Derivada de una composición de funciones (Regla de la cadena)

Teorema

Si la función $F=\{(x,u)|u=V(x)\}$ es derivable sobre un intervalo S_1 y si la función $U=\{(u,y)|y=U(u)\}$ es derivable sobre el intervalo $S_2=\{V(x)|x\in S_1\}$, entonces la función compuesta

$U[V]=\{(x,y)|y=U[V(x)]\}$ es derivable sobre S_1 y

$D_xU[V(x)]=D_uU[V(x)]D_xV(x)$ para $x\in S_1$

Demostración

Sea F la compuesta de U con V de modo que $F(x)=U[V(x)]$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=D_uU[V(x)]D_xV(x)$$

Para $x\in S_1$. Sea

$u=V(x)$, $u+k=V(x+h)$, $k=V(x+h)-V(x)$

Observando que cuando x y $x+h$ están en S_1, u y $u+k$ están en S_2

Tenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{U[V(x+h)]-U[V(x)]}{h}=\frac{U(u+k)-U(u)}{h}$$

$x\in S_2$ deseamos calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{U(u+k)-U(u)}{h}$$

Expresando $U(u+k)-U(u)$ en forma más conveniente

$$\lim_{h\to 0}\frac{U(u+k)-U(u)}{h}=U'(u)$$

Definamos una función G que cumple con:

$$G(k)=\begin{cases}\dfrac{U(u+k)-U(u)}{k}-U'(u) & k\neq 0\\ 0 & k=0\end{cases}$$

Podemos escribir

$$U(u+k)-U(u)=U'(u)k+kG(k)$$

Para toda k tal que $(u+k)\in S_2$ y En consecuencia

$$\frac{U(u+k)-U(u)}{h}=U'(u)\frac{k}{h}+\frac{k}{h}G(k)$$

$$\frac{U(u+k)-U(u)}{h}=U'(u)\left[\frac{V(x+h)-V(x)}{h}\right]+\left[\frac{V(x+h)-V(x)}{h}\right]G(k)$$

$$F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{U(u+k)-U(u)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}U'(u)\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{V(x+h)-V(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{V(x+h)-V(x)}{h}\right]\cdot\lim_{h\to 0}G(k)$$

$\lim\limits_{h\to 0}U'(u)=U'(u)=U'\left[V(x)\right]$ y por hipótesis $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{V(x+h)-V(x)}{h}\right]=D_xV$

$$\lim_{h\to 0}G(k)=G(0)=0$$

Por lo tanto

$$\boxed{F'(x)=D_xU\left[V(x)\right]=U'\left[V(x)\right]D_xV(x)}$$

A menudo se escribe

$$D_xy=D_uyD_xu$$

Formulario de Derivadas.

1) $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ $\qquad D_x(u^n) = nu^{n-1}\cdot D_x(u)$

2) $\frac{d}{dx}x = 1$ $\qquad D_x(x) = 1$

3) $\frac{d}{dx}c = 0$ $\qquad D_x(c) = 0$

4) $\frac{d\left(cu\right)}{dx} = c\frac{du}{dx}$ $\qquad D_x\left(cu\right) = cD_x u$

5) $\frac{d}{dx}\left(u\cdot v\right) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ $\qquad D_x(uv) = u\cdot D_x\left(v\right) + vD_x\left(u\right)$

6) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\frac{du}{dx} - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$ $\qquad D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vD_x\left(u\right) - uD_x\left(v\right)}{v^2}$

Derivadas de las funciones trigonométricas

1) $\frac{d}{dx}sen(u) = \cos(u)\frac{du}{dx}$ $\qquad D_x(sen\ u) = \cos(u)\cdot D_x(u)$

2) $\frac{d}{dx}\cos(u) = -sen(u)\frac{du}{dx}$ $\qquad D_x(\cos u) = -sen(u)\cdot D_x(u)$

3) $\frac{d}{dx}\tan(u) = \sec^2 u\cdot\frac{du}{dx}$ $\qquad D_x\left(\tan u\right) = \sec^2 u\cdot D_x(u)$

4) $\frac{d}{dx}\sec(u) = \sec(u)\cdot\tan(u)\cdot\frac{du}{dx}$ $\qquad D_x\left(\sec u\right) = \sec u\cdot\tan u\cdot D_x(u)$

5) $\frac{d}{dx}\cot(u) = -\csc^2(u)\cdot\frac{du}{dx}$ $\qquad D_x\left(\cot u\right) = -\csc^2(u)\cdot D_x(u)$

