# 第十九章　辐角原理的应用

## 19.1　Rouché 定理

**定理 19.1.** (Rouché, 1862) 假设 $\Omega$ 是平面有界区域，边界是分段光滑的简单闭曲线。假设 $f, g$ 都在 $\overline{\Omega}$ 上全纯，满足

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \ \forall z \in \partial\Omega,$$

则 $f, g$ 在 $\Omega$ 内的零点个数一样多。

**证明:** 由假设条件可知, $f, g$ 在 $\partial\Omega$ 上无零点。考虑

$$h_t(z) = (1-t)f(z) + tg(z), z \in \overline{\Omega}, \ t \in [0,1].$$

显然: 取定 $t \in [0,1]$, $h_t(z)$ 关于 $z$ 全纯; 取定 $z$, $h_t(z)$ 关于 $t$ 连续; $h_0 = f, h_1 = g$.

下面说明: 对任意 $t \in [0,1]$, $h_t$ 在 $\partial\Omega$ 上无零点 (对 $t = 0, 1$ 显然成立)。如果存在 $t \in (0,1)$ 以及 $z_0 \in \partial\Omega$, 使得 $h_t(z_0) = 0$, 则

$$|f(z_0)| = t|f(z_0) - g(z_0)| \le |f(z_0) - g(z_0)|,$$

与假设条件矛盾。

利用辐角原理知，$h_t$ 在 $\Omega$ 中零点个数

$$Z(h_t, \Omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{(1-t)f'(z) + tg'(z)}{(1-t)f(z) + tg(z)} dz.$$

上式右端关于 $t \in [0,1]$ 连续, 左端取整数值, 因此为常数。特别地,

$$Z(f, \Omega) = Z(h_0, \Omega) = Z(h_1, \Omega) = Z(g, \Omega).$$

注: Rouché 定理中，如果 $\Omega$ 是有界多连通区域, 边界为有限条分段光滑简单闭曲线之并，结论同样成立。

Rouché 定理可推广为如下形式, 此形式条件减弱, 同时也显得对称, 符合审美, 但证明方法并无差别。

**定理 19.2.** (Estermann 1962, Glicksberg 1976) 假设 $\Omega$ 是平面有界区域，边界是分段光滑的简单闭曲线。假设 $f, g$ 都在 $\overline{\Omega}$ 上半纯，在边界 $\partial\Omega$ 上无零点或极点，且满足

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \ \forall z \in \partial\Omega,$$

则

$$Z(f, \Omega) - P(f, \Omega) = Z(g, \Omega) - P(g, \Omega).$$

## 19.2 Hurwitz 定理

称函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 单叶 (univalent), 如果它是全纯单射。

**定理 19.3.**(Hurwitz, 1889) 假设 $\Omega$ 是平面区域, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ 是一列单叶函数，内闭一致收敛于全纯函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$。则 $f$ 要么常值, 要么单叶。

例: 给定平面上两列单叶函数 $f_n(z) = z + 1/n$, $g_n = z/n$。易见, $f_n$ 内闭一致收敛于单叶函数 $f(z) = z$; $g_n$ 内闭一致收敛于常值函数 $g(z) = 0$。

**证明**: 若不然, 则 $f$ 既非常值, 亦非单叶, 因此存在不同两点 $z_1, z_2 \in \Omega$, 使得 $f(z_1) = f(z_2)$。令

$$F_n(z) = f_n(z) - f(z_1), \ F(z) = f(z) - f(z_1).$$

在 $\Omega$ 中取一条分段光滑的简单闭曲线 $\gamma$, 使其所围的单连通域 $D$ 满足: $z_1, z_2 \in D \subset \Omega$。如果 $\gamma$ 经过 $F$ 的零点, 由非常值函数零点的孤立性可知，$F$ 在 $\gamma$ 上的零点只有有限个。将曲线 $\gamma$ 稍加改造，可避开 $F$ 的零点。因此, 不妨假设 $\gamma$ 不经过 $F$ 的零点。于是 $\rho = \min_{z\in\gamma} |F(z)| > 0$.

