第二十一章　Laurent 级数

环域上的全纯函数总能以唯一的方式分解为定义在某圆域内部和定义在某圆域外部的两个全纯函数之和, 由此可得一种新的级数展式。这个事实, 是法国数学家 Laurent 在 1843 年发现的.

21.1　Laurent 分解

给定 $0 \le r < R \le +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, 定义圆环区域

$$A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; r < |z - z_0| < R\}.$$

易见, 当 $r = 0, R < +\infty$ 时, $A_{r,R}(z_0)$ 为去心圆盘 $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$; 当 $r > 0, R = +\infty$ 时, $A_{r,R}(z_0)$ 为圆盘 $D(z_0, r)$ 的外部 $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, r)}$ (此时, 可视为 ∞ 的一个去心邻域); 当 $r = 0, R = +\infty$ 时, $A_{r,R}(z_0)$ 为穿孔平面 $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$。不论哪种情形，都成立

$$A_{r,R}(z_0) = D(z_0, R) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, r)}).$$

定理 21.1. (Laurent 分解) 圆环区域 $A_{r,R}(z_0)$ 上的全纯函数 f 可以分解为

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z), \ \ z \in A_{r,R}(z_0)$$

其中, f_0 在 $D(z_0, R)$ 上全纯, f_1 在 $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, r)}$ 上全纯。如果进一步要求 $f_1(\infty) = 0$ [a], 则此分解是唯一的。

[a]这里, $f_1(\infty) = 0$ 指 $\lim_{z \to \infty} f_1(z) = 0$。

证明: 先证明唯一性, 再证明存在性.

(唯一性) 如果 $f(z) = g_0(z) + g_1(z)$ 是另一个分解, 其中 g_0 在 $D(z_0, R)$ 上全纯, g_1 在 $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, r)}$ 上全纯。则

$$g_0(z) - f_0(z) = f_1(z) - g_1(z), \ \ z \in A_{r,R}(z_0).$$

定义

$$h(z)=\begin{cases} g_0(z)-f_0(z), & |z-z_0|<R, \\ f_1(z)-g_1(z), & |z-z_0|>r. \end{cases}$$

以上定义, 在重叠的区域 $A_{r,R}(z_0)$ 上取值相等, 因此 h 是整函数。又由 $h(\infty)=f_1(\infty)-g_1(\infty)=0$ 可知 h 有界。由 Liouville 定理, $h\equiv 0$。因此 $f_0=g_0$, $f_1=g_1$。

(存在性) 取 ρ,s 满足 $r<\rho<s<R$, 则 f 在圆环 $A_{\rho,s}(z_0)$ 闭包上全纯。在环域 $A_{\rho,s}(z_0)$ 上对 f 应用 Cauchy 积分公式得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A_{\rho,s}(z_0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=s}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \end{aligned}$$

由 Cauchy 型积分的性质知

$$f_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=s}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

在 $D(z_0,s)$ 上全纯,

$$f_1(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

在 $\mathbb{C}\setminus\overline{D(z_0,\rho)}$ 上全纯, 且当 $z\to\infty$ 时, $|f_1(z)|=O(1/|z|)\to 0$。这就给出了 f 在 $A_{\rho,s}(z_0)$ 上的分解。

另一方面，注意到当 $z\in A_{r,R}(z_0)$ 取定时, 由 Cauchy-Goursat 积分定理知，$f_0(z)$ 的定义不依赖于 $s\in(|z-z_0|,R)$ 的选取, $f_1(z)$ 的定义不依赖于 $\rho\in(r,|z-z_0|)$ 的选取。令 $s\to R^-,\rho\to r^+$, 可知 f_0 实可定义在 $D(z_0,R)$ 上, f_1 实可定义在 $\mathbb{C}\setminus\overline{D(z_0,r)}$ 上。由此便得 f 在环域 $A_{r,R}(z_0)$ 上的分解。 $\square$

Laurent 分解给出了圆环域上全纯函数的一种基本分解。一个自然的问题是, 一般多连通区域上的全纯函数是否也有类似分解? 答案是肯定的。

假设 Ω 是平面多连通区域, 记 $H(\Omega)$ 是 Ω 上的全纯函数全体, 它是一个复线性空间。如果 Ω 是无界区域, 且包含 ∞ 的一个去心邻域, 记 $H_0(\Omega)\subset H(\Omega)$ 为 Ω 上满足 $f(\infty)=0$ 的全纯函数全体。显然 $H_0(\Omega)$ 是 $H(\Omega)$ 的复线性子空间。

