INTRODUCCIÓN al Cálculo Integral

SEMANA 1

2020

Autor:
Claudia Amaya de Serrano

Creado por:
Lic. Zenón Portillo
Claudia Amaya de Serrano

Julio – Agosto 2020

1. Introducción a cálculo integral

"No hay comprensión en matemáticas si no se distingue el objeto de su representación"
Duval (1999)

1.1 Un poco de historia

Hay algunos términos, conceptos y definiciones que tendremos que estudiar para formalizar el concepto de área y específicamente de integral definida.

En general, a lo largo de la historia se ha desarrollado el cálculo de áreas, que, aunque pareciera algo sencillo a medida el conocimiento matemático se propagó en los egipcios, babilonios y sobre todo los griegos, se buscaron métodos con el cual encontrar el área de figuras curvilíneas, entre ellos inscribir y circunscribir polígonos con una mayor cantidad de lados, de modo que este se aproximara cada vez más al área delimitada.

(Véase Figura 1)

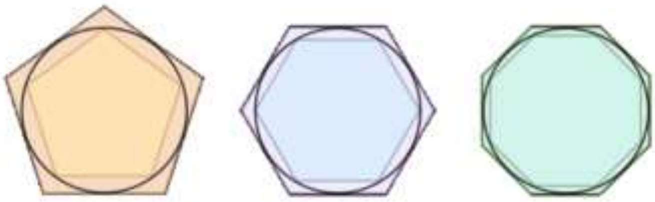


Figura 1. Polígonos Circunscritos e inscritos

Sin embargo, en esta época cualquier procedimiento debía ser demostrado, no se aceptaban los procesos infinitos y por lo tanto se limitaban los métodos para dichos cálculos.

Los métodos infinitesimales, aparecieron hasta que físicos y astrónomos los utilizaron para encontrar soluciones propias de sus disciplinas, entre ellos Kepler (1571-1630) y luego al desarrollarse la Geometría Analítica dichos métodos se hicieron más eficientes donde por ejemplo Fermat (1601-1655) logró presentar una fórmula para el cálculo del área bajo la curva de la forma $y = x^n$.

Todo esto fue el preámbulo para que se llegara a desarrollar el cálculo de integrales de una serie de funciones especiales, luego entrarán en el escenario Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) que fueron los creadores de reglas más generales para que se desarrollará de forma exponencial tanto el Cálculo diferencial como el Cálculo integral;

aportando a la Matemática y sus aplicaciones un empuje que ha conducido a varios matemáticos a seguir estudiando este tema.

Y finalmente el concepto de limite, dado por Cauchy (1789 -1787) en la primera mitad del siglo XIX, fue quien formalizó toda la estructura del cálculo infinitesimal que se conoce hasta el día de hoy.

Para lograr adentrarnos en este mundo, estudiaremos los siguientes conceptos que aportarán el lenguaje y notación necesaria para la comprensión de los teoremas y definiciones que se presentarán más adelante.

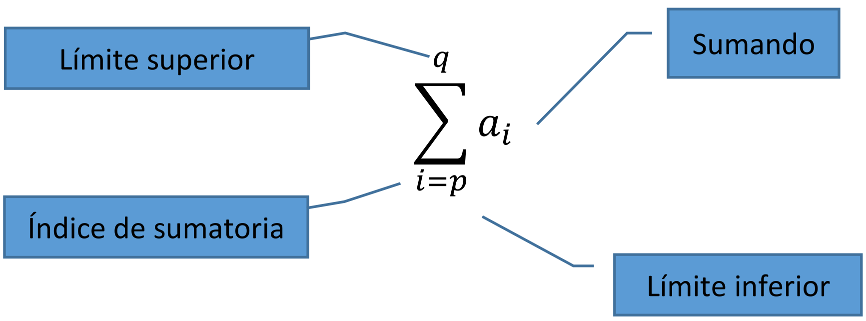
2. Conceptos previos

2.1 Notación de Sumas

El Símbolo

Muchas veces se debe escribir sumas con una gran cantidad de términos, los cuales normalmente llevan un patrón que se puede identificar, pues para ello se utiliza el símbolo $\sum$ Sigma, letra S mayúscula, del alfabeto griego.

La forma abreviada de una suma que se compone de n términos se puede escribir de forma breve de la siguiente forma:



Lo cual, se lee como la suma desde $i = p$ hasta q de los a_i

Algunos ejemplos:

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + m^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots m^2$$

$$\sum_{i=-3}^{k} 5^i = 5^{-3} + 5^{-2} + 5^{-1} + 5^0 + 5^1 + \cdots 5^k$$

Fórmulas de sumas

Algunas de las fórmulas más utilizadas son las siguientes:

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Propiedades de las sumatorias

Las propiedades son consecuentes con las sumas de los números reales, se presentan a continuación en notación de sumatoria

Constante multiplicativa

$$\sum_{i=p}^{n} \boldsymbol{c a_i} = \boldsymbol{c} \sum_{i=p}^{n} \boldsymbol{a_i}$$

