2020-2021 春夏学期偏微分方程期末考试回忆卷

课程号: 06121100

考试日期: 2021.7.8

1. (1) 求函数 $f(x)=e^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换.

(2) 求解方程

$$\begin{cases} u_t+au_x+cu=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

2. 对于区域 $\Omega,\forall x_0\in\Omega$，记其上的 Green 函数为 $G(x;x_0)$.

(1) 写出 Green 函数满足的方程;

(2) 证明：对于任意的 $x\in\Omega\backslash\{x_0\}$，有 $G(x;x_0)>0$;

(3) 写出 $\mathbb{R}^3$ 空间中单位球上的 Green 函数.

3. 用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & (x,t)\in(0,l)\times(0,T) \\ u(x,0)=x^2(l-x)^2 & x\in(0,l) \\ u_x(0,t)=0,u_x(l,t)=0 & t\in[0,T] \end{cases}$$

4. 设 $u(x,t)$ 在 Q_T 上满足方程

$$\begin{cases} u_t+u_{xx}=2u & (x,t)\in Q_T \\ u|_\Gamma\le M \end{cases}$$

其中 $M>0$ 为常数,$\Gamma=\partial_pQ_T$ 为 Q_T 的抛物边界. 求证：在 $\overline{Q_T}$ 上成立

$$u(x,t)\le Me^{2t}.$$

5. 设 $u(x,t)$ 为混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & (x,t)\in(0,l)\times(0,T) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x), & x\in[0,l] \\ u(0,t)=0,u_x(l,t)+au(l,t)=0, & t\in[0,T] \end{cases}$$

的古典解，其中 $a\ge0$. 求证，存在一个与 t 无关的常数 E_0 , 使得估计

$$\int_0^l u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)dx\le E_0$$

总成立. 并由此证明该混合问题古典解的唯一性.

6. 设 $u(x,t)$ 为初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}_+^2 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的古典解. 取 $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^2$，定义特征锥

$$K(x_0, t_0) = \{(x,t) : (x_0 - x) \leq a(t_0 - t)\},$$

$$C_t = \{(x,t) : x \in \mathbf{R}, (x_0 - x) \leq a(t_0 - t)\}.$$

设局部能量估计

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{C_t} u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t) dx,$$

试证明 $e'(t) \leq 0$ 对于任意的 $0 \leq t \leq t_0$ 成立，并由此证明，若 φ, ψ 均为 0，则在 $K(x_0, t_0)$ 内有 $u \equiv 0$.

7. 记 $\Omega_1 = \{(x,y) : x \in (0,d), y \in (0,A)\}, \Omega_2 = \{(x,y) : x \in (0,A), y \in (0,d)\}$. 并记 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$，其中 $d > 0, A > 0$. 试问是否存在一个仅与 d 有关，而与 A 无关的常数 $C(d)$，使得对于任意 $u \in C_0^1(\Omega)$, 成立

$$\int_\Omega u^2 dxdy \leq C(d) \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy.$$