ordinary differential equations

CC98@SailsOver

日期：September 22, 2022

目录

1 常微分方程的基本概念

定义 1.1 (常微分方程及阶数)**.** 设自变量为 x, 因变量为 y, 一个函数 F 确定在某连通开集 G 中, 则

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$$

称为 n 阶常微分方程. 它只有一个自变量.

定义 1.2 (线性常微分方程)**.** 若 F 关于 $y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ 是一次有理整式, 上述定义的微分方程可写为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y = f(x),$$

它称为线性常微分方程. 若 $f(x) = 0$, 方程称为线性齐次常微分方程, 否则称为非线性常微分方程.

定义 1.3 (常微分方程的解)**.** 若 $y = \phi(x) \in \mathcal{C}(I)$ 满足 $F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$ 且有直到 n 阶的连续导数, 则 $y = \phi(x)$ 为方程的解.

定义 1.4 (特解和通解)**.** 含有 n 个独立的任意常数 $C_1, \cdots, C_n$ 的解 $y = \phi(x, C_1, \cdots, C_n)$ 称为微分方程的通解. 不含任何待定常数的解称为微分方程的特解. 独立指的是:

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial C_1} & \cdots & \dfrac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial C_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial C_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{bmatrix} \neq 0$$

例 1.1. 对于 $x^{(3)} + yx^{(2)} + x' = \sin y$, 判定其阶数, 是否为线性方程, 是否为齐次方程.

解 1.1. 三阶线性非齐次常微分方程.

例 1.2. 验证 $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 是 $y'' = 4y$ 的通解.

解 1.2. 雅可比行列式不恒为 0.

2 一阶微分方程求解

2.1 一阶线性微分方程及其引入的一些基本解法

定义 2.1 (一阶线性齐次微分方程)**.** $y' = p(x)y, p(x) \in \mathcal{C}(I)$.

定理 2.1 (变量分离法)**.** *变量分离法是当方程中含 y, x 项可以完全分离到方程两边时的 ode 求解一般方法. 求解过程是分离之后两边求积分. 以一阶线性齐次微分方程为例,*

$$\frac{1}{y}dy = p(x)dx \Rightarrow \text{通解} y = C\mathrm{e}^{\int p(x)dx} \Rightarrow \text{特解} y = y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}.$$

定理 2.2 (积分因子法)**.** *积分因子法是根据方程结构配凑一个积分因子帮助解方程的方法. 以一阶线性齐次微分方程为例, 移项可得 $y' - p(x)y = 0$ 类似 exp 一类函数求导结果, 两边同乘积分因子 $\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$ 可得*

$$\frac{d(\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}y)}{dx} = 0 \Rightarrow y = C\mathrm{e}^{\int p(x)dx}.$$

定理 2.3 (性质)**.** *解要么恒为 0, 要么恒非零. 解在 $x \in I$ 上处处存在. 解空间是一维线性空间.*

例 2.1. 解下列微分方程: (1)$\dfrac{dy}{dx} = 1 - x + y^2 - xy^2$.(2)$y(0) = 0, \dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}$.

解 2.1. 变量分离即可. 注意 (2) 有无穷多解. 这是因为它有平凡解 $y = 0$, $y > 0$ 时, $y = (x + C)^2$, $y < 0$ 时有 $y = -(x + C)^2$. 任意取 C 得到两段抛物线解和直线 (平凡解) 连接起来都是方程的一个解.

定义 2.2 (一阶线性非齐次微分方程)**.** $y' = p(x)y + q(x), p, q \in \mathcal{C}(I)$.

定理 2.4 (常数变易法)**.** 常数变易法是由齐次方程通解得到非齐次通解的一般方法, 求解过程是变齐次方程通解中的常数为一待定函数, 通过假设和对应相等来解出待定函数. 以线性非齐次常微分方程为例, 设$y = C(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx} \Rightarrow$ 求导对比得$q(x) = C'(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx} \Rightarrow$ 通解$y = C\mathrm{e}^{\int p(x)dx} + \mathrm{e}^{\int p(x)dx} \displaystyle\int q(s)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} ds$.

也可用积分因子法求解该方程. 如下

$$\frac{d(\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}y)}{dx} = q(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} \Rightarrow \text{通解}.$$

定理 2.5 (性质)**.** 具有齐次情形的性质, 特殊性质为叠加原理: 设 y_1, y_2 为方程的两解, 则 $\alpha y_1 + \beta y_2$ 是方程 $y' = p(x)y + (\alpha + \beta)q(x)$ 的解.

例 2.2. 解方程: $y' = 1 + \frac{y}{x}$.

解 2.2. 运用常数变易法或积分因子法, 得 $y = Cx + x\ln|x|$.

2.2 标准形式一阶非线性微分方程

定义 2.3 (变量分离方程)**.** $\frac{dy}{dx} = f(x)\phi(y)$.

定理 2.6 (变量分离方程解法)**.** 先讨论其 $\phi(y) = 0$ 的解, 之后利用变量分离法即可.

定义 2.4 (齐次方程)**.** $y' = f(x, y); \forall \lambda \neq 0, y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$.

定理 2.7 (齐次方程解法)**.** 令 $\lambda = \frac{1}{x}$ 可以得到 $y' = f(1, \frac{y}{x})$, 再令 $u = \frac{y}{x}$ 解关于 u, x 的微分方程.

例 2.3. 解方程: $x^2y' = y^2 + xy - x^2, y(1) = 2$.

解 2.3. $y = \dfrac{2x}{1 - \frac{1}{3}x^2} - x$.

定义 2.5 (分式线性方程)**.** $\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}), c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

定理 2.8 (分式线性方程解法)**.** 雅可比矩阵 $J = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$. 若 $\det(J) \neq 0$, 利用坐标变换化作齐次方程求解。否则, 令 $a_1/a_2 = b_1/b_2 = k$ 换元求解.

定义 2.6 (伯努利方程)**.** $y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0, \alpha \neq 0, 1, g, h \in \mathcal{C}(I)$.

定理 2.9 (伯努利方程解法)**.** 方程两边同乘 $y^{-\alpha}(1 - \alpha)$, 原来的第一项凑出了 $y^{1-\alpha}$ 的导数, 从而换元 $z = y^{1-\alpha}$ 可求解.

例 2.4. 解方程: $y' + y = (1 - 2x)y^2$.

解 2.4. $y = 0$, 或 $y = (C\mathrm{e}^x - 2x - 1)^{-1}$.

定义 2.7 (里卡提方程)**.** $y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$.

定理 2.10 (里卡提方程解法)**.** 先看出一个特解 $\phi(x)$, 令 $u = y - \phi$ 可化出伯努利方程.

例 2.5. 解方程: $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.

解 2.5. 提示: 特解为 $-\frac{1}{x}$.

定义 2.8 (全微分方程)**.** 方程形式为: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. 若 $M_y=N_x$, 称该方程为全微分方程. 不等的情形见后.

定理 2.11 (全微分方程解法)**.** *关键在于找原函数. 找一个具有一阶连续偏导的函数 $F(x,y)$ 使得 $F_x(x,y)=M, F_y(x,y)=N$. 找出后, 就可得到解: $F(x,y)=C$.*
求原函数的方法: 由 $F_x(x,y)=M$ 得待定式 $F(x,y)=\int M(x,y)dx+\phi(y)$, 由 $F_y(x,y)=N$ 得待定式 $F(x,y)=\int N(x,y)dy+\theta(y)$, 二者联立可求 F.

定义 2.9 (类全微分方程)**.** 方程形式为: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. 且 $M_y=N_x$ 不成立.

