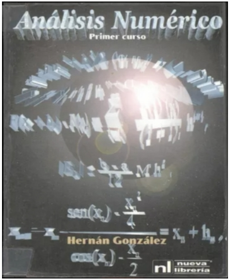
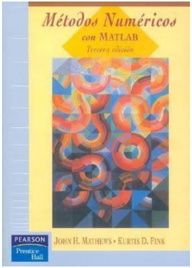
Bibliografía recomendada:

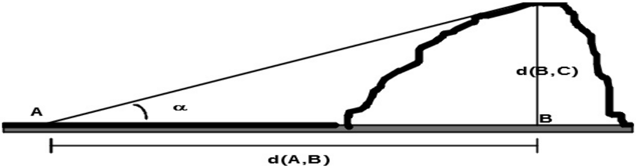
Análisis Numérico, 1er curso Hernán González. Ed Nueva Librería	
Métodos Numéricos con Matlab John Mathews Ed. Pearson	

Análisis Numérico

Errores en el cálculo numérico

Fuentes de error y su propagación.

Un ejemplo de errores en el cálculo numérico



Problema: Deseamos calcular la altura de una montaña d(B,C)

Datos: Distancia d(A,B), ángulo α en grados sexagesimales

Instrumentos de cálculo: Calculadora sin funciones matemáticas, lápiz y papel.

Podemos definir nuestro **Problema Matemático** de la siguiente forma:

$$d(B,C) = d(A,B)\tan\left(\frac{\alpha * \pi}{180}\right)$$

Problema Matemático

d(B , C) = d(A , B) . tan(x) $\qquad x=\frac{\pi\alpha}{180}$

$$d(B,C)=d(A,B)\frac{sen(x)}{\cos(x)}=d(A,B)\;\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}}$$

La expresión anterior no se puede calcular numéricamente por que el **número de operaciones no es finito**.

Problema Numérico

$$d(B,C) \simeq d(A,B)\ \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}$$

Donde N y M son valores fijos

Fuentes de error

Error de truncamiento

Problema Matemático $\longrightarrow$ **Problema Numérico**

Ahora debemos elegir un algoritmo para resolver el problema numérico

Errores inherentes

d(A,B), α : valores exactos $\longrightarrow$ **$\overline{d(A,B)}$: es el valor medido**

$\pi \longrightarrow \overline{\pi}$**: algunos decimales de** π

Errores de redondeo

Las operaciones se realizan utilizando solo una cantidad finita de dígitos (uso de la calculadora)

Fuentes de error

ERRORES DE DISCRETIZACIÓN O DE TRUNCAMIENTO: Son los que se producen al pasar del problema matemático al problema numérico.

ERRORES INHERENTES: Son los errores que afectan a los datos de entrada del problema numérico

ERRORES DE REDONDEO: Se producen al realizar cada cálculo que indique nuestro algoritmo debido a la limitación en la representación de los valores.

Propagación de errores

caso	Error inherente	Error redondeo	Error discretización	Error Final
I	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo
II	**No Nulo**	Nulo	Nulo	Depende solo del P.N
III	Nulo	**No Nulo**	Nulo	Depende del P.N y del algoritmo
IV	Nulo	Nulo	**No Nulo**	Error discretización. P.M≠ P.N

Reglas para expresar los resultados numéricos

ERROR ABSOLUTO DE X

$$e_x = x - \bar{x}$$

ERROR RELATIVO DE X

$$er_x = \frac{e_x}{x} \approx \frac{e_x}{\bar{x}}$$

COTA DEL ERROR DE X

$$\Delta_x \geq |e_x| = |X - \bar{X}|$$

COTA DEL ERROR RELATIVO DE X

$$\Delta r_x \geq \left|\frac{\Delta_x}{x}\right| \approx \left|\frac{\Delta_x}{\bar{x}}\right|$$

El resultado se expresa de dos maneras

$$\boxed{x \rightarrow \bar{x} \pm \Delta_x}$$

(expresado como intervalo)

Convención: Δ_x Tiene **una solo cifra significativa**

$$\boxed{x \rightarrow \bar{x}}$$

(expresado "bien redondeado")

Significa que:

$$|x - \bar{x}| \leq k\, 10^{-t}$$

Convención: $\bar{x}$ Tiene **t decimales significativos.**
Diremos que esta bien redondeado

