2021-2022 秋冬学年偏微分方程期末考试（数院 3 学分选修）（Review Type）

@Ppppowder

2022 年 1 月 16 日

一 (1)（7 分）利用分离变量法解方程

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$$

(2)（8 分）验证 $u = \frac{\sin nx \sinh nt}{n^2}$ 是方程

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 \\ t = 0 : u = 0; u_t = \frac{\sin nx}{n} \end{cases}$$

的基本解，并分析当 $n \to \infty$ 时，$||u||_\infty$ 的变化性态。

（Remark：$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$）

二、（30 分）如果 $\Delta v \geq 0$, 那么称 v 为次调和函数

(1). 若 v 为次调和函数，证明 $v(P) \geq \frac{1}{V(B(R,P))} \int_{\partial B(R,P)} v(y) dy$

(2). 若 v 为非常值次调和函数，证明 v 的最小值在边界处取到

(2). 若 v 为调和函数，$f(x)$ 为凸函数，证明 $f(v)$ 是次调和函数

(3). 若 v 为调和函数，证明 $|Dv|^2$ 是次调和函数

三、（15 分）求满足极小曲面方程

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0$$

的所有形如 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 的解。

四、（15 分）对于波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ t = 0 : u = f(x); u_t = g(x) \end{cases}$$

的基本解 u，如果 $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 定义 $V(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t^2 dx, K(t) = \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx$
(1). 证明 $V(t) + K(t)$ 恒为常数
(2). 证明当 t 足够大时，成立：$V(t) = K(t)$

五、(15 分) 对于热传导方程 $u_t - u_{xx} = 0$, 若 u 为形如 $u = v(z), z = \frac{x}{\sqrt{t}}$ 的基本解
(1). 求证 v 满足方程 $2v'' + v'z = 0$, 并验证 $v = c \cdot \int e^{-\frac{z^2}{4}} dz$ 是这个方程的解
(2). 求出 v_x, 并确定 c 的值使得 v_x 规范化，即 $\int_R v_x dx = 1$, 对比 v_x 和热传导方程并说明它的物理意义
(Hint:$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$)

六、(10 分) 对于热传导方程 $u_t - \Delta u = 0$ 在区域 $D_T = \Omega \times [0, T]$ 上的基本解 u，证明：

$$\max_{D_T} u = \max_{\Gamma_T} u$$

其中 Γ_T 是抛物边界。
(Hint：$v_\varepsilon = u - \varepsilon t$)