≪ 概率论 ≫ 习题解答

第一章　事件及其概率

1. 把 1,2,3,4,5 诸数任取其三组成一个三位数，求所得数是偶数的概率.

解　从 1,2,3,4,5 这五个数中任取 3 个数组成一个三位数，共有 P_5^3 个不同的三位数. 要使所得数为偶数，只须个位数为偶数，因而共可以组成 $P_2^1P_4^2$ 个偶的三位数. 故所求概率为

$$\frac{P_2^1P_4^2}{P_5^3}=\frac{2}{5}.$$

2. 袋中有白球 5 只，黑球 6 只，陆续取出三球，求顺序为黑白黑的概率.

解　从该袋中陆续取出三球，共有 P_{11}^3 种不同的选法，顺序为黑白黑的共有 $P_6^1P_5^1P_5^1$ 种. 故所求概率为

$$\frac{P_6^1P_5^1P_5^1}{P_{11}^3}=\frac{5}{33}.$$

3. 在一个装有 n 只白球 n 只黑球 n 只红球的口袋中，任取 m 只球，求其中白，黑，红各有 $m_1,m_2,m_3(m_1+m_2+m_3=m)$ 只的概率.

解　从该袋中任取 m 只球，共有 C_{3n}^m 种不同的选法，其中白，黑，红各有 m_1,m_2,m_3 的选法有 $C_n^{m_1}C_n^{m_2}C_n^{m_3}$. 故所求概率为

$$\frac{C_n^{m_1}C_n^{m_2}C_n^{m_3}}{C_{3n}^m}.$$

4. 由盛有号码为 $1,2,\ldots,N$ 的球的箱子中有放回的摸了 n 次，依次记其号码，求这些号码按严格上升次序排列的概率.

解　从号码为 $1,2,\ldots,N$ 的球的箱子中有放回的摸了 n 次，共有 N^n 种取法. 由于任意 n 个不同的号码排成一排的所有排法中，有且只有一种是按严格上升次序排列的，因而其中号码按严格上升次序排列的共有 C_N^n 个. 故所求概率为 $\frac{C_N^n}{N^n}$.

5. 在中国象棋棋盘上任放一红车和一黑车，求两车可相互吃掉的概率.

解　中国象棋棋盘上有 10 条横线和 9 条纵线，当且仅当双方的车位于同一条横线或纵线时才可以互相吃掉. 故所求概率为

$$\frac{10\times C_9^2+9\times C_{10}^2}{C_{90}^2}=\frac{17}{89}.$$

6. 对任意凑在一起的 40 人，求他们中没有两人生日相同的概率.

解　一年有 365 日，这 40 人的生日的种数为 365^{40} , 没有两人生日相同的种数为 P_{365}^{40}, 故所求概率为

$$\frac{P_{365}^{40}}{365^{40}}=0.89.$$

7. 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r\le n)$ 只，求下列事件的概率：　(1) 没有成双的鞋子；　(2) 只有一双鞋子；　(3) 恰有二双鞋子；　(4) 有 r 双鞋子.

解　由于 n 双不同的鞋子共 2n 只，任取 $2r$ 只，共 C_{2n}^{2r} 种取法．(1) 先从 n 种型号中选取不同的 $2r$ 种，再在每种型号的 2 只鞋中都选取 1 只，因而没有成双的取法共有 $C_n^{2r}2^r$，故所求概率为

$$\frac{C_n^{2r}2^{2r}}{C_{2n}^{2r}};$$

(2) 先从 n 双中任取一双鞋子，再从剩下的 $n-1$ 双中任取 $2r-2$ 只没有成双的鞋子，共有 $C_n^1C_{n-1}^{2r-2}2^{2r-2}$ 取法．故所求概率为

$$\frac{C_n^1C_{n-1}^{2r-2}2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}};$$

(3) 先从 n 双中任取二双鞋子，再从剩下的 $n-2$ 双中任取 $2r-4$ 只没有成双的鞋子，共有 $C_n^2C_{n-2}^{2r-4}2^{2r-4}$ 取法．故所求概率为

$$\frac{C_n^2C_{n-2}^{2r-4}2^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}};$$

(4) 从 n 双中任取 r 双鞋子，有 C_n^r 取法．故所求概率为

$$\frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}.$$

8. 10 层楼的一架电梯在底层登上 7 位乘客，从第二层起乘客可离开电梯，求每层至多一位乘客离开的概率 (乘客在各层离开是等可能的).
解　每位乘客在各层离开是等可能的，因而 7 位乘客共有 9^7 离开方法．每层至多一位乘客离开，即指 7 位乘客在不同的楼层离开，有 P_9^7 种离开方法．故所求概率为

$$\frac{P_9^7}{9^7} = 0.038.$$

9. 从 52 张的一副扑克牌中，任意取出 13 张，问 5 张黑桃，3 张红心，3 张方块和 2 张草花的概率.
解　一付扑克有这四种花色各 13 张，由古典概率公式，易知，所求概率为

$$\frac{C_{13}^5C_{13}^3C_{13}^3C_{13}^2}{C_{52}^{13}} = 0.0129.$$

10. 从 52 张的一副扑克牌中，任取 5 张，求下列事件的概率：(1) 取得以 A 为打头的顺次同花色顺次 5 张；(2) 有 4 张同点数；(3) 5 张同花色；(4) 3 张同点数且另 2 张也同点数.
解　从 52 张的一副扑克牌中，任取 5 张，有 C_{52}^5 种取法.
(1) 取得以 A 打头的同花色顺次 5 张，即 A,K,Q,J,10. 因而只有 4 种选法．故所求概率为

$$4/C_{52}^5 = 0.00000154;$$

(2) 先选出该同点数，有 C_{13}^1 种选法；再从剩下的 48 张牌中任取 1 张，有有 C_{48}^1 种选法．因而共有 $C_{13}^1C_{48}^1$ 种选法．故所求概率为

$$\frac{C_{13}^1C_{48}^1}{C_{52}^5} = 0.00024;$$

(3) 先选好花色，有 C_4^1 种选法；而后从选定的花色中任取 5 张，有有 C_{13}^5 种选法．因而共有 $C_4^1C_{13}^5$ 种选法．故所求概率为

$$\frac{C_4^1C_{13}^5}{C_{52}^5} = 0.00198;$$

(4) 先选出一种点数并任取 3 张，有 $C_{13}^1C_4^3$ 种选法；再从剩下的牌中再选出一种点数并任取 2 张，有 $C_{12}^1C_4^2$ 种选法．因而共有 $C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2$ 种选法．故所求概率为

$$\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2}{C_{52}^5} = 0.000144.$$

11. 一颗骰子投 4 次至少的一个 6 点的概率与两颗骰子投 24 次至少得一个双六的概率哪一个大？

解　记 A=" 投掷一颗骰子 4 次至少的一个 6 点 ", B=" 投掷一颗骰子 24 次至少得一个双六 ". 则

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0.518,$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - (\frac{35}{36})^4 = 0.491.$$

因而 " 一颗骰子投 4 次至少的一个 6 点 " 的概率大.

12. 某码头只能容纳一只船．现知某日将独立到来两只船，且在 24 小时内到来的可能性均相等，如果它们停靠的时间分别为 3 小时和 4 小时，求一只船要在江中等待的概率.

解　记停靠时间为 3 小时和 4 小时的两只船到达该码头的时刻分别为 x 和 y. 由题知样本空间为 $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x < 24, 0 \le y < 24\}$. 而两船要在江中等待的充分必要条件为事件 $A = \{(x,y) : 0 \le x - y \le 4,$ 或 $0 \le y - x \le 3\}$ 发生．由几何概型，所求概率为

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = 1 - \frac{(24-3)^2 + (24-4)^2}{2 \times 24^2} = 0.27.$$

13. 在一线段 AB 中随机取两点 C 和 D, 求线段 AC,CD,DB 可构成三角形的概率.

设 AB 的长度为单位 1, AC 的长度为 x, AD 的长度为 y. 则样本空间为 $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. 而 AC,CD,DB 可构成三角形的充分必要条件为成立下不等式组

$$\begin{cases} x + 1 - y > |x - y| \\ x + |x - y| > 1 - y \\ 1 - y + |x - y| > x \end{cases}$$

即为事件 $A=\{(x,y):0<y<1/2,0<x<1/2,$ 或 $0<y<1/2,1/2<x<1\}=\{(x,y):0<y<1/2,0<x<1\}$ 发生. 故所求概率为 $P(A)=1/2$.

14. 在线段 $[0,1]$ 上任投三个点，求 0 到这三点的三条线段能构成三角形的概率.

解　不妨设这三段长分别为 x,y,z. 记 A="0 到这三点的三条线段能构成三角形 ". 则样本空间为 $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1\}$. 而事件 A 发生的充分必要条件为成立下不等式组

$$\begin{cases} x+y>z \\ x+z>y \\ y+z>x \end{cases}$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{V_A}{V_\Omega}=1-3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}.$$

15. 在一张打方格的纸上投一枚直径为 1 的硬币，问方格要多小时才能使硬币与线不相交的概率小于 0.01

解　设至多为 x 才能使硬币与线不相交的概率小于 0.01. 由题意应满足

$$(\frac{x-1}{x})^2<0.01,$$

解得 $x<10/9$, 故方格至多为 10/9 时才能使硬币与线不相交的概率小于 0.01.

16. $P(\phi)=0$. 但若事件 A 使 $P(A)=0$, 问是否必有 $A=\phi$? 如是，请说明理由；否则请举出反例.

解　不一定有 $A=\phi$. 例如取 $\Omega=(0,1)$, $A=\{1/3,1/2\}$. 则 $P(A)=0$ 但 $A\ne\phi$.

17. 设 A, B, C, D 是四个事件，试用它们表示下列事件：

(1) 四个事件至少发生一个；

(2) 四个事件恰好发生两个；

(3) A,B 都发生而 C, D 不发生；

(4) 这四个事件都不发生；

(5) 这四个事件至多发生一个；

(6) 这四个事件至少发生两个；

(7) 这四个事件至多发生两个.

解　(1) $A\cup B\cup C\cup D$;

(2)$AB\overline{CD}+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{BC}D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{AB}CD$;

(3)$AB\overline{CD}$;

(4)$\overline{ABCD}$;

(5)$\overline{ABCD}+A\overline{BCD}+\overline{A}B\overline{CD}+\overline{AB}C\overline{D}+\overline{ABC}D$;

(6)$AB\cup AC\cup AD\cup BC\cup BD\cup CD$;

(7) $\overline{ABC\cup ABD\cup ACD\cup BCD}$.

18. 设 A, B, C 是三个事件，说明下列关系式的概率意义： (1) $A \cup B \cup C = A$; (2) $A \subset \overline{BC}$.

解 (1) 事件 B 或 C 发生必会导致事件 A 的发生； (2) 事件 A 的发生必会导致事件 B 不发生或 C 不发生.

19. 在某班同学中任选一位，记 A={ 选到的是男同学 }, B={ 选到的人不喜欢唱歌 }, C={ 选到一名运动员 }.

(1) 表述 $AB\overline{C}$ 与 $A\overline{B}C$ 的含义； (2) 在什么条件下成立 $ABC = A$? (3) 何时成立 $\overline{C} \subset B$? (4) 何时成立 $A = B$?

解 (1)$AB\overline{C}$ 指选到的是一位不喜欢唱歌且不是运动员的男同学， $A\overline{B}C$ 指选到的是一位喜欢唱歌且是运动员的男同学；

(2) 在“男同学都不喜欢唱歌且都是运动员 ”的条件下成立 $ABC = A$;

(3) 在”喜欢唱歌的同学都是运动员”时成立 $\overline{C} \subset B$;

(4) 在“男同学都不喜欢唱歌且女同学都喜欢唱歌”成立 $A = B$.

20. 元件 A,D 与并联 B,C 串联如图. 以 A,B,C,D 记相应元件能正常工作的事件.

(1) 以 A,B,C,D 表示 { 线路能正常工作 } 这一事件； (2) 以 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ 表示 { 线路不能正常工作 } 的事件.

解 易知 (1) $ABD \cup ACD$; (2)$\overline{A} \cup \overline{BC} \cup \overline{D}$.

21. 从两事件相等的定义证明事件的下列运算规律：

(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$; (2)$A(B \cup C) = AB \cup AC$.

证 (1) 若 $\omega \in \overline{A \cup B}$, 则有 $\omega \overline{\in} A \cup B$, 也就是说 $\omega \overline{\in} A$ 且 $\omega \overline{\in} B$, 即有 $\omega \in \overline{A}$ 且 $\omega \in \overline{B}$, 因而 $\omega \in \overline{A}\overline{B}$.

反过来，若 $\omega \in \overline{A}\overline{B}$, 则有 $\omega \in \overline{A}$ 且 $\omega \in \overline{B}$, 也就是说 $\omega \overline{\in} A$ 且 $\omega \overline{\in} B$, 即有 $\omega \overline{\in} A \cup B$, 因而 $\omega \in \overline{A \cup B}$.

故 $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$.

(2) 若 $\omega \in A(B \cup C)$, 则有 $\omega \in A$ 且 $\omega \in B \cup C$, 也就是说 $\omega \in A$ 且 $\omega \in B$, 或者 $\omega \in A$ 且 $\omega \in C$, 即有 $\omega \in AB$ 或者 $\omega \in AC$, 因而 $\omega \in AB \cup AC$.

反过来，若 $\omega \in AB \cup AC$, 则有 $\omega \in AB$ 或者 $\omega \in AC$, 也就是说 $\omega \in A$ 且 $\omega \in B$, 或者 $\omega \in A$ 且 $\omega \in C$. 即有 $\omega \in A$ 且 $\omega \in B \cup C$, 因而 $\omega \in A(B \cup C)$.

故 $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

22. 袋中 n 个球，编号为 $1, 2, \ldots, n$. 求下列事件的概率：

(1) 任意取出两个球，号码恰为 1,2;

(2) 任意取出 3 个球，没有号码 1;

(3) 任意取出 5 个球，号码 1,2,3 中至少出现一个.

解 易知，所求概率为

(1)$\frac{1}{C_n^2} = \frac{2}{n(n-1)}$;

(2)$\frac{C_{n-1}^3}{C_n^3} = \frac{n-3}{n}$;

(3)$1 - \frac{C_{n-3}^5}{C_n^5} = 1 - \frac{(n-6)(n-7)}{n(n-1)}$.

23. 用数学归纳法证明 §3 的 n 个事件和的概率公式 (1).

证　(1) $n=2$ 时，$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$, 故命题成立；
(2) 假设 n=k 时，命题成立．则当 n=k+1 时，

$$\begin{aligned}
&P(A_1\cup\ldots\cup A_k\cup A_{k+1})\\
&=P(A_1\cup\ldots\cup A_k)+P(A_{k+1})-P(A_1A_{k+1}\cup\ldots\cup A_kA_{k+1})\\
&=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le k}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{k-1}P(A_1\cup\ldots\cup A_k)+\\
&\qquad +P(A_{k+1})-[\sum_{i=1}^{k}P(A_iA_{k+1})-\sum_{1\le i<j\le k}P(A_iA_jA_{k+1})+\ldots+\\
&\qquad (-1)^{k-1}P(A_1\cup\ldots\cup A_kA_{k+1})]\\
&=\sum_{i=1}^{k+1}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le k+1}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{k}P(A_1\cup\ldots\cup A_kA_{k+1}).
\end{aligned}$$

故 $n=k+1$ 时，命题成立．故由数学归纳法，命题成立．

24. 任意 n 阶行列式的展开式中的一项，求至少包含一个主对角线元素的概率．

解　记 A_i 为展开式中的项中包含第 i 个主对角线元素，$i=1,2,\ldots,n$. 则所求为

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\cup\ldots\cup A_n).$$

易知 $P(A_i)=1/n, P(A_iA_j)=1/(n(n-1)), P(A_iA_jA_k)=1/(n(n-1)(n-2)),\ldots.$
故

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

25. 考试时共有 n 张考签，有 $m(m\ge n)$ 个同学参加考试．若被抽过的考签立即放回，求在考试结束后，至少有一张考签没有被抽到的概率．

解　不妨设 n 张考签分别标号为 $1,2,\ldots,n$ ，记 A_i=第 i 张签没被抽到,$i=1,2,\ldots,n$. 注意到是有放回的抽签，故所求为

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\cup\ldots\cup A_n).$$

易知 $P(A_i)=(1-1/n)^m, P(A_iA_j)=(1-2/n)^m, P(A_iA_jA_k)=(1-3/n)^m,\ldots.$
故

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}C_n^i(1-i/n)^m.$$

26. 在 §3 例 5 中，求恰好有 $k(k\le n)$ 个人拿到自己的枪的概率．

解　A_k="n 个人中恰有 k 个人拿到自己的枪 ". 则由 §3 例 5 知

$$P(A_0)=1-(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!})=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}.$$

下面讨论 $1\le k\le n$. 记 B_k="恰好指定的个人拿到自己的枪", 这时, $P(A_k)=C_n^kP(B_k)$. 注意到"恰有指定的 k 个人拿到自己的枪"发生的有利基本事件数, 即为"其余确定的 $n-k$ 个人没拿到自己的枪"发生的有利基本事件数, 由 §3 例 5 知, 共有 $(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}$ 种情形. 而所有基本事件数为 $n!$. 故

$$P(B_k)=\frac{(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}}{n!},$$

因而

$$P(A_k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}\qquad (k\le n).$$

27. 给定 $p=P(A),q=P(B),r=P(A\cup B)$, 求 $P(A\overline{B})$ 及 $P(\overline{AB})$.

解　由

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

得

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=r-q,$$

$$P(\overline{AB})=1-P(A\cup B)=1-r.$$

28. 已知若 A_1 与 A_2 同时发生则 A 发生, 求证: $P(A)\ge P(A_1)+P(A_2)-1$.

证　由题知 $P(A_1A_2)\le P(A)$. 故

$$P(A)\ge P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)\ge P(A_1)+P(A_2)-1,$$

得证.

29. 对任意的随机事件 A_1,A_2, 求证:

(1)$P(A_1A_2)=1-P(\overline{A_1})-P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1A_2})$;

(2)$1-P(\overline{A_1})-P(\overline{A_2})\le P(A_1A_2)\le P(A_1\cup A_2)\le P(A_1)+P(A_2)$.

证　(1) 由

$$P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})=P(\overline{A_1})-P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\overline{A_2})$$

及

$$P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})=P(\overline{A_1A_2})=1-P(A_1A_2),$$

即得 (1) 成立.

(2) 由 (1) 即得

$$1-P(\overline{A_1})-P(\overline{A_2})\le P(A_1A_2)\le P(A_1\cup A_2)\le P(A_1)+P(A_2).$$

30. 对任意随机事件 A,B,C, 求证: $P(AB)+P(AC)-P(BC)\le P(A)$.

证　由

$$P(A)\ge P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$$

及

$$P(ABC) \le P(BC),$$

即得结论成立.

31. 求包含事件 A, B 的最小 $\sigma-$ 域.

解　把样本空间划分基本事件之和，即 $\Omega = AB + \overline{AB} + \overline{A}B + A\overline{B}$. 显然包含事件 A, B, 根据 $\sigma-$ 域性质，所求最小 $\sigma-$ 域为 $\{\phi, AB, \overline{AB}, \overline{A}B, A\overline{B}, A, B, \overline{A}, \overline{B}, A \cup B, A \cup \overline{B}, \overline{A} \cup B, \overline{A} \cup \overline{B}, AB \cup \overline{AB}, \overline{A}B \cup A\overline{B}, \Omega\}$.

32. 在三个孩子的家庭中，已知至少有一个是女孩，求至少有一个男孩的概率.

解　记 A=”至少有一个是女孩”, B=”至少有一个男孩”. 则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{6/8}{7/8} = 6/7.$$

33.n 件产品中有 m 件废品，任取两件，求：

(1) 在所取两件中至少有一件是废品的条件下，另一件也是废品的概率;

(2) 在所取两件中至少有一件不是废品的条件下，另一件是废品的概率.

