第十五章　多值函数

多值函数的概念源于复分析，它有别于通常意义下的“函数”，将其视为映射是更为恰当的做法。下面给出定义与例子。我们用 2^X 表示集合 X 的所有子集的全体。

称 f 是平面集合 Ω 上的一个多值函数，指的是映射 $f:\Omega\to 2^{\mathbb{C}}\setminus\{\emptyset\}$。即对任意 $z\in\Omega$, $f(z)$ 为平面的一个非空子集。

多值函数的例子：

- 给定平面的两个非空子集 X,Y, 满射 $f:X\to Y$ 诱导了 Y 上的多值函数 $g:Y\to 2^X$, 定义为 $g(y)=f^{-1}(y)$。
- 辐角 Arg 是 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的一个多值函数：对任意 $z=re^{i\theta}$, $\mathrm{Arg}(z)=\theta+2\pi\mathbb{Z}$。
- 开方 $\sqrt{\cdot}$ 定义了平面 $\mathbb{C}$ 上的一个多值函数：对任意 $z\in\mathbb{C}$,

$$\sqrt{z}=\{w\in\mathbb{C};w^2=z\}.$$

称 $g:\Omega\to\mathbb{C}$ 是 Ω 上多值函数 f 的单指分支 (或者单值支)，如果对任意 $z\in\Omega$, 指定唯一取值 $g(z)\in f(z)$。由定义可见, 单值支是通常意义下的函数。

本章介绍几类重要的多值函数：对数函数，辐角函数，幂函数。从复分析的观点看，先引入对数函数最为自然, 辐角函数和幂函数都可由对数函数诱导。

15.1　对数函数

对数函数可视为指数函数的“逆函数”。

任取 $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，它的对数 (logarithm) $\mathrm{Log}(z)$ 定义为满足方程 $e^w=z$ 的 w 的集合：

$$\mathrm{Log}(z)=\big\{w\in\mathbb{C};e^w=z\big\}.$$

记 $z=re^{i\theta}, w=u+iv\in \mathrm{Log}(z)$, 由方程 $e^{u+iv}=re^{i\theta}$ 可得 $u=\log r$, $v\in\theta+2k\mathbb{Z}$, 因此

$$\mathrm{Log}(z)=\log|z|+i(\theta+2\pi\mathbb{Z})=\log|z|+i\mathrm{Arg}(z),$$

这里, log 是通常意义的实对数函数。上式表明, $\mathrm{Log}(z)$ 是一个多值函数，它的多值性源于辐角函数 Arg 的多值性。

易见, 函数 $F:\Omega\to\mathbb{C}$ 是 $\mathrm{Log}(z)$ 在区域 Ω 上单值支，如果

$$F(z)\in\mathrm{Log}(z),\forall z\in\Omega \Longleftrightarrow e^{F(z)}=z,\ \forall z\in\Omega.$$

这说明 F 是指数函数 e^w 在像区域 Ω 上的反函数，因此亦全纯。

一个自然的问题是, “在什么样的区域 Ω 上 $\mathrm{Log}(z)$ 可以取到全纯单值分支?”, 此问题等价于“在什么样的像区域上指数函数可以取到反函数?”下面的定理给出了回答。

定理 15.1. 假设 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 是单连通区域, $0\notin\Omega$。取定 $z_0\in\Omega$, 指定其一个辐角为 θ_0。则存在唯一的全纯函数 $F:\Omega\to\mathbb{C}$, 满足

(1). $e^{F(z)}=z,\ \forall z\in\Omega$;

(2). $F(z_0)=\log|z_0|+i\theta_0$.

