莫比乌斯反演

莫比乌斯反演

（PS：在评论区中众多dalao的催促下，我认真的写了三天三夜写完了这篇杜教筛，保证是精品！）

前言

（这大概是我第一次写学习笔记吧0v0）

可能每一个刚开始接触莫比乌斯反演的OIer，起初都会厌恶这个神奇的东西。~~(我也一样233)~~每一个人厌恶的原因有许多，可能是这个烦人的式子，也可能仅仅只是因为不理解μ函数而感到不爽。当然，莫比乌斯反演有一个小小的预备知识：**整除分块**

那么我们先从莫比乌斯反演中最基础的莫比乌斯函数μ开始说起：

莫比乌斯函数

- 首先，我们可以先明确一点，莫比乌斯函数并不是什么很高大上的东西，它其实只是一个由容斥系数所构成的函数。$\mu(d)$的定义是：

1. 当$d=1$时，$\mu(d)=1$；
2. 当$d=\Pi_{i=1}^{k}p_i$且p_i为互异素数时，$\mu(d)=(-1)^k$。（说直白点，就是d分解质因数后，没有幂次大于平方的质因子，此时函数值根据分解的个数决定）；
3. 只要当d含有任何质因子的幂次大于等于2，则函数值为0.

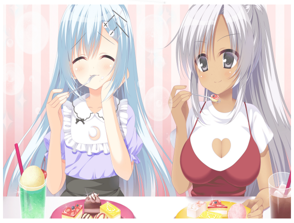
- 当然，莫比乌斯函数也有很多有趣的性质：

1. 对于任意正整数n，$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]$。（$[n=1]$表示只有当$n=1$成立时，返回值为1；否则，值为0；（这个就是用μ是容斥系数的性质可以证明）*(PS:**这一条性质是莫比乌斯反演中最常用的**)*
2. 对于任意正整数n，$\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\phi(n)}{n}$。（这个性质很奇妙，它把欧拉函数和莫比乌斯函数结合起来，或许我之后写杜教筛的学习笔记时会去证明吧）

- 程序实现并不难，我们可以在线性筛素数的程序上略作修改，便可以筛出μ函数。
- 那我还是给一段线筛的代码吧

```
void get_mu(int n)
{
```

公告



一言（ヒトコト）

昵称： pengym
园龄： 3年10个月
粉丝： 124
关注： 0
+加关注

‹ 2021年5月

日	一	二	三	四	五	六
25	26	27	28	29	30	1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	1	2	3	4	5

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

我的标签

洛谷(8)
莫比乌斯反演(6)
学习笔记(4)
模拟退火(2)
HNOI(2)
杜教筛(1)
数据结构(1)

```
    mu[1]=1;
    for(int i=2;i<=n;i++)
    {
        if(!vis[i]){prim[++cnt]=i;mu[i]=-1;}
        for(int j=1;j<=cnt&&prim[j]*i<=n;j++)
        {
            vis[prim[j]*i]=1;
            if(i%prim[j]==0)break;
            else mu[i*prim[j]]=-mu[i];
        }
    }
}
```

- 那么，莫比乌斯函数就这么告一段落了。

莫比乌斯反演

- 解决完莫比乌斯函数的问题后，我们便迎来了重头戏**莫比乌斯反演**
- 定理：F(n)和f(n)是定义在非负整数集合上的两个函数，并且满足条件：

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

那么存在一个结论：

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)F(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$$

这个定理就称作**莫比乌斯反演定理。**

- 莫比乌斯反演的证明主要有两种方式，其中一种就是通过定义来证明；另外一种，我则是会在**杜教筛**中提到（利用**狄利克雷卷积**）。那么我先来说一说第一种证明方法：

$$\sum_{d|n}\mu(d)F(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{i|\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}f(i)$$
$$=\sum_{i|n}f(i)\sum_{d|\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\mu(d)=f(n)$$

（PS:如果不知道最后一步怎么来的，可以再去看性质一，至于和式的变换，就自己脑补一下吧）

- 当然，莫比乌斯反演有另外的一种形式，当$F(n)$和$f(n)$满足：

$$F(n)=\sum_{n|d}f(d)$$

可以推出：

$$f(n)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})F(d)$$

- 感觉这个式子，可能在莫比乌斯反演中更加好用。

那么，莫比乌斯反演的基本内容就说完了。知道了这些内容，就已经可以解决一些有关的问题了。我做了一些关于莫比乌斯反演的题，具体题解可以看看我博客中的内容。

题目

YY的gcd

[POI2007]ZAP-Queries

[SDOI2015]约数个数和

[HAOI2011]Problem b

洛谷P1829 [国家集训队]Crash的数字表格

（未完，待更新）

标签： 莫比乌斯反演 ， 学习笔记

可持久化并查集(1)
JSOI(1)
感受(1)
更多

积分与排名

积分 - 32926
排名 - 35506

随笔档案

2019年1月(1)
2018年8月(2)
2018年6月(3)
2018年4月(1)
2018年3月(10)

友情链接

zjp_shadow大佬的blog
CYH大佬的blog
Orange大佬的blog
蒟蒻自己在洛谷的blog
ylsoi大佬的blog
Hany01大佬的blog
Shichengxiao大佬的blog
dyx大佬的blog
redbag大佬的blog
gaylunch大佬的blog
lstete大佬的blog
chinhhh大佬的blog

最新评论

1. Re:莫比乌斯反演
如果对和式变换看不懂的可以看看维基百里面的讲解，很好懂
--LEEEEEEEEEEEEEI
2. Re:杜教筛
啧啧，这证明太香了，妙啊
--blanc_
3. Re:[SDOI2015]约数个数和
orz
--ACwishe
4. Re:记OI退役
@思益益 bjtu...
--peng
5. Re:记OI退役
大佬现在在哪里
--思益

阅读排行榜

1. 莫比乌斯反演(32627)
2. 杜教筛(26310)
3. 整除分块(13053)
4. 洛谷【P2257】YY的GCD(7291)
5. 可持久化并查集(6127)
6. 模拟退火(5053)
7. [POI2007]ZAP-Queries(3396)
8. [SDOI2015]约数个数和(2915)
9. 记OI退役(1873)
10. 洛谷P1829 [国家集训队]Crash的数字表格(1806)

评论排行榜

1. 莫比乌斯反演(36)
2. 杜教筛(30)
3. 整除分块(14)
4. 记OI退役(9)
5. 洛谷P1829 [国家集训队]Crash的数字表格(9)

« 上一篇： 洛谷【P2257】YY的GCD
» 下一篇： [POI2007]ZAP-Queries

posted @ 2018-03-26 19:53 pengym 阅读(32628) 评论(36) 编辑 收藏