INTEGRAL

Definición

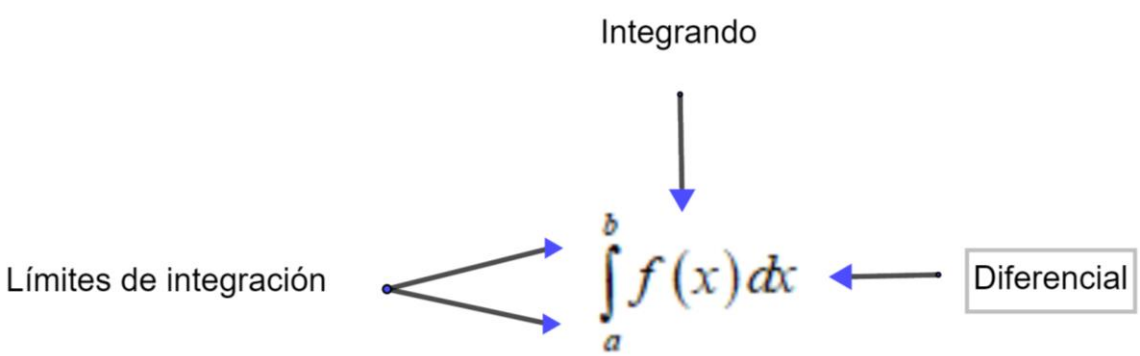
Sea f una función definida en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$. Entonces la integral definida de f de a a b, denotada por

$$\int_a^b f\left(x\right)dx$$

Se define como

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\Delta x_k$$

Los números a a b se llaman límites de integración inferior y superior respectivamente.



Propiedades de las integrales

1. Si F y G son funciones integrables sobre $\left[a,b\right]$

$$\int_a^b\left[F\left(x\right)\pm G\left(x\right)\right]dx = \int_a^b F\left(x\right)dx \pm \int_a^b G\left(x\right)dx$$

2. Si F es integrables sobre $[a,b]$ y si k es un número real

$$\int_a^b kF(x)\,dx = k\int_a^b F(x)\,dx$$

3. Si F es integrable sobre $[a,c]$ y si b es un número tal que $a<b<c$, entonces

$$\int_a^c F(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx + \int_b^c F(x)\,dx$$

4. Si F es integrable sobre $[a,b]$ y si $F(x)\geq 0$ para $x\in[a,b]$, entonces

$$\int_a^b F(x)\,dx \geq 0$$

5. Si F es integrable sobre $[a,b]$, entonces

$$\int_b^a F(x)\,dx = -\int_a^b F(x)\,dx$$

<u>Teorema Fundamental del Cálculo</u>

Sea F una función continua sobre $[a,b]$. Si G es cualquier antiderivada de F sobre $[a,b]$, es decir, si $\frac{dG(x)}{dx} = F(x)$ cuando $x\in[a,b]$, entonces

$$\int_a^b F(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Fórmulas de Integrales

1.- $\int au^{p}du=\frac{au^{p+1}}{p+1}+k$	
2.- $\int a\frac{du}{u}=a\ln\lvert u\rvert+k$	
3.- $\int a\,senu\,du=-a\cos u+k$	
4.- $\int a\cos udu=asenu+k$	
5.- $\int a\sec^{2}udu=a\tan u+k$	válida $\left\{x\in S\,\middle\vert\, x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$
6.- $\int a\csc^{2}udu=-a\cot u+k$	válida $\left\{x\in S\,\middle\vert\, x\neq n\pi, n\in\mathbb{Z}\right\}$
7.- $\int a\sec u\tan udu=a\sec u+k$	válida $\left\{x\in S\,\middle\vert\, x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$
8.- $\int a\csc u\cot udu=-a\csc u+k$	válida $\left\{x\in S\,\middle\vert\, x\neq n\pi, n\in\mathbb{Z}\right\}$
9.- $\int\frac{adu}{\sqrt{1-u^{2}}}=a\,arcsenu+k$	válida $\left\{x\in S\,\middle\Vert\, V(x)\right\vert<1\}$
10.- $\int\frac{adu}{1+u^{2}}=a\arctan u+k$	
11.- $\int\frac{adu}{u\sqrt{u^{2}-1}}=a\,arc\sec u+k$	válida $\left\{x\in S\,\middle\Vert\, V(x)\right\vert>1\}$
12.- $\int ae^{u}du=a\,e^{u}+k$	
13.- $\int ab^{u}du=a\frac{b^{u}}{\ln b}+k$	
14.- $\int\tan udu=-\ln\lvert\cos u\rvert+k$	15.- $\int\cot udu=\ln\lvert senu\rvert+k$

16. $\int \sec u du = \ln\lvert \sec u + \tan u \rvert + k$	17.- $\int \csc u du = \ln\lvert \csc u - \cot u \rvert + k$
18.- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arsen\left(\frac{u}{a}\right)+k$	
17.- $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+k$	
18.- $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\sec\left(\frac{\lvert u \rvert}{a}\right)+k$	

Integración por partes.

$$\int udv = uv - \int vdu + k$$

Integración por sustitución

$\int \left(a-x^2\right)^{1/2} dx$	$x = a\, senu \quad u \in \left[-\pi/2;\pi/2\right]$
$\int \left(x^2-a^2\right)^{1/2} dx$	$x = a\sec u \quad u \in \left[-\pi;-\pi/2\right) ó \quad u \in \left[0;\pi/2\right)$
$\int \left(a^2+x^2\right)^{1/2} dx$	$x = a\tan u \quad u \in \left(-\pi/2;\pi/2\right)$
$\int \left(a+bx\right)^{p/q} dx$	$u^q = a+bx$

Integrales trigonométricas.

