



Московский Физико-Технический Институт  
(национальный исследовательский университет)

Отчет по эксперименту

---

## Скин-эффект в полом цилиндре

---

Работа №3.7.1; дата: 30.09.22

Семестр: 3

Выполнил:  
Кошелев Александр

Группа:  
Б05-105

## 1. Аннотация

### Цель работы:

Исследование проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр.

### Экспериментальная установка:

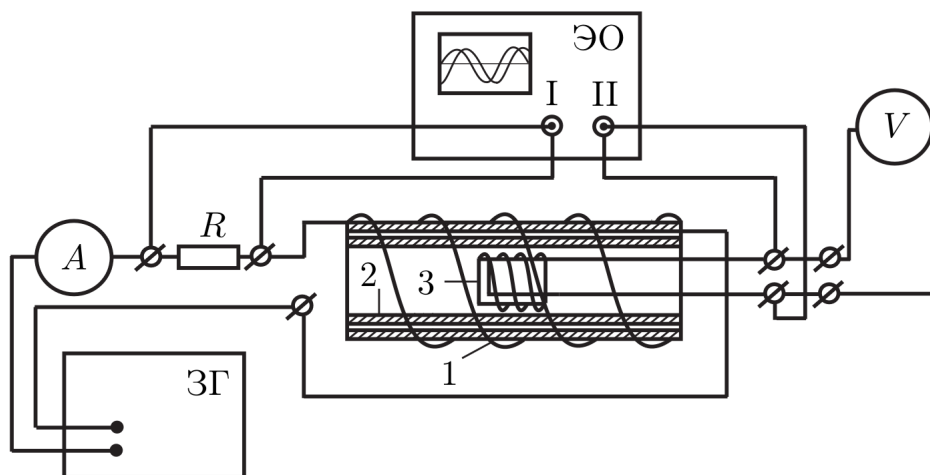


Рис. 1: Экспериментальная установка

Переменное магнитное поле создаётся с помощью соленоида, намотанного на полый цилиндрический каркас 1 из поливинилхлорида, который подключается к генератору звуковой частоты. Внутри соленоида расположен медный цилиндрический экран 2. Для измерения магнитного поля внутри экрана используется измерительная катушка 3. Необходимые параметры соленоида, экрана и измерительной катушки указаны на установке. Действующее значение переменного тока в цепи соленоида измеряется амперметром  $A$ , а действующее значение напряжения на измерительной катушке измеряет вольтметр  $V$ . Для измерения сдвига фаз между током в цепи соленоида и напряжением на измерительной катушке используется двухканальный осциллограф. На вход одного канала подаётся напряжение с резистора  $R$ , которое пропорционально току, а на вход второго канала — напряжение с измерительной катушки.

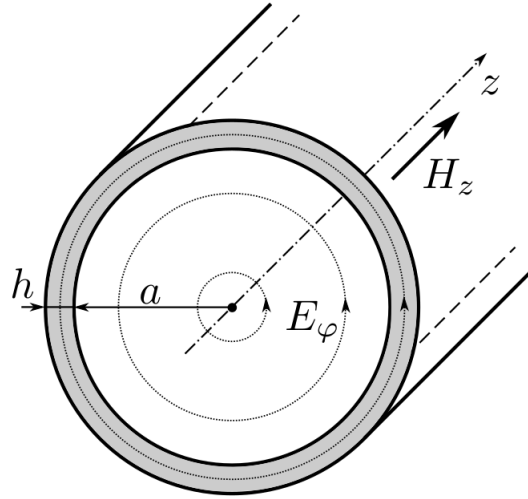
### В работе используются:

Генератор звуковой частоты, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас из диэлектрика, медный экран в виде трубки, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, осциллограф.

## 2. Теоретические сведения

В работе изучается скин-эффект в длинном тонкостенном медном цилиндре, помещённом внутрь соленоида.

