ODE笔记10：Lyapunov稳定性（渐近稳定）等

$\vec{X}' = F(t,\vec{X}), F$ 连续，关于 $\vec{X}$ Lip连续，设 $\vec{X}=\phi(t), t\in(\beta,+\infty)$

定义：若 $\forall\varepsilon>0, \forall t_0>\beta, \exists\,\delta(\varepsilon,t_0), st.\exists\,\vec{X}_0, st.\forall\|\vec{X}_0-\phi(t_0)\|<\delta, \begin{cases}\vec{X}'=F(t,\vec{X})\\ \vec{X}(t_0)=\vec{X}_0\end{cases}$ 在 $[t_0,+\infty),\exists\,!\,\vec{X}(t;t_0,\vec{x}_0)$ 且

$\|\vec{X}\left(t;t_0,\vec{x}_0\right)-\phi(t)\|<\varepsilon$，则称 $\vec{X}=\phi(t)$ 是**(Lyapunov)渐近稳定。**

若解 $\vec{X}(t,t_0,\vec{x}_0)$ 在某个 $t_1>t_0$ 无定义，或 $\|\vec{X}\left(t;t_0,\vec{x}_0\right)-\phi(t)\|>\varepsilon_0$，则称 $\vec{X}=\phi(t)$ 为 **(Lyapunov)不稳定。**

Thm2.2：

$A=(a_{ij})_{n\times n}, a_{ij}$ 为常实数。零解渐近稳定 $\iff$ $\forall\lambda, Re\lambda<0.$ 若 $\exists\,\lambda, st. Re\lambda>0 \implies$ 零解不稳定

$$\vec{X}(t)=e^{At}\vec{X}_0+e^{At}\int_0^t e^{-As}R(s,\vec{X}_s(s))ds$$

Thm2.6：

实系数多项式 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0.$ 一切实根有负实部 $\implies a_i>0$

Thm2.7：Routh-Hurwitz准则

实系数 $p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n.\ (a_0>0)$ 有 n 阶**Routh-Hurwitz矩阵**：

$$\Delta_n=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & & & \cdots & & & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & & \cdots & & 0\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0\\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n\end{pmatrix}$$

所有 $p(z)$ 根的实部 <0 $\iff$ Δ_n 的所有顺序主子式 $>0.$

例1： $\begin{cases} x'=-2x+y-z+\sin x\cdot e^{xz^2}\\ y'=\sin x-y+x^2y+z^3xy\\ z'=y-z+x\cos y\end{cases}$

解：考虑 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}'=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+R$，其中 $R=\begin{pmatrix}\sin x\cdot e^{xz^2}-x\\ \sin x-x+x^2y+xyz^3\\ x\cos y-x\end{pmatrix}$，满足 $\lim\limits_{(x,y,z)\to 0}\frac{\|R\|}{\|(x,y,z)\|}=0$

$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$，$\det(A-\lambda E)=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+2$，那么：$\Delta_3=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$|\Delta_1|=3>0,|\Delta_2|=\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}=7>0,|\Delta_3|=14>0\implies A$ 所在特征值实部 <0，那么零解渐近稳定。

例2： $\begin{cases}x'=-x-y+z+\cos x\cdot e^{xz^2}\\y'=x-2y+2z+x^2y+z^3xy\\z'=x+2y+x^2+y^2\cos z\end{cases}$

解：$R=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}x^2\cdot e^{xz^2}\\x^2y+xyz^3\\x^2+y^2\cos z\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-2&1\\1&2&0\end{pmatrix}\iff-\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda+6=0$

由Thm2.6，$\exists\,\lambda,Re\lambda\geq0.\quad p(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda-6$

$p(0)=-6<0,p(2)=10>0.\quad\therefore\exists\,\lambda_*\in(0,2),p(\lambda_*)=0\quad\implies$ 零解不稳定

定正函数：

定义：若（1）$V(0)=0$

（2）$\exists\,h>0,\forall\,0<\|\vec{x}\|\leq h,V(\vec{x})>0$

（3）$V(\vec{x})$ 在 $\|\vec{X}\|\leq h$ 中式 C^1 (连续可微)，则称 $V(\vec{x})$ 是**定正函数。**（**定负函数**与之同理）

将 $V(\vec{x})>0$ 改为 $V(\vec{x})\geq0$，则称之为**常正函数。**

定义：对于方程 $\begin{cases}\vec{X}'=F(\vec{x})\\\vec{X}(0)=\vec{X}_0\end{cases}\quad\forall\varepsilon>0,\exists\,\delta_0,\forall\|\vec{x}_0\|<\delta,\|\vec{X}(t)\|<\varepsilon$，称零解**稳定。**

进一步，若 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\vec{X}(t)\|=0$，则称零解**渐近稳定。**

$V(\vec{x})$ 定正函数：（1）$V(\vec{x})\ll1\iff\|\vec{X}\|\ll1$

（2）$\lim\limits_{t\to\infty}V(\vec{X}(t))=0\iff\lim\limits_{t\to\infty}\|\vec{X}(t)\|=0$

基本性质：$\vec{X}'=F(\vec{X})$. 若定正函数 $V(\vec{X})$ 的全导数 $\bigtriangledown_{\vec{x}}V\cdot F$ 是：

常负函数 $\implies$ 零解稳定

定负函数 $\implies$ 零解渐近稳定

定正函数 $\implies$ 零解不稳定

Thm3.4：

$\vec{X}' = F(\vec{X}), F(0) = 0, \exists\ 0$ 的领域中开子域 $N, \exists\ V(\vec{x})$. 满足:

（1）$V(\vec{x}) \in C^1(N)$

（2）$0 \in \partial N, V(\vec{x})|_{\partial N \cap B_\delta} = 0$

（3）在 $N \cap B_\delta$ 上，$\bigtriangledown_{\vec{x}} V(\vec{x}) \cdot F(\vec{x})$ 定正函数。 $\Longrightarrow$ 零解不稳定。

例3：$\begin{cases} x' = x + xy \\ y' = -y + x^2 \end{cases}$

解：取 $N = \{(x, y), x > y\}$，则 $V(x, y) = x^2 - y^2$ 在 N 中定正，$V|_{|x|=|y|} = 0$

$$\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} = 2x(x + xy) - 2y(-y + x^2) = 2x^2 + 2y^2$$

在 N 中定正 $\Longrightarrow$ 零解不稳定。