选择公理及其等价命题

杨　旭
(吉林师范大学,吉林 四平 136000)

摘　要:本文对选择公理在数学基础中的地位和作用以及某些等价命题作了比较系统的阐述.

关键词:集合;选择公理;函数
中图分类号:O144　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-1840-(2003)01-0006-05

1　引言

十九世纪末,德国数学家 Cantor 给出集合的朴素定义,即设 P 是某个性质,则 $\{x: x$ 满足性质 $P\}$ 是一个集合. 根据这个定义 Russel 提出悖论:考虑 $X=\{x: x\notin x\}$,则由定义可知 X 是一集合,试问:$X\in X$,还是 $X\notin C$?如果 $X\in X$,则由 X 的定义应有 $X\notin X$,如果 $X\notin X$,但由定义又应有 $X\in X$. 这样导致一个矛盾.

Russel 悖论揭示了康托给出的集合这个朴素定义的内在矛盾,引起了第三次数学危机,使人们不得不对集合论重新进行审查和检验,从而建立了公理集合论.

公理集合论建立在若干公理的基础上,其中一个公理称为选择公理.

选择公理:每个非空集的集族有一个选择函数,即设 S 是一个集族且 $\psi\notin S$,则有 S 上的函数 f 使 $\forall X\in S, f(X)\in X$.

由于选择公理在近代数学基础所处特殊位置,本世纪以来引起许多数学家激烈争论与反响.

1904 年,Zermelo 提出了选择公理并且用来证明良序定理.

1905 年,Vitali 利用选择公理构造出 $[0,1]$ 中不可测集合.

1924 年,Kuratowski 提出第一极大原理,10 年后,Zorn 又用选择公理对第一极大原理进行了严格证明. 这个原理使用起来很是方便,因此颇受人们欢迎.

1940 年,Tukey 又提出第二极大原理,也就是人们通常使用的 Tukey 引理.

总之,还有其它一些事例都说明,选择公理的提出对整个近代数学理论发展和严格论证都产生了巨大的推进作用,因此得到很多数学家的称道和支持,著名数学家 Hilbert 就是其中的一位.

正象一个新的理论要得到承认就必须经过一番考验,选择公理同样也遭到部分数学家的反对.

1914 年,Hausdorff 利用选择公理在空间转动理论和变换群的结果的基础上证明了所谓‘分球面定理”. 这个定理从直观的角度看来似乎不大可能,然而却给出了严格的数学证明. 其证明方法与构造 Vitali 不可测集的方法大体类似,从而更加引起部分人对 Vitali 不可测集的例子,从而对选择公理的反感.

1924 年,Banach 和 Tarski 在分球面定理的基础上进一步证明了令人难以接受的分球定理也就是人们通常所称的分球悖论. 该定理断定:一个球可以分成两个同样大小的球,于是经过 n 次则可分成 2^n 个大小相同的球. 可见,这个定理的结论明显地与我们的生活经验和直观感觉不一致. 由于承认选

收稿日期:2002-11-15
作者简介:杨　旭(1947-),男,教授. 研究方向:拓扑学.

择公理,我们同样给出了严格的数学证明,这样就很自然使一部分数学家更加反对选择公理从而使学术争论达到高潮.

1938 年,Godel 提出可构造集合的概念,论证了选择公理和广义连续统假设关于 ZF 的相容性.这一创造性的工作对当时整个数学基础理论研究产生了巨大推进和影响,因而使对选择公理持有异议的数学家大为减少.

1963 年,Cohen 应用力迫法证明了选择公理关于 ZF 的独立性,即 AC 与 $\neg AC$ 关于 ZF 都是相容的.换言之,在 ZF 内,对于选择公理的肯定和否定都是不可能的.Cohen 的这一著名工作使选择公理对于整个数学基础的重大意义和所处位置就更为明显了.

2 选择公理的等价命题

由于选择公理对整个近代数学基础的重大影响,选择公理等价必须研究工作也一直受到人们的重视,我们先看下面定义.

定义 1 设 X 是一个偏序集,则 X 的全序子集称为链.如果 X 的链 A 对于 X 的任一个链 B,A 不是 B 的真子集,则称 A 为 X 的极大链.

定义 2 设 $\mathscr{F}$ 是集 X 上的非空的集族,则我们说 $\mathscr{F}$ 具有有限特征的,如果对于每个 F,$F\in\mathscr{F}$ 的必要充分条件是 F 每个有限子集都属于 $\mathscr{F}$:

这样,我们可以叙述以下的等价命题.

