正态的极限

May 10, 2020

设X是一随机变量，X_n是一列随机变量.
(1)如果对于F_X的每个连续点$x \in \mathbb{R}$，都有$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(x)$，则称$X_n$依分布收敛于$X$，记为$X_n \xrightarrow{d} X$.

设X是一随机变量, X_n是一列随机变量.
(1)如果对于F_X的每个连续点$x \in \mathbb{R}$, 都有$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(x)$, 则称$X_n$依分布收敛于$X$, 记为$X_n \xrightarrow{d} X$.
(2) 如果X 和X_n, $n \geq 1$, 是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的, 且对任何$\varepsilon > 0$都有,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0,$$

则称X_n依概率收敛于X, 记为$X_n \xrightarrow{P} X$.

(3) 如果X 和X_n, $n \geq 1$, 是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的, 且存在$\Omega_0 \in \mathcal{F}$ 使得$P(\Omega_0) = 1$且对任意$\omega \in \Omega_0$有$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, 则称$X_n$以概率1收敛或几乎必然收敛于$X$, 记为$X_n \to X$ $a.s.$

性质： (1) 如果$X_n \to X$ $a.s.$, 那么$X_n \xrightarrow{P} X$.

性质： (1) 如果$X_n \to X$ $a.s.$, 那么$X_n \xrightarrow{P} X$.
(2) 如果$X_n \xrightarrow{P} X$, 那么$X_n \xrightarrow{d} X$.

Theorem

(Lévy连续性定理): 如果$X_n \xrightarrow{d} X$, 则$\phi_n(t)$关于t在任何有界区间内一致收敛于$\phi(t)$, 这里$\phi_n(t) = E(e^{itX_n})$为X_n的特征函数, $\phi(t) = E(e^{itX})$为X的特征函数.

Theorem

(逆极限定理): 设$\phi_n(t) = E(e^{itX_n})$为X_n的特征函数. 如果对于每一个$t \in \mathbb{R}$, 都有$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$, 且$\phi(t)$在$t = 0$处连续, 则$\phi(t)$一定是某个随机变量$X$的特征函数, 且$X_n \xrightarrow{d} X$.

Theorem

设$X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, 且$X_n \xrightarrow{d} X$, 则$X$也是正态分布,即存在$\mu$和$\sigma \geq 0$使得$X \sim N(\mu, \sigma^2)$.(这里$\sigma$可以为0, 此时$P(X = \mu) = 1$.)

Theorem

设$X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, 且$X_n \xrightarrow{d} X$, 则$X$也是正态分布,即存在$\mu$和$\sigma \geq 0$使得$X \sim N(\mu, \sigma^2)$.(这里$\sigma$可以为0, 此时$P(X = \mu) = 1$.)

证明: 令$\phi_n(t) = E(e^{itX_n})$为X_n的特征函数,
则$\phi_n(t) = e^{it\mu_n - t^2\sigma_n^2/2}$. 令$\phi(t) = E(e^{itX})$为$X$的特征函数. 由于$X_n \xrightarrow{d} X$, 由Lévy连续性定理得:
$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$.

Theorem

设$X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, 且$X_n \xrightarrow{d} X$, 则$X$也是正态分布,即存在$\mu$和$\sigma \geq 0$使得$X \sim N(\mu, \sigma^2)$.(这里$\sigma$可以为0, 此时$P(X = \mu) = 1$.)

证明: 令$\phi_n(t) = E(e^{itX_n})$为X_n的特征函数,
则$\phi_n(t) = e^{it\mu_n - t^2\sigma_n^2/2}$. 令$\phi(t) = E(e^{itX})$为$X$的特征函数. 由于$X_n \xrightarrow{d} X$, 由Lévy连续性定理得:
$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$.
只需证明存在μ和$\sigma \geq 0$使得$\phi(t) = e^{it\mu - t^2\sigma^2/2}$.

由$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\phi(t)$. 推出$\lim_{n\to\infty}|\phi_n(t)|=|\phi(t)|$,
即$\lim_{n\to\infty}e^{-t^2\sigma_n^2/2}=|\phi(t)|$.
特别地,

$$\lim_{n\to\infty}e^{-\sigma_n^2/2}=|\phi(1)|\leq 1.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}e^{-t^2\sigma_n^2/2}=(|\phi(1)|)^{t^2},$$

从而$|\phi(t)|=|\phi(1)|^{t^2}$.

由$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\phi(t)$. 推出$\lim_{n\to\infty}|\phi_n(t)|=|\phi(t)|$,
即$\lim_{n\to\infty}e^{-t^2\sigma_n^2/2}=|\phi(t)|$.
特别地,

$$\lim_{n\to\infty}e^{-\sigma_n^2/2}=|\phi(1)|\leq 1.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}e^{-t^2\sigma_n^2/2}=(|\phi(1)|)^{t^2},$$

从而$|\phi(t)|=|\phi(1)|^{t^2}$. 因为$\lim_{t\to 0}\phi(t)=\phi(0)=1$, 所以$\phi(1)\neq 0$. 因此存在$\sigma\geq 0$使得$|\phi(1)|=e^{-\sigma^2/2}$从而$|\phi(t)|=e^{-t^2\sigma^2/2}$.

令$f_n(t)=e^{i\mu_n t}=e^{t^2\sigma_n^2/t}\phi_n(t)$. 则$f_n$是常数值随机变量$\mu_n$的特征函数. 令$f(t)=e^{t^2\sigma^2/t}\phi(t)$,
则$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)$ 且f在$t=0$连续, 由逆极限定理, 存在随机变量Y使得$\mu_n \xrightarrow{d} Y$. 对于F_Y的连续点y有:
$F_Y(y)=\lim_{n\to\infty}P(\mu_n\le y)$为0或1.
令$\mu=\inf\{y:F_Y(y)=1\}$, 则可证$P(Y=\mu)=1$从而$f(t)=e^{it\mu}$.