第二章　复数与几何

2.1　Fermat 问题

Fermat(费尔马) 是 17 世纪的一位法国律师, 业余时间从事数学研究, 因在数学上的杰出贡献而被称为“业余数学之王”。1643 年, Fermat 在给意大利物理学家与数学家 Torricelli(托里拆利) 的一封信中提出了如下问题:

在三角形内找一点，使其到三角形顶点的距离之和最小.

Torricelli 很快找到了答案。他发现如果三角形的内角都不超过 $2\pi/3$, 并且 P 到三顶点的连线张角都为 $2\pi/3$ 时, 距离之和达到最小。为纪念这两位数学家, 这个点通常被称为 Fermat-Torricelli 点, 记为 P_*。

为讨论需要, 将符号简化: 在不致混淆时, 亦用 A, B, C 表示相应的复数。任给平面上一点 P, 定义距离函数

$$d(P) = |A - P| + |B - P| + |C - P|.$$

定理 2.1.(Fermat-Torricelli) 假设三角形 ABC 每个内角都不超过 $2\pi/3$。对于平面上任意一点 P, 成立

$$d(P) \geq d(P_*) = |A + B\omega^2 + C\omega|, \tag{2.1}$$

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$。上式等号成立当且仅当 $P = P_*$。

证明: 首先注意到 Fermat-Torricelli 点 P_* 满足

$$A - P_*,\ (B - P_*)\omega^2,\ (C - P_*)\omega$$

辐角相等。反之, 利用几何知识知, 满足此性质的点必然是 P_*。

利用复数模长的三角不等式得

$$\begin{aligned} d(P) &= |A-P|+|B-P|+|C-P| \\ &= |A-P|+|(B-P)\omega^2|+|(C-P)\omega| \\ &\geq |A+B\omega^2+C\omega-P(1+\omega+\omega^2)| \\ &= |A+B\omega^2+C\omega| \\ &= |A-P_*+(B-P_*)\omega^2+(C-P_*)\omega| \\ &= |A-P_*|+|B-P_*|+|C-P_*| \\ &= d(P_*). \end{aligned}$$

由此得不等式。以上证明颇为巧妙的一步是对复数乘以 ω^2, ω 的变形, 以及基本事实 $1+\omega+\omega^2=0$ 的运用 (可使 P 这一变量消失)。这个定理留下了两个自然的问题:

(1). 如果三角形有内角至少为 $2\pi/3$, 结论又如何?

(2). 表达式 $|A+B\omega^2+C\omega|$ 有什么几何意义?

未尽之意，留作思考的余地。

2.2　Heron 公式

在公元一世纪的古埃及亚历山大城, 有一位数学家与工程师 Heron (海伦, 10-70 AD)。此人也是一位发明家, 众多发明中以风车最为有名。遗憾的是, 他的大部分手稿与设计都已遗失, 因此无从得知其全部科学成就。他在数学方面的代表作为《测量术》(metrica), 该书的原稿于 1896 年被发现。在这本书中, 他给出了三角形的面积公式。这个公式后来也被中国南宋数学家秦九韶在《数书九章》(1247) 中独立得到。

定理 2.2.(Heron) 平面三角形 ΔABC 三边长记为 a,b,c, 半周长记为 p, 面积记为 S。则有恒等式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

证明: 记 O 为内切圆圆心，r 为内切圆半径。从三个顶点 B,C,A 到内切圆切点的长度分别记为 x,y,z, 则成立

$$x+y=a,\ y+z=b,\ x+z=c.$$

由此解出

$$x=p-b,\ y=p-c,\ z=p-a.$$

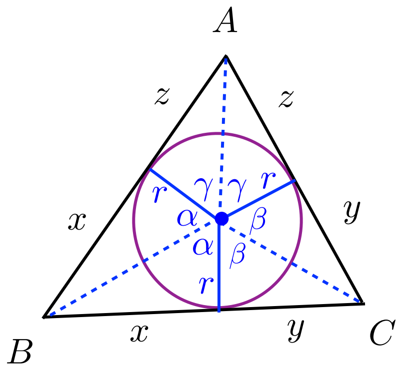

图 2.1: 通过构造复数计算三角形的面积

构造如下复数：

$$r + ix = ue^{i\alpha},\ r + iy = ve^{i\beta},\ r + iz = we^{i\gamma}.$$

这里, u, v, w 分别为内切圆圆心到三顶点 B, C, A 的距离, α, β, γ 分别为圆心到顶点的线段与圆心到切点的半径之间的夹角。由复数乘法的性质与 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 可知，

