第十一章　Cauchy 积分公式的应用

假设 E 为平面集合，复值函数 $f : E \to \mathbb{C}$ 连续，定义

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|.$$

如果 E 为紧集，熟知 $\|f\|_E = \max_{z\in E} |f(z)|$.

本讲介绍 Cauchy 积分公式的几个直接而巧妙的应用，包括

- Cauchy 不等式
- Liouville 定理
- 代数学基本定理
- Riemann 可去奇点定理
- 最大模原理

11.1　Cauchy 不等式

定理 11.1. (Cauchy) 假设 f 在圆盘 $D = D(z_0, R)$ 上全纯，则对任意 $n \geq 0$, 成立

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \|f\|_D.$$

证明： 任取 $r \in (0, R)$, 则 f 在 $\overline{D_r} = \overline{D(z_0, r)}$ 上全纯。由 Cauchy 积分公式以及导数公式知

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

利用复积分的基本不等式, 得

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{n+1}}|d\zeta| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{\|f\|_D}{r^{n+1}}2\pi r=\frac{n!}{r^n}\|f\|_D. \end{aligned}$$

上式对任意 $r<R$ 都成立。令 $r\to R^-$ 得结论。 □

11.2 Liouville 定理

复平面上的全纯函数称为整函数。

定理 11.2. (Liouville, 1847) 有界整函数必为常数。

证明 1：假设 f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯且 $\|f\|_{\mathbb{C}}<+\infty$。对任意 $z\in\mathbb{C}$, 以及任意 $R>0$, 在圆盘 $D=D(z,R)$ 上应用 Cauchy 不等式，

$$|f'(z)|\leq\frac{1}{R}\|f\|_D\leq\frac{\|f\|_{\mathbb{C}}}{R}.$$

上式对任意 $R>0$ 都成立，令 $R\to\infty$，得 $f'(z)=0$。由 z 的任意性可知，$f'\equiv 0$。这说明 f 为常数。 □

此证明利用了 Cauchy 不等式，而 Cauchy 不等式又依赖于 Cauchy 积分公式。下面给出直接利用 Cauchy 积分公式的证明。

证明 2：对任意 $z\in\mathbb{C}$, 取 $R>|z|$, 利用 Cauchy 积分公式得

$$f(z)-f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)f(\zeta)d\zeta.$$

利用积分基本不等式，

$$|f(z)-f(0)|\leq\frac{M}{2\pi}\int_{|z|=R}\left|\frac{z}{(\zeta-z)\zeta}\right||d\zeta|\leq\frac{M|z|}{R-|z|}.$$

上式对任意 $R>|z|$ 都成立，令 $R\to\infty$，得 $f(z)=f(0)$。由 z 的任意性知 $f\equiv f(0)$。 □

11.3 代数学基本定理

定理 11.3. (代数学基本定理) 非常数复多项式在复平面上必有零点.

代数学基本定理在数学中有基本的重要性。很多数学家如 d'Alembert Euler，Lagrange 等都给出过不严谨的证明。第一个严格证明通常被认为是 Gauss 在 1799 年的博士论文中给出的。Gauss 一生中给出过 4 个证明，但这些证明并未用到复变函数理论。自复变证法一出，余证皆废。

下面给出基于复变方法的证明。为此，先考虑多项式的一个性质。假设 $P(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0$ 为 $d \geq 1$ 次复多项式, $a_d \neq 0$。注意到

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \left| a_d z^d \left(1 + \frac{a_{d-1}}{a_d z} + \cdots + \frac{a_0}{a_d z^d} \right) \right| \\ &\geq |a_d||z|^d \left(1 - \frac{|a_{d-1}|}{|a_d z|} \cdots - \frac{|a_0|}{|a_d z^d|} \right). \end{aligned}$$

由此可知，存在 $R_0 > 0$, 当 $|z| > R_0$ 时, $|P(z)| \geq |a_d||z|^d/2$。因此, 当 $|z| \to +\infty$ 时，$|P(z)| \to +\infty$。