Пусть цилиндр достаточно длинный, так что в нём можно пренебречь краевыми эффектами. В этом приближении магнитное поле  $\vec{H}$  всюду направлено по оси системы (ось  $z$ ), а вихревое электрическое поле  $\vec{E}$  будет всюду перпендикулярно радиусу, то есть линии поля образуют соосные окружности.



**Рис. 2:** Электрическое и магнитное поле в тонкостенном цилиндре

Все величины будем считать колеблющимися по гармоническому закону с некоторой частотой  $\omega$ , задаваемой частотой колебания тока в соленоиде. Тогда для ненулевых компонент поля можно записать:

$$H_z = H(r) \exp(i\omega t) \quad E_\varphi = E(r) \exp(i\omega t)$$

где  $H(r)$  и  $E(r)$  — комплексные амплитуды колебаний соответствующих полей, зависящие только от расстояния  $r$  до оси системы. Заметим, что на границе цилиндра должны быть непрерывны касательные к поверхности компоненты как  $E$ , так и  $B$ , поэтому функции  $E(r)$  и  $H(r)$  непрерывны во всей исследуемой области.

Пусть длинный полый цилиндр имеет радиус  $a$  и толщину стенки  $h \ll a$ . Последнее условие позволяет для описания поля внутри стенки ограничиться одномерным приближением. При этом для полного решения задачи необходимо вычислить и распределение поля внутри цилиндра.

Поскольку внутри цилиндра ток отсутствует, магнитное поле там является однородным (аналогично полю внутри пустого соленоида):  $H_z(r, t) = H_1 \exp(i\omega t)$ , где  $H_1 = \text{const}$  — амплитуда поля на внутренней поверхности цилиндра. Для нахождения вихревого электрического поля воспользуемся законом электромагнитной индукции в интегральной форме:

$$E_\varphi \cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi r^2 \cdot \frac{dH_z}{dt} \implies E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

Отсюда получим связь амплитуд колебаний электрического и магнитного полей на внутренней ( $r = a$ ) границе цилиндра:

$$E_1 = -\frac{1}{2} \mu_0 a \cdot i\omega H_1$$

Данное соотношение используем далее как дополнительное граничное условие для задачи о распределении поля внутри стенки.

Поле внутри тонкой стенки цилиндра («экрана») описывается уравнением скин-эффекта (уравнением диффузии поля) в плоской геометрии. Поместим начало отсчёта на внешнюю поверхность цилиндра и направим ось  $x$  к оси системы, и запишем дифференциальное уравнение для комплексной амплитуды магнитного поля:

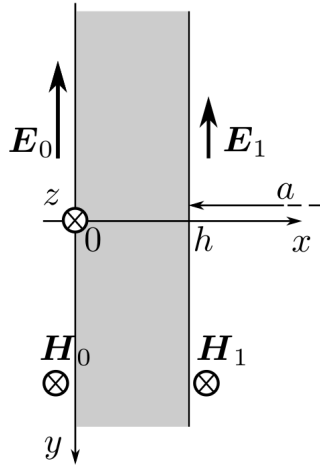


Рис. 3: Поле внутри стенки цилиндра

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H$$

(Для медного цилиндра можно положить  $\mu \approx 1$ ). Граничные условия зададим в виде:

$$H(0) = H_0 \quad H(h) = H_1$$

Здесь  $H_0$  – амплитуда колебаний магнитного поля на внешней границе цилиндра. Её значение определяется только током в обмотке соленоида, и совпадает с полем внутри соленоида в отсутствие цилиндра. Величина  $H_1$  также поддаётся непосредственному измерению – это амплитуда колебаний однородного поля внутри цилиндра. Поля  $H_0$  и  $H_1$  не являются независимыми – они связаны через решение уравнений поля вне проводника, т. е. внутри «экрана».

