ODE笔记5：优级数法、牛顿迭代法等

$f(x,y)$ 实解析 $\implies$ 解 $y(x)$ 实解析

$$\sum_{i=0,j=0}^{\infty} a_{ij}x^iy^j \text{ 收敛} \implies y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k \text{（其中 } C_k \text{ 待定）}$$

优级数法：

$$(A)\ \sum_{i,j=0}^{+\infty}a_{ij}x^iy^j \qquad\qquad (B)\ \sum_{i,j=0}^{+\infty}A_{ij}x^iy^j$$

若 $\forall i,j$，$|a_{ij}|<A_{ij}$，则称 (B) 为 (A) 的**优级数**。若 (B) 收敛，则称 (B) 为 (A) 的**优函数**。

（1）**绝对一致收敛**：(B) 是 (A) 的优级数，(B) 在区域 G 中收敛，由Abel定理，(A) 在 G 的任一闭子区域中绝对一致收敛。

（2）非负系数多项式：若 (B) 是 (A) 的优级数，则 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P_k(\{A_{ij}\}_{i+j<k})x^k$ 是 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P_k(\{a_{ij}\}_{i+j<k})x^k$ 的优级数

（3）存在优函数：若 $f(x,y)$ 在 $(-\alpha,\alpha)\times(-\beta,\beta)$ 展开收敛的幂级数 (A)，则存在优函数

$$F(x,y)=\frac{M}{(1-\frac{x}{\alpha})(1-\frac{y}{\beta})}$$

由条件 $\sum\limits_{i,j=0}^{+\infty}|a_{ij}|\alpha^i\beta^j\triangleq M$，其中 $0<\overline{\alpha}<\alpha, 0<\overline{\beta}<\beta$

$$\implies |a_{ij}|\overline{\alpha}^i\overline{\beta}^j\le M \qquad \implies |a_{ij}|\le\frac{M}{\overline{\alpha}^i\overline{\beta}^j}\triangleq A_{ij}$$

优级数 $\sum\limits_{i,j=0}^{+\infty}\frac{M}{\overline{\alpha}^i\overline{\beta}^j}x^iy^j,\ \forall|x|<\overline{\alpha},\ |y|<\overline{\beta}$

Cauchy定理　　　　　幂级数法

$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(0)=0\end{cases} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}x^iy^j$$

$$\implies \sum_{k=0}^{\infty}kC_kx^{k-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}x^i(\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k)^j$$

$c_1+2c_2x+\ldots=a_0+a_{10}x+a_{01}(c_1x+\ldots)+\ldots$

$\implies c_1=a_{00}$，$c_2=\frac{1}{2}(a_{10}+a_{01}c_1)=\frac{1}{2}(a_{10}+a_{01}a_{00})\ldots$

归纳：$c_k=P_k(\{a_{ij}\}_{i+j<k})$，$k$ 次多项式非负系数。

$$(*)\quad \begin{cases} y' = f(x,y) = \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}x^i y^j \\ y(0)=0\ ,\ y = \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}x^i y^j \end{cases}$$ 若 $f(x,y)$ 在 $(-\alpha,\alpha)\times(-\beta,\beta)$ 实解析 $\Longrightarrow$ $(*)$ 在 $(-\gamma,\gamma)$ $\exists!$ 实解析。

Peano $\Longrightarrow$ 存在性 ✓ Picard $\Longrightarrow$ 存在唯一性 ✓

唯一性： 反证：设两个不同的实解析解 $y_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$，$y_2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. 由前面结论，$c_k = P_k(\{a_{ij}\}_{i+j<k}) = b_k$，矛盾！

存在性： $\begin{cases} y' = \sum a_{ij}x^i y^j \\ y(0)=0 \end{cases}$ 形式解：$y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$，$c_k = P_k(\{a_{ij}\}_{i+j<k})$

$$\begin{cases} y' = \sum A_{ij}x^i y^j = \frac{M}{(1-\frac{x}{\gamma})(1-\frac{y}{\gamma})},\ 0<\gamma<\alpha,\beta \\ y(0)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ y = \gamma - \gamma\sqrt{1+2Mln(1-\frac{x}{\gamma})} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\ ,\ b_k = P_k(\{a_{ij}\}_{i+j<k})\ ,\ \forall |x|<\rho$$

由性质（2），$\sum b_k x^k$ 是 $\sum c_k x^k$ 的优级数。

由性质（1），$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 在 $|x|<\gamma<\rho$ 中绝对一致收敛。

度量空间：

映射：$d: X\times X \to R$，$\forall x,y,z\in X$ 若满足以下三个性质：

（1）$d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0 \iff x=y$

（2）$d(y,x)=d(x,y)$

（3）$d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z)$ 称 (X,d) 为度量空间。

压缩映射原理：

(X,d) 为非完备度量空间，$T: X\to X$，称为压缩映射。i.e. $\exists\,\theta\in(0,1)$，$d(T(x),T(y))\le\theta\cdot d(x,y)$，则 $\exists!\,\zeta\,,s.t.\ \zeta = T(\zeta)$.

Picard：$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt = T(y(x))$.　　$I=\{|x-x_0|\le\alpha\}$

$d(y_1(x),y_2(x)) = \max\limits_{x\in I}|y_1(x)-y_2(x)|$,

$$|T(y_1)-T(y_2)| = |\int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))dt| \overset{lip}{\le} L\int_{x_0}^{x}|y_1-y_2|dt \le \underbrace{L\alpha}_{\theta<1}\cdot d(y_1,y_2)$$

牛顿迭代法：

求 $g(x)=0$，$x = x - \frac{g(x)}{h(x)} \triangleq f(x)$.

$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)}{h(x)} + \frac{g(x)h'(x)}{h^2(x)}$. 条件:

$g(y) = 0, x \sim y \implies f'(x) \sim f'(y) = 1 - \frac{g'(y)}{h(y)} = 0.$

取 $h(x) = g'(x)$, $\implies x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$