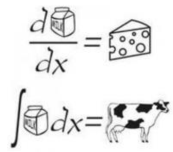
La Derivada.



La Derivada

El cálculo se desarrolló gracias a cuatro importantes problemas en que los matemáticos trabajaron en el siglo XVII.

1.-El problema de la recta tangente.

2.- El problema de la velocidad y la aceleración.

3.- El problema de los mínimos y máximos.

4.- El problema del área.

Definición de la Derivada

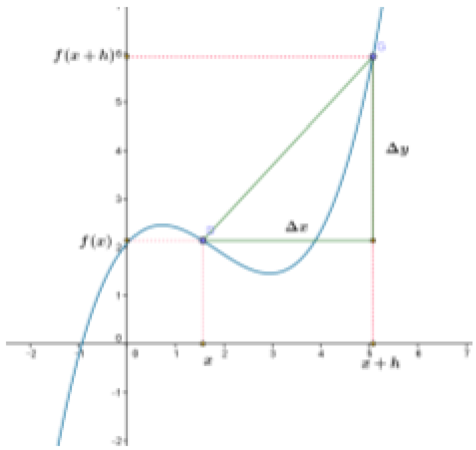
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (1)$$

Notación:

$$\frac{df(x)}{dx}; \quad f'(x); \quad D_x f(x)$$

Interpretación Geométrica de la derivada

Sean dos puntos sobre la curva $O \; y \; G$ construir la línea que los une. Calculamos la pendiente de la línea



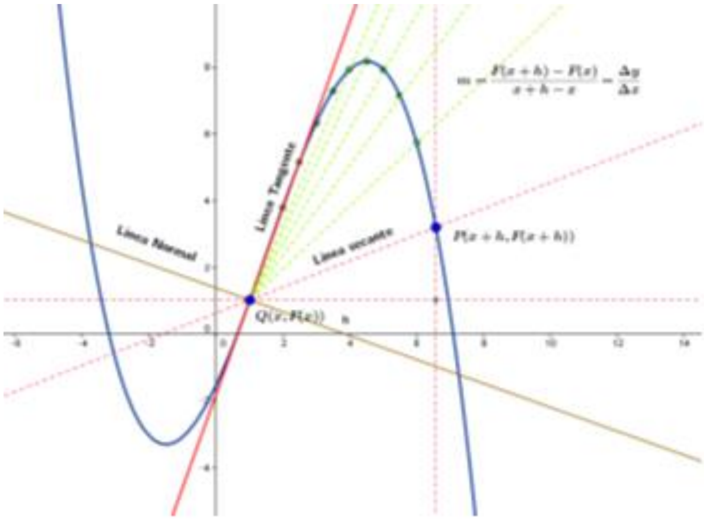
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de la secante es $m = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{x + h - x}$

$$m = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Habitualmente $h = \Delta x$

Otra gráfica, con dos puntos $P\ y\ Q$ mostrando la misma situación, pero ahora recorremos el punto P sobre la curva un poco más próxima al punto Q. La línea secante se hace más parecida a una línea tangente y en el límite cuando $\Delta x(h) \to 0$



$m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ o alternativamente $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

Donde $\Delta y = F(x+h) - F(x)$

Geométricamente la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto en cuestión.

Supongamos que las coordenadas de dicho punto sean $(a, f(a))$, entonces la ecuación de la recta tangente será:

$$\boxed{y - f(a) = m_{\tan gente}(x - a)}$$

Donde $m_{\tan gente} = \left. \dfrac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$

La ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$\boxed{y - f(a) = m_{normal}(x - a)}$$

Donde $m_{normal} = -\dfrac{1}{m_{\tan gente}}$

Por ser la recta normal perpendicular a la recta tangente.

Existencia de la derivada.

La derivada existe para aquellos valores del argumento x, en los que

1) La función $y = f(x)$ está dada y es continua.

2) El límite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ es finito.

