「笔记」Dirichlet卷积

莫比乌斯反演的前置知识

定义

设f, g是数论函数，考虑数论函数h满足

$$h(n)=\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

则称h为f和g的狄利克雷卷积，记作$h=f*g$，这里的$*$表示卷积。

比如$h(6)=f(1)*g(6)+f(2)*g(3)+f(3)*g(2)+f(6)*g(1)$

性质

1. 单位函数ϵ是狄利克雷卷积的单位元，即对于任意函数f，有$\epsilon*f=f*\epsilon=f$。
2. 狄利克雷卷积满足交换律和结合律。
3. 如果f, g都是积性函数，那么$f*g$也是积性函数。

许多关系都可以用狄利克雷卷积来表示。

下面用1来表示取值恒为1的常函数，定义幂函数$\mathrm{Id}_k(n)=n^k, \mathrm{Id}{=}\mathrm{Id}_1$。

除数函数的定义可以写为：

$$\sigma_k=1*\mathrm{Id}_k$$

欧拉函数的性质可以写为：

$$\mathrm{Id}=\varphi*1$$

计算狄利克雷卷积

设f, g是数论函数，计算f和g的狄利克雷卷积在n处的值需要枚举n的所有约数。

如果要计算f和g的狄利克雷卷积的前n项，可以枚举1到n中每个数的倍数，根据调和数的相关结论，这样做的复杂度是$O(n\log n)$。

求函数的逆

狄利克雷卷积有一个性质：对每个$f(1)\neq 0$的函数f，都存在一个函数g使得 $f*g=\epsilon$

那么我们如何求出一个函数的逆呢？

只需要定义：

$$g(n)=\frac{1}{f(1)}\left([n=1]-\sum_{i|n, i\neq 1} f(i)g\left(\frac{n}{i}\right)\right)$$

这样的话

$$\begin{aligned}&\sum_{i|n} f(i)g\left(\frac{n}{i}\right)\\=&f(1)g(n)+\sum_{i|n,i\neq 1} f(i)g\left(\frac{n}{i}\right)\\=&[n=1]\end{aligned}$$

步直接把$g(n)$的定义带进去就好

即

$$= f(1) * \frac{1}{f(1)}([n=1] - \sum_{i|n, i \neq 1} f(i) g(\frac{n}{i})) + \sum_{i|n, i\neq 1} f(i) g(\frac{n}{i})$$

例题

P2303 [SDOI2012]Longge的问题

给定正整数n，求

$$\sum_{i=1}^{n} gcd(i,n), n \leq 2^{32}$$

枚举gcd：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} gcd(i,n) &= \sum_{d|n} d \sum_{i=1}^{n} [gcd(i,n)=d] \\ &= \sum_{d|n} d \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} [gcd(i,\frac{n}{d})=1] \\ &= \sum_{d|n} d\varphi(\frac{n}{d})\end{aligned}$$

枚举n的约数直接求。答案是积性的。

```
#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <iostream>
#define int long long
using namespace std;

inline int read() {
	char c = getchar(); int x = 0, f = 1;
	for ( ; !isdigit(c); c = getchar()) if(c == '-') f = -1;
	for ( ; isdigit(c); c = getchar()) x = x * 10 + (c ^ 48);
	return x * f;
}

int n, ans;

int euler(int x) {
	int ans = x, rt = sqrt(x);
	for (int i = 2; i <= rt; i++) {
		if (x % i == 0) {
			ans = ans - ans / i;
			while (x % i == 0) x /= i;
		}
	}
	if (x > 1) ans = ans - ans / x;
	return ans;
}

signed main() {
	n = read();
	int x = sqrt(n);
	for (int i = 1; i <= x; i++) {
```

```
            if (n % i == 0) {
                ans += euler(n / i) * i;
                if (i * i != n) ans += euler(i) * (n / i);
            }
        }
        cout << ans << '\n';
        return 0;
}
```


分类：！学习笔记 ， 数学——莫比乌斯反演

标签：狄利克雷卷积 ， 数论

« 上一篇： 「笔记」积性函数
» 下一篇： 「笔记」高中生都能看懂的莫比乌斯反演

布VIVE FOCUS 3等系列新品 虚拟代言人也来了

多新闻...

历史上的今天:

2020-04-27 「笔记」积性函数