第二十章 Schwarz 引理

20.1 Schwarz 引理

定理 20.1. (Schwarz,1870) 若 $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, $f(0)=0$, 则

$$|f(z)| \le |z|, \ \forall z \in \mathbb{D} \text{ 并且 } |f'(0)| \le 1.$$

如果 $|f'(0)| = 1$ 或者对某 $z_0 \neq 0$ 成立 $|f(z_0)| = |z_0|$, 则 $f(z) = e^{i\theta} z$。

证明: 定义

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

显然 g 在 $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ 上全纯, 在 $z=0$ 处连续。由 Riemann 可去奇点定理知, g 在 $\mathbb{D}$ 上全纯。任意取定 $z \in \mathbb{D}$, 取 $r \in (|z|, 1)$, 在圆盘 $D(0,r)$ 上对 g 应用最大模原理得

$$|g(z)| \le \|g\|_{\partial D(0,r)} = \|f\|_{\partial D(0,r)}/r \le 1/r.$$

令 $r \to 1^-$ 可得 $|g(z)| \le 1$, 即 $|f(z)| \le |z|$。特别地, $|g(0)| = |f'(0)| \le 1$。

如果 $|f'(0)| = 1$, 或对某 $z_0 \neq 0$, 成立 $|f(z_0)| = |z_0|$, 则 $|g(0)| = 1$ 或 $|g(z_0)| = 1$。这说明 g 在 $\mathbb{D}$ 内取得最大模。由最大模原理, $g \equiv e^{i\theta}$, 即 $f(z) = e^{i\theta} z$。 □

以上证明是法国数学家 Carathéodory 在 1912 年给出的, 后来的教材普遍采用。Schwarz 引理简洁漂亮, 内涵丰富, 从不同角度理解会有不同的收获。下面将给出三个不同角度的解读。

20.2 三种观点的理解

观点 1: 函数迭代与不动点的导数

Schwarz 引理蕴含了这样的事实: 假设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯, 有一个不动点 $z_0=0$, 则在不动点的导数模长不超过 1。这个事实可以推广到平面的任意有界区域:

假设 Ω 是平面有界区域, $f:\Omega\to\Omega$ 全纯, $z_0\in\Omega$. 如果 $f(z_0)=z_0$, 则成立 $|f'(z_0)|\le 1$。

此处为方便阅读, 补出细节。也可参考“迭代的美好”一节。

证明: 由假设, 存在 $R>\rho>0$ 使得 $D(z_0,\rho)\subset\Omega\subset D(0,R)$。对任意 $n\ge 1$, $f^{\circ n}:\Omega\to\Omega$ 全纯, 且 $f^{\circ n}(z_0)=z_0$。

对 $f^{\circ n}:D(z_0,\rho)\to\Omega$ 应用 Cauchy 不等式，得

$$|(f^{\circ n})'(z_0)|=|f'(z_0)|^n\le\frac{\|f^{\circ n}\|_\Omega}{\rho}\le\frac{R}{\rho}\Longleftrightarrow|f'(z_0)|\le\left[\frac{R}{\rho}\right]^{1/n}.$$

由 n 的任意性, 得 $|f'(z_0)|\le 1$。 □

注: 有界区域的假设实为技术性的。结论可推广的一般的平面区域, 只需 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 至少包含 2 点即可。证明需用曲面分类的单值化定理, 此处略去。

观点 2: 极值问题与幂级数形式的 Cauchy 不等式

若将 Schwarz 引理条件弱化, 仍能得到同样的结论:

若 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯, 则 $|f'(0)|\le 1$。等号成立的充要条件是 $f(z)=e^{i\theta}z$。

证明: 定义

$$S(w)=\frac{w-f(0)}{1-\overline{f(0)}w}.$$

显然 S 是单位圆盘到自身的全纯映射, $S(f(0))=0$。复合映射 $h=S\circ f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯, $h(0)=0$。对 h 应用 Schwarz 引理,

$$|h'(0)|=\frac{|f'(0)|}{1-|f(0)|^2}\le 1\Longleftrightarrow|f'(0)|\le 1-|f(0)|^2.$$

由此可知 $|f'(0)|\le 1$。如果 $|f'(0)|=1$, 则必然 $f(0)=0$。此时, 由 Schwarz 引理的取等条件知, $f(z)=e^{i\theta}z$。 □

以上论证, 关注的是导数模长的极值。这自然地引出如下问题: 任给全纯函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, 在原点的 n 阶导数模长 $|f^{(n)}(0)|$ 最大值是多少? 如达到最大值, 极值映射具有什么形式?

