ODE笔记9：变系数LODE、边值问题等

Euler方程：$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=f(x)$

解：对于$n=2$，令$x=e^t$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2}$

原方程化为：$a_2\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-a_2)\frac{dy}{dt}+a_0y=f\left(e^t\right)$

下面考虑n阶Euler方程：令$x=e^t$，$\Longrightarrow\quad a_n\frac{d^ny}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_1\frac{dy}{dt}+a_0y=f\left(e^t\right)$

令$y=e^{\lambda t}$，特征方程：$a_n\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda+a_0=0$，左边$=(a_n\lambda^n+\cdots a_0)e^{\lambda t}$

代入$y=x^\lambda$，方程$=[a_n\lambda(1-1)\cdots(\lambda-n+1)+\cdots+a_0]x^\lambda$

求解：（1）$y=x^\lambda$代入左边：$(a_n\lambda^n+\cdots+b_1\lambda+a_0)x^\lambda$

（2）令$x=e^t$，原方程化为：$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\cdots+b_1\frac{dy}{dx}+a_0y=f(e^t)$

通解：$y=c_1y_1(t)+\cdots+c_ny_n(t)+y^*(t)=c_1y_1(\ln x)+\cdots+c_ny_n(\ln x)+y^*(\ln x)$

例1：$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}=6\ln x-\frac{1}{x}\quad(x<0)$

解：令$x=-e^t,t=\ln(-x)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

$\Longrightarrow\quad 2\frac{d^2y}{dt^2}=6t+e^{-t},\frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}e^{-t}+c_1$

$\Longrightarrow\quad y=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}e^{-t}+c_1t+c_2=\frac{1}{2}(\ln(-x))^3-\frac{1}{2x}+c_1\ln(-x)+c_2$

降阶法：

$y''+p(x)y'+q(x)y=0\quad\longrightarrow\quad$ 1阶LODE已知一个解$y_1(x)$. 令$y=u(x)y_1(x)$:

$u''y_1+2u'y_1'+pu'y_1+\underbrace{uy_1''+puy_1'+quy_1}_{=0}=0\quad\Longrightarrow\quad y_1u''+(2y_1'+py_1)u'=0$

令$z=u',y_1z'+(2y_1'+2py_1)z=0\quad\Longrightarrow\quad z=c_1e^{-\int(\frac{2y_1'}{y_1}+p)dx}=\frac{c_1}{y_1^2}e^{-\int pdx}$

$\therefore u=c_1\int\left(\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}\right)dx+c_2\quad\Longrightarrow\quad y(x)=c_2y_1(x)+c_1y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx$

Liouville公式：$W(t)=W(0)e^{\int_0^t trA dt}$

$y_1y_2'-y_1'y_2=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}=W(0)e^{-\int pdx}$，又左边$=y_1^2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\quad\Longrightarrow\quad\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{W(0)}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx$

例2：$xy'''+3y''-xy'-y=0$

解：首先可以看出$y=\frac{1}{x}$是该方程的解。

设$y=\frac{1}{x}u(x)$，代入计算得：$u'''-u'=0\quad\Longrightarrow\quad u(x)=c_1e^{-x}+c_2+c_3e^x$

特解：$xy'''+3y''-xy'-y=e^{2x}$

设$u^*=Ae^{2x}$，代入得$A=\frac{1}{6}$. $\quad\Longrightarrow\quad y(x)=\frac{1}{x}(c_1e^{-x}+c_2+c_3e^x+\frac{1}{6}e^{2x})$

幂级数法（Cauchy定理）：

$y''+p(x)y'+q(x)y=0, p, q$ 在 x_0 点附近解析。 $\implies$ $\exists\, 2$ 个线性无关解 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$

例3：Airy方程：$y''=xy$

设解为：$y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，则 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}c_n\cdot n(n-1)x^{n-2}=x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$

$\implies \quad C_2=0,\ C_{m+2}(m+2)(m+1)=C_{m-1},\ C_{3k+2}=0, \forall\, k=0,1,\dots,\ C_{3k}=\frac{C_0}{(3k)!!!(3k-1)!!!},\ C_{3k+1}=\frac{C_1}{(3k+1)!!!(3k)!!!}$

$\implies \quad y=C_0\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{3k}}{(3k)!!!(3k-1)!!!}+C_1\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{3k+1}}{(3k+1)!!!\cdot(3k)!!!}$

广义幂级数法：

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$，若 $xp(x), x^2q(x)$ 在零点附近解析 $\implies$ $\exists$ 解 $y=x^r\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n, c_0\neq 0$

例4：$2xy''+y'+xy=0$

解：$\implies\ y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{2}y=0$

设 $y=x^r\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n, c_0\neq 0$ $\quad 2x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(n+r)x^{n+r-1}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^{n+r+1}=0$

计算得：$r(2r-1)=0, r=0$ 或 $\frac{1}{2}$ $\quad c_1(1+r)(2r+1)=0, c_1=0, c_{m+2}(m+2+r)(2m+2+2r+1)+c_m=0$

当 $r=0, c_{m+2}=-\frac{c_m}{(m+2)(2m+3)}$ $\quad c_k=\frac{(-1)^kc_0}{(2k)!!(4k-1)!!}$ $\quad\implies\quad y=c_0\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!!(4k-1)!!}$

