第六章　交比与射影几何

6.1　线束的交比

例题 6.1. (线束的交比) 平面上四条给定直线 $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3$ 相交于一点, 直线 ℓ 与这四条直线依次交于 z_0, z_1, z_2, z_3。证明

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = -\frac{\sin(\ell_0, \ell_1)\sin(\ell_2, \ell_3)}{\sin(\ell_1, \ell_2)\sin(\ell_3, \ell_0)},$$

此处 (ℓ_j, ℓ_k) 表示直线 ℓ_j, ℓ_k 的夹角。

上式表明, 交比 (z_0, z_1, z_2, z_3) 不依赖于直线 ℓ 的位置, 只与四条直线 $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3$ 的位置有关, 因此, 该交比也被称为线束的交比。

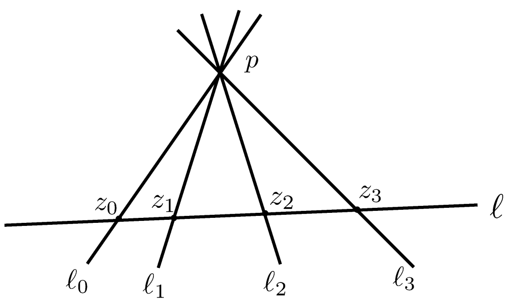

图 6.1: 线束的交比

证明：根据交比的几何意义，

$$
\begin{aligned}
(z_0, z_1, z_2, z_3) &= -\frac{|z_0 - z_1||z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2||z_3 - z_0|} \\
&= -\frac{\text{area}(\Delta p z_0 z_1) \cdot \text{area}(\Delta p z_2 z_3)}{\text{area}(\Delta p z_1 z_2) \cdot \text{area}(\Delta p z_0 z_3)} \\
&= -\frac{|p - z_0||p - z_1| \sin(\ell_0, \ell_1) \cdot |p - z_2||p - z_3| \sin(\ell_2, \ell_3)}{|p - z_1||p - z_2| \sin(\ell_1, \ell_2) \cdot |p - z_3||p - z_0| \sin(\ell_3, \ell_0)} \\
&= -\frac{\sin(\ell_0, \ell_1) \sin(\ell_2, \ell_3)}{\sin(\ell_1, \ell_2) \sin(\ell_3, \ell_0)}.
\end{aligned}
$$

6.2 蝴蝶定理

定理 6.1. (蝴蝶定理) 过圆内弦 MN 上一点 P 引出任意两条弦 AC, BD, 弦 AB, CD 与弦 MN 的交点分别记为 X, Y。则线段长度成立等式

$$\frac{1}{XP} - \frac{1}{MP} = \frac{1}{YP} - \frac{1}{NP}.$$

特别地，P 是 MN 的中点等价于 P 是 XY 的中点。

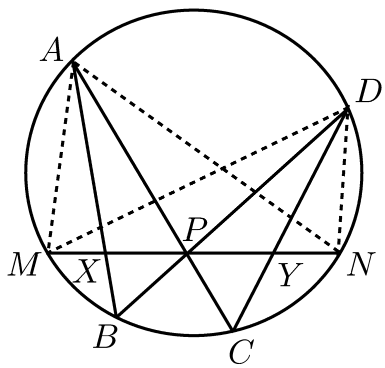

图 6.2: 蝴蝶定理

证明：在不致混淆时，我们用 $AB, XP, \cdots$ 既表示线段，也表示线段长度；用 $A, B, X, \cdots$ 既表示点，也表示相应的复坐标。利用交比定义及线束交比的性质，可得

$$(M, X, P, N) = -\frac{MX \cdot PN}{XP \cdot MN} = -\frac{\sin(\angle MAX) \sin(\angle PAN)}{\sin(\angle XAP) \sin(\angle MAN)}.$$

$$(M, P, Y, N) = -\frac{MP \cdot YN}{PY \cdot MN} = -\frac{\sin(\angle MDP) \sin(\angle YDN)}{\sin(\angle PDY) \sin(\angle MDN)}.$$

由同一圆弧对应的圆周角相等这一事实, 得 $\angle MAX = \angle MDP$, $\angle PAN = \angle YDN$, $\angle XAP = \angle PDY$, $\angle MAN = \angle MDN$。因此

$$\frac{MX \cdot PN}{XP \cdot MN} = \frac{MP \cdot YN}{PY \cdot MN}.$$

此式等价于

$$\frac{MP - XP}{XP \cdot MP} = \frac{MX}{XP \cdot MP} = \frac{YN}{PY \cdot PN} = \frac{PN - PY}{PY \cdot PN}.$$

即为

$$\frac{1}{XP} - \frac{1}{MP} = \frac{1}{YP} - \frac{1}{NP}.$$

由此可见，$XP = YP \iff MP = NP$。

6.3 Pappus 定理

定理 6.2. (Pappus, 360) 假设 A, B, C 在直线 ℓ 上, A', B', C' 在另一直线 ℓ' 上, 记交点 $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$, $Z = BC' \cap B'C$, 则 X, Y, Z 三点共线。

