1.生成函数与泊松分布

假设ξ是非负整数值随机变量,分布律为：

$$P(\xi=k)=p_k, \quad k=0,1,\cdots,$$

定义

$$\phi(s)=Es^{\xi}=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k, \quad 0\le s\le 1$$

称$\phi(\cdot)$为随机变量ξ的生成函数 或母函数

性质：(i) $0 \le \phi(s) \le 1$, $\phi(0) = p_0$, $\phi(1) = 1$

(ii) ϕ 在 $[0,1]$ 单调递增一致连续.

(iii) 正如特征函数一样，非负整数值随机变量ξ的分布和其生成函数$\phi(\cdot)$相互唯一确定。

$$p_0 = \phi(0), \quad p_1 = \phi'(0), \quad \cdots, \quad p_k = \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}$$

(iv). 对 $0 \le s < 1$, $\phi^{(k)}(s) = E[\xi(\xi-1)\cdots(\xi-(k-1))s^{\xi-k}]$

令 $\phi^{(k)}(1) = \lim\limits_{s \uparrow 1} \phi^{(k)}(s)$.

生成函数唯一地决定各阶矩

$E\xi = \phi'(1)$ （可能为∞）

$E[\xi(\xi-1)\cdots(\xi-(k-1))] = \phi^{(k)}(1)$ （可能为∞）

例如：假设ξ服从几何分布，

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

那么

$$\begin{aligned}\phi(s) &= Es^{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} s^k p(1-p)^{k-1} \\ &= \frac{ps}{1-(1-p)s}\end{aligned}$$

令 $q=1-p$，则 $\phi(s)=\dfrac{ps}{1-qs}=\dfrac{p}{q}\left(\dfrac{1}{1-qs}-1\right)$.

$$\phi'(s)=\frac{p}{(1-qs)^2}$$

$$\phi''(s)=\frac{2pq}{(1-qs)^3}$$

$$\Rightarrow E\xi=\phi'(1)=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

$E[\xi(\xi-1)]=\phi''(1)=\dfrac{2q}{p^2}$, $\quad Var\xi=E(\xi^2)-(E\xi)^2=\dfrac{q}{p^2}$.

定理：如果X和Y都是取值非负整数值的随机变量，那么当X与Y独立时，对$0 \le s \le 1$都有：

$$\phi_{X+Y}(s) = \phi_X(s)\phi_Y(s).$$

这里ϕ_{X+Y}，ϕ_X，ϕ_Y分别是$X+Y$，X，Y的生成函数.

设$X \sim \pi(\lambda)$,即服从参数为λ的泊松分布。则:

$$1. P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k=0,1,2,\ldots$$

$$2. E(X)=Var(X)=\lambda$$

3. X的生成函数(或母函数)

$$\phi(t)=E(t^X)=e^{\lambda(t-1)}, 0\le t\le 1$$

$$4. E(X(X-1)\cdots(X-k+1))=\lambda^k$$

证明：（3）$\phi(t)=E(t^X)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{t\lambda}=e^{\lambda(t-1)}$$

(4) $\phi^{(k)}(t)=\lambda^k e^{\lambda(t-1)}$

$$\Rightarrow E(X(X-1)\cdots(X-k+1))=\phi^{(k)}(1)=\lambda^k$$

定理：设$X_1,\ldots,X_n$是离散型随机变量, 若对任何$x_1,\ldots,x_n$,

$$P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=p_1(x_1)\ldots p_n(x_n)$$

这里p_i满足$p_i(x)\ge 0,\sum_x p_i(x)=1.$

那么X_i具有分布律$p_i(x)$, 且$X_1,\ldots,X_n$相互独立

证明：任何x_1,

$$P(X_1=x_1)=\sum_{x_2,\ldots,x_n} p_1(x_1)\ldots p_n(x_n)=p_1(x_1)$$

所以X_1分布律为$p_1(x)$,同理X_i分布律为$p_i(x)$

定理： （泊松分布的可加性和可分性）

（1） 设$X \sim \pi(\lambda), Y \sim \pi(\mu)$, 且相互独立，则$X+Y \sim \pi(\lambda+\mu)$

(2) 设$N \sim \pi(\lambda)$，在N=n的条件下，这n个事件独立地以概率p_i为类型i，这里$i=1,2,\ldots,k$, $p_1+\ldots+p_k=1$.

以N_i表示事件i发生的个数，

那么$N_i \sim \pi(\lambda p_i)$, 且$N_1,\ldots,N_k$相互独立

证明： （1）因为X和Y独立，所以对$0 \le s \le 1$,

$$\phi_{X+Y}(s) = \phi_X(s)\phi_Y(s) = e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$$

$$\therefore X+Y \sim \pi(\lambda+\mu)$$

（2）对非负整数$i_1,\dots,i_k$，令$n = i_1+\dots+i_k$,

则$P(N_1 = i_1,\dots,N_k = i_k)$

$$= P(N_1 = i_1,\dots,N_k = i_k \mid N=n)P(N=n)$$

$$= \frac{n!}{i_1!\dots i_k!} p_1^{i_1}\dots p_k^{i_k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda p_1}\frac{(\lambda p_1)^{i_1}}{i_1!}\dots e^{-\lambda p_k}\frac{(\lambda p_k)^{i_k}}{i_k!}$$

§2 泊松过程的定义

以$N(t)$ 表示在时间间隔$(0,t]$内事件发生的数目，

$\{N(t),t\geq 0\}$是取非负整数、时间连续的随机过程，

称为计数过程。

计数过程$\{N(t)\}$称作参数为λ的泊松过程, 如果:

1. $N(0)=0$
2. 独立增量
3. $P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda h+o(h)$--稀有性
4. $P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$--相继性

泊松过程也可用另一形式定义：

称$\{N(t), t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，若满足：

1. $N(0)=0$
2. 独立增量
3. 对任意的$t>s\geq 0, N(t)-N(s)\sim \pi\left(\lambda\left(t-s\right)\right)$

证 $:\Leftarrow P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda h e^{-\lambda h}$

$=\lambda h(1-\lambda h+o(h))=\lambda h+o(h)$

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=1-e^{-\lambda h}-\lambda h e^{-\lambda h}$$
$$=1-(1-\lambda h+o(h))-\lambda h(1-\lambda h+o(h))$$
$$=o(h)$$

$\Rightarrow$ 直观地：把$(s,t]$ n等分，设为$t_0 < t_1 < \ldots < t_n$，

$t_0 = s, t_n = t, t_{i+1} - t_i = h = \frac{t-s}{n}$，

$$P\{N_{t_{i+1}} - N_{t_i} \le 1, \forall i\} = \prod_i P\{N_{t_{i+1}} - N_{t_i} \le 1\}$$

$$= (1 - o(h))^n = [(1 - o(h))^{\frac{1}{o(h)}}]^{no(h)} \to 1$$

$\therefore h$足够小时，$N_t - N_s$近似服从$B(n, \lambda h + o(h))$

令$h \to 0$时得，$N_t - N_s \sim \pi(\lambda(t-s))$

证明方法1: $\Rightarrow$: 对$t > s \geq 0$, 记$N(s,t] = N(t) - N(s)$.

