浙江大学 20 <u>20</u> —20 <u>21</u> 秋冬学期

《时间序列分析》课程期末考试试卷

课程号: <u>06121291</u>, 开课学院: <u>数学科学学院</u>

考试试卷: ✓A 卷、B 卷 (请在选定项上打✓)

考试形式: ✓闭、开卷 (请在选定项上打✓), 允许带 <u>计算器</u> 进场

考试日期: <u>2021</u> 年 <u>01</u> 月 <u>25</u> 日, 考试时间: <u>120</u> 分钟

诚信考试, 沉着应考, 杜绝违纪

考生姓名: ________ 学号: ________ 所属院系: ________

1. (15 分) 设平稳序列 $\{X_t\}$ 观察值为 $x_1, x_2, \cdots, x_N$, 记 $y_t = x_t - \overline{x}_N$, 其中 $\overline{x}_N = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$.

(1) 叙述 AR(p) 序列的 AIC、BIC 定阶;

(2) 写出 $\{X_t\}$ 的自协方差函数估计表达式;

(3) 设 $\{y_t\}$ 满足模型 $y_t - ay_{t-1} = \varepsilon_t$, 求自回归系数的 Yule-Walker 估计 $\widehat{a}$ 和最小二乘估计 $\widetilde{a}$.

2. (20 分) 设 $\{X_t\}$ 满足模型 $X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$, 其中 $b > 0$, $\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, 1)$.

(1) 证明: $\{X_t\}$ 是平稳序列;

(2) 写出 $\{X_t\}$ 的谱密度函数;

(3) 试给出 $\{X_t\}$ 所满足的 MA(1) 模型;

(4) 记 $\overline{X}_N = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$, 证明: $\sqrt{N}\overline{X}_N \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, (1+b)^2)$, $N \to \infty$;

(5) 记 $\widehat{X}_{n+k} = L(X_{n+k} | X_n, X_{n-1}, \cdots, X_1)$, 求 $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_{n+k} - \widehat{X}_{n+k})^2$.

3. (20 分) 设平稳序列 $\{X_t\}$ 的自协方差函数为 $\gamma_k = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{|k|}, k \in \mathbb{Z}$.

(1) 令 $\varepsilon_t = X_t - \dfrac{1}{3}X_{t-1}$, 证明: $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声;

(2) 证明: $\{X_t\}$ 的偏相关系数 $a_{n,n}$ 是 1 后截尾的;

(3) 设 $Y_t = X_t + \frac{1}{2}X_{t-1}$, 问 $\{Y_t\}$ 满足何模型? 并给出此模型;

(4) 设 $Y_t = X_t + \eta_t$, 其中 $\{\eta_t\}$ 是与 $\{X_t\}$ 独立的白噪声 WN$(0,1)$, 证明: $\{Y_t\}$ 是 ARMA$(1,1)$ 序列.

4. (20 分) 设零均值平稳序列 $\{X_t\}$ 满足如下 ARMA$(1,2)$ 模型:

$$X_t - bX_{t-1} = \varepsilon_t + 2b\varepsilon_{t-1} + b^2\varepsilon_{t-2}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0,1).$$

模型的平稳解为 $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$.

(1) 求 b 的取值范围;

(2) 求 $\{X_t\}$ 的 Wold 系数 ψ_1, ψ_2, ψ_3;

(3) 对 $k \geq 0$, 计算 $\gamma_k - b\gamma_{k-1}$;

(4) 求自协方差函数 $\gamma_k, k \geq 0$;

(5) 证明: 矩阵 $\begin{pmatrix} \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ 可逆.

5. (20 分) 题目同第四题.(PS: 卷子上就是这么写的)

(1) 设 $\begin{cases} Y_t = X_t, & t = 1,2, \\ Y_t = X_t - bX_{t-1}, & t \geq 3. \end{cases}$ 证明: $\overline{\mathrm{sp}}\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} = \overline{\mathrm{sp}}\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$;

(2) 记 $\widehat{X}_n = L(X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots, X_1)$, $\widehat{Y}_n = L(Y_n | Y_{n-1}, Y_{n-2}, \cdots, Y_1)$, 证明: 对 $n \geq 1$, 有 $X_n - \widehat{X}_n = Y_n - \widehat{Y}_n$ 且 $\{X_n - \widehat{X}_n, n \geq 1\}$ 是正交序列;

(3) 设序列 $\{Y_n\}$ 的递推预测是 $\begin{cases} \widehat{Y}_1 = 0, \\ \widehat{Y}_2 = \theta_{11}(Y_1 - \widehat{Y}_1), \\ \widehat{Y}_3 = \theta_{21}(Y_2 - \widehat{Y}_2) + \theta_{22}(Y_1 - \widehat{Y}_1), \end{cases}$ 求 X_1, X_2, X_3 的递推预测公式;

(4) 求系数 θ_{11}, θ_{22};

(5) 记 $\nu_n = \mathbb{E}(X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1})^2$, 证明: $\lim_{n\to\infty} \nu_n = 1$.

6. (5 分) 设 $\{V_t\}$ 为一决定性平稳序列, $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声 WN$(0, \sigma^2)$ $(\sigma^2 \neq 0)$, 且 $\{\varepsilon_t\}$ 与 $\{V_t\}$ 正交. 设 $X_t = \varepsilon_t + V_t$, 证明: $\{X_t\}$ 是非决定性平稳序列.