定理 2.12 (类全微分方程解法)**.** *如果能找到积分因子 $\mu(x,y)\neq 0$ s.t. $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ 为全微分方程, 则可按全微分方程来解.*
一般解法:
若 $\phi=\dfrac{M_y-N_x}{N}$ 仅与 x 相关, 可取 $\mu=\exp\{\int\phi(x)dx\}$. 若 $\phi=\dfrac{N_x-M_y}{M}$ 仅与 y 相关, 可取 $\mu=\exp\{\int\phi(y)dy\}$.
如果上面的解法不可行, 可以找公共积分因子。将方程分解为 $M_1dx+N_1dy=0, M_2dx+N_2dy=0$, 其积分因子分别为 μ_1,μ_2, 原函数分别为 F_1,F_2, 若存在 W,G 使得 $\mu_1W(F_1)=\mu_2G(F_2)$, 则 $\mu_1W(F_1)$ 或 $\mu_2G(F_2)$ 为公共积分因子, 进而可以求解。

例 2.6. 解方程: $(x+\dfrac{y}{x^2})dx=\dfrac{dy}{x}$.

解 2.6. $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{y}{x}=C$.

例 2.7. 解方程: $(xy+y^2)dx+(xy+y+1)dy=0$.

解 2.7. $(x+1)y+\dfrac{1}{2}x^2+\ln|y|=C$.

2.3 隐式一阶微分方程

定理 2.13 ($F(x,y,y')=0$ 型解法)**.** *令 $x=\phi(s,t), y=\psi(s,t), p=y'=h(s,t)$. 由 $dy=pdx$ 可得 $\psi_sds+\psi_tdt=h(s,t)(\phi_sds+\phi_tdt)$. 进而依全微分方程解法或化为全微分方程求解.*

例 2.8. 解方程: $(y')^2=x-y$.

解 2.8. $y=x-1$, 或 $\begin{cases} y=-2v-2\ln(v-1)-v^2+C, \\ x=-2v-2\ln(v-1)+C \end{cases} \quad (v\neq 1)$.

定理 2.14 ($y=f(x,y')$ 型解法)**.** *令 $p=y'$, 由 $dy=pdx$ 可得 $f_xdx+f_pdp=pdx$. 由此依全微分方程解法可解出 $p=p(x,c)$, 代入 $y=f(x,p)$ 即可.*

例 2.9. 解方程: $y=y'^2-xy'+\dfrac{x^2}{2}$.

解 2.9. $y=\dfrac{x^2}{4}$, 或 $y=\dfrac{x^2}{2}+Cx+C^2$.

定理 2.15 ($x=f(y,y')$ 型解法)**.** *令 $p=y'$, 由 $dy=pdx$ 可得 $dy=p(f_ydy+f_pdp)$. 由此依全微分方程解法可解出 $p=p(y,c)$, 代入 $x=f(y,p)$ 即可.*

例 2.10. 解方程: $(y')^{(3)}+2xy'=y$.

解 2.10. $y=0$, 或 $\begin{cases} y=\dfrac{C-p^4}{2p}, \\ x=\dfrac{C-3p^4}{4p^2}. \end{cases}$

定理 2.16 ($F(x,y')=0$ 型解法)**.** 令 $x=\phi(t), p=y'=\psi(t)$, 由 $dy=pdx$ 可得 $dy=\psi(t)\phi'(t)dt$, 进而可以参数表示 y, 最终得到参数表达的解。

例 2.11. 解方程: $y'(x-\ln y')=1$.

解 2.11. $\begin{cases} x=t+\mathrm{e}^{-t}, \\ y=\mathrm{e}^{t}-t+C. \end{cases}$

定理 2.17 ($F(y,y')=0$ 型解法)**.** 令 $y=\phi(t), p=y'=\psi(t)$, 由 $dy=pdx$ 可得 $\phi'(t)dt=\psi(t)dx$, 进而可以参数化表示 x, 最终得到参数表达的解。

例 2.12. 解方程: $y^2(1+y'^2)=1$.

解 2.12. $\begin{cases} x=-\sin t+C, \\ y=\cos t. \end{cases}$

2.4 奇解

定义 2.10 (奇解)**.** 设微分方程: $F(x,y,y')=0$ 有一特解 $\phi(x)$, 其积分曲线为 Γ. 若 Γ 上任意一点的任意一个邻域内, 都存在该微分方程另一解的积分曲线与之在该点相切 (即包络), 称该解为奇解.

定理 2.18 (p-判别式)**.** 若 F, F_y, F_p 均连续, 如上定义的奇解 $\phi(x)$ 满足如下 p 判别式:

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0; \\ F_p(x,y,p)=0. \end{cases}$$

定理 2.19 (p-判别法)**.** 若微分方程: $F(x,y,y')=0$ 中 F 关于 x,y,p 二阶连续可微, 若 $y=\phi(x)$ 满足:

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0; \\ F_p(x,y,p)=0; \\ F_{pp}(x,y,p)=0; \\ F_y(x,y,p)=0. \end{cases}$$

则 $y=\phi(x)$ 为该微分方程的奇解.

例 2.13. 找出并判断 $xy'^2+9x=2yy'$ 的奇解.

解 2.13. $y=\pm 3x$.

例 2.14. 找出并判断 $(y-1)^2y'^2=y\mathrm{e}^{xy}$ 的奇解.

解 2.14. $y=0$.

3 高阶微分方程求解

3.1 高阶线性微分方程解的结构

定义 3.1 (高阶线性微分方程)**.** 若 $\{p_i\}_{i=1}^n$ 与 f 为 $[a,b]$ 上连续函数, 称方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

为 n 阶线性微分方程, 若 $f(x)=0, \forall x \in [a,b]$, 称方程为 n 阶线性齐次微分方程, 否则称为 n 阶线性非齐次微分方程.

定义 3.2 (存在唯一性). 给定 $[a,b]$ 上的一组初值时, n 阶线性微分方程的解存在且唯一.

定理 3.1 (n 阶线性齐次微分方程解的结构). 解空间为 n 维线性空间, 满足叠加原理.

定义 3.3 (函数的线性相关). 设 $X_1(t), \cdots, X_n(t)$ 是定义在 I 上的一组函数, 若存在不全为 0 的常数 $c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t) = 0, \forall t \in I$$

恒成立, 则称该组函数线性相关, 否则称线性无关.

定理 3.2 (函数的朗斯基行列式).

$$W = W(y_1(x), \cdots, y_n(x)) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

定理 3.3 (朗斯基行列式与线性相关性). 若 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 线性相关, 则 $W=0, \forall t \in I$, 反之不一定. 但如果 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 取自一齐次微分方程的解空间, 则 $W=0, \forall t \in I \iff$ 线性无关. 这时朗斯基行列式或者恒为零, 或者恒非零.

定理 3.4 (刘维尔公式). 设 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 是齐次线性微分方程的任意 n 个解向量, 则其朗斯基行列式满足下列微分方程:

$$W'(t) = -p_1(t) W(t).$$

故

$$W(t) = C e^{\int -p_1 dt}.$$

定理 3.5 (n 阶线性非齐次微分方程解的结构). 设 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 是齐次线性微分方程的任意 n 个线性无关解向量, $y_0(t)$ 为非齐次线性微分方程的一特解, 则非齐次任一解可以表示为

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) + y_0(t).$$

定理 3.6 (n 阶线性非齐次微分方程解的常数变易法). 齐次通解

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t),$$

设非齐次通解

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t),$$

两边求导得

$$y'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i'(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i(t),$$

设

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i(t) = 0,$$

再次求导得

$$y''(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i''(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i'(t),$$

再令

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i'(t) = 0, \cdots,$$

如此递推得到一方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i(t) & = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i'(t) & = 0, \\ & \cdots, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i^{(n-1)}(t) & = f(x), \end{cases}$$

该方程组系数矩阵行列式恰为 W, 方程组有唯一解 $c_1'(t), \cdots, c_n'(t)$, 进而再积分一次可得要求的 $c_1(t), \cdots, c_n(t)$.

