1 第四次作业

问题 1. 证明$\mathbb{R}_l$的拓扑与$\mathbb{R}_K$的拓扑不可比较。

问题 2. 拓扑空间之间的映射f如果把开集映成开集*(*对任意开集U，$f(U)$是开集*)*，则称f为开映射。X_1, X_2是两个拓扑空间，证明$\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1, 2)$是开映射。

问题 3. 假设$\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i'$均是$X_i$上的拓扑$(i = 1, 2)$.

(1) 若$\mathcal{T}_i' \subseteq \mathcal{T}_i\,(i = 1, 2)$. 证明$\mathcal{T}_{\mathcal{T}_1' \times \mathcal{T}_2'} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2}$.

*(2) (1)*的逆命题成立吗？

问题 4. 设$\mathcal{C}_i$是$X_i(i = 1, 2)$上的子集族, 令$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{\mathcal{C}_i}(i = 1, 2)$, $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 = \{U_1 \times U_2 | U_i \in \mathcal{C}_i, i = 1, 2\}$, 则

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2} = \mathcal{T}_{\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2}.$$

若$\mathcal{C}_i$是$X_i(i = 1, 2)$上的拓扑（子）基，则$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$是$X_1 \times X_2$上的拓扑（子）基。

问题 5. 设$X = X_1 \bigcup X_2$, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$分别是$X_1, X_2$上的拓扑，问何时存在$X$上的拓扑$\mathcal{T}$满足$\mathcal{T}_{X_i} = \mathcal{T}_i, i = 1, 2$?