解：　（1）记 A=“至少有一件是废品”， B=“另一件也是废品”，则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{C_m^2/C_n^2}{1 - C_{n-m}^2/C_n^2} = \frac{m-1}{2n-m-1}.$$

(2) 记 A=“至少有一件不是废品”， B=“另一件是废品”, 则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{C_m^1 C_{n-m}^1/C_n^2}{1 - C_m^2/C_n^2} = \frac{m-1}{2n-m-1}.$$

34. 某厂有甲、乙、丙三台机器生产的螺丝钉，产量各占 25%,35%,40%; 在各自的厂品里，不合格品各占 5%,4%,2%.

(1) 从产品中任取一只，求它恰是不合格品的概率;

(2) 若任取一只恰是不合格品，求它是机器甲生产的概率.

解　记 A_1 、A_2 、A_3 分别为“任取一只，是甲、乙、丙三台机器生产的螺丝钉”, B=”是不合格品”. 则

$$P(A_1) = 0.25, P(A_2) = 0.35, P(A_3) = 0.4$$

$$P(B|A_1) = 0.05, P(B|A_2) = 0.04, P(B|A_3) = 0.02$$

故

$$(1) P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B|A_k) = 0.0345;$$

$$(2) P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.25 \times 0.05}{0.0345} = 0.362.$$

35. 甲袋中有 a 只白球， b 只黑球；乙袋中有 c 只白球， d 只黑球. 某人从甲袋中任取两球投入乙袋，然后再从乙袋中任取两球，求最后所得的两球全是白球的概率.

解　记 A_1 、 A_2 、 A_3 分别表示"从甲袋中取出的两球是两个白球、一个白球一个黑球、两个黑球", B="最后所得的两球全是白球". 则由全概率公式

$$P(B)=\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B|A_k)=\frac{C_a^2C_{c+2}^2+C_a^1C_b^1C_{c+1}^2+C_b^2C_c^2}{C_{a+b}^2C_{c+d+2}^2}.$$

36. 袋中有 a($a\geq 3$) 只白球， b 只黑球，甲乙丙三人依次从袋中取出一球 (取后不放回). 试用全概率公式分别求甲乙丙各取得白球的概率.
解记 A 、 B 、 C 分别表示甲、乙、丙各取得白球. 显然 $P(A)=\frac{a}{a+b}$. 由全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{a}{a+b};$$

$$\begin{aligned}&P(C)=P(AB)P(C|AB)+P(A\overline{B})P(C|A\overline{B})+P(\overline{A}B)P(C|\overline{A}B)+P(\overline{AB})P(C|\overline{AB})\\&=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}\cdot\frac{a-2}{a+b-2}+\frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b-1}\frac{a-1}{a+b-2}\\&\frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b-1}\frac{a-1}{a+b-2}\frac{b}{a+b}\frac{b-1}{a+b-1}\frac{a}{a+b-2}\\&=\frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

37. 敌机被击中部位分成三部分：在第一部分被击中一弹，或第二部分被击中两弹，或第三部分被击中三弹时，敌机才能被击落. 其命中率与各部分面积成正比. 假如这三部分面积之比为 0.1, 0.2, 0.7. 若已中两弹，求敌机被击落的概率.
解　用 A_i 、 B_i 、 C_i 分别表示第 i 弹击中部位为第一、二、三部位， $i=1,2$. D="击中两弹"， E="敌机被击落". 则有

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A_1A_2\cup A_1B_2\cup A_1C_2\cup B_1A_2\cup C_1A_2\cup B_1B_2|D)\\&=1-P(C_1B_2\cup B_2C_2\cup C_1C_2|D)=1-(0.2\times 0.7+0.7\times 0.2+0.7\times 0.7)=0.27\end{aligned}$$

38. 产品中 0.96 是合格品的. 现有一种简化的检查法，把真正的合格品确认为合格品的概率为 0.98, 误认废品为合格品的概率为 0.05. 求以简化法检查为合格品的一个产品确实合格的概率.
解　记 A 为"产品为合格品", B 为"产品检查确认为合格品". 则 $P(A)=0.96, P(B|A)=0.98, P(B|\overline{A})=0.05$. 故

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.96\times 0.98}{0.96\times 0.98+0.04\times 0.05}=0.998.$$

39. 甲乙两人从装有九个球，其中三个是红球的盒子中，依次摸一个球，并且规定摸到红球的将受罚.
(1) 如果甲先摸，他不受罚的概率有多大？
(2) 如果甲先摸并且没有受罚，求乙也不受罚的的概率.

(3) 如果甲先摸并且受罚，求乙不受罚的的概率.
(4) 乙先摸是否对甲有利？
(5) 如果甲先摸，并且已知乙没有受罚，求甲也不受罚的概率.
解　记 A_i= “甲第 i 次摸摸到红球 ”，　B_i= “乙第 i 次摸摸到红球 ”, $i=1,2$.
(1)$P(\overline{A_1})=6/9=2/3$;
(2)$P(\overline{B_2}|\overline{A_1})=5/8$;
(3)$P(\overline{B_2}|A_1)=6/8=3/4$;
(4) 由抽签问题知无任乙先摸还是后摸，甲不受罚的概率皆为 2/3；
(5) $P(\overline{A_1}|\overline{B_2})=\frac{P(\overline{A_1})P(\overline{B_2}|\overline{A_1})}{P(\overline{B_2})}=\frac{6/9\times5/8}{2/3}=5/8.$
40. 8 枝枪中 3 枝未经校正，5 枝已校正. 一射手用前者射击，中靶概率 0.3; 而用后者，中靶概率 0.8. 他从 8 枝枪中任取一枝射击，结果中靶，求这枪是已校正过的概率.
解　记 A= “任取一枝为未经校正 ”, B= “射击中靶 ”. 则由贝叶斯公式

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}==\frac{5/8\times0.8}{3/8\times0.3+5/8\times0.8}=0.816.$$

41. 有一均匀正八面体，其第 1 、 2 、 3 、 4 面染有红色，其第 1 、 2 、 3 、 5 面染有白色，其第 1 、 6 、 7 、 8 面染有黑色. 分别以 A,B,C 记投一次正八面体出现红，黑，白的事件，问 A,B,C 是否相互独立？
解　显然,

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/2, P(AB)=1/4, P(AC)=P(BC)=P(ABC)=1/8.$$

由于

$$P(AC)\neq P(A)P(C),$$

故 A,B,C 不相互独立.
42. 设事件 A, B, C 相互独立，求证：　$A\cup B, AB, A-B$ 皆与 C 相互独立.
证　由于事件 A, B, C 相互独立，故

$$\begin{aligned}&P((A\cup B)C)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)\\&=P(C)(P(A)+P(B)-P(AB))=P(A\cup B)P(C).\end{aligned}$$

因而 $A\cup B$ 与 C 相互独立.
由

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(AB)P(C),$$

知 AB 与 C 相互独立.
由

$$\begin{aligned}&P((A-B)C)=P(A\overline{B}C)=P(AC)-P(ABC)\\&=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)=P(A)(P(A)-P(AB))=P(A)P(A-B),\end{aligned}$$

因而 $A-B$ 与 C 相互独立.

43. 设事件 A, B, C 相互独立，求证： $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 也相互独立.

证　由于事件 A, B, C 相互独立，故

$$
\begin{aligned}
P(\overline{ABC}) &= 1-P(A\cup B\cup C)\\
&= 1-(P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C))\\
&= (1-P(A))(1-P(B))(1-P(C)) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}).
\end{aligned}
$$

故 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 也相互独立.

44. 口袋中有 5 只球： 2 红 2 白 1 黑，有放回地取出三球，求下列各事件的概率：

(1) 得全红;

(2) 没有一个红球;

(3) 至少一个红球;

(4) 所得各球颜色全不相同.

解　记 A_i=" 第 i 次取到红球 "， $i=1,2,3$. 故

(1)$P(A_1A_2A_3)=(2/5)^3=8/125$;

(2)$P(\overline{A_1A_2A_3})=(1-2/5)^3=27/125$;

(3)$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1A_2A_3})=98/125$;

(4) 因为取球是有放回的，易知，所求概率为 $6\times 2/5\times 2/5\times 1/5=24/125$.

45. 加工某一零件需经过三道工序，各道工序的次品率分别为 2%,3%,5%, 假定各工序互不影响，求加工后所得零件的次品率

解　A_i= “经第 i 道工序加工后所得零件为次品率 ”,$i=1,2,3$. 故所求概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1A_2A_3})=1-0.98\times 0.97\times 0.95=0.903.$$

46. 对同一目标进行三次独立射击，各次射击命中率依次为 0.4, 0.5 和 0.7. 求：

(1) 三次射击中恰好一次击中目标的概率;

(2) 至少一次击中目标的概率.

解　记 A 、 B 、 C 依次表示第一、二、三射击并击中目标. 故

(1)$P(A\overline{BC}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{AB}C)=0.4\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.7=0.36$;

(2)$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1A_2A_3})=1-0.6\times 0.5\times 0.3=0.91$.

47. 掷一次硬币出现正面的概率为 p, 掷了 n 次，求下列各事件的概率：

(1) 恰好出现一次正面;

(2) 至少出现一次正面;

(3) 至少出现两次正面.

解　这是一伯努里概型，故所求概率为

(1)$C_n^1(1-p)^{n-1}p$;

(2)$1-(1-p)^n$;

(3)$1-(1-p)^n-C_n^1(1-p)^{n-1}p$.

48. 某交往式计算机有 20 个终端，这些终端被各单位独立使用，使用率都为 0.7. 求有

10 个或更多个终端同时被使用的概率.

解　这是一伯努里概型，故所求概率为

$$\sum_{k=10}^{20} b(k;20,0.7) = \sum_{k=10}^{20} C_{20}^{k} 0.7^{k} 0.3^{20-k}.$$

49. 在一电器中，某元件随机开、关，每万分之一秒按下面规律改变它的状态：

(1) 如果当前状态是开的，那么万分之一秒后，它仍然处于开状态的概率为 $1-\alpha$, 变为闭状态的概率为 α ;

(2) 如果当前状态是闭的，那么万分之一秒后，它仍然处于闭状态的概率为 $1-\beta$, 变为开状态的概率为 β .

假设 $0<\alpha<1, 0<\beta<1$, 并且用 θ_n 表示该元件万分之 n 秒后处于闭状态的概率. 请给出 θ_n 的递推公式.

解　记 A_n= "该元件万分之 n 秒后是闭的"，则由全概率公式

$$P(A_n) = P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1}) + P(\overline{A_{n-1}})P(A_n|\overline{A_{n-1}}),$$

即有

$$\theta_n = \theta_{n-1}(1-\beta) + (1-\theta_{n-1})\alpha, \quad n \geq 2.$$

故有 $\theta_n = \theta_{n-1}(1-\beta-\alpha)+\alpha, \quad n \geq 2.$

50. 在伯努里概型中，若 A 出现的概率为 p, 求在出现 m 次 $\overline{A}$ 以前出现 k 次的 A 概率 (可以不连续出现).

解　"在出现 m 次 $\overline{A}$ 以前出现 k 次的 A" 即为 "在前 $k+m-1$ 试验中恰有 k 次出现 A 出现，且第 $k+m$ 次试验出现 $\overline{A}$". 故所求概率为

$$C_{m+k-1}^{k} p^{k}(1-p)^{m-1} \cdot p = C_{m+k-1}^{k} p^{k}(1-p)^{m}.$$

51. 一质点在时刻 0 位于原点，以后向左右随机移动，每次移动一格，设向右移动的概率为 p, 求移动 n 次后位于原点右边 k 格 (也可能 $k<0$) 的概率.

解　"移动 n 次后位于原点右边 k 格" 这一事件等价于 "这 n 次移动中，有 $(n+k)/2$ 次是向右移动，有 $(n-k)/2$ 次是向左移动". 故所求概率为

$$C_{n}^{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}.$$

52. 一质点从平面上某点开始，等可能地向上、下、左、右四个方向移动，每次移动一格. 求经过 $2n$ 次移动后质点回到出发点的概率.

解　"经过 $2n$ 次移动后质点回到出发点" 等价于 "上与下、左与右移动的次数相同". 故所求概率为

$$\frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} = \frac{C_{2n}^{n}}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} C_{n}^{n-k} = \frac{(C_{2n}^{n})^2}{4^{2n}}.$$

53. 甲乙丙三人进行某项比赛，设三人胜每局的概率相等. 比赛规定先胜三局者为整场比赛的优胜者. 若甲胜了第一、三局，乙胜了第二局，问丙成了整场比赛优胜者的概率是多少？

解　由题知，丙要成了整场比赛优胜者，在第三局比赛后，甲不能胜了，乙至多再胜一局，因而等价于下列事件发生，“第四，五，六局都丙胜，或者第四，五，六局中两局丙胜、一局乙胜，且第七局仍丙胜”. 故所求概率为

$$(\frac{1}{3})^3 + C_3^1(\frac{1}{3})^4 = \frac{2}{27}.$$

54. 一个人的血型为 O 、 A 、 B 、 AB 型的概率分别为 0.46 、 0.40 、 0.11 和 0.03. 现任选五人，求下列事件的概率：

(1) 两人为 O 型，其他三人分别为其他三种血型；

(2) 三人为 O 型，两人为 A 型；

(3) 没有一人为 AB 型.

解　(1) 由多项式分布公式，所求概率为

$$\frac{5!}{2!1!1!}0.46^2 \times 0.40 \times 0.11 \times 0.03 = 0.0168;$$

(2) 由多项式分布公式，所求概率为

$$\frac{5!}{3!2!}0.46^3 \times 0.40^2 = 0.156;$$

(3) 可以看作一个二项分布，所求概率为 $(1-0.03)^5 = 0.859$.

55. 每个蚕产 k 个卵的概率为 $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$, 而每个卵能变为成虫的概率为 p, 各卵是否变为成虫相互独立. 求证每蚕养出 r 个小蚕的概率为 $\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}$.

解　A_k 为“每个蚕产 k 个卵”, B 为“每蚕养出 r 个小蚕”. 则由全概率公式

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=r}^{\infty} P(A_k)P(B|A_k) \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} C_k^r p^r (1-p)^{k-r} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

证毕.

56. 在单位间隔时间内电话总机接到 k 次呼叫的概率为 $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, 其中 $\lambda > 0$ 为常数. 若在任意两个相邻的间隔时间内呼叫次数的多少是相互独立的，求在两个单位的间隔时间内接到 s 次呼叫的概率 $P_2(s)$.

解　记 A_k, B_i 分别为前一个单位的间隔时间内和后一个单位的间隔时间内接到 k, i 次呼叫. 则全概率公式

$$\begin{aligned} P_2(s) &= \sum_{k=0}^{s} P(A_k)P(B_{s-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{s} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{s-k}}{(s-k)!}e^{-\lambda} \\ &= \frac{(2\lambda)^s}{s!}e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

57. (选票问题) 投票选举甲乙两人，已知甲共得 P 张，乙共得 Q 张， $P > Q$. 问在计票过程中，甲得票数始终超过乙得票数的概率.

解以横坐标表示计票过程中的票数，纵坐标表示甲得票与乙得票之差. 则每一种计票过程对应着一条折线，共有 C_{m+n}^m 条折线，即表示有 C_{m+n}^m 种计票过程. 我们先来算事件 A= “在计票过程中出现甲乙得票数相同 ” 的概率. 事件 A 发生，意味着所对应的折线必与横坐标相交. 显然，这 C_{m+n}^m 条折线可分为两类，一类是“第一张票是乙所得 ”; 另一类是“第一张票是甲所得 ”. 由于 $P > Q$, 第一类折线必与横坐标相交，且共有 C_{m+n}^{m-1} 条；另一类有两种情形，一种情形与横坐标相交，由反射原理也有 C_{m+n}^{m-1} 条，而另一种情形不与横坐标相交，即对应于甲得票数始终超过乙得票数的情形. 故 $P(A) = \frac{2C_{m+n}^{m-1}}{C_{m+n}^m} = \frac{2m}{m+n}$, 因而所求概率为

$$1 - P(A) = 1 - \frac{2m}{m+n} = \frac{n-m}{n+m}.$$

第二章　随机变量与分布函数

1. 应各取何值才能使下列各式成为分布列？

(1) $P(\xi=k)=c/n,\quad k=1,2,\ldots,n;$

(2) $P(\xi=k)=c\lambda^k/k!,\quad k=1,2,\ldots,\lambda>0.$

解　(1) 由 $\sum_{k=1}^{n}\frac{c}{n}=1$, 得 $c=1$.

(2) 由 $\sum_{k=1}^{n}c\frac{\lambda^k}{k!}=c(e^{-\lambda}-1)=1$, 得 $c=\frac{1}{e^{-\lambda}-1}$.

2. 设 ξ 为重复独立伯努里试验中开始后第一个连续成功或连续失败的次数，求 ξ 的分布.

解　所求为 $P(\xi=k)=p^kq+q^kp, k\geq 1$.

3. 直线上一质点在时刻 0 从原点出发，每经过一个单位时间分别以概率 p 及 $1-p$ 向右或向左移动一格，每次移动是相互独立的. 以 ξ_n 表示在时刻 n 质点向右移动的次数，以 S_n 表示时刻 n 质点的位置，分别求 ξ_n 与 S_n 的分布列.

解　这是一伯努里概型，故 $P(\xi_n=k)=C_n^kp^kq^{n-k}, k=0,1,\ldots,n$.

显然，　$S_n=\xi_n-(n-\xi_n)=2\xi_n-n$, 因而

$$P(S_n=m)=P(\xi_n=\frac{m+n}{2})=\begin{cases}C_n^{(m+n)/2}p^{(m+n)/2}q^{(n-m)/2}, & m=-n,-n+2,\ldots,n-2,n;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

4. 口袋中 5 个球编号为 1,2,3,4,5. 同时取出 3 个球，以 ξ 表示取得球的最大号码，求 ξ 的分布列.

解　由于 $P(\xi=1)=\frac{1}{C_5^3}=0.1, P(\xi=1)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=0.3, P(\xi=1)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=0.6$, 故 ξ 的分布列为

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 0.1 & 0.3 & 0.6\end{pmatrix}.$$

5. 随机变量的分布列为 $P(\xi=k)=k/15,\quad k=1,2,3,4,5$. 求：

(1)$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$;

(2)$P(1/2<\xi<5/2)$;

(3)$P(1\leq\xi\leq 2)$.

解　(1)$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$=1/15+2/15=1/5;

(2)$P(1/2<\xi<5/2)$=$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$=1/5;

(3)$P(1\leq\xi\leq 2)$=$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$=1/5.

