ODE笔记12：极限环、Laplace变换

极限环:

定义：若 $\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$ $(*)$ 存在闭轨 γ，且在 γ 某个环形领域内不再有其他闭轨（即 γ 为孤立的闭轨）。则称 γ 为 $(*)$ 的**极限环。**

若从 γ 附近出发的轨线随着 $t \to +\infty$，从 γ 内外两侧趋于/远离 γ，则称 γ 是**稳定/不稳定**的极限环。

定理1:

$D \subset R^2, F, G \subset C'(D)$，闭轨包住至少一个奇点，若仅有一个奇点，则该奇点不是鞍点。

Bendixson定理:

D 单连通，$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$ $(*)$ $\quad F, G \subset C^1(D)$. 若 $F_x + G_y$ 在 D 内不变号且在任何子域上不恒为0，则 $(*)$ 在 D 上不存在闭轨。

Dulac定理:

$\exists\, \mu \in C^1(D), st. (\mu F)_x + (\mu G)_y$ 在 D 内不变号，则 D 内不存在闭轨。

例1：$\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = -x - \beta y - y^3 \end{cases}$ $\quad \mu = e^{ax+by}, a = 3, b = 0$

$(\mu F)_x + (\mu G)_y = -\beta e^{3x}$，定号 $\implies$ 不存在闭轨。

Thm4.2(Poincaro-Beudixson):

$F, G \in C^1(D), D_1 \subset D$ 有界开集，$R = D_1 \subset D$. 设 R 不含奇点，若存在一个从某时刻一直保持在 R 内的解，则这个解是周期解

（闭轨），或该解趋于某闭轨。$\implies$ R 中存在闭轨。

例：$\begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2 - 1) \\ y' = -x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$ $\quad$ 极坐标：$r' = r(1 - r^2)$

若 $r_0 = \alpha < 1, r' > 0$ $\quad$ 若 $r_0 = \beta < 1, r' < 0$

由Poincaro-Beudixson定理知，存在闭轨。

Thm4.4(Poincare环域定理):

D 边界 $r_+, r_-, F, G \in C^1(D)$. $\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$ 所有经过 $r_\pm$ 的轨线都进入 D，并且 D 中无奇点，则 D 中至少存在一个外侧稳定极限环，存在一个内侧稳定极限环。

Laplace变换:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

称为 $f(t)$ 的**Laplace变换**。记为$F(s) = L\{f(t)\}$，同时 $f(s) = L^{-1}\{F(s)\}$. 其中

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) e^{ts} ds \ (\text{沿} Rez = a \text{的复积分})$$

几个例子:

$$L\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}$$

$$L\{t^\alpha\} = \frac{\gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}} \quad (\alpha \text{为整数 } n \text{ 时}, L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}})$$

$$L\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad L\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

性质： **(1) 线性性质：** $L\{af(t)+bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$

(2) 位移性质： $F(s) = L\{f(t)\} \quad \Longrightarrow \quad L\{f(t)e^{at}\} = F(s-a)$

Laplace变换求解初值问题：

$\begin{cases} y''+py'+qy = f(t) \\ y(0)=y_0, y'(0)=y_1 \end{cases} \qquad L\{y''+py'+qy'\} = L\{f\}(s) \triangleq F(s)$

$L\{y''\} + pL\{y'\} + qL\{y\} = F(s)$. 记 $L\{y\} = Y(s)$

$$L\{y'\}(s) = sL\{y\} - y_0 = sY(s) - y_0 \qquad L\{y''\}(s) = s^2Y(s) - sy_0 - y_1$$
$$\Longrightarrow L\{y^{(n)}\}(s) = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

$s^2Y(s) - sy_0 - y_1 + p\left(sY(s) - y_0\right) + qY(s) = F(s)$

$\Longrightarrow Y(s) = \frac{s+p}{s^2+ps+q}y_0 + \frac{1}{s^2+ps+q}y_1 + \frac{F(s)}{s^2+ps+q}$

$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{s+p}{s^2+ps+q}\right\}y_0 + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+ps+q}\right\}y_1 + L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2+ps+q}\right\} = \varphi_1 y_0 + \varphi_2 y_1 + L^{-1}\{\frac{F(s)}{s^2+ps+q}\}.$

当 $F=f=0, y_0=1, y_1=0 \quad \begin{cases} y''+py'+qy=0 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$ 解为 $\varphi_1(t)$.

当 $F=f=0, y_0=0, y_1=1 \quad \begin{cases} y''+py'+qy=0 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$ 解为 $\varphi_2(t)$.

$$\varphi_1 = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+ps+q}\right\} + pL^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+p^s+q}\right\} = \varphi_2'(t) + p\varphi_2(t)$$

卷积：

$$f*g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Laplace变换中卷积的性质：$L\{f*g\} = L\{f\}\cdot L\{g\}$

证明：

$$\int_0^\infty (f*g)e^{-st}dt = \int_0^\infty\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau e^{-st}dt = \int_0^\infty d\tau\int_\tau^\infty dt f(t-\tau)g(\tau)e^{-s\tau}e^{-s(t-\tau)}$$

令 $u = t-T$，原式：

$$= \int_0^\infty d\tau\int_0^\infty du f(u)e^{-su}g(\tau)e^{-s\tau} = L\{g\}\cdot L\{f\}.$$

总结：$\begin{cases} y''+py'+qy = f \\ y(0)=y_0, y'(0)=y_1 \end{cases} \qquad y = y_0\varphi_1 + y_1\varphi_2 + \varphi_2 * f$

$\Longrightarrow \quad \varphi_2 = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+ps+q}\right\} \quad \varphi_1 = \varphi_2' + p\varphi_2$

例1： $\begin{cases} y''+4y = \sin 3t \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

解：记 $Y(s) = L\{y\}(s)$，两边做Laplace变换：

$$s^2Y + 4Y = L\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+9} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

再做逆Laplace变换：

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\} = \frac{3}{10}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t$$

定理:

$f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 分段连续函数，且满足指数增长条件，$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, t \geq T$，则 $L\{f(t)\}$ 在 $s>\alpha$ 上存在，

$$|\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt| \leq c+\int_T^\infty Me^{(\alpha-s)t}dt$$

Heaviside函数:

$$H(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, t\geq 0\end{cases}$$

Heaviside函数关于Laplace变换有如下性质:

$$L\{H(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}$$
$$L\{H_a(t)\}=\int_a^\infty e^{-st}dt=\frac{e^{-as}}{s}, s>0$$

例:

$$L\left\{\sin 3t \cdot e^{2t}\right\}=\frac{3}{(s-2)^2+9}$$
$$L\left\{t^n \cdot e^{2t}\right\}=\frac{\gamma(n+1)}{(s-2)^{n+1}}$$

考虑 $f(t)=1+[t]$，有:

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^2 2e^{-st}+\cdots=\frac{e^{-s}-1}{-s}+\frac{2\left(e^{-2s}-e^{-s}\right)}{-s}+\cdots=\frac{1}{s\left(1-e^{-s}\right)}$$