固定s, 对$t \geq s$, 令$P_k(t) = P(N(s,t] = k)$.

对$h > 0$, $P_0(t+h) = P(N(s,t] = 0, N(t,t+h] = 0)$

（$\because$ 独立增量性）$= P(N(s,t] = 0)P(N(t,t+h] = 0)$

$$= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)]$$

$$= P_0(t)[1 - \lambda h] + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

令$h \to 0$得, $\dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$

又由于$P_0(s) = 1$, 所以$P_0(t) = e^{-\lambda(t-s)}$

假设已证得$P_k(t)=e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$,

下证$P_{k+1}(t)=e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{[\lambda(t-s)]^{k+1}}{(k+1)!}$. 对$h>0$,

$$
\begin{aligned}
P_{k+1}(t+h) &= P_{k+1}(t)P(N(t,t+h]=0) \\
&\quad + P_k(t)P(N(t,t+h]=1) \\
&\quad + P(N(s,t+h]=k+1, N(t,t+h]\geq 2) \\
&= P_{k+1}(t)(1-\lambda h)+P_k(t)\lambda h+o(h)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \frac{P_{k+1}(t+h)-P_{k+1}(t)}{h}=-\lambda P_{k+1}(t)+\lambda P_k(t)+\frac{o(h)}{h}$$

令$h\to 0$得, $\dfrac{dP_{k+1}(t)}{dt}=-\lambda P_{k+1}(t)+\lambda P_k(t)$

已得 $$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = -\lambda P_{k+1}(t) + \lambda P_k(t)$$

两边同乘$e^{\lambda t}$得， $$\frac{d[e^{\lambda t}P_{k+1}(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda t}P_k(t)$$

即 $$\frac{d[e^{\lambda t}P_{k+1}(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda s}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$$

又由于$P_{k+1}(s)=0$，所以$P_{k+1}(t) = e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{[\lambda(t-s)]^{k+1}}{(k+1)!}$.

证明方法2: $\Rightarrow$: 对$t > s \geq 0$, 记$N(s,t] = N(t) - N(s)$.

固定s和$0 \leq u \leq 1$, 对$t \geq s$, 记$\phi_u(t) = E(u^{N(s,t]})$.

$$\text{对} h > 0, \phi_u(t+h) = E(u^{N(s,t+h]})$$

$$(\because \text{独立增量性}) \quad = \phi_u(t)E(u^{N(t,t+h]})$$

$$= \phi_u(t)[1 - \lambda h + u\lambda h + o(h)]$$

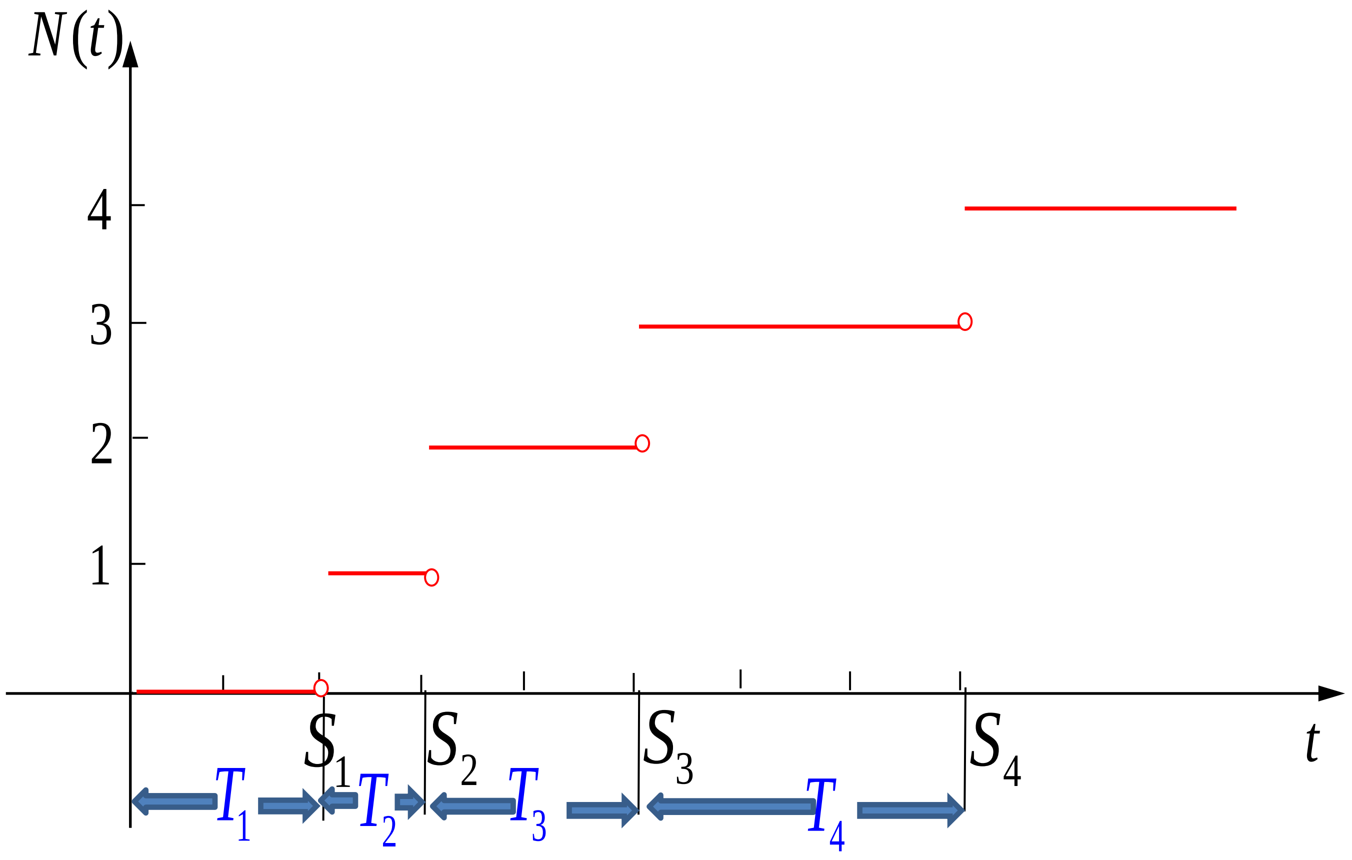
$$= \phi_u(t)[1 + (u-1)\lambda h] + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_u(t+h) - \phi_u(t)}{h} = (u-1)\lambda\phi_u(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$\text{令} h \to 0 \text{得}, \frac{d\phi_u(t)}{dt} = (u-1)\lambda\phi_u(t)$$

又由于$\phi_u(s) = 1$, 所以$\phi_u(t) = e^{(u-1)\lambda(t-s)}$

这推出$N(t) - N(s) \sim \pi(\lambda(t-s))$.


