C2 11.02.2023

sábado, 11 de febrero de 2023 8:58

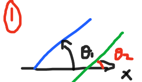
Matemáticas 5 Preparatoria Abierta
Módulo 2

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Demostrará por medio de pendientes, el paralelismo entre dos rectas dadas.
2. Demostrará por medio de pendientes, la perpendicularidad entre dos rectas dadas.
3. Verificará algunas propiedades de figuras geométricas planas, empleando el concepto de pendiente.

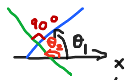
①



$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$m_1 = m_2$

②



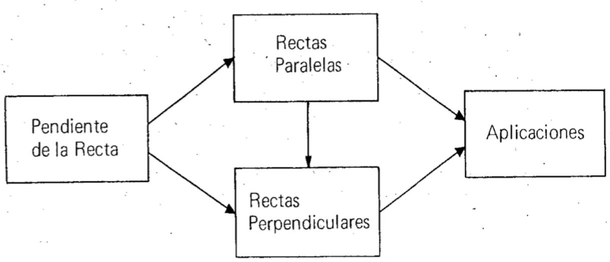
$\tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2}$

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$

③

... etc.

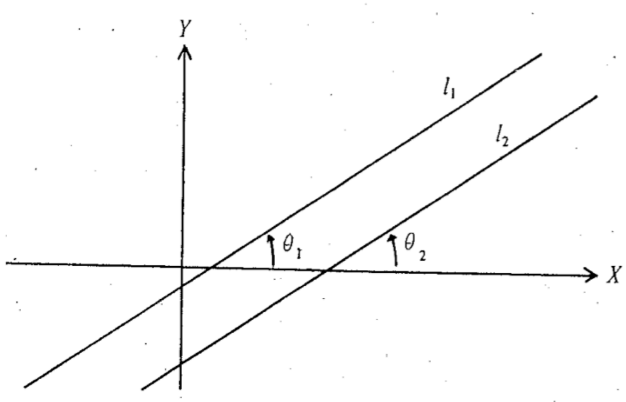
ESQUEMA-RESUMEN



2.1 Rectas paralelas

Condición de paralelismo entre rectas

$$l_1 \parallel l_2 \iff m_1 = m_2 \tag{3}$$



2.2 Rectas Perpendiculares

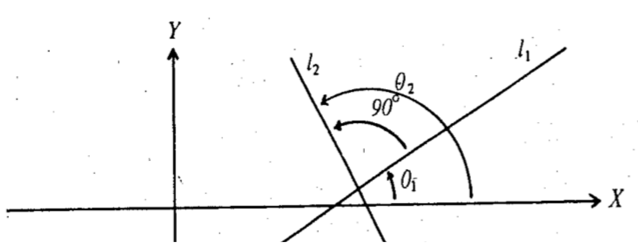


Figura 5

Condición de perpendicularidad entre rectas:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \text{ ó } m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ ó } m_1 m_2 = -1 \quad (4)$$

$(+)(-) = -$
$(-)(+) = -$

Reciproco:

$\boxed{a \cdot b = 1}$

$b = \frac{1}{a}$

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$

$\frac{a}{a} = 1$

Reciprocas:

$|m_1 m_2| = 1$

Y de signo opuesto

$a\,b = 1$

$(-5)\frac{1}{5} = -1$

$\frac{1}{3}(3) = -1$

$(-)(+) = (-)$
$(+)(-) = (-)$

Al unir lo anterior se tiene:

$m_1 m_2 = -1$

Ejemplos:

$m_1 = \frac{5}{4}$; $m_2 = -\frac{4}{5}$

$m_1 m_2 = \frac{5}{4}\left(-\frac{4}{5}\right) = -1$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $P_1(-3,-1)$, $P_2(3,2)$ y $P_3(7,4)$ quedan en línea recta.
2. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $P_1(3,5)$, $P_2(1,-1)$ y $P_3(-4,-16)$ quedan en línea recta.
3. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $A(0,0)$, $B(5,2)$, $C(6,5)$ y $D(1,3)$ son los vértices de un paralelogramo.
4. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $A(-6,0)$, $B(0,-6)$, $C(8,6)$ y $D(2,12)$ son los vértices de un paralelogramo.
5. Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, demuestre que los puntos que se dan en el problema 3 son los vértices de un paralelogramo.
6. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $P_1(4,3)$, $P_2(6,-2)$ y $P_3(-11,-3)$, son los vértices de un triángulo rectángulo. $m_1 m_2 = -1$
7. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $A(6,-3)$, $B(7,6)$ y $C(2,2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. $m_1 m_2 = -1$
8. Demuestre por medio de pendientes que los puntos $P_1(0,9)$, $P_2(3,1)$, $P_3(11,4)$ y $P_4(8,12)$ son los vértices de un rectángulo.
9. Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, demuestre que los puntos que se dan en el problema 6 son los vértices de un triángulo rectángulo.
10. Demuestre que las diagonales del cuadrilátero que se dan en el problema 8 son iguales.