定理 1 下述命题等价:

1 选择公理;

2 良序定理:每个集合都能良序化;

3Zorn 引理:设 $(P,\leqslant)$ 是一个非空的偏序集,并且 P 内每个链都有上界,则 P 必有极大元;

4Tukey 引理:设 $\mathscr{F}$ 是一个非空集族,如果 $\mathscr{F}$ 是有限特征的,则 $\mathscr{F}$ 关于包含关系 $\subseteq$ 必有极大元.

证明:$1\Rightarrow2$ 设 S 是一个集合,f 是 S 的所有非空集的集族上的选择函数,则由超限递归原理我们可构造超限列如下:

$$\alpha_0=f(S)$$
$$\alpha_\zeta=f(S-\{a:\eta<\zeta\})$$

并且,由势集公理,分离公理图式和代换公理图式可知该超限列 $\{\alpha_\zeta\}=S$.在 S 内引入序关系 $<$,使 $\alpha_\zeta>\alpha_\eta$ 当且仅当 $\zeta<\eta$,则显然 $(S<)$ 是良序集;

$2\Rightarrow3$ 由条件知可将 P 良序化:$P=\{P_0,P_1,\cdots,P_\zeta,\cdots)(\zeta<a)$

根据超限递归原理,设 $C_0=P_0$,$C_\zeta=P_r$,这里 r 是使 P_r 是链 $C=\{C_\eta:\eta<\zeta\}$ 的上界并且使 $P_r\in C$ 的最小序数.我们指出:$\{C_\eta:\eta<\zeta\}$ 恒是个链.因此,P_r 存在除非 $C_{\zeta-1}$ 是 P 的极大元.故由此不难知道 P 有极大元.

$3\Rightarrow4$ 设 $\mathscr{F}$ 是一个非空集族且是有限特征的.显然 $(\mathscr{F},\subseteq)$ 是偏序集.设 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{F}$ 内的任一个链,令 $H=\{A:A\in\mathscr{H}\}$,则 H 每个有限子集都属于 $\mathscr{F}$,故 $H\in\mathscr{H}$.显然,H 是 $\mathscr{H}$ 的上界.由 Zorn 引理知 $\mathscr{F}$ 有极大元.

$4\Rightarrow1$ 这里首先指出,如果 $\mathscr{F}$ 是非空集的有限族,则由归纳法可证得 $\mathscr{F}$ 上必存在一个选择函数.

设 $\mathscr{F}$ 是一个非空集族,$N=\{f:f$ 是某个 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{F}$ 上的选择函数$\}$,则由选择函数的子集仍是一个选择函数可知 N 是有限特征的.由 Tukey 引理,N 有极大元 F.

F 的定义域为 $\mathscr{F}$,即 F 是 $\mathscr{F}$ 上的选择函数.如不然,则有 $X\in\mathscr{F}\setminus\mathrm{dom}(F)\in X$,于是 $F\cup\{(X,x)\}\in N$,与 F 极大性矛盾.

上述定理 1 的几个等价命题应用最为广泛,在近世代数及测度论等重要学科都是有力的数学工具.当然,还有其它一些等价命题也很有意义.

我们知道,一个集族按包括关系构成偏序集.一般来说,这样的集族不一定含有极大元素.例如区

间集 $\{(a,b),a>b<1\}$ 中就没有极大元. 因此我们考虑其中一种特殊类型.

定义 3. 集族 $\mathscr{F}$ 按包含关系的全序子族 $\mathscr{U}$ 称为套.

考虑集族里的所有的套.

定义 4. 对于集族 $\mathscr{F}$ 的所有套,如果有 $\mathscr{U}$,使对于集族 $\mathscr{F}$ 的任意套 $\mathscr{H}$,$\mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{H}$ 的真子集,则称 $\mathscr{U}$ 为 F 的极大套.

定理 2. 下述诸命题等价:

1. Tukey 引理;
2. Hausdoff 极大的理:设 Q 是集族 $\mathscr{F}$ 的任一套,则必有极大套 $\mathscr{U}$ 使 $\mathscr{U}\supset Q$;
3. 极大原理 如果对在集族 $\mathscr{F}$ 的每个套 $\mathscr{U}$,有 $\mathscr{F}$ 成分 A_n 使 A_n 包含 $\mathscr{U}$ 的每个成分,则集族 $\mathscr{F}$ 必有极大成分;
4. 极小原理 如果对于集族 $\mathscr{F}$ 的每个套 $\mathscr{U}$,有 $\mathscr{F}$ 的成分 A_n 使 A_n 被包含在 $\mathscr{U}$ 的每个成分中,则 $\mathscr{F}$ 必有极小成分;
5. Kuratowski 引理:偏序集 A 的每个链必被含在某个极大链中;
6. Zorn 引理.