利用幂级数形式的 Cauchy 不等式, 可完整回答这个问题:

命题 20.1. 假设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, 在原点处级数展式:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

则成立

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \le 1.$$

由此知, $|a_n| \le 1 (\Longleftrightarrow |f^{(n)}(0)| \le n!)$, $\forall n \ge 1$, 进一步

$$|a_{n_0}| = 1 \Longleftrightarrow f(z) = e^{i\theta} z^{n_0}.$$

详见“幂级数的 Cauchy 不等式”一节。

观点 3: 辐角原理推导 Schwarz 引理

一个令人意外的事实是：利用辐角原理也可以证明 Schwarz 引理。这个证明具有启发性，从中可见辐角原理的应用潜力。

基于辐角原理的证明: 假设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, $f(0) = 0$。下面将利用辐角原理和反证法证明: (a). $|f(z)| \le |z|$, $\forall z \in \mathbb{D}$; (b). 等号对某点 $z_0 \ne 0$ 成立当且仅当 $f(z) = e^{i\theta} z$。

(a). (反证法) 若不然, 则存在 $z_0 \ne 0$, 使 $|f(z_0)| > |z_0|$。定义

$$g(z) = z_0 f(z)/f(z_0), \ z \in \mathbb{D}.$$

显然, g 至少有两个不动点 $0, z_0$, 并且满足 $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}_{r_0}$, 其中 $r_0 = |z_0|/|f(z_0)|$, $\mathbb{D}_r = \{|z| < r\}$。取 $\rho \in (r_0, 1)$, 则 g 在 $\overline{\mathbb{D}_\rho}$ 上全纯, 满足 $g(\overline{\mathbb{D}_\rho}) \subset \mathbb{D}_\rho$。

现考虑一族函数

$$h_t(z) = z - t g(z), \ z \in \mathbb{D}_\rho, t \in [0, 1].$$

易验证, 对任意 $t \in [0, 1]$, h_t 在 $\partial \mathbb{D}_\rho$ 上不取零值。利用辐角原理

$$Z(h_t, \mathbb{D}_\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_\rho} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz, \forall t \in [0, 1].$$

上式右端关于 t 连续，左端取整数值，因此为常数。特别地，

$$Z(\mathrm{id}, \mathbb{D}_\rho) = Z(h_0, \mathbb{D}_\rho) = Z(h_1, \mathbb{D}_\rho) = Z(\mathrm{id} - g, \mathbb{D}_\rho).$$

显然 $\mathrm{id} - g$ 在 $\mathbb{D}_\rho$ 至少有两个零点 $0, z_0$, 因此 $Z(\mathrm{id} - g, \mathbb{D}_\rho) \ge 2$。另一方面，$Z(\mathrm{id}, \mathbb{D}_\rho) = 1$。这与上面等式矛盾。

(b). 亦用反证法。如果 $|f(z_0)| = |z_0|$ 对某 $z_0 \neq 0$ 成立, 通过将 f 换成 $e^{i\theta}f$, 不妨假设 $f(z_0) = z_0$。我们的目标是证明 $f = \mathrm{id}$。若不然, 则 $0, z_0$ 为 $F(z) = z - f(z)$ 的孤立零点。选取很小的 $\epsilon > 0$, 使 $\delta = \min_{z\in\partial D_\epsilon} |F(z)| > 0$, 其中 $D_\epsilon = D(0,\epsilon) \cup D(z_0,\epsilon)$。当 $r \in (1-\delta, 1)$ 时, 函数 $F_r(z) = z - rf(z)$ 满足

$$|F_r(z) - F(z)| = (1-r)|f(z)| \leq 1 - r < \delta \leq |F(z)|,\ z \in \partial D_\epsilon.$$

由 Rouché 定理可知, F_r 和 F 在 D_ϵ 中零点个数一样多, 至少为两个。取定 $r \in (1-\delta, 1)$, 定义

$$H_t(z) = z - trf(z),\ z \in \overline{\mathbb{D}_\rho}, t \in [0,1].$$

这里 $\rho < 1$ 满足 $D_\epsilon \subset \mathbb{D}_\rho$。利用前面已证的 $|f(z)| \leq |z|$, 可知 H_t 在 $\partial\mathbb{D}_\rho$ 上无零点。仍由辐角原理,

$$Z(H_t, \mathbb{D}_\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_\rho} \frac{H_t'(z)}{H_t(z)} dz, \forall t \in [0,1].$$