$$(r + ix)(r + iy)(r + iz) = uvwe^{i\pi} = -uvw.$$

另一方面, 上式左端展开得

$$(r+ix)(r+iy)(r+iz) = r^3+ir^2(x+y+z)-r(xy+yz+xz)-ixyz.$$

比较两种方式的值可知, 上式虚部为零。由此得

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)/p}.$$

于是得三角形面积

$$S = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

注: 圆内接四边形的边长依次记为 a, b, c, d, 则其面积为

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

此公式被公元 7 世纪的印度数学家与天文学家 Brahmagupta (婆罗摩笈多, 598–668) 发现。Heron 公式可以视为上式在 $d = 0$ 时的退化情形。如果圆内接四边形同时也是 (另一个圆的) 圆外切四边形, 则

$$A = \sqrt{abcd}.$$

2.3 Ptolemy-Euler 定理

定理 2.3.(Ptolemy-Euler) 假设 $ABCD$ 是平面凸四边形, 顶点按逆时针排列, 则边长与对角线长度满足不等式

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

等号成立当且仅当 $ABCD$ 是圆内接四边形。

定理中圆内接四边形满足的等式情形称为 Ptolemy 定理，不等式情形被 Euler 证明。此定理证法众多, 这里给出利用复数性质的简洁证明。

证明： 假设 A, B, C, D 对应的复数分别为 a, b, c, d。容易验证恒等式

$$(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (b-c)(a-d).$$

利用复数模长的三角不等式得

$$|a-c| \cdot |b-d| \leq |a-b| \cdot |c-d| + |b-c| \cdot |a-d|.$$

此不等式即为所求。等号成立充要条件是

$$\frac{(b-c)(a-d)}{(a-b)(c-d)} = \frac{BC \cdot AD}{AB \cdot CD} e^{i(\pi + \angle DAB + \angle BCD)}$$

为正实数, 即 $\angle DAB + \angle BCD = \pi$, 等价于 $ABCD$ 四点共圆。□

2.4 Napoleon 定理

Napoleon(拿破仑) 是十九世纪的法国军事家, 政治家, 法兰西第一帝国的皇帝。他热爱数学，鼓励科学研究与技术教育事业，被授予法兰西研究院院士。他认为一个国家只有数学蓬勃发展, 才能展现国力的强大，数学的发展和至善与国家的繁荣昌盛密切相关。平面几何中的 Napoleon 定理，形式简洁优美，令人读之忘俗。

定理 2.4.(Napoleon) 假设 $\Delta z_1 z_2 z_3$ 是任意三角形, 沿每条边向外做正三角形, 得三个正三角形 $\Delta w_1 z_2 z_1$, $\Delta z_2 w_2 z_3$, $\Delta z_1 z_3 w_3$, 其中心分别记为 a, b, c。则 Δabc 是正三角形。

证明：为证此结论, 先证一事实: 假设三角形顶点 z_1, z_2, z_3 在边界上按逆时针排列, 则

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \text{ 是正三角形} \Longleftrightarrow z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0,$$

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$。事实上, 只需注意到

$$\begin{aligned} \Delta z_1 z_2 z_3\text{是正三角形} \quad &\Longleftrightarrow \quad z_1 - z_2 = (z_3 - z_2)e^{\pi i/3} \\ &\Longleftrightarrow \quad z_1 + (e^{\pi i/3} - 1)z_2 - e^{\pi i/3} z_3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0. \end{aligned}$$

