INTRODUCCIÓN al Cálculo Integral

SEMANA 3

2020

Autor:
Claudia Amaya de Serrano

Creado por:
Lic. Zenón Portillo
Claudia Amaya de Serrano

Julio – Agosto 2020

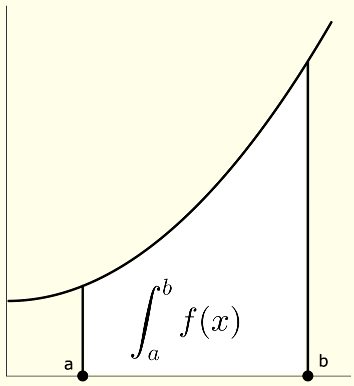
1. INTEGRAL INDEFINIDA

Definición

Llamaremos *integral indefinida* de una función $f(x)$ en un intervalo (a, b) al conjunto de todas sus **funciones primitivas** en dicho intervalo. Lo representaremos con la notación habitual:

$$\int f(x)dx$$

donde $\int$ recibe el nombre de símbolo de integral y $f(x)$ recibe el nombre de integrando



Ahora, ¿A qué se refiere con funciones primitivas?

1.1 Funciones Primitivas

Definición

Sea f una función definida sobre un intervalo I cualquiera, se dice que una función F definida en I es **primitiva** o también llamada **antiderivada** de f si para todo $x \in I$ se cumple que F es derivable y $F'(x) = f(x)$

Si no ha quedado claro, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo (a): La función $F(x) = x^2 + 4$ es **una** primitiva de la funci[on $f(x) = 2x$, ¿por qué? pues debido a que la derivada de $F(x)$ es decir $(x^2 + 4)' = 2x$
Ejemplo (b): La función $G(x) = sen(x)$ es **la** primitiva de la funci[on $g(x) = cos(x)$, debido a que la derivada de $G(x)$ es decir $(sen(x))' = cos(x)$

¿Se ha dado cuenta de una pequeña diferencia? en el ejemplo (a) resaltamos la palabra **una** primitiva. Veamos el siguiente ejemplo para comprender la diferencia entre **una** primitiva y **la** primitiva de una función

Ejemplo (c): La función $H(x) = \frac{1}{4}x^4$ es **una** primitiva de la funcón $h(x) = x^3$, ¿por qué? pues debido a que la derivada de $H(x)$ es decir $(\frac{1}{4}x^4)' = x^3$. Sin embargo, otra primitiva de h podria ser $J(x) = \frac{1}{4}x^4 + 6$ pues tambien se cumple que $(\frac{1}{4}x^4 + 6)' = (\frac{1}{4}x^4)' + (6)' = x^3 + 0 = x^3$.

Generalicemos ahora:

Si $F(x)$ es una primitiva particular de una función dada $f(x)$, entonces todas las primitivas de $f(x)$ son de la forma $F(x) + C$ donde C es una constante arbitraria

Haciendo uso de la definición de integral indefinida, entonces podemos expresar los ejemplos anteriores de la siguiente forma.

Ejemplo (a):

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

Ejemplo (b):

$$\int cos(x)dx = sen(x) + C$$

Ejemplo (c):

$$\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

A continuación proporcionamos una tabla de integrales que puede ser útil para comenzar a calcular integrales de funciones básicas:

$\int dx = x + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int cos(x)dx = sen(x) + C$	$\int sen(x)dx = -cos(x) + C$
$\int csc^2(x)dx = -cot(x) + C$	$\int sec^2(x)dx = tan(x) + C$
$\int sec(x)tan(x)dx = sec(x) + C$	$\int csc(x)cot(x)dx = -csc(x) + C$

Apliquemos lo visto hasta ahora:

Ejemplos Calcule las siguientes integrales haciendo uso de la tabla anterior:

1. $\int x^8 dx = \dfrac{x^{8+1}}{8+1} + C = \dfrac{x^9}{9} + C$

2. $\int \dfrac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \dfrac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\dfrac{x^{-4}}{4} + C$

3. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

4. $\int \sqrt[4]{x^3} + \cos(x)\, dx = \int \sqrt[4]{x^3} dx + \int \cos(x)\, dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx + \int \cos(x)\, dx$

$= \dfrac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C + sen(x) + C = \dfrac{4x^{\frac{7}{4}}}{7} + sen(x) + C$

Resuelva los siguientes ejercicios

a. $\int x^7 dx$

b. $\int x^5 - 4dx$

c. $\int \sqrt[3]{x} + 6dx$

d. $\int \dfrac{1}{x^4} dx$

1.2 Propiedades de las integrales indefinidas

Si f y g son funciones que tienen primitivas en un intervalo definido I, se cumple lo siguiente:

Propiedad 1.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Donde k es una constante multiplicativa que puede salir del integrando

Propiedad 2.

