UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

EDUCACÓN A DISTANCIA-CIMAT
INTRODUCCIÓN
AL CÁLCULO INTEGRAL

SEMANA 2

2020

Creado por:
Claudia Amaya de Serrano
Zenón Portillo Rivas
Julio-Agosto 2020

Educación
a Distancia
CIMAT

1. Integral definida

"La educación no es preparación para la vida; la educación es la vida en sí misma"Jhon Dewey.

El concepto de integral definida tiene su origen en el problema de calcular áreas de figuras planas limitadas por líneas curvas, así la integral esta relacionado directamente con el concepto de cálculo de áreas.

Los pasos fundamentales para definir este nuevo e importante concepto se esbozan particionar un intervalo, función continua y acotado en dicho intervalo:

Recordemos

Que una partición de un intervalo cerrado $[a, b]$ es cualquier conjunto ordenado de puntos
$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots x_n\}$ tal que
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Además la partición quedada divididad por n subintervalos
$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$, no necesariamente de igual longitud.

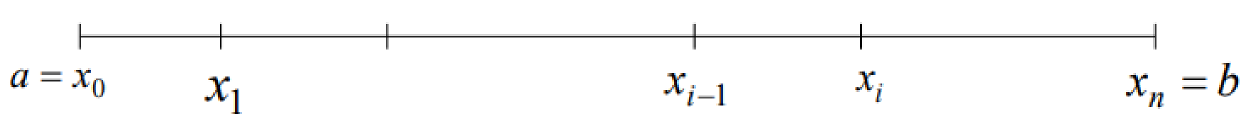


Figura 1: Partición del intervalo $[a, b]$

La longitud del $i-$ésimo sub-intervalo se denota por $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, para todo $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ y la longitud de la partición P es $||P|| = \Delta x = max\{\Delta x_i : i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$

También es necesario que recordemos

> Una partición puede ser regular o no regular, es **partición regular** si todos los sub-intervalos de la partición P tiene la misma longitud, en caso contrario es llamada una **partición no regular**

1.1. Definición

Sabía que

> Bernhard Riemann (1826-1866), fué el primero en formalizar de manera rigurosa el concepto de integral.

La idea de la formalización de integral definida, desarrollada por Riemann, es lógica e intuitiva, ya que una forma de aproximar el valor real de este área sería utilizar del intervalo $[a, b]$ en n sub-intervalos en rectángulos (ver figura 2), ya que desde la geometría clásica es sencillo determinar el área de este tipo de figura, $A_r = b \cdot h$ donde b : base y h : altura.

La base será, de forma conveniente, la que coincide con el intervalo de integración, pues en cualquier otro caso no estaríamos cubriendo toda la figura 2. Para la altura, tendremos que conformarnos con decir que ha de estar acotada entre los valores máximo y mínimo de la curva, y que realmente, en un principio, no es posible saber qué altura daría una mejor aproximación al área verdadera.

La idea de Riemman fue:

> dividir el intervalo de integración en n trozos o sub-intervalos y aplicar la misma idea a cada uno, es decir, utilizaría el área de dos rectángulos como una aproximación al área de la curva, en cada uno de los trozos que hemos definido, ver figura 2.

Riemman se dio cuenta que si se procede de esta manera, haciendo cada vez una división más fina del intervalo de integración, el error que se comete será menor, puesto que cada vez los rectángulos se ajustan mejor a la gráfica $f(x)$.

