第十章 Cauchy 积分公式

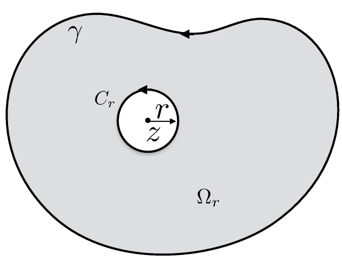
1831 年，Cauchy 证明了全纯函数的一个奇妙性质：全纯函数在区域内部的取值可以由边界值的某种积分表达出来。这一事实被称为 Cauchy 积分公式。

这一公式可以推出全纯函数的很多不平凡的性质，这些性质构成了我们理解全纯函数的不同角度。

10.1 Cauchy 积分公式

定理 10.1. 假设 Ω 是平面区域, 边界是分段光滑的简单闭曲线 γ, f 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯。对任意 $z \in \Omega$, 成立

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$



证明: 对任意 $r \in (0, d(z, \partial\Omega))$, 记 $C_r = \partial D(z,r)$, $\Omega_r = \Omega \setminus \overline{D(z,r)}$, 它是二连通区域。函数 $g(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z)$ 在 $\overline{\Omega_r}$ 上全纯。在二连通区域 Ω_r 上应用 Cauchy-Goursat 积分定理知，$\int_{\partial\Omega_r} g(z)d\zeta = 0$。由此可得

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{C_r}\frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{C_r}\frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta := I_r + J_r.$$

利用基本积分 $\int_{C_r}(\zeta - z)^{-1} d\zeta = 2\pi i$ 得 $J_r = 2\pi i f(z)$, 它与 r 无关。由此知 I_r 亦与 r 无关。另一方面，由积分基本不等式得

$$|I_r| \leq \int_{C_r} \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| \leq 2\pi \max_{\zeta \in C_r} |f(\zeta) - f(z)|.$$

由 f 的连续性知当 $r \to 0$ 时，$\max_{\zeta \in C_r} |f(\zeta) - f(z)| \to 0$。而 I_r 与 r 无关，因此必然为 0。由此得积分公式。 □

如果 Ω 是平面多连通区域，边界由有线条分段光滑的简单闭曲线组成，此时由多连通区域的 Cauchy-Goursat 积分定理可知，Cauchy 积分公式仍然成立。

例题 10.1. 计算积分

$$\int_{|z|=r} \frac{z^3}{(z-a)(z-b)} dz,$$

其中 $|a| < r < |b|$。

解： 定义函数

$$f(z) = \frac{z^3}{z-b}.$$

显然 f 在 $\{|z| \leq r\}$ 上全纯，由 Cauchy 积分公式可知，

$$\int_{|z|=r} \frac{z^3}{(z-a)(z-b)} dz = \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) = \frac{2\pi i a^3}{a-b}.$$

10.2 全纯函数的无穷次可微性

Cauchy 积分公式的一个直接应用是证明全纯函数的无穷次可微性。如果仅从全纯函数的定义来看，此性质令人吃惊：仅仅假设复值函数在每一点的导数存在，就能得到它的任意阶导数都存在！这个性质，体现了全纯函数和实值函数的本质不同。

为使讨论更具一般性, 我们研究一类 Cauchy 型积分的性质, 以此说明全纯函数的无穷次可微性。

假设 γ 是平面上有限条分段光滑曲线的并 $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$ (每条曲线不必是简单闭曲线), f 在 γ 上连续。对任意自然数 $n \geq 1$ 以及 $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, 定义如下形式的积分

$$I_n(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

称 I_n 为 Cauchy 型积分, 这里 $\int_\gamma := \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k}$, 每一条曲线都有自然的定向。

定理 10.2. Cauchy 型积分 $I_n(z)$ 关于 z 是 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ (的每一个连通分支) 上的全纯函数，满足

$$I_n'(z) = nI_{n+1}(z).$$

证明： 任意取定 $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$。定理等价于证明当 $w\to z$ 时，

$$\frac{I_n(w)-I_n(z)}{w-z} - nI_{n+1}(z)\to 0.$$

上式又等价于

$$\int_\gamma \left[\frac{1}{w-z}\left(\frac{1}{(\zeta-w)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}\right)-\frac{n}{(\zeta-z)^{n+1}}\right]f(\zeta)d\zeta\to 0.$$