6) $\frac{d}{dx}\csc(u) = -\csc(u)\cdot\cot(u)\cdot\frac{du}{dx}$ $\qquad D_x\left(\csc u\right) = -\csc u\cdot\cot u\cdot D_x(u)$

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Con $|u|<1$

1) $\dfrac{d}{dx}arcsen(u)=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_x(arcsenu)=\dfrac{D_x(u)}{\sqrt{1-u^2}}$

Con $|u|<1$

2) $\dfrac{d}{dx}\arccos(u)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_x(\arccos u)=-\dfrac{D_x(u)}{\sqrt{1-u^2}}$

3) $\dfrac{d}{dx}\arctan(u)=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_x\arctan(u)=\dfrac{D_xu}{1+u^2}$

4) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot(u)=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_xar\cot(u)=-\dfrac{D_xu}{1+u^2}$

Con $|u|>1$

5) $\dfrac{d}{dx}arc\sec(u)=\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_xarc\sec(u)=\dfrac{D_xu}{u\sqrt{u^2-1}}$

6) $\dfrac{d}{dx}arc\csc(u)=-\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_xarc\csc(u)=-\dfrac{D_xu}{u\sqrt{u^2-1}}$

Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

1) $\dfrac{d}{dx}a^u=a^u\ln a\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_x(a^u)=a^u\ln a\cdot D_x(u)$

2) $\dfrac{d}{dx}e^u=e^u\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_x(e^u)=e^u\cdot D_x(u)$

3) $\dfrac{d}{dx}\left(\log_a|u|\right)=\dfrac{1}{u}\cdot\log_a e\cdot\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_x\left(\log_a u\right)=\dfrac{1}{u}\cdot\log_a e\cdot D_xu$

4) $\dfrac{d}{dx}\left(\ln|u|\right)=\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{du}{dx}$ $\qquad D_x\left(\ln|u|\right)=\dfrac{D_x\left(u\right)}{u}$

Leyes de Logaritmo

1.- $\log_a\left(x_1 \cdot x_2\right) = \log_a\left(x_1\right) + \log_a\left(x_2\right)$

2.- $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a\left(x_1\right) - \log_a\left(x_2\right)$

3.- $\log_a\left(x^p\right) = p\log_a\left(x\right)$

La función seno hiperbólico se denota por Senh y se define como

$$senh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

La función coseno hiperbólico se denota por Cosh y se define como

$$\cos h = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$D_x senhx = \cosh x$$

$$D_x \cos hx = sen\,\mathrm{h}\,x$$

Ejemplos

Calcular la derivada de las siguientes funciones

1) $g\left(x\right) = \ln\left(x^2 + 1\right)$

Para derivar una función compuesta empleamos el formulario

Del formulario

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left|u\right|\right) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

Donde en este caso $u = x^2 + 1$

$$\frac{d}{dx}g\left(x\right) = \frac{d}{dx}\ln\left(x^2 + 1\right)$$

De acuerdo a la fórmula

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x^2+1\right)=\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$$

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x^2+1\right)=\frac{1}{x^2+1}\cdot\left[\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}(1)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x^2+1\right)=\frac{1}{x^2+1}\cdot\left[2x\right]$$

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x^2+1\right)=\frac{2x}{x^2+1}$$

2.Ejemplo- Derivar

$$h(x)=\frac{\left(x^5-4x+1\right)^7}{\cos(3x)}$$

Identificamos que la función es una división, aplicamos la fórmula para derivar una división

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)-f(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(h(x)\right)=\frac{\cos(3x)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^5-4x+1\right)^7-\left(x^5-4x+1\right)^7\cdot\frac{d}{dx}\left(\cos(3x)\right)}{\left(\cos(3x)\right)^2}$$

Para mayor claridad, por separado realizamos las derivadas

$$\frac{d}{dx}\left(x^5-4x+1\right)^7$$

Para ello empleamos la fórmula

$$\frac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Donde $u=x^5-4x+1$

$$\frac{d}{dx}\left(x^5-4x+1\right)^7=7\left(x^5-4x+1\right)^6\frac{d}{dx}\left(x^5-4x+1\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^5-4x+1\right)^7=7\left(x^5-4x+1\right)^6\left(5x^4-4\right)$$

