调和函数笔记

2023 年 11 月 10 日

注. 本笔记的主要内容来自 Sheldon Axler, Paul Bourdon, Wade Ramey 所著的《Harmonic Function Theory》, 有删节, 意在介绍一些调和函数的最基础知识, 为学习更普通的 PDE 理论作准备. 读者应当具有数学分析和线性代数的基础, 当然, 对复变函数的理解能提供更多具体的例子. 笔者一向认为, 分析中的大部分计算应该简洁有力, 直指要害, 因此本文涉及的计算是简化的. 这里的简化不仅指计算过程的优化, 而且力求便于读者理解和检查.

目录

第 1 章　预备知识 1
1.1 什么是调和函数 . . . 1
1.2 重要恒等式 . . . 2
1.3 一些闲话 . . . 3
第 2 章　调和函数的基础知识 5
2.1 平均值原理和最大值原理 . . . 5
2.2 球的 Poisson 核和 Dirichlet 问题 . . . 6
2.3 解析性和齐次展开 . . . 10
2.4 Liouville 定理, 可去奇点和 Cauchy 积分估计 . . . 12
2.5 线极限 . . . 13
第 3 章　位势方程 17
3.1 Green 函数和基本解 . . . 17
3.2 Dirichlet 问题和次调和函数 . . . 19
3.3 最大值原理 . . . 22
3.4 最大模估计和能量模估计 . . . 23
第 4 章　正调和函数和 Kelvin 变换 27
4.1 Harnack 不等式 . . . 27
4.2 Bôcher 定理 . . . 28
4.3 Kelvin 变换 . . . 30
第 5 章　离散调和函数 33
5.1 基本定义和性质 . . . 33
5.2 Liouville 定理 . . . 34
5.3 一般边值问题 . . . 36
5.4 Poisson 核 . . . 37

第 一 章

预备知识

§1.1 什么是调和函数

在复变函数的课程上, 我们关心全纯函数在复数平面的某个开子集 $U \subset \mathbb{C}$ 上复可导的函数. 换言之, 我们希望研究 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 使得下列极限存在

$$f'(z_0) = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

也就是说我们希望 $|\Delta z| \to 0$ 时有

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot \Delta z + o(|\Delta z|)$$

如果我们愿意稍微麻烦一点, 将实部和虚部分开,$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, 对于 $u, v \in C^1(U)$:

设 $f'(z) = a + bi, \Delta z = \Delta x + i\Delta y$, 那么可导的条件告诉我们当 $\Delta x, \Delta y \to 0$ 时

$$\begin{cases} u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + a\Delta x - b\Delta y + o(|\Delta z|) \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) = v(x, y) + b\Delta x + a\Delta y + o(|\Delta z|) \end{cases}$$

那么有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = b$$

这样我们就得到了大名鼎鼎的 Cauchy–Riemann 方程, 在其基础上, 假设 $u, v \in C^2(U)$ 通过求对应偏导不难推出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

如果我们在平面上定义 Laplace 算子为 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = D_x^2 + D_y^2$, 那么全纯函数的实部 (容易证明虚部也是) 明显满足

$$\Delta u = 0$$

我们知道解析函数满足好的性质, 自然会尝试把这个概念推广到高维的欧氏空间中, 得到下面的定义.

【定义 1.1】(调和函数) 对于开集 $U \subset \mathbb{R}^n$, 实值函数 $u \in C^2(U)$ 满足

$$\Delta u = 0$$

其中 $\Delta = D_1^2 + \cdots + D_n^2$, 诸 D_j 表示欧氏空间中第 j 分量的偏导.

则称 u 为 U 上的调和函数.

【例 1.2】 很容易验证, 两个调和函数的和, 调和函数的实数倍也是调和函数, 如果还有更高阶的连续导数, 调和函数的方向偏导也是调和的, 因为 Δ 和诸 D_j 可交换, 但乘积不然 (请读者举例).

【例 1.3】 常函数和线性函数明显是调和函数, 一个不那么平凡的例子是在 $\mathbb{R}^n - 0$ 上 $|x|^{2-n}$ 也是调和的, 其中 $|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ 为欧氏距离. 对 x_1 求偏导可证 $x_1|x|^{-n}$ 也是调和的, 有趣的是即便在 $n = 2$ 这也成立.

【例 1.4】 对于线性映射, 我们有如下的事实:

调和函数经过平移和伸缩还是调和的, 对于 $y \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$, 如果 $u(x)$ 是调和函数, 则 $u(x-y), u(rx)$ 也是调和函数.

如果 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是正交变换, 则 $u(Tx)$ 也调和. 其原因是 Laplace 算子 Δ 在 T 的合同下是不变的, 具体的计算如下

$$\Delta(u \circ T)(x) = \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & D_n \end{bmatrix} T^t \cdot T \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} u(Tx) = (\Delta u)(Tx) = 0$$

§ 1.2 重要恒等式

【定理 1.5】(Green 恒等式) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 其边界光滑. 对于 $f, g \in C^2(\overline{U})$, 我们有第一 Green 恒等式

$$\int_U (\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g) dV = \int_{\partial U} (\nabla g \cdot N) f dS$$

其中 dV 是 U 上的体积测度,dS 是 ∂U 上的面积测度,N 是面 ∂U 的法向量. 以及第二 Green 恒等式

$$\int_U (f\Delta g - g\Delta f) dV = \int_{\partial U} ((\nabla g \cdot N) f - (\nabla f \cdot N) g) dS$$

证明. 回忆 Stokes 定理的特殊情形散度定理, 对向量场 $X = f\nabla g$ 使用.