6. 每月电费帐单是由电力公司派人上门抄表给用户的. 如果平均有百分之一的帐单与实际不符，那么在 500 张帐单中至少有 10 张不符的概率是多少？

解　记 ξ 表示在 500 张帐单中与实际不符的张数. 则 $\xi\sim B(500,0.01)$. 由 Poisson 定理，

$$P\{\xi \geq 10\} = 1 - P\{\xi \leq 9\} = 1 - \sum_{k=0}^{9} C_{500}^{k} 0.01^{k} 0.99^{500-k}$$
$$\approx 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{5^k}{k!} e^{-5} \approx 0.031828.$$

7. 某车间有 12 台车床独立工作，每台开车时间占总工作时间的 2/3, 开车时每台需用电力 1 单位，问：
(1) 若供给车间 9 单位电力，则因电力不足而耽误生产的概率等于多少？
(2) 至少供给车间多少电力，才能使因电力不足而耽误生产的概率小于 0.01?
解　记 ξ 表示该车间车床同时工作的台数，则 $\xi \sim B(12, 2/3)$.
(1)$P\{\xi \times 1 > 9\} = \sum_{k=10}^{12} C_{12}^{k} (\frac{2}{3})^{k} (\frac{1}{3})^{12-k} = 0.181.$
(2) 设至少为 x 单位电力．则由题意
$P\{\xi \times 1 > x\} < 0.01$, 即 $\sum_{k=x+1}^{12} C_{12}^{k} (\frac{2}{3})^{k} (\frac{1}{3})^{12-k} < 0.01.$
当 $x = 11$ 时，左边 $=(\frac{2}{3})^{12} = 0.0077 < 0.01$;
当 $x = 10$ 时，左边 $=(\frac{2}{3})^{12} + 12 \times (\frac{2}{3})^{11} \times \frac{1}{3} = 0.054 > 0.01.$
故至少供给车间 11 单位电力，才能使因电力不足而耽误生产的概率小于 0.01.
8. 从大批发芽率为 0.8 的种子中任取 10 粒，求发芽粒数不少于 8 的概率.
解　记 ξ 表示发芽粒数，则 $\xi \sim B(10, 0.8)$.
故 $P\{\xi \geq 8\} = \sum_{k=8}^{10} C_{10}^{k} (0.8)^{k} (0.2)^{10-k} = 0.678.$
9. 一本 500 页的书中共有 500 个错误，每个错误等可能地出现在每一页上，求指定一页上至少有 3 个错误的概率.
解　指定一页上错误个数为 ξ, 则 $\xi \sim B(500, 1/500)$. 由 Poisson 定理，

$$P\{\xi \geq 3\} = 1 - P\{\xi \leq 2\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} C_{500}^{k} 0.002^{k} 0.998^{500-k}$$
$$\approx 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{1^k}{k!} e^{-1} \approx 0.08.$$

故所求概率为 0.08.
10. 螺丝钉的废品率为 0.01. 问一盒中应装多少螺丝钉才能保证每盒有 100 只以上好螺丝钉的概率不小于 0.80?
解　设至少应装 $100 + k$ 只．记 ξ 表示一盒中的不好螺丝钉数，则 $\xi \sim B(100 + k, 0.01)$.
由题意

$$P\{\xi < k\} \geq 0.80,$$

即
$$\sum_{i=0}^{k-1} C_{100+k}^{i} (0.01)^{i} (0.99)^{100+k-i} \approx \sum_{i=0}^{k-1} \frac{((100+k)/100)^{i}}{i!} e^{-(100+k)/100} \geq 0.8.$$

取 $k=1$, 不等式左边 =0.3642 < 0.8;
取 $k=2$, 不等式左边 =0.7284 < 0.8;
取 $k=3$, 不等式左边 =0.9155 ≥ 0.8.
故应装 103 只螺丝钉.

11. 随机变量 ξ 服从泊松分布， $P(\xi=1)=P(\xi=2)$, 求 $P(\xi=4)$.

解　由 $P(\xi=1)=P(\xi=2)$, 得 $\lambda e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$. 因而 $\lambda=2$. 故

$$P(\xi=4)=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=0.0902.$$

12. 某商店某种商品每月销售量服从参数为 6 的泊松分布. 问在月初应进货多少件这种商品才能保证当月不脱销的概率大于 0.999?

解　设应进货 k 件，由题意得

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{6^i}{i!}e^{-6}>0.999.$$

查泊松分布表知，应取 $k=15$.

13. 某项保险在确定时期内发生 0,1,2 和 3 次理赔的概率依此为 0.1,0.3,0.4 和 0.2; 个体理赔量 1,2 和 3 的概率分别为 0.5,0.4 和 0.1. 计算理赔总量 S 的概率分布.

解记 A_i= “该项保险在确定时期内发生 i 次理赔 ”,$i=0,1,2,3$. B_j= “个体理赔量为 j”, $j=1,2,3$. 则

$$P(S=0)=0.1,$$

$$P(S=1)=P(B_1|A_1)\cdot P(A_1)=0.15,$$

$$P(S=2)=P(B_2|A_1)\cdot P(A_1)+P(B_1B_1|A_2)\cdot P(A_2)=0.22,$$

同理

$$P(S=3)=0.215, P(S=4)=0.164, P(S=5)=0.095, P(S=6)=0.0408,$$

$$P(S=7)=0.0126, P(S=8)=0.0024, P(S=9)=0.0002.$$

故理赔总量 S 的概率分布为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0.1 & 0.15 & 0.22 & 0.215 & 0.164 & 0.095 & 0.0408 & 0.0126 & 0.0024 & 0.0002 \end{pmatrix}.$$

14. 某疫苗所含细菌数服从泊松分布，每一毫升中平均含有一个细菌，把这种疫苗放入 5 只试管中，每管 2 毫升，求： (1) 5 只试管中都有细菌的概率； (2) 至少有 3 只试管含有细菌的概率.

解　每一毫升中平均含有一个细菌，知每试管中平均含 2 个细菌．记 ξ 为 1 只试管中所含细菌数．则 $\xi \sim P(2)$, 因而 1 只试管中含有细菌的概率为 $p = P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - e^{-2} = 0.865$. 故

(1) 5 只试管中都有细菌的概率为 $p^5 = 0.484$;

(2) 至少有 3 只试管含有细菌的概率为 $C_5^3 p^3(1-p)^2 + C_5^4 p^4(1-p) + p^5 = 0.98$.

15. 设 $\xi \sim P(\lambda)$, 求 ξ 最可能出现的次数.

解　$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, 由于

$$\frac{P\{\xi = k+1\}}{P\{\xi = k\}} = \frac{\lambda}{k+1} \geq 1.$$

因而若 λ 为整数，当 $k = \lambda - 1$ 时，$P\{\xi = k\}$ 最大；若 λ 不为整数，当 $k = [\lambda]$ 时，$P\{\xi = k\}$ 最大.

16. 下列函数是否可以作为某随机变量的分布函数？若可以，请在未定义处补充定义.

(1) $F(x) = 1/(1+x^2), -\infty < x < \infty$;

(2) $x > 0$ 时 $F(x) = 1/(1+x^2), x \leq 0$ 时 $F(x)$ 适当定义；

(3)$x > 0$ 时 $F(x) = 1/(1+x^2), x \geq 0$ 时 $F(x)$ 适当定义

解　(1) 不可以．因为 $F(x)$ 不是非降函数；

(2) 不可以．因为 $F(x)$ 不是非降函数；

(3) 可以．只须定义 $F(x) = 1, x \geq 0$.

17. 在半径为 R, 球心为 O 的球内任取一点 P, (1) 求 $\xi = OP$ 的分布函数；

(2) 求 $P(-2 < \xi < R/2)$.

解　(1)

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ (\frac{x}{R})^3, & 0 < x \leq R; \\ 1, & x \geq R. \end{cases}$$

(2) $P(-2 < \xi < R/2) = F(R/2) - F(-2) = 1/8$.

18. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是分布函数，常数 $a, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 求证：$F(x) = aF_1(x) + bF_2(x)$ 也是分布函数.

证　由于 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是分布函数，且 $a + b = 1, a, b > 0$. 故

(1) $F(x)$ 是非降函数；

(2) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = a\lim_{x\to-\infty} F(x) + b\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;
$\lim_{x\to\infty} F(x) = a\lim_{x\to\infty} F(x) + b\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

(3) $F(x)$ 是右连续函数，即

$$F(x+) = aF_1(x+) + bF_2(x+) = aF_1(x) + bF_2(x) = F(x).$$

故 $F(x)$ 也是分布函数.

19. 设 ξ 的分布函数为 $F(x) = A + B\arctan x$, 求常数 A 及 B.

解　由
$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=A+B\cdot(-\frac{\pi}{2})=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=A+B\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$
易得 $A=1/2,B=1/\pi$.

20. 求证上题中的 ξ 是连续型随机变量，并求其密度函数.

证　取 $p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},-\infty<x<+\infty$, 则有
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du.$$
由于 $p(x)$ 非负，故 ξ 是连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$.

21. 确定下列函数中的常数 A, 使它们为密度函数：

(1)　$p(x)=Ae^{-|x|}$;

(2)　$p(x)=\begin{cases}A\cos x, & -\pi/2\le x\le\pi/2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3)　$p(x)=\begin{cases}Ax^2, & 1\le x<2;\\ Ax, & 2\le x<3;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

解　(1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=2A\int_0^{\infty}e^{-x}dx=2A=1$, 得 $A=1/2$;

(2) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}A\cos xdx=2A=1$, 得 $A=1/2$;

(3) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\int_1^2Ax^2dx+\int_2^3Axdx=29A/6=1$, 得 $A=6/29$.

22. 求与上题中各密度相对应的分布函数.

解　$(1)F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|u|}du=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le0;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0.\end{cases}$

$(2)F(x)=\int_{-\pi/2}^{x}\frac{1}{2}\cos udu=\begin{cases}0, & x<-\pi/2;\\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\pi/2\le x<\pi/2;\\ 1, & x\ge\pi/2.\end{cases}$

(3) 当 $x<1$ 时，　$F(x)=0$;

当 $1\le x<2$ 时，　$F(x)=\int_1^x\frac{6}{29}u^2du=\frac{2}{29}(x^3-1)$;

当 $2\le x<3$ 时，　$F(x)=\int_1^2\frac{6}{29}u^2du+\int_2^x\frac{6}{29}udu=3x^2/29+2/29$;

当 $x\ge3$ 时，　$F(x)=1$.

故分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \frac{2}{29}(x^3-1), & 1\le x<2;\\ 3x^2/29+2/29, & 2\le x<3.\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

23. ξ 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1;\\ 2-x, & 1\le x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求：

(1) 分布函数 $F(x)$;

(2)$P(\xi<0.5),P(\xi>1.3),P(0.2<\xi<1.2)$.

解 (1) 当 $x<0$ 时， $F(x)=0$;

当 $0\le x<1$ 时， $F(x)=\int_0^x udu=x^2/2$;

当 $1\le x<2$ 时， $F(x)=\int_0^1 udu+\int_1^x(2-u)du=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$;

当 $x\ge 2$ 时， $F(x)=1$.

故分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2/2, & 0\le x<1;\\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1, & 1\le x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

(2) $P(\xi<0.5)=F(0.5)=0.125,P(\xi>1.3)=1-F(1.3)=0.245,P(0.2<\xi<1.2)=F(1.2)-F(0.2)=0.66$.

24. 某城市每天用电量不超过 100 万度，以 ξ 表示每天耗电量 (即用电量 /100), 其密度为 $p(x)=12x(1-x)^2(0<x<1)$. 问每天供电量为 80 万度时，不够需要的概率为多少？供电量为 90 万度呢？

解 所求概率为

$$P(\xi>0.8)=\int_{0.8}^1 12x(1-x)^2dx=[3(1-x)^4-4(1-x)^3]|_{0.8}^1=0.0272.$$

$$P(\xi>0.9)=\int_{0.9}^1 12x(1-x)^2dx=[3(1-x)^4-4(1-x)^3]|_{0.9}^1=0.0037.$$

25. 设 $\xi\sim N(10,4)$, 求：

(1)$P(6<\xi<9)$;

(2)$P(7<\xi<12)$;

(3)$P(13 \le \xi \le 15)$.

解　(1)$P(6<\xi<9)=P(-2<\frac{\xi-10}{\sqrt{4}}<-1/2)=\Phi(2)-\Phi(1/2)=0.2858$;

(2)$P(7<\xi<12)=P(-1.5<\frac{\xi-10}{\sqrt{4}}<1)=\Phi(1)-(1-\Phi(1.5)))=0.7745$;

(3)$P(13\le\xi\le15)=P(1.5<\frac{\xi-10}{\sqrt{4}}<2.5)=\Phi(2.5)-\Phi(1.5)=0.0606$.

26. 设 $\xi\sim N(5,4)$, 求 a, 使 (1)$P(\xi<a)=0.90$; (2)$P(|\xi-5|>a)=0.01$.

解　(1)$P(\xi<a)=P(\frac{\xi-5}{\sqrt{4}}<\frac{a-5}{2})=\Phi(\frac{a-5}{2})$, 查正态分布表得 $\frac{a-5}{2}=1.282$, 故 $a=7.564$;

(2)$P(|\xi-5|>a)=P(|\frac{\xi-5}{\sqrt{4}}|>\frac{a}{2})=2(1-\Phi(\frac{a}{2}))=0.01$,

即 $\Phi(\frac{a}{2})=0.995$, 查正态分布表得 $\frac{a}{2}=2.576$, 故 $a=5.152$.

27. $\xi\sim U[0,5]$, 求方程 $4x^2+4\xi x+\xi+2=0$ 有实根的概率.

解　方程有实根的充分必要条件为 $\Delta\ge0$. 由 $\xi\sim U[0,5]$, 得

$$P(\Delta\ge0)=P((4\xi)^2-4\times4(\xi+2)\ge0)=P(\xi\ge2)=0.6.$$

故所求概率为 0.6.

28. 推广的伯努里试验中，每次有三个可能结果 A_1,A_2,A_3, 出现各结果的概率分别为 p_1,p_2,p_3, 进行 n 次重复独立试验，记出现 A_1 的次数为 ξ, 出现 A_2 的次数为 η, 求 (ξ,η) 的联合分布列 (三项分布) 与边际分布.

解　(ξ,η) 的联合分布列为

$$P(\xi=i,\eta=j)=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p_1^ip_2^jp_3^{n-i-j}, i>0, j>0, i+j\le n.$$

边际分布为

$$\begin{aligned}P(\xi=i)&=\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p_1^ip_2^jp_3^{n-i-j}\\&=\sum_{j=0}^{n-i}C_{n-i}^jp_2^jp_3^{n-i-j}\cdot C_n^ip_1^i=C_n^ip_1^i(1-p_1)^{n-i}, i=0,1,2,\ldots,n.\end{aligned}$$

同理

$$P(\eta=j)=C_n^jp_2^j(1-p_2)^{n-j}, j=0,1,2,\ldots,n.$$

29. 求证: 二元函数 $F(x,y)=\begin{cases}1, x+y\ge0,\\0, x+y<0.\end{cases}$ 对每个变量单调非降、右连续, 且 $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$, 但 $F(x,y)$ 并不是一个分布函数.

证　显然, $F(x,y)$ 对每个变量单调非降、右连续, 且 $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$. 但由于 $F(2,2)-F(-1,2)-F(2,-1)+F(-1,-1)=-1<0$, 故 $F(x,y)$ 并不是一个分布函数.

30. 试用 (ξ,η) 的分布函数表示下列概率:

(1)$P(a \leq \xi \leq b, \eta \leq y)$;
(2)$P(\xi = a, \eta \leq y)$;
(3)$P(\xi < -\infty, \eta < +\infty)$.
解　(1)$P(a \leq \xi \leq b, \eta \leq y) = P(\xi \leq b, \eta \leq y) - P(\xi < a, \eta \leq y) = F(b, y) - F(a-, y)$;
(2)$P(\xi = a, \eta < y) = P(\xi \leq a, \eta < y) - P(\xi < a, \eta < y) = F(a, y-) - F(a-, y-)$;
(3)$P(\xi < -\infty, \eta < +\infty) = F(-\infty, +\infty) = 0$.
31. 若 (ξ, η) 的密度函数为 $p(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$. 求：
(1) 常数 A;
(2) 分布函数 $F(x, y)$;
(3)ξ 的边际密度;
(4)$P(\xi < 2, 0 < \eta < 1)$;
(5)$P(\xi + \eta < 2)$;
(6)$P(\xi = \eta)$.
解　(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-(2x+y)}dxdy = A/2 = 1$, 故 $A = 2$.
(2) 当 $x > 0, y > 0$ 时，　$F(x, y) = \int_0^x\int_0^y Ae^{-(2u+v)}dudv = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y})$; 其它情形，$F(x, y) = 0$. 故分布函数 $F(x, y)$ 为

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) ξ 的边际密度为

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)}dy = 2e^{-2x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(4)

$$P(\xi < 2, 0 < \eta < 1) = F(2, 1) - F(2, 0) = (1 - e^{-2})(1 - e^{-1});$$

(5)

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta < 2) &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} 2e^{-(2x+y)}dy \\ &= \int_0^2 (2e^{-2x} - 2e^{-(2+x)})dx = (1 - e^{-2})^2. \end{aligned}$$

(6)$P(\xi = \eta) = 0$.
32. 设 (ξ, η) 服从矩形区域 $D: \{0 < x < 1, 0 < y < 2\}$ 上的均匀分布.
(1) 写出联合密度;
(2) 求边际密度;

(3) 求联合分布函数;
(4) 求 $P(\xi+\eta<1)$.

解　(1) 联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases}1/2, & 0<x<1, 0<y<2;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$;

(2) 边际密度为

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\int_0^2 1/2dy=1, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\int_0^1 1/2dx=1/2, & 0<y<2;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(3) 求联合分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0, or y<0;\\ xy, & 0\le x<1, 0\le y<2;\\ x, & 0\le x<1, y\ge 2;\\ y, & x\ge 1, 0\le y<2;\\ 1, & x\ge 1, y\ge 2.\end{cases}$$

(4)$P(\xi+\eta<1)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}1/2dy=(x/2-x^2/4)|_0^1=1/4$.

33. 设联合密度 $p(x,y)$ 如 31 题所示，求条件密度 $p_{\eta|\xi}(y|x)$.

解　给定 $x>0$, $p_{\eta|\xi}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

34. 对二元正态密度

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(2x^2+y^2+2xy-22x-14y+65)\}.$$

(1) 把它化为标准形式，并指出 $a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r$ 各为何值;
(2) 求出边际密度 $p_\xi(x)$; (3) 求条件密度 $p_{\eta|\xi}(y|x)$.

解　先算 (2)　边际密度为

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[y+(x-7)]^2}dy\cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{2}}, -\infty<x<+\infty;$$

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[x+\frac{y-1}{2}]^2}dx\cdot e^{-\frac{(y-3)^2}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(y-3)^2}{4}}, -\infty<y<+\infty.$$

(1) 标准形式为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}$$
$$\exp\{-\frac{1}{2(1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2)}[\frac{(x-4)^2}{1}-2(-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{x-4}{1})(\frac{y-3}{\sqrt{2}})+\frac{(y-3)^2}{2}]\}.$$

故 $a=4,b=3,\sigma_1^2=1,\sigma_2^2=2,r=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(3) 条件密度 $p_{\eta|\xi}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(x+y-7)^2}{2}\}$.
35. 下列 (ξ,η) 的联合分布列中， a,b 各取什么值才能使 ξ,η 独立？

$\xi\backslash\eta$	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	a	b

$\xi\backslash\eta$	0	1	2
0	3/10	a	1/5
1	b	1/10	1/5

解　(1) 由性质 $\sum_{i,j}p_{ij}=1$, 得 $a+b=1$.
由独立性知， $P(\xi=1,\eta=2)=P(\xi=1)P(\eta=2)$, 即 $1/9=1/3\times(1/9+a)$.
故 $a=2/9,b=1/9$. 易验证，当 $a=2/9,b=1/9$ 时 ξ,η 相互独立.
(2) 由性质 $\sum_{i,j}p_{ij}=1$, 得 $a+b=1/5$.
由独立性知， $P(\xi=1,\eta=2)=P(\xi=1)P(\eta=2)$, 即 $1/5=(b+1/10+1/5)\times(1/5+1/5)$.
故 $a=0,b=1/5$. 此时，由于 $P(\xi=0,\eta=1)\neq P(\xi=0)P(\eta=1)$. 故 ξ,η 不相互独立.
36. 设随机变量 ξ 与 η 相互独立，且 $P(\xi=1)=P(\eta=1)=p>0$, 又 $P(\xi=0)=P(\eta=0)=1-p>0$, 定义：
$\zeta=1(\xi+\eta$ 为偶数时); $\zeta=0(\xi+\eta$ 为奇数时).
问 p 取什么值能使 ξ,ζ 独立？
解　由题意易得，

$$P(\xi=0,\zeta=0)=P(\xi=0,\eta=1)=p(1-p),$$
$$P(\xi=0,\zeta=1)=P(\xi=0,\eta=0)=(1-p)^2,$$
$$P(\xi=1,\zeta=0)=P(\xi=1,\eta=0)=p(1-p),$$
$$P(\xi=1,\zeta=1)=P(\xi=1,\eta=1)=p^2.$$

故

$\xi\backslash\zeta$	0	1
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	p^2

可得 ζ 的分布列为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2p(1-p) & 2p^2-2p+1 \end{pmatrix}$ 故要使 ξ,ζ 独立，需满足

$$\begin{cases} P(\xi=0,\zeta=0)=P(\xi=0)P\zeta=0) \\ P(\xi=0,\zeta=1)=P(\xi=0)P\zeta=1) \\ P(\xi=1,\zeta=0)=P(\xi=1)P\zeta=0) \\ P(\xi=1,\zeta=1)=P(\xi=1)P\zeta=1) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (1-p)^2=(1-p)\cdot(2p^2-2p+1) \\ p(1-p)=(1-p)\cdot 2p(1-p) \\ p^2=p\cdot(2p^2-2p+1) \\ p(1-p)=p\cdot 2p(1-p) \end{cases}$$

解得 $p=1/2$. 故易验证当 $p=1/2$ 时， ξ,ζ 相互独立.

