总结本节讨论, 对于实可微函数 f,

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f_z(z)\Delta z+f_{\overline{z}}(z)\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|).$$

特别地, 对全纯函数 f,

$$f(z+\Delta z)-f(z)=A\Delta z+o(|\Delta z|),\ \text{这里}A=f'(z)=f_z(z).$$

全纯函数即为满足 Cauchy-Riemann 方程的实可微复值函数。

4.3 映射性质

一个实可微复值函数 $f=u+iv$, 可以视为映射

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y)),$$

其 Jacobi 矩阵

$$J_f(z)=\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}.$$

命题 4.1. 如果 $f=u+iv$ 实可微，则其 Jacobi 行列式

$$\det(J_f(z))=|f_z(z)|^2-|f_{\overline{z}}(z)|^2.$$

特别地，如果 f 全纯, $\det(J_f(z))=|f'(z)|^2$。

证明: 将 $f_z, f_{\overline{z}}$ 表示为实形式:

$$\begin{aligned} f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y) &= \frac{1}{2}(u_x+iv_x-i(u_y+iv_y)) \\ &= \frac{1}{2}((u_x+v_y)+i(v_x-u_y)), \\ f_{\overline{z}}=\frac{1}{2}(f_x+if_y) &= \frac{1}{2}(u_x+iv_x+i(u_y+iv_y)) \\ &= \frac{1}{2}((u_x-v_y)+i(v_x+u_y)). \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} & |f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2 \\ = & \frac{1}{4}((u_x+v_y)^2+(v_x-u_y)^2-(u_x-v_y)^2-(v_x+u_y)^2) \\ = & u_xv_y-v_xu_y=\det(J_f). \end{aligned}$$

下面讨论反函数定理。实可微复数函数如果偏导数连续，则称为 C^1 实可微。

回忆实 2 维的反函数定理, 并陈述为复形式

定理 4.3. 假设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 为 C^1 实可微。如果 Jacobi 矩阵 J_f 在 p 处非退化, 则存在 p 的邻域 U, $f(p)$ 的邻域 V, 以及 V 上的实可微映射 $g:V\to U$ 满足

$$f\circ g(w)=w,\ \forall w\in V;\ g\circ f(z)=z,\ \forall z\in U.$$

进一步, g 在 $f(p)$ 处的 Jacobi 矩阵 $J_g(f(p))=J_f(p)^{-1}$。

现由 $f\circ g(w)=w,\ w\in V$ 来导出 g 的进一步性质。两边对 $\overline{w}$ 求偏导，得

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{w}}=\frac{\partial w}{\partial \overline{w}}=0.$$

如果 f 在 p 点复可微，则有 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p)=0$。由 $J_f(p)$ 非退化知，$\frac{\partial f}{\partial z}(p)\neq 0$, 因此 $\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(p))=0$。这说明 g 在 $f(p)$ 处复可微。此时 $g'(f(p))=1/f'(p)$。如果 f 全纯且导数在 U 上处处非零，则 g 在 V 上复可微，因此 g 也是全纯函数。

总结上述讨论，可得全纯函数的反函数定理

定理 4.4. 假设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 全纯, 并且在 p 的邻域内导数 f' 连续且 $f'(p)\neq 0$。则存在 p 的邻域 U, $f(p)$ 的邻域 V, 以及全纯映射 $g:V\to U$, 满足

$$f\circ g(w)=w,\ \forall w\in V;\ g\circ f(z)=z,\ \forall z\in U.$$

进一步, g 的导数满足 $g'(f(z))=1/f'(z),\forall z\in U$。

注 1: 如果 $f'(p)=0$, 此时在 p 邻域中不存在反函数。例: $f(z)=z^2,p=0$。

注 2: 后面将证全纯函数的无穷次可微性。由此可知，“在 p 的邻域内导数 f' 连续”这一条件实数多余。

4.4 共形性质

假设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 全纯, $z_0\in\Omega$ 并且 $f'(z_0)\neq 0$, 本节将讨论 $f'(z_0)$ 的几何意义。为此，先介绍曲线。