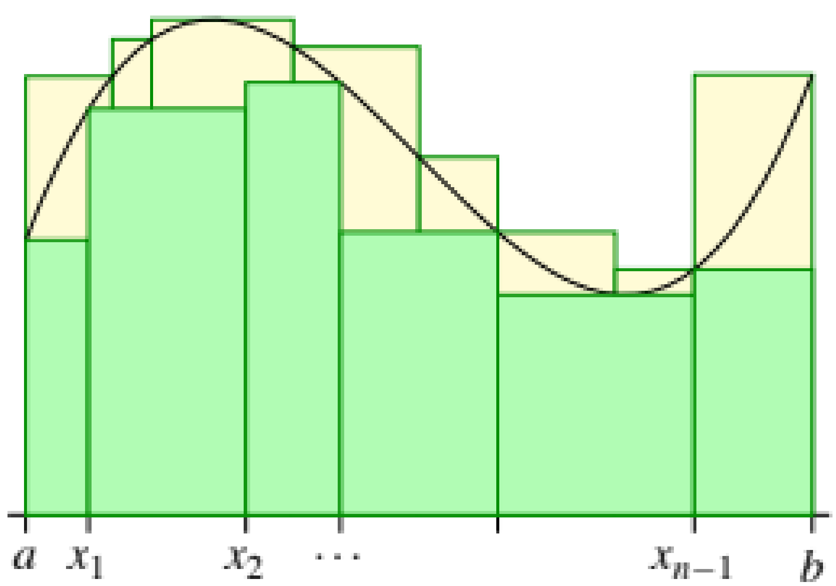


Figura 2: Sumas de Riemman Superiores e inferiores $[a, b]$

Supongamos que la función $f(x)$ es creciente en $[a,b]$ de esta manera, para una división del intervalo de integración $[a,b]$ en n sub-intervalos, que por comodidad podemos suponer que es una partición regular (de igual longitud), la base de cada uno de los n rectángulos infinitesimales será: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, y las coordenadas de los puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ serán: $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$, así la altura de los rectángulos, es $f(x_i) = f(a + \dfrac{i}{n}(b-a))$ valor máximo y $f(x_{i-1}) = f(a + \frac{(i-1)}{n}(b-a))$ valor mímino en caso la función $f(x)$ sea creciente en $[a,b]$, ver figura.

En caso, la la función $f(x)$ sea decreciente en $[a,b]$, el máximo lo alcanza la función en $f(x_{i-1}) = f(a + \dfrac{(i-1)}{n}(b-a))$ y el mínimo en $f(x_i) = f(a + \dfrac{i}{n}(b-a))$.

Vamos a suponer que f es creciente en $[a,b]$, y tomaremos la máxima altura de cada rectángulo.

Así resulta que la aproximación del área acotada por $x = a$, $x = b$, $f(x)$ y $y = 0$ es:

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to\infty}\left(f(x_1)\cdot\frac{b-a}{n} + f(x_2)\cdot\frac{b-a}{n} + \cdots + f(x_n)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{i}{n}(b-a))
\end{aligned}
$$

que podemos expresar como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

Definición 1.1. *Sea $f(x)$, cuyo dominio está limitado por dos extremos que definen los límites de integración $[a, b]$, así el área delimitada es, $A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$ en esta expresión, los números a y b se llaman, respectivamente, límite inferior y límite superior de integración.*

No olvidemos que si el límite existe, representa el valor del área comprendida entre la función, el eje de las abscisas, y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Cálculo de áreas utilizando el concepto de integral.

Ejemplo 1. Calcular el valor de la integral definida $\int_1^3 x^2 dx$ utilizando la definición.

Solución: Tomaremos una partición regular del intervalo [1,3]. La divideremos en n sub-intervalos, por lo que el ancho o la base de cada sub-intervalo estará dado por $x_i = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$. Ahora calculamos la altura de cada sub-intervalo, eligiendo el punto extremo como $x_i = 1 + \frac{i}{n}(1-3) = 1 + 2\frac{i}{n}$ donde ocurre el máximo o mínimo dependiendo de cada sub-intervalo.

Como la función es $f(x) = x^2$, entonces $f(x_i) = x_i^2 = \left(1 + 2\frac{i}{n}\right)^2$

$$\begin{aligned}\left(1 + 2\frac{i}{n}\right)^2 &= \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2 \\ &= \frac{n^2 + 4ni + 4i^2}{n^2}\end{aligned}$$

recordemos

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Así el área sería:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2 + 4ni + 4i^2}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} n^2 + 4ni + 4i^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left(n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left(n^2 \cdot n + 4n \frac{n(n+1)}{2} + 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left(n^3 + 2n(n^2+n) + \frac{2n(2n^2+3n+1)}{3} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} \left(n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{4n^3+6n^2+2n}{3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}\left(\frac{9n^3+6n^2+4n^3+12n^2+2n}{3}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}\left(\frac{13n^3+18n^2+2n}{3}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{26n^3+36n^2+8n}{3n^3}\\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto la $\displaystyle\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$ ■

Ejemplo 2. Calcular el valor de la integral definida $\displaystyle\int_a^b x dx$ utilizando la definición.

Solución: Tomaremos una partición regular del intervalo [a,b]. La divideremos en n sub-intervalos, por lo que el ancho o la base de cada sub-intervalo estará dado por $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
Ahora calculamos la altura de cada sub-intervalo, eligiendo el punto extremo como $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$ donde ocurre el máximo o mínimo dependiendo de cada sub-intervalo.
Como la función es $f(x) = x$, entonces

$$f(x_i) = x_i = a + (b-a)\frac{i}{n}$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a + \frac{i}{n}(b-a)\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(a\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(an + \left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(an + \left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{n^2+n)}{2} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(an + \frac{(b-a)n^2+(b-a)n}{2n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(\frac{2an^2+(b-a)n^2+(b-a)n}{2n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (b-a)\left(\frac{2an^2+(b-a)n^2+(b-a)n}{2n^2} \right) \\
&= (b-a)\left(a + \frac{(b-a)}{2} \right) \\
&= (b-a)\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2} \right) \\
&= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}
$$

Así la $\displaystyle\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

Ejemplo 3. Calcular el valor de la integral definida $\displaystyle\int_a^b k dx$ donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

Solución: Tomaremos una partición regular del intervalo [a,b]. La divideremos en n sub-intervalos, por lo que el ancho o la base de cada sub-intervalo estará dado por $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
Ahora calculamos la altura de cada sub-intervalo, por ser la función una constante la altura para todo los rectángulo es la misma tal que $f(x_i) = k$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b k dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} k \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} k \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} kn \\
&= (b-a)k
\end{aligned}$$

Por tanto la integral $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$ ■

1.2. Propiedades

Propiedad 1. Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, y si los límites de integración son iguales $a=b$, el valor de la integral es cero, es decir, la integral $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Esto se debe a que no existe área bajo la función $f(x)$, vease la figura 4.