3.2 高阶常系数线性微分方程求解

定理 3.7 (解常系数高阶线性 ODE 的特征方法)**.** 只考虑齐次高阶线性 *ODE* 情形, 通过常数变易法可解非齐次情形. 设

$$p_i(t) = p_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

高阶 *ODE* 系数变为常系数, 记其特征方程

$$P(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

若特征方程只有单根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 立得方程一基本解组

$$\{\mathrm{e}^{\lambda_i t}\}_{i=1}^{n},$$

任意解可用基本解组表出. 若单根不是实数, 假设存在共轭复根 $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, 基本解组中 $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ 可换为 $\mathrm{e}^{at}\cos bt, \mathrm{e}^{at}\sin bt$.

若特征方程有重根, 设重根 λ_i 重数为 n_i, 则该特征根对应: $\mathrm{e}^{\lambda_i t}, t\mathrm{e}^{\lambda_i t}, \cdots, t^{n_i-1}\mathrm{e}^{\lambda_i t}$. 每个重根对应的这样解元合并起来也构成 n 个线性无关解.

定理 3.8 (两个特殊非齐次情形)**.** 若非齐次项

$$f(x) = (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m)\mathrm{e}^{\alpha x},$$

则方程一特解有如下形式

$$y_0(x) = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m),$$

其中 $A_0, A_1, \cdots, A_m$ 为待定系数. 当 α 非特征方程根时, $k = 0$; 否则 k 为该特征根的重数.

若非齐次项

$$f(x) = (P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x},$$

其中 $P_n, Q_m (m \leq n)$ 为多项式, 则方程一特解有如下形式

$$y_0(x) = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta x + T_n(x)\sin\beta x),$$

其中 R, T 为待定多项式. 当 $\alpha + i\beta$ 非特征根时 $k = 0$; 否则 k 为该特征根的重数.

例 3.1. 已知非齐次 2 阶线性 ODE

$$y'' + p(x)y + q(x) = f(x)$$

有三个解 $1, x, x^3$, 求通解及方程.

解 3.1. 提示: $x^3 - x, x^3 - 1$ 为线性无关解组.

例 3.2. 已知方程: $(x-1)y''=y=(x-1)^2+xy'$, 及基本解组 x,e^x, 求通解.

解 3.2. $y=(C_1-x)x+C_2\mathrm{e}^x-x-1$.

例 3.3. 解方程: $y'=2y'+3$.

解 3.3. $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2+\dfrac{3}{2}x$.

3.3 特殊变系数线性微分方程求解

代表性变系数线性微分方程: 欧拉方程.

定义 3.4 (欧拉方程)**.** 设 $p_k\in\mathbb{R}$, 欧拉方程形同下式.

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+p_2x^{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+p_ny=0.$$

定理 3.9 (欧拉方程解法)**.** *实行自变量替换* $x=\begin{cases}\mathrm{e}^t, x>0;\\ -\mathrm{e}^t, x<0.\end{cases}$ *将方程转化为 y 对 t 的常系数方程情形.*

设算子 $D^k=\dfrac{d^k}{dt^k}$, *此变换下有:*

$$x^ky^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y,$$

如

$$x^2y''=D(D-1)y=(D^2-D)y=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}.$$

例 3.4. 解方程: $x^3y^{(3)}+x^2y''=4xy'$.

解 3.4. $y=C_1+\dfrac{C_2}{x}+C_3x^3$.

下面介绍幂级数法. 以二阶线性齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 为例.

定理 3.10 (幂级数法)**.** *若 p,q 在 $|x|\le R$ 内可展开为幂级数, 则该微分方程在 $|x|\le R$ 内有幂级数解*

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

其中 a_0,a_1 为任意常数, $a_n(n\ge 2)$ 均可由 a_0,a_1 确定.
若 xp,x^2q 在 $|x|\le R$ 内可展开为幂级数, 则该微分方程在 $|x|\le R$ 内有幂级数解

$$y(x)=x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

其中 α 为任意常数.

下面介绍 Laplace 变换应用.

定义 3.5 (Laplace 变换)**.** 设 $f(x)$ 定义在 $[0,+\infty)$ 上, 若含参变量 s 的无穷积分对于 s 的一定取值范围内而言有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)dt<\infty,$$

则称

$$F(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)dt$$

为 $f(t)$ 的 L 变换, 记作 $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$.

常利用 $|f(t)|\le M\mathrm{e}^{s_0t}$ 的形式来判断无穷积分是否收敛.

定理 3.11 (Laplace 变换的性质)**.**

$\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t))$.

$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} s^i f^{(n-i-1)}(0)$.

$F^{(n)}(s) = (-1)^n\mathcal{L}(t^n f(t))$.

定理 3.12 (常用 Laplace 变换)**.**

$f(t) = t^n : F(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$;

$f(t) = \mathrm{e}^{at} : F(s) = (s-a)^{-1}$;

$g(t) = \mathrm{e}^{at}f(t) : G(s) = \mathcal{L}g(t) = F(s-a)$.

$f(t) = t^n\mathrm{e}^{at} : F(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$;

$f(t) = \cos\omega t : F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$.

$f(t) = \sin\omega t : F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

$f(t) = t\sin\omega t : F(s) = \dfrac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$.

$f(t) = t\cos\omega t : F(s) = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$.

拉普拉斯变换解方程的一般思路是先对方程两边同时进行变换, 简化并求解方程, 再进行逆变换求出原方程的解.

例 3.5. 解方程: $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{3t}, y(0) = y'(0) = 0$.

解 3.5. $f(t) = \mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t}$.

例 3.6. 解方程: $y'' - 2y' + y = t^2\mathrm{e}^t$.

解 3.6. $f(t) = \dfrac{t^4\mathrm{e}^t}{12}$.

例 3.7. 解方程: $y' - y = 4\sin t + 5\cos 2t, y(0) = -1 = \dfrac{y'(0)}{2}$.

解 3.7. $f(t) = -2\sin t - \cos 2t$.

3.4 一般求解想法: 降阶

一般高阶微分方程无普适解法, 换元降阶解法是常用解决方法。

定理 3.13 (降阶法解二阶微分方程例)**.** $y = f(x, y') :$ 令 $p = y'$, 方程化为

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

解得

$$p = \varphi(x, c_1),$$

代入原方程化为一阶求解.

$y = f(y, y'') :$ 令 $p = y'$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

代入原方程化为

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

进行类似一阶的求解.

定理 3.14 (利用凑导数配凑降阶常用公式)**.**

$(\mathrm{e}^y)'' = \mathrm{e}^y(y'^2 + y'')$;

$(\sin y)'' = y'' \cos y - y'^2 \sin y$.

$(\cos y)'' = -y'' \sin y - y'^2 \cos y$.

定理 3.15 (特解与降阶)**.** 若已知一齐次微分方程

$$F(x, x', \cdots, x^{(n)})$$

的 k 个线性无关非零解 $\{x_i\}_{i\geq 1}$, 方程可通过以下方法降 k 阶: 令 $x = x_k y$, 求 n 阶导数, 代入原方程化为关于 y 的 n 阶方程, 再令 $z = y'$, 以 x_k 除方程可降一阶; 以此类推.

定理 3.16 (liouvile 公式与降阶)**.** 对于二阶常微分方程

$$x'' + px' + qx = 0,$$

已知非零特解 x_1, 利用刘维尔公式可得方程解:

$$x = x_1[c_1 + c_2 \int \frac{1}{x_1^2} \mathrm{e}^{-\int p dt}].$$

例 3.8. 解方程: $xy'' = y'$.

解 3.8. $y = \dfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2$.

例 3.9. 解方程: $y'' = \mathrm{e}^{2y}, y(0) = 0 = y'(0) - 1$.

解 3.9. $y = \ln \dfrac{1}{1-x}$, 或 $y = \ln(x+1)$.