注意 $\operatorname{div} X = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$, 直接代入即可得到第一恒等式

$$\int_U \operatorname{div} X dV = \int_{\partial U} X \cdot N dS$$

将第一恒等式的 f, g 交换得到者做差, 立刻得到第二恒等式 □

【推论 1.6】 前述定理区域 U 条件下, 设 u 在 U 调和, 则有

$$\int_{\partial U} D_N u \cdot dS = 0,\ \int_U |\nabla u|^2 dV = \int_{\partial U} u D_N u \cdot dS$$

证明. 分别在第一 Green 恒等式中代入 $f=1, g=u$ 和 $f=g=u$ 注意方向导数的定义即有 $D_N u = \nabla u \cdot N$. □

【推论 1.7】 前述区域 U 条件下, 设 u 在 U 调和, 若 $u|_{\partial U}=0$ 则 $u=0$ 于 U.

证明. 由上述推论 $uD_N u$ 在 ∂U 上恒 0, 于是 $|\nabla u|^2$ 在 U 上积分为 0, 由连续性知只能恒 0. 这说明 u 在 U 上为常数, 结合在边界为 0 推知恒 0. □

这说明, 一旦边界确定, 如果内部存在调和函数解则解必唯一, 只需对两个解做差应用上推论即可.

§1.3 一些闲话

调和 (harmonic) 一词给人的感觉是音色上的和谐, 例如琴瑟调和 (请读者在此望文生义). 实际上调和函数的引入正是来源于物理上振动的弦. 弦的振动一般是一些正弦和余弦的叠加, 傅里叶分析就喜欢研究单位圆周上的正弦和余弦, 而在高维空间的球面上, 对应的东西叫做球谐函数. 我们以后会知道在球面上也能作类似的展开, 于是后来球谐函数 (spherical harmonics) 中的" 谐" 字用得广了, 各种拉普拉斯算子等于 0 的东西都用之以指代, 进而就有了现在的这个定义.

对于一些物理壬来说, 其时常应用如下的两条公式, 记录在此, 不过经历过数学物理方法洗礼的同学大概已经把它们刻进 DNA 了 (x).

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\varphi}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

另外因为这是一个笔记, 所以可能各种计算或细节都被省略, 笔者尽量保证从这里开始用最少的笔墨把话说清楚.

第二章

调和函数的基础知识

这个章节对应《HFT》中第一、二章的内容, 作为后面其他内容的基础. 我们将从平均值原理开始, 领略调和函数的神奇和美丽.

§2.1 平均值原理和最大值原理

下面介绍两个平均值原理, 简单来说, 在闭球调和的函数, 球面上的平均值, 整个球内的平均值都等于球心处的函数值.

【定理 2.1】(平均值原理 (Mean-Value Property, M.V.P.)) u 调和于 $\overline{B(a,r)}$, 则

$$u(a)=\frac{1}{S(r)}\int_{\partial B(a,r)}u(x)dS=\frac{1}{V(r)}\int_{B(a,r)}u(x)dV$$

其中 $S(r),V(r)$ 表示该球体的表面积和体积.

证明. 先证球面者, 先研究空间维数 $n>2$ 的情形, 通过平移不妨设 $a=0$.

考虑区域 $U=B(0,r)-\overline{B(0,\varepsilon)}$, 其中 $0<\varepsilon<r$. 对 $u,|x|^{2-n}$ 使用第二 Green 恒等式

$$0=\int_{\partial U}(uD_N(|x|^{2-n})-|x|^{2-n}D_Nu)dS$$

结合在 $\partial B(0,\rho)(\rho=\varepsilon,r)$ 上都有的 D_Nu 积分为 0, 故上式第二项为 0, 注意边界正负于是将第一项展开为内外两球面

$$\int_{\partial B(0,r)}u\cdot(2-n)|x|^{1-n}dS=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}u\cdot(2-n)|x|^{1-n}dS$$

通过除以单位球的表面积, 上式化简为

$$\frac{1}{S(r)}\int_{\partial B(0,r)}udS=\frac{1}{S(\varepsilon)}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}udS$$

利用 u 在 0 处的连续性, 令 $\epsilon\to0^+$ 右式成为 $u(0)$.

最后对于 $n=2$ 的情形用 $\log|x|$ 代替 $|x|^{2-n}$ 即可, 当然这也是复变中熟悉的结果.

然后是球体版本, 对 $u,|x|^2$ 使用第二 Green 恒等式, 显然 $\Delta(|x|^2)=2n,D_N(|x|^2)=2r$, 故

$$\int_{B(0,r)} 2nu \cdot dV = \int_{\partial B(0,r)} 2ru \cdot dS$$

结合 $nV(r) = rS(r)$ 和球面的 M.V.P. 立刻得到我们需要的结论

□

平均值原理的一个典型应用即

【推论 2.2】(最大值原理 (Maximum Principle)) 设 U 连通开集,u 调和于之, 若 u 在 U 中某点取到最大值则 u 为常数. 显然地, 取 $-u$ 可知最小值也有类似的结论.

证明. 考虑取该最大值的点构成的集合 S, 由 u 连续知 S 是闭集, 而任意 S 中的点可作为某包含在 U 的闭球的球心, 应用平均值原理和连续性, 不难证明, 该闭球内 u 必须皆取该最值, 故 S 是开集. 结合 S 非空既开又闭和 U 连通, 必有 $S = U$. □

于是有显然的推论.

【推论 2.3】 设 U 有界,u 调和于 U, 连续于 $\overline{U}$. 则 u 在 $\overline{U}$ 有最大值, 且位于边界 ∂U.