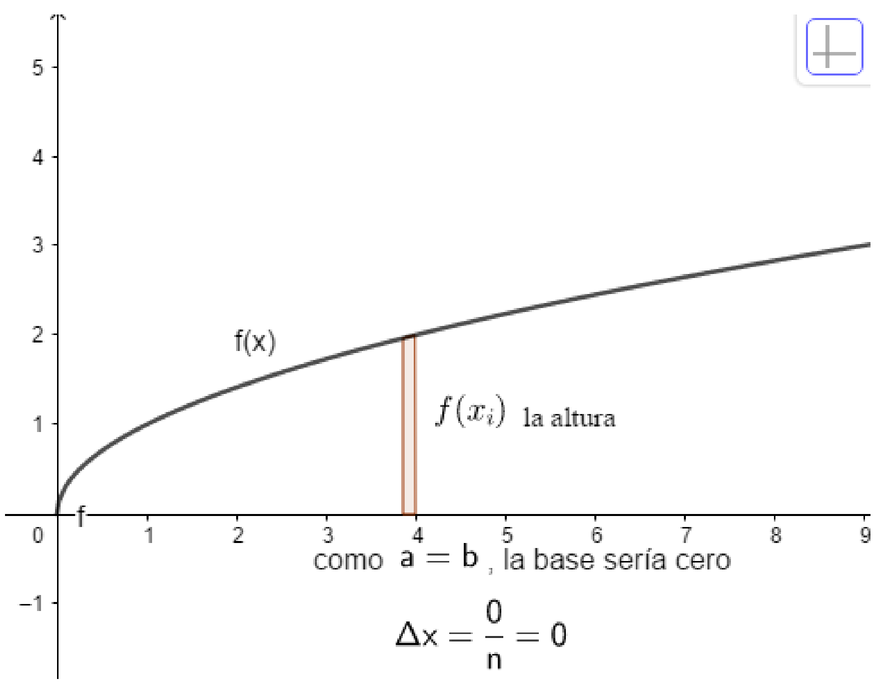


Figura 3: Ilustración de la propiedad 1

ya que el ancho o base de cada sub-intervalos del intervalo esta dado por $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, pero como en este caso $a = b$, $\Delta x = \dfrac{a-a}{n} = \dfrac{0}{n} = 0$, por lo que la base sería cero, altura es $f(x_i)$.

Así la

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)(0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Propiedad 2. Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, al intercambiar los límites de integración, el valor de la integral queda multiplicada por -1, es decir, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Esto se deba a que cuando se esta integrando sobre el intervalo $[a, b]$, el ancho del intervalo es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, pero si intercambiamos el límite superior e inferior entonces el ancho sería $\Delta x = -\frac{b-a}{n}$, esto es por que al sacar factor común signo menos sabemos que $a - b = -(b - a)$.

