UNIVERDIDAD DE EL SALVADOR

Educación a Distancia CIMAT

Curso de Introducción al Cálculo Integral

EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS DE LA SEMANA 2

"2.4 INTEGRAL POR SUMAS DE RIEMMAN"

1. Ejemplos

Sumas de Riemman

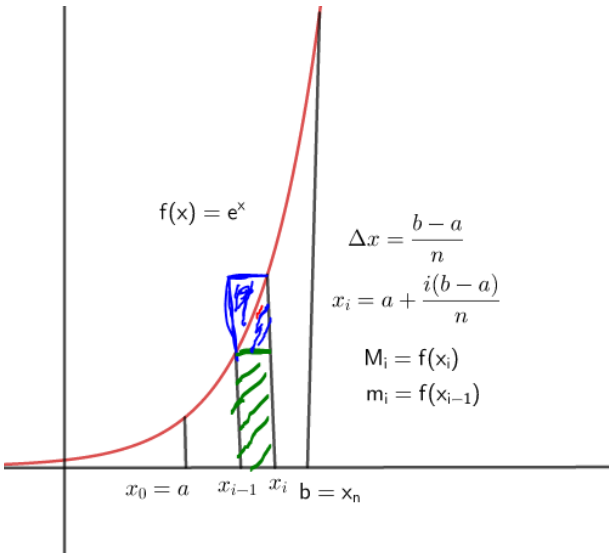
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ donde se encuentra incluida la partición $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de $[a, b]$.
Se llama **suma superior de Riemman** de f a la partición P a la suma:

$$\overline{\mathbb{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

y se llama **suma inferior de Riemman** de f relativa a la partición P a la suma:

$$\underline{\mathbb{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

1. Calcular la integral $\int_a^b e^x\, dx$ por medio de las sumas de Riemann.



Tomando una partición una partición regular sobre el intervalo $[a, b]$ $P = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, a + 3\frac{b-a}{n}, \cdots, a + n\frac{b-a}{n} = n\right\}$ y como es una función creciente en todo su domio en particular en $[a, b]$. así ella alcanza su máximo a su derecha, es decir, en $M_i = f(x_i)$ y mínimo es su lado izquierdo, $m_i = f(x_{i-1})$.

Por lo tanto la suma de Riemman superior es:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{S}}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{a+i\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{a}e^{i\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= e^{a}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{i\frac{b-a}{n}} \\
&= e^{a}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)^{i}}
\end{aligned}$$

La sumatoria $\sum_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)^{i}}$ es una sucesión geometrica de razón $e^{\frac{b-a}{n}}$ así

$\sum_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)^{i}} = e^{\frac{b-a}{n}}\dfrac{(e^{\frac{b-a}{n}})^{n}-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = (e^{b-a}-1)\dfrac{e^{\frac{b-a}{n}}}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{S}}(f,P) &= e^{a}\left(\frac{b-a}{n}\right)(e^{b-a}-1)\frac{e^{\frac{b-a}{n}}}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} \\
&= e^{a}(e^{b-a}-1)e^{\frac{b-a}{n}}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}
\end{aligned}$$

Ahora calculamos el $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a}(e^{b-a}-1)e^{\frac{b-a}{n}}\dfrac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$

$$\lim_{n\to\infty} e^{a}(e^{b-a}-1)e^{\frac{b-a}{n}}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = e^{a}(e^{b-a}-1)\lim_{n\to\infty} e^{\frac{b-a}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$$

Para Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$ aplicamos la regla de $\mathrm{L}^{'}$Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{b-a}{n^{2}}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}\left(-\frac{b-a}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{b-a}{n}}}$$

Por tanto la suma es

$$\begin{aligned}
e^{a}(e^{b-a}-1)\lim_{n\to\infty} e^{\frac{b-a}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} &= e^{a}(e^{b-a}-1)\lim_{n\to\infty} e^{\frac{b-a}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{b-a}{n}}} \\
&= e^{a}(e^{b-a}-1)\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{b-a}{n}}}{e^{\frac{b-a}{n}}} \\
&= e^{a}(e^{b-a}-1) \\
&= e^{b}-e^{a}
\end{aligned}$$

Asi la suma de Riemman es

$$lim_{n\to\infty}\overline{\mathbb{S}}(f,P) = e^{b}-e^{a}$$

Ahora calculemos la suma inferior

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{S}}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{x_{i-1}}\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{a}e^{(i-1)\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= e^{a}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)\frac{b-a}{n}} \\
&= e^{a}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)^{(i-1)}}
\end{aligned}$$

La sumatoria $\sum_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)^{(i-1)}}$ es una sucesión geometrica de razón $e^{\frac{b-a}{n}}$ así

$\sum_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)^{(i-1)}} = e^{\frac{b-a}{n}}\frac{(e^{\frac{b-a}{n}})^{n}-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = (e^{b-a}-1)\frac{e^{\frac{b-a}{n}}}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{S}}(f,P) &= e^{a}\left(\frac{b-a}{n}\right)(e^{b-a}-1)\frac{e^{\frac{b-a}{n}}}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} \\
&= e^{a}(e^{b-a}-1)e^{\frac{b-a}{n}}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}
\end{aligned}$$

Ahora calculamos el $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a}(e^{b-a}-1)e^{\frac{b-a}{n}}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$

$$\lim_{n\to\infty} e^{a}(e^{b-a}-1)e^{\frac{b-a}{n}}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = e^{a}(e^{b-a}-1)\lim_{n\to\infty} e^{\frac{b-a}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$$

Para Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$ aplicamos la regla de L$'$Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{b-a}{n^{2}}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}\left(-\frac{b-a}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{b-a}{n}}}$$

Por tanto la suma es

$$\begin{aligned}
e^{a}(e^{b-a}-1)\lim_{n\to\infty} e^{\frac{b-a}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} &= e^{a}(e^{b-a}-1)\lim_{n\to\infty} e^{\frac{b-a}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{b-a}{n}}} \\
&= e^{a}(e^{b-a}-1)\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{b-a}{n}}}{e^{\frac{b-a}{n}}} \\
&= e^{a}(e^{b-a}-1) \\
&= e^{b}-e^{a}
\end{aligned}$$

Asi la suma de Riemman inferior es

$$lim_{n\to\infty}\underline{\mathbb{S}}(f,P) = e^{b}-e^{a}$$

como el limite de las sumas de Riemman superiores e inferiores son iguales entonces la $\int_{a}^{b} e^{x}\,dx = e^{b}-e^{a}$.

Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales usando sumas de Riemann.

    1. $\int_0^7 5x^3\, dx$
    2. $\int_1^2 (x+1)\, dx$
    3. $\int_{-} 1^2 (x^2 - 2x - 1)\, dx$
    4. $\int_0^4 (x^3 - 2x - 2)\, dx$