Решение ищем в виде:

$$H(x) = A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)$$

где  $A, B$  – определяемые из граничных условий константы,

$$\alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{1+i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} \exp(i\pi/4)$$

Из предыдущих уравнений  $A + B = H_0$ , поэтому можно записать:

$$H(x) = H_0 \exp(-\alpha x) + 2B \sinh(\alpha x)$$

Выразим электрическое поле из закона Ампера (7.21). В одномерном случае:

$$E(x) = \frac{1}{h} \cdot \frac{dH}{dx} = \frac{\alpha}{\sigma} (-H_0 \exp(-\alpha x) + 2B \cosh(\alpha x))$$

Далее положим  $x = h$ , воспользуемся условиями, и, исключив константу  $B$ , получим после преобразований связь между  $H_0$  и  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{H_0}{\cosh(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a \sinh(\alpha h)}$$

Рассмотрим предельные случаи:

1. При малых частотах толщина скин-слоя превосходит толщину цилиндра  $\delta \gg h$ . Тогда  $|\alpha h| \ll 1$ , поэтому  $\cosh \alpha h \approx 1$ ,  $\sinh \alpha h \approx \alpha h$  и

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i \frac{ah}{\delta^2}}$$

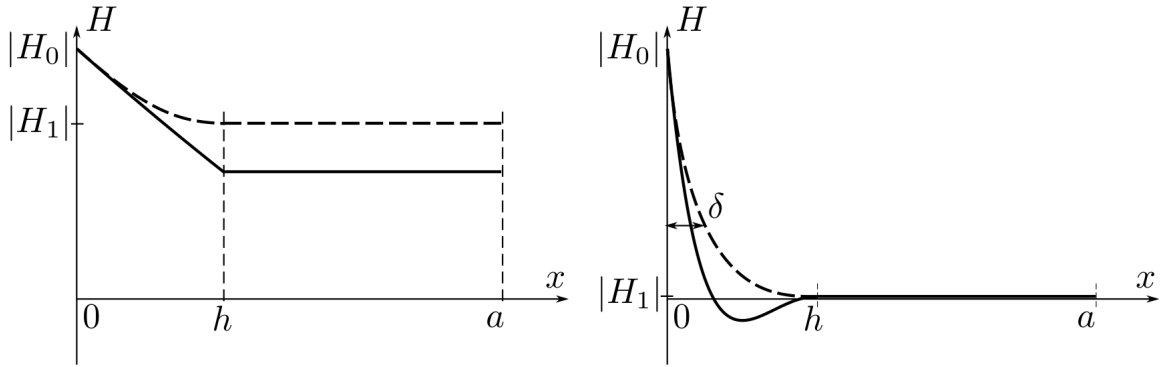
Заметим, что величина  $ah/\delta^2$  в общем случае не мала, поскольку при  $h \ll a$  возможна ситуация  $h \ll \delta \ll a$ . Отношение модулей амплитуд здесь будет равно

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}$$

При этом колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол  $\psi$ , определяемый равенством  $\tan \psi = ah/\delta^2$ .

2. При достаточно больших частотах толщина скин-слоя станет меньше толщины стенки:  $\delta \ll h$ . Тогда  $\alpha h \gg 1$  и  $\alpha a \gg 1$ , а также  $\sinh \alpha h \approx \cosh \alpha h \approx \frac{1}{2} \exp \alpha h$ . Выражение (6) с учётом (5) переходит в

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} \exp \left( -\frac{h}{\delta} - i \left( \frac{\pi}{4} - \frac{h}{\delta} \right) \right)$$



**Рис. 4:** Распределение амплитуды колебаний магнитного поля (пунктир) и его мгновенного значения при некотором  $t$  (сплошная) в зависимости от расстояния до внешней стенки цилиндра.