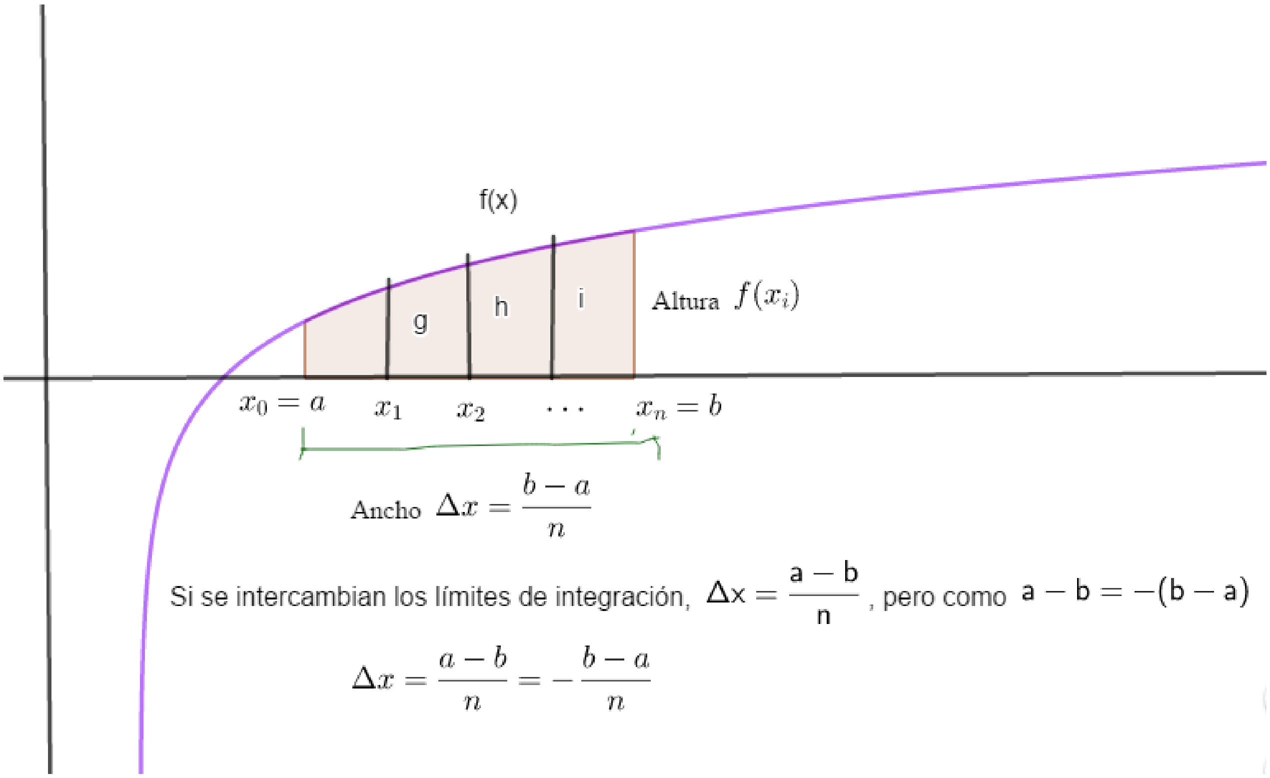


Figura 4: Ilustración de la propiedad 2

Así la

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{-(a-b)}{n} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{a-b}{n} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x \\
&= -\int_b^a f(x)dx
\end{aligned}$$

Propiedad 3. Sea $f(x)$ una función continua y negativa $f(x) < 0$ en $[a, b]$, el valor de la integral será negativa, es decir, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$.