$m_1 m_2 = -1$
$m_2 m_3 = -1$
$\vdots$

9 $h = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = a$

$h = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = a$

$a = a$

10

d_1

d_2

$d_1 = d_2$

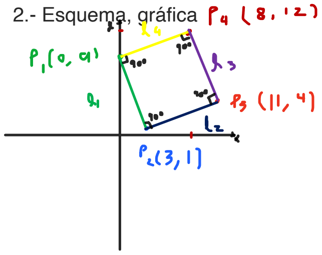
8.- Sol

1.- Datos y Objetivos

P1=(0,9) ; P(3,1) ; P(11,4) y P4(8,12)

Demostrar que son los vértices de un rectángulo.

2.- Esquema, gráfica



3.- Definiciones, Propiedades etc.

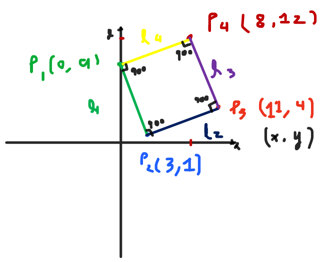
Definición de pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Condición de perpendicularidad:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

4.-Aplicar nuestras definiciones:



$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-9}{3-0} = -\frac{8}{3} \qquad m_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{12-4}{8-11} = -\frac{8}{3}$$

$$m_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{4-1}{11-3} = \frac{3}{8} \qquad m_4 = \frac{x_1 - y_4}{x_1 - x_4} = \frac{9-12}{0-8} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

$$m_1 m_2 = \left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = -1$$

Por lo tanto l1 y l2 son perpendiculares

$$m_2 m_3 = \left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right) = -1$$

Por lo tanto l2 y l3 son perpendiculares

$$m_3 m_4 = \left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = -1$$

Por lo tanto l3 y l4 son perpendiculares

$$m_4 m_1 = \left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right) = -1$$

Por lo tanto l4 y l1 son perpendiculares

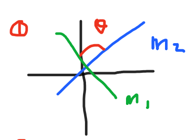
Concluimos que al ser perpendiculares las 4 rectas en pares,
La figura formada es un rectángulo.

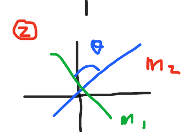
Módulo 3

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

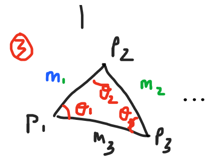
1. Determinará el ángulo entre dos rectas conocidas sus pendientes.
2. Calculará la pendiente de una recta que se interseca con otra recta, dados el ángulo entre las dos rectas y la pendiente de la otra recta.
3. Encontrará los ángulos internos de figuras geométricas planas cuyos vértices se conocen.
4. Deducirá las expresiones que determinan las coordenadas de un punto





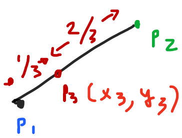
que divide a un segmento de recta en una razón dada.

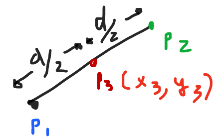
5. Encontrará las coordenadas de un punto que divide a un segmento de recta en una razón dada, conocidos dos puntos de esa recta.
6. Determinará las coordenadas del punto medio de un segmento de recta, dado por dos puntos.



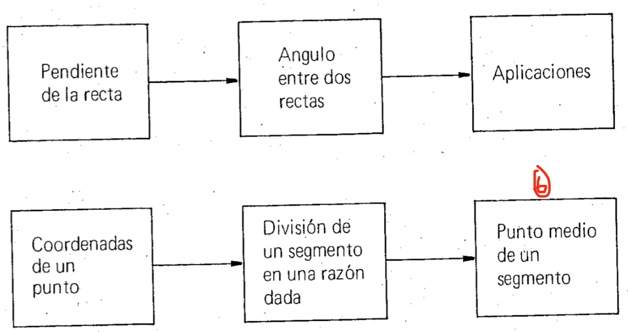
④ $x_3 = P(P_1, P_2, \text{razon})$

$y_3 = P(P_1, P_2, \text{razon})$





ESQUEMA-RESUMEN



3.1 Ángulo entre dos rectos

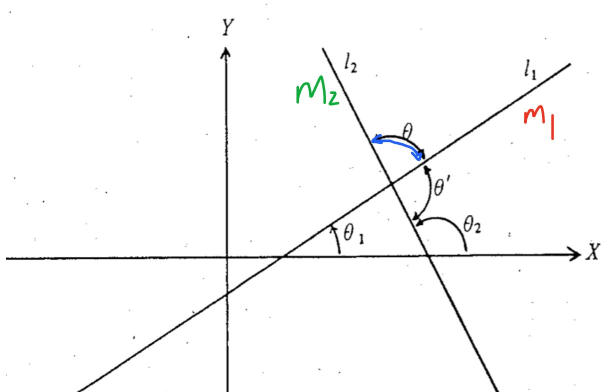


Figura 7

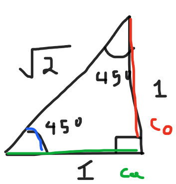
$$\tan\Theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad (5)$$

