第二十九章　Riemann 映射定理

29.1　Riemann 映射定理

定理 29.1. (Riemann, 1851) 假设 Ω 是平面单连通区域, 且 $\Omega \neq \mathbb{C}$, 任取 $a \in \Omega$, 存在唯一的双全纯映射 $f : \Omega \to \mathbb{D}$, 满足 $f(a) = 0$ 且 $f'(a) > 0$.

1851 年, 德国数学家 Riemann 在博士论文里陈述并 '证明' 了此映射定理的一种情形: 有界且具有光滑边界的区域可双全纯映为单位圆盘. 他的证明利用了 Dirichlet 边值问题解的存在性. 为说明解存在, 他未加证明地使用了 Dirichlet 原理. 1870 年, Weierstrass 最先发现了证明中的漏洞, 并鼓励他的学生 Schwarz 修补证明. Schwarz 不负所望, 证明了分段光滑边界下 Dirichlet 原理成立. 这一工作, 在当时数十年都是最佳结果.

1900 年, 美国数学家 Osgood 利用 Schwarz 和 Poincaré 的一些想法, 首次给出一般形式 Riemann 映射定理的证明. 但当时美国并非世界数学的中心, 因此 Osgood 的工作在美国的数学杂志发表后, 鲜有人知.

1910 年左右, 法国数学家 Koebe 和 Carathéodory 系统而完整地证明了 Riemann 映射定理, 他们的证明引入了重要的技巧, 并支配了这一领域的后续发展.

29.2　定理的证明

证明: (唯一性)

假设 $g : \Omega \to \mathbb{D}$ 是另一双全纯映射, 满足 $g(a) = 0$ 且 $g'(a) > 0$. 则 $G = g \circ f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 双全纯, 满足 $G(0) = 0$. 因此

$G(z) = e^{i\theta} z$. 再由

$$G'(0) = g'(f^{-1}(0))(f^{-1})'(0) = \frac{g'(a)}{f'(a)} > 0$$

得, $G(z) \equiv z$. 从而 $f = g$.

(**存在性**) 存在性的证明受 Schwarz 引理的启发.

若 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, $f(0) = 0$, 则 $|f'(0)| \leq 1$. 等号成立的充要条件是 $f(z) = e^{i\theta} z$，此时 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 双全纯.

Schwarz 引理启发如是想法: *如有全纯映射 $f : \Omega \to \mathbb{D}$, 满足 $f(a) = 0$ 且使 $|f'(a)|$ 达到最大值, 那么 f 有可能是双全纯映射.*

于是得证明思路: 寻找全纯映射, 使其在 a 点导数达到最大模. 寻找的过程利用了正规族理论.

证明分如下几步：

(1). 构造一个单叶函数族.

(2). 提出适当的极值问题.

(3). 证明达到极值的函数是单射.

(4). 证明达到极值的函数是满射.

先对 Ω 是有界区域的情形证明, 最后处理无界的情况.

(1). 构造全纯函数族:

$$\mathcal{F} = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{D} \text{ 单叶}, \ f'(a) > 0 \Big\}.$$

下说明 $\mathcal{F} \neq \emptyset$. 事实上因 Ω 有界, 故有 $R > 0$ 使 $\Omega \subset D(0, R)$. 函数 $f(z) = z/R$ 是单射, $f'(a) = 1/R > 0$. 因此 $f \in \mathcal{F}$. 由此得到无穷多个属于 $\mathcal{F}$ 的单叶函数.

(2). 记

$$v = \sup_{g \in \mathcal{F}} g'(a).$$

上面已说明 $v > 0$. 下证 $v < +\infty$.

取 $r > 0$ 使 $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$, 对 $f \in \mathcal{F}$ 应用导数的积分公式

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} d\zeta.$$

由积分基本不等式得,

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - a|^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} 2\pi r = \frac{1}{r}.$$

因上式对任意 $f \in \mathcal{F}$ 都成立, 故有 $v \leq 1/r < +\infty$.

由 v 的定义知, 在 $\mathcal{F}$ 中有函数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(a) = v.$$

显然函数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 一致有界. 由 Montel 定理, 它有子列 $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 在 Ω 上内闭一致收敛到全纯函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$. 由 Weierstrass 定理知, $f'(a)=\lim_{k\to\infty} f_{n_k}'(a)=v>0$. 由 Hurwitz 定理, f 在 Ω 上单叶.