下面将利用这一性质，给出代数学基本定理的证明。

证明 1：如果 P 没有零点，则 $f = 1/P$ 也是整函数，它满足当 $|z| \to +\infty$ 时, $|f| \to 0$。这说明 f 有界。由 Liouville 定理知, f 为常数, 从而 P 为常数，矛盾。 □

下面给出一个更直接的证明, 只依赖于 Cauchy 积分公式。这个证明由 Zalcman 在 1978 年给出，后来被 Schep 于 2009 年重新发现。

证明 2：同样用反证法。假设 P 没有零点, 对 $f = 1/P$ 应用 Cauchy 积分公式, 得到

$$\int_{|z|=\rho} \frac{dz}{zP(z)} = \frac{2\pi i}{P(0)} \neq 0,$$

这里, $\rho > R_0$。另一方面, 利用积分的基本不等式，

$$\left| \int_{|z|=\rho} \frac{dz}{zP(z)} \right| \leq \int_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|zP(z)|} \leq \frac{2\pi}{\min_{|z|=\rho} |P(z)|} \leq \frac{4\pi}{|a_d|\rho^d}.$$

上式右端当 ρ 足够大时可取值任意小，说明左端必为 0, 矛盾。 □

11.4 Riemann 可去奇点定理

假设 Ω 为平面区域，$z_0 \in \Omega$，f 在 $\Omega \setminus \{z_0\}$ 上全纯，如果可适当定义 f 在 z_0 的取值，使 f 在 Ω 上全纯，则称 z_0 为 f 的可去奇点 (removable singularity)。

定理 11.4. (Riemann) 假设 Ω 为平面有界区域，$z_0 \in \Omega$，f 在 $\Omega \setminus \{z_0\}$ 上全纯，在 z_0 点满足

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \ \big(\Longleftrightarrow |f(z)| = o(|z - z_0|^{-1}) \big),$$

则 z_0 是 f 的可去奇点。

证明: 取 $R > 0$ 使 $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$, 对任意 $\epsilon \in (0, R]$, f 在环域 $A_\epsilon = \{\epsilon < |z - z_0| < R\}$ 的闭包上全纯。

任意取定 $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, 取 $0 < \epsilon < |z - z_0|$。在 A_ϵ 上对 f 用 Cauchy 积分公式得：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = I_R(z) - I_\epsilon(z), \ z \in A_\epsilon,$$

这里

$$I_\rho(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \rho \in \{\epsilon, R\}.$$

由 Cauchy 型积分的性质知，I_R 是 $D(z_0, R)$ 上的全纯函数。为证明 z_0 是 f 的可去奇点，下面将证明 $I_\epsilon(z) = 0$。这将表明 $f(z) = I_R(z), z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$。因此可定义 $f(z_0) = I_R(z_0)$ 使 f 在 Ω 上全纯。

利用积分基本不等式，对 $I_\epsilon(z)$ 做估计

$$|I_\epsilon(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0, \epsilon)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \le \frac{\epsilon \|f\|_{\partial D(z_0, \epsilon)}}{|z - z_0| - \epsilon}.$$

由条件 $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ 可知，当 $\epsilon \to 0$ 时,

$$\epsilon \|f\|_{\partial D(z_0, \epsilon)} = \max_{\zeta \in \partial D(z_0, \epsilon)} |(\zeta - z_0) f(\zeta)| \to 0.$$

考虑到等式 $I_\epsilon(z) = I_R(z) - f(z)$ 右端与 ϵ 无关，因此有 $I_\epsilon(z) = 0$.

11.5 最大模原理

定理 11.5. (最大模原理) 假设 Ω 为平面区域，f 在 Ω 上全纯。则要么 f 为常值函数，要么

$$|f(z)| < \|f\|_\Omega, \ \forall z \in \Omega.$$

此定理对区域的边界没有任何要求。最大模原理说明, 非常值的全纯函数, 不可能在区域内部达到最大模。如果进一步假设 f 可连续延拓到边界 $\partial\Omega$, 此时分两种情况讨论