证明:$1\Rightarrow2$ 参看定理 1 的 $2\Rightarrow3$,则证明不难给出.

$2\Rightarrow3$:由 Hausdorff 极大原理,每个套都包含在某个极大套中,故不妨假设 $\mathscr{U}$ 为极大套并不失一般性.

因为对在每个 $H\in\mathscr{U}$,有同一个 $A_n\in\mathscr{F}$,使 $A_n\supseteq H$. 所以,$A_n\supseteq\bigcup\limits_{H\in n}H$,$A_n$ 即为极大成分.

如不然,则有 $B\in\mathscr{F}$,使 $B\supset A_n$. 于是 $\mathscr{U}\cup\{B\}$,仍是一个套,这与 $\mathscr{U}$ 的极大性矛盾. 所以,A_n 是 $\mathscr{F}$ 的极大成分.

$3\Rightarrow4$:令 $F=\bigcup\{A:A\in\mathscr{F}\}$,$\mathscr{F}'=\{F-A:A\in\mathscr{F}\}$,则由于 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{F}$ 的套. 故 $\mathscr{U}'=\{F-H;H\in\mathscr{U}\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的套. 因为对每个 $H\in\mathscr{U}$ 有 $A_n\subseteq H$,故对每个 $F-H$ 都有 $F-A_n\supseteq F-H$. 所以,对于套 $\mathscr{U}'$,有 $\mathscr{F}$ 的成分 $F-A_n$,它包含 $\mathscr{U}'$ 的每个成分. 故 $\mathscr{F}$ 有极大成分 M,于是 $F-M$ 是 $\mathscr{F}$ 极小成分.

$4\Rightarrow3$:只须把 $3\Rightarrow4$ 的证明过程中'极大'改为'极小'而'包含'改为'被包含'即可.

$3\Rightarrow5$ 设 M 是偏序集 A 的链,$\mathscr{F}$ 是 A 中含 M 的链的全体构成的集族. 如果 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的套,则 $\bigcup\{H:H\in\mathscr{U}\}\in\mathscr{F}$. 于是由 3,$\mathscr{F}$ 有极大成分. 该极大成分就是 A 中包含 M 的极大链.

$5\Rightarrow6$:由 5 知每个链必含在某极大链中. 再由条件知该极大链必有上界. 这个上界就是极大元. 如不然,则与链的极大性矛盾.

$6\Rightarrow1$ 这是定理 1 的结果.

在点集拓扑学中,直积和直积空间的拓扑性质是一个重要的研究领域. 对此先考虑.

定义 5. 设 X 是任一非空集,$\mathscr{T}$ 是 X 的非空集族,如果

(1) $X,\emptyset\in\mathscr{T}$.

(2) 若 $U,V\in\mathscr{T}$,则 $U\cap V\in\mathscr{T}$

(3) 若 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$,则 $\bigcup\mathscr{T}_1\in\mathscr{T}$,

则称 $\mathscr{T}$ 是 X 上的一个拓扑,$(X,\mathscr{T})$ 称作拓扑空间,$\mathscr{T}$ 中的元素称为 $(X,\mathscr{T})$ 的开集.

若 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}$ 使对任一 $U\in\mathscr{T}$,都有 $\mathscr{B}'\subseteq\mathscr{B}$,使 $U=\bigcup\mathscr{B}'$,则称 $\mathscr{B}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的一个拓扑基.

若 $\mathscr{S}\subseteq\mathscr{B}$,使 $\{U$:有 $V_1,\cdots,V_n\in\mathscr{S}$ 使 $U=\bigcap\limits_{i=j}V_j,n\in N\}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的拓扑基,则称 $\mathscr{S}$ 为 $(X,\mathscr{T})$ 的一个子基.

定义 6. 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 称为紧致的,如果 $\mathscr{H}\subseteq\mathscr{T}$ 且 $X=\bigcup\mathscr{B}$,则有 $V_1,\cdots,V_n\in\mathscr{H}$ 使 $X=\bigcup\limits_{i-1}V_i$,这里 $\mathscr{H}$ 称作 X 的开覆盖,$V_1,V_2,\cdots,V_n$ 称作 $\mathscr{H}$ 的有限子覆盖.