证明: 假设 XY 延长线交 ℓ 于 W, 交 $B'C$ 于 Z', 交 BC' 于 Z'', 我们的目标是证明 $Z' = Z'' = Z$。记 $Q = A'C \cap AB'$, $P = AC' \cap A'B$。由线束交比得

$$\begin{aligned}(W, X, Y, Z') &\overset{C}{=} (A, X, Q, B') \\ &\overset{A'}{=} (A, P, Y, C') \\ &\overset{B}{=} (W, X, Y, Z'').\end{aligned}$$

由此得 $Z' = Z''$。这说明 Z', Z'', Z 三点重合。 □

Pappus 定理的一个有趣应用:

定理 6.3. (交比等式) 假设 $A, B, C\ D$ 在直线 ℓ 上, D, E, F, G 在另一条直线 ℓ' 上, 记交点 $X = AF \cap BE$, $Y = BG \cap CF$, $Z = CH \cap DG$, 则 X, Y, Z 三点共线的充要条件是

$$(A, B, C, D) = (E, F, G, H).$$

证明: 由 Pappus 定理, AG, CE, XY 三线共点, 记为 P。记 XY 所在直线交 CG 于 Q, 交 CH 于 Z', 交 DG 于 Z''。于是

$$(A, B, C, D) \overset{G}{=} (P, Y, Q, Z''),\ (E, F, G, H) \overset{C}{=} (P, Y, Q, Z').$$

由此可见 $(A,B,C,D)=(E,F,G,H)$ 的充要条件是 $Z'=Z''$, 此时 $Z=Z'=Z''$, 即 X,Y,Z 三点共线。

6.4 Desargues 定理

定理 6.4. (Desargues 1639) 假设 AX,BY,CZ 三线共点，则三交点 $U=AB\cap XY$, $V=BC\cap YZ$, $W=CA\cap ZX$ 共线。

证明： 记交点 $Q=WV\cap PM$, $N=XZ\cap PM$, $M=AC\cap PM$, 则

$$\begin{aligned}(W,BC\cap WV,V,Q) &\overset{B}{=} (A,C,V,M)\\ &\overset{P}{=} (X,Z,V,N)\\ &\overset{Y}{=} (W,YZ\cap WV,V,Q).\end{aligned}$$

由此得 $BC\cap WV=YZ\cap WV$。这说明 $U=BC\cap YZ$ 在线段 WV 上, 即 U,V,W 三点共线。

第七章　分式线性变换的应用

7.1　椭圆球台上的桌球运动

问题 7.1. 设想台球桌是椭圆形的，一个台球从一个焦点出发，遇到边界反弹. 假设摩擦力可忽略，此反弹过程可持续下去，试描述桌球轨迹的渐进性态。

证明: 先证一有趣事实: 台球从焦点出发反弹 (反弹规则：入射线与切线夹角等于反射线与切线夹角) 后必经过另一个焦点。

假设椭圆离心率 e, 焦点 F_1, F_2 分别对应 $-1, 1$ 两点, 则椭圆长轴 $a = 1/e$。任取平面一点 P, 熟知 P 在椭圆上 (外，内) 当且仅当 $PF_1 + PF_2 = 2a$ $(> 2a, < 2a)$. 现取椭圆上一点 P, 延长 F_2P 至 A, 使 $PA = PF_1$。作角 $\angle F_1PA$ 的平分线 ℓ。下说明 ℓ 为椭圆的切线 (切点为 P)。为此, 取 ℓ 上异于 P 的点 Q, 由对称性和三角不等式,

$$QF_1 + QF_2 = QF_2 + QA > PF_2 + PA = 2a.$$

这说明 Q 在椭圆外。因此 ℓ 为椭圆的切线。

先考虑台球轨迹: 从焦点 F_1 出发的台球达到 P_1 点反弹后经过 F_2。假设 P_1 点横坐标为 x_1。利用椭圆上任一点到左焦点 (右焦点) 距离与到左准线 $x = -a^2/c = -a^2$(右准线 $x = a^2/c = a^2$) 距离之比是离心率 $e = c/a = 1/a$ 这一事实, 可求出

$$P_1F_1 = 1/e + ex_1, P_1F_2 = 1/e - ex_1.$$

假设有向线段 F_1P_1, P_1F_2 与 x 轴正方向夹角分别为 θ_1, θ_2。做变换 $c_k = \cos\theta_k$ (想法的关键一步), 于是

$$c_1 = \frac{x_1 + 1}{1/e + ex_1}, \ c_2 = \frac{x_1 - 1}{1/e - ex_1}.$$

由此消去 x_1, 得到 c_2, c_1 满足的关系

$$c_2=\frac{c_1-\kappa}{-\kappa c_1+1},\ \kappa=\frac{2e}{e^2+1}.$$

这说明 c_2 是 c_1 在分式线性变换 $f_1(z)=\frac{z-\kappa}{-\kappa z+1}$ 下的像。

假设 P_1F_2 与椭圆交于 P_2 点, 其横坐标是 x_2, 有向线段 P_2F_1 与 x 轴正方向的夹角是 θ_3, 记 $c_3=\cos\theta_3$。类似可得

