1 第六次作业

问题 1. 如果拓扑空间X在每点都有可数基，则称X满足第一可数公理。证明 $\mathbb{R}_l$和有序矩形均满足第一可数公理。

问题 2. 举例说明存在集合X及其上的两个拓扑$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$满足$\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$，且 $(X, \mathcal{T}_1)$与$(X, \mathcal{T}_2)$同胚.

问题 3. 称全序集X, Y之间的f是保序的，如果当$x_1 < x_2$时，$f(x_1) < f(x_2)$. 证明：全序集之间的保序双射是同胚.

问题 4. 设$(X, d_X), (Y, d_Y)$都是度量空间，f是X到Y的映射。如果对 X中x_1, x_2，都有$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$. 证明 f 是嵌入。

问题 5. $A \subseteq X, f : A \to Y$是连续映射，$Y$ 是*Hausdorff* 空间。假设存在两个连续映射g_i : $\bar{A} \to Y (i = 1, 2)$满足$(g_i)_{|A} = f$，证明$g_1 = g_2$. *(*先证明 Y 是*Hausdorff* 空间等价于 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in Y\}$ 是 $Y \times Y$ 中的闭集*)*

问题 6. 给定拓扑空间X，若$X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$，则称$\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$是覆盖. 给定覆盖$\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$，如果对$X$中任意点$x$，存在开邻域$U$，使得$U$仅和有限个$A_\alpha$的交非空，则称该覆盖是局部有限的。设$\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$是局部有限的覆盖且$A_\alpha$均为闭集，映射$f : X \to Y$在每个$A_\alpha$上的限制都是连续的，求证$f$是连续的.

问题 7. 赋予$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$字典序拓扑，证明该拓扑是可度量化的。