一般形式的 Laurent 分解如下, 证明留作思考的余地。

定理 21.2. (Laurent 分解) 假设 Ω 是平面有限多连通区域, 假设 $\widehat{\mathbb{C}}-\Omega=K_1\cup\cdots\cup K_n\cup K_\infty$, 其中 K_∞ 为包含 ∞ 的余集分支，则有复线性空间的直和分解

$$H(\Omega)=H(\mathbb{C}-K_\infty)+H_0(\mathbb{C}-K_1)+\cdots+H_0(\mathbb{C}-K_n).$$

21.2 Laurent 级数

在环域的 Laurent 分解中, 如将分解所得函数做级数展开, 便得幂级数的一种推广: Laurent 级数。

定理 21.3. (Laurent 级数) 给定 $0\le r<R\le+\infty$, $z_0\in\mathbb{C}$, 假设 f 在圆环区域 $A_{r,R}(z_0)$ 上全纯, 则 f 可以展成如下级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,\ \ z\in A_{r,R}(z_0),$$

其中, 系数满足

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ \ r<\rho<R.$$

证明: 任意取定 $z\in A_{r,R}(z_0)$, 存在 ρ,s 满足 $r<\rho<|z-z_0|<s<R$. 利用 Cauchy 积分公式,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=s}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \\ &:= f_0(z)+f_1(z). \end{aligned}$$

当 $|\zeta-z_0|=s$ 时,

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

上式右端级数关于 $\zeta\in\partial D(z_0,s)$ 一致收敛, 因此积分与求和可交换次序, 于是

$$f_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=s}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^n.$$

当 $|\zeta-z_0|=\rho$ 时,

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{(z-z_0)(1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

上式右端级数关于 $\zeta \in \partial D(z_0, \rho)$ 一致收敛, 仍由积分与求和可交换次序得

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n.$$

这样就得到 f 的级数展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

其中, $\rho \in (r, R)$ (由 Cauchy-Goursat 积分定理, 不依赖于 ρ 的选取)。 □

注: Laurent 级数的系数是唯一的。如果

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

两边除以 $(z - z_0)^{n+1}$, 然后在圆周 $\{|z - z_0| = \rho\}$ 上积分得

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = b_n.$$

定理21.3中的级数称为 Laurent 级数, 或 Laurent 展式。其中

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

分别称为 Laurent 级数的主要部分 (principal part) 和正则部分 (regular part)。正则部分对应于 Laurent 分解中 f_0 的幂级数展式; 主要部分将决定 Laurent 级数的本质性质 (参考后面的奇点分类, 球面上全纯函数的一般形式)。

例题 21.1. 求出函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在三个环域 $A_1 = \{0 < |z| < 1\}$, $A_2 = \{1 < |z| < 2\}$, $A_3 = \{2 < |z| < \infty\}$ 上的 Laurent 展式。

解: 显然 $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$.

在 A_1 上,

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2(1-z/2)} + \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n. \end{aligned}$$

在 A_2 上,

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2(1-z/2)} - \frac{1}{z(1-1/z)} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}. \end{aligned}$$

在 A_3 上,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(1-2/z)} - \frac{1}{z(1-1/z)} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

21.3 系数估计

类比幂级数形式的 Cauchy 不等式, 可得 Laurent 级数的系数不等式:

定理 21.4. (Laurent 系数的 Cauchy 不等式) 假设 f 在圆环区域 $A_{r,R}(z_0)$ 上全纯, 有 Laurent 级数展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

则成立不等式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\rho^{2n} \le \|f\|_\rho^2,$$

其中, $r < \rho < R$, $\|f\|_\rho = \max_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|$.

特别地，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，成立 $|a_n| \le \rho^{-n}\|f\|_\rho$。等号对某个 $n = n_0$, $\rho = \rho_0$ 成立的充要条件是 $f(z) = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0}$。

证明: 考虑积分

$$I(\rho) = \int_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|^2 |dz| = \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)\overline{f(z)}|dz|.$$

显然 $I(\rho) \le 2\pi\rho\|f\|_\rho^2$。另一方面，做变量代换 $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} I(\rho) &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \rho^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{a_m}\rho^m e^{-im\theta}\right)\rho d\theta \\ &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \rho^{2n+1}. \end{aligned}$$

因此成立不等式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \rho^{2n} \le \|f\|_\rho^2.$$

