Guía 1- Errores

1) Hallar cotas para los errores inherentes propagados (absolutos y relativos) en los siguientes cálculos, donde $x = 2.12$, $y = 3.27$ y $z = 4.12$ (asumir que los valores dados para x, y, z están bien redondeados) y expresarlos, si es posible, bien redondeados:

a) $f(x,y,z) = 3x + y - z$
b) $g(x,y,z) = x\, y / z$
c) $h(x,y) = x \operatorname{sen}(y / 40)$

2) Siendo $x = 2.0 \pm 0.1$, $y = 3.0 \pm 0.2$ y $z = 1.0 \pm 0.1$ hallar una cota para el error absoluto inherente propagado de la siguiente expresión, y expresarla, si es posible, bien redondeada:

$$W(x,y,z) = \frac{x\, y^2}{\sqrt{z}}$$

3) a)Demostrar que las siguientes expresiones son equivalentes matemáticamente.

a) $f = (\sqrt{2} - 1)^6$

b) $f = \dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$

c) $f = (3 - 2\sqrt{2})^3$

d) $f = \dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$

e) $f = 99 - 70\sqrt{2}$

f) $f = \dfrac{1}{99+70\sqrt{2}}$

b) Considerar que se aproxima $\sqrt{2}$ el valor 1.4 en cada una de las expresiones. Para cada una de ellas expresar el resultado bien redondeado si es posible .

c) Empleando Octave o Python graficar la función $F_a(x) = (x - 1)^6$ y $F_b = \dfrac{1}{(x+1)^6}$ entre 1 y 1.5.

Analizar los resultados obtenidos en el punto anterior con ayuda de estas gráficas. Extraiga conclusiones.

4) Se realizaron observaciones de un satélite para determinar su velocidad.

En la primera observación la distancia medida al satélite fue $r = 30000 \pm 10$ km. Cinco segundos más tarde se determina un aumento en la distancia $\delta r = 125.0 \pm 0.5$ km y el cambio en la orientación resultó de $\delta\phi = 0.00750 \pm 0.00002$ radianes.

Realizar un gráfico y decidir un sistema de coordenadas. Hallar la distancia recorrida por el satélite y su velocidad, suponiendo que el mismo se mueve en línea recta y a velocidad constante durante ese intervalo de tiempo; expresar el resultado bien redondeado, si es posible. Considerar exacto el lapso de 5 segundos.

5) Se dispone de un resorte suspendido de un soporte, un platillo agregado al extremo inferior del resorte para colocar pesos, un juego de pesas, y un cronómetro.

El platillo pesa 0,05 kg, el juego de pesas que se dispone es de: 0,1000 kg, 0,3000 kg, 0,4000 kg y 0,5000 kg; el error de medición del cronómetro se puede estimar en 0,3 seg.

Suponiendo que el alargamiento de un resorte es proporcional a la carga aplicada, se sabe que el período de oscilación, T, para la carga suspendida, m, está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

donde *k* es la constante de elasticidad del resorte.

El objetivo es obtener el valor de *k* del resorte con una incertidumbre no mayor del 10% (error relativo).

Se realiza una medición exploratoria con la masa de 0,1000 kg y el tiempo medido con el cronómetro es de 1,8 segundos en 2 oscilaciones.

Decidir:

a) ¿Se logra el objetivo con la medición realizada?

b) ¿Cuál de las pesas sería más conveniente utilizar para realizar esta experiencia? Con esa pesa, manteniendo el numero de oscilaciones, ¿se logra el objetivo?

c) Si se aumenta el número de oscilaciones a 20, con la pesa de 0,1000 kg, ¿cuál es el error estimado en el valor de *k*?

d) Indicar algunas combinaciones de pesa y número de oscilaciones que sean adecuadas para lograr el objetivo. JUSTIFIQUE. Para alguna combinación estimar el error de k.

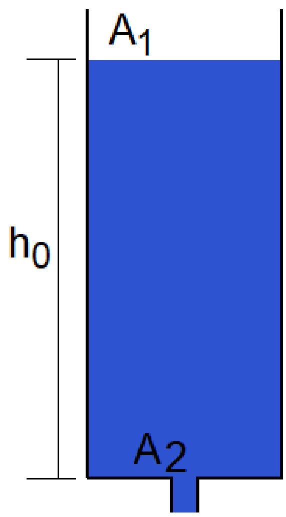
6) Modelización de vaciado de un tanque:

En la figura que se encuentra a la derecha se muestra el esquema de un tanque de sección A_1 con un pequeño orificio en la parte inferior de sección A_2.
El nivel de agua del tanque en función del tiempo cuando se vacía se puede describir con la siguiente ecuación:

$$h(t)=h_0\left(1-\frac{t}{t_f}\right)$$

donde h_0 es el nivel inicial (t=0) y t_f es el tiempo de vaciado del tanque que se puede expresar:

$$t_f=\sqrt{2\frac{h_0}{g}\left(\frac{A_1^2}{A_2^2}-1\right)}$$



El tanque y el orificio tienen sección circular con un diámetro de 103,0 ± 0,5 cm y 19,0 ± 0,2 mm respectivamente. Considere la gravedad 9,8 m/s^2 (considérelo exacto) . En nivel inicial del tanque es 140,0 ± 0,5 cm.

a) Estime la condición del problema en forma experimental

b) Estime el tiempo de vaciado del tanque utilizando la información del punto a). Exprese el resultado bien redondeado. Indique que parámetro tiene mayor influencia en el error

7) Se tiene la siguiente ecuación implícita:

$$x=f(x)$$
$$f(x)=x+\frac{\cos(\omega x)-x}{\omega\cos(\omega x)+1}$$

donde $\omega=0.52$

a) Verifique que x= 0.89390 es una solución aproximada

b) Ahora considere que ω está bien redondeado. Exprese el valor de x bien redondeado.