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

es decir, la integral de una suma es igual a la suma de las integrales de sus términos

¿Les suenan estas propiedades? Claro, son las que estudiamos en la primera semana con respecto a las propiedades de las sumatorias.

Ahora, apliquemos lo aprendido en los siguientes ejemplos:

1) $\int 4x^6dx = 4\int x^6dx = 4\left(\frac{x^{6+1}}{6+1}\right) + C = 4\left(\frac{x^7}{7}\right) + C = \frac{4x^7}{7} + C$

2) $\int 7sec^2(x)dx = 7\int sec^2(x)dx = 7tan(x) + C$

3) $\int \frac{8}{x^3}dx = \int 8x^{-3}dx = 8\int x^{-3}dx = 8\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right) + C = 8\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C = -\frac{4}{x^2} + C$

4) $\int 6x^5 + 3x^2 + 12dx = \int 6x^5dx + \int 3x^2dx + \int 12dx = 6\frac{x^{5+1}}{5+1} + 3\frac{x^{2+1}}{2+1} + 12x$

$$= 6\tfrac{x^6}{6} + 3\tfrac{x^3}{3} + 12x = x^6 + x^3 + 12x + C$$

5) $\int (3x^2+x)\sqrt{x}dx$

Solución

$$\int (3x^2+x)\sqrt{x}dx = \int (3x^2+x)x^{\frac{1}{2}}dx = \int 3x^2.x^{\frac{1}{2}} + x.x^{\frac{1}{2}}dx = \int 3x^{\frac{5}{2}} + \int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= 3\int x^{\frac{5}{2}} + \int x^{\frac{3}{2}}dx = 3\left(\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right) + \left(\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right) + C$$

$$= 3\left(\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right) + \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) + C = 3\left(\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right) + \left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right) + C$$

$$= \frac{6x^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

6) $\int \frac{x^4+x^2+x}{x^4}dx$

Solución

$$\int \frac{x^4+x^2+x}{x^4}dx = \int \left(\frac{x^4}{x^4} + \frac{x^2}{x^4} + \frac{x}{x^4}\right)dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)dx$$

$$= \int 1dx + \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x^3}dx$$
$$= \int 1dx + \int x^{-2}dx + \int x^{-3}dx$$

$$= x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

Estamos preparados para realizar algunos ejercicios

Ejercicios: Calcule la integral dada

a. $\displaystyle\int y^3(y+1)dy$

b. $\displaystyle\int 5x^6 - 4cos(x))dx$

c. $\displaystyle\int (y^2+3)(y^2-3)dy$

d. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+2}{\sqrt{x}}dx$

e. $\displaystyle\int ((m-2)^2+m^2)dm$

f. $\displaystyle\int \frac{cos2x}{senx+cosx}dx$

g. $\displaystyle\int \frac{3senx}{cos^2x}dx$

h. $\displaystyle\int \frac{-5cosx}{1-cosx}dx$

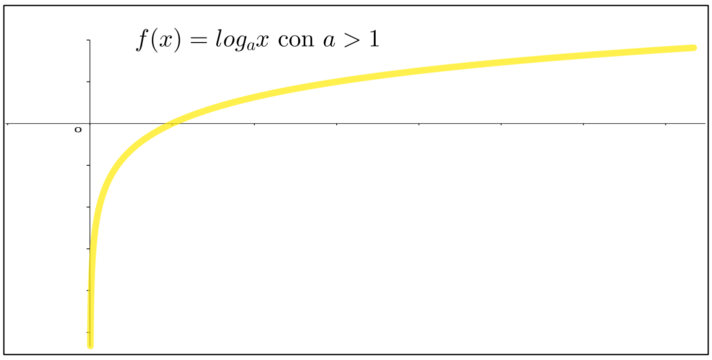
2. FUNCIONES ESPECIALES

2.1 Función logarítmica y su integración

En primer lugar vamos a detallar algunas propiedades de la función logarítmica para el caso $a > 1$