平面曲线指的是连续映射 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, 其中 $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, x,y 都是关于 $t\in[a,b]$ 的连续函数。

如果 x,y 都关于 t 可微, 此时可定义

$$\gamma'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)}{\Delta t}=x'(t)+iy'(t),$$

其几何意义为曲线在 $\gamma(t)$ 处的切方向 (的复数表示)。

称曲线 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是光滑的, 如果 $\gamma'(t)$ 在 $[a,b]$ 上存在且连续，满足 $\gamma'(t)\neq 0$ 对任意 $t\in[a,b]$ 成立。这里在端点的导数 $\gamma'(a),\gamma'(b)$ 分别按照右, 左导数理解

$$\gamma'(a)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\gamma(a+t)-\gamma(a)}{t},\ \gamma'(b)=\lim_{t\to 0^-}\frac{\gamma(b+t)-\gamma(b)}{t}.$$

称曲线 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ 分段光滑, 如果曲线可分解为有限段光滑曲线之并。即存在 $[a,b]$ 的有限划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 使得对任意 $1\leq k\leq n$, 曲线段 $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ 是光滑的。

此处 γ' 处处非零是必须的, 为说明这一点，考虑例子

$$\gamma(t)=t^3+it^2, t\in[-1,1].$$

显然, $x(t)=t^3$ 与 $y(t)=t^2$ 都是可微函数。另一方面, 在平面坐标下, 曲线的方程为 $y=x^{2/3}, x\in[-1,1]$。显然 $(0,0)$ 是曲线的尖点. 这是因为 $\gamma'(0)=0$ 导致了曲线在 0 处方向消失 (没有辐角, 迷失方向)。此例表明，γ' 非零是一个合理的要求。

现在讨论 f 的保角性质。假设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 为实可微函数, $p\in\Omega$。考虑经过 p 点的光滑曲线: $\gamma:[-\epsilon,\epsilon]\to\Omega$, $\gamma(0)=p$。进一步假设 Jacobi 矩阵 J_f 沿着曲线 γ 非退化。像曲线记为 $\lambda(t)=f(\gamma(t)), t\in[-\epsilon,\epsilon]$。

下说明 λ 也是光滑曲线。为此, 注意到 λ 的实部与虚部都是可微的, 只需证明 $\lambda'(t)$ 不为零即可。利用求导的链式法则,

$$\lambda'(t)=f_z(\gamma(t))\gamma'(t)+f_{\overline{z}}(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}.$$

如果对某点 $t_0\in(-\epsilon,\epsilon)$ 成立 $\lambda'(t_0)=0$, 由 γ 的光滑性可得 $\gamma'(t_0)\neq 0$。因此有 $|f_z(\gamma(t_0))|=|f_{\overline{z}}(\gamma(t_0))|$。这蕴含

$$\det(J_f(\gamma(t_0)))=|f_z(\gamma(t_0))|^2-|f_{\overline{z}}(\gamma(t_0))|^2=0.$$

这矛盾于 f 的 Jacobi 矩阵 J_f 沿曲线 γ 非退化。

假设 f 在 p 点复可微, 则 $f_{\bar{z}}(p)=0, f_z(p)=f'(p)$。因此

$$\lambda'(0)=f_z(p)\gamma'(0)=f'(p)\gamma'(0) \Longleftrightarrow f'(p)=\frac{\lambda'(0)}{\gamma'(0)}.$$

由此见，像曲线 λ 在 $f(p)$ 的切方向与原曲线 γ 在 p 的切方向的角度差即 $f'(p)$ 的辐角，长度比即为 $|f'(p)|$。这给出了导数的几何解释。

现考虑过 p 点的两条光滑曲线 γ_1,γ_2, 记像曲线 $\lambda_k=f(\gamma_k)$。类似可得 $\lambda_k'(0)=f'(p)\gamma_k'(0)$。因此

$$\frac{\lambda_2'(0)}{\lambda_1'(0)}=\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}.$$

此处 $\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$ 的辐角表示两曲线 γ_1,γ_2 在 p 的夹角, $\frac{\lambda_2'(0)}{\lambda_1'(0)}$ 的辐角表示像曲线在 $f(p)$ 的夹角。上式说明, f 保持任意两条曲线在 p 处夹角的大小与方向。此时, 称 f 在 p 点保角或者共形 (conformal)。

现考虑反问题。假设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 实可微, $p\in\Omega$, 且 Jacobi 矩阵 J_f 非退化。如果 f 在 p 点保角, 能否推出 f 在 p 点复可微?