由 $\{f_n\}$ 的内闭一致收敛性知, 存在正整数 $N$, 当 $n \geq N$ 时,

$$|F_n(z) - F(z)| = |f_n(z) - f(z)| < \rho \leq |F(z)|, \ \forall z \in \gamma.$$

由 Rouché 定理, $Z(F_n, D) = Z(F, D)$。又 $F$ 在 $D$ 中至少有两个零点 $z_1, z_2$, 因此 $F_n$ 在 $D$ 中至少有两个零点。这矛盾于 $F_n$ 单叶。 □

Hurwitz 定理的一般形式:

**定理 19.4.**(Hurwitz, 1889) 假设全纯函数列 $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ 内闭一致收敛于全纯函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$。假设 $z_0$ 是 $f$ 的 $m$ 阶零点, 则存在 $\rho > 0$, 使得当 $n$ 很大时, $f_n$ 在 $D(z_0, \rho)$ 中有且仅有 $m$ 个零点。这些零点当 $n \to \infty$ 时, 收敛于 $z_0$。

**证明**: 选取 $\rho_0 > 0$, 使得 $f$ 在 $D(z_0, \rho_0) \setminus \{z_0\}$ 上不取零值。对任意 $\rho \in (0, \rho_0)$, 记 $\delta = \delta(\rho) = \min_{z \in \partial D(z_0, \rho)} |f(z)| > 0$。(显然, 当 $\rho \to 0$ 时, 有 $\delta(\rho) \to 0$)

由 $f_n$ 内闭一致收敛于 $f$ 知, 存在 $N = N(\rho)$, 当 $n \geq N$ 时,

$$|f_n(z)| \geq \delta/2, \ \forall z \in \partial D(z_0, \rho).$$

进一步, $f_n'/f_n$ 在 $\partial D(z_0, \rho)$ 上一致收敛到 $f'/f$, 因此有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \rho)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \rho)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

由辐角原理知, 上式即 $Z(f_n, D(z_0, \rho)) \to Z(f, D(z_0, \rho)) = m$. 由 $Z(f_n, D(z_0, \rho))$ 取值的离散性可知, 存在 $N_1 \geq N$, 当 $n \geq N_1$ 时, $Z(f_n, D(z_0, \rho)) = m$. 这说明 $f_n$ 在 $D(z_0, \rho)$ 中有 $m$ 个零点。

由 $\rho \in (0, \rho_0)$ 的任意性，这些零点当 $n \to \infty$ 时, 收敛于 $z_0$。

□

## 19.3 映射性质

假设 $f$ 在 $z_0$ 的邻域内全纯, 非常值, $w_0 = f(z_0)$。则 $z_0$ 是 $f(z) - w_0$ 的零点, 阶数记为 $m \geq 1$ (易知: $m = 1 \iff f'(z_0) \neq 0$)。于是, 存在 $r > 0$, 在 $D(z_0, r)$ 中可将 $f$ 表示为

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m \psi(z),$$

其中 $\psi$ 在 $\overline{D(z_0, r)}$ 上全纯且不取零值。上式求导得

$$f'(z) = (z - z_0)^{m-1}(m\psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)).$$

适当缩小 $r$, 不妨设 $f-w_0$ 和 $f'$ 在 $\overline{D(z_0,r)}\setminus\{z_0\}$ 上无零点。记

$$\delta_r = \min_{|z-z_0|=r} |f(z)-w_0| > 0.$$

给定 $w\in D(w_0,\delta_r)\setminus\{w_0\}$, 对任意 $z\in\partial D(z_0,r)$, 成立

$$|(f(z)-w)-(f(z)-w_0)| = |w-w_0| < \delta_r \le |f(z)-w_0|.$$

由 Rouché 定理知, $f(z)-w$ 与 $f(z)-w_0$ 在 $D(z_0,r)$ 中的零点个数一样多，为 $m$ 个。由于 $f'$ 在 $\overline{D(z_0,r)}\setminus\{z_0\}$ 上不取零值，这说明 $f(z)=w$ 在 $D(z_0,r)$ 中的所有零点都是一阶的。

因此，当 $w\in D(w_0,\delta_r)\setminus\{w_0\}$ 时, $f(z)=w$ 在 $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ 中有 $m$ 个不同的解。

以上推理也表明 $D(w_0,\delta_r)\subset f(D(z_0,r))$。

**定理 19.5.** (开映射定理) 非常值的全纯映射是开映射。

**证明：** 假设 $f$ 是区域 $\Omega$ 上的非常值全纯函数。对任意 $w_0\in f(\Omega)$, 取 $z_0\in\Omega$, 使 $f(z_0)=w_0$。由上述讨论, 存在 $r>0, \delta_r>0$, 使 $D(w_0,\delta_r)\subset f(D(z_0,r))\subset f(\Omega)$。因此 $w_0$ 是 $f(\Omega)$ 的内点。由 $w_0$ 的任意性知 $f(\Omega)$ 是开集。 □