N(t)
4
3
2
1
S1
S2
S3
S4
t
T1
T2
T3
T4

设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程, 则:

1. $E\left[N\left(t\right)\right]=D\left[N\left(t\right)\right]=\lambda t$

2. $C_N\left(s,t\right)=\lambda min\left(s,t\right)$

3. 对任何$s>0$, $\{N(t+s)-N(s),t\geq 0\}$也是参数为λ的泊松过程且与$\{N(u): u\leq s\}$独立。

对$t > s, n \geq m$:

4. $P\{N_t = n \mid N_s = m\} = e^{-\lambda(t-s)} \dfrac{[\lambda(t-s)]^{n-m}}{(n-m)!}$

5. $P\{N_s = m \mid N_t = n\} = \dbinom{n}{m} \left(\dfrac{s}{t}\right)^m \left(1-\dfrac{s}{t}\right)^{n-m}$

例：顾客依泊松过程到达某商店，速率为4人/小时。已知商店上午9:00开门.

(1) 求到9:30时仅到一位顾客，而到11:30时已到5位顾客的概率？

(2)求第2位顾客在10点前到达的概率？

(3) 求第一位顾客在9:30前到达且第二位顾客在10:00前到达的概率？

解：以上午九点作为0时刻，以1小时作为单位时间。以$N(t)$表示$(0,t]$内来到的顾客数，则$\{N(t)\}$是$\lambda=4$的泊松过程。

$$(1)P\{N(0.5)=1, N(2.5)=5\}$$

$$=P\{N(0.5)=1\}P\{N(2.5)-N(0.5)=4\}$$

$$=(2e^{-2})(\frac{e^{-8}8^4}{4!})=0.0155$$

令S_n表示第n个顾客到达的时刻

$$(2)P(S_2 \le 1) = P[N(1) \ge 2]$$

$$= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} = 1 - 5e^{-4}$$

$$(3)P[S_1 \le 0.5, S_2 \le 1] = P[N(0.5) \ge 1, N(1) \ge 2]$$

$$= P[N(0.5) = 1, N(1) - N(0.5) \ge 1] + P[N(0.5) \ge 2]$$

$$= 0.5\lambda e^{-0.5\lambda}(1 - e^{-0.5\lambda}) + 1 - e^{-0.5\lambda} - 0.5\lambda e^{-0.5\lambda}$$

$$= 1 - e^{-2} - 2e^{-4}$$

•与泊松过程相联系的若干分布

(1) S_n是第n个事件发生的时刻

$$F_{S_n}(t)=P(S_n\le t)=P\left(N(t)\ge n\right)$$

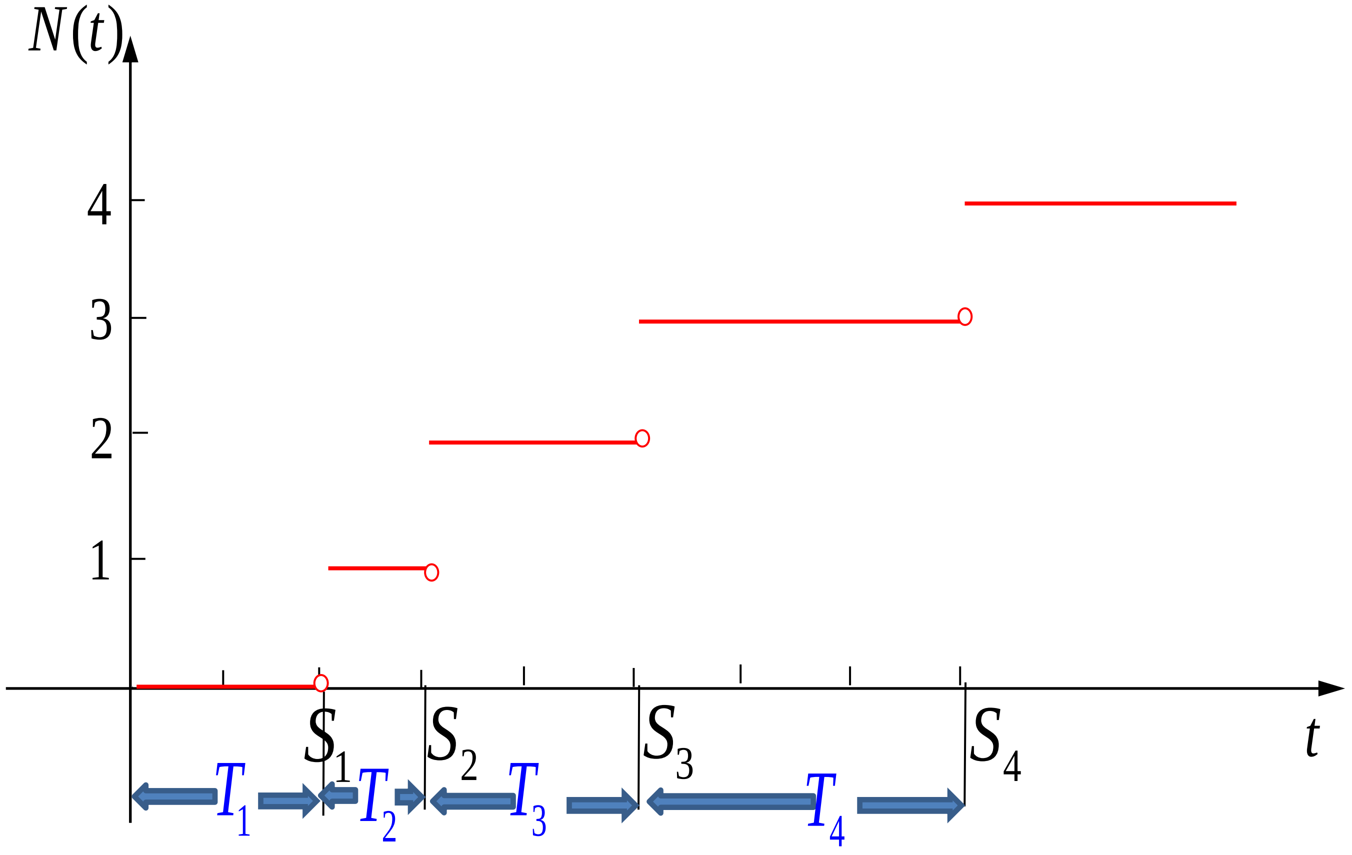
$$=1-\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

$$f_{S_n}(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

即$S_n\sim\Gamma(n,\lambda)$

(2) 记$T_i = S_i - S_{i-1} \quad i = 1, 2, \cdots \quad (S_0 = 0)$

称为第$i-1$个事件和第i个事件发生的时间间隔



注:$\{N(t)\},\{T_n\},\{S_n\}$相互刻画

(1)$T_i = S_i - S_{i-1}$

(2)$S_0 = 0, S_n = T_1 + ... + T_n, n \ge 1$

(3)$S_n = \inf\{t > 0 : N(t) = n\}, n \ge 1$

(4)$N(t) = \sup\{n \ge 0 : S_n \le t\}$

定理: $\{N(t)\}$是参数为λ的泊松过程当且仅当其时间间隔

$T_{1,}T_2,...$独立同分布,且服从均值为$\dfrac{1}{\lambda}$的指数分布.

