# I. Топологические пространства

## Т1.

$\tau_{зар} \subset 2^{\mathbb{R}}$

$V \in \tau \leftrightarrow V = \varnothing$ или $|\mathbb{R} \setminus V| \le \aleph_0$

I. Д! $\tau_{зар}$ топология в $\mathbb{R}$

1) $\varnothing = V \in \tau_{зар}$; $\mathbb{R} = V : |\mathbb{R} \setminus V| = |\varnothing| = 0 < \aleph_0 \to \mathbb{R} \in \tau_{зар}$

<u>Выполнено</u>

2) $\forall S \subset \tau_{зар} \leftrightarrow \bigcup\limits_{\sigma \in S} \sigma \in \tau_{зар}$

$S = \{\varnothing\} \to \bigcup\limits_{\sigma \in S} \sigma = \varnothing \in \tau_{зар}$

Иначе:

$$\left.\begin{array}{l} S \subset \tau_{зар} \to \forall \sigma \in S \to |\mathbb{R} \setminus \sigma| \le \aleph_0 \\ |\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{\sigma \in S} \sigma| = |\bigcap\limits_{\sigma \in S} (\mathbb{R} \setminus \sigma)| \end{array}\right| \to |\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{\sigma \in S} \sigma| \le \aleph_0$$

$$\to \underline{\bigcup\limits_{\sigma \in S} \sigma \in \tau_{зар}}$$

3) $\forall S = \{\sigma_1; \dots; \sigma_N\} \subset \tau_{зар} \to \bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \in \tau_{зар}$

$\exists \sigma_m = \varnothing \to \bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k = \varnothing \in \tau_{зар}$

Иначе:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \sigma \in S \to |\mathbb{R} \setminus \sigma| \le \aleph_0 \\ |\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k| = \bigcup\limits_{k=1}^{N} (\mathbb{R} \setminus \sigma_k) \end{array}\right| \to |\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k| \le \aleph_0$$

$$\to \underline{\bigcap\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \in \tau_{зар}}$$

Но тогд. $\tau_{зар}$ топологии (по def).

II. Найти все топологически замкнутые и все секвенциально замкнутые мн-ва в $(\mathbb{R}; \tau_{зар})$.

$S$ - $\tau$-замкнуто $\leftrightarrow$ $\mathbb{R} \setminus S$ - $\tau_{зар}$открыто $\leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus S = \varnothing \\ |\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus S)| = |S| \leq \aleph_0 \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$\leftrightarrow$ $S = \mathbb{R}$ или $S$ не более чем счётно

$S$ - seq-замкнуто $\leftrightarrow$ $\exists \{x_n\} \subset S : x_n \xrightarrow{\tau_{зар}} x$

$\mathbb{R} \setminus \{x_n \mid x_n \neq x\} \in \tau_{зар}$ (по def)

Но $\forall x \in \mathbb{R}$

А значит по def: $x_n \xrightarrow{\tau_{зар}} x \rightarrow \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow \underline{x_n = x}$

$\rightarrow \forall S \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus S \hookrightarrow x$ не seq-точки пр-ние $S$

$\rightarrow$ $S$ seq-замкнуто

Итого: $\tau$-замкнуты $\mathbb{R}$ и $\forall S : |S| \leq \aleph_0$

seq-замкнуты все $2^{\mathbb{R}}$.

III. Найти все замыкания любого более чем счётного множества в $(\mathbb{R}; \tau)$.

Топологическое замыкание:

$\forall S \subset \mathbb{R} : |S| > \aleph_0 \hookrightarrow \exists! \ \mathbb{R}$ - $\tau$-замкнутое: $S \subset \mathbb{R}$,

т.к. $\forall G$ - $\tau$-замкнуто: $G \neq \mathbb{R} \hookrightarrow |G| \leq \aleph_0$.

Тогда, по def:

$$[S]_\tau = \bigcap_{\substack{F \supset S \\ \overline{F} \in \tau}} F = \mathbb{R}.$$

Секвенциальное замыкание:

По п. II sq-замкнуты все $2^{\mathbb{R}}$, а значит

$$[S]_{seq} = S \quad \forall S \subset \mathbb{R}.$$

IV. Является ли $(\mathbb{R};\tau)$ хаусдорфовым:

$(\mathbb{R};\tau)$ — хаусдорфово $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \neq y \ \Rightarrow \exists\, u(x);\ u(y):\ u(x) \cap u(y) = \varnothing$.

Положим, такие $u(x);\ u(y)$ существуют, тогда:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus (u(x) \cap u(y)) = (\mathbb{R} \setminus u(x)) \cup (\mathbb{R} \setminus u(y))$$

$$|\mathbb{R}| = |(\mathbb{R} \setminus u(x)) \cup (\mathbb{R} \setminus u(y))| \leq$$

$$\leq |\mathbb{R} \setminus u(x)| + |\mathbb{R} \setminus u(y)| \ \textcircled{\leq}$$

Так как, $u(x);\ u(y) \in \tau$; $u(x), u(y) \neq \varnothing$, то:

$\textcircled{\leq}\ \aleph_0$

$\hookrightarrow$ $|\mathbb{R}| \leq \aleph_0$ — противоречие!

$\hookrightarrow$ $(\mathbb{R};\tau)$ не хаусдорфово.

V. Выполняется ли в $(\mathbb{R}; \tau)$ аксиома счётности?

Положим, что Ах счётности выполняется. Тогда

$$\exists \{U_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}; \ |A| = \aleph_0.$$

Но $|\mathbb{R} \setminus U_\alpha| \leq \aleph_0 \rightarrow \underbrace{\left|\bigcup_{\alpha \in A} \mathbb{R} \setminus U_\alpha\right| \leq \aleph_0}.$