Esto es por la altura en este caso sería negativa, ver figura 5

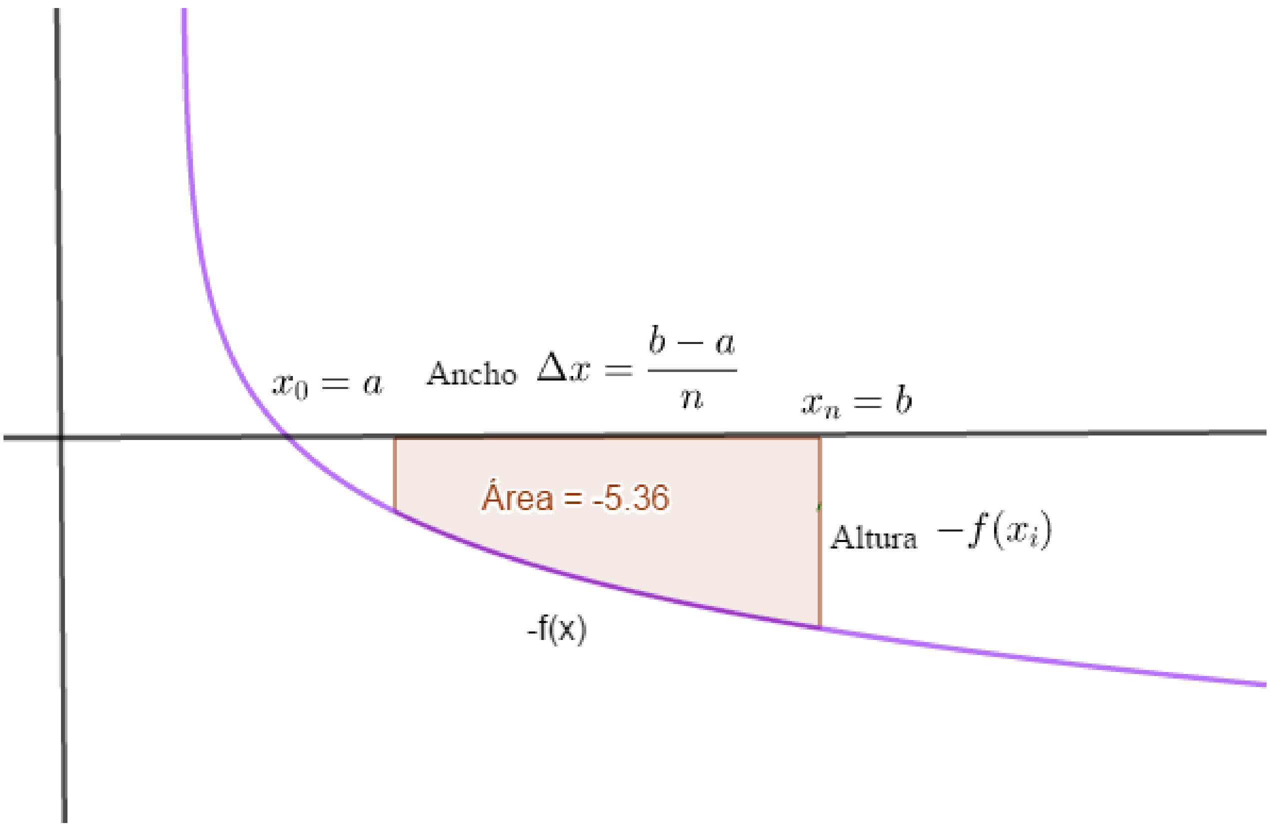


Figura 5: Ilustración de la propiedad 3

Teorema 1.1. *Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.*

Propiedad 4. Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un número real, así podemos descomponer la integral del $[a, c]$ y de $[c, b]$, es decir, que el valor de la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Ejemplo 4. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^3 x\,dx$

Solución: Sabemos que la integral de $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ (si desea ver el resultado ir a ejemplo 2).

Así la por un lado $\displaystyle\int_0^3 x\,dx = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{9}{2}$

Ahora bien por la propiedad 4, tomando $2 \in (0, 3)$ se tiene que la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^3 x\,dx &= \int_0^2 x\,dx + \int_2^3 x\,dx \\
&= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

■

Propiedad 5. Sean $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y sea $k \in \mathbb{R}$ una constante, la integral cumple con la homegeneidad, es decir, que el valor de la integral $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Propiedad 6. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, la integral se distribuye linealmente, es decir, que el valor de la integral $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Ejemplo 5. Calcular la integral $\displaystyle\int_1^4 (3x - 2)\,dx$

Solución: Utilizando las propiedades 5 y 6 la integral de $\displaystyle\int_1^4 (3x - 1)\,dx = 3\int_1^4 x\,dx - \int_1^4 2\,dx$

Así la por un lado $\displaystyle 3\int_1^4 x\,dx = 3\left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{45}{2}$

y la $\displaystyle\int_1^4 2\,dx = 2(4 - 1) = 6$

$$\begin{aligned}\int_1^4 (3x-2)\,dx &= 3\int_1^4 x\,dx + \int_1^4 2\,dx\\ &= \frac{45}{2} - 6\\ &= \frac{33}{2}\end{aligned}$$

■

Propiedad 7. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, la integral mantiene monotonía, es decir, que el valor de la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Propiedad 8. Sean $|f(x)|$ es integrable en el intervalo $[a,b]$, el valor absoluto de la integral es menor o igual que la integral del valor absoluto de la función, es decir, que el valor de la integral $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

1.3. Teorema fundamental del cálculo

El siguiente resultado relaciona el cálculo de las integrales definidas con el cálculo de antiderivadas, entenderemos que una función $F(x)$ es una **antiderivada** de otra función que denotaremos $f(x)$ si la derivada de $F(x)$ es f(x), es decir $F^{'}(x) = f(x)$.

Por ejemplo $F(x) = x^3$ es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$, puesto al derivar $F(x)$ se obtiene $f(x)$, decir, $F^{'}(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 = f(x)$.

Teorema 1.2 (Regla de Barrow). *Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, entonces es la integrable*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

donde $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Demostración: Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales, esdecir, tomamos una partición regular tal que $x = \frac{b-a}{n}$ tomando los puntos $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \cdots, x_n = b$.

Tomando $F(x)$ una antiderivada cualquiera de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y evaluamos en los extremos del intervalo $[a, b]$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}F(b)-F(a) &= F(x_n)-F(x_0)\\ &= F(x_n)-\underbrace{F(x_{n-1})+\cdots-F(x_1)+F(x_1)}_{F(x_i)\ con\ 1\leq i\leq n-1}-F(x_0)\\ &= \sum_{i=1}^{n} F(x_i)-F(x_{i-1})\end{aligned}$$

Recordemos el teorema del valor medio para funciones reales de variable real:

Si f es una función derivable en un intervalo abierto (a,b) entonces, existe un $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a)=f^{'}(c)(b-a)$$

Considerando que $F(x)$ es continua y derivable en cada intervalo $[x_i, x_{i1}]$ podemos afirmar por el Teorema del Valor Medio en cada subintervalo existe un valor x_i tal que

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F^{'}(x_i)(x_i-x_{i-1})=f(x_i)\Delta x$$

Por tanto

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

En el lado izquierda es constante respecto de n y el miembro de la derecha corresponde a las sumas de Riemann de la función $f(x)$ por lo que

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

■

Ejemplo 6. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^3 e^x dx$

Solución: Dado que $F(x) = e^x$ es una antiderivada de e^x en el intervalo $[0, 3]$ podemos calcular

$$\int_0^3 e^x\, dx = F(3) - F(0) = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \approx 19.085$$

■

Teorema 1.3 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, entonces la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

para $a \leq x \leq b$, es una antiderivada de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, es decir,

$$F^{'}(x) = f(x)$$

para cualquier $x \in (a, b)$.