证明: $\Rightarrow$ 　对$t>0, P(T_1 \le t) = P(N(t) \ge 1)$

$$= 1 - P(N(t)=0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$\therefore T_1$服从均值为$1/\lambda$的指数分布，记为$T_1 \sim Exp(\lambda)$

假设已证得$T_{1,}T_2,...T_n$独立同分布,且$T_i \sim Exp(\lambda)$,

下面证明$T_{n+1} \sim Exp(\lambda)$且与$(T_{1,}T_2,...T_n)$独立.

对$t_1, t_2, ..., t_n, t > 0$,

$$P(T_{n+1} \le t \mid T_1 = t_1, ..., T_n = t_n)$$

$$= P(T_{n+1} \le t \mid S_1 = t_1, S_2 = t_1 + t_2, ..., S_n = t_1 + ... + t_n)$$

$$= P(N(t + t_1 + ... + t_n) - N(t_1 + ... + t_n) \ge 1$$

$$\mid S_1 = t_1, S_2 = t_1 + t_2, ..., S_n = t_1 + ... + t_n)$$

由独立增量性，$P(T_{n+1}\le t\,|\,T_1=t_1,\ldots,T_n=t_n)$

$$=P(N(t+t_1+\ldots+t_n)-N(t_1+\ldots+t_n)\ge 1)$$

$$=1-P(N(t+t_1+\ldots+t_n)-N(t_1+\ldots+t_n)=0)$$

$$=1-e^{-\lambda t}$$

与t_1，. . . . , t_n无关

这一方面说明T_{n+1}与$(T_{1,}T_2,\ldots T_n)$独立,

另一方面说明$P(T_{n+1}\le t)=1-e^{-\lambda t}$,即$T_{n+1}\sim Exp(\lambda)$

$\Leftarrow$: 设$\{N'_t\}$是参数为λ的泊松过程，对应的间隔过程

是$T'_1, T'_2, \ldots$, 则$T'_1, T'_2, \ldots$, 独立同分布, 且服从$Exp(\lambda)$

因此$\{T_n; n=1,2,\ldots\}$与$\{T'_n; n=1,2,\ldots\}$具有相同的有限维分布

令$S_0 = S'_0 = 0$, $S_n = T_1 + \ldots + T_n, S'_n = T'_1 + \ldots + T'_n$,

则$\{S_n; n=0,1,\ldots\}$与$\{S'_n; n=0,1,\ldots\}$具有相同的有限维分布

对$0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k$及非负整数$n_1, \ldots, n_k$, 有

$$P(N_{t_1} = n_1, \ldots, N_{t_k} = n_k) = P(S_{n_1} \le t_1 < S_{n_1+1}, \ldots, S_{n_k} \le t_k < S_{n_k+1})$$

$$P(N'_{t_1} = n_1, \ldots, N'_{t_k} = n_k) = P(S'_{n_1} \le t_1 < S'_{n_1+1}, \ldots, S'_{n_k} \le t_k < S'_{n_k+1})$$

$$\therefore P(N_{t_1} = n_1, \ldots, N_{t_k} = n_k) = P(N'_{t_1} = n_1, \ldots, N'_{t_k} = n_k)$$

这说明$\{N_t\}$也是参数为λ的泊松过程

例： 上午8点开始某台取款机开始工作, 此时有一大堆人排队等待取款，设每人取款时间独立且都服从均值为10分钟的指数分布, 记A为事件“到上午9点钟为止恰有10人完成取款”，B为事件“到上午8:30为止恰有4人完成取款”，求$P(A)$，$P(B\mid A)$。

解：以上午8点作为0时刻，以1小时作为单位时间，以N_t表示$(0,t]$中完成取款的人数，则$\{N_t;t\geq 0\}$是$\lambda=6$的泊松过程. $A=\{N_1=10\}$, $B=\{N_{0.5}=4\}$

$$P(A)=e^{-6}\frac{6^{10}}{10!}$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P\{N_{0.5}=4\}P\{N_1-N_{0.5}=6\}}{P\{N_1=10\}}$$

$$=\frac{(e^{-3}\frac{3^4}{4!})(e^{-3}\frac{3^6}{6!})}{e^{-6}\frac{6^{10}}{10!}}=\binom{10}{4}(\frac{1}{2})^{10}$$

3.泊松过程的合成和分解

定理(合成):

设$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$是强度为λ_1和λ_2的泊松过程,且相互独立,则

$\{N_1(t)+N_2(t)\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

证明：令$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$. 则显然(1)$N(0)=0$.

(2)对任意$t>s\geq 0$,由泊松分布的可加性知，

$$N(t)-N(s)=[N_1(t)-N_1(s)]+[N_2(t)-N_2(s)]$$

$$\sim \pi((\lambda_1+\lambda_2)(t-s))$$

(3)对任意$0\leq t_1<t_2<\ldots<t_n$,$(N_1(t_2)-N_1(t_1),\ldots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1}))$ 与$(N_2(t_2)-N_2(t_1),\ldots,N_2(t_n)-N_2(t_{n-1}))$相互独立，且 $N_1(t_2)-N_1(t_1),\ldots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})$相互独立，$N_2(t_2)-N_2(t_1),\ldots,N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})$相互独立，这就推出

$N_1(t_2)-N_1(t_1),\ldots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1}),N_2(t_2)-N_2(t_1),\ldots,N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})$ 相互独立.

因此：$N(t_2)-N(t_1),\ldots,N(t_n)-N(t_{n-1})$相互独立。

定理(分解)：

设$\{N(t)\}$是强度为λ的泊松过程,若每个事件独立地（也独立于过程$\{N(t)\}$）以概率p为类型1, 以$1-p$为类型2，令$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$分别表示到t为止类型1和类型2发生的个数，则$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$分别是强度为λp和$\lambda(1-p)$的泊松过程,且相互独立.

证明：显然(1) $N_1(0)=N_2(0)=0.$

(2)对任意 $t>s\geq 0$, 由泊松分布的可分性知，

$$N_1(t)-N_1(s)\sim\pi(\lambda p(t-s))$$

$$N_2(t)-N_2(s)\sim\pi(\lambda(1-p)(t-s)),$$

且 $N_1(t)-N_1(s)$ 与 $N_2(t)-N_2(s)$ 相互独立.

下面证（3）这两个过程是相互独立的独立增量过程.