37. 判断 31 题中是否相互独立.

解　由于 η 的边际密度为

$$p_\eta(y)=\begin{cases} \int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)}dx=2e^{-y}, & y\geq 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$, 因而 (ξ,η) 相互独立.

38. 设 (ξ,η) 服从圆 $x^2+y^2\leq r^2$ 上的均匀分布;

(1) 求 ξ,η 各自的密度； (2) 判断 ξ 与 η 是否相互独立.

解　显然， $p(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\leq r^2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(1) 故 ξ,η 的边际密度为

$$p_\xi(x)=\begin{cases} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\geq r; \\ 0, & |x|\geq r. \end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y|\geq r; \\ 0, & |x|\geq r. \end{cases}$$

(2) 易知 $p(x,y) \neq p_\xi(x)p_\eta(y)$, 故 ξ 与 η 不相互独立.

39. 设 ξ,η 的密度函数为 $p(x,y)$, 求证 ξ 与 η 相互独立的充分必要条件为 $p(x,y)$ 可分离变量，即 $p(x,y)=g(x)h(y)$. 此时 $g(x),h(y)$ 与边际密度有何关系？

证　若 ξ 与 η 相互独立，则对任意的 x,y, $F(x,y)=F_\xi(x)F_\eta(y)$, 即有

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}p_\xi(u)du\int_{-\infty}^{y}p_\eta(v)dv=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p_\xi(u)p_\eta(v)dudv.$$

故 $p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$, 因而为 $p(x,y)$ 可分离变量.

下证充分性：若 $p(x,y)$ 为可分离变量，即 $p(x,y)=g(x)h(y)$. 故

故 ξ,η 的边际密度分别为

$$p_\xi(x)=g(x)\int_{-\infty}^{+\infty}h(y)dy,-\infty<x<+\infty;$$

$$p_\eta(y)=h(y)\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx,-\infty<y<+\infty.$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}h(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$, 因而 $p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$, 故 ξ 与 η 相互独立，且此时 $g(x),h(y)$ 与边际密度相差一个常数.

40. 利用上题的充分必要条件判断 ξ 与 η 的独立性，若它们的密度函数分别为：

(1) 当 $0\le x\le 1,0\le y\le 1$ 时 $p(x,y)=4xy$, 其他情况 $p(x,y)=0$;

(2) 当 $0\le x\le y\le 1$ 时 $p(x,y)=8xy$, 其他情况 $p(x,y)=0$.

解 (1) 取

$$g(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad h(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然， $p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$, 根据上题知 ξ 与 η 的独立.

(2) 边际密度分别为

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\int_x^1 8xydy=4x(1-x^2), & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad p_\eta(y)=\begin{cases}\int_0^y 8xydy=4y^3, & 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因而 $p(x,y)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)$, 故 ξ 与 η 不相互独立.

41. 设 (ξ,η,ζ) 的联合密度为

$$p(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1-\sin x\sin y\sin z}{8\pi^3}, & 0\le x\le\pi,0\le y\le\pi,0\le z\le\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求证： (ξ,η,ζ) 两两独立，但不相互独立.

证　由于

$$p_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\int_0^\pi\frac{1-\sin x\sin y\sin z}{8\pi^3}dz=\frac{1}{4\pi^2}, & 0\le x\le\pi,0\le y\le\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{1-\sin x\sin y\sin z}{8\pi^3}dydz=\frac{1}{2\pi}, & 0\le x\le\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理

$$p_{\xi,\eta}(y,z)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi^2}, 0\le y\le\pi, & 0\le z\le\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$p_{\xi,\zeta}(x,z)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi^2}, & 0\le x\le\pi, 0\le z\le\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le y\le\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$p_\zeta(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le z\le\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故

$$p_{\xi,\eta}(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y), p_{\xi,\zeta}(x,z)=p_\xi(x)p_\eta(z),$$
$$p_{\eta,\zeta}(y,z)=p_\eta(y)p_\zeta(z), p(x,y,z)\ne p_\xi(x)p_\eta(y)p_\eta(z).$$

因而 (ξ,η,ζ) 两两独立，但不相互独立.

42. ξ 的分布列为 $\begin{pmatrix}0 & \pi/2 & \pi\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$, 求 (1)$\eta=2\xi+\pi/2$ 与 (2)$\zeta=\sin\xi$ 的分布.

解　(1) $\eta=a+b\xi$ 的分布列为

$$\begin{pmatrix}\pi/2 & 3\pi/2 & 5\pi/2\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$$

(2)$\zeta=\xi^2$ 的分布列为

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

43. 设 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布，求 (1)$\eta=a+b\xi$ 与 (2)$\zeta=\xi^2$ 的分布.

解　(1)$\eta=a+b\xi$ 的分布列为

$$P(\eta=a+bk)=P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots.$$

(2)$\zeta=\xi^2$ 的分布列为

$$P(\eta=k^2)=P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\ldots.$$

44. 四张小纸片分别写有数字 0, 1, 1, 2. 有放回地取两次，每次取一张，以 ξ,η 分别记两次取得的数字，求 ξ,η 各自的分布以及 $\zeta=\xi\eta$ 的分布.

解　由于是有放回地取，故 ξ,η 独立同分布，分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\zeta=\xi\eta$ 的分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 7/16 & 1/4 & 1/4 & 1/16 \end{pmatrix}$$

45. 设 ξ,η 是独立随机变量，分别服从参数为 λ_1 及 λ_2 的泊松分布，试直接证明：

(1) $\xi+\eta$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布；

(2) $P(\xi=k|\xi+\eta=n)=C_n^k(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k},k=0,1,\ldots,n.$

证　(1) 由独立性,

$$P(\xi+\eta=k)=\sum_{i=0}^{k}P(\xi=i,\eta=k=i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\cdot\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},k=0,1,\ldots$$

即 $\xi+\eta$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布；

(2)

$$P(\xi=k|\xi+\eta=n)=\frac{P(\xi=k,\xi+\eta=n)}{P(\xi+\eta=n)}$$
$$=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$$
$$=C_n^k(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k},k=0,1,\ldots,n.$$

46. 设 ξ,η 相互独立，都以 1/2 的概率取值 +1 和 −1, 令 $\zeta=\xi\eta$, 求证：　ξ,η,ζ 两两独立，但不相互独立.

证

$$P(\zeta=-1)=P(\xi=1,\eta=-1)+P(\xi=-1,\eta=1)=1/2,$$

$$P(\zeta=1)=P(\xi=1,\eta=1)+P(\xi=-1,\eta=-1)=1/2,$$

ξ,η 的联合分布列为

$\xi\backslash\zeta$	-1	1	$p_{i\cdot}$
-1	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$p_{\cdot j}$	1/2	1/2	

故 ξ,ζ 相互独立. 同理 η,ζ 相互独立.
由于

$$1/4=P(\xi=1,\eta=1,\zeta=1)\neq P(\xi=1)P(\eta=1)P(\zeta=1)=1/8,$$

故 ξ,η,ζ 不相互独立.
47. 设 ξ 的密度函数为 $p(x)$, 求下列随机变量的分布密度：
(1)$\eta=1/\xi$, 这里 $P(\xi=0)=0$; (2)$\eta=|\xi|$;(3)$\eta=\tan\xi$.
解 (1) 由于 $P(\xi=0)=0$, 故

$$F_\eta(x)=P(1/\xi\le x)=\begin{cases}\int_{1/x}^{0}p(u)du, & x<0;\\ \int_{-\infty}^{0}p(u)du+\int_{1/x}^{+\infty}p(u)du, & x\ge 0.\end{cases}$$

故 η 的密度函数为 $p_\eta(x)=\frac{1}{x^2}p(\frac{1}{x}),x\neq 0$.
(2)

$$F_\eta(x)=P(|\xi|\le x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \int_{-x}^{x}p(u)du, & x\ge 0.\end{cases}$$

故 η 的密度函数为 $p_\eta(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ p(x)+p(-x), & x\ge 0.\end{cases}$
(3)

$$F_\eta(x)=P(\xi\le\arctan x)=\int_{-\infty}^{\arctan x}p(u)du.$$

故 η 的密度函数为 $p_\eta(x)=\frac{p(\arctan x)}{1+x^2},-\infty<x<+\infty$.
48. 对圆的直径 D 作近似测量，设其值在 $[a,b]$ 上的均匀分布，求圆面积 S 的密度函数.
解 $S=\pi D^2/4$, 其中 $D\sim U[a,b]$.
由于 $y=\pi x^2/4,a\le x\le b$ 的反函数为 $x=2\sqrt{y/\pi},\pi a^2/4\le y\le\pi b^2/4$.
故圆面积 S 的密度函数为

$$p_S(y)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi y}}=\frac{1}{(b-a)\sqrt{\pi y}},\pi a^2/4\le y\le\pi b^2/4.$$

49. 设 $\xi \sim N(a,\sigma^2)$, 求 e^ξ 的密度函数.
解　$y=e^x$ 的反函数为 $x=\ln y, y>0$.
故 e^ξ 的密度函数为

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma}\exp\{-\frac{(\ln y-a)}{2\sigma^2}\}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

50. 若 θ 服从 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上的均匀分布， $\psi=\tan\theta$ 求 ψ 的密度.
解　$y=\tan x, -\pi/2\le x\le \pi/2$ 的反函数为 $x=\arctan y$.
故 ψ 的密度函数为

$$p_\psi(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

51. 设 ξ,η 相互独立，且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求 $\zeta=\xi+\eta$ 的密度函数.
解 $p_\xi(x)=1, 0\le x\le 1; p_\eta(y)=1, 0\le y\le 1$. 由卷积公式,

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x)p_\eta(z-x)dx.$$

因而当且仅当 $p_\xi(x)p_\eta(z-x)\neq 0$ 时 $p_\zeta(z)\neq 0$. 由 $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$

故 $\zeta=\xi+\eta$ 的密度函数为

$$p_\zeta(z)=\begin{cases}\int_0^z dx=z, & 0\le z<1;\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z, & 1\le z<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

52. 设 ξ,η 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，求 $\zeta=\xi/\eta$ 的分布密度.
解　由商的密度函数公式

$$\begin{aligned}&p_\zeta(z)=\int_0^{+\infty}yp_\xi(yz)p_\eta(y)dy-\int_{-\infty}^0 yp_\xi(yz)p_\eta(y)dy\\ &=\int_0^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2z^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy-\int_{-\infty}^0 y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2z^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\\ &=\frac{1}{2\pi(1+z^2)}\cdot(-e^{-\frac{(1+z^2)y^2}{2}}\ |_0^{+\infty}+\frac{1}{2\pi(1+z^2)}\cdot(-e^{-\frac{(1+z^2)y^2}{2}}\ |_{-\infty}^0=\frac{1}{\pi(1+z^2)}.\end{aligned}$$

53. 设 $\xi_1,\dots,\xi_n$ 相互独立,且都服从指数分布,参数分别为 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, 求 $\eta=\min(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 的密度函数.

解

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= 1-\Pi_{k=1}^n P(\xi_k>x) = 1-(1-F_{\xi_1}(x))^n \\ &= \begin{cases} 0, & x<0; \\ 1-e^{-n\lambda x}, & x\ge 0. \end{cases} \end{aligned}$$

故 η 的密度函数为 $p_\eta(x)=n\lambda e^{-n\lambda x}, x\ge 0.$

54. 设系统 L 由两个子系统 L_1 和 L_2 联接而成，L_1 与 L_2 的寿命 X,Y 分别服从参数为 a 与 $b(a\ne b)$ 的指数分布. 试分别就下列三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的密度：(1)L_1 与 L_2 串联；(2)L_1 与 L_2 并联；(3)L_1 为 L_2 的备用.

解 (1) 这时 $Z=\min(X,Y)$,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= 1-P(X>z)P(Y>z) = 1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z)) \\ &= \begin{cases} 0, & z<0; \\ 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z\ge 0. \end{cases} \end{aligned}$$

故 Z 的密度函数为 $p_Z(z)=(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, z\ge 0.$

(2) 这时 $Z=\max(X,Y)$,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(X\le z)P(Y\le z) = F_X(z)F_Y(z) \\ &= \begin{cases} 0, & z<0; \\ (1-e^{-\lambda_1 z})(1-e^{-\lambda_2 z}), & z\ge 0. \end{cases} \end{aligned}$$

故 Z 的密度函数为 $p_Z(z)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 z}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}+(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, z\ge 0.$

(3) 这时 $Z=\max(X,Y)$, 由卷积公式,

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx.$$

因而当且仅当 $p_X(x)p_Y(z-x)\ne 0$ 时 $p_Z(z)\ne 0$. 由 $\begin{cases} x>0 \\ z-x>0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x>0 \\ x<z \end{cases}$

故 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$p_\zeta(z)=\begin{cases} \int_0^z e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2(z-x)}dx=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-\lambda_2 z}-e^{-\lambda_1 z}), & z\ge 0; \\ 0, & z<0. \end{cases}$$

55. 某种商品一周的需要量是一个随机变量，密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

各周的需要量是相互独立的，求两周需要量的密度.

解　设这两周需要量分别为 ξ, η. 则 ξ, η 相互独立，且密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

由卷积公式，两周需要量 $\zeta = \xi + \eta$ 的密度函数为

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)p(z-x)dx.$$

因而当且仅当 $p(x)p(z-x) \neq 0$ 时 $p_\zeta(z) \neq 0$. 由 $\begin{cases} x \leq 0 \\ z - x \geq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq z \end{cases}$

故 ζ 的密度函数为

$$p_\zeta(z) = \begin{cases} \int_0^z xe^{-x} \cdot (z-x)e^{-(z-x)}dx = z^3e^{-z}/6, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

56. 设 ξ, η 相互独立，分别服从参数为 λ 与 μ 的指数分布，求 $\xi - \eta$ 密度函数.

解　记 $\zeta = \xi - \eta$. 故当 $z < 0$ 时，

$$F(z) = P(\xi - \eta \leq z) = \int_0^{+\infty} dx \int_{x-z}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy$$
$$= \lambda e^{\mu z} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)x} dx = \frac{\lambda e^{\mu z}}{\lambda + \mu};$$

当 $z \geq 0$ 时，

$$F(z) = P(\xi - \eta \leq z) = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{y+z} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dx$$
$$= \int_0^{+\infty} (\mu e^{-\mu y} - \mu e^{-\lambda z} e^{-(\lambda+\mu)y}) dy = 1 - \frac{\mu e^{-\lambda z}}{\lambda + \mu}.$$

故 ζ 的密度函数为

$$p_\zeta(z) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu z}, z < 0, \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda z}, z \geq 0. \end{cases}$$

57. 在线段 $(0,a)$ 上随机投掷两点，求两点间距离的密度函数.

解　记 ξ,η 分别表示所投两点的坐标，显然 (ξ,η) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}1/a^2, & 0<x,y<a;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

两点间距离为 $\zeta=|\xi-\eta|$. 利用几何概率公式，则其分布函数为

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$; 当 $z\ge a$ 时，$F(z)=1$;

当 $0\le z<a$ 时，$F(z)=1-\frac{(a-z)^2}{a^2}$.

故 ζ 的密度函数为 $p_\zeta(z)=\frac{2(a-z)}{a^2}, 0<z<a$.

58. 设火炮射击时弹着点坐标 (ξ,η) 服从二维正态分布 $N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$, 求距离 $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 的分布密度.

解　当 $z<0$ 时，$F(z)=0$; 当 $z\ge 0$ 时，

$$F(z)=P(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\le z)=\int\int_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

故 ρ 的密度函数为 $p(z)=\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z\le 0$.

59. 若气体分子的速度是随机向量 $V=(X,Y,Z)$, 各分量相互独立，都服从 $N(0,\sigma^2)$, 求证 $S=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ 服从马克斯威尔 (Maxwell) 分布，其密度为

$$p(s)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s^2}{\sigma^2}\exp(-\frac{s^2}{2\sigma^2}), & s\ge 0;\\ 0, & s<0.\end{cases}$$

证　　当 $s<0$ 时，$F(s)=0$; 当 $s\ge 0$ 时，

$$F(s)=P(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\le s)=\int\int_{x^2+y^2+z^2\le s^2}\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}}dxdydz$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^s\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\int_0^s r^2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr.$$

故其密度为

$$p(s)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s^2}{\sigma^2}\exp(-\frac{s^2}{2\sigma^2}), s\ge 0,\\ 0, s<0.\end{cases}$$

60. 设 ξ,η 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，问 $\xi+\eta$ 与 $\xi/(\xi+\eta)$ 是否相互独立？

解　记 $\begin{cases}U=\xi+\eta\\ V=\xi/(\xi+\eta)\end{cases}$. 由于 $\begin{cases}u=x+y\\ v=x/(x+y)\end{cases}$ $(x>0,y>0)$ 的反函数组为 $\begin{cases}x=uv\\ y=u(1+v)\end{cases}$

$(u>0,0<v<1)$.

故 (U,V) 的联合密度为

$$p_{UV}(u,v)=e^{-uv}\cdot e^{-u(1-v)}\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=ue^{-u},u>0,0<v<1,$$

因而 U 与 V 相互独立.

61. 设 (ξ,η) 的联合密度为

$$p(x)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 (ξ^2,η^2) 的联合密度.

解　记 $\begin{cases}U=\xi^2\\ V=\eta^2\end{cases}$. 由 $\begin{cases}u=x^2\\ v=y^2\end{cases}$ $(0<x<1,0<y<1)$ 的反函数组为

$$\begin{cases}x=\sqrt{u}\\ y=\sqrt{v}\end{cases}\quad(0<u<1,0<v<1)$$

. 因而

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{u}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{4\sqrt{uv}}.$$

故 (U,V) 的联合密度为

$$p_{UV}(u,v)=4\sqrt{u}\cdot\sqrt{v}\cdot\cdot|J|=1,0<u<1,0<v<1.$$

62. 设 ξ,η 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，求 $\xi+\eta$ 与 $\xi-\eta$ 的联合分布密度与边际分布密度.

解　由 $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$ $(x>0,y>0)$ 的反函数组为

$$\begin{cases}x=(u+v)/2\\ y=(u-v)/2\end{cases}\quad(u>0,-u<v<u)$$

.

因而

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=-1/2.$$

故 (U,V) 的联合分布密度与边际分布密度为

$$p_{UV}(u,v)=e^{-\frac{u+v}{2}}\cdot e^{-\frac{u-v}{2}}\cdot\cdot|J|=e^{-u}/2,u>0,-u<v<u.$$

$$p_U(u)=\int_{-u}^{u}e^{-u}/2dv=ue^{-u},u\geq 0.$$

$$p_V(v)=\int_{|v|}^{+\infty}e^{-u}/2du=e^{-|v|}/2,-\infty<v<+\infty.$$

63. 设 (ξ,η) 服从二元正态分布 $N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$, 求 $\xi+\eta$ 与 $\xi-\eta$ 相互独立的充分必要条件.

解　由于 (ξ,η) 服从二元正态分布，则 $(\xi+\eta,\xi-\eta)$ 也服从二维正态分布，因而相互独立的充分必要条件为 $Cov(\xi+\eta,\xi-\eta)=0$. 而

$$Cov(\xi+\eta,\xi-\eta)=E(\xi^2-\eta^2)=\sigma_1^2-\sigma_2^2.$$

故 $\xi+\eta$ 与 $\xi-\eta$ 相互独立的充分必要条件 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

64. 在随机向量变换中，如果 (13) 式的条件中的反函数组不是唯一的，怎样利用 (13) 式求出变换后的随机向量的密度？

解　不妨设该变换 $y_k=f_k(x1,\ldots,x_n),k=1,2,\ldots,n$ 可以分为 N 个反函数组, 其值域分别记为 $D_i,i=1,\ldots,N$. 对每个 $1\leq i\leq N,x_{ik}=x_{ik}(y_1,\ldots,y_n),k=1,2,\ldots,n;(y_1,\ldots,y_n)\in D_i$, 且 $J_i=\frac{\partial(x_{i1},\ldots,x_{in})}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\neq 0$. 则 $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ 是连续型随机向量. 当 $(y_1,\ldots,y_n)\in(f_1,\ldots,f_n)$ 的值域时，其密度为

$$q(y_1,\ldots,y_n)=\sum_{i:(y_1,\ldots,y_n)\in D_i}p[x_{i1}(y_1,\ldots,y_n),\ldots,x_{in}(y_1,\ldots,y_n)]\cdot|J_i|;$$

其它情形 $q(y_1,\ldots,y_n)=0$.