La función $F(x)$ se define como la integral definida de la función $f(t)$ en el intervalo $[a, x]$. De modo que la variable x (variable independiente de F) representa el borde derecho en el que se calcula la integral definida, para cada valor de x fijo,

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

es un número real; de modo que haciendo variar x en el intervalo $[a, b]$ se obtienen los distintos valores de $F(x)$.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ representa el valor del área debajo de la gráfica de la función f en el intervalo $[a, x]$ como se ve en la Figura 6.

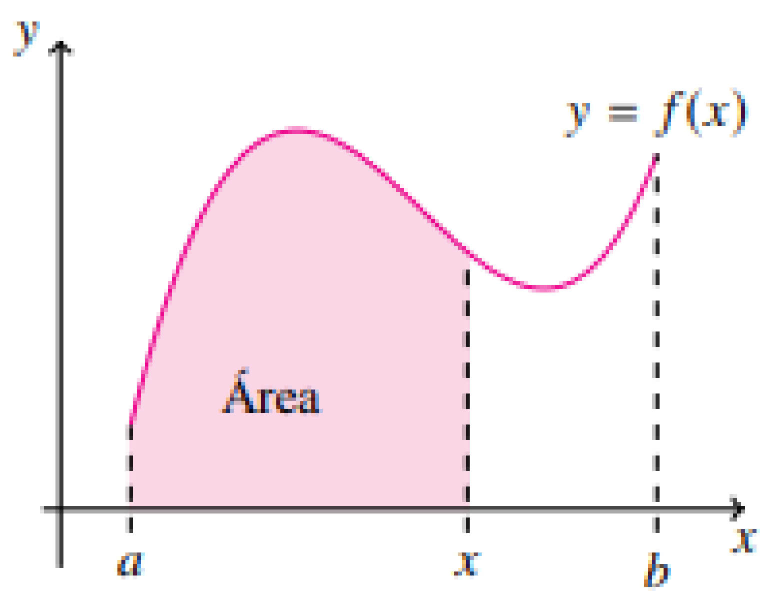


Figura 6: Área debajo de la gráfica de la función $f(x)$ sobre el eje x en el intervalo $[a, x]$.

En este caso, si quisiéramos calcular la derivada de F(x) en algún x deberíamos evaluar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Si $\Delta x > 0$, entonces, $F(x + \Delta x) - F(x)$ representa el área sombreada en la Figura 7, el área debajo de la gráfica de la función f en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

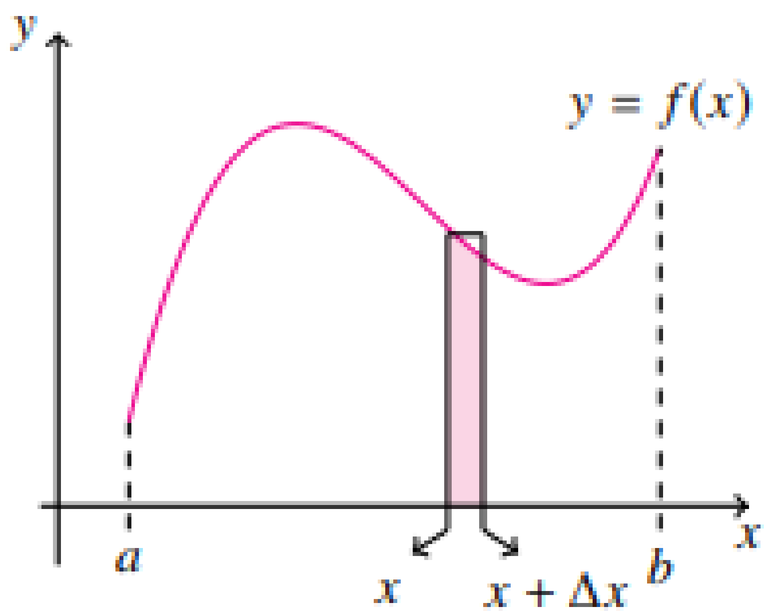


Figura 7: Área debajo de la gráfica de la función $f(x)$ sobre el eje x en el intervalo $[a, x]$.

Para valores pequeños de Δx, se puede aproximar con el área del rectángulo de base Δx y altura $f(x)$

$$F(x + \Delta x)F(x) \approx f(x)\Delta x$$

Despejando $f(x)$,

$$\frac{F(x + \Delta x)F(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

y tomando límite para $\Delta x \to 0^+$ se obtiene

$$F^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F(x + \Delta x)F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

De forma análoga se hace para el caso que $\Delta x < 0$.