由于$\{N(t)\}$是独立增量过程, 且各事件属于哪种类型相互独立,
所以对任何$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, $(N_1(t_1)-N_1(t_0),N_2(t_1)-N_2(t_0)),\cdots,$
$(N_1(t_n)-N_1(t_{n-1}),N_2(t_n)-N_2(t_{n-1}))$这$n$个二维随机变量相互独立.

又对所有$0\le i<n$, $N_1(t_{i+1})-N_1(t_i)$与$N_2(t_{i+1})-N_2(t_i)$相互独立,
所以$N_1(t_1)-N_1(t_0),N_2(t_1)-N_2(t_0),\cdots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1}),$
$N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})$这$2n$个随机变量相互独立.

这一方面说明$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$是独立增量过程，另一方面
也说明$(N_1(t_1),\ldots,N_1(t_n))$与$(N_2(t_1),\ldots,N_2(t_n))$相互独立.

例：某银行有两个窗口可以接受服务。上午九点钟，小王到达这个银行，此时两个窗口分别有一个顾客在接受服务，另外有**2**个顾客排在小王的前面等待接受服务，一会儿又来了很多顾客。假设服务的规则是先来先服务。也就是说一旦有一个窗口顾客接受完服务，那么排在队伍中的第一个顾客就马上在此窗口接受服务。假设各个顾客接受服务的时间独立同分布，而且服从均值为**20**分钟的指数分布。问：小王在十点钟之前能够接受服务的概率？

解：以上午九点钟作为0时刻，以1小时作为单位时间。对$i=1,2,$令$N_i(t)$表示$(0,t]$内第i个窗口完成服务的顾客数。则

$\{N_i(t);t\ge 0\}$是强度为3的泊松过程，且$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$相互独立。

令$N(t)$表示$(0,t]$内这两个窗口完成服务的顾客总数

则$N(t)=N_1(t)+N_2(t),$且$\{N(t)\}$是强度为6的泊松过程

当且仅当第3个顾客服务完成时，小王才去接受服务。

用S_i表示第i个顾客服务完成的时刻，所以所求的概率是：

$$P(S_3 \le 1) = P(N(1) \ge 3)$$

$$= 1 - e^{-6} - 6e^{-6} - 18e^{-6} = 0.938.$$

例：设$N(t)$表示手机在$(0, t]$天内收到的短信数，假设$\{N(t); t \geq 0\}$是强度为10条的泊松过程，其中每条短信独立地以概率0.2是垃圾短信。求

(1) 一天内没有收到垃圾短信的概率；

(2) 第一天内收到3条有用短信，1条垃圾短信，第二天没有收到垃圾短信的概率？

解：以$X(t),Y(t)$分别表示手机在$(0,t]$天内收到的垃圾短信数和有用短信数，则$\{X(t);t\geq 0\}$和$\{Y(t);t\geq 0\}$分别是强度为2和8的泊松过程，且相互独立。

$$(1)P\{X(1)=0\}=e^{-2}=0.135$$

$$(2)P\{Y(1)=3,X(1)=1,X(2)-X(1)=0\}$$
$$=P\{Y(1)=3\}P\{X(1)=1,X(2)-X(1)=0\}$$
$$=P\{Y(1)=3\}P\{X(1)=1\}P\{X(2)-X(1)=0\}$$
$$=e^{-8}\times\frac{8^3}{3!}\times e^{-2}\times 2\times e^{-2}=\frac{512}{3}e^{-12}$$

4.到达时刻的条件分布

次序统计量的密度函数：

设$X_1, X_2, ..., X_n$是来自密度函数为f的总体的简单样本.(即$X_1, X_2, ..., X_n$独立同分布，具有密度函数f).把$X_1, X_2, ..., X_n$按从小到大的次序排列得到$X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$. 则$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})$具有密度函数

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} n!\, f(x_1) f(x_2) ... f(x_n), & x_1 < x_2 < ... < x_n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明：对$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$，以及$\varepsilon_i > 0$且使得

$x_i + \varepsilon_i < x_{i+1}$有

$$P(X_{(i)} \in (x_i, x_i + \varepsilon_i], \forall 1 \le i \le n)$$

$$= \sum_{\tau\text{是}\{1,2,\ldots,n\}\text{的排列}} P(X_{\tau_i} \in (x_i, x_i + \varepsilon_i], \forall 1 \le i \le n)$$

$$= n! \prod_{i=1}^{n} [F(x_i + \varepsilon_i) - F(x_i)]$$

$$\therefore g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \lim_{\max(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\to 0} \frac{P(X_{(i)} \in (x_i, x_i + \varepsilon_i], \forall 1 \le i \le n)}{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}$$

$$= n! f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)$$

定理：设$\{N(t)\}$是强度为λ的泊松过程.

令$S_1, S_2, \ldots$分别为第1个事件，第2个事件，. . .

的到达时刻. 任意给定$t>0$和正整数n,

$$(S_1, S_2, \ldots S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}),$$

其中$U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}$为$n$个独立同服从$U(0,t)$分布

的随机变量$U_1, \ldots, U_n$的次序统计量.

证明：对任意$0 \le s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_n < t_n \le t$,

$$P(s_1 < S_1 \le t_1, s_2 < S_2 \le t_2, \ldots, s_n < S_n \le t_n \mid N(t) = n)$$

$$= \frac{P(s_1 < S_1 \le t_1, s_2 < S_2 \le t_2, \ldots, s_n < S_n \le t_n, N(t) = n)}{P(N(t) = n)}$$

$$= \frac{P(N(s_1, t_1] = 1, \ldots, N(s_n, t_n] = 1, N(s_1) = 0, N(t_1, s_2] = 0, \ldots, N(t - t_n) = 0)}{P(N(t) = n)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}\lambda^n (t_1 - s_1)\ldots(t_n - s_n)}{e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!(t_1 - s_1)\ldots(t_n - s_n)}{t^n}$$

因此在$N(t)=n$的条件下,$(S_1,\ldots,S_n)$的密度函数为：

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$=\lim_{\max(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\to 0}\frac{P(S_i\in(x_i,x_i+\varepsilon_i],\forall 1\le i\le n\mid N(t)=n)}{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$$

$$=\frac{n!}{t^n},0<x_1<x_2<\ldots<x_n<t$$

这正是$(U_{(1)},\ldots,U_{(n)})$的联合密度函数.

推论：设$\{N(t)\}$是强度为λ的泊松过程.对$t > s \geq 0$，令$W_1, W_2, \ldots$分别为$(s,t]$内发生的第1个事件，第2个事件，. . . 的到达时刻. 任意给定正整数n,

$$(W_1, W_2, \ldots W_n \mid N(t) - N(s) = n) \overset{d}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}),$$

其中$U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}$为$n$个独立同服从$U(s,t)$分布的随机变量$U_1, \ldots, U_n$的次序统计量.