例 3.10. 解方程: $yy'' = -y'^2$.

解 3.10. $y^2 = C$.

4 一阶线性常微分方程组 (LODEs)

4.1 LODEs 解空间的结构

定义 4.1. 称

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t); \\ \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

为一阶线性常微分方程组 (简记为 LODEs). 简单记为向量式

$$X'(t) = A(t)X + F(t).$$

定理 4.1 (存在唯一性定理)**.** 设 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, F(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t), F(t)$ 每一分量函数均在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\forall t_0 \in [a, b], \forall \alpha$,

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + F(t), \\ X(t_0) = \alpha \end{cases}$$

在 $[a, b]$ 上解存在且唯一.

定理 4.2 (与高阶微分方程的关系). *任一高阶微分方程*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

可以经过如下变换变成一个 LODEs:

$$x_1 = x, x_2 = \frac{dx_1}{dt}, x_3 = \frac{dx_2}{dt}, \cdots, x_n = \frac{dx_{n-1}}{dt}.$$

从而, 一阶 LODEs 的求解方法可以类比高阶 ODE 的求解方法.

注：此处不介绍向量范数、矩阵范数、向量函数收敛性等课件补充概念.
齐次即 $F(t) = 0$ 时, 解空间为一 n 维线性空间.

定义 4.2 (向量函数的线性相关). 设 $X_1(t), \cdots, X_n(t)$ 是定义在 I 上的一组向量函数, 若存在不全为 0 的常数 $c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t) = 0, \forall t \in I$$

恒成立, 则称该组向量函数线性相关, 否则称线性无关.

定义 4.3 (朗斯基行列式). $W(t) := \det[X_1(t), \cdots, X_n(t)]$.

定理 4.3 (朗斯基行列式对线性相关判别法). *若 $X_1(t), \cdots, X_n(t)$ 线性相关, 则 $W(t) = 0, \forall t \in I$, 反之不然. 但如果 $X_1(t), \cdots, X_n(t)$ 取自一齐次 LODEs 的解空间, 则 $W(t) = 0, \forall t \in I \iff$ 线性无关. 这里朗斯基行列式或者恒为零, 或者恒非零.*

定理 4.4 (刘维尔公式). *设 $X_1(t), \cdots, X_n(t)$ 是齐次 LODEs 的任意 n 个解向量, 则其朗斯基行列式满足下列微分方程:*

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))W(t).$$

故

$$W(t) = Ce^{\int \operatorname{tr}(A(t))dt}.$$

定理 4.5 (齐次 LODEs 的解). *基解矩阵 $\Phi(t)$: 齐次 LODEs 的任意 n 个线性无关解向量构成的矩阵. 对于该方程组任意解 $\psi(t), \psi(t) = \Phi(t)C, C$ 为常值列向量.*

非齐次由齐次衍生而来。

定理 4.6 (非齐次 LODEs 解的结构). *设 $X_0(t)$ 是非齐次 LODEs:$X'(t) = A(t)X(t) + F(t)$ 的一个特解, $\Phi(t)$ 为其对应齐次 LODEs 的基解矩阵, 则非齐次 LODEs 的任意解可表示为:*

$$X(t) = X_0(t) + \Phi(t)C.$$

其两个解相减为相应齐次 LODEs 的一解.

4.2 解常系数 LODEs

先考虑齐次情形 $X'(t) = AX(t)$.

定义 4.4 (矩阵指数和矩阵指数函数). 对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 矩阵指数定义为

$$\exp A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

矩阵指数函数定义为

$$\exp tA = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!}.$$

定理 4.7 (矩阵指数的性质).

可交换时 $\exp A+B=\exp A\exp B$.

矩阵指数可逆时 $\exp -A=(\exp A)^{-1}$.

对非奇异矩阵 $P, P^{-1}\exp AP=\exp P^{-1}AP$.

定理 4.8 (齐次常系数 LODEs 的解)**.**

$$\Phi(t)=\exp tA=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}$$

是齐次常系数 *LODEs* 的基解矩阵, 通解可以表示为

$$X(t)=\Phi(t)C.$$

对齐次常系数 *LODEs* 的另一基解矩阵 $\psi(t)$ 有

$$\Phi(t)=\psi(t)\psi^{-1}(0).$$

在初值条件 $X(t_0)=\alpha$ 下

$$X(t)=\exp(t-t_0)\alpha.$$

定理 4.9 (解齐次常系数 LODEs 的特征方法)**.** 设微分方程 $X'(t)=AX(t)$,
若矩阵 A 的特征根都为特征单根 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, 对应特征向量 $v_1,\cdots,v_n$, 可得到一个方程的基解矩阵

$$\Phi(t)=(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}v_1,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}v_n).$$

若特征根不全是实数, 则 $\mathrm{Re}(X(t)),\mathrm{Im}(X(t))$ 均为方程的解.
若矩阵 A 的特征根有重根, 可通过待定系数法解决. 设矩阵 A 有 $k<n$ 个互异特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$, 重数分别为 $n_1,\cdots,n_k,\sum n_i=n$. 则对于 λ_i, 方程组有 n_i 个线性无关解向量

$$X(t)=\mathrm{e}^{\lambda_i t}(V_0+tV_1+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}V_{n_i-1}),$$

其中向量 V_i 由下列方程确定:

$$(A-\lambda_iE)V_0=V_1,(A-\lambda_iE)V_1=V_2,\cdots,(A-\lambda_iE)V_{n_i-1}=0.$$

定理 4.10 (解非齐次常系数 LODEs: 常数变易法)**.** 齐次:

$$X(t)=\Phi(t)C,$$

设非齐次情形

$$X'(t)=AX(t)+F(t),$$

通解为

$$X(t)=\Phi(t)C(t),$$

两边求导可得

$$\Phi'(t)C(t)+\Phi(t)C'(t)=A\Phi(t)C(t)+F(t),$$

由于 $\Phi(t)$ 为齐次基解矩阵, 从而消去两边第一项得

$$\Phi(t)C'(t)=F(t),$$

从而 $C(t)$ 可解出, 代入 $X(t)=\Phi(t)C(t)$ 可以得到非齐次方程的通解.

例 4.1. 解齐次常系数 LODEs

$$X'(t)=AX(t),$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

例 4.2. 解齐次常系数 LODEs

$$X'(t) = AX(t),$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

例 4.3. 解齐次常系数 LODEs

$$X'(t) = AX(t),$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

例 4.4. 解齐次常系数 LODEs

$$X'(t) = AX(t),$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

例 4.5. 解非齐次常系数 LODEs

$$X'(t) = AX(t) + F(t), X(0) = \alpha,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5 初值问题的一般理论

5.1 从无到有: 小区间上的存在唯一性

探讨初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

进行讨论.

定理 5.1 (李普希茨条件)**.** *若* $\exists L > 0, \text{s.t.} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$, *则称函数* $f(x,y)$ *满足李普希茨条件. 特别地, 当* f *在凸区域* D *内对* y *偏导有界连续, 则李普希茨条件自然满足 (Lagrange 中值定理).*

定理 5.2 (皮卡存在唯一性定理)**.** *若* $f(x,y)$ *在矩形区域*

$$R = \{(x,y) \mid |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$$

内连续, 且关于 y *满足李普希茨条件, 则在* $I = [a-h, a+h]$ *上初值问题解存在且唯一, 其中*

$$h = \max\{a, \frac{b}{M}\}, M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|.$$

证明. 考虑积分方程

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

构造如下皮卡逼近序列

$$\begin{cases} y_0(x) &= y_0, \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, n \geq 1. \end{cases}$$

可以证明, 该序列在 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上连续. 用数学归纳法可以证明,

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{L^{n-1}M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1},$$

从而利用 M 判别法可知序列

$$y_0(x) + \sum_{i=0}^{+\infty}(y_{i+1}(x) - y_i(x))$$

一致收敛. 记其极限为 $\phi(x) \in \mathcal{C}([x_0 - h, x_0 + h])$. 由于 f 关于 y 满足李普希兹条件, 故在积分方程两边同取极限可得 $\phi(x)$ 为原方程的解.