En la notación de Leibniz, **El Teorema Fundamental del Cálculo** se escribe, como:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Ejemplo 7. Calcular la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$

Solución: Dado que $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right) = e^{x^2}$$

$\blacksquare$

Corolario 1.1. *Sea $f(x)$ una función continua y diferenciable en $[a,b]$, entonces la función*

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

para $a \leq x \leq b$, es una antiderivada de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, es decir,

$$F^{'}(x) = f(g(x)) \cdot g^{'}(x)$$

para cualquier $x \in (a,b)$.

Ejemplo 8. Calcular la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_0^{3x^2+x} t^2 + t\,dt$

Solución: Dado que $F(x) = \displaystyle\int_0^{3x^2+x} t^2 + t\,dt$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\int_0^{3x^2+x} t^2 + t\,dt\right) &= ((3x^2+x)^2 + 3x^2 + x)(3x^2+x)^{'} \\ &= (9x^4 + 6x^3 + x^2 + 3x^2 + x)(6x+1) \\ &= (9x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x)(6x+1) \end{aligned}$$

■

1.4. La integral como límite de suma de Riemann

Recordemos cuando una función acatada

Una función f es acotada sobre el intervalo $[a, b]$, si existen números reales m, M tales que $m \leq f(x) \leq M$, para el intervalo $[a, b]$, donde el M es el supremo (es cota más pequeña de las cotas superiores) de la función, $M = sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y n es el ínfimo (es cota más grande de las cotas inferiores) de la función,
$m = Inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$

Como $f(x)$ es acotada en $[a, b]$, entonces f esta acotada sobre cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$ de la partición P, por tanto existen números reales m_i, M_i que son las cotas superiores e inferiores respectivamente, es decir:

$$m_i = Inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i = Sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

tal que se cumple siempre la desigualdad

$$m \leq m_i \leq f(x) \leq M_i \leq M,$$

para toda $i = 1, 2, \cdots, n$

Recordemos las sumas de Riemman

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ donde se encuentra incluida la partición
$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de $[a, b]$.
Se llama **suma superior de Riemman** de f a la partición P a la suma:

$$\overline{\mathbb{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

y se llama **suma inferior de Riemman** de f relativa a la partición P a la suma:

$$\underline{\mathbb{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Propiedad 9. Sea f una función acotada en $[a, b]$ y sean P, Q dos particiones de $[a, b]$, se cumple:

1. $\overline{\mathbb{S}}(f, P) \leq \underline{\mathbb{S}}(f, P)$
2. Si Q es más fina que P, entonces $\underline{\mathbb{S}}(f, P) \leq \overline{\mathbb{S}}(f, Q)$ y $\overline{\mathbb{S}}(f, P) \geq \overline{\mathbb{S}}(f, Q)$
3. $\underline{\mathbb{S}}(f, Q) \leq \overline{\mathbb{S}}(f, Q)$

Definición 1.2. *Sea f una función acotada en $[a,b]$ y sea P una partición de $[a,b]$, se llama* **integral inferior de Riemman** *de f a*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,d(x) = inf\{\underline{\mathbb{S}}(f,P) : P \in [a,b]\}$$

Y se llama **integral superior de Riemman** *de f a*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,d(x) = sup\{\overline{\mathbb{S}}(f,P) : P \in [a,b]\}$$

Además se cumple que $\underline{\int_a^b} f(x)\,d(x) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,d(x)$

Definición 1.3. *Se dice que la función f, acotada en $[a,b]$ es Riemman integrable si:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,d(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,d(x)$$

y se denota por $\int_a^b f(x)\,d(x)$

Teorema 1.4 (**Teorema de caracterización de funciones Riemman integrables**). *Sea f una función continua y acotada en $[a,b]$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) La función f es Riemman integrable.

b) Para todo $\epsilon > 0$ *existe una partición* P *que pertenece al conjunto de todas las particiones de* $[a, b]$ *tal que*

$$\overline{\mathbb{S}}(f, P) - \underline{\mathbb{S}}(f, P) < \epsilon.$$

c) Existe una sucesión de particiones $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *de* $[a, b]$ *tal que*