由此得，对任意 $n \in \mathbb{Z}$，成立 $|a_n| \le \rho^{-n}\|f\|_\rho$。若等号对某个 $n = n_0$, $\rho = \rho_0$ 成立，则必然有

$$\sum_{n\ne n_0} |a_n|^2 \rho_0^{2n} = 0 \Longleftrightarrow a_n = 0, \forall n \ne n_0 \Longleftrightarrow f(z) = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0}.$$

例题 21.2. Laurent 系数的 Cauchy 不等式 $\Longrightarrow$ Riemann 可去奇点定理。

假设 f 在 $\Omega \setminus \{z_0\}$ 上全纯，在 z_0 邻域满足 $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$。下面利用 Laurent 系数的 Cauchy 不等式来证明 z_0 是可去奇点。不妨假设 $z_0 = 0$, $D(0,R) \subset \Omega$。

证明: 将 f 在 $D(0,R)\setminus\{0\}$ 上展成 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,$$

利用假设条件 $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$，以及 Laurent 系数的 Cauchy 不等式可知，当 $n \le -1$ 时，对任意 $\rho \in (0,R)$,

$$|a_n| \le \rho^{-n}\|f\|_\rho = \rho^{-n-1}\max_{|z|=\rho}|zf(z)| (\to 0, \text{ 当}\rho \to 0).$$

这说明 $a_n = 0$, $\forall n \le -1$。因此，Lauren 级数实为幂级数 $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$，蕴含 0 为可去奇点。 □

21.4 孤立奇点的分类

回忆: 如果 f 在 z_0 的去心邻域 $D(z_0,\epsilon)\setminus\{z_0\}$ 上全纯, 称 z_0 为 f 的孤立奇点。根据 f 在 z_0 的渐进性态, 孤立奇点分为三类:

- $\lim_{z\to z_0} f(z)=a\in\mathbb{C}$, 此时, z_0 是 f 的可去奇点;
- $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$, 此时, z_0 是 f 的极点;
- $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 不存在, 此时, 我们称 z_0 为 f 的本性奇点 (essential singularity)。

例题 21.3. 考虑函数

$$f(z)=\frac{1}{e^{1/z}-1}$$

可以验证 $z=\frac{1}{2n\pi i}$ 是 f 的孤立奇点 (实则为极点), 但 $z=0$ 不是 f 的孤立奇点 (实则为非孤立奇点)。

由前面讨论, f 在 $D(z_0,\epsilon)\setminus\{z_0\}$ 上有 Laurent 展式。对应于三类奇点, f 的 Laurent 展式有什么特点呢?

如果 z_0 是可去奇点, 则 f 在 $D(z_0,\epsilon)$ 上全纯, 其 Laurent 级数即是幂级数。此时 Laurent 展式的主要部分消失。

如果 z_0 是 f 的极点, 此时存在整数 $m\geq 1$, 以及 $D(z_0,\epsilon)$ 上的全纯函数 $\psi(z)$, 满足 $\psi(z_0)\neq 0$, 使得

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}.$$

将 ψ 展成幂级数 $\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, 可得

$$f(z)=\frac{a_0}{(z-z_0)^m}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+a_m+\cdots$$

由此可见, f 的 Laurent 展式的主部有且只有有限项。反之可验证, 如果 f 的 Laurent 展式主部有且只有有限项, 则 z_0 为极点。

综合以上两种情况的讨论, z_0 是 f 的本性奇点的充要条件是 f 在 $D(z_0,\epsilon)\setminus\{z_0\}$ 上 Laurent 展式的主部有无限项。

f 在本性奇点附近的映射性质很复杂, 由下述定理可见一斑。

定理 21.5. (Casorati 1868, Weierstrass 1876) 假设 f 在 $D(z_0,\epsilon)\setminus\{z_0\}$ 上全纯, 且 z_0 为本性奇点, 则对 z_0 的任意邻域 $V\subset D(z_0,\epsilon)$, 像集 $f(V\setminus\{z_0\})$ 在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中稠密。

定理表明, 对任意 $q\in\widehat{\mathbb{C}}$, 存在 $V\setminus\{z_0\}$ 中点列 $\{z_n\}$, 满足

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0,\quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = q.$$

证明: 只需证明, 对任意 $q\in\mathbb{C}$ 及 $r>0$, 有 $D(q,r)\cap f(V\setminus\{z_0\})\neq\emptyset$。如不然, 则存在 q,r, 使 $D(q,r)\cap f(V\setminus\{z_0\})=\emptyset$。考虑函数

