作业讲解

2023/6/18 16:38

1. 证明：若 $A=(a_{ij})$ 满足 $\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1,\ j=1,\ldots,n$, 则 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法都收敛.

① Jacobi迭代： $B=(b_{ij})$ $\quad B=\underline{D^{-1}}(L+U)$ $\quad b_{ij}=-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\ \ i\neq j$

$b_{ii}=0$

$$\|B\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1\Rightarrow \text{Jacobi迭代收敛}$$

② G-S迭代. $M=(D-L)^{-1}U$

$$\lambda I-M=\lambda I-(D-L)^{-1}U=(D-L)^{-1}[\lambda(D-L)-U]$$

$$=(D-L)^{-1}D[\underline{\lambda I-\lambda D^{-1}L-D^{-1}U}]$$

若λ为M的任一特征值 $|\lambda|\geq 1$ 时

$$\begin{pmatrix}\lambda & & \frac{a_{ij}}{a_{ii}}\\ & \ddots & \\ \lambda\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i>j}}^{n}\left|\lambda\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|+\sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{n}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

$$\leq\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right||\lambda|<|\lambda|\quad \text{对}j=1,\ldots n$$

$\lambda I-\lambda D^{-1}L-D^{-1}U$ 是强严格列对角占优的

$\Rightarrow \lambda I-\lambda D^{-1}L-D^{-1}U$ 非奇异 $\Rightarrow \det(\lambda I-M)\neq 0$ 矛盾

$\Rightarrow |\lambda|<1\Rightarrow \rho(M)<1$

$\Rightarrow$ G-S迭代收敛