例：保险理赔按速率λ的泊松过程到达. 设各人理赔金额独立同分布（且独立于此泊松过程），具有均值为μ的分布G. 以S_i和C_i分别表示第i次理赔的时间和金额. 采用贴现算法，即t时刻的1元相当于0时刻的$e^{-\alpha t}$元. 则到t为止总理赔的贴现价值为

$$D(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\alpha S_i} C_i,$$

计算$E(D(t))$.

解: $E(D(t)) = E[E(D(t)\,|\,N(t))]$

在$N(t)=n$的条件下,$(S_1,\ldots,S_n)$与n个独立的$U(0,t)$随机变量$U_1,\ldots,U_n$的次序统计量$(U_{(1)},\ldots,U_{(n)})$同分布.

$$\therefore E(D(t)\,|\,N(t)=n) = E[\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\alpha U_{(i)}}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(C_i)E(e^{-\alpha U_{(i)}}) = \mu E[\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha U_{(i)}}] = \mu E[\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha U_i}]$$

$$= n\mu \int_0^t e^{-\alpha s}\frac{1}{t}ds = n\frac{\mu}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t}).$$

$$\therefore E(D(t)) = E[E(D(t)\,|\,N(t))]$$

$$= E[N(t)\frac{\mu}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})] = \frac{\lambda\mu}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

Beta分布

X服从参数为$\alpha > 0$，$\beta > 0$的Beta分布，

$X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$是指具有密度函数：

$$
\begin{aligned}
f(x;\alpha,\beta) &= \mathrm{constant} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \\
&= \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad for\ 0 < x < 1
\end{aligned}
$$

性质：

1.如果$X \sim Beta(\alpha,\beta)$,那么$E(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

2.$Beta(1,1)=U(0,1)$

3.如果$X_1,\ldots,X_n$独立同服从$U(0,1)$,对应的次序统计量为$X_{(1)}\le\ldots\le X_{(n)}$，那么

$$X_{(k)} \sim Beta(k,n-k+1), E(X_{(k)})=\frac{k}{n+1}$$

这里$k=1,2,\ldots,n$

例：设$\{N(t), t \ge 0\}$是参数为λ的泊松过程，对$1 \le k \le n$，

计算 $E(S_k \mid N(t)=n)$;

解: 在$N(t)=n$的条件下，$(S_1,\ldots,S_n)$与n个独立的$U(0,t)$随机变量$U_1,\ldots,U_n$的次序统计量$(U_{(1)},\ldots,U_{(n)})$同分布.

$$\therefore E(S_k \mid N(t)=n) = E[U_{(k)}] = \frac{k}{n+1}t$$

5. 复合泊松过程

随机过程$\{X(t);t\geq 0\}$称为是复合泊松过程，如果它可以表示为：

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k,$$

其中$\{N(t);t\geq 0\}$是速率为λ的泊松过程,$\{Y_k;k\geq 1\}$是独立于$\{N(t);t\geq 0\}$的一组独立同分布随机变量.

性质：

$$1.E(X(t))=\lambda tE(Y_1)$$

$$2.Var(X(t))=\lambda tE(Y_1^2)$$

$$3.X(0)=0\text{且}\{X(t);t\geq 0\}\text{是平稳独立增量过程.}$$

证明：$1.E(X(t))=E[E(X(t)\mid N(t))]$

$$=E[N(t)E(Y_1)]=\lambda tE(Y_1)$$

$$2.E(X^2(t))=E[E(X^2(t)\mid N(t))]$$

$$=E[N(t)Var(Y_1)+N^2(t)(E(Y_1))^2]$$

$$=\lambda tVar(Y_1)+(\lambda t+\lambda^2t^2)(E(Y_1))^2$$

$$Var(X(t))=E(X^2(t))-[E(X(t))]^2=\lambda tE(Y_1^2)$$

3.(i)显然$X(0)=0.$

(ii)平稳增量性：

对$t>s\geq 0$和$u\in R$，令$\phi(u)=E(e^{iuY_1})$,

$$E(e^{iu(X(t)-X(s))})=E(e^{iu\sum_{k=N(s)+1}^{N(t)}Y_k})$$

$$=E[E(e^{iu\sum_{k=N(s)+1}^{N(t)}Y_k}\mid N(s),N(t))]$$

$$=E[\phi(u)^{N(t)-N(s)}]\;=E[\phi(u)^{N(t-s)}]$$

只是$t-s$的函数，所以是平稳增量过程.

(iii)独立增量性：

对$t_n > t_{n-1} > \dots > t_0 \geq 0$和$u_1,\dots u_n \in R$,

$$E(e^{i\sum_{j=1}^{n} u_j(X(t_j)-X(t_{j-1}))}) = E(\prod_{j=1}^{n} e^{iu_j \sum_{k=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} Y_k})$$

$$= E[E(\prod_{j=1}^{n} e^{iu_j \sum_{k=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} Y_k} \mid N(t_0),\dots N(t_n))]$$

$$= E[\prod_{j=1}^{n} \phi(u_j)^{N(t_j)-N(t_{j-1})}] = \prod_{j=1}^{n} E(\phi(u_j)^{N(t_j)-N(t_{j-1})})$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E(e^{iu_j(X(t_j)-X(t_{j-1}))})$$ 所以$X(t_1)-X(t_0),\dots,X(t_n)-X(t_{n-1})$

相互独立，所以$\{X(t)\}$是独立增量过程.

例：某零件在运行中会受到撞击，记在$(0,t]$内受到的撞击次数为$N(t)$，设$\{N(t)\}$是参数为λ的泊松过程.各次撞击带来的磨损量分别为$\xi_1,\xi_2,\ldots$假设它们独立同服从参数为β的指数分布，且与$\{N(t)\}$独立.如果磨损量大于$\alpha>0$,那么更换零件.计算零件的平均寿命.

解法1： 令η为此零件的寿命. 令$Z(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}\xi_k$.则

$$\eta=\inf\{t>0:Z(t)>\alpha\}.$$

$$E(\eta)=\int_0^{\infty}P(\eta>t)dt=\int_0^{\infty}P(Z(t)\le\alpha)dt$$

$$P(Z(t)\le\alpha)=\sum_n P(N(t)=n)P(Z(t)\le\alpha\,|\,N(t)=n)$$

$$=\sum_n P(N(t)=n)P(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\le\alpha\,|\,N(t)=n)$$

$$=\sum_n P(N(t)=n)P(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\le\alpha)\ (\because\{\xi_k\}\text{与}\{N(t)\}\text{独立})$$

令$M(t)=\sup\{n\ge 0:\sum_{k=1}^{n}\xi_k\le t\}$,则$\{M(t)\}$是参数为$\beta$的泊松过程. $\therefore P(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\le\alpha)=P(M(\alpha)\ge n)$

$$\therefore E(\eta)=\int_0^\infty P(Z(t)<\alpha)dt$$

$$=\int_0^\infty\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}P(M(\alpha)\ge n)dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}P(M(\alpha)\ge n)dt$$

$$\because\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dt\overset{令u=\lambda t}{=}\frac{1}{\lambda n!}\int_0^\infty e^{-u}u^n du=\frac{1}{\lambda}$$

