第三章作业

2.1 {$Z,+$} 是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。(其中 Z 为整数集)

{$Z,+$} **是群**

1. ∀ a_1, a_2 ∈ Z，(a_1 + a_2 ∈ Z), 因此满足**封闭性**
2. ∀ a_1, a_2, a_3 ∈ Z，((a_1+a_2)+a_3 = a_1+(a_2+a_3)), 因此满足**结合律**
3. ∃ 0∈Z, s.t. ∀ a∈Z, 0+a=a+0=Z, 因此满足**幺元**
4. ∀ a∈Z, ∃ $-a$∈Z, s.t. a+($-a$)=0, 因此满足**逆**

{$Z,+$}满足以上四条性质，因此**是群**

2.2 {$N,+$} 是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。(其中 N 为自然数集)

{$N,+$} **不是群**

$\forall n \in N$ 无法找到其逆n^{-1}, 使得 $n + n^{-1} = 0$, 不满足逆的性质

2.3 解释什么是阿贝尔群。并说明矩阵及乘法构成的群是否为阿贝尔群。

阿贝尔群是有着群运算符合交换律性质的群，因此阿贝尔群也被称为交换群。它由自身的集合 G 和二元运算 $*$ 构成。它除了满足一般的群公理，即运算的结合律、G 有单位元、所有 G 的元素都有逆元之外，还满足交换律公理。

设 $< G, * >$ *是一个群，* $< G, * >$ 是阿贝尔群的充要条件是对任意的 $a, b \in G$,有 $(a * b) * (a * b) = (a * a) * (b * b)$ 。对于矩阵的乘法，并不满足交换律，所以对于矩阵及乘法构成的群不是阿贝尔群。

3 验证向量叉乘的李代数性质

1、封闭性

$a \in R^3$, $b \in R^3$, a×b ∈R^3

满足封闭性

2、双线性

($\lambda_1 a$ + $\lambda_2 b$) ×c= λ_1 a×c + λ_2 b×c

$c\times(\lambda_1 a + \lambda_2 b) = \lambda_1\ c\times a + \lambda_2\ c\times b$

满足双线性

3、自反性

$a\times a = 0$

满足自反性

4、雅可比等价

$(a\times(b\times c)) + (b\times(c\times a)) + (c\times(a\times b))$

$=b(a\cdot c) - c(a\cdot b) + c(b\cdot c) - a(b\cdot c) + a(c\cdot b) - b(c\cdot a)$

$=0$

满足雅可比恒等式

以上四条性质均满足

4 推导 $SE(3)$ 的指数映射

式（2）推导过程：

$$
\begin{aligned}
&\text{设 } \xi = [\rho, \phi]^T \in \mathfrak{se}(3), \\
&\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \\
&\text{其中,} \\
&\begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&\qquad = \begin{bmatrix} (\phi^\wedge)^2 & \phi^\wedge\rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&\qquad = \begin{bmatrix} (\phi^\wedge)^3 & \phi^\wedge\phi^\wedge\rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&\text{因此,} \\
&\begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&\qquad = \begin{bmatrix} (\phi^\wedge)^n & (\phi^\wedge)^{n-1}\rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

将指数映射写成一个泰勒展开可得,

$$
\begin{aligned}
\exp(\xi^\wedge) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^n \\
&= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^n \\
&= I + \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^{n-1}\rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n\rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

式（3）推导过程：

$$\text{令}\phi = \theta a,,$$
$$\text{其中，}\theta\text{为模长，}a\text{为单位长度为1的单位向量}$$
$$\text{有}, a^\wedge a^\wedge = aa^T - I$$
$$a^\wedge a^\wedge a^\wedge = -a^\wedge$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\theta a^\wedge)^n \\
&= I + \frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{2!}\theta^2 - \tfrac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right) a^\wedge + \frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{3!}\theta^3 - \tfrac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right)(aa^T - I) \\
&= I + \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge + \frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{3!}\theta^3 - \tfrac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right) aa^T - \frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{3!}\theta^3 - \tfrac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right) I \\
&= \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge + \frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{3!}\theta^3 - \tfrac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right) aa^T + \frac{1}{\theta}\left(\theta - \tfrac{1}{3!}\theta^3 + \tfrac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right) I \\
&= \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge + \frac{1}{\theta}(\theta - \sin\theta) aa^T + \frac{\sin\theta}{\theta} I \\
&\triangleq J
\end{aligned}$$

