1. 设 $\tau \neq \tau'$. 若 τ, τ' 可比较，不妨设 $\tau \subsetneq \tau'$

考虑恒同映射 $f = id : (X, \tau') \longrightarrow (X, \tau)$

f 是一一映射，且 f 连续，因为 $\tau \subset \tau'$

再由 X 是紧致 Hausdorff 空间，知 f 是同胚

从而 $\tau = \tau'$，矛盾！

2. $([0,1]^{\omega}$, 箱拓扑) 的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$U_i := [0,1]^i \times \prod_{n>i} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

没有有限子覆盖，从而非紧致.

3. $(\Rightarrow)$ 现 $f: X\to Y$ 连续. 任取 $(x,y)\in X\times Y\setminus G_f$

由 $y\neq f(x)$, $y, f(x)\in Y$，且 Y 是 Hausdorff 空间.

知 存在开集 $U, V\subset Y$, $y\in U$. $f(x)\in V$. $U\cap V=\phi$.

再由 f 连续. 知 存在 X 中开集 W，$x\in W$. 且 $f(W)\subset V$

于是 $(x,y)\in W\times U\subset X\times Y\setminus G_f$.

故 $X\times Y\setminus G_f$ 是 $X\times Y$ 中开集，G_f 在 $X\times Y$ 中闭.

$(\Leftarrow)$ 现 G_f 是 $X\times Y$ 中闭集. 任取 $x_0\in X$,

V 是 $f(x_0)$ 的一个开邻域，由 $X\times(Y\setminus V)$ 是 $X\times Y$ 中闭集

$G_f\cap X\times(Y\setminus V)$ 也是 $X\times Y$ 中闭集.

再由作业第4题结论，知 $\pi_1(G_f\cap X\times(Y\setminus V))$ 是 X 中闭集.

注意到，对 $(x,y)\in G_f\cap X\times(Y\setminus V)$，有 $y=f(x)$，$y\notin V$.

即 $\pi_1(G_f\cap X\times(Y\setminus V))=\{x\in X: f(x)\notin V\}$.

故 $f^{-1}(V)=X\setminus \pi_1(G_f\cap X\times(Y\setminus V))$ 是 X 中开集.

由 V 的任意性，知 f 连续.

（证明 f 连续只需考虑那些与 $f(X)$ 交非空的开集）

4. Y 是紧空间，为证明 $\pi_1: X\times Y \longrightarrow X$ 是闭映射:

任取闭集 $A \subset X\times Y$，需证 $\pi_1(A)$ 是 X 中闭集.

$\forall x \in X\setminus \pi_1(A)$，由 $\{x\}\times Y \subset X\times Y\setminus A$

且 $X\times Y\setminus A$ 为开集，Y 紧致，根据管状引理知

$\{x\}\times Y \subset W\times Y \subset X\times Y\setminus A$，$W$是$x$的一个开邻域.

故 $x \in W \subset X\setminus \pi_1(A)$，于是$X\setminus\pi_1(A)$是开集. $\square$