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-q},\quad z\in V\setminus\{z_0\}.$$

显然 $|g|\le 1/r$, 即 g 有界。由 Riemann 可去奇点定理知, z_0 是 g 的可去奇点。这表明 z_0 是

$$f(z)=q+\frac{1}{g(z)}$$

的可去奇点 (如果 $g(z_0)\neq 0$), 或极点 (如果 $g(z_0)=0$)。这矛盾于 z_0 是 f 的本性奇点。 □

下面的例子有益于理解上述定理。

例题 21.4. 考虑 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的全纯函数

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}.$$

可以看出, 0 是本性奇点。对任意 $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 存在收敛于 0 的点列 $\{z_n\}\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 满足 $e^{\frac{1}{z_n}}=\zeta$。

事实上, 为说明 0 是本性奇点, 只需注意到 Laurent 展式主要部分有无限项。也可利用极限沿实轴方向的不存在性说明:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty,\quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0.$$

对任意 $\zeta=re^{i\theta}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 取

$$z_n=\frac{1}{\log r+i(\theta+2n\pi)}, n\ge 1.$$

容易验证, $z_n\to 0$, $e^{\frac{1}{z_n}}=\zeta$。

此例也表明, $e^{\frac{1}{z}}$ 的值域 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 中任意一点在 0 的任意小的去心邻域中都有逆像。

法国数学家 Picard 证明, 这种取值特性为本性奇点所共有:

定理 21.6. (Picard 大定理) 全纯函数在本性奇点的去心邻域内可以无穷次取到每一个复数值, 至多有一个例外值。

对于上面的例子 $e^{\frac{1}{z}}$, 例外值是 0。

21.5　习题

“我取得的成就大多是靠机遇。我曾徒劳无功地思考过许多问题。对其他问题，有偶然的灵感——事实上，其中一些直到今天都令我震惊。当然，最美妙的时光是在我只有数学相伴时：没有野心，无需伪装，忘怀天地。”

—罗伯特. 朗兰兹

记号：$0 \le r < R \le +\infty$, 环域 $A(r,R) = \{z : r < |z| < R\}$.

1. (Laurent 展式) 求函数 $f(z) = 1/((z-1)(z-2))$ 在环域 $\{0 < |z-1| < 1\}$ 上的 Laurent 展式。

2. (Laurent 展式) 求函数 $f(z) = 1/(z^2 - z)$ 在以 0 为中心的环域上所有可能的 Laurent 展式。

3. (对称性) 全纯函数 $f : A(r,R) \to \mathbb{C}$ 如果为偶函数 (奇函数), 证明 Laurent 展式中只有偶 (奇) 次项。

4. (Laurent 分解) 给定平面上 $n \ge 1$ 个不同点 $z_1, \cdots, z_n$ 以及 $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ 上的全纯函数 f, 证明存在 $n+1$ 个整函数: $f_0, f_1, \cdots, f_n$, 满足 $f_1(0) = \cdots = f_n(0) = 0$, 且

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^{n} f_k\Big(\frac{1}{z - z_k}\Big).$$

5. (本性奇点) 如果 z_0 是全纯函数 $f : D(z_0, r)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 的本性奇点, 证明 z_0 也是 $1/f$ 的本性奇点。

6. (奇点分类) 下列函数有哪些奇点? 指出其类别。

$$e^{\frac{1}{1-z}}/(e^z - 1).$$

7. (双全纯映射) 假设 $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ 在 $\overline{A(r,R)}$ 上全纯, 将圆环域 $A(r,R)$ 双全纯映到区域 Ω, 保持内外边界对应。

(1). 证明象曲线 $f(\{|z| = \rho\})$ 所围区域的面积为 $S(\rho)$ 为

$$S(\rho) = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2 \rho^{2n}, \ \ \rho \in (r,R).$$

(2). 定义函数 $\psi(\rho) = S(\rho)/\rho^2$, $\rho \in (r, R)$。证明 ψ 要么严格递增，要么是常值函数。若 ψ 常值，f 具有什么样的形式?

(3). 如果 Ω 也是一个圆环区域 $A(r_1, R_1)$, 证明 $R_1/r_1 = R/r$。

(注: f 在 $\overline{A(r,R)}$ 上全纯可弱化为 f 在 $A(r,R)$ 上全纯。提示: 利用面积公式)