Se pueden calcular con la ayuda de las identidades trigonométricas.

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$1+\cot^2 x=\csc^2 x$	$sen2x=2senx\cos x$

Integrandos Racionales

Si $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios, entonces

$$\frac{U(x)}{V(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{V(x)}$$

Si $\frac{R(x)}{V(x)}$ donde el grado de $R(x)$ es menor que el de $V(x)$, entonces $\frac{R(x)}{V(x)}$ se puede representar como una suma de expresiones de la forma

$\int \frac{A}{ax+b}dx$	$\int \frac{Ax+B}{cx^2+dx+e}dx$
$\int \frac{A}{(ax+b)^r}dx$	$\int \frac{Ax+b}{(cx^2+bx+e)^r}dx$

p

Ejemplos

Consideraremos integrales algebraicas sencillas.

El caso $\int ax^p dx=\frac{ax^{p+1}}{p+1}+k$

Donde a es una constante

Ejemplo

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+k$$

En este caso el exponente es 2, la integral indefinida de acuerdo con la fórmula se suma uno al exponente x que en este caso es 2, es decir, $(p+1)=2+1=3$ y se divide entre 3 agregando una constante de integración que se indica con la letra k.

Y con la propiedad de que al derivar

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+k\right)=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(k\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+k\right)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+k\right)=x^2$$

La integral es el proceso inverso de la derivada.

Ejemplo

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+k$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+k$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+k$$

Ejemplo

$$\int x^7dx$$

Solución

$$\int x^7dx=\frac{x^{7+1}}{7+1}+k$$

$$\int x^7dx=\frac{x^8}{8}+k$$

Ejemplo

$\int 3x^5dx$ por propiedad de integral (la constante 3 sale del integrando)

$$\int 3x^5dx=3\int x^5dx$$

$$\int 3x^5 dx = \frac{3x^6}{6} + k$$

Ejemplo

$$\int \left(2x^4 + \frac{x^2}{3} - 3\right) dx$$

Usando las propiedades de integral

$$\int \left(2x^4 + \frac{x^2}{3} - 3\right) dx = 2\int x^4 dx + \frac{1}{3}\int x^2 - 3\int dx$$

$$\int \left(2x^4 + \frac{x^2}{3} - 3\right) dx = 2\left(\frac{x^5}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right) - 3x + k$$

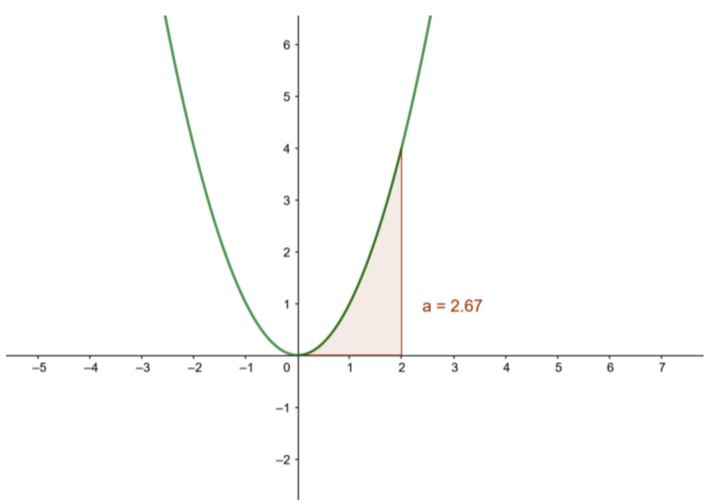
Nota la integral $\int dx = x$

La interpretación geométrica de la integral

Si la función $f(x) \geq 0$ representa el área bajo la curva de la función }

Ejemplo

Hallar el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ entre 0 y 2.



El área de la región iluminada es

$$A=\int_{0}^{2} x^{2}dx$$

Se efectúa la integral

$$\int x^{2}dx=\frac{x^{3}}{3}$$

Ahora se evalúa en los límites de integración

$$A=\int_{0}^{2} x^{2}dx=\left.\frac{x^{3}}{3}\right|_{0}^{2}$$ se evalúa en el límite superior menos en el límite inferior

$$A=\left.\frac{x^{3}}{3}\right|_{0}^{2}=\frac{(2)^{3}}{3}-\frac{(0)^{3}}{3}=\frac{8}{3}$$

$$A=\frac{8}{3}(2.66)$$

Evaluar la integral

$$\int_{1}^{3}\left(3x^{2}-x+1\right)dx$$

$$\int_{1}^{3}\left(3x^{2}-x+1\right)dx=\left.\frac{3x^{3}}{3}-\frac{x^{2}}{2}+x\right|_{1}^{3}$$

$$=\left(\frac{3(3)^{3}}{3}-\frac{(3)^{2}}{2}+(3)\right)-\left(\frac{3(1)^{3}}{3}-\frac{(1)^{2}}{2}+(1)\right)$$

$$=\left(27-\frac{9}{2}+3\right)-\left(1-\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=\left(\frac{51}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)=24$$