5 请你证明 $SO(3)$ 伴随的性质

参考了题目中给出的链接

https://math.stackexchange.com/questions/2190603/derivation-of-adjoint-for-so3

先证：$\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{R}^T = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^\wedge$

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3, (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^\wedge \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) \times \left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{a} \times \left(\boldsymbol{R}^{-1}\mathbf{v}\right)\right] = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{v}$$

对exp进行泰勒展开再合并

$$\begin{aligned}
\exp\left((\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^\wedge\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left((\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^\wedge\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^\wedge \boldsymbol{R}^T\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^\wedge \boldsymbol{R}^T\right) \cdot \left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^\wedge \boldsymbol{R}^T\right) \cdot \quad \cdots \quad \cdot \left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^\wedge \boldsymbol{R}^T\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^\wedge \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^\wedge \boldsymbol{R}^T \cdots \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^\wedge \boldsymbol{R}^T\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^\wedge \boldsymbol{p}^\wedge \cdots \boldsymbol{p}^\wedge \boldsymbol{R}^T\right) = \boldsymbol{R}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\boldsymbol{p}^\wedge)^n\right)\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}\exp\left(\boldsymbol{p}^\wedge\right)\boldsymbol{R}^T
\end{aligned}$$

6.1 旋转点对旋转的导数。请分别通过左、右扰动的方式，计算：$\frac{\partial Rp}{\partial R}$.

思路：左扰动已在课程中推过了，只需推一遍右扰动，原理与左扰动相似，其中使用了 $R^T R = I$和 $SO(3)$ 的伴随性质 Rexp(p^)R^T = exp((Rp)^).

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(Rp)}{\partial\varphi} &= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\exp(\phi^\wedge)\exp(\varphi^\wedge)p-\exp(\phi^\wedge)p}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\exp(\phi^\wedge)(I+\varphi^\wedge)p-\exp(\phi^\wedge)p}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\exp(\phi^\wedge)\cdot\varphi^\wedge p}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi\to 0}\frac{R\varphi^\wedge p}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi\to 0}\frac{(R\varphi)^\wedge\cdot(Rp)}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi\to 0}\frac{-(Rp)^\wedge\cdot(R\varphi)}{\varphi} \\
&= -(Rp)^\wedge\cdot R
\end{aligned}
$$

6.2 旋转的复合。请分别通过左、右扰动的方式，计算：$\frac{\partial\ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_1}$. 和：$\frac{\partial\ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_2}$.

左扰动

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_1} \\
&= \lim_{\varphi\to 0}\frac{ln(exp(\varphi^\wedge)R_1R_2)^\vee-ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi} \\
&\approx \lim_{\varphi\to 0}\frac{J_l(ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\varphi+ln(R_1R_2)^\vee-ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi\to 0}\frac{J_l(ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\varphi}{\varphi} \\
&= J_l(ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}
\end{aligned}
$$

同理可得：$\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_2} = J_l(ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}$

右扰动

$\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_1}$

$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{ln(R_1R_2exp(\varphi^\wedge))^\vee - ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi}$

$\approx \lim_{\varphi \to 0} \frac{J_r(ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\varphi + ln(R_1R_2)^\vee - ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi}$

