1. ① $\mathring{A} = X\setminus\overline{(X\setminus A)} \iff \overline{(X\setminus A)} = X\setminus\mathring{A}$

$\iff \overline{(X\setminus A)} \subset X\setminus\mathring{A}$ 及 $X\setminus\mathring{A}\subset\overline{(X\setminus A)}$

由于 $X\setminus\mathring{A}$ 是闭集且 $X\setminus A\subset X\setminus\mathring{A}$ 知 $\overline{(X\setminus A)}\subset X\setminus\mathring{A}$.

任取 $x\in X\setminus\mathring{A}$，若 $x\notin\overline{(X\setminus A)}$. 则存在 x 的邻域 U s.t. $U\cap(X\setminus A)=\phi$. 即 $U\subset A$，从而 $x\in\mathring{A}$，与 $x\in X\setminus\mathring{A}$ 矛盾. 故 $x\in\overline{(X\setminus A)}$，$X\setminus\mathring{A}\subset\overline{(X\setminus A)}$

从而我们证明了 $\mathring{A}=X\setminus\overline{(X\setminus A)}$.

② $\overline{A} = X\setminus (X\setminus A)^{\circ}$ 可由①直接得到.

事实上，由①知 $\overline{(X\setminus A)} = X\setminus\mathring{A}$，用 $X\setminus A$ 代替 A 即得. $\blacksquare$

2. 由 $A\cup B \subset \overline{A}\cup\overline{B}$，且 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 为闭集，知 $\overline{A\cup B}\subset \overline{A}\cup\overline{B}$

另一方面．由 $A\subset A\cup B\subset \overline{A\cup B}$ 知 $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$，同理 $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$

于是 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$，从而 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对每个 α. $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha}$ 知 $\overline{A_\alpha}\subset \overline{\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha}$

从而 $\bigcup_{\alpha\in J}\overline{A_\alpha}\subset\overline{\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha}$

（反之不一定对，如取 $X=R$，$A_\alpha=\{q\}$，$q\in Q$.

$$\bigcup \overline{A_\alpha} = \bigcup q = Q$$

但 $\overline{\bigcup_{\alpha} A_\alpha} = \overline{Q} = R$ ）.

3. 考虑 $N=\{0,1,2,\cdots\}$ 及其上的余有限拓扑：$\mathcal{T}=\{X\subset N : N\setminus X \text{是有限集}\}\cup\{\emptyset\}$.

$\forall m\in N$. $\{m\}$ 是闭集. 从而 $(N,\mathcal{T})$ 是 T_1 空间.

对序列 $\{x_n=n\}_{n=1}^{\infty}$，其极限点为 $0,1,2,\cdots$.

事实上. $\forall\ m\in N$ 及包含 m 的开集 U. 由于 $N\setminus U$ 是有限集

从而存在充分大的 N_0 s.t. $\forall\ n>N_0$, $x_n=n\in U$

故任意 $m\in N$ 均是 $\{x_n\}$ 的极限点.

4. 我们证明：$X\setminus A' = \{x\in X \mid \exists\, x \text{ 的邻域 } U.\ s.t.\ U\cap A\setminus\{x\}=\phi\}$ 是开集.

任取 $x\in X\setminus A'$，我们证明，对上述 x 的邻域 U (i.e. $U\cap A\setminus\{x\}=\phi$)

有 $U\subset X\setminus A'$.

即证，$\forall y\in U$，存在 y 的邻域 W，s.t. $W\cap A\setminus\{y\}=\phi$.

当 $y=x$ 时. 取 $W=U$ 即可

当 $y\neq x$ 时. 由于 X 是 T_1 空间，存在 y 的邻域 V，$x\notin V$.

取 $W=V\cap U$ 即可.

(事实上. 此时 $W\cap A\setminus\{y\} = V\cap U\cap A\setminus\{y\}\subset V\cap\{x\}\setminus\{y\}=\phi$).

$a,b\in R$

5. (1). 在 $\mathbb{R}_l$ 中，$[a,b)$ 是开集，故 $(-\infty,a)\cup[b,+\infty)$ 是闭集.

$$(-\infty,a)=\bigcap_{k=1}^{\infty}(-\infty,a)\cup[a+k,+\infty)$$

$$[b,+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}(-\infty,b-k)\cup[b,+\infty)$$ 均是闭集.