下面证明唯一性. 设 $\psi(x)$ 也是方程一个解, 那么

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq L|\int_{x_0}^{x}|\phi(t) - \psi(t)|dt|.$$

由于 $\exists K \text{s.t.} |\phi(x) - \psi(x)| \leq K$, 代入上式得

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq LK|x - x_0|.$$

把此式再代入 $|\phi(x) - \psi(x)| \leq L|\int_{x_0}^{x}|\phi(t) - \psi(t)|dt|$ 右侧得

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \frac{L^2K}{2!}|x - x_0|^2.$$

如此重复回代, 有

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \frac{L^nK}{n!}|x - x_0|^n.$$

令 $n \to 0$ 即可得证唯一性. □

注: Lip 条件不是必要条件, 如下面例子. Lip 条件可以被削弱为 Osgood 条件: $f(x, y) \in \mathcal{C}(D)$, 且

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|),$$

其中 $F(r)$ 是 $[0, \infty)$ 上的正连续函数, 且对于 $r > 0$, 积分

$$\int_0^r \frac{dr}{F(r)} < \infty.$$

满足该条件时, 初值问题在 D 内任意一个初值点存在唯一.

例 5.1. $f(x, y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ y\ln|y|, & y \neq 0. \end{cases}$ 这时初值问题过任何一个初值点, 解都是存在的.

解 5.1. 用变量分离即可验证解的存在唯一性, 然而 Lip 条件并不满足.

例 5.2. 确定 $f(x, y) = x + y^2, R = \{-1 \leq x, y \leq 1\}, y(0) = 0$ 下初值问题解的存在区间, 并就误差界 0.05 给出近似解.

解 5.2. 提示: 近似解估计可以利用 $|y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ 的界 (见皮卡定理证明).

例 5.3. 对于

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 2x, & 0 < x \leq 1, y < 0; \\ 2x - \dfrac{4y}{x}, & 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x^2; \\ -2x, & 0 < x \leq 1, x^2 \leq y. \end{cases}$$

验证 f 在 $[0,1]\times\mathbb{R}$ 的连续性, 以 f 为基础的 $y(0)=0$ 初值问题的解, Lip 条件是否满足, 皮卡序列及其收敛性如何.

解 5.3. 连续, $\dfrac{x^2}{3}$, Lip 条件不满足, 皮卡序列 $y_n(x)=(-1)^{n+1}x^2$ 不收敛.

例 5.4. 利用皮卡定理求 $f(x,y)=xy+2x-x^3, y(0)=0$ 初值问题的解.

解 5.4. $y_n(x)=x^2-\dfrac{x^{2n+2}}{4\times 6\times\cdots\times(2n+2)}\to x^2.$

定理 5.3 (佩亚诺存在性定理)**.** *若 $f(x,y)$ 在矩形区域*

$$R=\{(x,y)\mid |x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$$

内连续, 则在 $I=[a-h,a+h]$ 上初值问题至少存在一个连续可微解, 其中

$$h=\max\{a,\frac{b}{M}\}, M=\max_{(x,y)\in R} f(x,y).$$

例 5.5. 分别利用 Picard 存在唯一性定理和直接解方程来求初值问题

$$\begin{cases} y'=y^2,\\ y(0)=1 \end{cases}$$

解及其最大存在区间.

解 5.5. $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}];(-\infty,1)$.

引理 5.4 (阿斯科利-埃泽拉引理)**.** *若函数列 f_n 在有界闭区域 I 上*

(1) 一致有界:

$$\exists K>0,\forall n,x\in I,|f_n(x)|\le K.$$

(2) 等度连续:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall n>0,x_1,x_2\in I,|x_1-x_2|\le\delta\Rightarrow|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\le\varepsilon.$$

则其有子列在 I 上一致收敛, 极限在 I 上连续.

证明. 任取 n, 等分 $I=[a,a+h]$ 为 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$. 在每个区间 $[x_i,y_i]$ 上构造

$$\psi_{i+1}(x)=y_i+f(x_i,y_i)(x-x_i), x\in[x_i,x_{i+1}], i=0,1,\cdots,n-1.$$

记 $y_i=\psi(x_i)$. 这些线段的并叫欧拉折线. 记 $\phi_n(x)$ 为其表达式, 可以证明

$$\phi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\phi_n(t))dt+\sigma_n(x),\sigma_n(x)\rightrightarrows 0.$$

$\phi_n(x)$ 在 I 上一致有界 (因为 $|\phi_n(x)-y_0|\le b$).
$\phi_n(x)$ 在 I 上也等度连续. 因为 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{M},\forall s,t\in I,\forall n$, 连接点 $(s,\phi_n(s)),(t,\phi_n(t))$ 的直线斜率介于 $-M,M$ 之间, 只要 $|s-t|\le\delta$, 就有 $|\phi_n(s)-\phi_n(t)|\le M|s-t|\le\varepsilon$.
所以由阿斯科利-埃泽拉引理可得 ϕ_n 的一个一致收敛的子列 $\phi_{n_k}\rightrightarrows\phi(x)\in\mathcal{C}(I)$. 利用欧拉折线的表达式令 $k\to\infty$ 即可证明 ϕ 为初值问题的解. □

例 5.6. 探索以 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 1\le|x+y|\le\infty,\\ (-1)^n, & \dfrac{1}{n+1}\le|x+y|\le\dfrac{1}{n},\\ 0, & |x+y|=0\end{cases}$ 为函数的初值问题的解的情况.

解 5.6. 无解.

5.2 从小到大：解的延拓理论

定义 5.1 (解的延拓)**.** 对微分方程 $y' = f(x,y)$, 设 $y = \varphi(x)$ 为 I_1 上方程一个解, 若存在另一个定义在 I_2 上的解 $\psi(x)$ 满足

$$I_1 \subset I_2; \varphi(x) = \psi(x), x \in I_1.$$

则称 ψ 是 φ 的一个延拓. 如果这样的延拓不存在, 称 φ 是方程的一个饱和解, 存在区间 I_1 为饱和区间或最大存在区间.

定理 5.5 (延拓定理)**.** *设 P_0 为区域 G 内任一点, 设 Γ 为微分方程 $y' = f(x,y) \in \mathcal{C}(G)$ 经过点 P_0 的任意一条积分曲线, 则对于任何有界闭区域 G_1 s.t. $P_0 \in G_1 \subset G$, 积分曲线都可以延伸到 G_1 之外.*

例 5.7. 对方程 $y' = y^2$,
在全平面上讨论过 $(1,1), (3,-1)$ 解的存在区间;
在 $G = \{(x,y) : y < 2\}$ 内讨论过 $(1,1)$ 解的存在区间;
在 $G_1 = \{(x,y) : -4 < x < 4, -2 < y < 2\}$ 内讨论过 $(0,0), (1,1), (3,-1)$ 解的存在区间.

解 5.7. (1) $(-\infty, 2); (2, +\infty)$.
(2) $(-\infty, \frac{3}{2})$;
(3) $(-4, 4); (-4, 2); (2, 4)$.

推论 (解的整体存在性)**.** *对微分方程 $y' = f(x,y), a < x < b, f(x,y)$ 满足关于 y 的 Lip 条件, 则每一饱和解存在区间为 (a,b).*

引理 5.6 (Gronwall 不等式)**.** *如果*
(1) $\lambda \in \mathbb{R}, u, f, \alpha \in \mathcal{C}[a,b], \alpha$ 非负;
(2) $u \leq \lambda + \int_a^x [\alpha u + f] dt, x \in [a,b]$.
那么有

$$u \leq \lambda \mathrm{e}^{\int_a^x \alpha dt} + \int_a^x f \mathrm{e}^{\int_t^x \alpha d\tau} dt, \forall x \in [a,b].$$

此不等式可用于证明解的整体存在性, 此处略去.