考虑经过 p 点的一族曲线 $\gamma_\theta(t)=p+te^{i\theta}, t\in[-\epsilon,\epsilon]$, 其中 $\theta\in[0,2\pi)$ 是参数。像曲线记为 $\lambda_\theta(t)=f(\gamma_\theta(t))$，其切方向

$$\lambda_\theta'(t)=f_z(\gamma_\theta(t))e^{i\theta}+f_{\bar{z}}(\gamma_\theta(t))e^{-i\theta}.$$

考虑参数 $0,\theta$ 对应的曲线 λ_0 与 λ_θ。f 在 p 处的保角性蕴含

$$\frac{\lambda_\theta'(0)}{\lambda_0'(0)}=k_\theta\frac{\gamma_\theta'(0)}{\gamma_0'(0)}=k_\theta e^{i\theta}, \forall\ \theta\in[0,2\pi),$$

其中 k_θ 是一个正数。上式等价于

$$f_z(p)e^{i\theta}+f_{\bar{z}}(p)e^{-i\theta}=k_\theta e^{i\theta}(f_z(p)+f_{\bar{z}}(p)),$$

$$\Longleftrightarrow f_z(p)+f_{\bar{z}}(p)e^{-2i\theta}=k_\theta(f_z(p)+f_{\bar{z}}(p)).$$

显然上式右端非零且辐角恒定, 要使左端辐角与 $\theta\in[0,2\pi)$ 无关, 必然有 $f_{\bar{z}}(p)=0$。这说明 f 在 p 点复可微。

以上讨论, 可总结为

定理 4.5. 设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 实可微, 其 Jacobi 矩阵 J_f 非退化。则

$$f\text{在 }p\text{点共形} \Longleftrightarrow f\text{ 在}p\text{ 点复可微};$$

$$f\text{在 }\Omega\text{上共形} \Longleftrightarrow f\text{在}\Omega\text{上全纯}.$$

4.5　习题

1. (复可微性) 定义函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=x^3y^2+ix^2y^3$。求使 f 复可微的所有点的集合。

2. (全纯性) 设 f 在平面区域 Ω 全纯，证明 $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ 在区域 $\Omega^*=\{\bar{z};z\in\Omega\}$ 上全纯。

3. (复可微性) 研究如下函数的复可微性

(1). $f(z)=\mathrm{Re}(z)$;

(2). $f(z)=|z|^3$;

(3). $f(z)=z(z-1)\mathrm{Re}(z)$;

哪些点导数存在？哪些点导数不存在？证明你的结论。

4. (复可微性) 是否存在复平面上的实可微函数，使其复可微点的集合恰好是实轴？

5. (偏导数的计算) 令 $f(z)=az^2+|z|^2$, 求 $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$。

6. (微分算子的性质) 利用微分算子的定义证明

$$\frac{\partial z}{\partial z}=\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}}=1,\ \frac{\partial z}{\partial \overline{z}}=0.$$

7. (微分算子的性质) 设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 实可微，证明如下等式

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}},\quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

(利用微分算子的定义，证明实部虚部相等)

8. (复合函数偏导) 设 $f:D\to\Omega$, $g:\Omega\to\mathbb{C}$ 都是实可微函数，证明

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}=\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

9. (全纯函数常值性的判别) 假设 $f=u+iv:\Omega\to\mathbb{C}$ 全纯, 满足以下条件之一:

(1). u 是常数;

(2). $|f|$ 是常数;

(3). $u=v^2$;

证明 f 是常数。

10. (Laplace 算子复形式) 证明 Laplace 算子

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}.$$

11. (求导法则) 假设 Ω 为平面区域, $\gamma:[a,b]\to\Omega$ 为光滑曲线，$f:\Omega\to\mathbb{C}$ 实可微。验证

$$(f\circ\gamma)'(t)=f_z(\gamma(t))\gamma'(t)+f_{\overline{z}}(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}.$$