La no existencia de la derivada para un valor dado a indica que en el punto correspondiente de la gráfica de la función no existe una tangente determinada o esta tangente forma con el eje X un ángulo de 90^0 y en este caso el límite es infinito.

$f(x)$ FUNCIÓN	$f'(x)$ PRIMERA DERIVADA	$f''(x)$ SEGUNDA DERIVADA
CRECIENTE	POSITIVA	
DECRECIENTE	NEGATIVA	
CÓNCAVA HACIA ARRIBA	CRECIENTE	POSITIVA
CÓNCAVA HACIA ABAJO	DECRECIENTE	NEGATIVA
Tiene un PUNTO MÁXIMO cuando la función cambia de creciente a decreciente	CAMBIA DE POSITIVA A NEGATIVA	
Tiene un PUNTO MÍNIMO cuando la función cambia de decreciente a creciente	CAMBIA DE NEGATIVA A POSITIVA	

Formulas básicas de derivación

1.- $\dfrac{d}{dx}(k) = 0$ donde k es una constante ; ejemplo $\dfrac{d}{dx}(7) = 0$

Ejemplos

$$\frac{d}{dx}(-5)=0$$

$$\frac{d}{dx}(\pi)=0$$

2.- $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$ ejemplo $\frac{d}{dx}\left(x^5\right)=5x^4$

Ejemplos

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}}\right)=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

Demostración de la formula $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$

Calcular la derivada de $f\left(x\right)=x^n$ mediante la definición $\underset{h\to 0}{lím}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$

$$\underset{h\to 0}{lím}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{\left(x+h\right)^n-x^n}{h}$$

El desarrollo de $\left(x+h\right)^n$ es de acuerdo al teorema del binomio

$$\left(x+h\right)^n=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n\left(n-1\right)}{2}x^{n-2}h^2+...+nxh^{n-1}+h^n$$

$$=\underset{h\to 0}{lím}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\frac{n\left(n-1\right)}{2}x^{n-2}h^2+...+nxh^{n-1}+h^n-x^n}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{lím}\left[nx^{n-1}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}x^{n-2}h+...+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right]$$

$= nx^{n-1}$

$D_x\left(x^n\right) = nx^{n-1}$

$$\frac{d\left(x^n\right)}{dx} = nx^{n-1}$$

3.- $\frac{d}{dx}\left(kx^n\right) = k\frac{d}{dx}\left(x^n\right)$ ejemplo $\frac{d}{dx}\left(7x^3\right) = 7\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = \left(7\right)\left(3\right)x^2 = 21x^2$

Ejemplos

$$\frac{d}{dx}\left(3x^{\frac{2}{3}}\right) = 3\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \cancel{3}\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{-\frac{1}{3}}$$

4.-Teorema. Para derivar una suma o resta de derivadas

Si las funciones F y G son derivables sobre un intervalo S, entonces la función

$H = f + g$ es derivable sobre S y

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f\left(x\right) + g\left(x\right)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right) + g\left(x\right)\right] = \frac{d}{dx}f\left(x\right) + \frac{d}{dx}g\left(x\right)$$

Demostración

$H\left(x\right) = f\left(x\right) + g\left(x\right)$

$H\left(x+h\right) = f\left(x+h\right) + g\left(x+h\right)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{H\left(x+h\right) - H\left(x\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right) + g\left(x+h\right) - f\left(x\right)g\left(x\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

5.- Teorema Fórmula para derivar un producto de funciones

Si f y g son funciones diferenciables sobe un intervalo S, entonces la función $H(x)=f(x)\cdot g(x)$ es derivable sobre un conjunto S

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

Demostración

Sea $H(x)=f(x)\cdot g(x)$

$$H(x+h)=f(x+h)\cdot g(x+h)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{H(x+h)-H(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