我们称 F 是对数函数 Log 满足 $F(z_0)=\log|z_0|+i\theta_0$ 的全纯单值分支。

证明： 基本想法: 如果 F 存在, 对 (1) 两边求导, $F'(z)e^{F(z)}=1$。这说明 $F'(z)=e^{-F(z)}=1/z$，即 F 为 $1/z$ 的原函数。

下面通过考虑 $1/z$ 原函数的存在性, 来构造 F。

假设条件 $0\notin\Omega$ 保证了 $1/z$ 是 Ω 上的全纯函数, Ω 的单连通性保证 $1/z$ 存在原函数。原函数可定义如下：

$$F(z)=\int_{\gamma_z}\frac{1}{\zeta}\,d\zeta+\log|z_0|+i\theta_0,$$

其中 γ_z 是连接 z_0 与 z 的一条分段光滑曲线 (积分不依赖于路径的选取)。显然 $F(z_0)=\log|z_0|+i\theta_0$。

下面说明 $e^{F(z)}=z$。事实上,

$$(e^{-F(z)}z)'=e^{-F(z)}-ze^{-F(z)}F'(z)=e^{-F(z)}(1-zF'(z))=0,$$

这说明 $e^{-F(z)}z$ 是常值函数。由 $e^{-F(z_0)}z_0=1$ 知 $e^{F(z)}\equiv z$。

最后说明 F 的唯一性。如果 G 也是一个满足要求的单值全纯分支，则 $e^{F(z)}\equiv e^{G(z)}$。这说明 $F(z)-G(z)\in 2\pi i\mathbb{Z}$。注意到

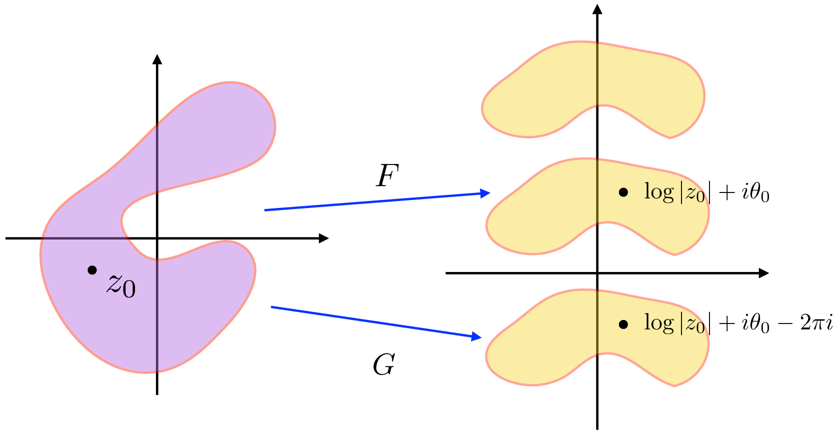


图 15.1: 对数函数的两个单值支

$F-G$ 连续，取值离散，因此必为常值函数。由 $(F-G)(z_0)=0$ 可知，$F\equiv G$。

注：

1. 如果 $0\in\Omega$, 结论不成立。因为 0 关于指数函数没有逆像。如果 $0\notin\Omega$, 但 Ω 非单连通，结论也可能成立。事实上, 只要 Ω 包含在一个更大且不含原点的单连通区域中即可。

2. 对任意两个不同的全纯单值分支 F,G, 存在 $k\in\mathbb{Z}$,

$$F-G\equiv 2k\pi i.$$

3. 在一些典型区域，如角域 $\{w\in\mathbb{C}\backslash\{0\};\arg w\in(\alpha,\beta)\}(\beta-\alpha<2\pi)$ 上，对数函数可取到全纯单值分支 F_k，将角域映为水平带域 $\{\alpha+2k\pi<\Im z<\beta+2k\pi\}=\mathbb{R}\times(\alpha+2k\pi,\beta+2k\pi)$。

对数函数的全纯单值分支 F 的虚部即为辐角函数 Arg 的一个单值连续 (实值，故不全纯) 分支。利用这个事实，得

推论 15.1. 假设 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 是单连通区域, $0\notin\Omega$。取定 $z_0\in\Omega$, 指定其一个辐角为 θ_0。存在唯一的连续的辐角函数 $\arg_\Omega:\Omega\to\mathbb{R}$, 满足 $\arg_\Omega(z_0)=\theta_0$。