13. (正交曲线) 假设 f 在区域 D 上全纯，f' 在 D 上不取零值，证明

(1). 对任意的 $u_0+iv_0\in f(D)$, 曲线 $\mathrm{Re}(f(z))=u_0$ 和曲线 $\mathrm{Im}(f(z))=v_0$ 正交;

(2). 对每一个 $r_0e^{i\theta_0}\in f(D)\setminus\{0\}$, 曲线 $|f(z)|=r_0$ 与曲线 $\arg(f(z))=\theta_0$ 正交。

14. (极值点的性质) 假设 f 在单位圆盘 $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$ 上全纯, 如果存在 $z_0\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$, 使得 $f(z_0)\neq 0$, $f'(z_0)\neq 0$ 且 $|f(z_0)|=\max_{|z|\leq|z_0|}|f(z)|$, 证明

$$\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}>0.$$

第五章　分式线性变换

5.1　分式线性变换

本节的主要目的是介绍从复球面到自身的一类双全纯映射：分式线性变换。

形如

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0$$

的函数称为分式线性变换, 或者 Möbius 变换。如果 $ad-bc=0$, 容易验证, f 退化为常值映射。

易知: 如果 $c \neq 0$, 则 f 在 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ 上全纯, 且满足

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

因此, f 在 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ 上处处共形。同时对任意 $w \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, $f(z)=w$ 有唯一解

$$z = g(w) = \frac{b-dw}{cw-a}.$$

此处 g 可视为 f 的逆映射, 它也是分式线性变换。这说明 $f: \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ 为双全纯映射。此时, 利用球面拓扑以及连续性, 可合理定义 $f(-d/c)=\infty, f(\infty)=a/c$, 使得 $f: \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为同胚。

如果 $c=0$, $f(z)=(az+b)/d$ 为整线性变换。此时, 可定义 $f(\infty)=\infty$ 使 $f: \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为同胚。

假设 $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 为区域 (连通开集), 对于映射 $f: \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$, 我们给出 f 全纯的定义。分四种情况讨论:

- $\Omega \subset \mathbb{C}, f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. 此时 f 全纯指通常意义的全纯；

- $\infty \in \Omega, f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. 此时称 f 在 ∞ 的邻域内全纯, 如果 $g(z) = f(1/z)$ 在 0 的邻域内全纯;

- $\Omega \subset \mathbb{C}, f(z_0) = \infty$. 此时称 f 在 z_0 的邻域内全纯, 如果 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在 z_0 的邻域内全纯;

- $\infty \in \Omega, f(\infty) = \infty$. 此时称 f 在 ∞ 的邻域内全纯, 如果 $g(z) = 1/f(1/z)$ 在 0 的邻域内全纯。

此定义的本质在于：利用坐标变换 $z \mapsto 1/z$，将定义域或值域的 ∞ 处的局部性质转化为 0 处的局部性质，从而可合理谈论定义于或取值于 ∞ 处的全纯性。

由此定义，可以验证：分式线性变换可以视为从复球面到自身的双全纯映射。

所有分式线性变换全体记为 $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$:

$$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

它在映射的复合运算下构成一个群, 称为分式线性变换群。单位元素为恒等映射, f 的逆元为其逆映射。

现在考虑矩阵集合

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 在矩阵的乘法下构成一个群, 称为特殊线性群 (special linear group)。定义映射 $\Phi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ 如下

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

显然 Φ 是满射。给定两个分式线性变换

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ g(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\omega},$$

容易验证

$$f \circ g(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\omega)}{(c\alpha + b\gamma)z + (c\beta + b\omega)}.$$

这说明复合映射的系数矩阵对应于两个映射系数矩阵的乘积。即 Φ 是保运算的

$$\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B).$$

因此 Φ 是一个群同态. 容易验证 $\Phi^{-1}(\Phi(A)) = \pm A$, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{\pm I\}$. 由群同构定理知

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\} \cong \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}).$$

我们称 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$ 为射影特殊线性群 (projective special linear group), 记为 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$。