Sumando y restando la cantidad $f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)+f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot\left[g(x+h)-g(x)\right]+g(x)\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}f(x+h).\lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}$$

$$f(x).\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

6.- Teorema para derivar un de funciones

Si f y g son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Sea

$$H(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$H(x+h)=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{H(x+h)-H(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

Sumando y restando

$$f(x)g(x)-f(x)g(x)=0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]-f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\,\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\,\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo . Calcular la derivada de la función $f(x)=sen(x)$, mediante la definición

Sea $f(x)=sen(x)$

Calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(x+h)=sen(x+h)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cos(h)+sen(h)\cos(x)-sen(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x)(\cos(h)-1)+sen(h)\cos(x)}{h}$$

$$sen(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}$$

Donde $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$ y $\lim\limits_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}=1$

$$sen(x)(0)+\cos(x)(1)$$

$$\frac{d}{dx}sen(x)=\cos(x)$$

Ejemplo . Calcular la derivada de la función $f(x)=\cos(x)$, mediante la definición

Sea $f(x)=\cos(x)$

Calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$$

$$f\left(x+h\right)=\cos\left(x+h\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+h\right)-\cos\left(x\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x\right)\cos\left(h\right)-sen\left(x\right)sen\left(h\right)-\cos\left(x\right)}{h}$$

$$\cos\left(x\right)\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(h\right)-1}{h}-sen\left(x\right)\lim_{h\to 0}\frac{sen\left(h\right)}{h}$$

$$\cos\left(x\right)\left(0\right)-sen\left(x\right)\left(1\right)$$

$$\frac{d}{dx}\cos\left(x\right)=-sen\left(x\right)$$

Ejemplo

Derivar la expresión y simplificar

$$H\left(x\right)=\frac{sen\,x+\cos x}{sen\,x-\cos x}$$

Usando la fórmula para la división $\frac{d}{dx}\left[\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right]=\frac{g\left(x\right)\cdot\frac{d}{dx}f\left(x\right)-f\left(x\right)\frac{d}{dx}g\left(x\right)}{\left[g\left(x\right)\right]^{2}}$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sen\,x+\cos x}{sen\,x-\cos x}\right]=\frac{\left(sen\,x-\cos x\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(sen\,x+\cos x\right)-\left(sen\,x+\cos x\right)\frac{d}{dx}\left(sen\,x-\cos x\right)}{\left[sen\,x-\cos x\right]^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sen\,x+\cos x}{sen\,x-\cos x}\right]=\frac{\left(sen\,x-\cos x\right)\cdot\left(\cos x-sen\,x\right)-\left(sen\,x+\cos x\right)\left(\cos x+sen\,x\right)}{\left[sen\,x-\cos x\right]^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sen\,x+\cos x}{sen\,x-\cos x}\right]=\frac{sen\,x\cdot\cos x-sen^{2}x-\cos^{2}x+\cos x\cdot sen\,x-sen\,x\cdot\cos x-sen^{2}x-\cos^{2}x-\cos x\cdot sen\,x}{\left[sen\,x-\cos x\right]^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sen\,x+\cos x}{sen\,x-\cos x}\right]=\frac{-2sen^2x-2\cos^2 x}{\left[sen\,x-\cos x\right]^2}=-2\frac{\left(sen^2x+\cos^2 x\right)}{\left[sen\,x-\cos x\right]^2}=-\frac{2}{\left[sen^2x-2sen\,x\cdot\cos x+\cos^2 x\right]}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sen\,x+\cos x}{sen\,x-\cos x}\right]=-\frac{2}{\left[1-2sen\,x\cdot\cos x\right]}$$

Ejemplo

Derivar la siguiente expresión

$$f\left(x\right)=x^2sen\,x+\frac{1}{x}+\pi$$

La función es la suma de tres términos que son: $x^2sen\ x,\ \frac{1}{x}\ y\ \pi$ entonces se emplea la derivada de una suma de funciones

$$\frac{d}{dx}\left(x^2sen\,x+\frac{1}{x}+\pi\right)=\frac{d}{dx}\left(x^2sen\,x\right)+\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)+\frac{d}{dx}\left(\pi\right)$$

