

Bernoulli 卷积的性质

毕业设计开题答辩

冯洲

华中科技大学

U201510104@hust.edu.cn

2019 年 2 月 28 日

目录

- 1 选题背景
- 2 课题内容及拟采用方法
- 3 可能得到结果

Bernoulli 卷积简介

Bernoulli 卷积是一类简单而有趣的自相似测度。令 ν_λ 为随机级数 $\sum_0^\infty \pm 1\lambda^n$ 分布, 其中的符号以概率 $\frac{1}{2}$ 独立地取得。这正是测度 $\frac{1}{2}(\delta_{-\lambda^n} + \delta_{\lambda^n})$ 的无穷卷积, 因此叫“Bernoulli 卷积”。关于这类测度的研究可以追溯到 1930 年, Bernoulli 卷积与调和分析, 代数数理论, 动力系统, 以及 Hausdorff 维数的估计等领域有紧密的联系。

根据不同的研究领域, Bernoulli 卷积有不同的表示形式。[SixtyYears]

Bernoulli 卷积基本问题

根据 [DJFeng1], 对 $\beta \in (1, 2)$, Bernoulli 卷积 ν_β 可以定义为下面一族测度 ν_β^n 的 weak-star 极限

$$\nu_\beta^n := \frac{1}{2} \sum_{a_1 \cdots a_n \in \{0,1\}} \delta_{\sum_{i=1}^n a_i \beta^{-i}} \quad .$$

关于 Bernoulli 卷积基本问题是: 对于哪些 β , 这个测度是绝对连续的, 哪些是奇异的 (singular). 如果密度 (关于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数) 存在, 那么它的光滑性如何 (L^p)? 然后就是 Bernoulli 卷积的 Hausdorff 维数如何, 是否等于 1, 怎样去估计 Hausdorff 维数。

其中有一个非常重要的结果就是, Erdős 证明如果 β 为 Pisot 数, 那么相应的 Bernoulli 卷积的维数一定小于 1。

一个 open 的问题

如果 ν_β 奇异, 那么是否一定有 β 为 Pisot 数?

课题内容及拟采用方法

根据需要,将 Bernoulli 卷积定义为:

对于作用在 $[0, 1]$ 上的 IFS:

$$S = \{S_1 = \frac{1}{\beta}x, S_2 = \frac{1}{\beta}x + 1 - \frac{1}{\beta}\}, \text{有}$$

下自相似测度

$$\nu_{\beta}(A) = \frac{1}{2}\nu_{\beta}(S_1^{-1}(A)) + \frac{1}{2}\nu_{\beta}(S_2^{-1}(A))。$$

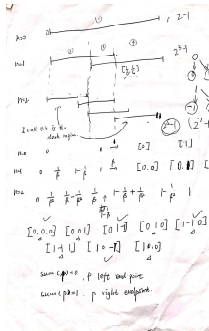


图 单位区间上的 IFS

课题内容及拟采用方法

- 基于之前关于 Bernoulli 卷积的表示形式, 阅读论文 [DJFeng1][DJFeng2][DJFeng3][Niki1], 向指导老师需求帮助, 利用 Matlab 实现其中的 Hausdorff 维数估计公式。对于满足算法条件的 β , 实现算法估计相应的 ν_β 的 Hausdorff 维数。
- 阅读相关的课本, 书籍及论文 [Falconer][Mattila], 学习理解 Bernoulli 卷积的理论知识, 进一步理解上面维数估计式之间的联系。争取对 Bernoulli 卷积的性质有一定的认识。
- 总结学习到的知识, 整理实践结果, 完成毕业论文的写作。

可能得到结果

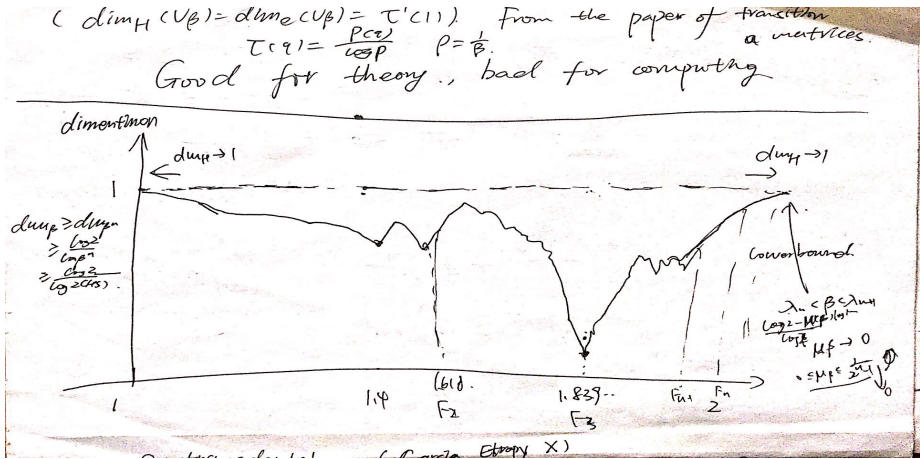


图 Bernoulli 卷积 Hausdorff 维数关于 β 的粗略分布

参考文献



Peres Y., Schlag W., Solomyak B. (2000) Sixty Years of Bernoulli Convolutions. In: Bandt C., Graf S., Zähle M. (eds) Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability, vol 46. Birkhäuser, Basel



Shigeki Akiyama, De-Jun Feng, Tom Kempton, Tomas Persson; On the Hausdorff Dimension of Bernoulli Convolutions, International Mathematics Research Notices, , rny209, <https://doi.org/10.1093/imrn/rny209>



FENG, DE-JUN. “SMOOTHNESS OF THE L^q -SPECTRUM OF SELF-SIMILAR MEASURES WITH OVERLAPS.” Journal of the London Mathematical Society, vol. 68, no. 1, 2003, pp. 102–118., doi:10.1112/S002461070300437X.



De-Jun Feng, Yang Wang, 2004, 'Bernoulli convolutions associated with certain non-Pisot numbers', Advances in Mathematics, vol. 187, no. 1, pp. 173-194

参考文献



Kevin G. Hare & Nikita Sidorov (2018) A Lower Bound for the Dimension of Bernoulli Convolutions, *Experimental Mathematics*, 27:4, 414-418, DOI: 10.1080/10586458.2017.1301841



Falconer, K. J. *Fractal Geometry*. Wiley, 1990.



Mattila, Pertti. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge University Press, 1995.

谢谢！