称 $\arg_\Omega$ 是辐角函数 Arg 满足 $\arg_\Omega(z_0)=\theta_0$ 的一个连续的单值分支。

证明：由定理15.1可知，对数函数存在全纯单值分支 F, 满足 $F(z_0) = \log|z_0| + i\theta_0$。取 $\arg_\Omega(z) = \mathrm{Im}F(z)$ 即可。唯一性仍由“连续且取值离散的函数必为常数”这一事实可得。

15.2 幂函数

形如 $w = z^\mu$ 的函数称为幂函数, 这里 $\mu = a + ib$ 是一个复数。如果约定 $\mathrm{Log}(z^\mu) = \mu\mathrm{Log}(z)$, 幂函数的合理定义为:

$$\begin{aligned} z^\mu &= e^{\mathrm{Log}(z^\mu)} = e^{\mu\mathrm{Log}(z)} \\ &= e^{(a+ib)(\log|z|+i\mathrm{Arg}(z))} \\ &= e^{a\log|z|-b\mathrm{Arg}(z)}e^{i(b\log|z|+a\mathrm{Arg}(z))}. \end{aligned}$$

由此可见, 在一般情况下，z^μ 的模长与辐角都为多值函数。

为讨论方便，给出单叶性区域的概念。假设 f 是区域 Ω 上的全纯函数, 如果 D 是 Ω 的一个子区域，且 $f|_D$ 是单射，则称 D 是 f 的一个单叶性区域。“单叶”的概念源自复分析, 指全纯单射。

下面分情况讨论, 由简入繁, 循序渐进。

(1). $\mu = n$, n 是一个自然数。

此时, 幂函数 $w = z^n$ 在整个复平面上全纯。求导数得 $(z^n)' = nz^{n-1}$, 说明它在原点之外处处共形。

记 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^n e^{in\theta}$。由此知, 它将从原点出发的射线映为从原点出发的射线，将两条射线的夹角放大到 n 倍, 将圆周 $\{|z| = r\}$ 映为圆周 $\{|z| = r^n\}$。特别地，将角域

$$A_k = \left\{re^{i\theta}; 0 < r < \infty, \frac{2k\pi}{n} < \theta < \frac{2(k+1)\pi}{n}\right\},\ 0 \le k < n$$

映为 $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$。显然, 角域 A_k 是幂函数 $w = z^n$ 的单叶性区域。

(2). $\mu = 1/n$, n 是一个自然数。此时

$$z^{1/n} = e^{\mathrm{Log}(z)/n} = e^{(\log|z|+i\mathrm{Arg}(z))/n} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\mathrm{Arg}(z)/n}.$$

由此可见，给定 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \ne 0$, $z_0^{1/n}$ 有 n 个不同的取值：

$$\sqrt[n]{r_0}e^{i(\theta_0+2k\pi)/n},\ 0 \le k \le n-1.$$

$z^{1/n}$ 的多值性由辐角函数 $\mathrm{Arg}(z)$ 的多值性引起的。因此，如果能找到区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 使得 $\mathrm{Arg}(z)$ 能取到连续的单值分支，则

$z^{1/n}$ 可以取到全纯的单值分支。由上一节的讨论知, 在平面不含有原点的单连通区域 (如 $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$) 上, $\mathrm{Arg}(z)$ 能取到连续的单值函数, 从而 $z^{1/n}$ 可以取到全纯的单值分支。

$z^{1/n}$ 在 $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ 上可以取到 n 个单值的全纯分支

$$\psi_k(z)=\sqrt[n]{|z|}e^{i\arg_k(z)/n},\ 0\le k\le n-1,$$

这里 $\arg_k:\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是连续的辐角函数，满足 $\arg_k(-1)=(2k+1)\pi$。映射 ψ_k 将 $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ 双全纯映为角域 $A_k=\{re^{i\theta};0<r<+\infty,2k\pi/n<\theta<2(k+1)\pi/n\}$。

单值支由多值函数 $z^{1/n}$ 在某一点的取值完全确定。比如，如果指定 $i^{1/n}=e^{i\pi/(2n)}$, 则确定的单值支为 ψ_1, 从而区域 $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ 上其他点的取值都可以确定。