上式 [] 中函数为简记为 K, $a=\zeta-w, b=\zeta-z$, 则 $w-z=b-a$. 利用等式 $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})$, 得

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^n}-\frac{1}{b^n}\right)-\frac{n}{b^{n+1}}\\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^{k-1}b^{n-k}}-\frac{n}{b^{n+1}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b^{n+1-k}}\left(\frac{1}{a^k}-\frac{1}{b^k}\right)\\
&= (b-a)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a^j b^{n+2-j}}.
\end{aligned}$$

记 $d=d(z,\gamma)$, 当 $w\in D(z,d/2)$ 时，对任意 $\zeta\in\gamma$, 有

$$|\zeta-w|\ge|\zeta-z|-|z-w|\ge d-d/2\ge d/2.$$

因此

$$|K| \le |w-z|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{2^j}{d^{n+2}} := C_n(z)|w-z|.$$

由此可知，当 $w\in D(z,d/2)$ 时，

$$\left|\frac{I_n(w)-I_n(z)}{w-z}-nI_{n+1}(z)\right|\le C_n(z)|w-z|\int_\gamma|f(\zeta)||d\zeta|.$$

上式右端当 $w\to z$ 时, 趋于 0。这说明 I_n 在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 上全纯，且 $I_n'=nI_{n+1}$。 □

利用全纯函数的 Cauchy 积分公式，并反复应用上述定理，便可得到全纯函数的无穷次可微性:

定理 10.3. 假设 Ω 是平面区域，边界由有限条分段光滑的简单闭曲线组成，f 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯，则 f 有任意阶导数, 导函数全纯且由下式给出

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\ n\geq 1.$$

10.3 Morera 定理

定理10.3的一个直接推论便是 Morera 定理, 可视为 Goursat 定理之逆定理：

定理 10.4. (Morera) 假设 f 在平面区域 Ω 上连续, 并且沿着 Ω 内任意三角形边界积分为 0, 则 f 在 Ω 中全纯.

证明： 由于全纯是局部性质，因此只需在任一点的某个圆盘邻域证明即可。任取一点 $z_0\in\Omega$, 取 $r>0$, 使得 $D(z_0,r)\subset\Omega$, 对任一点 $z\in D(z_0,r)$, 定义

$$F(z)=\int_{[z_0,z]}f(\zeta)d\zeta.$$

下证 F 在 $D(z_0,r)$ 内全纯。任取一点 $w\in D(z_0,r)$, 显然三角形 $\Delta z_0wz\subset D(z_0,r)$. 由假设条件

$$F(z)-F(w)-\int_{[w,z]}f(\zeta)d\zeta=\left(\int_{[z_0,z]}+\int_{[w,z_0]}+\int_{[z,w]}\right)f(\zeta)d\zeta=0.$$

利用 $\int_{[w,z]}1d\zeta=z-w$ 以及 $\int_{[w,z]}1|d\zeta|=|z-w|$, 可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w}-f(w)\right| &= \left|\frac{1}{z-w}\int_{[w,z]}(f(\zeta)-f(w))d\zeta\right|\\ &\leq \frac{1}{|z-w|}\int_{[w,z]}|f(\zeta)-f(w)||d\zeta|\\ &\leq \max_{\zeta\in[w,z]}|f(\zeta)-f(w)|\\ &\to 0 \text{ as } z\to w.\end{aligned}$$

上式说明, 极限

$$\lim_{z\to w}\frac{F(z)-F(w)}{z-w}=f(w).$$

这说明 F 全纯, 并且 $F'(w)=f(w)$。由定理10.3知，全纯函数的导数也全纯, 因此 f 全纯。 □

10.4 Cauchy 积分公式的一种推广

本节利用 Green 公式将全纯函数的 Cauchy 积分公式推广到一类实可微且偏导数连续的复值函数。

定理 10.5. (复 Green 公式) 假设平面单连通区域 D 的边界是分段光滑的简单闭曲线, g 在 $\overline{D}$ 上实可微且有一阶连续偏导数, 则成立

$$\int_{\partial D} g(z)dz = 2i\int_D \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}dxdy, \quad \int_{\partial D} g(z)d\bar{z} = -2i\int_D \frac{\partial g}{\partial z}dxdy.$$

