1. 反证，若Q在q处是局部紧的，则存在紧子集C和包含q的开集U（均在Q内）

s.t. $q\in U\subset C$. 从而必存在闭区间 $[a,b]$, s.t. $[a,b]\cap Q\subset C$

由于 $[a,b]\cap Q$ 是C中闭集，C是紧的，故 $[a,b]\cap Q$ 也是紧的。

但这已导致矛盾：因为存在无穷序列 $\{x_n\}\subset[a,b]\cap Q$, $x_n\to r\notin Q$.

故 $[a,b]\cap Q$ 非极限点紧致，从而非紧.

扫描全能王 创建

2. 对离散拓扑 $(X, P(X))$ 中任意一点 x. $x \in \{x\} \subset \{x\}$.

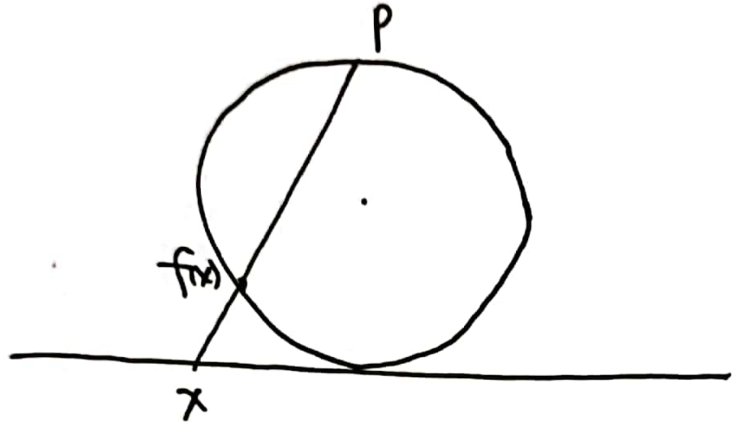
$\{x\}$ 是包含 x 的开集，也是紧的. 从而 $(X, P(X))$ 为局部紧致.

考虑 $id: (\mathbb{Q}, \text{离散拓扑}) \longrightarrow (\mathbb{Q}, \mathbb{R}\text{的子拓扑})$.

则 id 是连续映射，但将局部紧映成非局部紧.

扫描全能王 创建

3.



f单射显然.

f连续：注意到 $f(\mathbb{R}^1)=S^1\setminus\{p\}$，对任意开集 $V\subset S^1$，$V\cap f(\mathbb{R}^1)$ 是一些开圆弧的并（不含p），仅需考虑一段圆弧情形. 此时 $f^{-1}(V\cap f(\mathbb{R}^1))$ 形如 $(-\infty,a)$，$(b,+\infty)$ 或 (a,b). 均为 $\mathbb{R}^1$ 中开集. 故f连续.

再说明 f: $\mathbb{R}^1\longrightarrow(f(\mathbb{R}^1)$, 子拓扑) 是同胚.

只需说明 $f^{-1}: f(\mathbb{R}^1)\longrightarrow\mathbb{R}^1$ 连续，同样，只需考虑任一开区间 (a,b).

$$(f^{-1})^{-1}((a,b)) = V$$ 为 S^1 上一段开圆弧，为 S^1 上开集.

故 f^{-1} 连续.

扫描全能王 创建

4. $X_1 \times X_2$ 是度量空间： 度量 d 可为：$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_1(x_1,x_2), d_2(y_1,y_2)\}$

再说明 $X_1 \times X_2$ 是列紧的，从而紧致：

任取序列 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset X_1 \times X_2$，由 $\{x_i\} \subseteq X_1$，X_1 列紧知

存在子列 $x_{n_i} \to x_0$。再考虑 $\{(x_{n_i}, y_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$，由 $\{y_{n_i}\} \subset Y_1$

同样存在子列 $y_{n_{i_k}} \to y_0$。

从而 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 有收敛子列 $\{(x_{n_{i_k}}, y_{n_{i_k}})\} \to (x_0, y_0)$ ▨

扫描全能王 创建

5. 和4类似。

首先，$\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 是度量空间，其上度量可为 $D(x,y)=\sup\left\{\frac{\bar{d}_i(x_i,y_i)}{i}\middle| i=1,2,\cdots\right\}$

再说明 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 列紧。

任取序列 $\{y_j\}\subset \prod X_i$，$y_j=(y_{j,1},y_{j,2},\cdots y_{j,n},\cdots)$

考虑它们在 X_1 中分量 $y_{1,1},y_{2,1},y_{3,1},\cdots$，

有收敛子列 $\{y_{n_k,1}\}$。即 $\{y_{n_k}\}$ 在 X_1 中收敛。

在 $\{y_{n_k}\}$ 中，再考虑它们在 X_2 中分量

$y_{n_1,2},\ y_{n_2,2},\ \cdots$

有收敛子列（在 X_1,X_2 中均收敛） $\{y_{(n_k)_l,2}\}$

于是再在 $\{y_{(n_k)_l}\}$ 中依次进行。

最后通过对角线法选出收敛序列：

简记： $y_1^{(1)},y_2^{(1)},y_3^{(1)},\cdots$ 在 X_1 中收敛。

$y_1^{(2)},y_2^{(2)},y_3^{(2)},\cdots$ 在 X_1,X_2 中收敛

$\vdots$

最后选取序列 $\{y_n^{(n)}\}$，它在 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 中收敛。

扫描全能王 创建

6. 在I_o^2中，$(0,1)$点的邻域基可为$\left\{\left(\left(0,1-\frac{1}{k}\right),\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right),k=1,2,\cdots\right\}$

任取$(0,1)$的邻域基$\left(\left(0,1-\frac{1}{k}\right),\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right)=U_k$.

当$\frac{1}{n}<\frac{1}{k}$时. $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{2}\right)\in\left(\left(0,1-\frac{1}{k}\right),\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right)$.

即 U_k 包含了$\{x_n\}$中 $n>k$ 的所有项.

从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 $(0,1)$

扫描全能王 创建