(k=0.5 redondeo simétrico k=1 truncamiento

(Ver en el campus los ejemplos y las reglas prácticas)

Propagación de errores inherentes

Propagación de errores inherentes en una variable

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Entrada}\\ x\end{matrix}} \xrightarrow{\;y=F(x)\;} \boxed{\begin{matrix}\text{Salida}\\ y\end{matrix}}$$

x: *valor exacto*

$\bar{x}$: *valor medido*

e_x: *error inherente*

y: *valor exacto*

$\bar{y}$: *valor calculado*

e_y: *error inherente propagado*

$$y=F(x)=F(\bar{x}+e_x)=F(\bar{x})+\frac{dF}{dx}(x=\bar{x})\,e_x+Residuo \text{ de Taylor}$$

$$y\approx\bar{y}+\frac{dF}{dx}(x=\bar{x})\,e_x \longrightarrow y-\bar{y}\approx\frac{dF}{dx}(x=\bar{x})\,e_x$$

$$\boxed{e_y\approx\frac{dF}{dx}(x=\bar{x})\,e_x}$$

Cota en la propagación de errores inherentes en una variable

Datos de entrada

$\bar{x}$: valor medido

Δ_x: cota del error inherente

Datos de salida

$\bar{y}$: valor calculado

Δ_y: cota del error inherente propagado

1 $\longrightarrow$ $$e_y \approx \frac{dF}{dx}(x = \bar{x})\, e_x$$

2 $\longrightarrow$ $$|e_y| \approx \left|\frac{dF}{dx}(x = \bar{x})\, e_x\right| \leq$$

3 $\longrightarrow$ $$\Delta_y \approx \left|\frac{dF}{dx}(x = \bar{x})\right| \Delta_x$$

Propagación de errores inherentes en varias variables

Datos de entrada

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$: *valores* medidos

$e_{x_1} + e_{x_2} + \ldots + e_{x_n}$: *errores* inherentes

Datos de salida

$\bar{y}$: *valor* calculado

e_y: *error* propagado

$$y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\bar{x}_1 + e_{x_1}, \bar{x}_2 + e_{x_2}, \ldots, \bar{x}_n + e_{x_n}) =$$

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \frac{dF}{dx_1}(x_1 = \bar{x}_1) e_{x_1} + \frac{dF}{dx_2}(x_2 = \bar{x}_2) e_{x_2} + \ldots + \frac{dF}{dx_n}(x_n = \bar{x}_n) e_{x_n} + \text{residuo de Taylor}$$

$$y \approx \bar{y} + \frac{dF}{dx_1}(x_1 = \bar{x}_1) e_{x_1} + \frac{dF}{dx_2}(x_2 = \bar{x}_2) e_{x_2} + \ldots + \frac{dF}{dx_n}(x_n = \bar{x}_n) e_{x_n}$$

$$e_y \approx \frac{dF}{dx_1}(x_1 = \bar{x}_1) e_{x_1} + \frac{dF}{dx_2}(x_2 = \bar{x}_2) e_{x_2} + \ldots + \frac{dF}{dx_n}(x_n = \bar{x}_n) e_{x_n}$$

Cota en la propagación de errores inherentes en varias variables

Datos de entrada

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$: *valores* medidos

$\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \ldots + \Delta_{x_n}$: *cotas* de los errores

Datos de salida

$\bar{y}$: *valor* calculado

Δ_y: *cota* del error propagado

$$e_y \approx \frac{dF}{dx_1}(x_1=\bar{x}_1)\, e_{x_1} + \frac{dF}{dx_2}(x_2=\bar{x}_2)\, e_{x_2} + \ldots + \frac{dF}{dx_n}(x_n=\bar{x}_n)\, e_{x_n}$$

$$|e_y| \approx \left| \frac{dF}{dx_1}(x_1=\bar{x}_1)\, e_{x_1} + \frac{dF}{dx_2}(x_2=\bar{x}_2)\, e_{x_2} + \ldots + \frac{dF}{dx_n}(x_n=\bar{x}_n)\, e_{x_n} \right| \leq$$

$$\Delta_y \approx \left| \frac{dF}{dx_1}(x_1=\bar{x}_1) \right| \Delta_{x_1} + \left| \frac{dF}{dx_2}(x_2=\bar{x}_2) \right| \Delta_{x_2} + \ldots + \left| \frac{dF}{dx_1}(x_n=\bar{x}_n) \right| \Delta_{x_n}$$