§2.2 球的 Poisson 核和 Dirichlet 问题

回忆给定边界值的调和函数若存在则唯一. 对于最好的情况, 给定球面上的值能不能确定其内部的调和函数的可能呢? 答案是肯定的, 回忆平均值公式根据球面的值确定球心的值, 这暗示了通过积分确认其他点值的可能.

设 u 是球 $\overline{B}$ 内的调和函数

$$u(x) = \int_{\partial B} u(\zeta) P(x,\zeta) dS(\zeta)$$

我们希望有上面这样的等式, 如何确定 P 呢?

【引理 2.4】(对称引理) 对非原点的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\left| \frac{y}{|y|} - |y| \cdot x \right| = \left| \frac{x}{|x|} - |x| \cdot y \right|$$

证明. 左右平方验证. □

回忆平均值原理, 这次我们试图对 $u, v(y) = |y-x|^{2-n}$ 用第二 Green 恒等式. 麻烦的是 v 在球面上非常值, 这时应用对称引理,$|y| = 1$ 在单位球上.

$$|y-x|^{2-n} = |x|^{2-n} \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^{2-n}$$

干脆取 $v(y) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{R}(y) = |y-x|^{2-n} - |x|^{2-n} \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^{2-n}$. 由平移的保调和性读者不难验证 v 是调和函数.

【定理 2.5】(单位球的 Poisson 核) 设 u 在 $\overline{B(0,1)}$ 调和, 取 $P(x,\zeta)=\dfrac{1-|x|^2}{S(1)\cdot|x-\zeta|^n}$, 则对于 $r>0, x\in B(0,1)$ 有

$$u(x)=\int_{\partial B(0,1)}u(\zeta)P(x,\zeta)dS(\zeta)$$

证明. 我们只检查 $n>2$ 的情形,$n=2$ 在复变中已经学过.

设 $U=B(0,1)-\overline{B(x,\varepsilon)}$, 其中 $\varepsilon>0$ 充分小使得小球闭包在大球内. 对 u,v 应用第二 Green 恒等式得

$$0=\int_{\partial B(0,1)}uD_Nv\cdot dS-(2-n)S(1)u(x)+\int_{\partial B(x,\varepsilon)}(\mathcal{R}D_Nu-uD_N\mathcal{R})dS$$

注意 $\mathcal{L}D_Nu-uD_N\mathcal{L}=-u(2-n)\varepsilon^{1-n}$ 在小球上积分由平均值原理知为 $-(2-n)S(\varepsilon)\epsilon^{(1-n)}u(x)$. 另外 $\varepsilon\to0^+$ 时 $|RD_Nu-uD_N\mathcal{R}|$ 一致有界于是积分趋于 0. 所以化简得到

$$u(x)=\frac{1}{(2-n)S(1)}\int_{\partial B(0,1)}uD_Nv\cdot dS$$

不难验证

$$D_Nv=(2-n)\left(|y-x|^{-n}-|x|^{2-n}\left|y-\frac{x}{|x|^2}\right|^{-n}\right)=(2-n)\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}$$

对照 $P(x,\zeta)$ 的定义即得. □

注. 其实对 Poisson 核的应用条件来说, 我们可以把 u 在 $\overline{B(0,1)}$ 调和的条件稍稍减弱为在 $B(0,1)$ 调和而在边界连续. 这是因为我们可以取一个稍稍比单位球小一点的同心球来积分以替代之.

现在问题解决了一半, 对于给定的闭球内的调和函数我们可以通过边界来确定任意点的值了. 那如果我们只知道 $u|_{\partial B(0,1)}=f$ 连续, 是否保证有调和解呢? 于是我们自然反其道而行之, 想到用 Poisson 核积分得到开球内的函数, 从而得出下面的定理.

【定理 2.6】(单位球的 Dirichlet 问题) 我们定义 $u\in\overline{B(0,1)}$ 为

$$u(x)=\begin{cases}f(x) & x\in\partial B(0,1)\\ P[f](x)=\displaystyle\int_{\partial B(0,1)}u(\zeta)P(x,\zeta)dS(\zeta) & x\in B(0,1)\end{cases}\tag{2.1}$$

则 (1) 式构造了一个 $B(0,1)$ 内调和, 边界连续的函数.

在验证之前, 我们先观察 Poisson 核的一些好的性质, 作为一个引理给出.

【引理 2.7】 Poisson 核满足如下性质:

(a) $P(x,\zeta)>0$ 对一切 $x\in B(0,1),\zeta\in\partial B(0,1)$

(b) $\displaystyle\int_{\partial B(0,1)}P(x,\zeta)dS(\zeta)=1$ 对一切 $x\in B(0,1)$

(c) 对一切 $\eta\in\partial B(0,1),\delta>0$ 有

$$\int_{|\zeta-\eta|>\delta}P(x,\zeta)dS(\zeta)\to0\ (x\to\eta)$$

证明. (a) 由定义显然,(b) 注意 $u=1$ 调和, 代入 Poisson 核可知, (c) 则是检查 $|\zeta-\eta|>\delta$ 时

$$|P(x,\zeta)| \leq \frac{1-|x|^2}{(|\zeta-\eta|-|x-\eta|)^n} \to 0\ (x\to\eta)$$

结合 $|\eta|=1$ 引理得证. □

Dirichlet 问题的证明. 注意到给定 ζ 后,$P(x,\zeta)$ 是 $\mathbb{R}^n-\zeta$ 上关于 x 的调和函数. 于是由 (1),(2)

$$\Delta_x\left(\int_{\partial B(0,1)} u(\zeta)P(x,\zeta)dS(\zeta)\right)=\int_{\partial B(0,1)} u(\zeta)\Delta_x P(x,\zeta)dS(\zeta)=0$$