显然 $f(\Omega)\subset\overline{\mathbb{D}}$. 由开映射定理知 $f(\Omega)\subset\mathbb{D}$. 因此 $f\in\mathcal{F}$.

(3). 下说明 $f(a)=0$. 若不然, $f(a)\neq 0$. 取 $S\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $S(w)=\frac{w-f(a)}{1-\overline{f(a)}w}$, 它满足 $S(f(a))=0$. 定义

$$F(z)=S\circ f(z)=\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)},\ z\in\Omega.$$

显然 $F:\Omega\to\mathbb{D}$ 单叶, $F(a)=0$, 且

$$F'(a)=S'(f(a))f'(a)=\frac{f'(a)}{1-|f(a)|^2}>f'(a).$$

这矛盾于 $f'(a)=\sup_{g\in\mathcal{F}} g'(a)$.

(4). 最后证明 f 是满射. 这是最精彩的一步.

如不然, $f(\Omega)\neq\mathbb{D}$, 取 $c\in\mathbb{D}\setminus f(\Omega)$. 定义 $S:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 如下:

$$S(w)=\frac{w-c}{1-\bar{c}w}, S(0)=-c, S'(0)=1-|c|^2.$$

显然 $0\notin S(f(\Omega))$. 由 $S(f(\Omega))$ 单连通可知, 在此区域上可取到 $\sqrt{\zeta}$ 的两个单值全纯分支. 取其中之一, 记为 $\phi(\zeta)=\sqrt{\zeta}$. 显然 $\phi(-c)=\sqrt{-c}$. 最后取 $\psi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $\psi(\sqrt{-c})=0$. 易见

$$\psi(\xi)=e^{i\theta}\frac{\xi-\sqrt{-c}}{1-\overline{\sqrt{-c}}\xi},\quad \text{其中 } e^{i\theta} \text{ 待定}.$$

最后考虑映射

$$g=\psi\circ\phi\circ S\circ f:\Omega\to\mathbb{D}.$$

显然 $G=\psi\circ\phi\circ S:f(\Omega)\to\mathbb{D}$ 单叶, 且满足 $G(0)=0$. $e^{i\theta}$ 的选取使 $G'(0)>0$. 易见, G 的逆映射 $H=S^{-1}\circ z^2\circ\psi^{-1}$ 可由 $G(f(\Omega))$ 延拓到 $\mathbb{D}$ 上 (这由 H 的表达式可知), 因此可视为 $\mathbb{D}$ 到自身的全纯映射. 显然 $H(0)=0$, $H\notin\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. 由 Schwarz 引理可知 $H'(0)=|H'(0)|<1$. 因此

$$g'(a)=G'(0)f'(a)=f'(a)/H'(0)>f'(a).$$

这样就得到单叶函数 $g \in \mathcal{F}$, 满足 $g'(a) > f'(a)$. 这矛盾于 $f'(a) = \sup_{h\in\mathcal{F}} h'(a)$. 此矛盾表明, f 实为满射.

(5) 最后, 处理无界的情形.

假设 Ω 无界, 我们将证明存在 Ω 上的单叶函数 ψ, 使得 $\psi(\Omega)$ 是一个有界区域.

首先, 取 $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. 多值函数 $\sqrt{z-b}$ 在 Ω 上可以取到两个单值的全纯分支 h_1 和 h_2, 它们满足 $h_1(z)^2 = h_2(z)^2 = z - b$. 先说明 h_k 在 Ω 上单叶, 这由下式可得

$$h_k(z_1) = h_k(z_2) \Longrightarrow h_k(z_1)^2 = h_k(z_2)^2 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

注意到 $\sqrt{z-b}$ 的两个单值支取值差一负号, 因此 $h_2 = -h_1$. 如果 $h_1(\Omega) \cap h_2(\Omega) \neq \emptyset$, 则有 $z_1, z_2 \in \Omega$, 使 $h_1(z_1) = h_2(z_2) = -h_1(z_2)$, 平方得 $z_1 = z_2$. 由此可得 $h_1(z_1) = 0$, 这矛盾于 h_1 不取零值.

以上说明 $h_1(\Omega) \cap h_2(\Omega) = \emptyset$.

取 $w_0 \in h_2(\Omega)$, $\delta > 0$ 使 $D(w_0, \delta) \subset h_2(\Omega)$. 令

$$S(z) = \frac{\delta}{h_1(z) - w_0},$$

显然 S 单叶, $|S(z)| < 1$. 由此得 $S(\Omega)$ 是一个有界区域.

