1. (a) $\mathbb{R}^\omega$ 关于积拓扑是道路连通的，连通分支和道路连通分支就是 $\mathbb{R}^\omega$.

(b) 仅需考虑 $\vec{y}=\vec{0}$，我们证明：$\vec{x}\sim\vec{0}$（在一致拓扑下）

$\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ 是有界的.

($\Leftarrow$). 若 x 有界，考虑 $f:[0,1]\to(\mathbb{R}^\omega,$ 一致拓扑$)$

$$t\mapsto tx.$$

对 $\sup_i |tx_i|<\varepsilon$，$\Rightarrow$ $t<\dfrac{\varepsilon}{\sup_i|x_i|}$

故 f 为连续映射（开集的原像是开集），且为连接 0 和 x 的道路.

从而 $x\sim 0$

($\Rightarrow$) 现 $x\sim 0$. 若 x 不是有界的，由于有界数列和无界数列是 $\mathbb{R}^\omega$ 的一个分割（一致拓扑下），故 $x\not\sim 0$

从而 x 必为有界的.

(c) 需证明：$x\sim y$（箱拓扑下）$\Leftrightarrow$ $x-y\in\mathbb{R}^\infty$（即终于0）

($\Leftarrow$) 若 $x-y\in\mathbb{R}^\infty$. 考虑 $f(t)=(1-t)x+ty=x+t(y-x)$.

为 $[0,1]$ 到 $(\mathbb{R}^\omega,$ 箱拓扑$)$ 的映射.

由于 $y-x$ 在有限项后为0. f 可视为 $[0,1]\to\mathbb{R}^N$

从而 f 为连续映射.（或者说，任意箱拓扑中开集在 f 下原像为有限多个开集的交，从而为开集）.

x 与 y 道路连通，从而在同一连通分支.

($\Rightarrow$) 现 $x\sim y$，若 $x-y\notin\mathbb{R}^\infty$

则 x_i-y_i 有无穷项非0

考虑 $h:\ \mathbb{R}^\omega\to\mathbb{R}^\omega$

$$(h(z))_i=\begin{cases} z_i-x_i, & 当\ x_i=y_i \\ i\cdot\dfrac{z_i-x_i}{y_i-x_i}, & 当\ x_i\neq y_i\end{cases}$$

h 为自同胚映射（h 为双射. h, h^{-1} 连续）

且 $h(x)=0$，$(h(y))_i=i$. 对无穷多的 i. $h(y)$ 无界.

故 $h(x)\not\sim h(y)$（箱拓扑中有界数列和无界数列也是一个分割）

从而 $x\not\sim y$，矛盾!

4.2. 我们证明开集的每个连通分支是开的，根据书上定理25.3则知 X 是局部连通。

证明：$\forall x \in X$ 及 x 的任意开邻域 U_x，设 U_x 的一个连通分支为 C，任取 $x \in C$

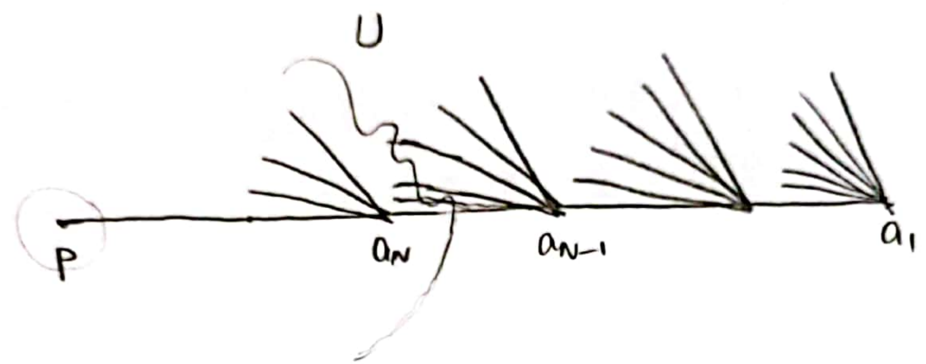
由 X 是弱局部连通（于 x 点），知存在连通子空间 W_x，$W_x \subset U_x$，

且 $W_x \supset V_x$，V_x 是 x 的某一开邻域.

于是 $V_x \subset W_x \subset C$，即知 $C = \bigcup_{x \in C} V_x$，$C$ 为开集

由 C 和 U_x 的任意性，再由定理25.3 证毕.

3.



我们证明，P的任意既连通又开的邻域一定包含所有 a_i，从而 X 在 P 点非局部连通。（考虑 P 的邻域 U，$a_1 \notin U$ 即可）

任取 P 的开邻域 U，若 U 未包含所有 a_i，记 $N=\max\{i: a_i\in U, a_{i-1}\notin U\}\geq 2$.
则当 k 充分大时，$(a_{N-1},0)$，$(a_N,\frac{1}{k})$ 构成的线段末端总有小部分落在 U 内，
它们是 U 的连通分支，从而 U 非连通.

再证明，X 在 P 点是弱局部连通的.
任取 P 的开邻域 U，$\exists N$，使得 $(a_N,0),(P,0)$ 组成线段 $\subset B_p(\delta)\subset U$.
则由线段 $(a_N,0),(P,0)$，及 $a_N, a_{N+1},\cdots$ 出发的（足够低的）线段
所构成的全体是包含于 U 的连通子空间，
它包含 P 点的一个更小开邻域（如 $B_p(\frac{\delta}{2})\cap X$）

4. (a) $x\sim x$: 不存在 $A\cap B=\phi$ s.t. $x\in A, x\in B$.

$x\sim y \Rightarrow y\sim x$ 显然.