下检查连续, 给定 $\eta\in\partial B(0,1),\varepsilon>0$. 取 $\delta>0$ 使 $|\zeta-\eta|<\delta$ 时 $|f(\zeta)-f(\eta)|<\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(\eta)| &= \left|\int_{\partial B(0,1)}(f(\zeta)-f(\eta))P(x,\zeta)dS(\zeta)\right| \\
&\leq \left(\int_{|\zeta-\eta|\leq\delta}+\int_{|\zeta-\eta|>\delta}\right)|f(\zeta)-f(\eta)|P(x,\zeta)dS(\zeta) \\
&\leq \varepsilon+2\|f\|_\infty\int_{|\zeta-\eta|>\delta}P(x,\zeta)dS(\zeta)
\end{aligned}$$

再由 (3), 任意一列 $x_n\to\eta$ 有 $\sup\limits_n|u(x_n)-u(\eta)|\leq\varepsilon$, 由 ε 的任意性得证. □

当然对于一般的球 B, 可以从单位球平移伸缩得到, 其 Poisson 核记作 P_B.

=== 光滑性, 一致收敛和平均值原理之逆 ===

Poisson 核的应用只依赖于边界的连续性, 正如磨光子能使函数光滑化, 而 P 的光滑性会诱导调和函数的光滑性. 实际上作为 Dirichlet 问题研究的副产品, 很多复变函数的结果能很好地搬过来.

【推论 2.8】 调和函数是光滑的.

证明. 为了检查在任一点处的无穷可微性, 取一个小的闭球 B, 对于一个指标 α, 直接检查求导和积分交换

$$D^\alpha u(x)=\int_{\partial B}u(\zeta)D^\alpha P_B(x,\zeta)dS(\zeta)$$

□

我们再来看一致收敛性.

【推论 2.9】(一致收敛) $\{u_m\}$ 为 U 上一列调和函数, 内紧一致收敛到 u. 则 u 调和于 U, 且 $D^\alpha u_m$ 内紧一致收敛到 $D^\alpha u$.

证明. 给定 $\overline{B(a,r)}\subset U$, 有限覆盖保证只需证明 $D^\alpha u_m$ 在 $\overline{B(a,r/2)}$ 的一致收敛性即可. 注

意到

$$
\begin{aligned}
u_m(x) &= \int_{\partial B(a,r)} u_m(\zeta) P_{B(a,r)}(x,\zeta) dS(\zeta) \\
u(x) &= \int_{\partial B(a,r)} u(\zeta) P_{B(a,r)}(x,\zeta) dS(\zeta) \\
D^\alpha u(x) &= \int_{\partial B(a,r)} u(\zeta) D^\alpha P_{B(a,r)}(x,\zeta) dS(\zeta) \\
D^\alpha u_m(x) &= \int_{\partial B(a,r)} u_m(\zeta) D^\alpha P_{B(a,r)}(x,\zeta) dS(\zeta)
\end{aligned}
$$

注意因为 $P_{B(a,r)}$ 满足先前引理性质 (1) 恒正,(2) 积分为 1, 故上第一式推出第二式, 从而 u 在 $B(a,r)$ 内是 Dirichlet 问题的解, 从而调和. 而将第二式推出的第三式与第四式对比, 由于 u_m 在 $\overline{B(a,r)}$ 的一致收敛性,$D^\alpha P_{B(a,r)}$ 在 $B(a,r/2)$ 的一致有界性, 我们可以证明 $D^\alpha u$ 确实存在且是 $D^\alpha u_m$ 一致收敛的结果. □

【推论 2.10】(平均值原理之逆) 设 u 连续于 U, 若对诸 $x \in U$ 存在一列 $r_j \to 0^+$ 使得

$$u(x) = \int_S u(x + r_j\zeta) dS(\zeta)$$

其中 S 为表面积 1 的球面, 则 u 在 U 调和.

证明. 设 $\overline{B(a,R)} \subset U$.$v$ 为该球 Dirichlet 问题的解, 边界与 u 同.

若 $v-u$ 在球内取到过正值, 设 E 为 $v-u$ 取最大值的点. 显然 E 紧, 于是 E 包含某个距离球心 a 最远的点 x. 取 $B(x,r_j) \subset B(a,R)$, 于是

$$(v-u)(x) = \int_S (v-u)(x + r_j\zeta) dS(\zeta)$$

因为 $(v-u)(x+r_j\zeta) \le (v-u)(x)$, 于是 $S \subset E$, 这与 $x \in E$ 离 a 最远相矛盾. 于是 $v-u \le 0$ 在整个 $B(a,R)$, 同理 $-v-(-u) \le 0$, 从而 $v = u$. □

其好处在于证明某些特殊的函数是调和的.

【推论 2.11】 对于上半空间 $\mathbb{H} = \{x : x_n > 0\}$ 调和,$\overline{\mathbb{H}}$ 连续的函数 u. 如果 u 在 $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}^{n-1}$ 取 0, 则 u 可以延拓为全空间调和的函数.

证明. 对 $x \in \mathbb{R}^{n-1}, y \in \mathbb{R}$ 在 $y < 0$ 时考虑定义 $u(x,y) = -u(x,-y)$. 显然 u 在全空间都连续, 根据对称性, 球心在 $\partial\mathbb{H}$ 的球面积分为 0, 进而不难应用上述推论. □

实际上, 可以证明这样的延拓是唯一的, 如果不唯一, 利用下面要讲的解析性, 做差并在上半空间中的点展开为幂级数, 这个幂级数必须全空间收敛而且恒 0.