开映射定理可推出最大模原理: 假设 $f$ 是区域 $\Omega$ 上的非常值全纯函数。对任意 $z_0$, $f(\Omega)$ 是包含 $f(z_0)$ 的一个开集，因此存在 $w\in f(\Omega)$ 使得 $|w|>|f(z_0)|$。由此得 $|f(z_0)|<\|f\|_\Omega$。

实解析函数未必是开映射。如 $f(x)=x^2$, 将开区间 $(-1,1)$ 映为非开非闭的区间 $[0,1)$。因此, 开映射性质是全纯函数与实解析函数的一个本质不同。

**命题 19.1.** 假设 $f$ 在区域 $\Omega$ 上全纯, $z_0\in\Omega$。则 $f$ 在 $z_0$ 处局部单叶 (即: 存在 $\epsilon>0$, 使 $f|_{D(z_0,\epsilon)}$ 单叶) 的充要条件是 $f'(z_0)\neq 0$。

此命题给出全纯函数与实解析函数的另一本质不同。实解析函数若在某点邻域内是单射, 不能得到在该点导数为零。例如 $h(x)=x^3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是同胚, 但 $h'(0)=0$。

**证明：** 假设 $f$ 非常值, 且 $z_0$ 是 $f(z)-f(z_0)$ 的 $m\ge 1$ 阶零点。

如果 $f'(z_0)=0$, 则 $m\ge 2$。由前述讨论, 对任意小正数 $r>0$, 当 $w\in D(f(z_0),\delta_r)-\{f(z_0)\}$ 时, $f(z)=w$ 在 $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ 上有 $m$ 个零点, 因此 $f$ 不可能在 $z_0$ 的邻域内单叶。

如果 $f'(z_0)\neq 0$, 则 $m=1$。仍由前述讨论, 当 $w\in D(f(z_0),\delta_r)-\{f(z_0)\}$ 时, $f(z)=w$ 在 $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ 上有且仅有 1 个零点。此时, $U=(f|_{D(z_0,r)})^{-1}(D(f(z_0),\delta_r))$ 是包含 $z_0$ 的一个开集，且 $f:U\to D(f(z_0),\delta_r)$ 双全纯。此时，取 $\epsilon>0$ 使 $D(z_0,\epsilon)\subset U$, 则 $f:D(z_0,\epsilon)\to f(D(z_0,\epsilon))$ 双全纯。 □

## 19.4 微分中值性质

回忆实函数的微分中值定理: 假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续, 且 $f$ 在 $(a,b)$ 上可微, 则存在 $\zeta\in(a,b)$, 满足

$$f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a).$$

受此启发, 引入全纯函数的**微分中值性质**: 假设 $f$ 在平面区域 $\Omega$ 上全纯, 对任意满足 $[a,b]\subset\Omega$ 的不同两点 $a,b\in\Omega$, 总存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a)$.

全纯函数是否一定满足微分中值性质呢？答案非常微妙, 先看两例。

第一个例子: $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2$, 其中 $c_0,c_1,c_2\in\mathbb{C}$. 它是次数不超过 2 的多项式。容易验证

$$f(b)-f(a)=f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a).$$

因此 $f$ 满足微分中值性质。

第二个例子: $g(z)=e^z$, 取 $a=0,b=2\pi i$. 容易看出

$$g(b)-g(a)=0\neq 2\pi i e^{\zeta}=(b-a)g'(\zeta),\ \forall\zeta\in[a,b].$$

这说明 $g$ 不满足微分中值性质。

以上两例表明，并非所有的全纯函数都满足微分中值性质。找出所有满足微分中值性质的全纯函数是一个基本而有趣的问题。本节将证明：

**命题 19.2.** 假设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 全纯, 则 $f$ 满足微分中值性质当且仅当 $f$ 是次数不超过 2 的多项式。

**证明：** 上面的例子已验证充分性, 现证必要性。分三种情形

1. $f'\equiv 0$。此时, 由唯一性定理可得, $f$ 为常值函数。
2. $f'\not\equiv 0$ 且 $f''\equiv 0$。容易验证, $f$ 为一次多项式。