$\because M(\alpha)$是取值非负整数的随机变量,

$$\therefore E(M(\alpha)) = \sum_{n=0}^{\infty} P(M(\alpha) > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(M(\alpha) \geq n)$$

$$\therefore E(\eta) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} P(M(\alpha) \geq n) = \frac{1}{\lambda}(1 + E(M(\alpha)))$$

$$= \frac{1}{\lambda}(1 + \alpha\beta)$$

参数含义：

(1) λ是平均撞击次数。λ越大，撞击次数越多，零件受损越严重，使用寿命越短；

(2) β 是每次撞击时平均磨损量的倒数。β越大，每次撞击时平均磨损量越小，所以寿命越长；

(3) α 是设计时允许零件受损的上限。α越大，寿命越长

解法二：令 $S_0=0$，S_n 为第 n 次撞击发生的时刻，$T_n=S_n-S_{n-1}$，$n\geq 1$

令 X 为磨损量大于 α 时受到的撞击数目

令 η 为寿命．则：$\eta=S_X$

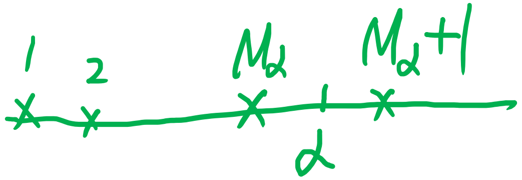
$X=\min\{n\geq 1: \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n>\alpha\}$

由于 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$ 与 $\{N_t; t\geq 0\}$ 独立，所以 X 与 $\{T_1,T_2,\cdots\}$ 独立，$\therefore E(S_X|X=n)=E(\sum_{i=1}^{n}T_i|X=n)=E(\sum_{i=1}^{n}T_i)=\frac{n}{\lambda}$

$\therefore E(S_X)=E[E(S_X|X)]=E(\frac{X}{\lambda})=\frac{1}{\lambda}EX$.

$\because \xi_1, \xi_2, \cdots$ i.i.d, $\xi_i \sim Exp(\beta)$

$\therefore$ 把 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 看成时间间隔形成的计数过程 $\{M_t; t \geq 0\}$ 是参数为 β 的泊松过程，而



$$X = \min\{n \geq 1: \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n > \alpha\}$$

就是此过程中时刻 α 后首次发生的事件，$\therefore X = M_\alpha + 1$

因此 $EX = EM_\alpha + 1 = \alpha\beta + 1$

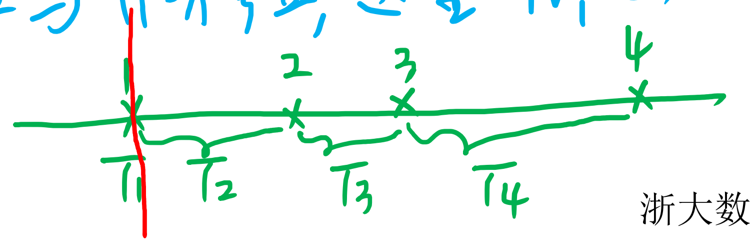
$$\therefore E\eta = \frac{EX}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\alpha\beta+1).$$

解法三：令 η 为零件寿命，$f(\alpha)=E\eta$.

令 $S_0=0$，S_n 为第 n 次撞击时刻，$T_n=S_n-S_{n-1}$，$n\geq 1$.

① 如 $\alpha=0$，则 $\eta=S_1=T_1$，$\therefore f(0)=E\eta=\frac{1}{\lambda}$

② 设 $\alpha>0$，则零件至少可经过1次撞击，之后的撞击时间间隔 $T_2, T_3, \cdots$ i.i.d $\sim Exp(\lambda)$ 且与 T_1 独立，所以之后形成的计数过程 $\{N_1(t); t\geq 0\}$ 仍是参数为 λ 的泊松过程且与 T_1 独立，这里 $N_1(t)=N(T_1+t)-N(T_1)$.



第1次撞击的磨损量$\xi_1 \sim Exp(\beta)$，且$\{\xi_i, T_i\}$与$\{\xi_n, N(t);\ n\geq 1, t\geq 0\}$独立.

如$\xi_1 = x > \alpha$，则 $\eta = T_1$，$\therefore E(\eta \mid \xi_1 = x) = ET_1 = \frac{1}{\lambda}$

如$\xi_1 = x \leq \alpha$，则还需磨损量大于$\alpha - x$，

$$\therefore E(\eta \mid \xi_1 = x) = ET_1 + f(\alpha - x) = \frac{1}{\lambda} + f(\alpha - x)$$

由全期望公式：

$$f(\alpha) = E\eta = \int_0^{\infty} E(\eta \mid \xi_1 = x) f_{\xi_1}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \int_0^{\alpha} \beta e^{-\beta x} f(\alpha - x)\,dx$$

$$\overset{\text{令 } u=\alpha-x}{=\!=\!=} \frac{1}{\lambda} + \beta e^{-\alpha\beta} \int_0^{\alpha} e^{\beta u} f(u)\,du$$

$\therefore f'(\alpha) = \frac{\beta}{\lambda} \quad (\star)$

$\therefore f(\alpha) = \frac{\alpha\beta}{\lambda} + c$

又 $f(0) = \frac{1}{\lambda} \quad \therefore f(\alpha) = \frac{1+\alpha\beta}{\lambda}$

$(\star)$是因为 $f'(\alpha) = -\beta^2 e^{-\alpha\beta}\int_0^\alpha e^{\beta u} f(u)\,du + \beta f(\alpha)$

$= -\beta\left(f(\alpha) - \frac{1}{\lambda}\right) + \beta f(\alpha) = \frac{\beta}{\lambda}$

6. 非齐次泊松过程

定义：计数过程$\{N(t)\}$称作强度为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程，如果：

1. $N(0)=0$
2. 独立增量
3. $P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h)$
4. $P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$

定理：计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程

当且仅当：

1. $N(0)=0$
2. 独立增量
3. 对任意的$t>s\geq 0, N(t)-N(s)\sim\pi\left(\int_s^t\lambda(u)du\right)$

令$m(t)=\int_0^t\lambda(u)du$，则$N(t)\sim\pi(m(t)), \{m(t)\}$是$\{N(t)\}$的均值函数.

例：设$\{N(t), t \ge 0\}$是非齐次泊松过程，强度为$\lambda(t) = t^2$.

计算(1)$E(N(2))$;

(2)$P(N(1) = 1, N(2) = 2)$;

(3)$P(N(2) = 2 \mid N(1) = 1)$;

(4)$P(N(1) = 1 \mid N(2) = 2)$.