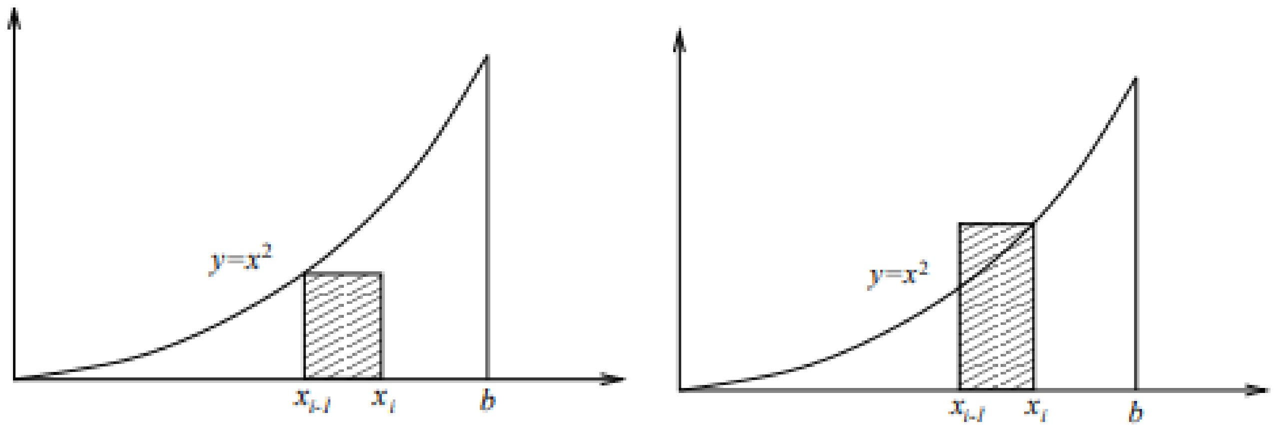
$$\lim_{n\to\infty} \overline{\mathbb{S}}(f, P_n) - \underline{\mathbb{S}}(f, P_n) = 0.$$

En este caso $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{\mathbb{S}}(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{\mathbb{S}}(f, P_n)$

Ejemplo 9. Calcular las suma superior e inferior de Riemman para encontrar la integral $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx$.

Solución: Dividiremos el intervalo $[0, b]$ en n partes iguales donde cada una de estas partes tiene longitud o ancho igual a $\Delta x = \dfrac{b-0}{n} = \dfrac{b}{n}$, de este modo se ha dividido el intervalo $[0, b]$ en n sub-intervalos. Tomando el intervalo i-ésimo $[x_{i-1}, x_i]$.

Como $f(x) = x^2$ es continua en $[0, b]$ entonces f es integrable en $[o, b]$ y además la función $f(x)$ es creciente en $[0, b]$, el valor máximo lo alcanza en $f(x_i) = f\left(0 + \dfrac{i}{n}(b-0)\right) = f\left(\dfrac{i}{n}b\right)$ y el valor mímino en $f(x_{i-1}) = f\left(\dfrac{(i-1)}{n}b\right)$, ver la gráfica 8.



((a)) ((b))

Figura 8: Sumas de Riemman superiores e inferiores

Calculemos las sumas inferiores de Riemman, para ello en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se construye un rectángulo inscrito al sector parabólico, con altura $f(x_{i-1})$ (Ver figura 8(b)) y base $\Delta x = \dfrac{b}{n}$

Entonces la $\underline{\mathbb{S}}(f,P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$.

recordemos

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Entonces si } \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbb{S}}(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(i-1)}{n} b \right)^2 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \left(\frac{b}{n} \right)^2 \left(\frac{b}{n} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \left(\frac{b}{n} \right)^3 \\
&= \left(\frac{b}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \\
&= \left(\frac{b}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \\
&= \left(\frac{b}{n} \right)^3 \left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \right) \\
&= \left(\frac{b^3}{n^3} \right) \left(\frac{2n^3 - 3n^2 - 1}{6} \right) \\
&= b^3 \left(\frac{2n^3 - 3n^2 - n}{6n^3} \right)
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos las sumas superiores de Riemman, para ello en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se construye un rectángulo circunscrito al sector parabólico, con altura $f(x_i)$ (Ver figura

8(b)) y base $\Delta x = \dfrac{b}{n}$

Entonces la $\overline{\mathbb{S}}(f,P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbb{S}}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(i)}{n}b\right)^2 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{b}{n}\right)^2 \left(\frac{b}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{b}{n}\right)^3 \\
&= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \left(\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \left(\frac{b^3}{n^3}\right) \left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) \\
&= b^3 \left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora calculando $\lim_{n\to\infty} \overline{\mathbb{S}}(f,P_n) = b^3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right) = \frac{b^3}{3}$ y el $\lim_{n\to\infty} \underline{\mathbb{S}}(f,P_n) = b^3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3-3n^2-n}{6n^3}\right) = \frac{b^3}{3}$

Como $\lim_{n\to\infty} \overline{\mathbb{S}}(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{\mathbb{S}}(f, P_n) = \frac{b^3}{3}$ entonces la

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$

■

Referencias

[1] LEITHOLD, L., *Cálculo*, segunda edición, Limusa, Mexico, DF.

[2] ZILL, D.G., *Cálculo con Geometría Analítica*, segunda edición, Limusa, Mexico, DF.

Índice de figuras