定理 3. 下述命题等价

1. 选择公理;

2. Tychonoff 定理 设 X_α 是紧致的拓扑空间，$\alpha \in D$ 则直积空间 $X = \prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ 是紧致的拓扑空间.

3. 直积定理 设 X_α 是非空集，$\alpha \in D$ 则直积 $X = \prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ 非空.

证明：$1 \Rightarrow 2$ 这里我们要用 Alexander 子基定理：对于空间 X，如果由子基元组成的每个开覆盖都有有限子覆盖，则 X 是紧致空间.

设 Q 是 X 的任一开集族且每个成分都是 X 的子基元.

由于 X 是紧空间等价于任意有限个元不能覆盖 X 的开集族，该集族亦不覆盖 X：所以，在此假设 Q 的有限个元都不覆盖 X，只要证得 Q 亦不是 X 的覆盖即可.

首先注意对任意 $\alpha \in D$，$P_\alpha(Q)$ 都不覆盖 X_α，因为如不然，则由 X_α 的紧性知有 $U_i \in P_\alpha(Q)$，$i \leqslant n$，$\{U_i : i \leqslant n\}$ 将覆盖 X_α，故再由子基定义知 $\{P_n^{-1}(U_i) : i \leqslant n\} \subset Q$ 且覆盖 X，这与我们假设矛盾.

于是，对每个 $\alpha \in D$，都有 $x_\alpha \in X_\alpha \setminus \bigcup \{A : A \in P_\alpha(Q)\}$. 应用选择公理，$\{X_\alpha \setminus \bigcup \{A : A \in P_\alpha(Q)\} \alpha \in D\}$ 有选择函数 f，使 $x_\alpha = f(X_\alpha \setminus \bigcup \{A : A \in P_\alpha(Q)\})$. 所以 $x = (x_\alpha)_{\alpha \in D} \in X \setminus \bigcup \{U : U \in Q\}$.

还应指出，Alexander 子基定理的证明需用 Tukey 引理，因而使用了选择公理.

$2 \Rightarrow 3$ 对每个 $\alpha \in D$，设 X_α 是非空集. 令 $Y_\alpha = X_\alpha \cup \{\alpha\}$，其中 $\alpha \bar{\in} \bigcup \{X_\alpha \in D\}$.

在 Y_α 内导入拓扑，其中 Y_α，空集，X_α 的每个有限集均为闭集 .则 Y_α 成为紧致拓扑空间：Y_α 内具有有限交性质的闭集族显然有非空交.

令 $F_\alpha = P_\alpha^{-1}(X_\alpha)$，$P_\alpha : \prod Y_\alpha \to Y_\alpha$ 为射影，则 F_α 是 $Y = \prod Y_\alpha$ 中的闭集，并且 $\{F_\alpha : \alpha \in D\}$ 亦具有有限交性质. 因为对任意有限个 $F_{\alpha_1}, \cdots, P_{\alpha_n}$，由有限选择公理，取点 $x_i \in X_i$，令 $y \in Y$ 使之 $P_{\alpha_i}(y) = x_i (i = 1, \cdots, n)$；$P_\beta(y) = \alpha$，$\beta \neq \alpha_i$，$i = 1, \cdots, n$，则 $P \in \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$，再由 X 的紧致性，我们有 $\bigcap \{F_\alpha : \alpha \in D\} \neq \emptyset$，所以 $\prod_{\alpha \in D} X_\alpha = \bigcap \{F_\alpha : \alpha \in D\} \neq \emptyset$

$3 \Rightarrow 1$ 设 $\{X_\alpha : \alpha \in D\}$ 是非空集的集族，由 3 的条件，$\prod_{\alpha \in D} X_\alpha \neq \emptyset$，所以有 $f \in \prod_{\alpha \in D} X_\alpha$，即 f 为 $\{X_\alpha : \alpha \in D\}$ 的选择函数.

Tychenoff 定理还可以用极大滤子来给出证明. 而极大滤子的存在性恰恰是需要应用 Zorn 引理的.

下面，我们证明另一个与选择公理等价的命题.

定理 4. 选择公理等价于 Zermelo 公理 对于每个两两不相交的非空集的集族 $\mathscr{F}$，必有集合 $M \subset \bigcup \{H : H \in \mathscr{F}\}$，对于每个 $H \in \mathscr{F}$，$|M \cap H| = 1$.

证明 如果承认选择公理，则有以上选择函数 f. 令 $M = \{f(H) : H \in n\}$，M 即为所求.