现 $x\sim y$, $y\sim z$. 若 $x\nsim z$. 则存在分割 A、B. $x\in A$, $z\in B$

则对 $y\in A$ 或 $y\in B$, 均有 $y\sim z$ 或 $x\sim y$. 矛盾!

从而必有 $x\sim z$.

(b) 设 C 是一个连通分支. 对 $x,y\in C$, 若存在分割 A、B s.t. $x\in A, y\in B$

其中 A,B 是 X 中不交开集. 则 $A\cap C$, $B\cap C$ 是 C 的分割.

与 C 连通矛盾. 故 x、y 在同一拟分支 Q, i.e. $C\subset Q$.

若 X 是局部连通, 由于 $Q=\bigsqcup_{x\in Q} C_x$, 其中 C_x 是 x 所在连通分支.

记 $Q=\bigsqcup_{\alpha\in J} C_\alpha$, 若 J 不是单点集, 即存在 $x\in C_{\alpha_0}$, $y\in \bigsqcup_{J\setminus\alpha_0} C_\alpha$

由于 $Q=C_{\alpha_0}\sqcup\left(\bigsqcup_{J\setminus\alpha_0} C_\alpha\right)$ 且由 X 局部连通, C_{α_0}, $\bigsqcup_{J\setminus\alpha_0} C_\alpha$ 均为开集,

且是无交的, 它们构成 Q 的分割, 故 $x\nsim y$ (拟分支).

与 x、$y\in Q$ 矛盾!

从而 $Q=C_{\alpha_0}$

(c) $A=(K\times[0,1])\cup\{(0,0)\}\cup\{(0,1)\}$

连通分支 $\frac{1}{n}\times[0,1]$, $n\in\mathbb{N}_+$, $\{(0,0)\}$, $\{(0,1)\}$

道路连通分支 $\frac{1}{n}\times[0,1]$, $n\in\mathbb{N}_+$, $\{(0,0)\}$, $\{(0,1)\}$.

拟分支 $\frac{1}{n}\times[0,1]$ $n\in\mathbb{N}_+$, $\{(0,0)\}\cup\{(0,1)\}$

仅证拟分支. 记 $l_n=\frac{1}{n}\times[0,1]$. $T=\{(0,0)\}\cup\{(0,1)\}$.

对 $x\in l_n$, $y\in l_m$, $n<m$. 取 t. $\frac{1}{m}<t<\frac{1}{m-1}$

则 $A=((-\infty,t)\times\mathbb{R})\cap A \ \cup\ ((t,+\infty)\times\mathbb{R})\cap A := D\cup E$

$x\in D$, $y\in E$ $x\nsim y$.

同样对 $x\in T$, $y\in l_n$ 可证 $x\nsim y$.

若 $x,y\in T$, 且 $x\nsim y$, 则有 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 的开邻域 D、E.

$A=D\cup E$,

由于 $D\cap l_n$, $E\cap l_n$ 是 l_n 的分割. 与 l_n 连通矛盾.

故只能 $x\sim y$.

从而拟分支为 l_n, $n\in\mathbb{N}_+$, 和 T

B $B = A \cup ([0,1]\times\{0\})$

连通分支： B

道路连通分支： $B\setminus\{(0,1)\}$， $\{(0,1)\}$

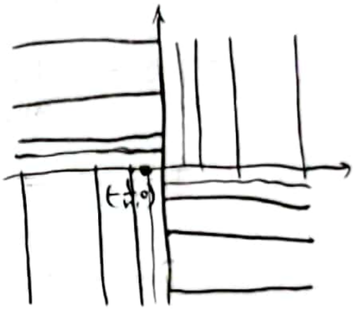
拟分支： B.

事实上， $B\setminus\{(0,1)\}$ 是连通，也是道路连通.

$\overline{B\setminus\{(0,1)\}} = B$ 也是连通

从而 拟分支、连通分支 只有 B.

$$C = (K\times[0,1]) \cup (-K\times[-1,0]) \cup ([0,1]\times -K) \cup ([-1,0]\times K).$$



连通分支： C

道路连通分支： $\frac{1}{n}\times[0,1]$, $-\frac{1}{n}\times[-1,0]$, $[0,1]\times -\frac{1}{n}$, $[-1,0]\times\frac{1}{n}$, $n\in N_+$

拟分支： C

我们证明 C 为连通的.

若不然. 存在分割 $C = C_1\cup C_2$，C_1, C_2 是 C 中既开又闭的. $C_1\cap C_2=\phi$

对于 $(-\frac{1}{n_0},0)$、不妨设 $(-\frac{1}{n_0},0)\in C_1$

由于 $(-\frac{1}{n_0},0)$ 是 $[-1,0]\times K$ 即第二象限的线段 的极限点（即任意 $(-\frac{1}{n_0},0)$ 的邻域点包含 $[-1,0]\times K$ 中的无穷点）

知 $[-1,0]\times\{\frac{1}{k}\}\subset C_1$，对所有 $k>N$.

由于 任意 $(-\frac{1}{n},0)$，$n\in N_+$ 都是 $[-1,0]\times\{\frac{1}{k}\}$ 的极限点.

且 C_1 是闭的. 知 $(-\frac{1}{n},0)\in C_1$. $\forall n\in N_+$

从而 $-K\times[-1,0]$（即第三象限的线段）$\subset C_1$，因 C_1 既开又闭.

仿上同理可得 $(0,-\frac{1}{n})$，$n\in N_+ \in C_1$

重复上述步骤 知 $C\subset C_1$ 从而 $C_2=\phi$. 矛盾.