- 如果 Ω 为平面有界区域, 则 $|f|$ 的最大值在边界达到, 即 $\|f\|_{\overline{\Omega}} = \|f\|_{\partial\Omega}$;
- 如果 Ω 为平面有界区域, 需要注意的是 $|f|$ 的最大值未必在边界达到，因为可能出现 f 无界 (即 $\|f\|_\Omega = +\infty$)，而 $\|f\|_{\partial\Omega} < +\infty$ 的情况。例如 $f(z) = e^{-iz^2}$, 假设定义域为第一象限 Ω。显然, 当 $z \in \partial\Omega$ 时, $z^2 \in \mathbb{R}$, $|f(z)| = 1$。因此 $\|f\|_{\partial\Omega} = 1$。但 f 在 Ω 中无界: 取 $z = ke^{i\pi/4}, k > 0$, 则 $f(z) = e^{k^2} \to +\infty$ $(k \to \infty)$。因此 $\|f\|_\Omega = +\infty$。

值得注意的是，$|f|$ 的最小值未必在边界达到。如 $f(z) = z$, $|f|$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的最小值在 $z = 0$ 处达到。如果 f 在 $\overline{\Omega}$ 上没有零点，对 $g = 1/f$ 应用最大模原理可知，$|f|$ 的最小值在边界达到。

证明：定义 Ω 的子集

$$E = \{z \in \Omega; |f(z)| = \|f\|_\Omega\}.$$

我们将证明, E 是 Ω 的即开又闭的子集。这样由 Ω 的连通性可知，要么 $E = \emptyset$，要么 $E = \Omega$。如果前者成立, 则对任意 $z \in \Omega$，成立 $|f(z)| < \|f\|_\Omega$, 从而结论成立; 如果后者成立, 说明 $|f|$ 为常数, 进一步得到 f 为常数。

利用 f 的连续性可知, $\Omega \setminus E = \{z \in \Omega; |f(z)| < \|f\|_\Omega\}$ 是 Ω 的开子集, 因此 E 是 Ω 的闭子集 (即任取 E 中的非平凡点列 $\{z_n\}$, 它的聚点要么在 E 中, 要么在边界 $\partial\Omega$ 上)。下面我们将证明 E 是 Ω 的开子集。

任取 $z_0 \in E$, 以及 $r > 0$ 满足 $D(z_0, r) \subset \Omega$, 利用 Cauchy 积分公式可知，对任意 $\rho < r$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

两边取模, 并利用积分基本不等式,

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta, \ \forall \rho < r.$$

由 $|f|$ 的连续性以及假设条件 $z_0 \in E$ 知, 上式成立必然有

$$|f(z_0)| = |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|, \ \forall \rho < r, 0 \le \theta < 2\pi.$$

这说明 $D(z_0, r) \subset E$, 因此 E 是 Ω 的开子集。证毕。 $\square$

下面给出最大模原理的另一种证明，这个证明如同魔术师的戏法。证明的基本道具就是 Cauchy 积分公式。为了更好地突出主要想法，我们不妨将条件加强，将结论减弱, 使得我们不必在技术细节上分心。

假设 $\partial\Omega$ 由有限条分段光滑的简单闭曲线组成，f 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯，我们将证明 $\|f\|_{\overline{\Omega}} = \|f\|_{\partial\Omega}$。

由 Cauchy 积分公式可知

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad z \in \Omega.$$

利用积分的基本不等式, 得

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{\ell(\partial\Omega)}{d(z,\partial\Omega)}\|f\|_{\partial\Omega} = c(z)\|f\|_{\partial\Omega}.$$

这里, $\ell(\partial\Omega)$ 表示边界的长度, $c(z) = \ell(\partial\Omega)/(2\pi d(z,\partial\Omega))$ 只与 z 有关，不依赖于 f。显然, 对任意整数 $n \ge 1$, f 的 n 次幂 f^n 是 $\overline{\Omega}$ 上的全纯函数。在上面的不等式中，将 f 换成 f^n 得

$$|f(z)|^n \le c(z)\|f\|_{\partial\Omega}^n \Longrightarrow |f(z)| \le \sqrt[n]{c(z)}\|f\|_{\partial\Omega}.$$

令 $n \to \infty$ 可得 $\sqrt[n]{c(z)} \to 1$, 因此有

$$|f(z)| \le \|f\|_{\partial\Omega},\ \forall z \in \Omega \Longleftrightarrow \|f\|_{\overline{\Omega}} = \|f\|_{\partial\Omega}.$$

这样就完成了定理的证明。

证明中采用的方法称为“兰道技巧”(Landau’s trick), 最早出现在德国数学家 Landau 发表于 1916 年的一篇论文里。

11.6 习题

有一位法国数学家，他生不逢时，出生那年法国爆发了大革命。他的第一份工作是为拿破仑入侵英国的海上舰队服务。他的名字被刻在埃菲尔铁塔上。他是谁?