Guía 1- Errores

8) Se tiene la siguiente ecuación implícita:

$$R_S = f(R_S)$$

$$f(R_S) = R_S - \frac{R_S^2}{\pi} \frac{e^{\frac{-\pi R_A}{R_S}} + e^{\frac{-\pi R_B}{R_S}} - 1}{R_A e^{\frac{-\pi R_A}{R_S}} + R_B e^{\frac{-\pi R_B}{R_S}}}$$

R_A= 101.2 y R_B=102.4 (valores exactos)

a) Verifique que Rs= 461.3887 es una solución aproximada.

b) Ahora considere que R_A y R_B están bien redondeados. Exprese el valor de R_S bien redondeado.

9) Se dispone de un algoritmo para computar la siguiente integral:

$$H(a\,,\,b) = \int_0^1 \frac{e^{-bx}}{a + x^2}\,dx$$

Utilizando dicho algoritmo se obtuvo la siguiente tabla:

a	b	H
0.39	0.34	1.425032
0.40	0.32	1.408845
0.40	0.34	1.398464
0.40	0.36	1.388198
0.41	0.34	1.372950

Se pretende estimar H(z,y), siendo y, z cantidades físicas obtenidas de un proceso de medición:

$z = 0.400 \pm 0.003$ y $y = 0.340 \pm 0.005$

Dar una cota para el error inherente propagado. Expresar bien redondeado, si es posible, el número buscado, suponiendo despreciables los otros errores.

[En los ejercicios 10-13, donde se pida que trabaje con cierta mantisa y en punto flotante, tenga en cuenta la relación entre la mantisa y la UAL al resolver <u>cada</u> cálculo intermedio.]

10) a) Estimar $G = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$) en el sistema de numeración [G(10, 6, 1), red] para x =30,01 (bien redondeado), sabiendo que las operaciones raíz cuadrada y logaritmo natural se conocen con un error relativo menor a 10^{-5}. Expresar el valor bien redondeado, si es posible.

b) Obtener una mejor aproximación del valor buscado construyendo un problema numérico más estable que el propuesto para los datos que se poseen.

c) Mediante Octave o Python graficar G y la función propuesta en el punto anterior en el intervalo [30; 31]. Analizar los resultados con ayuda de estas gráficas. Extraer conclusiones.

11) Analizar, con ayuda de los siguientes ejemplos, que en [G(10, 5, 1), red] no valen la ley asociativa ni la distributiva:

i) 0.98765 + 0.012424 – 0.0065432

ii) (4.2832 – 4.2821) 5.7632

12) Dibujar las gráficas de proceso, determinar la condición del problema y el término de estabilidad para los siguientes casos:

i) u = a + a + a y ii) v = 3 a

a) Suponer que a posee cierto error inherente. Comparar los resultados y extraer conclusiones.

b) Efectuar los cálculos con a = 0.6992 en el sistema [G(10, 4, 1), red] y expresarlos bien redondeados

13) Considerar las expresiones:

i) $\dfrac{a-b}{c}$ y ii) $\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}$

Suponer que a, b y c son todos positivos, sin errores inherentes y además a es aproximadamente igual a b.

Mostrar con un ejemplo que el término de estabilidad en ii) puede ser mucho mayor que en i).

Efectuar los cálculos con a= 0.41 , b = 0.39 y c = 0.70 en [G(10, 2, 1), red] y expresarlos bien redondeados.

14) Sea la siguiente expresión:

$$y=n!\log\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)$$
$$a_0=1$$
$$a_i=\frac{1}{10^{16+\frac{1}{i}}} \qquad si \quad i\geq 1$$

a) Realice el calculo realizando la sumatoria con n=18

b) Repite al punto anterior pero realice la sumatoria en forma decreciente es decir: $y=n!\log\left(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\right)$

c) Extraiga conclusiones.

15) Se quiere aproximar la suma infinita,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \text{ , en } x = 10.$$

Se determinó que la cantidad de términos necesarios que hay que sumar para que el error de truncamiento sea menor a 10^{-3} es de N términos. Se trabajó en simple y doble precisión realizando la sumatoria con N términos y los valores obtenidos son los siguientes:

x	sumatoria en doble precisión	sumatoria en simple precisión
10	$2.2026462\ 10^3$	$2.2026465\ 10^3$
9.995	$2.1927571\ 10^3$	$2.1927568\ 10^3$
10.005	$2.2125818\ 10^3$	$2.2125823\ 10^3$

a) Halle (en forma aproximada) la condición del problema[1] y el término de estabilidad.

b) Suponiendo que el error relativo en x está acotado por 10^{-4}, halle una cota para el error total. Exprese el resultado de la sumatoria bien redondeado, si es posible.

1 *Retomaremos este problema en la unidad de diferenciación numérica.*