = read();
    int x = sqrt(n);
    for (int i = 1; i <= x; i++) {
        int j = n / i;
        ans += euler(j) * i;
    }
    if (x * x == n) ans += euler(x);
    printf("%lld", ans);
}
```

作词: Vincenzo/CHUNG HA/Wonhyuk Kim/Jeremy Ji/Dawn Elektra  
作曲: Vincenzo/CHUNG HA/Wonhyuk Kim/Jeremy Ji/Dawn Elektra





```
if (n % i == 0) {
    ans += euler(n / i) * i;
    if (i * i != n) ans += euler(i) * (n / i);
}
cout << ans << '\n';
return 0;
}
```

作者: Loceaner

出处: <https://www.cnblogs.com/loceaner/p/12785524.html>

版权: 本作品采用「署名-非商业性使用-相同方式共享 4.0 国际」许可协议进行许可。

简介: 来自18线小县城的Oler一名, 觉得写的还行的话就关注我吧!

分类: ! 学习笔记 , 数学——莫比乌斯反演

标签: 狄利克雷卷积 , 数论

Buy me a cup of coffee ☕.



👍 3

💬 0

« 上一篇: 「笔记」积性函数

» 下一篇: 「笔记」高中生都能看懂的莫比乌斯反演

posted @ 2020-04-27 11:00 Loceaner 阅读(394) 评论(2) 编辑 收藏

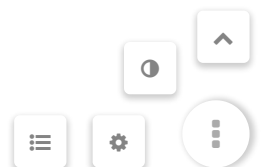
登录后才能查看或发表评论, 立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

#### 园子动态:

- 致园友们的一封检讨书: 都是我们的错
- 数据库实例 CPU 100% 引发全站故障
- 发起一个开源项目: 博客引擎 fluss

#### 最新新闻:

- 菜鸟: 2021财年全年收入372.5亿元, 同比增68%  
    营收1874亿元, 净亏损54.79亿元
- > 1营收29.5亿元 净亏损7.866亿元 作词: Vincenzo/CHUNG HA/Wonhyuk Kim/Jeremy Ji/Dawn Elektra  
    财报: 总营收39亿元, 同比增长68% 作曲: Vincenzo/CHUNG HA/Wonhyuk Kim/Jeremy Ji/Dawn Elektra



发布VIVE FOCUS 3等系列新品 虚拟代言人也来了  
多新闻...

历史上的今天:  
2020-04-27 「笔记」积性函数

Copyright © 2021 Loceaner  
Powered by .NET 5.0 on Kubernetes & Theme Silence v3.0.0