1. (多项式的系数) 给定多项式 $p(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0$, 假设在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的最大模 $\|p\|_{\mathbb{D}} \le 1$.

(1). 利用 Cauchy 不等式证明 $|a_k| \le 1, 0 \le k \le d$;

(2). 利用不等式

$$\int_{|z|=1}|p(z)|^2|dz| \le \pi$$

证明系数满足更强的不等式

$$\sum_{k=0}^{d} |a_k|^2 \leq 1.$$

(两种办法那种更美好？)

2. (Liouville 定理：另一个观点的证明) 按如下思路，给出 Liouville 定理的又一证明.

(1). 证明对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$, 以及 $r > 0$, 成立平均值公式

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(\zeta,r)} f(z)dxdy.$$

(2). 证明对任意 $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$,

$$|f(z_0) - f(w_0)| \leq \frac{\|f\|_{\mathbb{C}}}{\pi r^2} \text{area}(D(z_0,r)\Delta D(w_0,r)),$$

这里, $E\Delta F$ 表示两个集合的对称差，定义为

$$E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

由此你能否完成证明？

3. (Liouville 定理的一般形式) 假设 f 是整函数, $m \geq 1$ 是整数，满足 $|f(z)| \leq C(1 + |z|^m)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. 证明 f 是次数不超过 m 的多项式。

4. (Liouville 第一定理) 假设 f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯, 称它是双周期的, 如果满足

$$f(z+1) = f(z),\ f(z+\tau) = f(z), \forall z \in \mathbb{C},$$

这里 τ 为虚部不为零的复数. 证明双周期全纯函数必为常数. 这个结论被称为 Liouville 第一定理.

5. (Liouville 定理的应用) 假设 f 是非常数的整函数，证明其值域 $f(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$ 中稠密. 即：对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$, 存在点列 $\{z_n\}$, 满足 $f(z_n) \to \zeta$.

6. (最大模原理的应用) 利用最大模原理证明代数学基本定理。(提示：对 $f = 1/p$ 应用最大模原理)

7. (最大模原理的应用) 假设 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯，证明

$$\max_{|z|=1} |\bar{z} - f(z)| \geq 1.$$

等号成立的充要条件是什么?

8. (代数学基本定理的又一证明) 利用 Cauchy 积分定理, 按照如下思路给出另一种证明: 假设 $P(z)$ 为多项式, 定义 $Q(z)=\overline{P(\overline{z})}$. 对于 $\rho>0$, 记半圆周 $C_\rho=\{\rho e^{it};t\in[0,\pi]\}$. 证明

$$P(z)\text{没有零点}\Longrightarrow\int_{-\rho}^{\rho}\frac{dx}{|P(x)|^2}+\int_{C_\rho}\frac{dz}{P(z)Q(z)}=0$$

由此, 你能得到什么矛盾?

9. (代数学基本定理的又一证明) 用不同的方法证明代数学基本定理成了数学家的一大乐趣。这些方法中有不少奇思妙想。它们闪烁着水晶般的光辉，仿佛来自星星。1964 年，一位叫 Boas 的数学家发现了一个巧妙的思路：

如果 P 在复平面上没有零点, 将 $Q(z)=\overline{P(\overline{z})}P(z)$ 取代 P, 可知 Q 是实系数多项式 (等价于在实轴上取值为实数). 因此，不妨假设 P 是 d 次实多项式.

考虑积分

$$I=\int_{|z|=1}\frac{dz}{zP(z+1/z)}=\int_{|z|=1}\frac{z^{d-1}dz}{z^dP(z+1/z)}.$$

请尝试推出矛盾，补足证明细节。