65. 设 (ξ,η) 的联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases}(1+xy)/4, & |x|<1,|y|<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求证：　ξ,η 不相互独立，但 ξ^2,η^2 相互独立.

证

$$p_\xi(x)=\int_{-1}^{1}(1+xy)/4dy=1/2.|x|<1$$

$$p_\eta(y)=\int_{-1}^{1}(1+xy)/4dx=1/2.|y|<1$$

故 $p(x,y)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)$, 因而 ξ,η 不相互独立. 由于 $\begin{cases}u=x^2\\ v=y^2\end{cases}$ $(|x|<1,|y|<1)$ 有下列四个反函数组. 即 $\begin{cases}x=\pm\sqrt{u}\\ y=\pm\sqrt{v}\end{cases}$ $(0<u<1,0<v<1)$. 故由 64 题知， ξ^2,η^2 的联合密

度为

$$p_{UV}(u,v)=[(1+\sqrt{uv})/4+(1+\sqrt{uv})/4+(1-\sqrt{uv})/4+(1-\sqrt{uv})/4]\cdot\frac{1}{4\sqrt{uv}}$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{uv}},0<u<1,0<v<1.$$

因而其边际密度为

$$p_U(u)=\int_0^1\frac{1}{4\sqrt{uv}}dv=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{u}},0<u<1.$$

$$p_V(v)=\int_0^1\frac{1}{4\sqrt{uv}}du=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{v}},0<v<1.$$

故 $p_{UV}(u,v)=p_U(u)p_V(v)$, 因而 U,V 相互独立.

66. 设 ξ,η 的联合密度为 $p(x,y)$. $U=\xi,V=\xi+\eta$, 求 (U,V) 的联合密度，再求边际密度，与 §5(7) 式相对照.

解　由 $\begin{cases} u=x \\ v=x+y \end{cases}$ 的反函数组为 $\begin{cases} x=u \\ y=v-u \end{cases}$

因而 $J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1$. 故 (U,V) 的联合分布密度与关于 V 边际分布密度为

$$p_{UV}(u,v)=p(u,v-u),p_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v-u)du.$$

67. 设 ξ,η 的联合密度为 $p(x,y)$. $U=\xi,V=\xi+\eta$, 求 (U,V) 的联合密度，再求边际密度，与 §5(8) 式相对照.

解　由 $\begin{cases} u=x \\ v=x/y \end{cases}$ 的反函数组为 $\begin{cases} x=u \\ y=u/v \end{cases}$

因而

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{vmatrix}=-u/v^2.$$

故 (U,V) 的联合分布密度与关于 V 的边际分布密度为

$$p_{UV}(u,v)=p(u,u/v)\cdot[(-u/v^2)I(u<0)+u/v^2I(u>0)].$$

$$p_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)du$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,u/v)\cdot\cdot[(-u/v^2)I(u<0)+u/v^2I(u>0)]du=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p(yv,y)dy.$$

68. 设 (ξ,η,ζ) 有联合密度为. $p(x,y,z)=\begin{cases}6(1+x+y+z)^{-4}, & x>0,y>0,z>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求 $U=\xi+\eta+\zeta$ 的密度.

解 记 $U=\xi+\eta+\zeta, V=\eta, W=\zeta$. 由于 $\begin{cases}u=x+y+z\\ v=y\\ w=z\end{cases}$ $(x>0,y>0,z>0)$ 的反函数组为 $\begin{cases}x=u-v-w\\ y=v\\ z=w\end{cases}$ $(v>0,w>0,v+w<u)$. 易得, $J=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=1$. 故 (U,V) 的联合分布密度为

$$P_{UVW}(u,v,w)=6(1=u)^{-4},\quad (v>0,w>0,v+w<u).$$

因而关于 U 的边际分布密度为

$$p_U(u)=\int\int_{v>0,w>0,v+w<u}6(1+u)^{-4}dvdw=\frac{3u^2}{(1+u)^4},u>0.$$

第三章数字特征与特征函数

1. 设随机变量 ξ 有下列分布，求

(1)$P(\xi=k)=1/5, k=1,2,3,4,5$;(2)$P(\xi=k)=a^k/(1+a)^{k+1}, a>0$ 为常数 $k=0,1,2,\ldots$.

解　(1) $E\xi=(1+2+3+4+5)/5=3$;

(2) 由于当 $|x|<1$ 时，$\Sigma_{k=0}^{\infty}kx^k=\frac{x}{1-x}$. 故

$$E\xi=\Sigma_{k=0}^{\infty}k\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}=a.$$

2. 袋中有 k 号球 k 只，$k=1,2,\ldots,n$. 从中摸出一球，求所得号码的数学期望.

解　记 ξ 为所得号码. 则 $P(\xi=k)=\frac{2k}{n(n+1)}$. 故

$$E\xi=\frac{2(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{n(n+1)}=(2n+1)/3.$$

3. 某人有 n 把钥匙，只有一把能打开家门. 当他随意使用这 n 把钥匙时，求打开家门时已被使用过的钥匙数的数学期望. 假设：

(1) 每次使用过的钥匙不再放回;

(2) 每次使用过的钥匙与其它钥匙混在一起.

解　记 ξ 为打开家门时已被使用过的钥匙数. 则

(1)$P(\xi=k)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+2}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}, 1\le k\le n$. 故

$$E\xi=(1+2+\ldots+n)/n=(n+1)/2.$$

(2) 这是一几何分布，故 $P(\xi=k)=(\frac{n-1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}, k=1,2,\ldots$. $E\xi=\frac{1}{1/n}=n$.

4. 设为 ξ 非负整数值的随机变量，数学期望存在. 求证 $E\xi=\Sigma_{k=1}^{\infty}P(\xi\ge k)$.

证

$$\begin{aligned}E\xi&=\Sigma_{n=0}^{+\infty}n\cdot P(\xi=n)=\Sigma_{n=1}^{+\infty}\Sigma_{k=1}^{n}P(\xi=n)\\&=\Sigma_{k=1}^{n}\Sigma_{n=1}^{+\infty}P(\xi=n)=\Sigma_{k=1}^{n}P(\xi\ge n).\end{aligned}$$

5. 某城市共有 N 辆车，车牌号从 1 到 N. 若随机地记下 r 辆车的车牌号，其最大号码为 ξ , 求 $E\xi$.

解　ξ 可取 $r,r+1,\ldots,N$, $P(\xi<k)=\frac{C_{k-1}^r}{C_N^r}, k=r+1,\ldots,N$, 由第 4 题，

$$\begin{aligned}E\xi&=\Sigma_{k=r}^{N}P(\xi\ge k)=\Sigma_{k=r+1}^{N}(1-P(\xi<k))\\&=(N-r+1)-\Sigma_{k=r+1}^{N}\frac{C_{k-1}^r}{C_N^r}=(n-r+1)-\frac{C_N^{N-r-1}}{C_N^r}=N-r+1-\frac{N-r}{r+1}.\end{aligned}$$

6. 设随机变量 ξ 分别具有下列密度，求 $E\xi$.

$$(1)p(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^2 x, & -\pi/2\le x\le \pi/2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$(2)p(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1;\\ 2-x, & 1\le x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$(3)p(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-|x-\mu|/\lambda}, -\infty<x<\infty, \lambda,\mu$ 为常数.

解 (1) 由积分性质 $E\xi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=0$;

$(2)E\xi=\int_0^1 x\cdot xdx+\int_1^2 x\cdot(2-x)dx=x^3/3|_0^1+(x^2-x^3/3)|_1^2=1$;

(3) $E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-|x-\mu|/\lambda}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(u+t)\frac{1}{2\lambda}e^{-|t|/\lambda}dt=\mu$.

7. 设 ξ 服从 $[-1/2,1/2]$ 上的均匀分布，求 $\eta=\sin\xi$ 的数学期望.

解 $E\eta=E\sin\xi=\int_{-1/2}^{1/2}\sin xdx=0$.

8. 设分子的速度的分布密度有马克斯韦尔分布律给出：

$$p(x)=\begin{cases}\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分子的质量为 m，求分子的平均速度和平均动能. 解记 ξ 为分子的平均速度. 分子的平均速度和平均动能为

$$E\xi=\int_0^\infty x\cdot\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx=-e^{-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{2x^2}{a\sqrt{\pi}}|_0^\infty+\frac{4}{a\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x\cdot -e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx$$
$$=\frac{4}{a\sqrt{\pi}}\cdot(-\frac{a^2}{2})e^{-\frac{x^2}{a^2}}|_0^\infty=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}.$$

$$Em\xi^2/2=\frac{1}{2}m\int_0^\infty x^2\cdot\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx=\frac{1}{2}m(-e^{-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{2x^3}{a\sqrt{\pi}}|_0^\infty+\frac{6}{a\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^2\cdot -e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx)$$
$$=\frac{3m}{a\sqrt{\pi}}(-\frac{a^2x}{2}e^{-\frac{x^2}{a^2}}|_0^\infty+\frac{a^2}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx)=3ma^2/4.$$

9. 设 ξ_1,ξ_2 相互独立，均服从 $N(a,\sigma^2)$, 求证： $E\max(\xi_1,\xi_2)=a+\sigma/\sqrt{\pi}$.

证 易知 $\max(\xi_1,\xi_2)=|\xi_1-\xi_2|/2+(\xi_1+\xi_2)/2$.

由于 ξ_1,ξ_2 相互独立，均服从 $N(a,\sigma^2)$. 故 $E(\xi_1+\xi_2)/2$=a, $\xi_1-\xi_2\sim N(0,2\sigma^2)$, 因而

$$E|\xi_1-\xi_2|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{x^2}{4a^2}}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{4a^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\cdot 2\sigma^2)|_0^\infty=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

故 $E\max(\xi_1,\xi_2)=a+\sigma/\sqrt{\pi}$.

10. 设事件 A 在第 i 次试验中出现的概率为 p_i, μ 是在 n 次独立试验中 A 出现的次数,

求 $E\mu$.

解　记 $X_i = \begin{cases} 0, & \text{第 i 次试验时 A 不出现;} \\ 1, & \text{第 i 次试验时 A 出现.} \end{cases}$ $i = 1, 2, \ldots, n$. 则由题意 $\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i$，且 $EX_i = p_i$，由期望性质 $E\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

11. 袋中有 n 张卡片，号码记为 $1, 2, \ldots, n$, 从中有放回地抽出 k 张卡片，求所得号码之和 μ 的数学期望.

解　记 X_i 为第 i 抽出卡片号码，$i = 1, 2, \ldots, n$. 易知 $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ 独立同分布，且 $\mu = \sum_{i=1}^{k} X_i$. 由于 $P(X_i = j) = 1/n, j = 1, \ldots, n$，故 $EX_i = \sum_{i=1}^{n} i/n = (n+1)/2$. 由期望性质 $E\mu = \sum_{i=1}^{k} EX_i = (n+1)/2$.

12. 流水作业线上生产的每个产品为不合格的概率是 p, 当生产出 k 个不合格品时即检修一次．求两次检修其间产品总数的数学期望.

解　记 X_i 为两次检修其间第 i-1 个不合格品与第 i 个不合格品间的产品数，$i = 1, 2, \ldots, k$. 则两次检修其间产品总数 $\eta =_{i=1}^{k} \xi_i$. 显然 $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, k$ 独立同分布且服从几何分布．故 $E\xi_i = 1/p$, $E\eta = \sum_{i=1}^{k} E\xi_i = k/p$.

13. 在长为的线段 a 上任取两点 M_1 与 M_2, 求线段长度 M_1M_2 的数学期望.

解　记 ξ, η 分别为距左端的距离．则线段长度 M_1M_2 为 $\zeta = |\xi - \eta|$. 显然 (ξ, η) 的联合密度为 $p(x, y) = 1, < x < 1, 0 < y < 1$. 故

$$\begin{aligned} E|\xi - \eta| &= \int_0^1 \int_0^1 |x - y| dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^x (x - y) dy \\ &= 2 \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + 2 \int_0^1 (\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} x^2 dx = 1/3. \end{aligned}$$

14. 口袋中有 N 个球，其中白球数是随机变量，只知其数学期望为 a, 试求从该袋中任摸一球得到是白球的概率.

解　记 ξ 为白球数．由题意 $E\xi = a$, 即 $\sum_{k=1}^{N} kP(\xi = k) = a$. 记 A=" 从该袋中任摸一球得到是白球 ". 则

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N} P(A|\xi = k) \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} \cdot P(\xi = k) = \frac{a}{N}.$$

15. $(\xi, \eta) \sim N(0, 0, 1, 1, r)$, 求证 $E \max(\xi, \eta) = \sqrt{(1 - r)/\pi}$.

证　$\max(\xi, \eta) = \frac{|\xi - \eta| + \xi + \eta}{2}$. 显然，$E\xi = E\eta = 0, \xi - \eta \sim N(0, 2(1 - r))$. 故

$$\begin{aligned} E|\xi - \eta| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi(1 - r)}} e^{-\frac{x^2}{4(1-r)}} dx \\ &= \left(\frac{1 - r}{\sqrt{\pi(1 - r)}} e^{-\frac{x^2}{4(1-r)}} \right) |_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{1 - r}{\pi}}. \end{aligned}$$

16. 求第 1 题中各随机变量的方差.

解 (1) $E\xi^2 = (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)/5 = 11$, $E\xi = 3$. 故 $Var\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 2$.
(2) 由于 $|x|<1$ 时，$\sum_{k=1}^{2} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. 故

$$E\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} = a(2a+1).$$

则 $Var\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = a(2a+1) - a^2 = a(a+1)$.
17. 求第 2 题的随机变量的方差.
解 $E\xi^2 = (1^2+2^2+\ldots+n^2)/n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$. 故

$$Var\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

18. 求第 3 题中钥匙数的方差.
解 (1) $E\xi^2 = (1^2+2^2+\ldots+n^2)/n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$. 故

$$Var\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

(2) $P(\xi=k) = (\frac{n-1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}, k=1,2,\ldots$ 为几何分布，因而 $Var\xi = (\frac{1}{n})^{-2}\frac{n-1}{n} = n(n-1)$.
19. 求第 6 题中各随机变量的方差.
解 (1)

$$\begin{aligned}E\xi^2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \cdot \frac{2}{\pi}\cos^2 x dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2(1+\cos 2x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin 2x dx \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \frac{x}{2\pi}\cos 2x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2x dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故

$$Var\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.$$

(2)

$$E\xi^2 = \int_0^1 x^2\cdot x dx + \int_1^2 x^2\cdot(2-x)dx = 7/6.$$

故

$$Var\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1/6.$$

(3)

$$\begin{aligned}E\xi^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-|x-\mu|/\lambda}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(t+\mu)^2\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-|t|/\lambda}dt \\ &= \mu^2 + \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{\lambda}e^{-t/\lambda}dt = \mu^2 + (-\frac{t^2 e^{-\lambda/t}}{2}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} te^{-\lambda/t}dt) = \mu^2 + 1/\lambda^2.\end{aligned}$$

故

$$Var\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1/\lambda^2.$$

20. 求第 7 题的方差.

解

$$E\eta = \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2 \pi x dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-\cos 2\pi x}{2} dx = 1/2.$$

故

$$Var\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = 1/2.$$

21. 求第 10 题的 $Var\mu$.

解　显然, $VarX_i = p_i q_i$. 故 $Var\mu = \Sigma_{i=1}^n Var\xi_i = \Sigma_{i=1}^n p_i q_i$.

22. 求第 11 题的 $Var\mu$.

解　显然, $VarX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{n^2-1}{12}$. 故

$$Var\mu = \Sigma_{i=1}^k VarX_i = \frac{k(n^2-1)}{12}.$$

23. 若对随机变量 ξ, 有 $E|\xi|^r < \infty (r > 0)$. 求证对任意 $\epsilon > 0$, 有 $P(|\xi| > \epsilon) \leq E|\xi|^r/\epsilon^r$.

证　记随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$. 则

$$P(|\xi| > \epsilon) \leq \int_{|x|>\epsilon} \frac{|x|^r}{\epsilon^r} dF(x) \leq \int \frac{|x|^r}{\epsilon^r} dF(x) = \frac{E|\xi|^r}{\epsilon^r}.$$

24. 设 $f(x)(x \geq 0)$ 是单调非降函数, 且 $f(x) > 0$. 对随机变量 ξ, 若 $Ef(|\xi|) < +\infty$, 求证: 对任意 $x > 0$, 有 $P(|\xi| \geq x) \leq Ef(|\xi|)^r/f(x)$.

证　记随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$. 对任给 $x > 0$,

$$P(|\xi| > x) \leq \int_{|u|>x} \frac{f(|u|)}{f(x)} dF(u) \leq \int \frac{f(|u|)}{f(x)} dF(u) = \frac{Ef(|\xi|)}{f(x)}.$$

25. 设 ξ 只取值于 $[a, b]$, 求证 $Var\xi \leq (b-a)^2/4$.

解　由于 $a \leq \xi \leq b$, 故 $|\xi - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$. 又由方差性质,

$$Var\xi = E(\xi - E\xi)^2 \leq E(\xi - \frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

26. 设 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 相互独立, $Var\xi_i = \sigma_i^2$, 试找"权" $a_1, \ldots, a_n$(它们满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$), 使 $\sum_{i=1}^n a_i \xi_i$ 的方差最小.

解　由于 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 相互独立, 则 $Var \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$. 引入函数

$$G(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \lambda(\sum_{i=1}^n a_i - 1).$$

求偏导得, $\begin{cases} 2a_i\sigma_i^2 - \lambda_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^n a_i = 1 \end{cases}$

解得 $\lambda = \frac{2}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i^2}, a_k = \frac{1/\sigma_k^2}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i^2}, k = 1, \ldots, n.$

故 "权" 取 $a_k = \frac{1/\sigma_k^2}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i^2}, k = 1, \ldots, n$ 时, $\sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ 的方差最小.

27. 在汽车保险业务中, 汽车损坏索赔金额 B 依赖于损坏程度, 现假设 B 在区间 $0 \leq x < L$ 内为连续型随机变量, 具有密度函数

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < L. \end{cases}$$

而在点 $x = L$ 处有一个跳跃 $e^{-\lambda L}$, 即有 $P(B = L) = e^{-\lambda L}$, 并且最大索赔金额 B 不超过 L. 另外, 汽车损坏的概率为 0.10, 汽车未损坏的概率为 0.90. 按求保险公司理赔量 X 的数学期望和方差.

解记 A= "汽车损坏 ". X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < L; \\ 1, & x \geq L. \end{cases}$$

因而

$$EX = E(X|A) \cdot P(A) + E(X|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0.01 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$
$$= 0.01(\int_0^L x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx + e^{-\lambda L} \cdot L) = \frac{1 - e^{-\lambda L}}{100\lambda}.$$

$$EX^2 = E(X^2|A) \cdot P(A) + E(X^2|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0.01 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$$
$$= 0.01(\int_0^L x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx + e^{-\lambda L} \cdot L^2) = 0.02 \int_0^L x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1 - e^{-\lambda L} - \lambda L e^{-\lambda L}}{50\lambda^2}.$$

故

$$VarX = EX_i^2 - (EX_i)^2 = \frac{3 - 2e^{-\lambda L} - e^{-2\lambda L} - \lambda L e^{-\lambda L}}{10000\lambda^2}.$$

28. 一家财产保险公司承保 160 份建筑火险，相应的最高赔款及保单数如下表所示：

类别 k	最大赔款 L_k	保单数 n_k
1	10	80
2	20	35
3	30	25
4	50	15
5	100	5

假设每一建筑发生火灾的概率都为 0.04, 各建筑物发生火灾的事件相互独立，且第 k 类火险的索赔金额服从 $(0, L_k)$ 上的均匀分布. 记 S 为总赔付额，求 S 的数学期望和方差.

