

2020-2021 春夏学期数值代数期末考试回忆卷

2021 年 7 月 6 日

1. 设 $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$

(1) 求 $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty.$

(2) 用追赶法求解 $Ax = b.$

2. 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 11 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$

(1) 求矩阵 A 的 LU 分解;

(2) 求矩阵 A 的列主元 LU 分解, 写出 $P, L, U;$

(3) 求解方程 $Ax = b;$

(4) 说明为什么要在高斯消去法中选主元, 并举出没有 LU 分解的非奇异矩阵的例.

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & * & * \\ 0 & * & * \\ -1 & * & * \end{bmatrix}$ (* 处我不记得了)

用 Householder 变换将 A 相似变换为上 Hessenberg 矩阵 $B.$

4. 设 A 为 n 阶对称正定矩阵, p_1, p_2, \dots, p_n 为一列共轭列向量, 即满足 $p_i^T A p_j = 0 (i \neq j).$ 试证明:

(1) p_1, p_2, \dots, p_n 线性无关;

(2) $A^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{p_k p_k^T}{p_k^T A p_k}.$

5. 考虑线性方程组 $Ax = b,$ 这里

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) a 为何值时, A 是正定的?

(2) a 为何值时, Jacobi 迭代法收敛?

(3) a 为何值时, G-S 迭代法收敛?