§2.3 解析性和齐次展开

本章节最后一个话题是我们非常关心的 (当然复变函数也有的) 解析性, 研究级数展开和收敛. 我们声明本文的指标使用标准的定义, 在 $\mathbb{R}^n$ 中

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$
$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

【定义 2.12】(解析函数) 对于 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 f, 如果对任意 $a \in U$ 都有

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha (x-a)^\alpha$$

对 x 在 a 的一个邻域内绝对收敛, 则称 f 解析于 U.

为了方便讨论, 下面总考察 $a = 0$, 且对 $y \in \mathbb{R}_+^n$ 定义矩体

$$R(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < y_j\}$$

那么我们有幂级数求导的基本结论

【引理 2.13】(幂级数求导) $\{c_\alpha y^\alpha\}$ 一致有界, 则:

(a) 对任意 β, 下面的求和在 $R(y)$ 内紧一致收敛

$$\sum_\alpha D^\beta (c_\alpha x^\alpha)$$

(b) 定义 $f(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$ 于 $x \in R(y)$. 则 f 于 $R(y)$ 光滑, 且

$$D^\beta f(x) = \sum_\alpha D^\beta (c_\alpha x^\alpha), c_\alpha = \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}$$

证明. 通过伸缩变换, 这样求导带来的系数只是一个和 β 有关的常数, 于是不妨用 $c_\alpha y^\alpha$ 代替 c_α 从而不妨设 $y = (1, \cdots, 1)$ 以方便描述.

现在我们注意 $\sum_\alpha D^\beta(x^\alpha) = D^\beta\left((1-x_1)^{-1} \cdots (1-x_n)^{-1}\right)$. 对于 $|c_\alpha| \le M$, 若 K 为 $R(y)$ 中的紧集, 则 $K \subset R(ty)$ 对某 $0 < t < 1$. 这时 $\sum_\alpha |D^\beta(c_\alpha x^\alpha)|$ 可以直接与 $\sum_\alpha M \cdot D^\beta(x^\alpha)|_{x=ty}$ 比较.

于是根据导数求和的绝对收敛性, 求和一致收敛于 K 且收敛到 $D^\beta f(x)$. 最后代入 $\beta = \alpha, x = 0$ 就证明了我们需要的 $c_\alpha = \dfrac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}$. □

注. 然而这并不意味着矩形就是幂级数的收敛半径, 例如 $\sum (x_1 x_2)^j$.

【定理 2.14】(解析性) 若 u 在 U 调和, 则在 U 解析.

证明. 若 u 调和于某球 $\overline{B}$, 只需证明其在球心处有一个幂级数展开收敛的邻域. 通过平移和伸缩不妨设 B 为单位球. 为此我们需要 Poisson 核的一些恒等式.

设 $|x| < \sqrt{2}-1$,$\zeta \in S = \partial B$. 则

$$P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{(|x-\zeta|^2)^{n/2}} = (1-|x|^2)\sum_{m=0}^{\infty} c_m(|x|^2 - 2x\zeta)^m$$

其中 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m(t-1)^m = t^{-n/2}$ 是在点 1 的 [[Taylor 展开]], 数分的基础知识告诉我们它的收敛半径为 1. 注意 $|x|^2 + 2|x|\cdot|\zeta| < (\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1) = 1$, 于是对 $x \in (\sqrt{2}-1)B$ 这求和展开成如下形式仍然内闭绝对一致收敛

$$P(x,\zeta) = \sum_{\alpha} x^\alpha q_\alpha(\zeta)$$

进而如果 u 调和于 $\overline{B}$, 有如下的积分表达式

$$u(x) = \int_S u(\zeta)P(x,\zeta)dS(\zeta) = \sum_\alpha \left(\int_S u(\zeta)q_\alpha(\zeta)dS(\zeta)\right) x^\alpha$$

对一切 $x \in (\sqrt{2}-1)B$, 这正是我们需要的. □

注. 值得注意的是上面的展开中我们根本没有关心 q_α 是什么, 实际上前述幂级数求导的定理能告诉我们关于系数的更多信息.

一个坏消息是这个幂级数在 B 内并不总收敛, 比如证明中我们只保证了一个稍小半径的球 $(\sqrt{2}-1)B$. 而真实的情况比如 $1/(1-z)$ 的实部,$\sum \mathrm{Re}(x+iy)^m$ 全写开, 绝对收敛的区域只有 $|x|+|y|<1$. 相对应的好消息是,$(\sqrt{2}-1)B$ 已经足够大, 保证全空间调和的函数的幂级数在全空间收敛.

【推论 2.15】(常值原理) 设 U 连通开集,u 调和于 U 且 $u=0$ 在 U 的某非空开子集, 则 $u=0$ 于 U. 一般的,$u=0$ 可以换成 $u=c$ 任一常数.

证明. 设 $\Omega = (f^{-1}(0))^\circ$, 若 $a \in U$ 作为 Ω 中点列的聚点. 存在 Ω 中某足够接近 a 点的 b, 其 $(\sqrt{2}-1)B$ 包含 a, 因为各皆导数皆 0, 故 b 处的幂级数展开恒 0, 换言之 $(\sqrt{2}-1)B$ 中 u 恒 0, 于是 $a \in \Omega$, 从而 Ω 非空既闭又开. □

【推论 2.16】(局部最大值原理) 设 U 连通开集,u 调和于 U 且在某点取到极大值 (局部最大值), 则 u 是常数.

证明. 根据平均值原理, 局部最大值的点存在一个邻域皆取该值, 则根据常值原理可证. □

接下来, 是一些有关齐次多项式的事情.