解　记 A=" 建筑发生火灾 ", 第 i 张保单的索赔金额为 $X_i, i = 1, 2, \ldots, 160$. 则 $S = \sum_{i=1}^{160} X_i$. 由全数学期望

$$
\begin{aligned}
ES &= \sum_{i=1}^{160} EX_i = \sum_{i=1}^{160}(E(X_i|A)\cdot P(A) + E(X_i|\overline{A})\cdot P(\overline{A})) \\
&= \sum_{i=1}^{5} n_k \cdot \frac{L_k}{2} p_k = 70000.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
VarS &= \sum_{i=1}^{160} VarX_i = \sum_{i=1}^{160}(E(X_i^2|A)\cdot P(A) - (E(X_i|A)\cdot P(A))^2) \\
&= \sum_{i=1}^{5}(n_k \cdot \frac{L_k^2}{3} p_k - n_k \cdot (\frac{L_k}{2})^2 p_k^2) = 1.7\times 10^9.
\end{aligned}
$$

29. 求下列随机变量的数学期望和方差.
(1)ξ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布；
(2)ξ 服从自由度为 n 的 t 分布；
(3)ξ 服从 $F(m,n)$ 分布.

解　(1) 可记 $\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, 其中 $X_1, \ldots, X_n$ 为独立同分布且服从 $N(0,1)$. 故 $EX_1^2 = 1$,

$$
EX_1^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3.
$$

$DX_1^2 = EX_1^4 - (EX_1^2)^2 = 2$, 故 $E\xi = n, Var\xi = \Sigma_{i=1}^{n} Var\xi_i = 2n$.

(2) $n>1$ 时， $E\xi=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot(1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}dx=0$; $n>2$ 时,

$$\begin{aligned}E\xi^2&=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot(1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}dx\qquad(t=\frac{1}{1+x^2/n})\\&=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot 2\int_0^1 t^{n/2-2}(1-t)^{1/2}dt\\&=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot 2\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\frac{n+1}{2}}=\frac{n}{n-2}.\end{aligned}$$

故 $Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{n}{n-2},\quad n>2.$

(3) 当 $k_2>2$ 时,

$$\begin{aligned}E\xi&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot k_1^{k_1/2}k_2^{k_2/2}\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x^{k_1/2}-1}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}}dx\qquad(t=\frac{k_1x}{k_1x+k_2})\\&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot\frac{k_2}{k_1}\int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-2}dt\\&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot\frac{k_2}{k_1}\frac{\Gamma(\frac{k_1}{2}+1)\Gamma(\frac{k_2}{2}-1)}{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}=\frac{k_2}{k_2-2}.\end{aligned}$$

当 $k_2>4$ 时,

$$\begin{aligned}E\xi^2&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot k_1^{k_1/2}k_2^{k_2/2}\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{x^{k_1/2}-1}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}}dx\qquad(t=\frac{k_1x}{k_1x+k_2})\\&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot(\frac{k_2}{k_1})^2\int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}+1}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-3}dt\\&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot(\frac{k_2}{k_1})^2\frac{\Gamma(\frac{k_1}{2}+2)\Gamma(\frac{k_2}{2}-3)}{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}=\frac{(k_1+2)k_2^2}{k_1(k_2-2)(k_2-4)}.\end{aligned}$$

故 $Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)},\quad k_2>4.$

30. 设二维随机向量 ξ 的分布密度如下，求协方差矩阵.

$$(1)p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$(1)p(x,y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<x<1,0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解 (1)

$$E\xi=\int_0^1\int_0^1 x(2-x-y)dxdy=\int_0^1(\frac{3}{2}x-x^2)dx=\frac{5}{12},$$

$$E\eta=\int_0^1\int_0^1 y(2-x-y)dxdy=\frac{5}{12},$$

$$E\xi^2=\int_0^1\int_0^1 x^2(2-x-y)dxdy=\int_0^1(\frac{3}{2}x^2-x^3)dx=\frac{1}{4},$$
$$E\eta^2=\int_0^1\int_0^1 y^2(2-x-y)dxdy=\frac{1}{4},$$
$$E\xi\eta=\int_0^1\int_0^1 xy(2-x-y)dxdy=\int_0^1(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x^2)dx=\frac{1}{6}.$$

故 $Cov(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=-\frac{1}{144}, D\xi=D\eta=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{11}{144}$, 因而协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} 11/144 & -1/144 \\ -1/144 & 11/144 \end{pmatrix}$$

(2)

$$E\xi=\int_0^1\int_0^1 x\cdot 6xy^2dxdy=\frac{2}{3}, E\eta=\int_0^1\int_0^1 y\cdot 6xy^2dxdy=\frac{3}{4},$$
$$E\xi^2=\int_0^1\int_0^1 x^2\cdot 6xy^2dxdy=\frac{1}{2}, E\eta^2=\int_0^1\int_0^1 y^2\cdot 6xy^2dxdy=\frac{3}{5},$$
$$E\xi\eta=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot 6xy^2dxdy=\frac{1}{2}.$$

故 $Cov(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=0, D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{1}{18}, D\eta=E\eta^2-(E\eta)^2=\frac{3}{80}$, 因而协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/18 & 0 \\ 0 & 3/80 \end{pmatrix}$$

31. 设 $U=a\xi+b, V=c\eta+d, a,b,c,d$ 为常数， a,c 同号，求证 U,V 的相关系数等于 ξ,η 的相关系数.
解　由协方差性质，及 a,c 同号.

$$Cov(U,V)=acCov(\xi,\eta), DU=\sqrt{a^2}D\xi, DV=\sqrt{c^2}D\eta,$$

故 $\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU\cdot DV}}=\frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}}=\rho_{\xi\eta}$.
32. 设 ξ,η 相互独立，具有相同分布 $N(a,\sigma^2)$, 求 $p\xi+q\eta$ 与 $u\xi+v\eta$ 的相关系数.
解　由协方差性质，

$$Cov(p\xi+q\eta,u\xi+v\eta)=puD\xi+qvD\eta=(pu+qv)\sigma^2,$$

$$D(p\xi+q\eta)=p^2D\xi+q^2D\eta=(p^2+q^2)\sigma^2, D(u\xi+v\eta)=u^2D\xi+v^2D\eta=(u^2+v^2)\sigma^2.$$

故所求为

$$\rho=\frac{Cov(p\xi+q\eta,u\xi+v\eta)}{\sqrt{D(p\xi+q\eta)\cdot D(u\xi+v\eta)}}=\frac{pu+qv}{\sqrt{(p^2+q^2)(u^2+v^2)}}.$$

33. 设随机变量 $\xi_1, \ldots, \xi_{n+m}(n > m)$ 相互独立，有相同分布，且方差存在，求 $S = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ 与 $T = \xi_{m+1} + \ldots + \xi_{n+m}$ 之间的相关系数.

解　记 $E\xi_1 = \mu, D\xi_1 = \sigma^2$, 则

$$Cov(S,T) = Cov(\xi_1 + \ldots + \xi_n, \xi_{m+1} + \ldots + \xi_{n+m}) = D(\xi_{m+1} + \ldots + D\xi_{n+m}) = (n-m)\sigma^2,$$

$$DS = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = n\sigma^2, DT = \sum_{k=m+1}^{m+n} D\xi_k = n\sigma^2$$

故所求为

$$\rho = \frac{Cov(S,T)}{\sqrt{DS \cdot DT}} = \frac{n-m}{n}.$$

34. 设随机变量 $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ 的数学期望都为 0, 方差都为 1, 两两间的相关系数都为 ρ, 求 $\eta = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ 与 $\zeta = \sum_{j=n+1}^{2n} \xi_j$ 之间的相关系数.

解由协方差性质及定义

$$Cov(\eta,\zeta) = Cov(\sum_{k=1}^{n} \xi_k, \sum_{j=n+1}^{2n} \xi_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{2n} Cov(\xi_k, \xi_j) = n^2\rho,$$

$$D\eta = D(\sum_{k=1}^{n} \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + \Sigma_{k\neq j} Cov(\xi_k, \xi_j) = n + (n^2 - n)\rho,$$

$$D\zeta = D(\sum_{k=n+1}^{2n} \xi_k) = \sum_{k=n+1}^{2n} D\xi_k + \Sigma_{k\neq j} Cov(\xi_k, \xi_j) = n + (n^2 - n)\rho.$$

故 η 与 ζ 之间的相关系数为

$$\rho = \frac{Cov(\eta,\zeta)}{\sqrt{D\eta \cdot D\zeta}} = \frac{n\rho}{1 + (n-1)\rho}.$$

35. 设 (ξ, η) 服从圆 $x^2 + y^2 \le 1$ 上的均匀分布，求证 ξ, η 不相关，但它们不独立.

解 (ξ, η) 的联合密度函数为 $p(x,y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2 + y^2 \le 1; \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$ 故

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1/\pi dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & |x| \le 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1/\pi dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & |y| \le 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因而 $p(x,y) \neq p_\xi(x) p_\eta(y)$, 即知它们不独立.

而 $E\xi = E\eta = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} = 0$, $E\xi\eta = \int\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{xy}{\pi} dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{\pi} dy = 0$. 得

$Cov(\xi,\eta)=0$, 即知它们不相关.

36. 设 ξ 的密度函数是偶函数，且 $E\xi^2<\infty$. 求证： $|\xi|$ 与 ξ 不相关，但它们不独立.
证设 ξ 的密度函数为 $p(x)$, 且 $p(x)=p(-x)$, $-\infty<x<+\infty$.
则 $E\xi=\int_{-\infty} xp(x)dx=0, E\xi|\xi|=\int_{-\infty} x|x|p(x)dx=0$. 故 $|\xi|$ 与 ξ 不相关.
假设 $|\xi|$ 与 ξ 独立．由于 $E\xi^2<\infty$, 因而存在正数 M, 使得 $0<P(|\xi|<M)<1$, 再由对称性知： $0<P(\xi<M)<1$. 根据独立性有

$$P(|\xi|<M)=P(|\xi|<M,\xi<M)=P(|\xi|<M)P(\xi<M).$$

则必有 $P(|\xi|<M)=0$ 或 $=P(\xi<M)=1$. 相互矛盾，因而假设错误， $|\xi|$ 与 ξ 不独立.

37. 设 ξ,η 都是只取两个值的随机变量，求证：如果它们不相关，则它们独立.
证　不妨设 ξ,η 的分布分别为

ξ	a	b
p	p_1	q_1

ξ	c	d
p	p_2	q_2

记 $\xi^*=\xi-b, \eta^*=\eta-d$. 由 ξ,η 不相关，知 $E\xi\eta=E\xi E\eta$. 因而 $E\xi^*\eta^*=E(\xi-b)(\eta-d)=E(\xi-b)E(\eta-d)=E\xi^*E\eta^*$.
直接计算易得

$$E\xi^*\eta^*=(a-b)(c-d)P(\xi=a,\eta=c),$$
$$E\xi^*E\eta^*=(a-b)(c-d)P(\xi=a)P(\eta=c).$$

即有 $P(\xi=a,\eta=c)=P(\xi=a)P(\eta=c)$, 同理可得另外三个情形的等式成立．故 ξ 与 η 相互独立.

38. 设 ξ,η 相互独立，且方差存在，求证：

$$Var(\xi\eta)=Var\xi\cdot Var\eta+(E\xi)^2\cdot Var\eta+(E\eta)^2\cdot Var\xi.$$

证　由于 ξ,η 相互独立,

$$\begin{aligned}
&Var(\xi\eta)=E\xi^2\eta^2-(E\xi\eta)^2\\
&=Var\xi\cdot Var\eta+(E\xi)^2\cdot E\eta^2+(E\eta)^2\cdot E\xi^2-2(E\xi E\eta)^2\\
&=Var\xi\cdot Var\eta+(E\xi)^2\cdot Var\eta+(E\eta)^2\cdot Var\xi.
\end{aligned}$$

39. 设随机变量中任意两个的相关系数都是 ρ, 求证 $\rho\geq -1/(n-1)$.
证　记 ξ^* 为 ξ_k 的标准化变量．易知对 $k\neq j$, $Cov(\xi_k^*,\xi_j^*)=\frac{Cov(\xi_k,\xi_j)}{\sqrt{D\xi_k\cdot D\xi_k}}=\rho$.
故

$$D(\sum_{k=1}^n\xi_k)=\sum_{k=1}^n D\xi_k+\sum_{k\neq l}Cov(\xi_k^*,\xi_j^*)=n+(n^2-n)\rho\geq 0.$$

即得 $\rho\geq -1/(n-1)$.

40. 求下列分布的特征函数：

(1) $P(\xi=k)=pq^{k-1}, k=1,2,\ldots,q=1-p$;
(2) ξ 服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布；
(3) ξ 服从参数为 λ 指数分布；
(4) Γ 的分布为 $G(\lambda,r)$;
(5) ξ 的密度为 $p(x)=\begin{cases}(2+x)/4,, & -2\le x<0;\\ (2-x)/4, & 0\le x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$
(6)$\eta=a\xi+b$, 其中 ξ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布；
(7)$\eta=\ln\xi$, 其中 ξ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.
解 (1) $\varphi(t)=Ee^{i\xi t}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikt}\cdot pq^{k-1}=\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qe^{it})^k=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$;
(2) $\varphi(t)=Ee^{i\xi t}=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{ixt}dx=\frac{\sin at}{at}$;
(3)

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=Ee^{i\xi t}=\int_0^\infty e^{ixt}\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx\\&=\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda x}\cos txdx+\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda x}\sin txdx=\lambda(I_1+iI_2).\end{aligned}$$

由分部积分法

$$\begin{cases}I_1=\frac{\lambda}{t}I_2\\ I_2=\frac{1}{t}-\frac{\lambda}{t}I_1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}I_1=\frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}\\ I_2=\frac{t}{\lambda^2+t^2}\end{cases}$$

故 $\varphi(t)=\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$.
(4) $\varphi(t)=Ee^{i\xi t}=\int_0^\infty e^{ixt}\cdot\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^\infty x^{r-1}e^{(it-\lambda)x}dx$.
由复变函数知识，对复数 $z=b+ic, b>0$, 有 $\int_0^\infty e^{-zx}x^{r-1}dx=\frac{\Gamma(r)}{z^r}$, 故
$\varphi(t)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot\frac{\Gamma(r)}{(\lambda-it)^r}=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$.
(5)

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=Ee^{i\xi t}=\int_{-2}^0 e^{ixt}\cdot\frac{2+x}{4}dx+\int_0^2 e^{ixt}\cdot\frac{2-x}{4}dx\\&=\int_0^2(1-\frac{x}{2})\cos xtdx=\frac{\sin 2t}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin 2t}{t}+\frac{\cos 2t-1}{t^2}\right)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.\end{aligned}$$

(6) 由于 $\varphi_\xi(t)=\frac{e^{it}-1}{it}$, 故 $\varphi_\eta(t)=Ee^{i(a\xi+b)t}=e^{ibt}\varphi_\xi(at)=\frac{e^{i(a+b)t}-e^{ibt}}{it}$.

(7) 由复变函数知识，对复数 $z=b+ic, b>0$, 有 $\int_0^\infty e^{-zx}x^{r-1}dx=\frac{\Gamma(r)}{z^r}$, 故

$$\varphi_\eta(t)=Ee^{it\ln\xi}=\int_0^1 e^{it\ln x}dx=\int_0^\infty e^{-(it+1)y}dy=\frac{1}{1+it}.$$

41. 若分布函数满足 $F(x)=1-F(-x-0)$, 则称它是对称的. 求证分布函数对称的充要条件是它的特征函数是实的偶函数.
证充分性由 ξ 的特征函数是实的偶函数及特征函数性质，有

$$\varphi_\xi(t)=\varphi_\xi(-t)=\varphi_{-\xi}(t).$$

故 ξ 与 $-\xi$ 有相同的分布函数. 因而

$$F_\xi(x)=F_{-\xi}(x)=P(-\xi\le x)=1-P(\xi<-x)=1-F_\xi(-x-0).$$

即 ξ 的布函数是对称的.
必要性由 $F_\xi(x)=1-F_\xi(-x-0)$, 得

$$F_\xi(x)=1-F_\xi(-x-0)==1-P(\xi<-x)=P(-\xi\le x)=F_{-\xi}(x).$$

故 ξ 与 $-\xi$ 有相同的分布函数. 因而有相同的特征函数，由特征函数性质，有

$$\varphi_\xi(t)=\varphi_{-\xi}(t)=\varphi_\xi(-t).$$

因而 ξ 的特征函数是实的偶函数.
42. 设 $\varphi(t)$ 是特征函数，求证下列函数也是特征函数： (1) $[\varphi(t)]^n$, (n 为正整数);
(2) $\varphi(t)\frac{\sin at}{at}, (a>0)$.
解 (1) 设 $\xi_1,\dots,\xi_n$ 独立同分布，且特征函数为 $\varphi(t)$. 则由性质， $\sum_{k=1}^n$ 的特征函数为 $[\varphi(t)]^n$, 故 (1) 是特征函数.
(2) 设 ξ 特征函数为 $\varphi(t)$. 而 η 服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布，且与 ξ 相互独立. 由特征函数性质， $\xi+\eta$ 的特征函数为

$$\varphi(t)\varphi_\eta(t)=\varphi(t)\frac{\sin at}{at}.$$

故 (2) 是特征函数.
43. 证明下列函数是特征函数，并找出相应的分布.
(1)$\cos^2 t$; (2) $(1+it)^{-1}$; (3) $(\frac{\sin at}{at})^2$;
(4) $(2e^{-it}-1)^{-1}$; (5) $(1+t^2)^{-1}$.
证 (1) 取 ξ 的分布列为 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.
则 $\varphi(t)=Ee^{i\xi t}=\frac{e^{-2it}+e^{2it}}{4}+\frac{1}{2}=\cos^2 t$.

故 $\cos^2 t$ 是特征函数，且其分布列为 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

(2) 设 ξ 为参数是 1 的指数分布. 则 $\varphi_\xi(t) = (1-it)^{-1}$.

且 $\eta = -\xi$ 的特征函数为 $\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = (1+it)^{-1}$.

故 $(1+it)^{-1}$ 是特征函数，且其密度函数为

$$p_\eta(x) = p_\xi(-x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

(3) 设 ξ_1, ξ_2 独立同分布，且服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布. 则由特征函数性质， $\xi_1 + \xi_2$ 的特征函数为

$$\varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t) = (\frac{e^{it} - e^{-it}}{2it})^2 = (\frac{\sin t}{t})^2.$$

且由卷积公式，其密度函数为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x) p_{\xi_2}(z-x)dx = \begin{cases} \int_0^z dx = z, & 0 < z \le 1; \\ \int_{z-1}^1 dx = 2-z, & 1 < z \le 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $(\frac{\sin t}{t})^2$ 是特征函数，且其密度函数为 $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x) p_{\xi_2}(z-x)dx = \begin{cases} z, & 0 < z \le 1; \\ 2-z, & 1 < z \le 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(4) 设 ξ 为服从参数为 $p = 1/2$ 的几何分布. 则 ξ 的特征函数为

$$\varphi(t) = \frac{\frac{1}{2}e^{it}}{1 - \frac{1}{2}e^{it}} = \frac{1}{2e^{-it} - 1}.$$

故 $\frac{1}{2e^{-it}-1}$ 是特征函数，且其分布列为 $P(\xi = k) = (\frac{1}{2})^k, k = 1, 2, \ldots$.

(5) 设 ξ 为参数是 1 的指数分布， η 与 ξ 相互独立，且 η 与 $-\xi$ 具有相同的分布. 则 $\varphi_\xi(t) = (1-it)^{-1}, \varphi_\eta(t) = \varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = (1+it)^{-1}$.

因而 $\xi + \eta$ 的特征函数为

$$\varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t) = (1-it)^{-1}(1+it)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}.$$

由卷积公式，其密度函数为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(z-x)dx = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-x}\cdot e^{z-x}dx = e^z/2, & z\le 0; \\ \int_z^{\infty} e^{-x}\cdot e^{z-x}dx = e^{-z}/2, & z>0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $\frac{1}{1+t^2}$ 是特征函数，且其密度函数为 $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(z-x)dx = \begin{cases} e^z/2, & z\le 0; \\ e^{-z}/2, & z>0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

44. 试举一个满足及但不是特征函数的例子.