至此, Riemann 映射定理证完. □

29.3 证明的注记

下面补充证明中的一些理解. 记由 Riemann 映射定理给出的双全纯映射为 $f : (\Omega, a) \to (\mathbb{D}, 0)$, $f'(a) > 0$.

(1). 证明中构造了极值问题, 蕴含对任意单叶函数 $g : \Omega \to \mathbb{D}$ 满足 $g'(a) > 0$, 都有 $g'(a) \leq f'(a)$. 事实上, 此极值性质对所有全纯映射都成立:

对任意全纯映射 $g : \Omega \to \mathbb{D}$, 成立 $|g'(a)| \leq f'(a)$. 等号成立当且仅当 $g = e^{i\theta} f$.

证明: 易知 $h = g \circ f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, 由 Schwarz-Pick 定理,

$$|h'(0)| \leq 1 - |h(0)|^2 \leq 1.$$

由 $h'(0) = g'(f^{-1}(0))(f^{-1})'(0) = g'(a)/f'(a)$ 可知 $|g'(a)| \leq f'(a)$. 等号成立充要条件是 $h(z) = e^{i\theta} z$, 即 $g(z) = e^{i\theta} f(z)$.

顺便一提, 证明中不取全纯函数族

$$\mathcal{F} = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{D} \text{ 全纯}, \ f'(a) > 0 \Big\}$$

的主要原因是, 无法获取极值映射的更多信息. 而把 $\mathcal{F}$ 取成单叶函数族的好处是, 可利用 Hurwitz 定理得知极限映射的单叶性.

(2). 在证明 f 是满射时, 用到了开方映射. 这一方法最早由 Koebe 提出. 一个自然的问题是: 开 $m \geq 2$ 次方映射是否也可行? 下面说明, 的确如此.

此时, ϕ, ψ 相应地记为 ϕ_m, ψ_m:

$$\phi_m(\zeta) = \sqrt[m]{\zeta},\ \phi_m(-c) = \sqrt[m]{-c},\ \phi_m'(-c) = \frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{-c}}{-c}.$$

$$\psi_m(\xi) = e^{i\theta}\frac{\xi - \sqrt[m]{-c}}{1 - \overline{\sqrt[m]{-c}}\xi},\ \psi_m'(-c) = e^{i\theta}\frac{1 - |\sqrt[m]{-c}|^2}{(1 - \overline{\sqrt[m]{-c}}\xi)^2}\bigg|_{\sqrt[m]{-c}} = \frac{e^{i\theta}}{1 - |c|^{2/m}}.$$

这里 $e^{i\theta}$ 待定.

考虑映射

$$h_m = \psi_m \circ \phi_m \circ S : f(\Omega) \to \mathbb{D}.$$

易验证 h_m 单叶, $h_m(0) = 0$. 常数 $e^{i\theta}$ 的选取使 $h_m'(a) > 0$. 易知:

$$\begin{aligned} h_m'(a) &= S'(0)\phi_m'(-c)\psi_m'(\sqrt[m]{-c}) \\ &= (1 - |c|^2)\frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{-c}}{-c}\frac{e^{i\theta}}{1 - |c|^{2/m}} \\ &= \frac{1 + |c|^{2/m} + \cdots + |c|^{(2m-2)/m}}{m|c|^{1-1/m}} \\ &> \frac{m\sqrt[m]{1 \cdot |c|^{2/m} \cdots |c|^{(2m-2)/m}}}{m|c|^{1-1/m}} = 1. \end{aligned}$$

上式最后一步，用了算术 -几何平均不等式. 这样, 单叶函数 $g_m = h_m \circ f \in \mathcal{F}$, 满足 $g_m'(a) > f'(a)$.

这说明, 证明满射时, 取开 m-次方映射总是可行的. 为计算方便, 通常取 $m = 2$.

以上证明亦可采用免于计算的方法. 映射 $h_m = \psi_m \circ \phi_m \circ S : f(\Omega) \to \mathbb{D}$ 的逆映射可以延拓成 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 $H_m(z) = S^{-1}(\psi_m^{-1}(z)^m)$, 满足 $H_m(0) = 0$. 对 H_m 应用 Schwarz 引理得 $H'(0) < 1$. 因此 $g_m'(a) = h_m'(0)f'(a) = f'(a)/H_m'(0) > f'(a)$.

