1. 并集公理: $\forall A\ \exists B\ (x \in B \leftrightarrow \exists a(x \in a \wedge a \in A))$ （ B 记作 $\cup A$ ）

幂集公理: $\forall A\ \exists B\ (x \in B \leftrightarrow \forall y(y \in x \rightarrow y \in A))$ （ B 记作 $P(A)$ ）

2. 任取一条直线l（直线的存在性），l上任取一点O，任取线段OA作为单位．过O做l的垂线（直角的存在性），并在垂线上取线段OB＝OA（这要根据合同公理）．在这两条坐标轴上确定一维的坐标（需要阿基米德公理和完备性公理，相当于实数的存在性）．然后对平面上任何一点，确定坐标：做坐标轴平行线与另一个坐标轴相交．

3. $A\cup B=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}$.

$P(A\cup B)=\{\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\{\{\phi\}\}\},\ \{\phi,\{\phi\}\},\ \{\{\phi\},\{\{\phi\}\}\},\ \{\phi,\{\{\phi\}\}\},$
$\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\},\ \phi\ \}$.

4. $(\Rightarrow)$ $(a,b)=(c,d)$，即 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$.

若 $\{a\}=\{c\}$，则 $a=c$，再由 $\{a,b\}=\{c,d\}$ 知 $b=d$.

若 $\{a\}=\{c,d\}$ 则 $a=c=d$ 再由 $\{a,b\}=\{c\}$ 知 $a=b=c=d$.

总之有 $a=c$, $b=d$.

$(\Leftarrow)$ 显然

5. 归纳证明 $P(k)$: $\forall m、n \in k$, $n<m$, $m<n$, $n=m$ 恰有一个成立.

$P(0)$ 是虚真命题，成立.

假设 $P(k)$ 成立，欲证 $P(k+1)$ 成立.

$\forall m、n \in k+1 = k \cup \{k\}$

若 $m、n \in k$，由归纳假设知 $P(k+1)$ 成立

若 $m、n \in \{k\}$，则 $m=n=k$

若 $m \in k$，$n \in \{k\}$ 则 $m \in n$. 即 $m<n$

若 $m \in \{k\}$，$n \in k$ 则 $n \in m$，$n<m$

从而 $P(k+1)$ 成立.

6. 令映射 $G: \{g \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \exists k, g$ 为 $k \to \mathbb{N}$ 的映射$\} \to \mathbb{N}$

满足 $G(\phi) = n$，且对任何映射 $g: \{0,1,\cdots,k\} \to \mathbb{N}$

有 $G(g) = g(k)+1$

由命题 2.1.9. 知

$\exists!$ 映射 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s.t.

$$f(m+1) = G(f|_{\{0,1,\cdots,m\}}) = f(m)+1$$

$$f(0) = G(\phi) = n$$