Propiedades

- Dominio: R^+
- $f(0) = log_a 0 = 1$
- Es creciente en todo su dominio
- Es continua en todo su dominio
- $\lim_{x \to \infty} log_a x = \infty$ y $\lim_{x \to 0^+} log_a x = -\infty$
- $f''(x) = \frac{-1}{x^2 lna} < 0$ lo que quiere decir que la función es cóncava hacia abajo



Luego de observar sus características, veamos su forma de integración:

Integración

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C \text{ si } x > 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + C \text{ si } x > 0$$

Es decir, siguiendo el lenguaje utilizado en esta sección: *lnx es una antiderivada de* $\frac{1}{x}$

Apliquemos ahora en algunos ejemplos lo expuesto:

1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx$

Desde el momento que vemos una fracción podríamos intuir que se trata de una integral que involucra a la función logarítmica, por lo tanto lo primero que debemos hacer es calcular la derivada del denominador:

$$(x^2+x+3)' = 2x+1$$

entonces podemos deducir que:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx = ln|x^2+x+3| + C$$

2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+7}dx$

Calculemos la derivada del denominador:

$$(x^3+7)' = 3x^2$$

Como podemos observar en este caso a diferencia del ejemplo anterior la derivada no es exactamente igual al numerador, pero podríamos multiplicar y dividir por 3 y de esa forma obtenemos en el numerador lo que necesitamos, veamos

$$\int \frac{x^2}{x^3+7}dx = \int \frac{\mathbf{3}x^2}{\mathbf{3}(x^3+7)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+7}dx = \frac{1}{3}ln|x^3+7| + C$$

3) $\displaystyle\int \tan(x)dx$

¡Pero no tiene numerador! veamos: Si recordamos $tan(x) = \frac{sen(x)}{Ccos(x)}$ y si calculemos la derivada del denominador:

$$(cos(x))' = -sen(x)$$

Entonces podriamos poner lo siguiente:

$$\int \frac{sen(x)}{cos(x)}dx = \int \frac{\textbf{-}(cos(x))'}{(cos(x))}dx = -ln(cos(x)) + C$$

Con estos conocimientos, podemos realizar los siguientes ejercicios:

Ejercicios: Calcule la integral dada

a. $\displaystyle\int \frac{3}{3x+2}dx$

b. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx$

c. $\displaystyle\int \frac{sec^2(x)}{1+tan(x)}dx$

d. $\displaystyle\int \frac{2}{x(lnx)^2}dx$

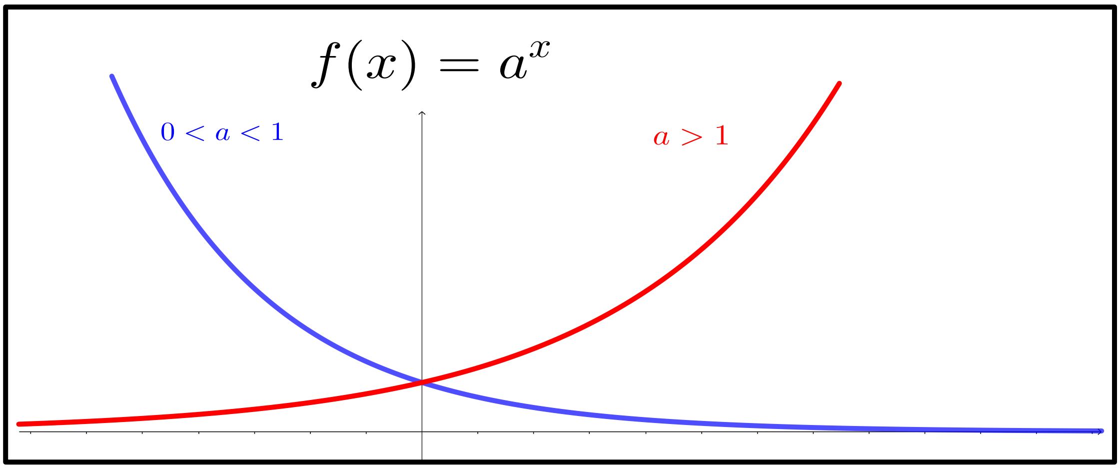
e. $\displaystyle\int \frac{1+sen(x)}{cos(x)-x}dx$

2.2 Función exponencial y su integración

Algunas propiedades de la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 1$ son las siguientes:

Propiedades

- Dominio: R^+
- La función corta al eje y en (0,1)
- Es creciente en todo su dominio
- Es continua en todo su dominio
- $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
- $f''(x) = a^x(lna)^2 > 0$ lo que quiere decir que la función es cóncava hacia arriba



Al observar sus características, estudiemos su forma de integración:

Integración

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^f(x) f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

Apliquemos ahora en algunos ejemplos lo expuesto:

1) $\displaystyle\int 5e^x dx = 5e^x$

2) $\displaystyle\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C$ ya que $(x^2)' = 2x$

3) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3+4} dx = \int \frac{1}{3} 3x^2 e^{x^3+4} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3+4} = \frac{1}{3} e^{x^3+4} + C$

Realicemos los siguientes ejercicios

Ejercicios: Calcule la integral dada

a. $\displaystyle\int e^{4x} dx$

b. $\displaystyle\int e^{3x-2} dx$

c. $\displaystyle\int (2x+4)e^{x^2+4x+3} dx$

d. $\displaystyle\int (sen(x))e^{os(x)} dx$

e. $\displaystyle\int (sec^2(x))e^{tan(x)+3} dx$

f. $\displaystyle\int (x^2+3)e^{x^3+9x} dx$

2.3 Funciones trigonométricas inversas y sus integrales

Las funciones trigonométricas, seno, coseno, tangente, cotangente no son funciones inyectivas y por lo tanto no tienen una funcion inversa como tal, pero si se pueden encontrar esta si se restringe el dominio.

2.3.1 Seno inverso

Definición

Se simboliza como $sen^{-1}x$ también puede llamarse **arcoseno** y se define como

$y = sen^{-1}x$ si y solo si $x = seny$

Algunas observaciones de esta función son:

Propiedades

- El dominio de $y = sen^{-1}x$ es $[-1, 1]$
- El resultado de aplicar $y = sen^{-1}x$ siempre es un valor entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$
- Para $x \in [-1, 1]$ se cumple que $sen(sen^{-1}x) = x$
- Para $x \in -\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ se cumple que $sen^{-1}(senx) = x$

2.3.2 Coseno inverso

Definición

Se simboliza como $cos^{-1}x$ también puede llamarse **arco coseno** y se define como

$y = cos^{-1}x$ si y solo si $x = cosy$

Algunas observaciones de esta función son:

Propiedades

- El dominio de $y = cos^{-1}x$ es $[-1, 1]$
- El resultado de aplicar $y = cos^{-1}x$ siempre es un valor entre 0 y π
- Para $x \in [-1, 1]$ se cumple que $cos(cos^{-1}x) = x$
- Para $x \in [0 \text{ y } \pi]$ se cumple que $cos^{-1}(cosx) = x$

2.3.3 Otras funciones inversas trigonométricas

Funciones trigonométricas inversas			
Función	dominio	ámbito	definición
Tangente inversa	R	$]-\frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{\pi}{2}]$	$tan^{-1}x$
Cotangente inversa	R	$]0, \pi[$	$cot^{-1}x$
Secante inversa	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$	$]0, \pi[-\frac{\pi}{2}$	$sec^{-1}x$
Cosecante inversa	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - 0$	$csc^{-1}x$

Ahora veamos las integrales de las funciones inversas anteriores:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C$$

Apliquemos ahora en algunos ejemplos lo expuesto:

1) $\displaystyle\int \frac{9}{x^2+1}dx$

Solución

$= 9 \cdot \int \frac{1}{x^2+1}dx = 9\tan^{-1}x + C$

2) $\displaystyle\int \frac{3}{2+2x^2}dx$

Solución

$$= \int \frac{3}{2(1+x^2)}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{3}{2}\tan^{-1}x + C$$

3) $\displaystyle\int e^x + \frac{4}{2\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución

$$\int e^x dx + \int \frac{4}{2\sqrt{1-x^2}}dx = \int e^x dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = e^x + 2\,\mathrm{sen}^{-1}x + C$$

4) $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-1}}dx$

Solucion

$$= \int \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{1}}dx = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}x + C$$

Realicemos los siguientes ejercicios

Ejercicios: Calcule la integral dada

a. $\displaystyle\int \frac{6}{1+x^2}dx$

b. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$

c. $\displaystyle\int \frac{2}{5\sqrt{x^2-1}}dx$

d. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}dx$

e. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$

f. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-6x-9x^2}}dx$