🧮Hoja de Apuntes - Modelación Numérica (2025 - 2C)

Unidad 1: Errores

🕰️Tipos de Errores

- **Error absoluto:** $e_a = |x - x_{real}|$
- **Error relativo:** $e_r = \frac{e_a}{|x_{real}|}$
- **Error porcentual:** $e_p = e_r \times 100$

🕰️Propagación de errores

Caso	Error inherente	Error redondeo	Error discretización	Error final
I	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo
II	No nulo	Nulo	Nulo	Depende del problema numérico
III	Nulo	No nulo	Nulo	Depende del algoritmo
IV	Nulo	Nulo	No nulo	Error de discretización

🕰️Cifras significativas

- Son los números que expresan la precisión de una medición.
- Ejemplo: 0,020 → 2 cifras significativas.

Unidad 2: Ecuaciones no lineales

🕧Método de Bisección

Objetivo: Encontrar una raíz de $f(x) = 0$ en [a, b].

Condición: $f(a) \times f(b) < 0$

Fórmula:

$$x_r = \frac{a+b}{2}$$

Procedimiento: 1. Calcular x_r 2. Evaluar $f(x_r)$ 3. Si $f(a)f(x_r) < 0 \Rightarrow b = x_r$, si no $a = x_r$ 4. Repetir hasta que $|b - a| < tol$

Orden de convergencia: lineal.

Método de Regula-Falsi (Falsa Posición)

Fórmula:

$$x_r = b - f(b)\frac{(a-b)}{f(a)-f(b)}$$

Igual proceso que bisección pero reemplaza el punto medio por esta fórmula. Converge más rápido, pero sigue siendo lineal.

Método del Punto Fijo

Reescritura: $x = g(x)$

Iteración: $x_{k+1} = g(x_k)$

Condición de convergencia: $|g'(x)| < 1$ cerca de la raíz.

Orden de convergencia: lineal.

Método de Newton-Raphson

Fórmula:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Condiciones: - f y f' deben ser continuas. - $f'(x) \neq 0$.

Orden de convergencia: cuadrática.

Variables: - x_k : aproximación actual - $f(x_k)$: valor de la función - $f'(x_k)$: derivada de la función

---

Método de la Secante

Fórmula:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

No requiere derivada. Orden de convergencia: ≈ 1.618 (superlineal).

🕕Newton-Raphson para raíces múltiples

Fórmula:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

Orden de convergencia: cuadrática si la raíz es simple, lineal si es múltiple.

🕕Orden de convergencia

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - r|}{|x_k - r|^p} = C$$

Donde: - p : orden de convergencia (1 = lineal, 2 = cuadrática) - C : constante de convergencia

---

Unidad 3: Ajuste de Curvas

🕕Ajuste por cuadrados mínimos (lineal)

Queremos ajustar una recta: $y = a + bx$

Fórmulas:

$$b = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Error cuadrático medio (ECM):

$$ECM = \frac{1}{n} \sum (y_i - (a + bx_i))^2$$

🕕Ajuste cuadrático y cúbico

- Cuadrático: $y = a + bt + ct^2$
- Cúbico: $y = a + bt + ct^2 + dt^3$

Coeficientes se obtienen con matrices normales ($A^T A x = A^T y$) o `np.polyfit(x, y, grado)`.

🕕Ajuste exponencial

$$y = e^{a-bt}$$

Tomando logaritmos:

$$\ln(y) = a - bt$$

Aplicar regresión lineal entre t y $\ln(y)$.

🕕Interpolación polinómica

Usa los puntos exactos para que el polinomio pase por ellos.

Polinomio de Lagrange:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Polinomio de Newton:

Usa diferencias divididas.

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

Error de interpolación:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Nodos de Chebyshev:

Distribuyen los puntos para minimizar el error de oscilación (fenómeno de Runge).

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, 1, ..., n$$

Polinomio de Hermite:

Interpola usando valores y derivadas conocidas.

Unidad 5: Diferenciación e Integración Numérica

🕛Diferenciación numérica

Aproximaciones:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{(diferencia hacia adelante)}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \quad \text{(diferencia hacia atrás)}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \quad \text{(centrada)}$$

Error de truncamiento: $O(h)$ o $O(h^2)$ según el método.

🕛Integración numérica

Regla del trapecio:

$$I = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$$

Error: $E_t = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$

Regla de Simpson 1/3:

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Error: $E_t = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$

Regla de Simpson 3/8:

$$I = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + f(x_n)]$$

Richardson (mejora de estimación):

$$R = T(h_2) + \frac{T(h_2) - T(h_1)}{(h_1/h_2)^p - 1}$$

Donde p es el orden del método.

✅ **Consejos generales:** - Verificar siempre continuidad de f(x) y derivadas antes de aplicar Newton. - Normalizar variables antes de ajustar. - Revisar tolerancia y error relativo en iteraciones. - Usar Chebyshev cuando se interpola con muchos puntos.

Fin de la hoja de apuntes #