3. $f'' \not\equiv 0$ (蕴含 $f' \not\equiv 0$)。此时, 存在 $a \in \Omega$, 使得 $f''(a) \neq 0$. 利用前一节对映射性质的讨论, $f''(a) = (f')'(a) \neq 0$ 意味着存在 $a$ 的邻域 $D(a,r)$，使 $f'|_{D(a,r)}$ 单叶。记其反函数 $g = (f'|_{D(a,r)})^{-1}$, 它是 $f'(D(a,r))$ 上的全纯函数。

利用微分中值性质, 对任意 $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$, 存在 $\eta(z) \in [0,1]$, 满足
$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a+\eta(z)(z-a)).$$
由此可得
$$\eta(z) = \frac{-a}{z-a} + \frac{1}{z-a} g\left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right).$$
上式右端在 $D(a,r) \setminus \{a\}$ 上全纯, 左端取值于 $[0,1]$。由开映射定理知 $\eta(z) \equiv c \in [0,1]$。于是, 微分中值性质变成
$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a+c(z-a)).$$
利用 $f$ 在 $z=a$ 处幂级数展式可得
$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1},$$
$$f'(a+c(z-a)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(c(z-a))^{n-1}.$$
由幂级数展式的唯一性,
$$f^{(n)}(a)(nc^{n-1}-1) = 0,\ n \geq 2.$$
利用 $f''(a) \neq 0$ 可知, $c = \frac{1}{2}$, 进一步得 $f^{(n)}(a) = 0, n \geq 3$. 这说明在 $D(a,r)$ 上 $f$ 为二次多项式。由唯一性定理, $f$ 为二次多项式。

□

## 19.5 习题

"道阻且长，行则将至。行而不辍，未来可期。"

—-《荀子. 修身》

1. (Rouché 定理的对称形式) 假设 $\Omega$ 是平面区域, 边界为分段光滑的简单闭曲线。$f, g$ 都在 $\overline{\Omega}$ 上全纯, 且满足
$$|f(z)-g(z)| < |f(z)| + |g(z)|,\ \forall z \in \partial\Omega.$$

证明 $f, g$ 在 $\Omega$ 中零点个数一样多。

2. (Rouché 定理的应用) 给定多项式 $p(z) = z^5 - 6z^3 + z - 1$。

(1). 求 $p$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中零点个数 (计重数)。

(2). 求 $p$ 在圆环区域 $A = \{1 < |z| < 3\}$ 中零点个数。

3. (Rouché 定理的应用) 假设 $r > 0$, 证明当 $n$ 很大时,

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

在 $D(0, r)$ 上没有根。

4. (Rouché 定理的应用) 给定 $d \geq 1$ 次首一多项式 $f(z) = z^d + \cdots + a_1 z + a_0$, 证明 $\max_{|z|=1} |f(z)| \geq 1$。

5. (Rouché 定理的应用) 假设 $f$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, 在 $\mathbb{D}$ 中有 $m \geq 1$ 个零点, 在 0 处的幂级数展式为 $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, 证明

$$\min_{|z|=1} |f(z)| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k|.$$

6. (辐角原理的应用) 利用辐角原理证明代数学基本定理.

7. (最大模原理的应用) 设 $f$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯, 连续到边界。$f$ 在上半圆弧上模有上界 $m$, 在下半圆弧上模有上界 $M$。证明

$$|f(0)| \leq \sqrt{mM}.$$

8. (开映射定理的应用) 假设全纯函数列 $f_n : \Omega \to \Omega$ 全纯在 $\Omega$ 上内闭一致收敛于 $g$。证明: 要么 $g(\Omega) \subset \Omega$, 要么 $g \equiv w_0 \in \partial\Omega$。

9. (开映射定理的应用) 如果 $f : \Omega \to \Omega$ 全纯, 满足 $f \circ f = f$。证明: $f$ 要么为常值函数, 要么为恒等映射。

10. (微分中值性质的一种变形) 如本章内容所知，微分中值性质对全纯函数一般不成立，现研究一种变形。假设 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 全纯，$z_0 \in \Omega$。证明存在 $z_1, z_2 \in \Omega \setminus \{z_0\}$, 满足

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = f'(z_0).$$

(提示：考虑 $g(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$ 的局部映射性质)