另一个基本事实: 三角形 $\Delta z_1 z_2 z_3$ 的重心 q 与顶点的关系

$$3q = z_1 + z_2 + z_3.$$

利用这些事实, 接下来证明 Napoleon 定理:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 z_2 z_1\text{是正三角形} \quad &\Longleftrightarrow \quad w_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_1 = 0, \\ \Delta z_2 w_2 z_3\text{是正三角形} \quad &\Longleftrightarrow \quad z_2 + \omega w_2 + \omega^2 z_3 = 0, \\ \Delta z_1 z_3 w_3\text{是正三角形} \quad &\Longleftrightarrow \quad z_1 + \omega z_3 + \omega^2 w_3 = 0. \end{aligned}$$

上面右端三式相加得

$$(w_1 + z_2 + z_1) + \omega(z_2 + w_2 + z_3) + \omega^2(z_1 + z_3 + w_3) = 0.$$

上式等价于 $a + \omega b + \omega^2 c = 0$, 即 Δabc 是正三角形。 $\square$该证明堪称数形结合的典范。

注: Napoleon 定理有很多有趣的推广。1937 年, Thebault 将 Napoleon 定理推广到四边形的情形: 沿平行四边形每条边向外做正方形, 所得四个正方形的中心为正方形的四顶点。后来 Barlotti 将此事实推广到多边形的情形: 沿仿射正 n 边形的每条边向外做正 n 边形, 得到 n 个正 n 边形的中心为正 n 边形的顶点。这里, 仿射正 n 边形指正 n 边形在仿射变换下的像。

Napoleon 定理有一种变形：沿三角形每条边向内侧做正三角形, 得到的三个正三角形的中心也构成正三角形的顶点。证明类似，留给读者。

2.5　习题

“11 岁时，我开始学习欧几里得的《几何原本》，并请我的哥哥当老师。这是我人生中的一件大事，犹如初恋般令我神魂颠倒。”

—伯特兰 • 罗素

1. (平行四边形的特征) 证明平面上四个点 z_1, z_2, z_3, z_4 依次为平行四边形的四个顶点的充要条件是

$$z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0.$$

2. (单位圆周上的矩形) 给定单位圆周上的四个点 z_1, z_2, z_3, z_4, 证明这四个点是一矩形的顶点的充要条件是

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

3. (Thebault 定理, 1937) 沿着平行四边形的每边向外做正方形, 证明得到的四个正方形的中心也构成正方形的四个顶点。

4. (正三角形) 假设 $ABCDEF$ 是单位圆周上的六边形, 满足 $AB = CD = EF = 1$。记 BC 中点为 X, DE 中点为 Y, FA 中点为 Z, 证明 ΔXYZ 是正三角形。

5. (三点共线) 证明三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6. (凸多边形的内点) 假设 $z_1, \cdots, z_n$ 是凸 n 边形的 n 个顶点, a 满足

$$\frac{1}{z_1 - a} + \cdots + \frac{1}{z_n - a} = 0,$$

证明 a 在凸 n 边形的内部。

7. (三角恒等式) 证明

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

(提示: 考虑方程 $(z+1)^n = 1$ 的 $n-1$ 个非零根的乘积。)

附加题 (不做要求)

问题 2.1. (荒岛寻宝) 从前有个年轻的探险家，他在曾祖父的遗物中发现了一张羊皮卷，上面标注了一个宝藏的位置。它这样写道：“在北纬 xxx 度, 西经 xxx 度有一座荒岛。岛的北岸有一片草地, 草地上有一棵橡树和一棵松树, 还有一座绞架。那是曾绞死叛变者的地方。从绞架走到橡树, 然后右拐直角走同样步数, 在这里打第一个桩。从绞架走到松树, 然后左拐直角走同样步数, 在这里打第二个桩。两桩连线中点即为宝藏所在”。这位年轻人马上租船前往此岛。但令他大失所望的是, 虽然橡树和松树仍在, 但经风吹雨淋，绞架已溃烂成土, 无迹可寻。请问这位年轻人能找到宝藏吗？