Por otra parte

$$\frac{d}{dx}\cos\left(3x\right)$$

Empleando la fórmula

$$\frac{d}{dx}\cos(u) = -sen(u)\frac{du}{dx} \qquad \text{con } u = 3x$$

$$\frac{d}{dx}\cos\left(3x\right) = -sen\left(3x\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(3x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\cos\left(3x\right) = -3sen\left(3x\right)$$

Sustituyendo

$$\frac{d}{dx}\left(h\left(x\right)\right) = \frac{\cos\left(3x\right)\cdot 7\left(x^5-4x+1\right)^6\left(5x^4-4\right)-\left(x^5-4x+1\right)^7\cdot\left(-3sen\left(3x\right)\right)}{\left(\cos\left(3x\right)\right)^2}$$

3- Ejemplo

$$g\left(x\right) = x\cdot e^{3x^2}$$

$$\frac{d}{dx}g\left(x\right) = \frac{d}{dx}\left(x\cdot e^{3x^2}\right)$$

Identificamos que es una multiplicación

$$\frac{d}{dx}\left(x\cdot e^{3x^2}\right) = x\cdot\frac{d}{dx}\left(e^{3x^2}\right)+e^{3x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x\right)$$

La derivada de $\frac{d}{dx}\left(e^{3x^2}\right)$ con $u = 3x^2$

Aplicando la fórmula $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x^2}\right) = e^{3x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x^2}\right) = 6xe^{3x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\cdot e^{3x^2}\right)=x\cdot 6xe^{3x^2}+e^{3x^2}\cdot 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\cdot e^{3x^2}\right)=6x^2\cdot e^{3x^2}+e^{3x^2}\cdot 1=e^{3x^2}\left(6x^2+1\right)$$

4- Ejemplos

$$c(x)=sen^2(2x)+\cos^2(2x)$$

$$\frac{d}{dx}c(x)=\frac{d}{dx}\left(sen^2(2x)+\cos^2(2x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}c(x)=\frac{d}{dx}\left(sen^2(2x)\right)+\frac{d}{dx}\left(\cos^2(2x)\right)=\frac{d}{dx}\left(sen(2x)\right)^2+\frac{d}{dx}\left(\cos(2x)\right)^2$$

Para derivar $\frac{d}{dx}\left(sen(2x)\right)^2$ usamos $\frac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ con $u=sen(2x)$

$$\frac{d}{dx}\left(sen(2x)\right)^2=2\left(sen(2x)\right)\frac{d}{dx}sen(2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(sen(2x)\right)^2=2\left(sen(2x)\right)\cos(2x)\cdot 2$$

$$\frac{d}{dx}\left(sen(2x)\right)^2=4sen(2x)\cos(2x)$$

De manera análoga $\frac{d}{dx}\left(\cos(2x)\right)^2$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(2x)\right)^2=2\left(\cos(2x)\right)\frac{d}{dx}\cos(2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(2x)\right)^2=2\left(\cos(2x)\right)\left(-sen(2x)\cdot 2\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(2x)\right)^2=-4\cos(2x)\cdot sen(2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(sen^2(2x)+\cos^2(2x)\right)=4sen(2x)\cdot\cos(2x)-4sen(2x)\cdot\cos(2x)=0$$

5. Ejemplo

$$p(x)=(2x-1)^{-6}\,sen(5x)$$

$\dfrac{d}{dx}p(x)=\dfrac{d}{dx}\left[(2x-1)^{-6}\,sen(5x)\right]$ es una multiplicación y se aplica la fórmula para derivar un producto

$$\frac{d}{dx}\left[(2x-1)^{-6}\,sen(5x)\right]=(2x-1)^{-6}\frac{d}{dx}\left[sen(5x)\right]+sen(5x)\cdot\frac{d}{dx}(2x-1)^{-6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(2x-1)^{-6}\cdot sen(5x)\right]=(2x-1)^{-6}\cdot 5\cos(5x)+sen(5x)\cdot\left(-6(2x-1)^{-7}\cdot 2\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(2x-1)^{-6}\cdot sen(5x)\right]=5(2x-1)^{-6}\cdot\cos(5x)-6sen(5x)\cdot(2x-1)^{-7}$$

Observación.

Habitualmente en una derivada de composición de funciones el argumento será u.