例 5.8. 证明 $y' = x^2 + y^2$ 任意解的存在区间有界.

解 5.8. 考虑右行区间 $[x_0, \beta)$, 分 $\beta < 1, \beta \geq 1$ 讨论.

下面介绍解的比较定理和存在区间估计定理.

定理 5.7 (第一比较定理)**.** *若 $F, f \in \mathcal{C}(G)$, 且*

$$f(x,y) < F(x,y), \forall (x,y) \in G,$$

设 $\phi(x), \Phi(x)$ 分别为基于 f, F 在 (a,b) 上初值 (x_0, y_0) 问题的解, 那么

$$\phi(x) < \Phi(x), \forall x \in (x_0, b); \phi(x) > \Phi(x), \forall x \in (a, x_0).$$

定义 5.2 (最解)**.** 若区间 (a,b) 上有基于 f, x_0, y_0 初值问题的两解 W, Z, 使得初值问题任何其他解 $y = y(x)$ 在 (a,b) 上满足不等式

$$W(x) \leq y(x) \leq Z(x),$$

称 W, Z 为初值问题的最小解和最大解, 存在时一定唯一. 结合佩亚诺定理可知 f 连续时最大最小解存在唯一.

定理 5.8 (第二比较定理)**.** *若 $F, f \in \mathcal{C}(G)$, 且*

$$f(x,y) < F(x,y), \forall (x,y) \in G,$$

设 $\phi(x), \Phi(x)$ 分别为基于 f, F 在 (a,b) 上初值 (x_0, y_0) 问题的右行最小解和右行最大解, 那么当 $x \in [x_0, b)$ 时

$$\phi(x) \leq \Phi(x).$$

定义 5.3 (右行上解和右行下解)**.** 称 $\phi(x), x \in [x_0, b)$ 为基于 f 初值 (x_0, y_0) 问题的右行最小解, 它满足

$$\phi'(x) < f(x,v), \phi(x_0) \leq y_0.$$

称 $\Phi(x), x \in [x_0, b)$ 为基于 f 初值 (x_0, y_0) 问题的右行上解, 它满足

$$\Phi'(x) > f(x,v), \Phi(x_0) \geq y_0,$$

设 $f \in \mathcal{C}(G), y = y(x)$ 为基于 $f, (x_0, y_0)$ 的初值问题一解, 在右行上下解存在时有

$$\phi(x) < y(x) < \Phi(x).$$

定理 5.9 (存在区间估计定理)**.** *设 $G = \{(x,y) : x_0 \leq x < b\}, f(x,y) \in \mathcal{C}(G), (x_0, y_0) \in G.[x_0, \beta_1)$ 为基于 f, x_0, y_0 初值问题解的右行最大存在区间.*

(1) 若初值问题右行上、下解 $\Phi(x), \phi(x)$ 均存在, 且有公共右行区间 $[x_0, \beta)$, 则 $\beta \leq \beta_1$.

(2) 若初值问题右行上解 $\Phi(x)$ 存在, 最大右行区间为 $[x_0, \beta)$, 且

$$\lim_{x \to \beta^-} \Phi(x) = -\infty,$$

则 $\beta \geq \beta_1$.

(3) 若初值问题右行下解 $\phi(x)$ 存在, 最大右行区间为 $[x_0, \beta)$, 且

$$\lim_{x \to \beta^-} \phi(x) = \infty,$$

则 $\beta \geq \beta_1$.

综上所述, 若初值问题右行上、下解均存在, 最大右行区间均为 $[x_0, \beta)$, 且

$$\lim_{x \to \beta^-} \phi(x) = \infty$$

或

$$\lim_{x \to \beta^-} \Phi(x) = -\infty$$

有一个成立, 则初值问题解的右行最大存在区间也是 $[x_0, \beta)$.

例 5.9. 证明 $y' = y \sin xy$ 每个解都在 $\mathbb{R}$ 存在.

解 5.9. $|y \sin xy| \leq |y| + 1$, 运用存在区间估计定理.

例 5.10. 证明 $y' = (x - y)\mathrm{e}^{xy^2}$ 每个解都在 $[x_0, \infty)$ 存在.

解 5.10. $\Phi(x) = x + |y_0| + |x_0|, \phi(x) = -x - |y_0| - |2x_0|$, 运用存在区间估计定理.

例 5.11. 证明 $y' = x^2 + y^2$ 每个解都有界.

解 5.11. 考虑右行下解, 运用存在区间估计定理.

5.3 从静到变: 解对初值和参数的依赖性

定理 5.10 (解对初值的连续性定理)**.** *设 $(x_0, y_0) \in G \subset \mathbb{R}^2, f(x,y)$ 在 G 上 Lip 连续, $y = \varphi(x; x_0, y_0), x \in J$ 是微分方程 $y' = f(x,y)$ 关于初值 (x_0, y_0) 的唯一解, $[a,b] \in J$.*

则当 (ξ, η) 充分接近 (x_0, y_0) 时微分方程以 (ξ, η) 为初值的唯一解 $y = \varphi(x; \xi, \eta)$ 也在 $[a,b]$ 上有定义, 且

$$\lim_{(\xi,\eta) \to (x_0, y_0)} \max_{[a,b]} |\varphi(x; \xi, \eta) - \varphi(x; x_0, y_0)| = 0.$$

定理 5.11 (解对初值的可微性定理)**.** 设 $f(x,y), f'_y(x,y) \in \mathcal{C}(G)$, 基于 $f, (x_0, y_0)$ 初值问题的解作为 (x, x_0, y_0) 的函数在存在范围内连续可微.

定理 5.12 (解对参数的连续性定理)**.** 考虑带参数初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y,\lambda); \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

若 f 在区域 $G = \{|x| \le a, |y| \le b, |\lambda - \lambda_0| \le c\}$ 内连续, 且对于 y 满足 *Lip* 条件, 则其解 $\varphi(x,\lambda)$ 在区域 $D = \{|x| \le h, |\lambda - \lambda_0| \le c\}$ 内连续. h 与皮卡定理所定义的一致.

定理 5.13 (解对参数的可微性定理)**.** 若 f 在区域 $G = \{|x| \le a, |y| \le b, |\lambda - \lambda_0| \le c\}$ 内连续, 且对 y, λ 有连续偏导, 则其解 $\varphi(x,\lambda)$ 在区域 $D = \{|x| \le h, |\lambda - \lambda_0| \le c\}$ 内连续可微. h 与皮卡定理所定义的一致.

综合起来, 有如下定理.

定理 5.14 (解对初值和参数的依赖性)**.** 设 $f(x,y,\lambda)$ 在 W 区域上对 y, λ 有连续偏导, 则初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y,\lambda); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0, \lambda)$ 连续可微.
且

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0} \text{满足} \dfrac{dz_1}{dx} = Az_1, & z_1(x_0) = -f(x_0, y_0, \lambda); \\ z_2 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0} \text{满足} \dfrac{dz_2}{dx} = Az_2, & z_2(x_0) = 1; \\ z_3 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \text{满足} \dfrac{dz_3}{dx} = Az_3 + B, & z_3(x_0) = 0. \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} A = A(x, x_0, y_0, \lambda) = f'_y(x, \varphi(x, x_0, y_0, \lambda), \lambda), \\ B = B(x, x_0, y_0, \lambda) = f'_\lambda(x, \varphi(x, x_0, y_0, \lambda), \lambda). \end{cases}$$

例 5.12. 对 $y' = \sin(y/x), (x_0, y_0) = (1, 0)$, 求 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0}$.

解 5.12. $0, |x|$.