Слева случай низких частот  $\delta \gg h$ , справа – скин-эффект при высоких частотах  $\delta \ll h$

Как видно из предыдущей формулы, в этом пределе поле внутри цилиндра по модулю в  $\frac{2\sqrt{2}\delta}{a \exp(-h/\delta)}$  раз меньше, чем снаружи, и, кроме того, запаздывает по фазе на

$$\psi = \frac{\pi}{4} + h \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}}$$

На Рис. 4 схематично изображено распределение магнитного поля от координаты в двух рассмотренных предельных случаях.

### 3. Проведение эксперимента

#### Исследование области низких частот

Рассчитаем частоту, при которой толщина стенок экрана равна скинковой длине и получим  $\nu_h = \frac{1}{\pi\sigma\mu_0 h^2} \approx 2250$  Hz.

Проведем измерения и рассчитаем  $\xi$ :

| $\nu$ , Hz | $U$ , mV | $I$ , mA | $\xi \cdot 10^{-5}$ , V/(Hz·mA) |
|------------|----------|----------|---------------------------------|
| 112        | 30.0     | 20.09    | $1.33 \pm 0.13$                 |
| 184        | 37.4     | 18.90    | $1.08 \pm 0.08$                 |
| 256        | 40.7     | 18.17    | $0.88 \pm 0.07$                 |
| 328        | 42.2     | 17.72    | $0.73 \pm 0.05$                 |
| 400        | 42.9     | 17.40    | $0.62 \pm 0.04$                 |
| 472        | 43.2     | 17.16    | $0.53 \pm 0.04$                 |
| 544        | 43.3     | 16.95    | $0.47 \pm 0.03$                 |
| 616        | 43.1     | 16.75    | $0.42 \pm 0.03$                 |
| 688        | 43.0     | 16.56    | $0.37 \pm 0.02$                 |
| 760        | 42.7     | 16.39    | $0.34 \pm 0.02$                 |
| 832        | 42.4     | 16.19    | $0.32 \pm 0.02$                 |

**Табл. 1:** Определение  $\xi = U/\nu I$  в области низких частот

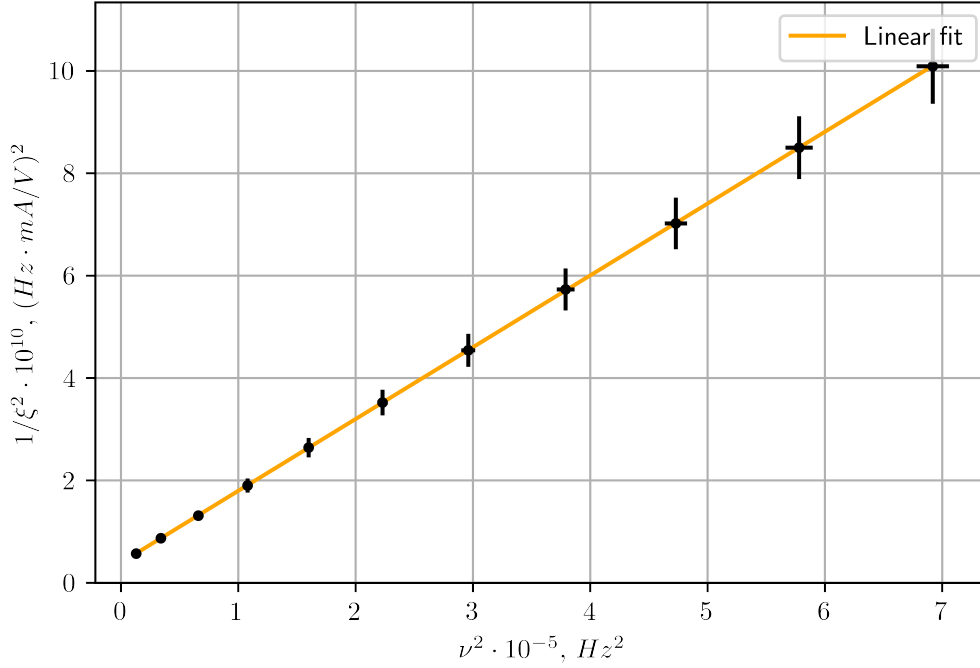
Сделаем дополнительную таблицу для построения графика:

| $\nu^2 \cdot 10^{-5}$ , Hz <sup>2</sup> | $1/\xi^2 \cdot 10^{10}$ , (Hz·mA/V) <sup>2</sup> |
|---|--|
| $0.13 \pm 0.002$                        | $0.57 \pm 0.058$                                 |
| $0.34 \pm 0.007$                        | $0.87 \pm 0.070$                                 |
| $0.66 \pm 0.013$                        | $1.31 \pm 0.098$                                 |
| $1.08 \pm 0.022$                        | $1.90 \pm 0.138$                                 |
| $1.60 \pm 0.032$                        | $2.64 \pm 0.189$                                 |
| $2.23 \pm 0.045$                        | $3.52 \pm 0.250$                                 |
| $2.96 \pm 0.059$                        | $4.54 \pm 0.322$                                 |
| $3.79 \pm 0.076$                        | $5.73 \pm 0.409$                                 |
| $4.73 \pm 0.095$                        | $7.02 \pm 0.503$                                 |
| $5.78 \pm 0.116$                        | $8.50 \pm 0.613$                                 |
| $6.92 \pm 0.138$                        | $10.09 \pm 0.733$                                |

**Табл. 2:** График зависимости  $(1/\xi^2)(\nu^2)$  в области низких частот

Из теории зависимость имеет вид:

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{\xi_0^2} + \frac{(a\hbar\sigma\mu_0\pi)^2}{\xi_0^2} \nu^2$$



**Рис. 5:** График зависимости  $(1/\xi^2)(\nu^2)$  в области низких частот

Точки хорошо ложатся на прямую, положив вид зависимости  $1/\xi^2 = k\nu^2 + b$ , методом линейной аппроксимации получаем:

$$k = (14030 \pm 10) \left( \frac{\text{A}}{\text{V}} \right)^2 \quad b = (3910 \pm 40) \left( \frac{\text{Hz} \cdot \text{A}}{\text{V}} \right)^2$$

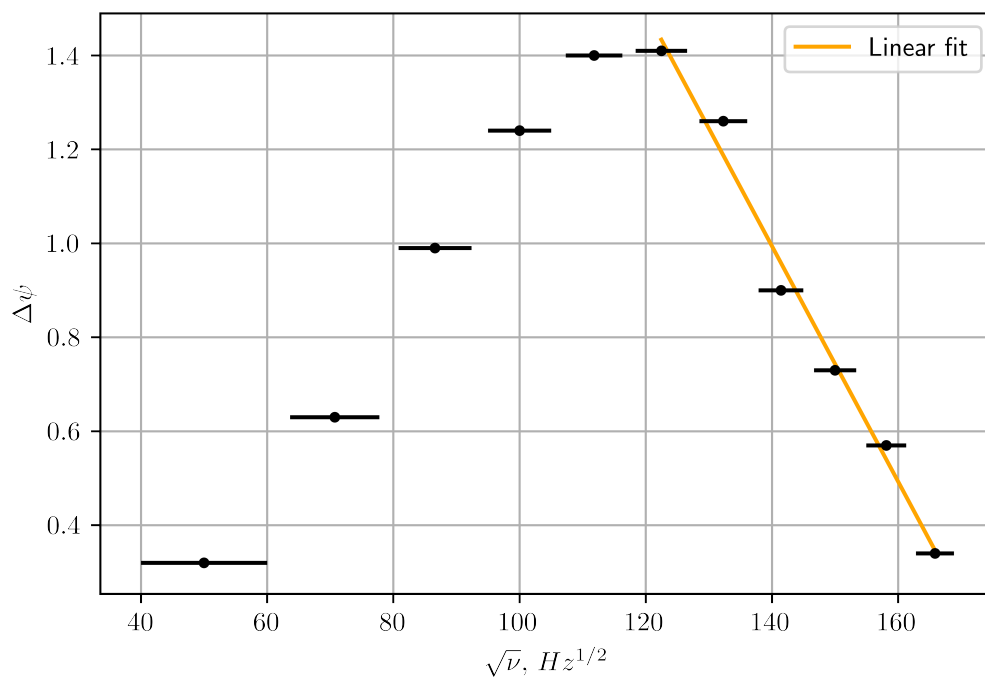
Потому:

$$\xi_0 = (1.6 \pm 0.03) \cdot 10^{-2} \left( \frac{\text{Ohm}}{\text{Hz}} \right)^2 \quad \sigma = (4.5 \pm 0.1) \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

### Исследование области высоких частот

| $\nu$ , kHz    | $\nu^{1/2}$ , $\text{Hz}^{1/2}$ | $\Delta\psi$    |
|----------------|---------------------------------|-----------------|
| $2.5 \pm 0.1$  | $50 \pm 10$                     | $0.32 \pm 0.01$ |
| $5.0 \pm 0.1$  | $70 \pm 7$                      | $0.63 \pm 0.01$ |
| $7.5 \pm 0.1$  | $86 \pm 6$                      | $0.99 \pm 0.01$ |
| $10.0 \pm 0.1$ | $100 \pm 5$                     | $1.24 \pm 0.01$ |
| $12.5 \pm 0.1$ | $111 \pm 5$                     | $1.40 \pm 0.01$ |
| $15.0 \pm 0.1$ | $122 \pm 4$                     | $1.41 \pm 0.01$ |
| $17.5 \pm 0.1$ | $132 \pm 4$                     | $1.26 \pm 0.01$ |
| $20.0 \pm 0.1$ | $141 \pm 4$                     | $0.90 \pm 0.01$ |
| $22.5 \pm 0.1$ | $150 \pm 3$                     | $0.73 \pm 0.01$ |
| $25.0 \pm 0.1$ | $158 \pm 3$                     | $0.57 \pm 0.01$ |
| $27.5 \pm 0.1$ | $166 \pm 3$                     | $0.34 \pm 0.01$ |

**Табл. 3:** Зависимость  $\Delta\psi(\nu^{1/2})$



**Рис. 6:** График зависимости  $\Delta\psi(\nu^{1/2})$

Точки хорошо ложатся на прямую, положив вид зависимости  $\Delta\psi = -k\nu^{1/2} + b$ , методом линейной аппроксимации получаем:

$$k = (0.025 \pm 0.001) \text{ Hz}^{-1/2} \quad b = (4.5 \pm 0.5)$$

При этом:

$$\sigma = \left(\frac{k}{h}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{\mu_0} = (7.0 \pm 1.2) \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$$



Общий вид зависимости  $(|H_1|/|H_0|)(\nu)$

| $\nu$ , Hz | $ H_1 / H_0 $ |
|------------|---------------|
| 112        | 82.93         |
| 184        | 67.20         |
| 256        | 54.67         |
| 328        | 45.37         |
| 400        | 38.51         |
| 472        | 33.33         |
| 544        | 29.34         |
| 616        | 26.10         |
| 688        | 23.58         |
| 760        | 21.44         |
| 832        | 19.67         |
| 2500       | 6.58          |
| 5000       | 3.15          |
| 7500       | 2.0           |
| 10000      | 1.44          |
| 12500      | 0.89          |
| 15000      | 0.81          |
| 17500      | 0.80          |
| 20000      | 0.73          |
| 22500      | 0.72          |
| 25000      | 0.75          |
| 27500      | 0.86          |

