1. 定义等价关系 $\sim$: $a \sim b \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{F}$ s.t. $a, b \in A$.

$a \sim a$ ✓

$a \sim b \longrightarrow b \to a$ ✓

若 $a \sim b$ 且 $b \sim c$ 则 $\exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ s.t.

$a, b \in A_1$, $b, c \in A_2$ 于是 $b \in A_1 \cap A_2 \neq \phi$

$\Rightarrow A_1 = A_2$ $a, c \in A_1$, $a \sim c$ ✓

容易看出, $X/\sim = \mathcal{F}$.

2. ($\Rightarrow$) 由该映射 $\overline{m}$ 是良定的, 知若 $a \sim a'$, $b \sim b'$.

则 $\overline{m}([a],[b]) = \overline{m}([a'],[b'])$

即 $[m(a,b)] = [m(a',b')]$ $m(a,b) \sim m(a',b')$

($\Leftarrow$) 定义 $\overline{m}$: $X/\sim \times X/\sim \longrightarrow X/\sim$

$([a], [b]) \longmapsto [m(a,b)]$

由条件知该 $\overline{m}$ 是良定的.

3. ($\Rightarrow$) 若 $r>0$，则 $\exists\{a_n\}\in r$，$a_n\geq 0$

由 $r\neq 0$，即 $\{a_n\}\not\to 0$ 知 $\exists q>0$，$\forall N_1>0$

$\exists n_1>N_1$ s.t. $a_{n_1}>q$.

$\forall N_2>0$，$\exists n_2>\max\{n_1,N_2\}$，$a_{n_2}>q$

$\forall N_3>0$，$\exists n_3>\max\{n_2,N_3\}$，$a_{n_3}>q$

...

这样我们找到一个子列 $\{a_{n_k}\}$，$a_{n_k}>q$

而 $\{a_{n_k}\}\in r$ $\{a_{n_k}-q\}\in r-q$

再由 $a_{n_k}-q>0$ 知 $r-q\geq 0$.

($\Leftarrow$) 若 $\exists q>0, q\in\mathbb{Q}$ s.t. $r-q\geq 0$.

知 $\exists\{b_n\}\in r-q$，$b_n\geq 0$.

令 $a_n=b_n+q$ 则 $\{a_n\}\in r$，且 $a_n\geq q$

知 $r>0$

4. 先证明，$a>b$，$b>a$，$b=a$ 至多一个成立。

只需证明，$a>b$，$b>a$ 不同时成立。

若否，即 $a>b$，$b>a$ 同时成立。

由3题。$\exists\ q_1>0 \quad a-b-q_1>0$

$\exists\ q_2>0 \quad b-a-q_2>0$ $\Rightarrow -q_1-q_2>0$ 矛盾！

再证明 $a>b$，$b>a$，$b=a$ 至少一个成立。

若否，即三者均不成立。

由 $a\not>b$ 知 $\forall q_1>0$，$a-b-q_1<0$ （依然是3题结论）

由 $b\not>a$ 知 $\forall q_2>0$ $b-a-q_2<0$

即 $-q_2<a-b<q_1$，令 $q_1, q_2\to 0$

$\Rightarrow a=b$ 矛盾！ $\blacksquare$

5. 1) 如 $a_n=\begin{cases} 0, & n=2k \\ \frac{1}{2k+1}, & n=2k+1 \end{cases}$ $\quad b_n=\begin{cases} \frac{1}{2k}, & n=2k \\ 0, & n=2k+1 \end{cases}$

2) 若否，不妨设 a、b 均大于0，设 $\{a_n\}\in a$，$\{b_n\}\in b$

则 $\exists q_1>0$，$N_1>0$ s.t. $a_n>q_1$，当 $n>N_1$

和 $\exists q_2>0$，$N_2>0$ s.t. $b_n>q_2$，当 $n>N_2$

于是 $a_nb_n>q_1q_2>0$，当 $n>\max\{N_1, N_2\}$.

这与 $a\cdot b=\lim a_n\cdot\lim b_n=0$ 矛盾.

6. (1) $\phi \in \mathcal{F}$. 显真.

$\mathbb{R} \in \mathcal{F}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1, x+1) \subseteq \mathbb{R}$

(2) 若 $U, V \in \mathcal{F}$. 则 $\forall x \in U \cap V$.

$x \in U$ 知 $(x-\delta_1, x+\delta_1) \subset U$, $\exists \delta_1 > 0$.

$x \in V$ 知 $(x-\delta_2, x+\delta_2) \subset V$, $\exists \delta_2 > 0$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

则 $(x-\delta, x+\delta) \subset U \cap V$. $U \cap V$ 也为开集.

(3) $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, $\exists \alpha_0$, $x \in U_{\alpha_0}$

故 $\exists \delta$, $(x-\delta, x+\delta) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.