首先解析性得来的 $\sum c_\alpha x^\alpha$ 的展开按 $|\alpha|$ 可以分成若干个齐次多项式相加. 这些齐次多项式必然每者都是调和的, 因为求 Laplace 算子可以逐项地进行, 而齐 $|\alpha|$ 次的会变成齐 $|\alpha|-2$ 次的. 故而不同的 $|\alpha|$ 对应的齐次者不会互相影响, 这证明了诸齐次多项式的调和性. 而收敛的齐 m 次多项式求和 $\sum p_m(x)$ 的唯一性也是显然的, 留给读者.

齐次调和展开比起幂级数展开还是有些好处的, 然而更加精细的结果被放在了更后的章节. 它的收敛性则真如复变函数者: 对于 $B(a,r) \subset U$, 其齐次展开收敛于整个 $B(a,r)$ 而不是更小半径的球.

§2.4 Liouville 定理, 可去奇点和 Cauchy 积分估计

接下来我们把复变中更多定量的定理搬过来. 因为这里开始的内容来自《HFT》第二章, 所以多多少少涉及有界性.

回忆全平面有界的全纯函数是常数, 当然经典的证明是用 Cauchy 围道积分给出导函数的一个界, 随半径增加而趋于 0. 不过这里的证明更加奇妙, 首先有界者加上一个充分大的常数则恒正, 于是我们指出

【定理 2.17】(Liouville 定理) $\mathbb{R}^n$ 上的非负调和函数是常数.

证明. 设 u 全空间调和, 非负, 设 $r>0$, 根据平均值原理的球版本

$$\begin{aligned}|u(x)-u(0)| &= \frac{1}{V(r)}\left|\left(\int_{B(x,r)}-\int_{B(0,r)}\right)udV\right| \\ &\leq \frac{1}{V(r)}\int_{B(0,r+|x|)-B(0,r-|x|)} udV = u(0)\frac{(r+|x|)^n-(r-|x|)^n}{r^n}\end{aligned}$$

于是 $r\to+\infty$ 推出对任意 x 有 $u(x)=u(0)$. □

回忆上半平面函数的延拓技巧, 于是有:

【推论 2.18】(上半空间的 Liouville 定理) u 调和且一致有界于 $\overline{\mathbb{H}}$, 若 $u|_{\partial\mathbb{H}}=0$ 则 $u=0$ 于整个 $\overline{\mathbb{H}}$.

实际上, 其告诉我们甚至对于上半空间的开子集上的 Dirichlet 问题, 如果讨论有界解, 那么唯一性可以保证. 这是因为在子集边界为 0 可以零延拓到整个 $\overline{\mathbb{H}}$ 剩下的区域.

接下来我们考察孤立奇点. 复变中我们得知 (去心邻域内) 有界的奇点是可去的, 我们指出调和函数也有这样的结论.

【定理 2.19】(可去奇点) $a\in U$ 是调和函数 u 的孤立有界奇点, 那么 u 可以延拓为整个 U 上的调和函数.

证明. 只需考察单位化后对 $B=B(0,1)$, 若 u 在 $B-0$ 有界全纯,∂B 连续, 则能延拓到整个球. 我们只需证明它和作为 Dirichlet 问题的解的 $\overline{u}$ 在 $B-0$ 相符即可. 先假设 $n>2$, 对 $\varepsilon>0$, 定义

$$v_\varepsilon(x)=u-\overline{u}+\varepsilon(|x|^{2-n}-1)$$

显然 $|x|\to1$ 时 $v_\varepsilon(x)\to0$. 同时 $|x|\to0$ 时 $v_\varepsilon(x)\to+\infty$. 于是对环状区域 $\{x:\varepsilon'<|x|<1-\varepsilon'\}$ 使用最值原理, 令 $\varepsilon'\to0^+$, 可知 $v_\varepsilon\geq0$ 在 $B-0$ 恒成立. 于是令 $\varepsilon\to0^+$ 可知 $u\geq\overline{u}$, 而用 $-u$ 讨论知 $-u\geq-\overline{u}$, 从而 $u=\overline{u}$ 于 $B-0$, 即 $\overline{u}$ 为 u 在 B 的延拓. 特别地,$n=2$ 时采用 $-\log|x|$ 即可. □

注. 很明显这个命题可以稍稍加强为 $|x|^{n-2}u(x)\to0$ 以及二维时 $u(x)/\log|x|\to0$. 这两种情况下奇点仍然是可去的.

【定理 2.20】(Cauchy 积分估计) 任意指标 α, 存在常数 $C_\alpha>0$ 使得

$$|D^\alpha u(a)|\leq\frac{C_\alpha M}{r^{|\alpha|}}$$

其中 u 是 $\overline{B(a,r)}$ 内以 M 为界的调和函数.

证明. 显然只需证明单位化为 $B=B(0,1)$ 后的结果, 此时偏导数变成原先的 $r^{|\alpha|}$ 倍.

$$|D^\alpha u(0)| = \left|\int_{\partial B} u(\zeta) D^\alpha P(0,\zeta) dS(\zeta)\right|$$

我们只需注意 $C_\alpha = \int_{\partial B} |D_x^\alpha P(0,\zeta)| dS(\zeta)$ 是一个有限数, 因为积分是只在球面进行的. □

【例 2.21】 若 $|u(x)| \le A(1+|x|^p)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}^n$ 其中 $A, p \ge 0$ 为常数. 则 u 至多是一个 p 次的多项式.