解:(1) $E(N(2))=\int_0^2 \lambda(t)dt=\int_0^2 t^2 dt=\frac{8}{3}$

$$(2)\int_0^1 \lambda(t)dt=\int_0^1 t^2 dt=\frac{1}{3},\int_1^2 \lambda(t)dt=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$P(N(1)=1,N(2)=2)=P(N(1)=1)P(N(2)-N(1)=1)$$

$$=(\frac{1}{3}e^{-1/3})(\frac{7}{3}e^{-7/3})=\frac{7}{9}e^{-8/3}$$

$$(3)P(N(2)=2\mid N(1)=1)=P(N(2)-N(1)=1)=\frac{7}{3}e^{-7/3}$$

$$(4)P(N(1)=1\mid N(2)=2)=\frac{P(N(1)=1,N(2)=2)}{P(N(2)=2)}$$

$$=\frac{\frac{7}{9}e^{-8/3}}{(\frac{8}{3})^2 e^{-8/3}/2}=\frac{7}{32}$$

例：设$\{N(t)\}$为是强度为$\lambda(t)=t$的泊松过程.

令S_i表示第i个事件发生的时刻，$S_0=0$.

对$i\geq 1$, 令$T_i=S_i-S_{i-1}$为第$i-1$与第i个事件发生的时间间隔.

计算T_1,T_2的密度函数，判断它们是否独立？

解：$$F_{T_1}(t)=P(T_1\leq t)=P(N(t)\geq 1)=1-e^{-m(t)}$$

$$f_{T_1}(t)=F'_{T_1}(t)=m'(t)e^{-m(t)}=\lambda(t)e^{-m(t)}=te^{-t^2/2}$$

$$P(T_2\leq t\,|\,T_1=s)=P(N(t+s)-N(s)\geq 1\,|\,T_1=s)$$

$$=P(N(t+s)-N(s)\geq 1)=1-e^{-[m(t+s)-m(s)]}$$

$$f_{T_2|T_1}(t\,|\,s)=\lambda(t+s)e^{-[m(t+s)-m(s)]}=(t+s)e^{-t(t+2s)/2}$$

$$f_{T_2}(t) = \int_0^{\infty} f_{T_2|T_1}(t\,|\,s)\, f_{T_1}(s)ds$$

$$= \int_0^{\infty} (t+s)se^{-(t+s)^2/2}ds$$

$$= \int_t^{\infty} u(u-t)e^{-u^2/2}du$$

$$= \int_t^{\infty} -(u-t)de^{-u^2/2}$$

$$= \int_t^{\infty} e^{-u^2/2}du = \sqrt{2\pi}[1-\Phi(t)]$$

$\because f_{T_1} \neq f_{T_2}, \therefore T_1$与$T_2$不同分布

对$s>0$, $f_{T_2|T_1}(\cdot\,|\,s) \neq f_{T_2}(\cdot)$, 所以$T_1$与$T_2$不独立

定理：设$\{N(t)\}$为是强度为$\lambda(t)$的泊松过程. 对任何$T > 0$,

在$N(T) = n$的条件下，第1个，第2个，．．．，第n个事件发生的时刻（$S_1, ..., S_n$）与$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})$同分布。

这里$X_1, \ldots, X_n$独立同分布，具有概率密度$\dfrac{\lambda(x)1_{\{0<x\le T\}}}{\int_0^T \lambda(u)du}$

$X_{(1)} < X_{(2)} < .. < X_{(n)}$是$X_1, \ldots, X_n$的次序统计量

定理（合成）：

设$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$是强度为$\lambda_1(t)$和$\lambda_2(t)$的泊松过程, 且相互独立, 则

$\{N_1(t)+N_2(t)\}$是$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)$的泊松过程.

定理(分解)：

设$\{N(t)\}$是强度为λ的泊松过程，在t时刻发生的事件独立地（也独立于过程$\{N(t)\}$）以概率$p(t)$为类型1，以$1-p(t)$为类型2. 令$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$分别表示到t为止类型1和类型2发生的个数，则$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$分别是强度为$\lambda p(t)$和$\lambda(1-p(t))$的泊松过程，且相互独立.

证明：显然(1) $N_1(0) = N_2(0)=0.$

(2)对任意$t > s \geq 0$, 在$N(t) - N(s) = n$的条件下, 在$(s,t]$中发生的n个事件（不考虑发生先后顺序）发生时刻独立同服从$U(s,t)$，所以每个事件独立地以概率

$$q = \int_s^t P(\text{此事件是类型1}|\text{此事件在}u\text{时刻发生}) \times \frac{1}{t-s} du$$

$$= \frac{1}{t-s} \int_s^t p(u) du$$ 为类型1，以概率$1-q$为类型2.

由泊松分布的可分性，知：

$$N_1(t)-N_1(s)\sim \pi(\lambda(t-s)q)=\pi(\lambda\int_s^t p(u)du),$$

$$N_2(t)-N_2(s)\sim \pi(\lambda(t-s)(1-q))=\pi(\lambda\int_s^t (1-p(u))du),$$

且$N_1(t)-N_1(s)$与$N_2(t)-N_2(s)$相互独立.

（3）这两个过程是相互独立的独立增量过程(证略).

例:(无穷条服务线的排队问题M/G/∞)

顾客按速率λ的泊松过程到达服务站,到达后马上接受服务，服务时间独立同服从分布G. 令$X(t)$表示到t为止完成服务的顾客数，$Y(t)$表示t时在接受服务的顾客数. 问:

$X(t)$和$Y(t)$分别服从什么分布?

解:固定$t>0$, 令$N(t)$表示$(0,t]$到达的顾客数,

则$N(t)\sim\pi(\lambda t)$.

对于在$s\le t$时到达的顾客,独立地以概率

$p(s)=G(t-s)$到t为止完成服务(称为类型1),

以概率$1-p(s)$在t时还在接受服务(称为类型2).

在$N(t)=n$的条件下，在$(0,t]$到达的这n个顾客

（不考虑到达先后顺序）到达时刻独立同服从

$U(0,t)$，所以每个事件独立地以概率

$$q=\int_0^t P(\text{此顾客是类型1}|\text{此顾客在}s\text{时刻到达})\times\frac{1}{t}ds$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds\text{为类型1,以概率}1-q\text{为类型2}$$

$\therefore X(t)$和$Y(t)$相互独立，

$$X(t)\sim\pi(\lambda\int_0^t p(s)ds)=\pi(\int_0^t \lambda G(s)ds),$$

$$Y(t)\sim\pi(\lambda\int_0^t (1-p(s))ds)=\pi(\int_0^t \lambda(1-G(s))ds)$$

定理(时间变换)：

设$\{N(t)\}$是强度为1的泊松过程，令$\lambda(u)$是$[0,\infty)$上非负的在任何有界区间上可积的函数，令$m(t)=\int_0^t \lambda(u)du$，

$M(t)=N(m(t))$.则$\{M(t)\}$是强度为$\lambda(t)$的泊松过程.