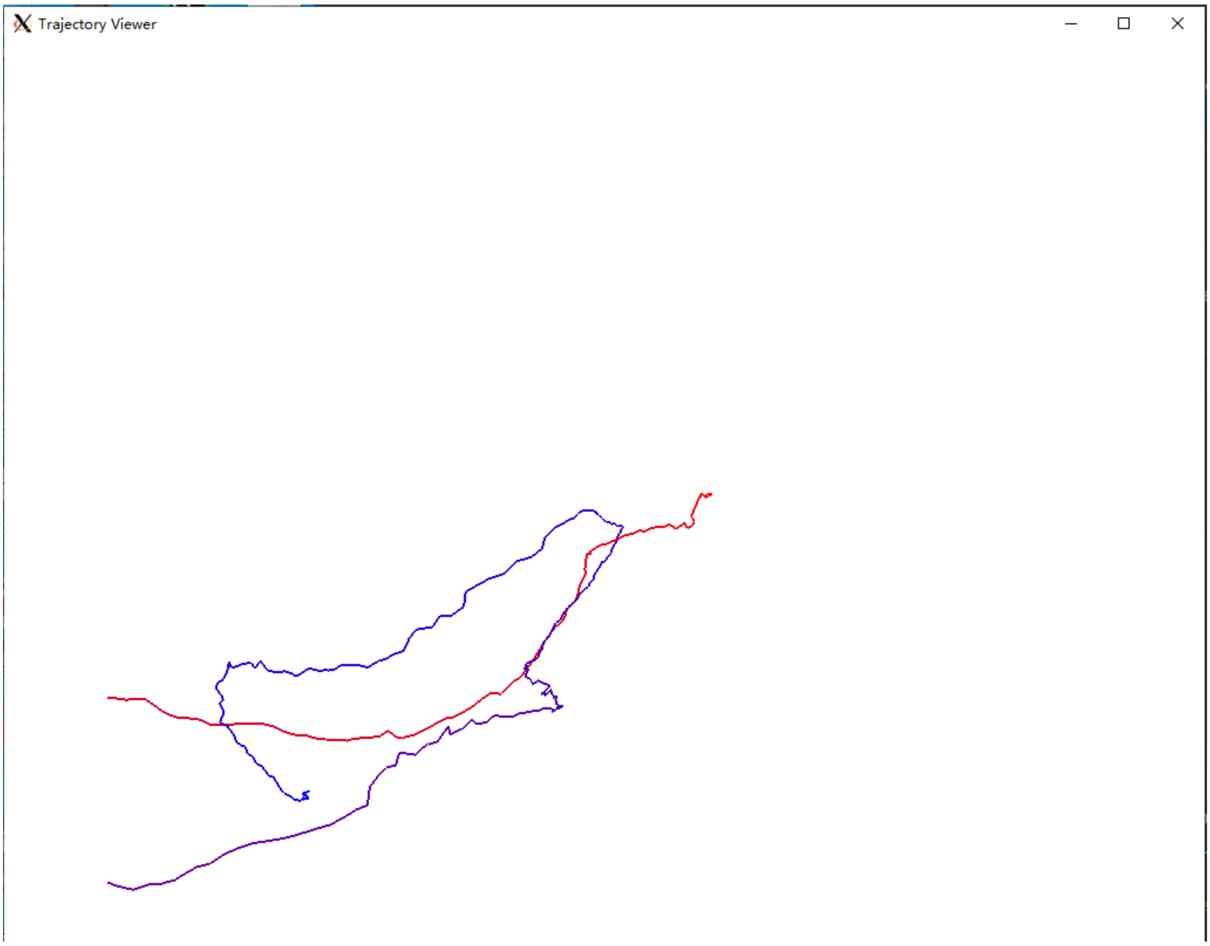
$= J_r(ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}$

同理可得：$\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_2} = J_r(ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}$

7.1 事实上，T_{WC} 的平移部分即构成了机器人的轨迹。它的物理意义是什么？为何画出 T_{WC} 的平移部分就得到了机器人的轨迹？

平移部分表明了在不同时间机器人坐标系的原点在空间中的位置，而机器人坐标系代表了机器人的位姿，所以 T_{WC} 的平移部分可以表示机器人的位置变化轨迹

7.2 请你完成数据读取部分的代码，然后书写 CMakeLists.txt 以让此程序运行起来。



8 我为你准备了 code/ground-truth.txt 和 code/estimate.txt 两条轨迹。请你根据上面公式，实现 RMSE的计算代码，给出最后的 RMSE 结果。作为验算，参考答案为：2.207。


Trajectory Viewer
luis@DESKTOP-78JR5UA:/mnt/d/ClionCppPrograma/homework/ch3/task8/build/bin$ ./trajectoryErrorRMSE
Trajectory_error_RMSE : 2.20727