6. Ejemplo

Derivar la expresión

$\dfrac{d}{dx}arc\tan\left(x^3+7\right)$ con $u=x^3+7$

En el formulario tenemos que $\dfrac{d}{dx}\arctan(u)=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot\dfrac{du}{dx}$

Aplicamos la formula

$$\frac{d}{dx}arc\tan\left(x^3+7\right)=\frac{1}{1+\left(x^3+7\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3+7\right)$$

$$\frac{d}{dx}arc\tan\left(x^3+7\right)=\frac{3x^2}{1+\left(x^3+7\right)^2}$$

7. Ejemplo

$f\left(x\right)=\left(\dfrac{\sec\left(5x+1\right)}{arcsen(x^3)}\right)^{3/2}$ Para derivar está composición de funciones primero usamos

La fórmula $\dfrac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec\left(5x+1\right)}{arcsen(x^3)}\right)^{3/2}$$

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{\sec\left(5x+1\right)}{arcsen(x^3)}\right)^{1/2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec\left(5x+1\right)}{arcsen(x^3)}\right)$$

Por separado derivamos $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sec\left(5x+1\right)}{arcsen(x^3)}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec\left(5x+1\right)}{arcsen(x^3)}\right)=\frac{arcsen\left(x^3\right)\cdot\frac{d}{dx}\sec\left(5x+1\right)-\sec\left(5x+1\right)\cdot\frac{d}{dx}arcsen\left(x^3\right)}{\left[arcsen\left(x^3\right)\right]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec\left(5x+1\right)}{arcsen(x^3)}\right)=\frac{arcsen\left(x^3\right)\cdot\sec\left(5x+1\right)\cdot\tan\left(5x+1\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(5x\right)-\sec\left(5x+1\right)\cdot\frac{\frac{d}{dx}x^3}{\sqrt{1+\left(x^3\right)^2}}}{\left[arcsen\left(x^3\right)\right]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec\left(5x+1\right)}{arcsen(x^3)}\right)=\frac{arcsen\left(x^3\right)\cdot\sec\left(5x+1\right)\cdot\tan\left(5x+1\right)\cdot 5-\frac{3x^2\sec\left(5x+1\right)}{\sqrt{1+\left(x^3\right)^2}}}{\left[arcsen\left(x^3\right)\right]^2}$$

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{\sec\left(5x+1\right)}{arcsen(x^3)}\right)^{1/2}\cdot\frac{5\cdot arcsen\left(x^3\right)\cdot\sec\left(5x+1\right)\cdot\tan\left(5x+1\right)-\frac{3x^2\sec\left(5x+1\right)}{\sqrt{1+\left(x^3\right)^2}}}{\left[arcsen\left(x^3\right)\right]^2}$$

Observación: no siempre conviene simplificar el resultado ya que en ocasiones no hay términos que se simplifiquen..

8. Ejemplo

$$\frac{d}{dx}\left(4^{\tan(2x)}\right)$$

De acuerdo con la formula

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad \text{con } u = \tan(2x)$$

Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(4^{\tan(2x)}\right) = 4^{\tan(2x)}\ln(4)\,\frac{d}{dx}\tan(2x) \quad \text{ahora por la formula } \frac{d}{dx}\tan(u) = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(4^{\tan(2x)}\right) = 4^{\tan(2x)}\ln(4)\,sec^2(2x)\,\frac{d}{dx}(2x) \quad \text{donde ahora } u = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(4^{\tan(2x)}\right) = 4^{\tan(2x)}\ln(4)\,sec^2(2x)\cdot 2$$

9. Ejemplo

Derivar $\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(sen\left(x^2+1\right)\right)}{x}\right)$

Se observa que es una división

Aplicamos la fórmula para derivar una división

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(sen\left(x^2+1\right)\right)}{x}\right) = \frac{(x)\,\frac{d}{dx}\ln\left(sen\left(x^2+1\right)\right) - \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\cdot\frac{d}{dx}(x)}{(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(sen(x^2+1))}{x}\right) = \frac{(x)\,\frac{\frac{d}{dx}(sen(x^2+1))}{sen(x^2+1)} - (\ln(x^2+1))\cdot\frac{d}{dx}(x)}{(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(sen\left(x^2+1\right)\right)}{x}\right)=\frac{\frac{(x)\cos\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)}{sen\left(x^2+1\right)}-\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\cdot\frac{d}{dx}(x)}{(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(sen\left(x^2+1\right)\right)}{x}\right)=\frac{\frac{(x)\cos\left(x^2+1\right)(2x)}{sen\left(x^2+1\right)}-\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\cdot 1}{(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(sen\left(x^2+1\right)\right)}{x}\right)=\frac{2x^2cot\left(x^2+1\right)-\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)}{(x)^2}$$