1. 证明：若$U,V \subseteq \mathbb{R}^n$，则$conv(U+V)=convU+convV$ 。

2. 给定$\mathbb{R}^2$中的 5 个点$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$。试给出它们的凸包的多面体表示。

3. （1）设$\mathbf{x}^1,\cdots,\mathbf{x}^m$为$\mathbb{R}^n$中$m$个不同的点，

$$S=\left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{x}^i,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\lambda_i\ge 0,i=1,\cdots,m\right\}。$$

$\mathbf{x}^i$是否必是S的极点，若不是，如何判断$\mathbf{x}^i$是否是S的极点。S是否有除$\mathbf{x}^1,\cdots,\mathbf{x}^m$之外的极点。

（2）给定$\mathbb{R}^n$中两个多胞形

$$S_1=\left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{x}^i,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\lambda_i\ge 0,i=1,\cdots,m\right\}$$

和

$$S_2=\left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}\mu_i\mathbf{y}^i,\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1,\mu_i\ge 0,i=1,\cdots,k\right\}。$$

如何判断S_1和S_2是否有公共点。

（3）给定$\mathbb{R}^n$中的两个多面体$S_1=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1\mathbf{x}\le \mathbf{b}_1\}$和$S_2=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_2\mathbf{x}\le \mathbf{b}_2\}$。如何判断$S_1$和$S_2$是否有公共点。

4. （1）证明：齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$有所有分量均非负的非零解当且仅当不存在向量$\boldsymbol{\pi}$使得$\boldsymbol{\pi}^\top\mathbf{A}>\mathbf{0}$。

（2）证明：存在向量$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，使得线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$有所有分量均为正的解当且仅当不存在向量$\boldsymbol{\pi}$，使得$\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{A}\ge\mathbf{0}$且$\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{A}\ne\mathbf{0}$。

5. 可行解$\mathbf{x}^*$称为数学规划$\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\in S\}$的局部最优解，若存在$\varepsilon>0$，对任意$\mathbf{x}\in\delta(\mathbf{x}^*,\varepsilon)\bigcap S$，$f(\mathbf{x}^*)\le f(\mathbf{x})$。证明：线性规划的任一局部最优解均为（全局）最优解。