解　取 $\varphi(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t|<1; \\ 0, & |t|\ge 1. \end{cases}$ 显然 $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}, |\varphi(t)|\le\varphi(0)=1.$

下面验证 $\varphi(t)$ 不是非负定的. 考察 $n=3$ 的复二次型

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varphi(t_j-t_k)\lambda_j\overline{\lambda_k},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是任意复数， t_1,t_2 是任意实数. 特别取 $0<t_1<1, 0<t_2<1, t_3=\frac{t_1+t_2}{2}$, 选取其三阶主子式.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_1-t_2) & \varphi(t_1-t_3) \\ \varphi(t_2-t_1) & 1 & \varphi(t_2-t_3) \\ \varphi(t_3-t_1) & \varphi(t_3-t_2) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-(t_1-t_2)^2 & 1-(t_1-t_3)^2 \\ 1-(t_2-t_1)^2 & 1 & 1-(t_2-t_3)^2 \\ 1-(t_3-t_1)^2 & 1-(t_3-t_2)^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-(t_1-t_2)^2 & 1-(t_1-t_2)^2/4 \\ 1-(t_2-t_1)^2 & 1 & 1-(t_2-t_1)^2/4 \\ 1-(t_2-t_1)^2/4 & 1-(t_1-t_2)^2/4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1-4t & 1-t \\ 1-4t & 1 & 1-t \\ 1-t & 1-t & 1 \end{vmatrix} = -8t^3 \le 0$$

其中 $t=\frac{(t_1-t_2)}{4}$. 故 $\varphi(t)$ 不是非负定的. 因此 $\varphi(t)$ 不是特征函数.

45. $\varphi(t)=(1-i|t|)^{-1}$ 是特征函数吗？为什么？

解　$\varphi(\pm t)=(1-i|t|)^{-1}=\frac{1+i|t|}{1+t^2}, \overline{\varphi(t)}=\frac{1-i|t|}{1+t^2}$.

故 $\varphi(-t)\ne\overline{\varphi(t)}$. 因而 $\varphi(t)$ 不是特征函数.

46. 证明 $\varphi(t)=\begin{cases} 1-|t|/a, & |t|<a; \\ 0, & |t|\ge a. \end{cases}$ $(a>0)$ 是特征函数，并求出对应的分布.

证　由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a} e^{-itx}(1-\frac{|t|}{a})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\cos tx(1-\frac{|t|}{a})dt = \frac{1-\cos ax}{\pi a x^2}. \end{aligned}$$

故设 ξ 的密度函数为 $p(x)=\frac{1-\cos ax}{\pi a x^2}, -\infty<x<+\infty$, 则 ξ 的特征函数为 $\varphi(t)$, 得证.

47. 证明同时满足下列各等式的连续函数是特征函数：

(1)$\varphi(t)=\varphi(-t)$; (2)$\varphi(t+2a)=\varphi(t)$; (3)$\varphi(t)=(a-t)/a(0\le t\le a)$.

48. 设 ξ 为取整数值的随机变量，分布列为 $P(\xi=k)=p_k, k=0,\pm1,\ldots,$ 特征函数为 $f(t)$, 求证：　$p_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}f(t)dt$.

证　利用 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\delta t}dt=\begin{cases} 2\pi, & \delta=0; \\ 0, & \delta\ne 0. \end{cases}$, 故

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}f(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ilt}p_l)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-l)x}dt)p_l = p_k. \end{aligned}$$

结论成立.

49. 设 $(\xi,\eta)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$, 求 $\zeta=\xi+\eta$ 的分布.

解　由于 $(\xi,\eta)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$, 故 $\zeta=\xi+\eta$ 也服从正态分布，且

$$E\zeta=E\xi+E\eta=a+b, Var\xi=Var\xi+Var\eta=2Cov(\xi,\eta)=\sigma_1^2+\sigma_2^2+2r\sigma_1\sigma_2.$$

故 $\zeta\sim N(a+b,\sigma_2^2+2r\sigma_1\sigma_2)$.

50. 设 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 相互独立，都服从 $N(a,\sigma^2)$,

(1) 求 $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)'$ 的分布，写出数学期望及协方差矩阵；
(2) 求 $\overline{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$ 的分布.
解　$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)'$ 的联合密度函数为

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x_k-a)^2}{2\sigma^2}\}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}\exp\{-\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2}{2\sigma^2}\}$$

$$E\xi=(E\xi_1,\ldots,E\xi_n)'=a(1,\ldots,1)',Var\xi=(Cov(\xi_i,\xi_j))_{n\times n}=\sigma^2I_n;$$

(2) $E\overline{\xi}=a,Var\overline{\xi}=\frac{\sigma^2}{n}$, 故 $\overline{\xi}\sim N(a,\frac{\sigma^2}{n})$.
51. 证明：设多元正态分布各分量相互独立，同方差，则经正交线性变换后的多元正态分布各分量也相互独立，同方差.
证　不妨设 $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)'\sim \mathbf{N}(\mathbf{a},\sigma^2\mathbf{I_n})$, C 为一正交矩阵. 记 $\eta=C\xi$, 则由于 $C\sigma^2I_nC'=\sigma^2I_n$. 故 $\eta\sim N(C\mathbf{a},\sigma^2\mathbf{I_n})$, 因而其各分量也相互独立，同方差.
52. 设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)'\sim\mathbf{N}(\mathbf{a},\mathbf{B})$, 其中 $\mathbf{a}=(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3})'$, $\mathbf{B}=(\mathbf{b_{ij}})_{3\times3}$. 作变换
$\begin{cases}\eta_1=\xi_1/2-\xi_2+\xi_3/2\\ \eta_2=-\xi_1/2-\xi_3/2\end{cases}$, 求 $\eta=(\eta_1,\eta_2)'$ 的分布.

解　由于 $\eta=\mathbf{C}\xi$, 其中 $C=\begin{pmatrix}1/2&-1&1/2\\-1/2&0&-1/2\end{pmatrix}$. 故 $\eta=(\eta_1,\eta_2)'\sim\mathbf{N}(\mathbf{Ca},\mathbf{CBC'})$.

53. 设 $\xi=(\xi_1,\xi_2)'\sim\mathbf{N}(\mathbf{a},\mathbf{B})$ 为 $2n$ 维正态变量，ξ_1,ξ_2 都是 n 维向量，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$
其中 $B_{22}=B_{11},B_{12}=B_{21}$, 求证 $\xi_1+\xi_2$ 与 $\xi_1-\xi_2$ 相互独立.
解　记 $\eta_1=\xi_1+\xi_2$, $\eta_2=\xi_1-\xi_2$, 即 $\eta=\mathbf{C}\xi$, 其中 $C=\begin{pmatrix}I_n&I_n\\I_n&-I_n\end{pmatrix}$. 因而 $\eta=(\eta_1,\eta_2)'$
的协方差阵为

$$\begin{pmatrix}I_n&I_n\\I_n&-I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&I_n\\I_n&-I_n\end{pmatrix}=4^n\begin{pmatrix}B_{11}+B_{12}&0\\0&B_{11}-B_{12}\end{pmatrix}$$

故 $\xi_1+\xi_2$ 与 $\xi_1-\xi_2$ 相互独立.
54. $\xi=(\xi_1,\xi_2)'\sim\mathbf{N}(\mathbf{0},\mathbf{I})$, 这里 I 是二阶单位阵. 求给定 $\xi_1+\xi_2=x_1+x_2$ 时 ξ_1 的条件分布.

解　记 $\eta_1=\xi_1+\xi_2$, $\eta_2=\xi_1$. 则 $(\eta_1,\eta_2)'\sim N(0,B)$, 其中 $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由 $\xi = (\xi_1, \xi_2)' \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, 易得 $\xi_1 + \xi_2 \sim N(0, 2)$, 故给定 $\xi_1 + \xi_2 = x_1 + x_2$ 时 ξ_1 的条件密度函数为

$$\frac{\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1+x_2, x)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x \end{pmatrix}\right\}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\{-\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\{-(x - \frac{x_1+x_2}{2})^2\},$$

因而给定 $\xi_1 + \xi_2 = x_1 + x_2$ 时 ξ_1 的条件分布为 $N((x_1+x_2)/2, 1/2)$.

55. $\xi = (\xi_1, \xi_2)' \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{B})$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 试找到正交变换 U 及 d_1, d_2, 使 $\eta = U\xi \sim N(a_1, B_1)$, 其中 $B_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.

解　利用线性代数知识易得 $UBU' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 这里其中正交变换 $U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

即得所求为 $U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $d_1 = 5, d_2 = 0$.

第四章极限定理

1. 下列分布函数列是否弱收敛于分布函数？

(1)$x<-1/n$ 时， $F_n(x)=0$; $x\ge -1/n$ 时， $F_n(x)=1$.

(2)$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<-n;\\ (x+n)/2n, & -n\le x<n;\\ 1, & x\ge n.\end{cases}$

解 (1)$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x\ge 0.\end{cases}$, 因而 $F_n(x)$ 弱收敛于分布函数.

(2)$F(x)=1/2, -\infty<x<\infty$, 因而 $F_n(x)$ 不弱收敛于分布函数.

2. 设 ξ_n 的分布列为 $P(\xi_n=0)=1-1/n, P(\xi_n=n)=1/n, n=1,2,\ldots$. 求证相应的分布函数列收敛于分布函数，但 $E\xi_n$ 不收敛于相应分布的期望.

解 $F_n(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-1/n, & 0\le x<n;\\ 1, & x\ge n.\end{cases}$ 故 $F_n\to F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x\ge 0.\end{cases}$

而 $E\xi_n=1$, 相应分布 $F(x)$ 的期望为 0. 因而 $E\xi_n$ 不收敛于相应分布的期望.

3. 设 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布随机变量序列，ξ_n 的分布列为 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$, $\eta_n=\sum_{k=1}^n \xi_k/2^k$.

求证 η_n 的分布收敛于 [-1,1] 上的均匀分布.

解 $\{\xi_n\}$ 的特征函数为 $f_n(t)=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\cos t$. 由于 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布随机变量序列，故 η_n 的特征函数为

$$g_n(t)=\prod_{k=1}^n f_k(\frac{t}{2^k})=\prod_{k=1}^n \cos\frac{t}{2^k}=\frac{\sin t}{2^n\sin t/2^n}.$$

其极限为 $\lim_{n\to\infty}g_n(t)=\frac{\sin t}{t}=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2t}$, 为 [-1,1] 上的均匀分布的特征函数. 故 η_n 的分布收敛于 [-1,1] 上的均匀分布.

4. 某计算机系统有 120 个终端.

(1) 每个终端有 5% 时间在使用，若各终端使用与否是相互独立的，求有 10 个或更多终端在使用的概率.

(2) 若每个终端有 20% 时间在使用，求解上述问题.

解 (1) 设这 120 个终端有 S 个在同时使用，则 $S\sim B(120,0.05)$. 由中心极限定理,

$$P(S\ge 10)=P\left(\frac{S-120\times 0.05}{\sqrt{120\times 0.05\times 0.95}}\ge\frac{10-120\times 0.05}{\sqrt{120\times 0.05\times 0.95}}\right)\approx 1-\Phi(1.675)=0.047.$$

(2) $S \sim B(120, 0.20)$. 由中心极限定理,

$$P(S \geq 10) = P\left(\frac{S - 120 \times 0.2}{\sqrt{120 \times 0.2 \times 0.8}} \geq \frac{10 - 120 \times 0.2}{\sqrt{120 \times 0.2 \times 0.8}}\right) \approx \Phi(3.2) = 0.999.$$

5. 现有一大批种子，其中良种占 1/6. 在其中任取 6000 粒，问在这些种子中良种所占比例与 1/6 之差小于 1% 的概率是多少？

解 (1) 设 6000 粒种子中良种数为 S, $S \sim B(6000, 1/6)$. 由中心极限定理,

$$P(\left|\frac{S}{6000} - \frac{1}{6}\right| < 0.01) = P(\left|\frac{S - 6000 \times 1/6}{\sqrt{6000 \times 1/6 \times 5/6}}\right| < 0.01 \times \frac{6000}{\sqrt{6000 \times 1/6 \times 5/6}})$$
$$= 2\Phi(2.08) - 1 = 0.96.$$

6. 设某车间有 200 台同型机床，工作时每台车床 60% 的时间在开动，每台开动时耗电 1 千瓦. 问应供给该车间多少千瓦电力才能有 0.999 的把握保证正常生产？

解 设至少供给该车间 x 千瓦. 记 S 为该车间中车床的开动台数, $S \sim B(200, 0.6)$. 由题意, $P(S \leq x) \geq 0.999$. 由中心极限定理,

$$P(S \leq x) = P(\frac{S - 200 \times 0.6}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}} \leq \frac{x - 200 \times 0.6}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}})$$
$$= \Phi(\frac{x - 120}{4\sqrt{3}}) \geq 0.999.$$

查标准正态表得，只需 $\frac{x-120}{4\sqrt{3}} \geq 3.09$ ，故取 $x = 142$, 即至少供电 142 千瓦才能使该车间正常工作的概率不小于 0.999.

7. 一家保险公司有 10000 个同类型人参加某种事故保险，每人每年付 12 元保险费，在一年中一个人发生此种事故的概率为 0.006, 发生事故时该人可向保险公司领得 1000 元. 问: (1) 对该项保险保险公司亏本的概率有多大？

(2) 对该项保险保险公司一年的利润不少于 60000 元的概率有多大？

解 设这 10000 个人中有 S 个人发生此种事故, $S \sim B(10000, 0.006)$. 由中心极限定理, (1)

$$P(1000S > 10000 \times 12) = P(\frac{S - 10000 \times 0.006}{\sqrt{10000 \times 0.006 \times 0.994}} > \frac{120 - 10000 \times 0.006}{\sqrt{10000 \times 0.006 \times 0.994}})$$
$$\approx 1 - \Phi(7.769) \approx 0.$$

(2) $P(1000S \leq 10000 \times 12 - 60000) = P(\frac{S-10000\times0.006}{\sqrt{10000\times0.006\times0.994}} \leq 0) = 0.5.$

8. 一家火灾保险公司承保 160 幢房屋，最高保险金额有所不同，数值如下表所示：

最大保险金额 (万元)	投保房屋数
10	80
20	35
30	25
50	15
100	5

假设： (1) 每幢房屋每年一次理赔概率为 0.04, 大于一次理赔概率为 0;
(2) 各幢房屋是否发生火灾相互独立;
(3) 如果理赔发生，理赔量从 0 到最高保险金额间的均匀分布.
记 N 为一年中理赔次数， S 为理赔总量,
a. 计算 N 的数学期望和方差;
b. 计算 S 的数学期望和方差;
c. 确定相对保证附加系数 θ, 即 θ=(每份保单保费收入 - 平均理赔量)/ 平均理赔量，以确保保险公司的保费收入大于理赔总量的概率等于 0.99.

解　a 显然 $N \sim B(160, 0.04)$, 因而 $EN = 6.4, VarN = 6.144$;
b 分别记这 160 幢房屋的理赔量为 $X_i, i = 1, 2, \ldots, 160$. 故 $S = \sum_{i=1}^{160} X_i$. 由于各幢房屋是否发生火灾相互独立，且理赔量是从 0 到最高保险金额间的均匀分布. 故由题意

$$ES = \sum_{i=1}^{160} EX_i = \sum_{k=1}^{5} n_k \frac{b_k}{2} q_k = 70,$$

$$VarS = \sum_{i=1}^{160} VarX_i = \sum_{k=1}^{5} n_k (\frac{b_k^2}{3} q_k - \frac{b_k^2}{4} q_k^2) = 1707.2.$$

c. 由题意，保险公司的保费收入大于理赔总量的概率为

$$P(160 \times \frac{70}{160}(1+\theta) > S) = P(S < 70(1+\theta))$$

要使 $P(S < 70(1+\theta)) = 0.99$, 由中心极限定理

$$P(S < 70(1+\theta)) = P\left(\frac{S-70}{\sqrt{1707.2}} < \frac{70\theta}{\sqrt{1707.2}}\right) \approx \Phi(\frac{70\theta}{\sqrt{1707.2}}) = 0.99$$

查正态分布表得 $\frac{70\theta}{\sqrt{1707.2}} = 2.33$, 因而 $\theta = 1.375$.
9. 某保险公司开办 5 种人寿险，每种险别 (一旦受保人死亡) 的赔偿额 b_k 及投保人数

n_k 如下表所示：

类别 k	赔偿额 (万元)b_k	投保人数 n_k
1	1	8000
2	2	3500
3	3	2500
4	5	1500
5	10	500

设死亡是相互独立的，其概率皆为 0.02. 保险公司为安全起见，对每位受保人寻再保险. 其机制如下：确定一个自留额，设为 2 万元；若某人的索赔在 2 万以下呒则由该保险公司偿付；若索赔金超过 2 万元，则超过部分由再保险公司偿付；再保险率为投保金额的 2.5%. 该保险公司 (相对于再保险公司而言，也称为分出公司) 希望它的全部费用 (即实际索赔总额 S+ 再保险费) 不超过 825 万，求实际费用突破此限额的概率.

10. 设 $\{\xi_n\}$ 独立同分布，其分布列分别为 (1)$[-a,a]$ 上的均匀分布； (2) 泊松分布. 记 $\eta_n=\sum_{k=1}^n\frac{(\xi_k-E\xi_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n Var\xi_k}}$, 计算 η_n 的特征函数，并求 $n\to\infty$ 时的极限，从而验证林德贝格勒维定理在这种情况成立.

证： (1) 由于 $\{\xi_n\}$ 是相互独立的随机变量序列，都服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布. 故 $E\xi_n=0, Var\xi_n=\frac{a^2}{3}$, ξ_n 特征函数为 $f_n(t)=\frac{e^{ita}-e^{-ita}}{2ita}=\frac{\sin at}{at}$. 再由特征函数性质， η_n 的特征函数为

$$\prod_{k=1}^n f_k\Big(\frac{t}{\sqrt{\frac{a^2}{3}}}\Big)=\frac{\sin\sqrt{3/n}t}{\sqrt{3/n}t}=(1-\frac{t^2}{2n}+0(\frac{1}{n}))^n\to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

为 $N(0,1)$ 的特征函数，由逆极限定理， η_n 依分布收敛于 $N(0,1)$. 从而验证了林德贝格 - 勒维定理在这种情况成立.

(2) 由于 $\{\xi_n\}$ 是相互独立的随机变量序列，都服从参数为 λ 泊松分布. 故 $E\xi_n=\lambda, Var\xi_n=\lambda$, ξ_n 特征函数为 $f_n(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$. 再由特征函数性质， η_n 的特征函数为

$$\prod_{k=1}^n\left(e^{-it\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{n\lambda}}}f_k\Big(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}\Big)\right)=e^{-i\sqrt{n\lambda}t}\cdot e^{n\lambda(e^{\frac{it}{\sqrt{n\lambda}}}-1)}=e^{(-\frac{t^2}{2}+0(1))}\to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

为 $N(0,1)$ 的特征函数，由逆极限定理， η_n 依分布收敛于 $N(0,1)$. 从而验证了林德贝格 - 勒维定理在这种情况成立.

11. 用得莫佛拉普拉斯定理证明：在伯努里试验中，若 $0<p<1$, 则不管是 k 多大的常数，总有

$$P(|\mu_n-np|<k)\to 0,\quad n\to\infty.$$

证　当 $n \to \infty$ 时,

$$P(|\mu_n - np| < k) = P\left(\left|\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}\right| < \frac{k}{\sqrt{npq}}\right)$$
$$= 2\Phi(\frac{k}{\sqrt{npq}}) - 1 \to 2\Phi(0) - 1 = 0.$$

12. 求证：泊松分布的标准化变量当参数 $\lambda \to \infty$ 时趋近标准正态分布．证设 ξ 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，记 $\eta = \frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$. 则 η_n 的特征函数为

$$f(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} \cdot e^{\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1)}.$$

因而当 $\lambda \to \infty$ 时,

$$f(t) = e^{(-\frac{t^2}{2} + 0(1))} \to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

为 $N(0,1)$ 的特征函数，由逆极限定理，当参数 $\lambda \to \infty$ 时 η 趋近标准正态分布.