$$P_2F_1=1/e+ex_2, P_2F_2=1/e-ex_2.$$

$$c_2=\frac{x_2-1}{1/e-ex_2},\ c_3=-\frac{x_2+1}{1/e+ex_2}.$$

由此得

$$c_3=-\frac{c_2+\kappa}{\kappa c_2+1},\ \kappa=\frac{2e}{e^2+1}.$$

这说明 c_3 是 c_2 在分式线性变换 $f_2(z)=-\frac{z+\kappa}{\kappa z+1}$ 下的像。

假设台球第 n 次反弹点是 P_n, 其前进方向与 x 轴正方向夹角是 θ_n, 记 $c_n=\cos\theta_n$。连续两次经焦点 F_1 的角度余弦之间的关系为

$$c_{2n+1}=f_2\circ f_1(c_{2n-1})=\cdots=g^n(c_1),$$

$$g(z)=f_2\circ f_1(z)=\frac{(1+\kappa^2)z-2\kappa}{-2\kappa z+(1+\kappa^2)}=\frac{z-\sigma}{-\sigma z+1},\sigma=\frac{2\kappa}{1+\kappa^2}.$$

可以验证 g 有两个不动点 ±1, 且

$$g'(1)=\frac{1+\sigma}{1-\sigma},\ g'(-1)=\frac{1-\sigma}{1+\sigma}.$$

这说明 -1 是吸引不动点。因此只要 $c_1\neq 1$, 当 $n\to+\infty$ 时, 有 $g^n(c_1)\to -1$。

总结: 如果 $\theta_1\in(-\pi,0)$, 则 $\theta_{2n+1}\to-\pi$; 如果 $\theta_1\in(0,\pi)$, 则 $\theta_{2n+1}\to\pi$。由此知, 运动轨迹要么是长轴，要么渐近于长轴。

7.2 Urquhart 定理

很难有定理如同 Urquhart 定理证明让人惊艳。Urquhart(1902-1966) 是一位澳大利亚的数学老师，他发现的定理，在 Tabachnikov 关于桌球运动的书中广为人知，其证明是分式线性变换的巧妙应用。

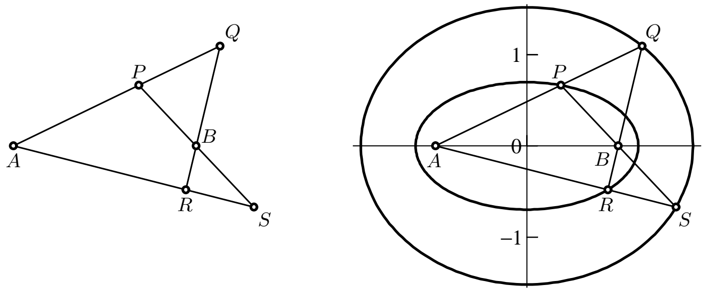

图 7.1: Urquhart 定理

定理 7.1. (Urquhart) 四条直线段交点 A, B, P, Q, R, S 如图所示, 则成立

$$AP + PB = BR + RA \Longleftrightarrow AQ + QB = BS + SA.$$

证明: 假设两个等式都成立, 此时 P, R 与 Q, S 位于共焦点 A, B 的两个椭圆上。记小椭圆离心率为 e_1, 大椭圆离心率为 e_2。我们将在 APQ, QBR, PBS 共线的前提下, 证明 A, R, S 共线。

为此, 考虑过焦点 A 的桌球的两个轨迹:

$$A \mapsto P \mapsto B \mapsto S \mapsto A, \quad A \mapsto Q \mapsto B \mapsto R \mapsto A.$$

记有向线段 S 与 x 轴正方向夹角为 θ_S, 有向线段 RA 与 x 轴正方向夹角为 θ_R, 则利用椭圆桌球问题中的结论可知

$$\cos(\theta_S) = f_2 \circ f_1(\cos\theta_1), \quad \cos(\theta_R) = g_2 \circ g_1(\cos\theta_1),$$

其中 f_1, f_2, g_1, g_2 分别为分式线性变换

$$f_1(z) = \frac{\kappa_1 - z}{1 - \kappa_1 z}, \quad f_2(z) = -\frac{\kappa_2 + z}{1 + \kappa_2 z},$$

$$g_1(z) = \frac{\kappa_2 - z}{1 - \kappa_2 z}, \quad g_2(z) = -\frac{\kappa_1 + z}{1 + \kappa_1 z},$$

其中 $\kappa_j = \frac{2e_j}{e_j^2+1}$。容易验证

$$f_2 \circ f_1(z) = \frac{(1 + \kappa_1\kappa_2)z - (\kappa_1 + \kappa_2)}{(\kappa_1 + \kappa_2)z + (1 + \kappa_1\kappa_2)} = g_2 \circ g_1(z).$$

由此得 $\cos(\theta_S) = \cos(\theta_R)$, 考虑到 θ_S, θ_R 要么同在 $(0, \pi)$, 要么同在 $(-\pi, 0)$, 因此有 $\theta_S = \theta_R$。