特别地, D 的面积可以表示为复积分

$$\mathrm{area}(D) = -\frac{i}{2}\int_{\partial D} \bar{z}dz = \frac{i}{2}\int_{\partial D} zd\bar{z}.$$

证明: 利用 Green 公式对复值函数同样成立 (实部虚部分别验证即可) 可得,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} g(z)dz &= \int_{\partial D} g(z)dx + i\int_{\partial D} g(z)dy \\ &= \int_D (ig_x - g_y)dxdy = 2i\int_D \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}dxdy.\end{aligned}$$

同理可证另一公式。令 $g(z) = z$ 或 $\bar{z}$ 可得面积公式。 □

定理 10.6. (Pompeiu) 假设平面单连通区域 Ω 的边界是分段光滑的简单闭曲线, f 在 $\overline{\Omega}$ 上实可微且有一阶连续偏导数，则成立积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}dudv, \quad z \in \Omega.$$

其中 $\zeta = u + iv$.

证明: 对任意 $r \in (0, d(z, \partial\Omega))$, 记 $C_r = \partial D(z, r)$, $\Omega_r = \Omega \setminus \overline{D(z, r)}$, 它是二连通区域。对函数 $g(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z)$ 在 $\overline{\Omega_r}$ 上利用复 Green 公式得

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\Omega_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}dudv.$$

其中

$$\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{C_r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{C_r} \frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta := I_r + J_r.$$

类似 Cauchy 积分公式的证明可知 $J_r = 2\pi i f(z)$, 且当 $r \to 0$ 时，$I_r \to 0$。另一方面，可以验证 (留作习题)

$$\Big|\int_{D(z,r)} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} dudv\Big| \le 2\pi r \max_{D(z,r)} \Big|\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\Big| \to 0,\ \text{as } r \to 0.$$

因此有

$$\int_{\Omega_r} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} dudv \to \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} dudv,\ \text{as } r \to 0.$$

在复 Green 公式中令 $r \to 0$, 可得积分公式。 □

10.5 习题

“我每天早晨 4 点起床，从此开始忙碌。... 工作并不让我感觉疲惫，恰恰相反，它让我精力充沛，身体健康。”

—Cauchy, 1810

1. (积分计算) 假设 γ 是一个椭圆的边界，$a \notin \gamma$，计算积分

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz.$$

2. (积分计算) 计算积分

$$\int_{|z|=1} \frac{3z-1}{z(z-2)} dz;\quad \int_{|z|=2\pi} \frac{z^3}{(z-\pi)^3} dz.$$

3. (Cauchy 型积分) 给定单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上的连续函数 $f(z) = z + \bar{z}$, 考虑 Cauchy 型积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ z \in \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}.$$

求 F 的表达式。

4. (Cauchy 型积分的导数) 给定一条平面上的分段光滑闭曲线 γ, 以及 γ 邻域上的全纯函数 f, 考虑 Cauchy 型积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma.$$

利用分部积分证明对任意 $n \ge 1$, 成立

$$F^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

5. (积分等式) 假设 f 在单位圆盘闭包 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯,

(1). 证明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases}\overline{f(0)}, & |z|<1\\ \overline{f(0)}-\overline{f(1/\overline{z})} & |z|>1.\end{cases}$$

(2). 当 $|z|<1$ 时, 计算

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}|d\zeta|.$$

(3). 假设 p 是多项式, 证明

$$\int_{|z|=1}\overline{p(z)}dz = 2\pi i\overline{p'(0)}.$$

6. (积分变形) 假设 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, 通过用两种方式计算积分

$$\int_{|\zeta|=1}\left(2\pm\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)\right)\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

证明

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = f(0)-\frac{1}{2}f'(0).$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = f(0)+\frac{1}{2}f'(0).$$