Recordando la función inversa de la Tan:

$\cancel{\arctan}(\cancel{\tan}\,\theta) = \theta$

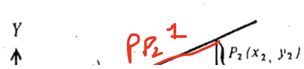
$$\boxed{\Theta = \arctan \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}} \qquad (6)$$

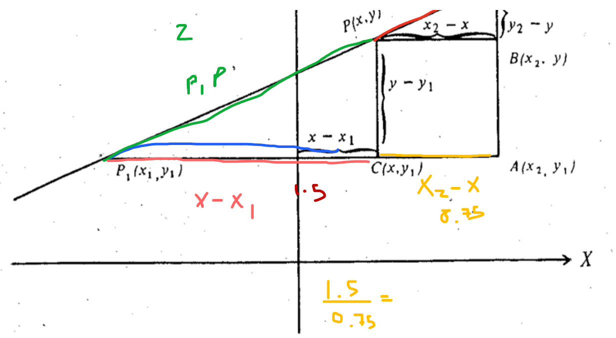
Ejemplo de como calcular la tan de 45°:



$\tan 45° = \frac{co}{ca} = \frac{1}{1} = 1$

3.2 División de un segmento de recta en una razón dada





"Gama" (Razón) se define como:

P1P= Es el segmento P1 P; En otras palabras representa la línea
Que une a los puntos P1 y P

$$\gamma = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{2}{1} = 2 \tag{7}$$

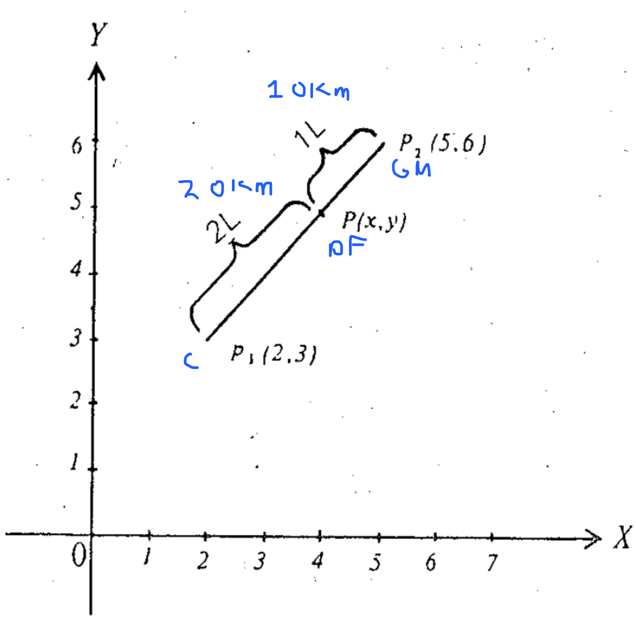
$$\gamma = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{1.5}{0.75} = 2$$

$$x = \frac{x_1 + \gamma x_2}{1 + \gamma} \tag{8}$$

$$\gamma = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$y = \frac{y_1 + \gamma y_2}{1 + \gamma} \tag{9}$$

Explicación Ejemplo 1



Equidista= Misma distancia

$$x = \frac{x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (10)$$

$$y = \frac{y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1} = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (11)$$

Reactivos de Autoevaluación:

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

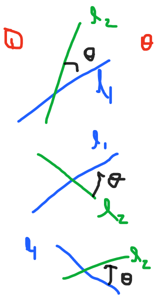
1. Cada uno de los siguientes pares de números son las pendientes de dos rectas. En cada caso encuentre el ángulo que forman:

   a) 2,5 b) 2,—3 c) $-\frac{1}{5}, \frac{3}{2}$

2. El ángulo entre dos rectas de 45° y la pendiente de una de ellas es 3. Encuentre la pendiente de la otra. Si existen dos soluciones encuentre ambas.
3. La pendiente de una recta es $-\frac{1}{2}$ y la inclinación de la otra es 60°

   Encuentre el valor del ángulo agudo entre ellas.
4. Las pendientes de dos rectas son $-\frac{7}{4}$ y $\frac{1}{8}$ respectivamente: halle la pendiente de la bisectriz del ángulo que forman.
5. Encuentre los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $A(3,1)$, $B(-3,-2)$ y $C(-4,4)$.
6. Encuentre los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $A(-6,4)$, $B(-4,-6)$ y $C(2,-8)$.