例 5.13. 对 $y' = \sin(\lambda y x), (x_0, y_0) = (0, 0)$, 求 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$.

解 5.13. $0, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, 0$.

以上关于一阶方程的皮卡定理、Peano 定理、延拓定理、存在区间估计定理、对初值和参数的依赖性均可拓展到高维情形. 下面稳定性和几何理论主要关注方程组.

5.4 解的稳定性理论

稳定性主要探寻解与解之间或解与某些特解之间, 当自变量趋于无穷大时的性状. 考虑微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}), t \in (\beta, +\infty.)$$

其中 $f(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{C}([\beta, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$, 关于 $\mathbf{x}$ 满足局部 Lip 条件.

定义 5.4 (李雅普诺夫稳定性)**.** 设 $\mathbf{x} = \phi(t)$ 为上述方程组一特解, 若 $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 > \beta, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \text{s.t.}$ 对于 $||\mathbf{x}_0 - \phi(t_0)|| \le \delta$ 的初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$**:**
(1) 对应的解 $\mathbf{x}_0 = \varphi(t)$ 在区间 $[t_0, \infty)$ 存在,
(2) $\forall t \in [t_0, \infty), ||\varphi(t) - \phi(t)|| \le \varepsilon$.
则称特解 $\phi(t)$ 是李雅普诺夫稳定的.

定义 5.5 (吸引)**.** 若 $\forall t_0 > \beta, \forall \eta(t_0) > 0$, 当 $||\mathbf{x}_0 - \phi(t_0)|| < \eta(t_0)$ 时, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$ 所对应的解 φ 满足

$$\lim_{t\to\infty} ||\varphi(t) - \phi(t)|| = 0,$$

则称特解 $\phi(t)$ 是李雅普诺夫吸引的.

定义 5.6 (渐近稳定)**.** 若上述特解既稳定又吸引, 则称该特解渐近稳定.

例 5.14. 讨论 $x' = ax$ 零解的稳定性.

解 5.14. $a < 0$ 渐近稳定, $a = 0$ 稳定, $a > 0$ 不稳定.

定理 5.15 (常系数 LODEs 零解的稳定性判定定理)**.** *先关注齐次情形. 给定*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, A\text{为 } n \text{ 阶常矩阵}.$$

(1) 零解渐近稳定 $\iff A$ 所有特征根有负实部.
(2) 零解稳定 $\iff A$ 所有特征根有非正实部, 且纯虚数特征值对应的若当块均为一阶.
判断特征值是否有负实部可通过赫威茨矩阵来判定. 设矩阵 A 的特征多项式为 $A(\lambda) = a_0\lambda_n + a_1\lambda_{n-1} + \cdots + a_n$, 设 $a_i = 0, \forall i > n$, 赫威茨矩阵定义为

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n. \end{bmatrix}$$

特征方程一切根均有负实部等价于赫威茨矩阵所有顺序主子式全正.
再关注非齐次情形. 给定

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + R(\mathbf{x}), A\text{为 } n \text{ 阶常矩阵}, R(0) = 0, \lim_{||\mathbf{x}||\to 0} \frac{||R(\mathbf{x})||}{||\mathbf{x}||} \to 0.$$

则 A 所有特征根有负实部 $\Rightarrow$ 零解渐近稳定, 否则不稳定.

下面介绍判别无需求解, 方程组特解稳定性的 V 函数法. 不需求方程组的解, 借助 V 函数对方程组本身判别解的稳定性.

定义 5.7 (V 函数的符号法则)**.** 设函数 $V(\mathbf{x})$ 在原点邻域内一阶连续可求偏导, $V(0) = 0$.
(1) 若 $\exists h > 0, 0 < ||\mathbf{x}|| \le h$ 时 $V(\mathbf{x}) > 0 (< 0)$, 则称 V 为定正 (定负) 函数.
(2) 若 $\exists h > 0, ||\mathbf{x}|| \le h$ 时 $V(\mathbf{x}) \ge 0 (\le 0)$, 则称 V 为常正 (常负) 函数.
(3) 若无论正数 h 有多小, $||\mathbf{x}|| \le h$ 时 $V(\mathbf{x})$ 可正可负, 则称 V 为变号函数.

定理 5.16 (李雅普诺夫稳定性 V 函数判别定理)**.** *设 V 为定正函数, 方程组*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), f(0) = 0, f \in \mathcal{C}(G).$$

若 $\dfrac{dV}{dt}$
(1) 常负, 则系统零解稳定.
(2) 定负, 则系统零解渐近稳定.
(3) 定正, 则系统零解不稳定.
同时, 如果一个变号函数 V 得到 $\dfrac{dV}{dt}$ 定负或定正, 也可判定系统零解不稳定.
如果存在一个不常负也不定负的 V 函数和 $\lambda > 0$, 使得 $||\mathbf{x}|| \le h \to \dfrac{dV}{dt} \ge \lambda V$, 也可判定系统零解不稳定.

例 5.15. 判断系统零解稳定性:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin x. \end{cases}$$

解 5.15. $V=\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{g}{l}(1-\cos x)$.

例 5.16. 判断系统零解稳定性:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+ax^3;\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+ay^3.\end{cases}$$

解 5.16. $V=\dfrac{x^2+y^2}{2}$. 分类讨论.

例 5.17. 判断系统零解稳定性:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x^5-y^3;\\ \dfrac{dy}{dt}=-3x^3+y^3.\end{cases}$$

解 5.17. $V=\dfrac{ax^4+ay^4}{2}$. 不稳定.

例 5.18. 判断系统零解稳定性:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x(x^2+y^2);\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-y(x^2+y^2).\end{cases}$$

解 5.18. $V=\dfrac{x^2+y^2}{2}$. 不稳定.

5.5 解的几何理论

定义 5.8 (自治系统及其奇点)**.**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=F(x)$$

称为自治系统, $F(x_0)=0$ 对应的解

$$x=x_0$$

称为其平衡解或奇解.

例 5.19. 求下列自治系统的奇解

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\sigma x+\sigma y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-xz+rx-y, \qquad \sigma,b,r>0.\\ \dfrac{dz}{dt}=xy-bz,\end{cases}$$

解 5.19. 零解; 当 $r>1$ 时还有 $(\pm\sqrt{b(r-1)},\pm\sqrt{b(r-1)},r-1)$.

定理 5.17 (自治系统的性质)**.** *对于如上自治系统,*

(1) 自治系统任意积分曲线沿着 t 轴适当平移之后还是一条积分曲线.

(2) 自治系统任两条积分曲线不相交.

(3) 自治系统具有时间可加性.

定理 5.18 (平面自治系统的奇点分类)**.** *考虑平面自治系统*

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by,\\ \dfrac{dy}{dt}=cx+dy,\\ ad\neq bc.\end{cases}$$

首先由特征方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, p = -\mathrm{tr}(A), q = |A|$$