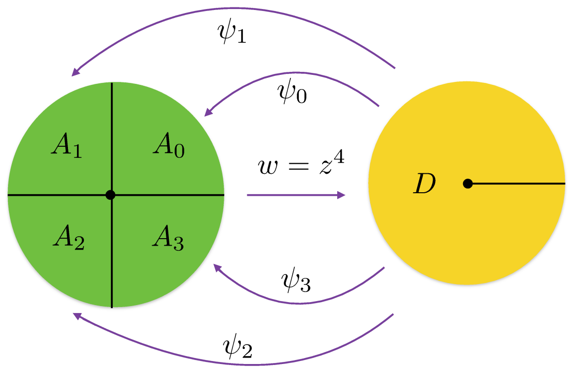


图 15.2: $w=z^{1/4}$ 的四个单值支

(3). $b=0$, $a=p/q\in\mathbb{Q}$, $(p,q)=1$。此时

$$z^{p/q}=|z|^{p/q}e^{i(p/q)\mathrm{Arg}(z)}.$$

假定 $z\neq0$, 则 $z^{p/q}$ 有 q 个不同的取值。多值性源于辐角函数的多值性。如前所知, 在不含原点的单连通区域上，辐角函数 Arg 可取到连续的单值支，因此 $z^{p/q}$ 可取到 q 个不同的全纯单值分支。每个全纯单值分支将角域映到角域。

(4). $b=0$, $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 此时

$$z^a=|z|^ae^{ia\mathrm{Arg}(z)},$$

亦为多值函数，多值性源于辐角函数的多值性。在不含原点的单连通区域 $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ 上，z^a 可以取到全纯单值分支。取定 -1

的一个辐角 $(2k+1)\pi$, 则 z^a 有唯一的分支 ψ_k 满足 $\psi_k(-1) = e^{ia(2k+1)\pi}$。因 a 是无理数，故集合

$$\{e^{ia(2k+1)\pi}; k \in \mathbb{Z}\}$$

是无限集。因此, z^a 有可数无穷多个全纯单值分支。

一个有趣的事实是：幂函数 z^a 在 $z = re^{i\theta} \neq 0$ 处的所有取值 $\{r^a e^{ia(\theta+2k\pi)}; k \in \mathbb{Z}\}$ 在圆周 $\{|w| = r^a\}$ 上稠密。

(5). $b \neq 0$. 此时

$$z^{a+ib} = e^{a\log|z| - b\mathrm{Arg}(z)} e^{i(b\log|z| + a\mathrm{Arg}(z))}.$$

它的模长是多值函数。辐角在 $a \neq 0$ 时也是多值函数。类似前面讨论，它在不含原点的单连通区域上可取到全纯的单值分支。

例题 15.1. 假设 f 为多值函数 z^i 在区域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上满足 $f(1) = e^{-4\pi}$ 的单值全纯分支。求 $f(i)$ 的值。

解: 由 $z^i = e^{i\mathrm{Log}(z)} = e^{-\mathrm{Arg}(z)} \cdot e^{i\log|z|}$ 知, 模长是一个多值函数, 多值性由辐角函数引起. 在区域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上，z^i 可以取到单值全纯分支，表示为

$$f(z) = e^{-\theta(z)} \cdot e^{i\log|z|}, \ \ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