再由 Zermelo 公理证选择公理.

设 $\mathscr{H}$ 是任一非空集族 $\emptyset \bar{\in} \mathscr{H}$，令，$\mathscr{F} = \{\{H\} \times H : H \in \mathscr{H}\}$，则 $\mathscr{F}$ 为两两不相交的集的集族. 故由 Zermelo 公理有 $M \subset \bigcup \{N : N \in \mathscr{F}\}$，并且使对每个 $N \in \mathscr{F}$，$|M \cap N| = 1$，显然 M 是 $\mathscr{H}$ 上的选择函数.

最后，我们再证明弱 Tychonoff 定理与选择公理的等价性.

定理 5 选择公理等价于弱 Tychonoff 定理 拓扑同构的紧致空间的直积是紧致拓扑空间.

证明 由定理 3，从选择公理易推出弱 Tychonoff 定理.

下面应用弱 Tychonoff 定理证明选择公理 设 $\mathscr{F}$ 为非空集的集族，这里，我们不妨认为 $\mathscr{F}$ 两两不交的，即 $A, B \in \mathscr{F} \wedge A \neq B \to A \cap B = \emptyset$

令 $X = \bigcup \{H : H \in \mathscr{F}\}$，以 $\emptyset, X, \mathscr{F}$ 的有限元的并的补集为基导入拓扑 .则 X 是紧致的拓扑空间，由弱 Tychonoff 定理知 $\prod_\alpha X$ 是紧致空间，并且对于每个 $H \in \mathscr{F}$，$H \times \prod_d X$ 是闭集；d 表示从 α 个 X 中去掉包含 H 的 X 后的指标集. 显然，$\{H \times \times \prod_d X : H \in \mathscr{F}\}$ 具有有限交性质，故有 $f \in \bigcap \{H \times \times \prod_d X : H \in \mathscr{F}\}$，$f$ 即是 $\mathscr{F}$ 上的选择函数.

除了上述定理之外，还有一些与选择公理等价的命题. 这里，我们不准备对这些命题予以详细叙述，只是把它们列出来以供参考：

1. Hessenberg 定理 对于任何无限基数 a，都有 $a^2 = a$.

2. 基数开方定理 对于任意基数 α，β，如果 $\alpha^2 = \beta^2$，则 $\alpha = \beta$.

3. 基数可比定理 任何两个基数恒可比较其大上.

4. 每个序数的幂集恒可良序化.

5. 序集可良序定理 每个序集必可良序化.

6. 反链原理 每个偏序集必有极大反链.

7. Boole 代数的极大理想定理 对 Boole 代数 B 的每个由非 0 元组成的集 X，必有一个与 X 不相交的极大理想.

8. 格的极大理想定理 每个含有单位 1 和另一个元素的格必有极大理想.

9. 向量空间相补定理 设 V 是向量空间，S 是 V 的子空间 则必有相补空间 S' 使之 $V = S + S'$.

10. 端点定理 实线性赋范空间的共轭空间，其单位球必有一端点.

11. 消去广群存在定理 每个非空集合上都有一个消去广群.

还有下列等价命题.

12. 对任何无限基数，下述每个命题与选择公理等价：

a) $\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta$；

b) $a < b$，$c < d$，$a + c < b + d$；

c) $a < b$，$c < d$，则 $a \cdot c < b \cdot d$；

d) $a + c < b + c$，则 $a < b$；

e) $a \cdot c < b \cdot c$，则 $a < c$；

f) 对每个无限基数 α，必有 β 使 $\alpha = \beta^2$.

此外还有：

13. 任一个集族恒含有互不相交的集合构成的极大子族.

14. 对于每个集合 X 和每个正常族 $\mathscr{F}$，满射 $f: X \to \mathscr{F}$ 恒存在.

15. 对于每个集合 X 和每个正常族 $\mathscr{F}$，一对一映射 $f: X \to \mathscr{F}$ 恒存在.

参　考　文　献

[1] 方嘉林. 集合论[M]. 长春 吉林教育出版社，1980.

[2] Kunen Set theory. An introductiou to independence proofs[M]. North – Holl and publishing compang，Amsterdan，1980.

[3] 汪芳臣. 公理集论[M]. 合肥 中国科学技术大学出版社，1995.

Choose Axiom and its Equivalent Statencents

Yang Xu

(Jilin Normal University，Siping 136000，China)

Abstract：The paper systemely disccused role of choose axiom and its equivalent setements in mathematic bese.

Key words：set；choose axiom；function