【推论 2.22】(列紧性) 设 U 是开集,K 为其紧子集,$\{v_n\}$ 是 U 上一列一致有界的调和函数. 则存在其子列在 K 上一致收敛到连续函数 v, 于是 v 其在 K 的内点是调和的.

证明. 根据 Arzela–Ascoli 定理, 我们只要证明它们在 K 等度连续. 取 $0<r<d(K,U^c)/2$. 于是每个 K 中的点 x 都满足 $\overline{B(x,r/2)} \subset U$, 其中调和函数的导数可以用 Cauchy 积分估计确认一致有界性, 自然有等度连续. □

注. inremark 更加一般的, 可以考察调和函数正规族. 实际上, 上面的定理可以加强到存在子列在任意内紧子集上一致收敛而不是某个特定的 K. 具体做法为考虑用 $\overline{\{x : d(x,U^c) < 1/n\} \cap B(0,n)}$ 紧穷竭 U, 然后取对角列.

§2.5 线极限

这一小节作为补充内容 (Additional Topics), 主题在原书中叫 Limits Along Rays, 线极限这个翻译不达不雅, 但是一时也找不到更合适者, 只好用之. 该主题与复变中的 Fatou 定理关系密切, 研究沿着特殊曲线逼近边界时函数的值, 这里我们考察的区域是上半空间. 为此, 我们引入一些记号.

给定 $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ 和 $\alpha > 0$, 记

$$\Gamma_\alpha(a) = \{(x,y) \in \mathbb{H}, |x-a| < \alpha y\}$$

是一个 a 为锥顶位于上半平面中的锥形区域. 显然 $\alpha < \beta$ 时 $\Gamma_\alpha(a) \subset \Gamma_\beta(a)$, 而且 $\alpha \in (0,+\infty)$ 变化时 $\Gamma_\alpha(a)$ 的并集是整个 $\mathbb{H}$.

对于一个 $\mathbb{H}$ 上的调和函数 u, 如果对每个 $\alpha > 0$ 都有 $z \to a$ $(z \in \Gamma_\alpha(a))$ 时 $u(z) \to L$, 则称它在 a 处有非切向极限 L. 很明显这里我们限制了趋于边界的方式. 作为本章的结束, 我们证明一个二维情形 (所以下面称上半平面) 的小定理.

【定理 2.23】 设 u 有界调和于上半平面, 若 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ 且

$$\lim_{r\to 0} u(re^{i\theta_1}) = \lim_{r\to 0} u(re^{i\theta_2}) = L$$

那么 u 在 0 点有非切向极限 L.

证明. 为便利设 $L=0$. 反设结论不真, 则存在 $\alpha > 0$ 使得 $u(z)$ 在 $\Gamma_\alpha(0)$ 的 0 处不满足极限为 $L=0$, 于是存在其中一列 $z_j \to 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 使得 $|u(z_j)| > \varepsilon$ 对一切 j.

记 K 为 $-\alpha+i$ 到 $\alpha+i$ 连成的线段. 设 $z_j=r_jw_j$, 其中 $w_j\in K, r_j>0, r_j\to 0^+$. 再设 $u_j(z)=u(r_jz)$ 显然关于 $z\in\mathbb{H}$ 一致有界, 于是根据列紧性, 存在子列在任意 $\mathbb{H}$ 的紧子集上一致收敛, 用其替代原序列. 现在 u_j 收敛到 $\mathbb{H}$ 上调和的 v, 其满足

$$v(re^{i\theta_1})=\lim_{j\to\infty}u(r_jre^{i\theta_1})=0=v(re^{i\theta_2})$$

这时显然 v 也有界, 通过如下变换将锥形区域变成上半平面

$$\tilde{v}(z)=v((z/e^{i\theta_1})^{\pi/(\theta_2-\theta_1)})$$

这样 $\tilde{v}=0$ 于整个上半平面. 由此 $v=0$ 于上半平面, 与 $|u_j(w_j)|>\varepsilon$ 矛盾. □

注. 如果把调和函数换成全纯函数, 那么显然只需要一个 θ 处的条件即可, 因为全纯函数的零点没有聚点. 当然从过程完整性的角度来说, 我们注意到全纯函数也有前述正规族和列紧性的相关事实.

作为补充, 我们回忆复分析中学过的 Fatou 定理.

【定理 2.24】(Fatou 定理) 单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 F 有界, 则对几乎处处的 θ 都有径向极限 $\lim\limits_{r\to 1^-}F(re^{i\theta})$ 存在.

证明. 在 0 处幂级数展开得到 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$, 于是对于 $r<1$ 有

$$a_nr^n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

下设 $|F(z)|\le M$, 根据 Parseval 恒等式我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})|^2d\theta\le M^2$$

于是 $\sum|a_n|^2\le M^2$ 收敛, 于是 $F(e^{i\theta})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\theta}$ 收敛到 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的函数. 这时因为 $m([-\pi,\pi])<+\infty$, 于是 $L^2([-\pi,\pi])\subset L^1([-\pi,\pi])$.

□

我们指出如下一个引理.

【引理 2.25】 设 $f\in L^1([-\pi,\pi])$, 记 $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$. 那么当 $r\to 1^-$ 时 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}a_nr^{|n|}e^{in\theta}\to f(\theta)$ 对几乎处处的 θ 成立.

引理的证明. 注意到有 Poisson 核, 对 $r<1$ 时我们有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{in\gamma}=P_r(\gamma)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}$$

于是现在将 f 看作周期为 2π 的函数延拓到 $\mathbb{R}$ 上, 于是不难得知有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nr^{|n|}e^{in\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-\gamma)P_r(\gamma)d\gamma$$

于是在上面的式子两端取 $r \to 1^-$, 在 f 的一切 Lebesgue 点处, 根据恒同逼近核的性质不难检验右式逼近 $f(\theta)$. $\square$

依此引理, 原 Fatou 定理得证.

