T2.

$\exists\ (X;\tau)$ - ТП. Рассматриваем:

$\mathcal{F} = \{S \subset X \mid S$ - seq-замкнуто в $(X;\tau)\}$.

I. Д! $\tau_{секв} = \{V \subset X \mid X \setminus V \in \mathcal{F}\}$. - топология.

1) $\emptyset; X \in \mathcal{F} \to \emptyset; X \in \tau_{секв}$.

2) $\forall S = \{G_k\}_{k=1}^{\infty};\ G_k \in \tau_{секв} \hookrightarrow \bigcup_k G_k \in \tau_{секв}$.

$\Leftrightarrow X \setminus \bigcup_k G_k = \bigcap_k \underbrace{(X \setminus G_k)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$.

~~Пусть x - секв. т.к. $X \setminus \bigcup_k G_k$. Тогда $\exists \{x_n\} \subset \bigcap_k G_k : x_n \xrightarrow{\tau} x$.~~

~~$\to \{x_n\} \subset X \setminus G_k\ \forall k \to x \in X \setminus G_k\ \forall k$~~
~~т.к. $X \setminus G_k \in \mathcal{F}$~~

~~$\to x \in \bigcap_k (X \setminus G_k) =$~~

Пусть x - секв. т.к. $X \setminus \bigcup_k G_k = \bigcap_k \underbrace{(X \setminus G_k)}_{\in \mathcal{F}}$.

Тогда $\exists \{x_n\} \subset X \setminus \bigcup_k G_k : x_n \xrightarrow{\tau} x$

$\swarrow$

$\{x_n\} \subset (X \setminus G_k)\ \forall k \to x \in (X \setminus G_k)\ \forall k$.
т.к. $(X \setminus G_k) \in \mathcal{F}$

$\to x \in \bigcap_k (X \setminus G_k) = X \setminus \bigcup_k G_k$.

$\to X \setminus \bigcup_k G_k \in \mathcal{F}$.

3) $\forall S = \{\sigma_1; \dots; \sigma_N\} \subset \tau_{seq} \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \in \tau_{seq}$.

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^{N} \sigma_k = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{N} (X \setminus \sigma_k)}_{F}$$

$\exists\, x$ — seq. т.п. $X \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k$, тогда:

$\exists \{x_n\} \subset X \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k = \bigcup\limits_{k=1}^{N} (X \setminus \sigma_k) : x_n \xrightarrow{\tau} x$

Но тогда можно построить $X \setminus \sigma_{k_m} : x_m \in X \setminus \sigma_{k_m}$.

Но $|\{x_n\}| = \aleph_0$; $|S| < \aleph_0$

$\Downarrow$

$\exists X \setminus \sigma_{k_0} : \exists \{x_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} \subset X \setminus \sigma_{k_0} : x_{k_m} \xrightarrow{\tau} x$

↳ $x \in X \setminus \sigma_{k_0}$.

↳ $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{N} (X \setminus \sigma_k)$

→ $X \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k$ замкнуто seq.

↳ $\bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \in \tau_{seq}$

А значит τ_{seq} — топология (по def).

II. Сравнить топологии τ и $\tau_{секв}$.

Докажем, что $\forall S \in \tau \Rightarrow S \in \tau_{секв}$.

$X \setminus S$ — замкнуто топологически τ

$\Downarrow$

$X \setminus S$ — замкнуто seq-но по τ.

Рассмотрим x - секв. т.п. $X \setminus S$: $\exists \{x_n\} \subset X \setminus S$:

: $x_n \xrightarrow{\tau} x \Rightarrow \forall U(x)\ \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow U(x) \ni x_n$.

Но тогда $x_n \in U(x) \cap (X \setminus S) \Rightarrow x$ - τ-т.п. $X \setminus S$.

$\Rightarrow \underline{x \in (X \setminus S)}$

А значит $X \setminus S$ замкнуто seq-но.

$\Rightarrow \underline{S \in \tau_{секв}}$.

$\Rightarrow \underline{\tau \subset \tau_{секв}}$

Обратное неверно. Рассмотрим $\tau_{зар} = \{S \subset \mathbb{R} : S = \varnothing$ или $|\mathbb{R} \setminus S| \leq \aleph_0\}$.

По номеру 1:

~~$\tau_{зар}$~~ АЗЛВ $\mathcal{F}_{секв} = 2^{\mathbb{R}} \Rightarrow \underline{\tau_{секв\ зар.} = \{S \mid \mathbb{R} \setminus S \in \mathcal{F}\} = 2^{\mathbb{R}}}$

$\tau_{секв\ зар} \not\subset \tau_{зар}$.

III. Д! $x_n \xrightarrow{\tau} x \leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_{секв}} x$

По пр-м пунктам:

$\tau \subset \tau_{секв} \to \left(x_n \xrightarrow{\tau_{секв}} x \to x_n \xrightarrow{\tau} x\right)$.

Д! $x_n \xrightarrow{\tau} x \to x_n \xrightarrow{\tau_{секв}} x$

П: $x_n \xrightarrow{\tau} x$, но $x_n \not\xrightarrow{\tau_{секв}} x$

$\exists U(x) \in \tau_{секв}$: $\cancel{\forall \{x_n\}}$ $\exists \{x_{n_m}\}: x_{n_m} \notin U(x)\ \forall m$

↳ $\{x_{n_m}\} \subset X \setminus U(x) \in \mathcal{F}_{секв}(\tau)$

Но $x_n \xrightarrow{\tau} x \to x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x$, а значит

x – seq т.н. $X \setminus U(x) \in \mathcal{F}_{секв}(\tau)$

↳ $x \in X \setminus U(x)$ – противоречие!

Так как $x \in U(x)$.

А значит

$x_n \xrightarrow{\tau} x \to x_n \xrightarrow{\tau_{секв}} x$

Ч.т.д.