上式右端关于 t 连续，左端取整数值，因此为常数。特别地，

$$Z(\mathrm{id}, \mathbb{D}_\rho) = Z(H_0, \mathbb{D}_\rho) = Z(H_1, \mathbb{D}_\rho) = Z(F_r, \mathbb{D}_\rho).$$

如前所证, F_r 在 $\mathbb{D}_\rho$ 中至少有两个零点, 因此 $Z(F_r, \mathbb{D}_\rho) \geq 2$。另一方面，$Z(\mathrm{id}, \mathbb{D}_\rho) = 1$。这与上面等式矛盾。

注: 假设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, $f(0) = 0$, 结论 $|f(z)| \leq |z|$ 已蕴含 $|f'(0)| \leq 1$。如果 $|f'(0)| = 1$, 通过旋转不妨假设 $f'(0) = 1$, 此时如果 f 不是恒等映射, 则 0 是 $\mathrm{id} - f$ 的孤立零点, 重数至少是 2。选取 r 足够靠近 1, 则由 Rouché 定理可知, $rf(z) - z$ 也至少有两个零点, 即 $f_r = rf$ 至少有两个不动点。

取 $\rho \in (r, 1)$, 构造 $h_t(z) = z - tf_r(z),\ z \in \mathbb{D}_\rho, t \in [0,1]$。类似上面的证明可知

$$Z(h_t, \mathbb{D}_\rho) = Z(h_1, \mathbb{D}_\rho) \geq 2,\ \forall t \in [0,1].$$

这矛盾于 $Z(h_0, \mathbb{D}_\rho) = 1$。

20.3 Schwarz 引理的应用

本节介绍 Schwarz 引理的三个应用: 刻画单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的全纯自同构群, 证明 Liouville 定理与 Study 定理。

单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的全纯自同构群定义为 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) := \left\{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}\text{ 双全纯}\right\}$[1]。在分式线性变换一节曾指出，形如

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ \ \theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}$$

的变换给出了 $\mathbb{D}$ 的一类全纯自同构。下面证明，这一类即是全部。

定理 20.2. 单位圆盘的全纯自同构群

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ \theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}\right\}.$$

证明： 任取 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。如果 $f(0) = 0$，则 $f^{-1}(0) = 0$，对 f, f^{-1} 应用 Schwarz 引理得

$$|f(z)| \le |z|,\ |f^{-1}(w)| \le |w| \Longrightarrow |f(z)| = |z|,\ \forall z \in \mathbb{D}.$$

由 Schwarz 引理的取等条件得 $f(z) = e^{i\theta}z$。

一般情况：假设 $f(a) = 0$。定义

$$g(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

显然 $g(a) = 0$。于是 $h = f \circ g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，且 $h(0) = 0$。由上面讨论知 $f \circ g^{-1}(w) = e^{i\theta}w$，即

$$f(z) = e^{i\theta}g(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

例题 20.1. Schwarz 引理 $\Longrightarrow$Liouville 定理。

证明： 假设 f 是有界整函数，下面用 Schwarz 引理证明 f 为常数。通过将 f 换成 $f - f(0)$，不妨假设 $f(0) = 0$。假设 $\|f\|_{\mathbb{C}} < M$。对任意 $R > 0$，$f : D(0,R) \to D(0,M)$ 全纯。

定义全纯函数 $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为 $F(w) = f(Rw)/M$。显然 $F(0) = 0$。利用 Schwarz 引理，

$$|F(w)| \le |w|, \forall w \in \mathbb{D} \Longleftrightarrow |f(z)| \le \frac{M}{R}|z|,\ \forall z \in D(0,R).$$

任意取定 $z \in \mathbb{C}$，上式右端对任意 $R > |z|$ 都成立。令 $R \to +\infty$，可得 $f(z) = 0$。由 z 的任意性，$f \equiv 0$。

[1]区域之间的双全纯映射 $f : D \to \Omega$，指全纯双射。此时“逆映射全纯”这一性质自然满足。这是因为，由映射性质可知，全纯单射意味着导数处处非零。由反函数定理可知逆映射全纯。

注: 上面证明也适用于此情形: $\|f\|_{D(0,R)} = o(R)$.