(3). 给定双全纯映射 $f : \Omega \to \mathbb{D}$, 一个自然而基本的问题是: f 在满足什么条件时可延拓为从 $\overline{\Omega}$ 到 $\overline{\mathbb{D}}$ 的同胚? (意即存在同胚 $F : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$, 满足 $F|_\Omega = f$.)

1913 年, Carathéodory 与 Osgood-Taylor 独立地解决了这个问题:

定理 29.2. (Carathéodory-Osgood-Taylor, 1913) 假设区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 的边界是一条简单闭曲线, $f : \Omega \to \mathbb{D}$ 是双全纯映射, 则 f 可以延拓为同胚 $F : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$.

29.4 极值问题的一般形式

Riemann 映射定理证明的切入点是导数模长的极值问题, 如将单连通域 Ω 换成一般平面区域, 情况又如何? 1945 年, Ahlfors 证明了一般情形下极值映射的存在唯一性.

定理 29.3.(Ahlfors, 1945) 假设 Ω 是平面区域, 定义函数族

$$\mathcal{F} = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{D} \text{ 全纯} \right\}.$$

取定一点 $p \in \Omega$. 假设 $\mathcal{F}$ 中存在非常值函数, 则存在唯一的全纯映射 $f \in \mathcal{F}$ 满足极值性质[a]

$$f'(p) = \sup_{g \in \mathcal{F}} |g'(p)|.$$

[a] 极值映射 f 称为 Ahlfors 映射, 它满足 $f(p) = 0$.

在定理中, "$\mathcal{F}$ 中存在非常值函数" 这一假设, 蕴含 Ω 不可能为有限穿孔平面 $\mathbb{C} - \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$. 事实上, 由 Riemann 可去奇点定理, 任意全纯函数 $f : \mathbb{C} - \{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \to \mathbb{D}$ 都可延拓为全纯函数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, 由 Liouville 定理知 f 必为常数. 同理可证, Ω 不能为闭的可数集的余集.

证明: 极值映射的存在性由正规族理论保证.

任何极值映射 f 必然满足 $f(p) = 0$. 如不然, 可构造函数

$$F(z) = \frac{f(z) - f(p)}{1 - \overline{f(p)} f(z)}.$$

显然 $F \in \mathcal{F}$, 且满足

$$F'(p) = \frac{f'(p)}{1 - |f(p)|^2} > f'(p).$$

这矛盾于 f 的极值性.

假设有两个极值映射 f_1, f_2, 令

$$g = \frac{f_1 + f_2}{2},\ h = \frac{f_1 - f_2}{2}.$$

则有 $f_1 = g + h, f_2 = g - h$. 我们的最终目标是证明 $h = 0$. 首先, 由等式

$$2(|g|^2 + |h|^2) = |g + h|^2 + |g - h|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 < 2$$

可知 $|g|^2 + |h|^2 < 1$. 由此可得

$$|h|^2 < (1 + |g|)(1 - |g|) < 2(1 - |g|) \Longleftrightarrow \frac{|h|^2}{2} + |g| < 1.$$

记 $s(z) = h^2(z)/2$. 显然 $s : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯. 现在说明 $s(p) = 0$. 事实上, 如果 $s(p) \neq 0$, 考虑函数 $G = g + \lambda gs$, 其中 $|\lambda| \leq 1$ 是一个常数. 则 $|G| < |g| + |s| < 1$, 因此 $G \in \mathcal{F}$. 另一方面

$$G'(p) = g'(p)(1 + \lambda s(p))$$

通过适当选取 $\lambda = \overline{s(p)}/|s(p)|$, 则 $G'(p) = g'(p)(1+|s(p)|) > g'(p)$. 矛盾于 G 的极值性.