Sumatoria de una suma

$$\sum_{i=p}^{n} (\boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{b_i}) = \sum_{i=p}^{n} \boldsymbol{a_i} + \sum_{i=p}^{n} \boldsymbol{b_i}$$

Suma telescópica

$$\sum_{i=p}^{n} (\boldsymbol{a_{i+1}} - \boldsymbol{a_i}) = \boldsymbol{a_{n+1}} - \boldsymbol{a_1}$$

2.2 Particiones

Definición

Es un conjunto de números reales que pertenece a un intervalo $[a, b]$

Notación

$$P = \{x_{o,} x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\}$$

Características

- P está contenido en $[a, b]$, quiere decir que todos los elementos de P están en el intervalo $[a, b]$
- $x_0 = a \ y \ x_0 = b$
- $x_0 \ < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_n$

Gráficamente

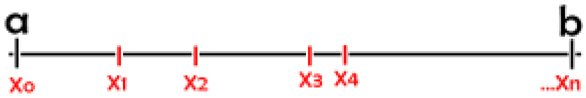


Figura 2. Partición P

Ejemplos:

Partición del intervalo $[0,5]$

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, 3, \frac{9}{2}, 5\right\}$$

Esta partición divide al intervalo $[0,5]$ en 6 subintervalos, los cuales son:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{5}{4}\right], \left[\frac{5}{4}, 3\right], \left[3, \frac{9}{2}\right], \left[\frac{9}{2}, 5\right]$$

Ahora bien, un intervalo tiene infinitas particiones, podemos indicar la partición Q, para el mismo intervalo:

$$Q = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, 2, 3, \frac{9}{2}, 5\right\}$$

Y debido a que $P \subset Q$, es decir que P está incluida en Q, la partición Q se dice que es más ***fina.***

2.3 Sumas superiores e inferiores

Una vez definida la partición, vamos poco a poco uniendo las piezas del rompecabezas para poder llevar todos los conceptos claros.

Consideremos ahora una función f, definida en $[a, b]$, que sea continua en todo ese intervalo. Y del cual tomaremos una partición

$$P = \{x_{o,} x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n\}$$

Ahora, sea:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 \, , \Delta x_2 = x_2 - x_1, \Delta x_3 = x_3 - x_2 \, , \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

En general: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, donde i va desde 1 hasta n representa la longitud del subintervalo que está incluido en la partición P.

Si recordamos un poco cálculo diferencial, las funciones continuas, como el caso de f, en un intervalo cerrado alcanzan su máximo y mínimo en él. Es por ello que podemos decir que cada subintervalo de la partición tiene un máximo y un mínimo.

Se denota como m_i al mínimo de f en el intervalo $[x_{i-1}, \; x_i]$ y por M_i el máximo de f en el intervalo $[x_{i-1}, \; x_i]$, para todo $i \in \{1,2,3, \ldots n\}$

¿Cómo aplicar esto al cálculo de áreas?

Sea una función f en el intervalo $[a, b]$ como la que se muestra a continuación:

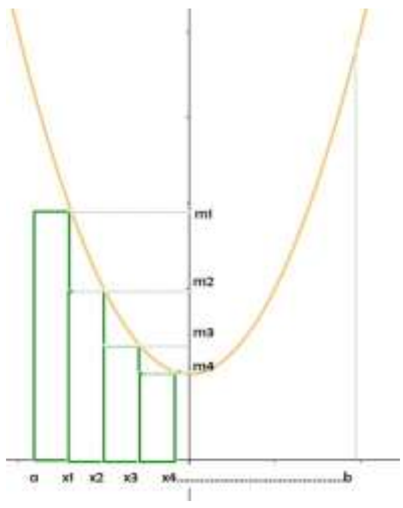


Figura 3. Suma de áreas de rectángulos por defecto

Ahora veamos uno de los rectángulos:

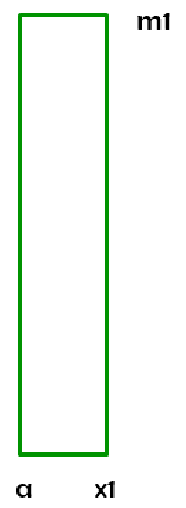


Figura 4. Cálculo de área de rectángulo

Para calcular su área sería, $base\ x\ altura$, es decir

$$(x_1 - a)\, m_1 = \Delta x_1 m_1 = m_1 \Delta x_1$$

Ahora la suma de áreas se puede expresar como:

$$m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Y que por defecto es una aproximación del área bajo la curva.