平面集合 E 称为凸集, 如果对任意 $a, b \in E$, 线段 $[a, b] \subset E$。1913 年德国数学家 Study 证明了一条有趣的定理：

定理 20.3. (Study, 1913) 假设 $f : \mathbb{D} \to \Omega$ 双全纯。如果 Ω 是凸集, 则对任意 $r \in (0, 1)$, 像集合 $\Omega_r = f(\mathbb{D}_r)$ 也是凸集。

证明: 等价于证明, 对任意 $a, b \in \mathbb{D}_r$, 线段 $[f(a), f(b)] \subset \Omega_r$。为此, 不妨假设 $|a| \leq |b| < r$。对任意 $t \in [0, 1]$, 令

$$g_t(z) = (1-t)f(za/b) + tf(z), \ z \in \mathbb{D}.$$

它满足 $g_t(0) = f(0)$。由 Ω 是凸集知, $g_t(\mathbb{D}) \subset \Omega$。定义

$$h = f^{-1} \circ g_t : \mathbb{D} \to \mathbb{D}.$$

显然 $h(0) = 0$。由 Schwarz 引理知 $|h(z)| \leq |z|$。因此, 当 $|z| < r$ 时, $f^{-1} \circ g_t(z) \in \mathbb{D}_r$, 即 $g_t(z) \in f(\mathbb{D}_r) = \Omega_r$。特别地, $g_t(b) = (1-t)f(a) + tf(b) \in \Omega_r$。由 t 的任意性得, $[f(a), f(b)] \subset \Omega_r$。 □

20.4 Schwarz-Pick 定理

本节介绍 Pick 对 Schwarz 引理的理解。这一理解虽表现为分析不等式, 却蕴含几何思想。在后面介绍“双曲几何”时, 我们将发现, 这个理解本质说明全纯映射不增加 $\mathbb{D}$ 的双曲距离。

定理 20.4.(Schwarz-Pick) 假设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, 则

(1). 对任意 $z, w \in \mathbb{D}$, 成立

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right|.$$

等号对某对 $z \neq w$ 成立, 当且仅当 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。

(2). 对任意 $z \in \mathbb{D}$, 成立

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

等号对某 $z \in \mathbb{D}$ 成立, 当且仅当 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。

证明: (1). 不妨将 $w \in \mathbb{D}$ 固定，将 z 视为变量。取 $S, T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, 定义如下

$$S(z) = \frac{z-w}{1-\overline{w}z},\ T(\zeta) = \frac{\zeta - f(w)}{1-\overline{f(w)}\zeta}.$$

显然 $S(w) = 0, T(f(w)) = 0$。复合映射 $h = T \circ f \circ S^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, 满足 $h(0) = 0$。利用 Schwarz 引理,

$$|h(\xi)| = |T \circ f \circ S^{-1}(\xi)| \leq |\xi| \Longleftrightarrow |T(f(z))| \leq |S(z)|,$$

即为所证。

如等号对某对 $z \neq w$ 成立, 则 $|h(S(z))| = |T(f(z))| = |S(z)|$. 由 Schwarz 引理的取等条件, $h(\xi) = e^{i\theta}\xi$, 于是 $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。因此 $f = T^{-1} \circ h \circ S \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。

(2). 将 (1) 中不等式变形

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \leq \left|\frac{1-\overline{f(w)}f(z)}{1-\overline{w}z}\right|.$$

在上式中令 $w \to z$, 得

$$|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

如上式对某 z_0 成立，定义 $h(\xi) = T \circ f \circ S^{-1}(\xi), \xi \in \mathbb{D}$, 其中

$$S(z) = \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z},\ T(\zeta) = \frac{\zeta - f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}\zeta}.$$

显然 $S(z_0) = 0 = T(f(z_0))$, 因此 $h(0) = 0$。注意到

$$h'(0) = T'(f(z_0))f'(z_0)/S'(z_0) = \frac{1}{1-|f(z_0)|^2} \cdot f'(z_0) \cdot (1-|z_0|^2).$$

在 z_0 处等号成立等价于 $|h'(0)| = 1$。利用 Schwarz 引理的取等条件知, h 是旋转变换。因此 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。 □

20.5 边界 Schwarz 引理

定理 20.5. (Osserman, 2000) 假设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, 满足 $f(0) = 0$。如果 f 可连续至边界点 $b \in \partial\mathbb{D}$, 并且 $|f(b)| = 1$,