Pero el primer sumando es una multiplicación de funciones y entonces para este primer sumando se emplea la fórmula de derivar un producto de funciones

$$\frac{d}{dx}\left(x^2sen\,x+\frac{1}{x}+\pi\right)=x^2\frac{d}{dx}\left(sen\,x\right)+sen\,x\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)+\frac{d}{dx}\left(\pi\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2sen\,x+\frac{1}{x}+\pi\right)=x^2\cdot\cos x+sen\,x\cdot 2x-x^{-2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2sen\,x+\frac{1}{x}+\pi\right)=x^2\cdot\cos x+2x\cdot sen\,x-\frac{1}{x^2}$$

Ejemplos

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\cos x\right)$$

Es un producto de funciones y en consecuencia usamos la derivada de un producto

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\cos x\right)=x^3\frac{d}{dx}(\cos x)+\cos x\frac{d}{dx}(x^3)$$

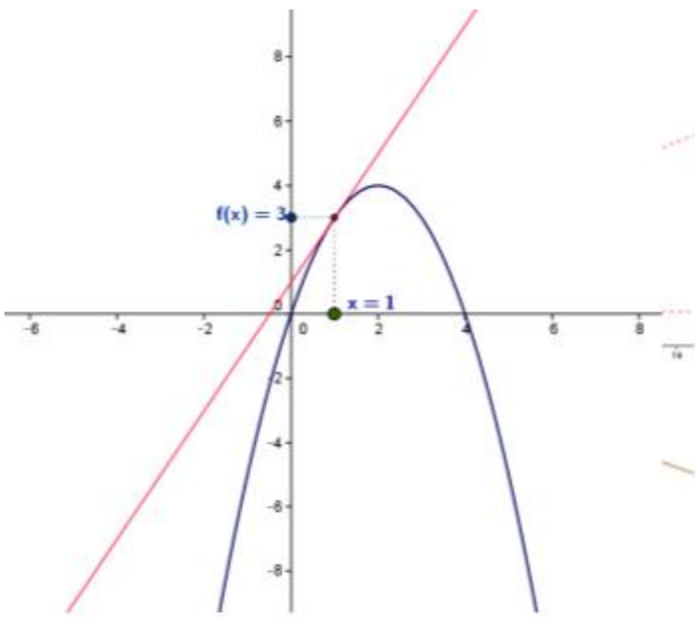
$$=x^3(-sen\ x)+(\cos x)\left(3x^2\right)$$

$$=-x^3 sen\ x+3x^2\cos x$$

Algunos ejemplos de aplicaciones de la recta tangente

Ejemplo.

Encontrar la ecuación de la recta tangente y la normal a la gráfica $f\left(x\right)=4x-x^2$ en el punto x=1.



$$f\left(1\right)=4\left(1\right)-\left(1\right)^2$$

$$f\left(1\right)=3$$

La pendiente es la derivada de la función f evaluada en el punto $\left(1,3\right)$

Mediante la definición de derivada

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Sea $h=\Delta x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$ o alternativamente $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$f(1+h)=4(1+h)-(1+h)^2$ y $f(1)=4(1)-(1)^2$

$$f(1+h)=4+4h-(1+2h+h^2)$$

$$f(1+h)=4+4h-1-2h-h^2$$

$$f(1+h)=3+2h-h^2$$

$$f(1)=4-1$$

$$f(1)=3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3+2h-h^2-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h-h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}2-h$$

$$=2$$

La otra alternativa es usando las fórmulas de derivación.

$$m=\left.\frac{d\left(4x-x^2\right)}{dx}\right|_{x=1}$$

La pendiente es la derivada de la función evaluada en el punto

$$m=4-2x\big|_{x=1}$$

$$m=4-2(1)$$

$m = 2$

La ecuación de la recta tangente es:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 2(x - 1)$