Análogamente se puede hacer para las áreas de los rectángulos de la siguiente figura:

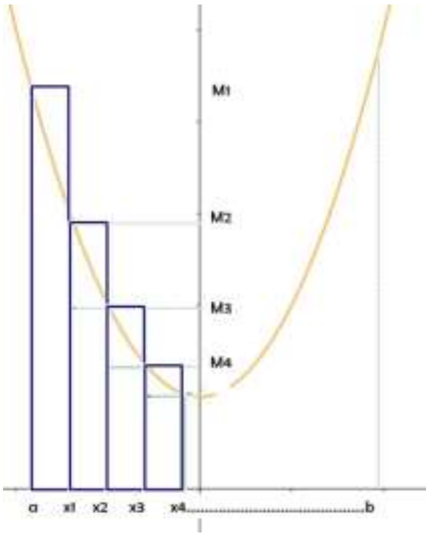


Figura 5. Suma de áreas de rectángulos por exceso

Donde las áreas de los rectángulos se denotan como $M_1\Delta x_1$ y la suma de ellas:

$$M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

lo cual es una aproximación por exceso del área bajo la curva

Figura 5.

Con lo anterior estamos listos para las siguientes definiciones formales:

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, donde se encuentra incluida la partición $P = \{x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$.

Se llama ***suma superior*** de f relativa a la partición P a la suma:

$$\overline{\mathbb{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Y Se llama ***suma inferior*** de f relativa a la partición P a la suma:

$$\underline{\mathbb{S}}\,(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

2.4 Sumas de Riemann

Figura 6. Bernhard Riemann (1826-1866)

Riemann publica en 1854 su obra Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe para poder acceder al cargo de profesor auxiliar en la universidad de Gottingen. Se define por primera vez el concepto de integral de Riemann y se inicia la teoría de funciones de una variable real. Este tipo de integral se define como la suma finita de áreas de rectángulos. Estos se definen en base a una partición de un intervalo $[a, b]$ donde se quiere calcular la integral, como altura de los rectángulos hay varias opciones, el máximo o mínimo de la función en el subintervalo o cogiendo el valor de la función en los extremos del mismo.

Definición:

Considere una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, donde se encuentra incluida la partición $P = \{x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$. Se tomará un valor de $f_{(c_i)}$ para algún c_i cualquiera que se encuentre en el intervalo $[x_{i-1},\ x_i]$.

Ahora bien, la suma

$$\mathbb{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f_{(c_i)} \Delta x_i$$

Recibe el nombre de ***suma de Riemann*** de f en el intervalo $[a,b]$ relativa a la partición P.

Ejemplo:

Hallar el área total de los rectángulos de la figura siguiente, sabiendo que

$$\boldsymbol{f(x) = (x-2)^2 + 1}$$

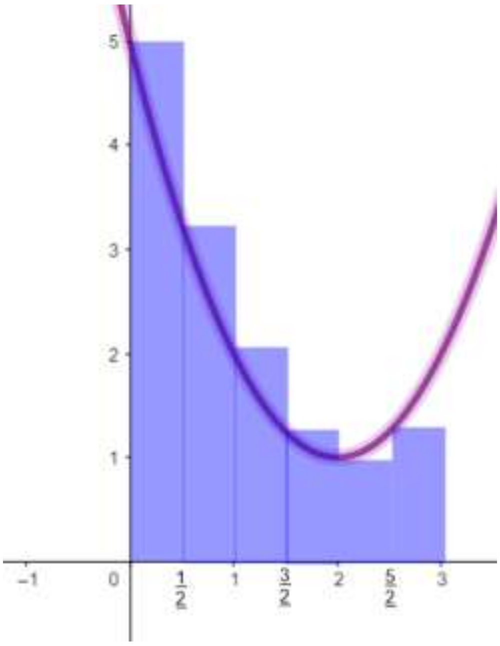


Figura 7. Ejemplo de suma de Riemann

Sea

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$$

Esta partición divide al intervalos $[0,3]$ en 6 subintervalos, los cuales son:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right], \left[2, \frac{5}{2}\right], \left[\frac{5}{2}, 3\right]$$

por lo que en cada caso $\Delta x_i = \frac{1}{2}$

Para calcular el área total de los rectángulos se hará uso de las sumas de Riemann.

Se toma en cada caso c_i como el extremo inferior de cada subintervalo, de la siguiente forma:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad c_3 = 1 \quad c_4 = \frac{3}{2} \quad c_5 = 2 \quad c_6 = \frac{5}{2}$$

Ahora calculemos:

$$f(c_{1)} = f(0) = 5$$
$$f(c_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$$
$$f(c_{3)} = f(1) = 2$$
$$f(c_{4)} = f\ \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}$$
$$f(c_5) = f(2) = 1$$
$$f(\ c_6) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

La suma de Riemann en este caso se plante de la siguiente manera:

$$\mathbb{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{6} f_{(c_i)} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{6} f_{(c_i)}\ \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^{6} f_{(c_i)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(5 + \frac{13}{4} + 2 + \frac{5}{4} + 1 + \frac{5}{4}\right) = \frac{55}{8}$$

El resultado entonces se puede interpretar como el área total de los rectángulos de la *figura 6.*

Bibliografía

Campos, H. A. (2015). *Cálculo integral en una variable.* San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a distancia.