最后说明 $s \equiv 0$. 若不然, 则存在 $n \geq 2$ 使得 p 是 s 的 n 阶零点. 于是, 在 p 的邻域内, $s(z) = (z - p)^n \psi(z)$, 其中 $\psi(p) = s^{(n)}(p)/n! \neq 0$. 取 ϵ 充分小, 考虑函数

$$H(z) = g(z) + \epsilon \frac{s(z)}{(z - p)^{n-1}}, z \in \mathbb{D}.$$

显然当 $|z - p| \geq \sqrt[n-1]{|\epsilon|}$ 时, $|H(z)| < |g(z)| + |s(z)| < 1$. 由于当 $|z - p| < \sqrt[n-1]{|\epsilon|}$ 时, $H(z) = g(z) + \epsilon(z - p)\psi(z)$ 全纯, 由最大模原理知

$$|H(z)| \leq \max_{|\zeta - p| = \sqrt[n-1]{|\epsilon|}} |H(\zeta)| < 1,\ |z - p| < \sqrt[n-1]{|\epsilon|}.$$

因此有 $|H| < 1$. 计算知 $H'(p) = g'(p) + \epsilon\psi(p)$. 取 $\epsilon = |\epsilon|\overline{\psi(p)}/|\psi(p)|$, 可知 $H'(p) = g'(p) + |\epsilon||\psi(p)| > g(p)$, 与 g 的极值性矛盾.

29.5 习题

“Riemann 的父亲是个牧师, 家里特别的穷, 从小体弱多病, 也打算做牧师。有一个人（据说是 Rieamnn 的中学校长）发现他

在数学上比在神学上更有潜力，送给他一部 Legendre（勒让德）的数论书。Legendre 是一个伟大的法国数学家，他的书十分的晦涩难懂。六天之后，Riemann 就找到那个人把这本 859 页的名著还了，说:“这本书的确十分的精彩，我已经看懂了。”这个时候 Riemann 只有 14 岁。

Riemann 在 19 岁的时候去 Gottingen(哥廷根) 读神学, 平时也会听一些数学的课程。他比较喜欢泡在图书馆里。一次，他在那里找到了 Cauchy 的分析的著作，如获至宝，读完之后，便坦然的决定放弃神学，从此开始读数学了。”

—-ukim, Heroes in My Heart

1. (极值问题) 记 $\mathcal{F}$ 为所有全纯函数 $g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 的全体, $a\in\mathbb{D}$. 令 $v=\sup_{g\in\mathcal{F}}|g'(a)|$.

(1). 求 v 的值.

(2). 满足 $|f'(a)|=v$ 的 $f\in\mathcal{F}$ 具有什么样的形式?

(3). 是否存在 $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 满足 $|f'(a)|<v$?

2. (不动点的性质) 假设 $D\neq\mathbb{C}$ 为平面上的单连通区域, $a\in D$. 假设 $f:D\to D$ 全纯, 满足 $f(a)=a$. 证明 $|f'(a)|\leq 1$. 等号成立的充要条件是什么?

3. (Dirichlet 积分的极值) 假设 Ω 为平面有界单连通域, 记 $\mathcal{H}$ 为 C^1(一阶连续可微, 即偏导数连续) 同胚 $\psi:\mathbb{D}\to\Omega$ 全体. 对任意 $\psi=u+iv\in\mathcal{H}$, 定义 Dirichlet 积分

$$D(\psi)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}}|\nabla\psi|^2dxdy=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dxdy.$$

对任意 $\psi\in\mathcal{H}$, 证明

$$D(\psi)=\mathrm{area}(\Omega)+2\int_{\mathbb{D}}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\right|^2dxdy.$$

当 $D(\psi)$ 达到最小值时, ψ 有什么性质?

4. (双全纯映射的性质) 假设 $D\neq\mathbb{C}$ 为平面上的单连通区域, 关于实轴对称, $a\in D\cap\mathbb{R}$. 假设 $f:D\to\mathbb{D}$ 双全纯, 满足 $f(a)\in\mathbb{R}, f'(a)>0$. 证明 $f(D\cap\mathbb{R})=(-1,1)$.

5. (映射半径的性质) 假设 $D\neq\mathbb{C}$ 为平面上的有界单连通区域, $f:D\to\mathbb{D}$ 双全纯, 满足 $f(a)=0$, $f'(a)>0$. 称 $\frac{1}{f'(a)}$ 为 D 在 a 处的映射半径, 记为 $R_D(a)$.

(1). 证明

$$d(a,\partial D)\leq R_D(a)\leq\max_{z\in\partial D}|z-a|.$$

(2). 假设 $F: D \to \mathbb{C}$ 全纯, $F(a)=0$, $F'(a)=1$. 证明

$$\int_D |F'(z)|^2 dxdy \geq \pi R_D^2(a).$$

等号成立当且仅当 F 是从 D 到 $D(0, R_D(a))$ 的双全纯映射.