$f'(b)$ 存在, 则成立

$$|f'(b)| \geq \frac{2}{1+|f'(0)|}.$$

特别地, $|f'(b)| \geq 1$, 此处等号成立当且仅当 $f(z) = e^{i\theta}z$。

证明: 首先我们证明 Schwarz 引理的强形式:

$$|f(z)| \leq |z|\frac{|z|+|f'(0)|}{1+|f'(0)||z|}.$$

记 $g(z) = f(z)/z$。由 Schwarz 引理, 要么 f 是旋转, 要么对任意 $z \in \mathbb{D}$, $|g(z)| < 1$。若是前者, 结论显然成立。我们只讨论后一种情况。通过复合旋转, 不妨假设 $g(0) = f'(0) = a \in [0,1)$。此时, 映射 $G(z) = (z+a)/(1+az)$ 满足 $G(0) = a = g(0)$。对 $G^{-1} \circ g$ 应用 Schwarz 引理可知,

$$\begin{aligned} |G^{-1} \circ g(z)| \leq |z| \quad &\Longleftrightarrow \quad G^{-1} \circ g(z) \in \overline{D(0,|z|)} \\ &\Longleftrightarrow \quad g(z) \in G(\overline{D(0,|z|)}). \end{aligned}$$

另一方面, 注意到 G 将圆盘 $\mathbb{D}_r$ 映为一条直径为闭区间

$$\left[\frac{a-r}{1-ar}, \frac{a+r}{1+ar}\right]$$

的圆盘。因此,

$$|g(z)| \leq \frac{a+|z|}{1+a|z|} \Longrightarrow |f(z)| \leq |z|\frac{|z|+|f'(0)|}{1+|f'(0)||z|}.$$

现假设 f 可连续延拓到 b, 记 $c = f(b)$, 于是

$$\left|\frac{f(z)-c}{|z|-|b|}\right| \geq \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \geq \frac{1+|z|}{1+|f'(0)||z|}.$$

由于导数 $f'(b)$ 存在, 上式两边令 z 沿径向趋于 b, 得到

$$|f'(b)| = \lim_{z\to b}\left|\frac{f(z)-c}{|z|-|b|}\right| \geq \frac{2}{1+|f'(0)|}.$$

注: (边界 Schwarz 引理的一般形式) 假设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, 可以连续至边界点 $b \in \partial\mathbb{D}$, 并且 $|f(b)| = 1$, $f'(b)$ 存在。假设 f 在原点幂级数展开

$$f(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k,$$

其中 n 为某个自然数, 则成立

$$|f'(b)| \geq n + \frac{1-|a_n|}{1+|a_n|} = n + \frac{n! - |f^{(n)}(0)|}{n! + |f^{(n)}(0)|}.$$

这说明 $|f'(b)| \geq n$, $|f'(b)| = n$ 当且仅当 $f(z) = e^{i\theta}z^n$。

20.6　习题

“剃刀锋利，越之不易；智者有云，得渡人稀。”

——《迦托・奥义书》

1. (Schwarz 引理的应用) 设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯, 非恒等映射。

(1). 证明: f 至多有一个不动点;

(2). 举例说明 f 可能无不动点。

2. (Schwarz 引理的应用) 假设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯, 满足 $f(0)=a, f(a)=0$, 其中 $a\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$。证明 f 的表达式为

$$f(z)=\frac{a-z}{1-\bar{a}z}.$$

3. (Schwarz 引理的应用) 假设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯, 取定 $a\in\mathbb{D}$。求 $|f'(a)|$ 的最大值，并写出极值映射的一般形式。

4. (Schwarz 引理的应用) 假设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯。

(1). 证明: $|f(z)-f(-z)|\le 2|z|,\ z\in\mathbb{D}$。

(2). 上式对某 $z_0\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 成立等号的充要条件是什么?

5. (Schwarz 引理的更精确形式) 假设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯, 证明

$$|f(z)|\le\frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|},\forall z\in\mathbb{D}.$$

6. (Schwarz 引理的应用) 假设 $\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 全纯, $f(0)=-1$, 并且满足 $|1+f(z)|<1+|f(z)|$, $\forall z\in\mathbb{D}$。求 $|f'(0)|$ 的最大值。

(提示：注意到区域 $\Omega:=\{w\in\mathbb{C};|1+w|<1+|w|\}=\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$, 求出双全纯映射 $h:\Omega\to\mathbb{D}$, 满足 $h(-1)=0$。)

7. (Schwarz 引理的应用) 设 f 在 $\mathbb{D}$ 上全纯, $|\mathrm{Re}f(z)|<1$, $f(0)=0$。证明

$$|f'(0)|\le\frac{4}{\pi}.$$

等号成立的充要条件是什么?

8. (上半平面的 Schwarz-Pick 定理) 记 $\mathbb{H}=\{z=x+iy;y>0\}$ 为上半平面, $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 全纯，对任意 $z,w\in\mathbb{H}$, 证明

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{f(z)-\overline{f(w)}}\right|\le\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|.$$

由此说明

$$|f'(w)|\le\frac{\mathrm{Im}(f(w))}{\mathrm{Im}(w)}.$$