Табл. 4: Зависимость  $(|H_1|/|H_0|)(\nu)$

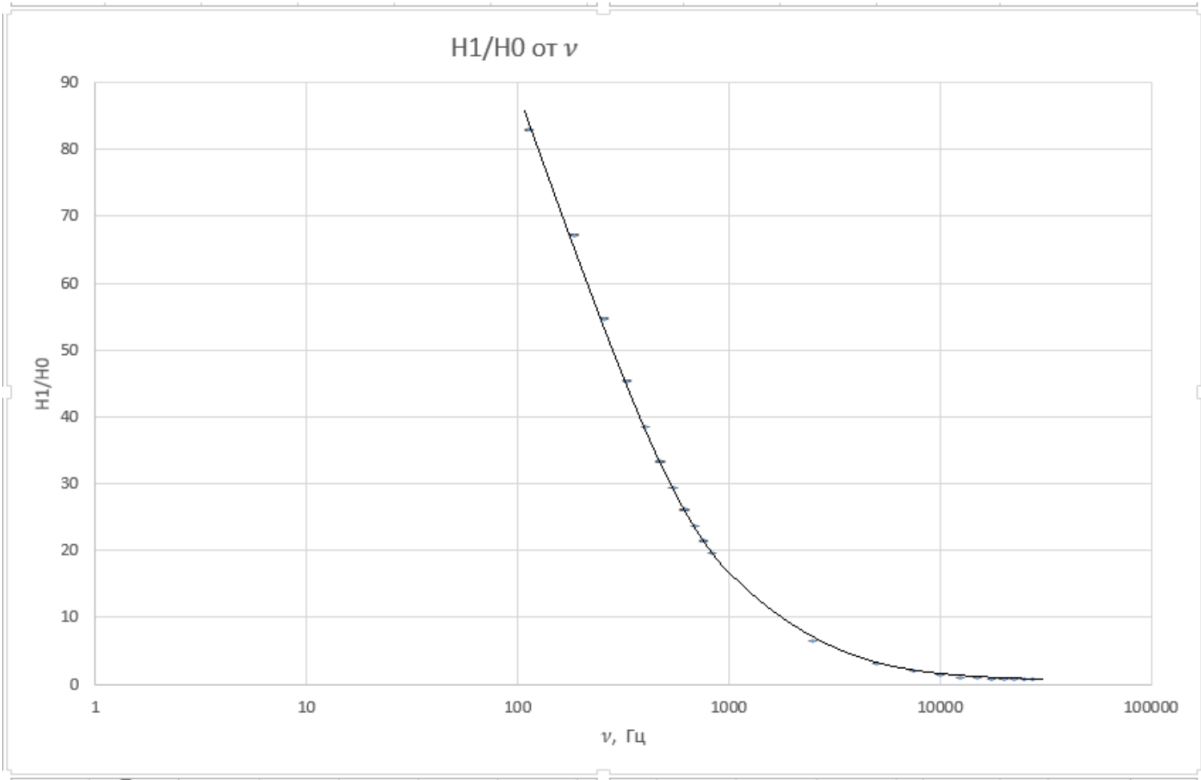


Рис. 7: График зависимости  $(|H_1|/|H_0|)(\nu)$

## 4. Выводы

В данной работе было исследовано магнитное поле в полом медном цилиндре. Линеаризованные графики зависимостей  $1/\xi^2(\nu)$  и  $\Delta\psi(\sqrt{\nu})$  показали справедливость теоретической модели скин-эффекта в цилиндре.

По графику был определен коэффициент  $\xi_0 = (1.6 \pm 0.03) \cdot 10^{-2} \left( \frac{\text{Ohm}}{\text{Hz}} \right)^2$

По графикам также была найдена проводимость меди  $\sigma$ :

$$\sigma_{low} = (4.5 \pm 0.1) \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}} \quad \sigma_{high} = (7.0 \pm 1.2) \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

Эти значения близки к табличным:  $(5 - 6) \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$

Была также показана зависимость  $(|H_1|/|H_0|)(\nu)$ .