13. 求证：当 $n \to \infty$ 时，　$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}$.

证设 $\{\xi_n\}$ 是相互独立的随机变量序列，且都服从参数为 $\lambda = 1$ 泊松分布．故 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ 服从参数为 $\lambda = n$ 泊松分布．由中心极限定理

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} P(S_n = k) = P(S_n \le n)$$
$$= P(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}) \to \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

14. 设 $\{\xi_n\}$,$\{\eta_n\}$ 各自独立同分布，也相互独立．　$E\xi_n = 0, Var\xi_n = 1, P\{\eta = \pm 1\} = 1/2$.

求证：　$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k$ 的分布函数弱收敛于 $N(0,1)$.

证　由于 $\{\xi_n\}$,$\{\eta_n\}$ 各自独立同分布, 也相互独立. 故 $\{\xi_n\eta_n\}$ 独立同分布. 且 $E\{\xi_n\eta_n\} = E\xi_n E\eta_n = 0, Var\xi_n\eta_n = E(\xi_n\eta_n)^2 = 1$. 根据林德贝格 - 勒维定理，$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k$ 的分布函数弱收敛于 $N(0,1)$.

15. 设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量序列，都服从 $(0,\pi)$ 上的均匀分布．记 $\eta_n = A_n \cos\xi_n$, 其中 $A_n > 0$ 且 $\frac{\sum_{k=1}^{n} A_k^3}{(\sum_{k=1}^{n} A_k^2)^{3/2}} \to 0 (n \to \infty)$. 证明 $\{\eta_n\}$ 服从中心极限定理.

证

$$E\eta_k = EA_k \cos\xi_k = A_k \int_{k=0}^{\pi} \cos x \cdot \frac{1}{\pi} dx = 0,$$

$$Var\eta_k = E\eta_k^2 = EA_k^2 \cos^2\xi_k = A_k \int_{k=0}^{\pi} \cos^2 x \cdot \frac{1}{\pi} dx = \frac{A_k^2}{2},$$

$$E|\eta_k|^3 = EA_k^3 \cos^3\xi_k = A_k^3 \int_{k=0}^{\pi} |\cos^3 x| \cdot \frac{1}{\pi} dx = \frac{4}{3}.$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{\sum_{k=1}^n E|\eta_k-E\eta_k|^3}{(\sum_{k=1}^n A_k^2)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sum_{k=1}^n A_k^3}{(\sum_{k=1}^n A_k^2)^{3/2}}\to 0.$$

因而满足李雅普诺夫定理， $\{\eta_n\}$ 服从中心极限定理.

16. 设 ξ_n 服从柯西分布，其密度为 $p_n(x)=\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$. 求证： $\xi_n\to 0\quad(P)$.

证　当 $n\to\infty$ 时，

$$P(|\xi_n|<\epsilon)=\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\arctan nx|_{-\epsilon}^{\epsilon}$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\arctan n\epsilon\to 1.$$

故 $\xi_n\to 0\quad(P)$.

17. 设 ξ_n 独立同分布，密度为 $p(x)=\begin{cases}e^{-(x-a)}, & x>a;\\ 0, & x\le a.\end{cases}$ ，令 $\eta_n=\min(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ ，求证： $\xi_n\to a\quad(P)$.

证　当 $n\to\infty$ 时，

$$P(|\eta_n-a|\ge\epsilon)=P(\eta_n\ge a+\epsilon)+P(\eta_n\le a-\epsilon)$$
$$=P(\min(\xi_1,\ldots,\xi_n)\ge a+\epsilon)=\prod_{k=1}^n P(\xi_k\ge a+\epsilon)$$
$$=(\int_{a+\epsilon}^{\infty}e^{-(x-a)}dx)^n=e^{-n\epsilon}\to 0.$$

故 $\eta_n\to a\quad(P)$.

18. 求证： (1) 若 $\xi_n\to\xi\quad(P),\eta_n\to\eta\quad(P)$, 则 $\xi_n\pm\eta_n\to\xi\pm\eta\quad(P)$;

(2) 若 $\xi_n\to\xi\quad(P),\eta_n\to\eta\quad(P)$, 则 $\xi_n\eta_n\to\xi\eta\quad(P)$;

(3) 若 $\xi_n\to\xi\quad(P),\eta_n\to c\quad(P)$, c 为常数， η_n 与 c 都不为 0, 则 $\xi_n/\eta_n\to\xi/c\quad(P)$;

(4) 设 $\xi_n\to\xi\quad(d),\eta_n\to c\quad(P),c$ 为常数, 则 $\xi_n+\eta_n\to\xi+c\quad(d)$; $\xi_n/\eta_n\to\xi/c\quad(d),(c\neq 0)$.

证　(1) 由

$$P(|(\xi_n\pm\eta_n)-(\xi\pm\eta)|\ge\epsilon)$$
$$\le P(|\xi_n-\xi|\ge\epsilon/2)+P(|\eta_n-\eta|\ge\epsilon/2)\to 0.$$

故 $\xi_n\pm\eta_n\to\xi\pm\eta\quad(P)$;

(2) 任给 $\delta>0$, 存在 $M>0$ 及正整数 N, 使当 $n\ge N$ 有

$$P(|\xi|\ge M/2)\le\delta/8, P(|\eta|\ge M/2)\le\delta/8,$$

$$P(|\xi_n-\xi|\geq M/2)\leq \delta/8, P(|\xi_n-\xi|\geq \epsilon/2M)\leq \delta/4,$$
$$P(|\eta_n-\eta|\geq \epsilon/2M)\leq \delta/4.$$

故当 $n\geq N$ 时

$$\begin{aligned}&P(|\xi_n|\geq M)=P(|\xi|\geq M/2,|\xi_n|\geq M)+P(|\xi|<M/2,|\xi_n|\geq M)\\&\leq P(|\xi|\geq M/2)+P(|\xi_n-\xi|\geq M/2)\leq \delta/4.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}&P(|\xi_n\eta_n-\xi\eta|\geq\epsilon)\leq P(|\xi_n||\eta_n-\eta|\geq\epsilon/2)+P(|\xi_n-\xi||\eta|\geq\epsilon/2)\\&\leq P(|\xi_n|\geq M)+P(|\eta_n-\eta|\geq\epsilon/2M)+P(|\eta|\geq M/2)+P(|\xi_n-\xi|\geq\epsilon/2M)<\delta.\end{aligned}$$

故 $\xi_n\eta_n\to\xi\eta\quad(P)$;
(3) 由 (2) 只需证 $1/\eta\to 1/c\quad(P)$.
当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&P(|1/\eta_n-1/c|\geq\epsilon)=P(\frac{|\eta_n-c|}{|\eta_n||c|}\geq\epsilon)\\&\leq P(|\eta_n|\leq|c|/2)+P(|\eta_n|>|c|/2,|\eta_n-c|\geq\epsilon\cdot|\eta_n||c|)\\&\leq P(|\eta_n-c|\geq|c|/2)+P(|\eta_n|>|c|/2,|\eta_n-c|\geq\epsilon c^2/2)\to 0.\end{aligned}$$

即证.
(4) 记 ξ 的分布函数为 $F(x)$, 我们有

$$\begin{aligned}&P(\xi_n+\eta_n\leq x)-P(\xi+\eta\leq x)\\&\leq P(\xi_n+\eta_n\leq x,|\eta_n-c|\leq\epsilon)+P(|\eta_n-c|\geq\epsilon)-F(x-c)\\&\leq P(\xi_n\leq x-c+\epsilon)-F(x-c)+P(|\eta_n-c|\geq\epsilon)\end{aligned}$$

另外,

$$\begin{aligned}&P(\xi_n+\eta_n\leq x)-P(\xi+\eta\leq x)\\&\geq P(\xi_n\leq x-c-\epsilon)-F(x-c)-P(|\eta_n-c|\geq\epsilon)\end{aligned}$$

故由 $\xi_n\to\xi\quad(d)$, $\eta_n\to c\quad(P)$, 即得 $\xi_n+\eta_n\to\xi+c\quad(d)$.
不妨设 $c>0$, 任给 $0<\epsilon<c$,

$$\begin{aligned}&P(\xi_n/\eta_n\leq x)-P(\xi/c\leq x)\\&\leq P(\xi_n/\eta_n\leq x,|\eta_n-c|<\epsilon)+P(|\eta_n-c|\geq\epsilon)-P(\xi/c\leq x)\\&\leq P(\xi_n\leq cx+c\epsilon)+P(|\eta_n-c|\geq\epsilon)-P(\xi\leq cx),\end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned}&P(\xi_n/\eta_n \le x) - P(\xi/c \le x)\\ &\ge P(\xi_n \le cx - c\epsilon) - P(|\eta_n - c| \ge \epsilon) - P(\xi \le cx),\end{aligned}$$

故由 $\xi_n \to \xi \quad (d), \eta_n \to c \quad (P)$, 即得 $\xi_n/\eta_n \to \xi/c \quad (d)$.

19. 求证下列各独立的随机变量序列 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律.

(1)$P(\xi_k = \sqrt{\ln k}) = P(\xi_k = -\sqrt{\ln k}) = \frac{1}{2}$;

(2)$P(\xi_k = 2^k) = P(\xi_k = -2^k) = 2^{-(2k+1)}, P(\xi_k = 0) = 1 - 2^{-2k}$;

(3)$P(\xi_k = \frac{2^n}{n^2}) = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \ldots$;

(4)$P(\xi_k = n) = \frac{c}{n^2 \ln^2 n}, n = 2, 3, \ldots; c$ 为常数.

证　(1)$E\xi_k = 0, Var\xi_k = E\xi_k^2 = \frac{\ln k}{2}$. 故

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var\xi_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{2} \le \frac{\ln n}{2n} \to 0.$$

因而服从切贝雪夫大数定律.

(2)$E\xi_k = 0, Var\xi_k = 1$. 故

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var\xi_k = \frac{1}{n} \to 0.$$

因而服从切贝雪夫大数定律.

(3) 由于 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，且 $E\xi_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 故 $\{\xi_k\}$ 服从辛钦大数定律.

(4) 由于 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，且 $E\xi_k = c\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\ln n} = C_0 < \infty$. 故 $\{\xi_k\}$ 服从辛钦大数定律.

20. 设 $\{\xi_k\}$ 服从同一分布，$Var\xi_k < +\infty$, ξ_k 与 ξ_{k+1} 相关，$k = 1, 2, \ldots$, 但当 $|k-l| \ge 2$ 时，ξ_k 与 ξ_l 独立，求证这时大数定律成立.

证　由于当 $|k-l| \ge 2$ 时，ξ_k 与 ξ_l 独立，$Var\xi_k < +\infty$. 故当 $n \to \infty$ 时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}Var\xi_k + \sum_{k\ne l}Cov(\xi_k, \xi_l))\\ &= \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}Var\xi_k + 2\sum_{k=1}^{n-1}Cov(\xi_k, \xi_{k+1}))\\ &\le \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}Var\xi_k + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{Var\xi_k \cdot Var\xi_{k+1}}) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

因而服从马尔科夫大数定律.

21. 设 $\{\xi_k\}$ 的方差有界：$Var\xi_k \le c$, 且当 $|i-j| \to +\infty$ 时，$Cov(\xi_i, \xi_j) \to 0$. 则 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律. 试证明之.

证 对任意的 $\epsilon>0$, 存在 N, 使当 $|i-j|>N$ 时, $|Cov(\xi_i,\xi_j)|<\epsilon$. 又对所有 i,j, 有 $|Cov(\xi_i,\xi_j)|<\sqrt{Var\xi_i\cdot Var\xi_j}\le c$. 因而当 $n>N$ 时

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^n\xi_k)=\frac{1}{n^2}(\sum_{|i-j|>N}Cov(\xi_i,\xi_j)+\sum_{|i-j|\le N}Cov(\xi_i,\xi_j))$$
$$\le\frac{1}{n^2}\{[(2N+1)n-N(N+1)]c+[n^2-(2N+1)n+N(N+1)]\epsilon\}$$
$$=\epsilon+(\frac{2N+1}{n}-\frac{N(N+1)}{n^2})\cdot(c-\epsilon).$$

由于 ϵ 可任意小，当 $n\to\infty$ 时上式右端也可任意小．故 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律.

22. 在伯努里试验中，事件 A 出现的频率为 p, 令

$$\xi_k=\begin{cases}1, & \text{若在第 } k \text{ 次和第 } k+1 \text{ 次试验中 A 出现;}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求证 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律.

证 由题意，ξ_k 的分布列为 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p^2 & p^2\end{pmatrix}$. 且当 $|k-l|\ge 2$ 时，ξ_k 与 ξ_l 独立．根据题 20 即得证.

23. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，都服从 [0,1] 上的均匀分布，令 $\eta_n=(\prod_{k=1}^n\xi_k)$, 求证：$\eta_n\to c(P)$(常数), 并求出 c. 证 显然，$\{\ln\xi_n\}$ 独立同分布，且

$$E\ln\xi_n=\int_0^1\ln x dx=x\ln x|_0^1-1=-1.$$

由辛钦大数律得 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln\xi_k\longrightarrow-1(P)$. 取连续函数 $f(x)=e^x$, 由本章例 2 知

$$\left(\prod_{k=1}^n\xi_k\right)^{1/n}\longrightarrow 1/e.$$

因而 $c=1/e$.

24. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，$E\xi_k=a, Var\xi_k<\infty$. 求证:

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^n k\xi_k\longrightarrow a\quad(P).$$

证 由切比雪夫不等式,

$$P\{|\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^n k\xi_k-a|\ge\epsilon\}$$
$$=P\{|\sum_{k=1}^n k\xi_k-E(\sum_{k=1}^n k\xi_k)|\ge\frac{\epsilon n(n+1)}{2}\}$$
$$\le\frac{4Var\sum_{k=1}^n k\xi_k}{\epsilon^2n^2(n+1)^2}=\frac{2(2n+1)Var\xi_1}{3\epsilon^2n(n+1)}\longrightarrow 0.$$

故 $\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\xi_k \longrightarrow a \quad (P)$.

25. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，都服从 $N(0,1)$ 分布， $\eta_n=\frac{n\xi_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}$. 求证： η_n 的分布函数弱收敛于 $N(0,1)$.

证　由于 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，且都服从 $N(0,1)$ 分布．则

$$\xi_{n+1}\to N(0,1)\quad (d),\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}{n}\to 1\quad (P).$$

根据习题 18(4), 有 $\frac{n\xi_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}\to N(0,1)(d)$. 即证得 η_n 的分布函数弱收敛于 $N(0,1)$.

26. 设 $\{\xi_k\}$ 为独立同分布随机变量序列， $Var\xi_k<+\infty$. $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为绝对收敛级数，令 $\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, 则 $\{a_n\eta_n\}$ 服从大数定律.

证　由于，当 $n\longrightarrow\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}a_k\eta_k)=\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}a_k(\sum_{l=1}^{k}\xi_l))\\&=\frac{1}{n^2}Var(\sum_{l=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_k)\xi_l))=\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)Var\xi_1\le\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2)Var\xi_1\longrightarrow 0\end{aligned}$$

故 $\{a_n\eta_n\}$ 服从马尔科夫大数定律.

27. 设 $\{\xi_k\}$ 为独立同分布随机变量序列，数学期望为 0, 方差为 1, $\{a_n\}$ 为常数列, $a_n\longrightarrow\infty$. 求证:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\sqrt{n}a_n}\longrightarrow 0\quad (P).$$

证　由切比雪夫不等式，当 $n\longrightarrow\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&P\{|\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\sqrt{n}a_n}|\ge\epsilon\}=P\{|\sum_{k=1}^{n}\xi_k-E(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)|\ge\epsilon\sqrt{n}a_n\}\\&\le\frac{Var\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\epsilon^2na_n^2}=\frac{1}{\epsilon^2a_n}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

故

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\sqrt{n}a_n}\longrightarrow 0\quad (P).$$

28. 设 $\{\xi_k\}$,$\{\eta_k\}$ 相互独立，均服从 $N(0,1)$ 分布． $\{a_n\}$ 为常数列，求证:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\eta_k}{n}\longrightarrow 0\quad (P)$$

的充要条件是 $\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{n^2}\longrightarrow 0$.

证　充分性由于

$$\frac{Var(\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\eta_k)}{n^2}=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{n^2}+\frac{1}{n}\longrightarrow 0.$$

故根据马尔科夫大数定律 $\frac{\sum_{k=1}^n a_k\xi_k+\sum_{k=1}^n \eta_k}{n} \longrightarrow 0(P)$.
必要性　易知 $\sum_{k=1}^n a_k\xi_k + \sum_{k=1}^n \eta_k \sim N(0, \sum_{k=1}^n a_k^2 + n)$, 故

$$P(|\frac{\sum_{k=1}^n a_k\xi_k + \sum_{k=1}^n \eta_k}{n}| \geq \epsilon) = 2P(N(0, \sum_{k=1}^n a_k^2 + n) \geq \epsilon n)$$
$$= 2P(N(0,1) \geq \frac{\epsilon n}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 + n}}) \longrightarrow 0.$$

则必有 $\frac{\epsilon n}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2+n}} \longrightarrow \infty(n \longrightarrow \infty)$, 因而 $\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n^2} \longrightarrow 0$.

29. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，都服从 $N(0,1)$ 分布，求证：　$\eta_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}}$ 渐近正态分布 $N(0,1)$.
证　由 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，且都服从 $N(0,1)$ 分布，知

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}} \to N(0,1) \quad (d),$$

$$\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \to 1 \quad (P).$$

由例 2 及题 18(4) 得 $\eta_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}}$ 渐近正态分布 $N(0,1)$.

30. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，都服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布，求证：(1)$\{\xi_n^2\}$ 服从大数定律；(2)$U_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}}$ 的分布函数收敛于 $N(0,1)$.
证　(1) 由于 $\{\xi_n^2\}$ 独立同分布，某种原因且 $E\xi_n^2 = 1/3$. 故 $\{\xi_n^2\}$ 服从辛钦大数定律；
(2) 由中心极限定理及 (1) 知

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n/3}} \to N(0,1) \quad (d),$$

$$\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \to 1/3 \quad (P).$$

由例 2 及题 18(4) 得 $U_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}}$ 的分布函数收敛于 $N(0,1)$.

31. 设 $\{\xi_k\}$ 为相互独立的随机变量序列，成立中心极限定理，则它服从大数定律的充要条件是 $Var(\sum_{k=1}^n \xi_k) = 0(n)$.
证　充分性由马尔科夫大数定律即得.
必要性记 $B_n^2 = Var(\sum_{k=1}^n \xi_k)$. 设 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律. 由中心极限定理，　$\forall x > 0, \epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k - E\xi_k)}{B_n}\right| < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^n(\xi_k - E\xi_k)| < \epsilon\right\} = 1$$

故

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{B_n}{n}\cdot\frac{1}{B_n}|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)|<\epsilon\right\}=P\left\{\cdot\frac{1}{B_n}|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)|<\epsilon\frac{n}{B_n}\right\}\to 1.$$

因而当 $n\to\infty$ 时必有 $\frac{\epsilon n}{B_n}\to\infty$, 即 $\frac{B_n}{n}\to 0$. 所以 $Var(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=0(n)$.

32. 取 $\Omega=(0,1]$, F 为其中波雷尔全体所成的域. 对任一事件 $A=\{\omega\in(a,b)\subset\Omega\}$, 定义 $P(A)=b-a$. 现定义

$$\xi(\omega)\equiv 0,\quad \xi_n(\omega)=\begin{cases} n^{1/r}, & 0<\omega\le 1/n;\\ 0, & 1/n<\omega\le 1.\end{cases}$$

求证: $\xi_n\longrightarrow\xi\quad(P)$, 但 $\xi_n\longrightarrow\xi\quad(L_r)$ 不成立.

证 $0<\epsilon<1$, 则

$$P\{|\xi_n-\xi|>\epsilon\}=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty).$$

故 $\xi_n\longrightarrow\xi\quad(P)$, 而 $E|\xi_n-\xi|^r=1$, 故 $\xi_n\longrightarrow\xi\quad(L_r)$ 不成立.