En forma general es: $y = 2x + 1$

La ecuación de la normal

$y - y_1 = m(x - x_1)$

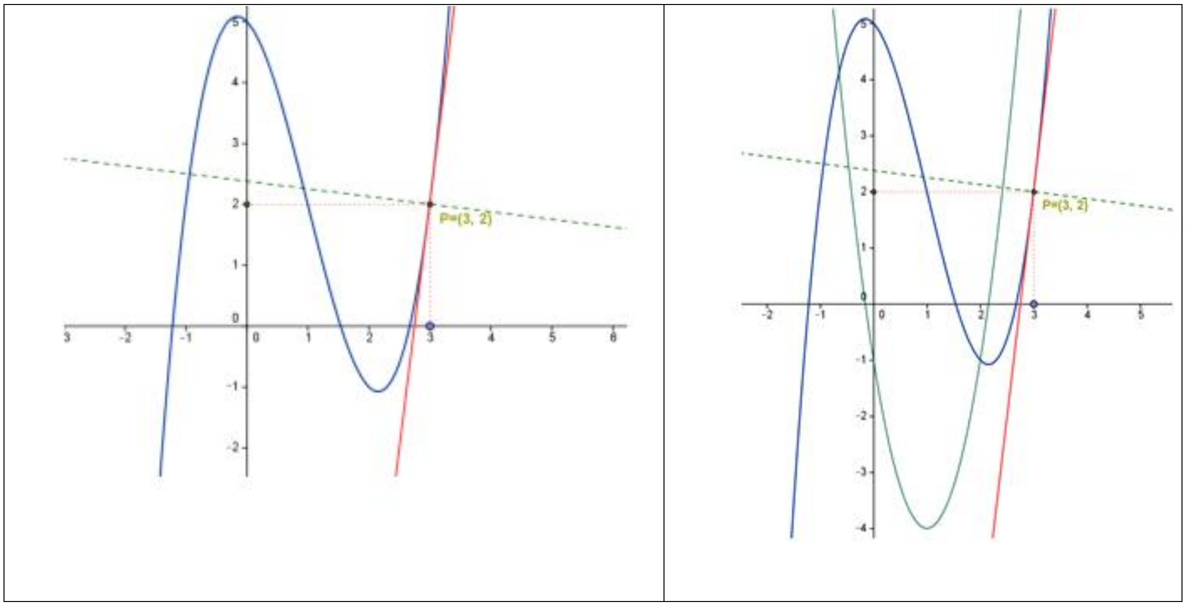
Donde $m_2 = \frac{-1}{m_1}$

$m_2 = \frac{-1}{2}$

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$

$x + 2y = 7$

Ejemplo. Encontrar la ecuación de la recta tangente y la normal a la gráfica $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$. En el punto $P(3,2)$



Aquí encontraremos la pendiente mediante la aplicación de las fórmulas de derivación

$$m = \left. \frac{d\left(x^3 - 3x^2 - x + 5\right)}{dx} \right|_{x=3}$$

$$m = 3x^2 - 6x - 1\Big|_{x=3}$$

$$m = 3(3)^2 - 6(3) - 1$$

$$m = 8$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - (3) + 5$$

$$f(3) = 27 - 27 - 3 + 5$$

$$f(3) = 2$$

$y-2=8(x-3)$

En forma general es: $y=8x-22$

La ecuación de la normal

$y-y_1=m(x-x_1)$

Donde $m_2=\frac{-1}{m_1}$

$m_2=\frac{-1}{8}$

$y-2=-\frac{1}{8}(x-3)$

$x+8y=19$

Observación: Puede no haber tangente, si

a) f es discontinua en $x=a$

b) La gráfica de f tenga una esquina en $(a, f(a))$

Teorema.

Si f es diferenciable en un número a, entonces f es continua en a