作业一：椭圆型方程极值原理与能量模估计

极值原理

在如下题目中，我们令$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为光滑有界连通区域，并且

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u - c(x)u,$$

其中$u \in C^2(\Omega)$. 我们假设a_{ij}, b_i, c均为$\bar{\Omega}$上的有界连续函数，同时L满足如下一致椭圆型条件：

$$\text{存在正常数}\lambda > 0,\ \text{使得} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2,\ \text{对所有}x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n\text{均成立}.$$

1、当$c(x) \geq 0$时，验证课上对$\Delta u - c(x)u\ (c(x) \geq 0)$成立的比较原理、Hopf引理对如上定义的$L$也成立。

2、证明：若$u \in C^2(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$ 在Ω上满足$Lu \geq 0$ 及$u \leq 0$，则在Ω上$u < 0$，或者$u \equiv 0$。

3、如果存在$w \in C^2(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$ 满足在$\bar{\Omega}$上$w > 0$, Ω上有$Lw \leq 0$, 证明: 如果$\frac{u}{w}$ 在$x_0 \in \partial\Omega$处取到非负最大值，且$\frac{u}{w}$不是常值函数，则对x_0处单位外法向ν，有

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\frac{u}{w}\Big)(x_0) > 0.$$

能量模估计

在如下题目中，我们令$\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$且$u \in C^2(\Omega)$满足

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = 0.$$

我们假设a_{ij}均为$\bar{\Omega}$上的有界连续函数，同时L满足如下一致有界椭圆型条件：

$$\text{存在正常数}\lambda, \Lambda > 0,\ \text{使得}\Lambda|\xi|^2 \geq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2,\ \text{对所有}x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n\text{均成立}.$$

4、证明如下Caccioppoli不等式：存在常数$C > 0$，使得对任意$\eta \in C_0^1(\Omega)$(边值为0的C^1函数)，有

$$\int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leq C\int_\Omega |\nabla\eta|^2 u^2 \mathrm{d}x.$$

5、证明：存在常数$C > 0$，使得对任意$0 \leq r < R \leq 1$有：

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{C}{(R-r)^2}\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x.$$

6. 证明：

(1) 存在$\theta \in (0,1)$，使得对任意$0 < R \leq 1$有：

$$\int_{B_{R/2}} u^2 \mathrm{d}x \leq \theta\int_{B_R} u^2 \mathrm{d}x, \qquad \int_{B_{R/2}} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leq \theta\int_{B_R} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

(2) 存在$C > 0, \mu > 0$，使得对任意$0 < r < R \leq 1$有：

$$\int_{B_r} u^2 \mathrm{d}x \leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^\mu\int_{B_R} u^2 \mathrm{d}x, \qquad \int_{B_r} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^\mu\int_{B_R} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

(3) (选做)存在$C > 0$，使得对任意$0 < r < R \leq 1$有：

$$\int_{B_r} u^2 \mathrm{d}x \leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^n\int_{B_R} u^2 \mathrm{d}x, \qquad \int_{B_r} (u-u_r)^2 \mathrm{d}x \leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n+2}\int_{B_R} (u-u_R)^2 \mathrm{d}x.$$

其中$u_r = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} u(x)\mathrm{d}x$ 为B_r上的积分平均。(上述不等式在证明椭圆型方程弱解的正则性中起着非常重要的作用).

作业二：广义函数

1、计算如下一元函数的Fourier变换:

$$(1)\frac{1}{a^2+x^2};\qquad (2)\log|x|;\qquad (3)xe^{-\pi y^2};\qquad (4)\delta'(x)e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

2、试求下述方程的基本解：
$(1)\partial_t^2 u-\partial_x^2 u=0$, 并导出达朗贝尔公式；
$(2)-\Delta u+u=0$ 。

3、设$s\geq 0$. 证明：存在常数$C>0$使得对任意$u,v\in H^s(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$有：

$$\|uv\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leq C(\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}).$$

4、设$u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$且$\operatorname{supp}u=\{0\}$. 证明:

(1)存在整数$N\geq 0$，使得对任意$\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$满足$\partial^\alpha\phi(0)=0(|\alpha|\leq N)$，均有$\langle u,\phi\rangle=0$.

(2)存在整数$N\geq 0$及常数c_α，使得：

$$u=\sum_{\alpha\leq N}c_\alpha\partial^\alpha\delta.$$

5、(Weyl引理) 设广义函数$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$满足：$\Delta u=0$。证明：$u\in C^\infty(\Omega)$.

6、(选作)对任意$u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$，定义广义函数$u$的Fourier-Laplace变换

$$\mathcal{T}[u](\zeta)=\langle u,e^{-\mathrm{i}x\cdot\zeta}\rangle_{\mathbb{R}^n_x},$$

其中$\zeta\in\mathbb{C}^n$(n维复空间)，$x\cdot\zeta=\sum_{k=1}^n x_k\zeta_k$。可以证明该函数为关于$\zeta$的复解析函数。
试证明如下结论(Paley-Wiener定理)：
(1) 若$\operatorname{supp}u\subset\{|x|\leq A\}$，则$\mathcal{T}[u](\zeta)$ 满足：存在$N\geq 0,C>0$使得

$$|\mathcal{T}[u](\zeta)|\leq C(1+|\zeta|)^N e^{A\mathrm{Im}\zeta}.$$

(2)反之，若解析函数$F(\zeta)$满足(1)中性质，则必存在$u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$且$\operatorname{supp}u\subset\{|x|\leq A\}$，使得$\mathcal{T}[u](\zeta)=F(\zeta)$.