（事实上，它们也均为开集.
$$(-\infty,a)=\bigcup_{k=1}^{\infty}[a-k,a)$$
$$[b,+\infty)=\bigcup_{k=1}^{\infty}[b,b+k)$$ ）

故 $[a,b)=(-\infty,b)\cap[a,+\infty)$ 也是闭集

由 $(a,b)\subset\overline{(a,b)}\subset[a,b)$，且 $\forall\,[c,d)$ s.t. $a\in[c,d)$，

$[c,d)\cap(a,b)\neq\emptyset$ $(a,b,c,d\in R)$. 知 $a\in\overline{(a,b)}$

从而 $\overline{(a,b)}=[a,b)$

(2) $C=\{[a,b)\mid a,b\in Q\}$ 是 R 上的拓扑基：

① $\forall x\in R$，$\exists\ ([x]-1,[x]+1)\in C$ s.t. $x\in[[x]-1,[x]+1)$

② 若 $x\in[a,b)\cap[c,d)$，$a,b,c,d\in Q$.

不妨假定 $b>c$（否则 $x\in\phi$）.

令 $p=\max\{a,c\}$ $q=\min\{b,d\}$. $p,q\in Q$

则 $x\in[p,q)\subset[a,b)\cap[c,d)$.

仿(1)可知 $[a,b)$，$(-\infty,a)$，$[b,+\infty)$ 即开又闭，这里 $a,b\in Q$.

$(-\infty,0)$ 为开集，$(\sqrt{2},+\infty)$ 为开集. 这是因为 $\exists\{x_n\}\in Q$. $x_n\downarrow\sqrt{2}$.

（如取 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$. $x_1>\sqrt{2}$）. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[x_n,+\infty)=(\sqrt{2},+\infty)$. 为开集

故 $[0,\sqrt{2}]=R\setminus(-\infty,0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ 为闭集.

$(0,\sqrt{2})\subset\overline{(0,\sqrt{2})}\subset[0,\sqrt{2}]$

再说明：$0,\sqrt{2}\in\overline{(0,\sqrt{2})}$

$\forall[c,d)$ s.t. $0\in[c,d)$，$[c,d)\cap(0,\sqrt{2})\neq\phi$，$(c,d\in Q)$.

$\forall[c,d)$ s.t. $\sqrt{2}\in[c,d)$ 由 $c\in Q$. 必须 $c<\sqrt{2}$.

也有 $[c,d)\cap(0,\sqrt{2})\neq\phi$.

于是 $\overline{(0,\sqrt{2})}=[0,\sqrt{2}]$.

对 $(\sqrt{2},3)$，类似. 首先. $\exists\{x_n\}\subset Q$. $x_n\nearrow\sqrt{2}$. 取 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$，$x_1<\sqrt{2}$

知 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-\infty,x_n)=(-\infty,\sqrt{2})$ 为开集.

又由 $[3,+\infty)$ 为开集. 知 $[\sqrt{2},3)=R\setminus(-\infty,\sqrt{2})\cup[3,+\infty)$ 为闭集

$(\sqrt{2},3)\subset\overline{(\sqrt{2},3)}\subset[\sqrt{2},3)$. 再说明 $\sqrt{2}\in\overline{(\sqrt{2},3)}$：

$\forall[c,d)$ s.t. $\sqrt{2}\in[c,d)$，有 $\sqrt{2}<d$.

从而 $[c,d)\cap(\sqrt{2},3)\neq\phi$

于是 $\overline{(\sqrt{2},3)}=[\sqrt{2},3)$

(3) 序拓扑中，$(-\infty, a)$，$(b, +\infty)$ 为开集（或 $[m, a)$，$(b, M]$ 为开集）.

知 $[a,b] = R \setminus (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ 为闭集.

$\overline{(a,b)} \subset [a, b]$，等号成立即 $a, b \in \overline{(a,b)}$

~~$\Leftrightarrow$ (a,b) 中无最大、最小值.~~

$a \in \overline{(a,b)} \Leftrightarrow$ 不存在 $c > a$, s.t. $(a,c) \cap (a,b) = \phi$

$b \in \overline{(a,b)} \Leftrightarrow$ 不存在 $d < b$ s.t $(d,b) \cap (a,b) = \phi$