其中 $\theta : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ 是一个连续的辐角函数。

如果 $f(1) = e^{-4\pi}$, 则

$$e^{-\theta(1)} \cdot e^{i\log|1|} = e^{-\theta(1)} = e^{-4\pi}.$$

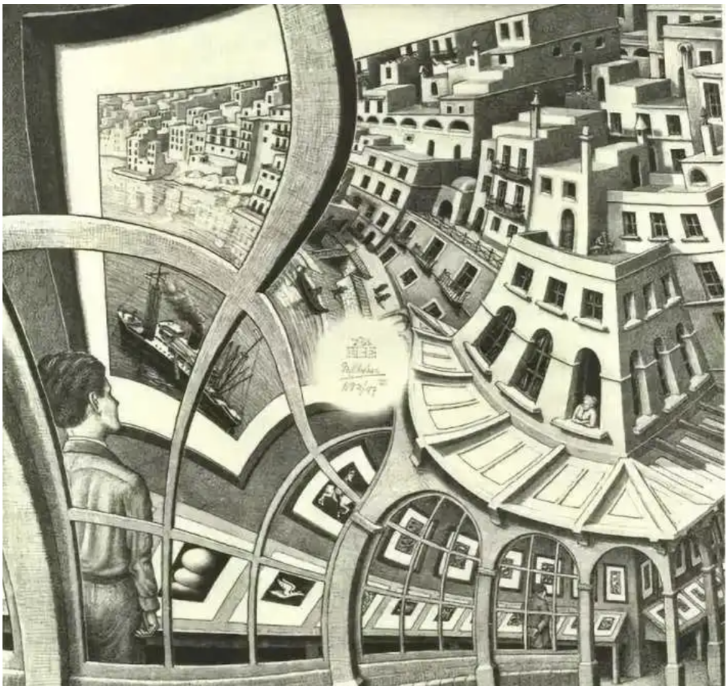
由此得 $\theta(1) = 4\pi$. 由 θ 在区域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上的连续性可知 $\theta(i) = 4\pi + \pi/2 = 9\pi/2$。由此可得

$$f(i) = e^{-\theta(i)} \cdot e^{i\log|i|} = e^{-9\pi/2}.$$

15.3 习题

《画廊》-埃舍尔 (Escher, 1898-1972)

这是荷兰版画家埃舍尔最得意的作品之一, 局部可看作在变换 z^α 下的像。电影《盗梦空间》中弯曲的巴黎街道就受此影响。



埃舍尔想在《画廊》中表现这样一副有趣的场景：画廊中一个人在欣赏一幅城市风景画，风景画里也有家画廊，画廊中有个人也在欣赏一幅城市风景画...。看起来很像我们熟悉的那个永远讲不完的故事：“从前有座山，山里有座庙，庙里有个老和尚在讲故事：从前有座山...”

遗憾的是，埃舍尔无法在中心部分表现出这种嵌套，只能将其留白，以签名替代。在他去世后几十年，一位荷兰数学家终于借助计算机，补全了这幅作品。详见 此文.

1. (单值分支的存在性，一个有用的结论) 假设 Ω 是平面单连通区域, f 是 Ω 上的全纯函数, 不取零值。证明存在 Ω 上的全纯函数 g, 满足函数方程

$$e^{g(z)} = f(z).$$

这样的 g 唯一吗?

(评注：(a). 此题说明 $\mathrm{Log} f(z)$ 可以取到单值全纯分支, 通常记为 $\log_\Omega f(z)$. (b). 如果 g 也不取零值，则 g 可表示为 $g = e^h$, 其中 h 是 Ω 上的全纯函数. 于是 $f = e^{e^h}$. 由此，你会想到什么？

套娃？)

2. (取单值分支的一个应用) 如果 f 是不取零值的整函数, 并且存在正数 A, B 以及正整数 m，满足

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|^m},$$

证明 $f(z) = e^{p(z)}$, 其中 $p(z)$ 是次数不超过 m 的多项式。

3. (对数函数的单值支) 在 $\Omega = \mathbb{C} - \{iy; y \geq 0\}$ 上给出对数函数的单值支为 $\log_\Omega(z)$, 满足 $\log_\Omega(1) = 2\pi i$. 计算 $\log_\Omega(e), \log_\Omega(-2), \log_\Omega(-i)$.

4. (单值支的存在性) 假设 f 在单位圆 $\mathbb{D}$ 上全纯, 不取零值. 证明存在 $\mathbb{D}$ 上全纯函数 g, 满足

$$g(x) = |f(x)|, x \in (-1, 1).$$

(提示：考虑函数 $F(z) = f(z)\overline{f(\bar{z})}$, 取 $\sqrt{F}$ 的单值支。)