(1)

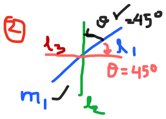


$\theta = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$

$\theta = \arctan\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$

$\theta = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$

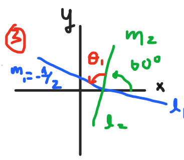
(2)



m_2 $\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ Despejar $m_2 = \cdots$

m_3 $\tan\theta = \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3}$ Despejar $m_3 = \cdots$

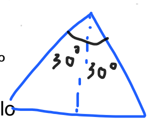
(3)



$m_2 = \tan 60°$

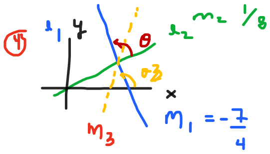
$\theta = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$

Ángulo agudo: Cualquier ángulo menor de 90°

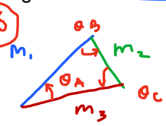


Bisectriz: Recta que divide a la mitad un ángulo

(4)



5-6



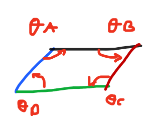
$\theta_A = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$

$\theta_B =$

$\theta_C =$

7. Los vértices de un paralelogramo son $A(0,0)$, $B(5,2)$, $C(6,5)$ y $D(1,3)$. Encuentre los ángulos internos.

(7)



$\theta_A = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$

$\theta_B =$ "

$\theta_C =$ "

$\theta_D =$ "

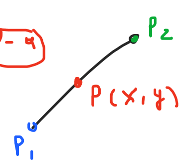
Segunda sección modulo 3

8. Los extremos de un segmento son $P_1(-2,3)$ y $P_2(5,-2)$. Encuentre las coordenadas de su punto medio.
9. Los extremos de un segmento son $P_1(-4,-6)$ y $P_2(8,10)$. Encuentre las coordenadas de su punto medio.
10. Si el punto $P(x,y)$ está a una distancia 4 veces mayor a $P_1(5,3)$ que a $P_2(-6,-10)$ y queda entre P_2 y P_1. Encuentre las coordenadas de P.
11. Si $P_1(-3,-4)$ y $P_2(2,1)$ y $\overline{P_1 P_2}$ se prolonga hasta P de tal manera que la longitud de $\overline{P_1 P}$ sea tres veces la longitud de $\overline{P_1 P_2}$. Encuentre las coordenadas de P.
12. Si el punto medio de un segmento es $P(6,3)$ y un extremo del segmento es $P_1(-4,-7)$. ¿Cuáles son las coordenadas del otro extremo?
13. Un punto $P(7,2)$ está entre $P_1(3,-2)$ y $P_2(9,4)$. ¿En qué proporción (γ) divide al segmento $\overline{P_1 P_2}$?
14. Demuestre analíticamente que las coordenadas del centro de gravedad del triángulo cuyos vértices son (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \text{ y } y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

15. Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero $A(3,0)$, $B(7,8)$, $C(5,-9)$ y $D(0,-4)$, se bisectan mutuamente.
16. Dos de los vértices de un triángulo son $A(0,-4)$ y $B(6,0)$ y las medianas se intersecan en $(2,0)$. Encuentre las coordenadas del tercer vértice del triángulo.
17. Los vértices de un triángulo rectángulo son $A(2,-1)$, $B(6,1)$ y $C(-2,7)$. Demuestre que el punto de la hipotenusa equidista de los 3 vértices.

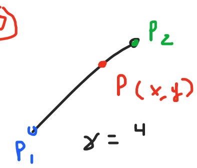
8-9



$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

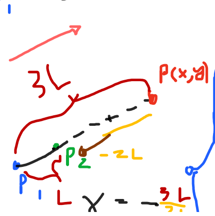
10



$x = \frac{x_1 + \gamma x_2}{1 + \gamma}$

$y = \frac{y_1 + \gamma y_2}{1 + \gamma}$

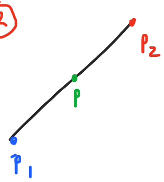
11



$x = \frac{x_1 + \gamma x_2}{1 + \gamma}$

$y = \frac{y_1 + \gamma y_2}{1 + \gamma}$

(12)



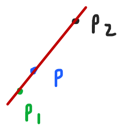
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow \text{Despejar} \qquad x_2 = \qquad y_2 =$$

$$\gamma = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

$PP_2 < 0$

$$\gamma = -\frac{3}{2}$$

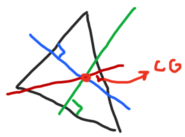
(13)



$$\gamma = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Problema 14.-

Centro de gravedad : Como el punto de intersección de la mediatrices de un triángulo



Mediatrices: Líneas que dividen a la mita a un segmento y tienen un ángulo de 90º entre ellas