求其特征根 λ_1, λ_2. 根据特征根情况结合后续所述, 确定奇点和轨线类型.
若有直轨线, 由方程

$$K = \frac{c + dK}{a + bK}$$

可以解得直轨线奇解.
然后, 利用 $xy' - x'y$ 的符号可以判断非直轨线旋转方向, 一般利用 *(1,0)* 点的 $xy' - x'y = c$ 的符号. 若 $c > 0$, 则 $(1, 0)$ 附近非直轨线逆时针旋转. 否则顺时针旋转. 进而可以推出其他非直轨线以及直轨线的方向. 进而相图可画出.
类型如下:
(1) 若 $p^2 > 4q, q > 0$, 有两个不同的同号特征值.
设 $\lambda_1 > \lambda_2$ 对应特征向量 h_1, h_2, 过 O 作四条半直线 l_1, l_1', l_2, l_2', 其中 l_1, l_2 平行于 h_1, h_2 方向, 其余平行于 h_1, h_2 反方向.
(1.1) 若 $p > 0$, 特征根全负. 轨线方向全趋于点 O. 非半直线的轨线在 O 处同半直线 l_1 或 l_1' 相切, 远离 O 时切向趋于与半直线 l_2 或 l_2' 平行. 奇点 O 称为: 稳定的结点.
(1.2) 若 $p > 0$, 特征根全正. 轨线方向全远离点 O. 非半直线的轨线在 O 处同半直线 l_2 或 l_2' 相切, 远离 O 时切向趋于与半直线 l_1 或 l_1' 平行. 奇点 O 称为: 不稳定的结点.
(2) 若 $p^2 = 4q, q > 0$, 有两相同特征值.
(2.1) 若 A 有完全特征向量系 h_1, h_2, 相平面任意向量都可用 h_1, h_2 线性表示, 所以所有轨线都是半直线.
(2.1.1) 若 $\lambda < 0$, 所有轨线都趋于 O, 奇点 O 称为: 稳定的星形结点.
(2.1.2) 否则所有轨线都远离 O, 奇点 O 称为: 不稳定的星形结点.
(2.2) 若 A 没有完全特征向量系, 设特征向量 h_1, 相应广义特征向量 h_2, 相空间有一条直轨线平行于 h_1, 其余都是非直轨线. 非直轨线在 O 处同直轨线相切, 远离 O 时与直轨线平行.
(2.2.1) 若 $\lambda < 0$, 非直轨线都趋于 O, 奇点 O 称为: 稳定的退化结点.
(2.2.2) 若 $\lambda > 0$, 非直轨线都趋于 O, 奇点 O 称为: 不稳定的退化结点.
(3) 若 $p^2 < 4q, q > 0$, 有两不同的异号特征值.
设 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ 为特征值, 此时轨线为 x, y 轴以及双曲线型曲线族 $y = c|x|^{\lambda_2/\lambda_1}$, 奇点称为: 鞍点.
(4) 若 $q < 0$, 有两共轭复特征值.
(4.1) 若特征根实部为 *0*, 所有轨线环绕奇点, 奇点称为: 中心点.
(4.2) 若特征根实部为负, 轨线环绕渐渐趋于奇点, 奇点称为: 稳定焦点.
(4.3) 若特征根实部为正, 轨线环绕渐渐远离奇点, 奇点称为: 不稳定焦点.

例 5.20. 判断下列线性系统的奇点类型, 画出相图.

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

解 5.20. 鞍点.

例 5.21. 判断下列线性系统的奇点类型, 画出相图.

$$\begin{cases} x' = -8x + 7y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$$

解 5.21. 稳定的结点.

例 5.22. 判断下列线性系统的奇点类型, 画出相图.

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$$

解 5.22. 不稳定的退化结点.

例 5.23. 判断下列线性系统的奇点类型, 画出相图.

$$\begin{cases} x' = 8x + 7y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$$

解 5.23. 不稳定的焦点.

例 5.24. 判断下列线性系统的奇点类型, 画出相图.

$$\begin{cases} x' = -x + 4y, \\ y' = -9x + y. \end{cases}$$

解 5.24. 中心点.

例 5.25. 判断下列线性系统的奇点类型, 画出相图.

$$\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

解 5.25. 鞍点.

例 5.26. 判断下列线性系统的奇点类型, 画出相图.

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = -2x + 5y. \end{cases}$$

解 5.26. 不稳定的退化结点.

6 边值问题简介

考虑二阶线性齐次微分方程边值问题

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, t \in (a, b), p, q \in \mathcal{C}(a, b).$$

定理 6.1 (二阶线性微分方程解的情况)**.** *下列等价:*

(1) 方程关于任何边值条件

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1.$$

存在唯一解.

(2) 方程关于齐次边值条件

$$y(a) = 0, y(b) = 0.$$

只存在零解.

(3) 方程有两个线性无关解 $y_1(t), y_2(t)$ 满足

$$\det \begin{bmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{bmatrix} \neq 0.$$

方程不存在唯一解的一对边界点称为共轭点.

若在方程右侧加上连续的非齐次项 $f(t)$, 边界点非共轭, 那么该非齐次方程也存在唯一解.

定义 6.1 (S-L 边值问题)**.** $\begin{cases} (p(t)y')' + (\lambda r(t) + q(t))y = 0, a < t < b, p, q, r \in \mathcal{C}[a, b], r(t) > 0. \\ \alpha y(a) = \beta y'(a), \gamma y(b) = \delta y'(b), \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \neq \gamma^2 + \delta^2. \end{cases}$

定义 6.2 (S-L 边值问题的特征值)**.** 若对 $\lambda = \lambda_0$, 上述边值问题有非零解 $y_0(t)$, 则称 $\lambda_0, y_0(t)$ 为 SL 边值问题的特征值和特征函数.

定理 6.2 (特征值的性质)**.**

如果存在的话有无穷多个, 特征值

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \uparrow \infty$$

全为实数.

相应于每个特征值, 都有一个实特征函数. 相应于不同特征值, 特征函数关于 $r(t)$ 正交, 即

$$\int_a^b f(t)g(t)r(t)dt = 0.$$

且线性无关.

设 $y_n(t)$ 是关于 λ_n 的特征函数, 则在 (a, b) 上恰有 $n-1$ 个零点.

7 一阶偏微分方程简介

定义 7.1 (含有两个自变量的一阶 PDE)**.**

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, u = u(x, y)\text{为未知函数}.$$

定义 7.2 (首次积分法)**.** 含有 n 个未知函数的一阶 ODEs

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = F(x, \mathbf{y})$$

若存在不全为零的连续可微函数 $\varphi(x, \mathbf{y})$ 使得上述方程组任意解都满足

$$d\varphi(x, \mathbf{y}(x)) = 0,$$

则

$$\varphi(x, \mathbf{y}) = c$$

称为 ODEs 的一个首次积分. 若

$$\psi_j(x, \mathbf{y}) = c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$$

满足 Jacobi 行列式非零, 则称其相互独立.
若能找到该方程组的 n 个相互独立的首次积分, 则方程组的通解为 n 个首次积分全体.

定理 7.1 (一阶线性 PDE)**.** *考虑 n 个自变量的一阶线性 PDE*

$$\sum_{k=1}^n A_k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0,$$

其特征方程

$$\frac{dx_1}{A_1(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n(\mathbf{x})}$$

是一个 $n-1$ 阶 ODEs, 有 $n-1$ 个相互独立的首次积分

$$\phi_k(\mathbf{x}) = C_k, k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

一阶线性 PDE 的通解可以写为:

$$u(\mathbf{x}) = \Phi(\phi_1(\mathbf{x}), \cdots, \phi_{n-1}(\mathbf{x})).$$

其中 Φ 为任意的 $n-1$ 元的连续可微函数.

例 7.1. 解方程: $(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial x}=(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 7.1. 首次积分

$$\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}=C.$$

定理 7.2 (一阶拟线性 PDE 求解)**.** *考虑一阶拟线性 PDE*

$$A(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+B(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=C(x,y,z),$$

设 $z=z(x,y)$ 为其解, 写成隐函数形式

$$F(x,y,z)=0.$$

根据

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},$$

将其写作 PDE 隐函数形式

$$AF_x+BF_y+CF_z=0,$$

从而 $u=F(x,y,z)$ 为上式的解.
设 PDE 隐函数形式通解为

$$u=\Phi(\varphi,\psi),$$

其中

$$\varphi(x,y,z)=C_1,\psi(x,y,z)=C_2$$

是相应特征方程

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{dz}{C}$$

两独立的首次积分, 则一阶拟线性 PDE 的通解为

$$\Phi(\varphi,\psi)=0.$$

例 7.2. 解方程: $\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

解 7.2. $\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y},2\sqrt{y}-\ln|z|)=0$.