当 $r=\frac{1}{2}, c_{m+2}=-\frac{c_m}{(2m+5)(m+2)}$ $\quad c_{2k}=\frac{(-1)^kc_0}{(2k)!!(4k+1)!!}$ $\quad\implies\quad y=c_0x^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!!(4k+1)!!}$

Sturn—liouville边值问题：

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0\,,\ 0<x<L\\ y(0)=0=y(L)\end{cases}\quad (*)$$

若当 $\lambda=\lambda_0, \exists$ 非零解 $y=\phi_{\lambda_0}(x)$，则称 λ_0 为 $(*)$ 的**特征值**，称 $\phi_{\lambda_0}(x)$ 为 $(*)$ 对应于 λ_0 的**特征函数**。

(1) $\lambda<0$，特征函数 $\alpha^2+\lambda=0, \alpha=\pm\sqrt{-\lambda}$ $\quad\implies\quad y=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$，代入：

$$\begin{cases}y(0)=c_1+c_2=0\\ y(L)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}L}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}L}=0\end{cases}\quad\implies\quad c_1=c_2\ \text{（舍去）}$$

(2) $\lambda=0, y=c_1x+c_2$ $\quad\implies\quad y\equiv 0$（舍去）

(3) $\lambda>0, \alpha=\pm i\sqrt{\lambda}$ $\quad\implies\quad y=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$

$$\begin{cases}y(0)=c_1=0\\ y(L)=c_1\cos\sqrt{\lambda}L+c_2\sin\sqrt{\lambda}L=0\end{cases}\quad\implies\quad \sin\sqrt{\lambda}L=0, \sqrt{\lambda}L=k\pi, k=0,1,\dots$$

$\implies \quad \lambda_k=(\frac{k\pi}{2})^2, k=1,2,\dots \quad y_k=\sin(\frac{k\pi}{L}x), x\in(0,L)$

边值问题：

$$\begin{cases}y''+p(t)y'+q(t)y=0\\ y(a)=\alpha, y(b)=\beta\end{cases}\qquad \Delta:\begin{cases}y''+p(t)y'+q(t)y=0\\ y(a)=y(b)=0\end{cases}$$

"Δ"有非零解，则称 $\{a,b\}$ 为 Δ 的**共轭点**

Thm9.1:

$\{a,b\}$ 为 Δ 的共轭点 $\iff \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0$，其中 $y''+py'+qy=0$ 有通解：$y=c_1y_1+c_2y_2$

$\begin{matrix} y(a)=0 \\ y(b)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1y_1(a)+c_2y_2(a)=0 \\ c_1y_1(b)+c_2y_2(b)=0 \end{cases}$ 非零解 $\iff c_1^2+c_2^2 \neq 0$

$\lambda>0, y_1=\cos\sqrt{\lambda}x, y_2=\sin\sqrt{\lambda}x$

$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}a & \sin\sqrt{\lambda}a \\ \cos\sqrt{\lambda}b & \sin\sqrt{\lambda}b \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\sqrt{\lambda}(b-a)=0, (b-a)\sqrt{\lambda}=k\pi.$

Thm9.2:

$\{a,b\}$ 不是 Δ 的共轭点 $\iff$ $\exists\,!$ 解，满足初值问题：$\begin{cases} y''+p(t)y'+q(t)y=0 \\ y(a)=\alpha, y(b)=\beta \end{cases}$

$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(a)=\alpha, y(b)=\beta \end{cases}$ $\exists\,!$ 解：$b-a \neq \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda}}$ 或 $\lambda \leq 0$

边值问题：$\begin{cases} y''+p(t)y'+q(t)y=f, a<t<b \\ y(a)=\alpha, y(b)=\beta \end{cases}$

$y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+y^*(t)$，其中 $y_0=c_1y_1+c_2y_2$ 为 "Δ" 的解($f \Rightarrow 0$)，y^* 为方程组 $\begin{cases} y''+p(t)y'+q(t)y=f \\ y(a)=0, y(b)=0 \end{cases}$ 的解。

构造 $y_0: y_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y''+p(t)y'+q(t)y=0 \\ y(a)=0, y(b)=1 \end{cases}$ $\exists\,!\, y_1 \neq 0$, $y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y''+p(t)y'+q(t)y=0 \\ y(a)=1, y(b)=0 \end{cases}$ $\exists\,!\, y_2 \neq 0$

$\implies \quad y_0=\beta y_1+\alpha y_2$

常数变易法：对于 $y''+py'+qy=f(t)$，令 $y=u_1y_1+u_2y_2$：

$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \implies u_1'=\frac{-y_2f}{W}, a_2'=\frac{y_1f}{W} \quad \left.\begin{matrix} y(a)=0 \\ y_1(a)=0 \end{matrix}\right\} \implies u_1(b)y_1(b)=0 \implies u_1(b)=0$

$\implies u_1(t)=\int_t^b \frac{y_2f}{W}ds$

Thm9.3:

若 $\{a,b\}$ 不是"Δ" 的共轭点，则$(*)$存在唯一解。

$$y(t)=\beta y_1+\alpha y_2+\int_a^b G(t,s)f(s)ds$$

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{y_1(s)\cdot y_2(t)}{W(s)}, a\leq s\leq t \\ \dfrac{y_1(t)\cdot y_2(s)}{W(s)}, t\leq s\leq b \end{cases}$$