注. 有两个细节. 其一, 通过将圆盘映射到上半平面, 那么 Fatou 定理提供的一个 $\theta = \pi/2$ 条件即可推出非切向极限存在. 换言之, 圆盘版本的非切向极限也几乎处处存在. 其二, 可以考察更广的一类函数, 不仅仅是有界的全纯函数, 只要 $\sum |a_n|^2 < +\infty$ 即可, 这样的函数构成 Hardy space, 具体的细节可能在后文会提到.

一个习题. 证明 $\mathbb{D}^3 - K$ 中的有界调和函数可延拓到 $\mathbb{D}^3$. 其中 $K \subset \mathbb{D}^3$ 是一条线段.

Hint. 考察在线段上积分 $|y-x|^{2-n}$, 然后重复先前单点的证明, 分析你的证明在其余维数能不能使用.

第 三 章

位势方程

本章节的主要目的是将调和函数的讨论适当推广到更一般的偏微分方程中去.

§3.1 Green 函数和基本解

首先我们企图推广 Poisson 核和 Dirichlet 问题的有关结果.

回忆 $|x|^{2-n}$(维数 2 时则是 $\log|x|$), 它是在除原点外空间中径向对称的调和函数. 我们先前已经看到了它在研究调和函数时起到的重要作用, 实际上从广义函数的角度来说, 它本身在 0 点处的爆炸其实属于是: 它在 Laplace 算子作用下得到 $\delta(x)$ 的一个倍数. 调整系数后, 它也被叫做基本解.

【定义 3.1】(基本解) 对 $x \neq 0$ 于 $\mathbb{R}^n$ 称下列函数为基本解

$$\Gamma(x) = -\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & n=2 \\ \dfrac{|x|^{2-n}}{(2-n)S(1)}, & n \geq 3 \end{cases} \tag{3.1}$$

既然它和 δ 函数有这样的关系, 我们立刻想到, 对于 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$(下标的 $_c$ 表示紧支), 如果我们如下定义函数

$$u(x) = (\Gamma * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) f(x-y)dy$$

那么不出所料应该有

【定理 3.2】 如上定义的 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 而且 $-\Delta u = f$.

证明. 二次可微性来自求导和积分交换, 下面计算 Δu

$$\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y)\Delta_x f(x-y)dy = \int_{B(0,\varepsilon)} + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)}$$

显然当 $\varepsilon \to 0$ 时前一个积分的值自然趋于 0. 注意到 Green 第二恒等式, 设 $f(x-y)$ 支于

$B(0,R_x)$, 于是结合 Γ 的调和性

$$\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}\Gamma(y)\Delta_x f(x-y)dy=\int_{B(0,R_x)-B(0,\varepsilon)}\Gamma(y)\Delta_y f(x-y)dy \tag{3.2}$$

$$=\int_{B(0,R_x)-B(0,\varepsilon)}\Delta_y\Gamma(y)f(x-y)dy \tag{3.3}$$

$$+\int_{\partial B(0,R_x)\cup\partial B(0,\varepsilon)}\left(\Gamma(y)D_N f(x-y)-f(x-y)D_N\Gamma(y)\right)dS(y) \tag{3.4}$$

$$=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\left(\Gamma(y)D_N f(x-y)-f(x-y)D_N\Gamma(y)\right)dS(y) \tag{3.5}$$

分别估计在 $B(0,\varepsilon)$ 中两者的取值, 前者还是一如既往地趋于 0, 而后者则需细致地考察:

$$D_N\Gamma(y)=-\frac{1}{S(1)|y|^{n-1}}$$

于是在 $B(0,\varepsilon)$ 小球的值为定值且积分为 -1. 利用 f 的连续性立刻得到 $-\Delta u=f$, 证毕. □

根据线性代数的思想, 如果我们知道 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个特解 $\mathbf{x}_0$, 那么通解可以通过特解加上一个 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解得到. 在这里也是如此. 回忆起我们曾经研究过单位球的 [[Dirichlet 问题]], 现在我们来看更加一般的版本. 对于一个边界光滑的开集 U 以及 $f\in C^2(U), g\in C(\partial U)$, 我们希望求解:

$$-\Delta u=f,\ u|_{\partial U}=g$$

对于 U 有界, 唯一性结论还是适用 (回忆第一章), 下面的讨论局限于 U 有界的情况.

首先能做的最明显简化在于, 构造一个紧支集连续函数, 使得它和 f 在 U 上相同, 连续函数延拓的拓扑学技巧这里省略. 现在我们能找到 $-\Delta u_0=f$ 者, 于是在原问题中用 $u+u_0$ 代替 u, 现在只需求解

$$-\Delta u=0,\ u|_{\partial U}=\tilde{g}=g-u_0$$

于是这启发我们研究一般区域的 Poisson 核. 寄希望于从边值来求解内部值. 下面的计算来自于对其解 $u(y)$ 以及 $\Gamma(y-x)$ 在 $\Omega=U-B(x,\varepsilon)$ 上使用第二 Green 恒等式, 得到

$$\int_\Omega\left(u(y)\Delta\Gamma(y-x)-\Gamma(y-x)\Delta u(y)\right)dy$$
$$=\int_{\partial\Omega}\left(u(y)D_N\Gamma(y-x)-\Gamma(y-x)D_N u(y)\right)dS(y)$$

其中 u,Γ 的调和性告诉我们左式为 0, 右边分为 $\partial U,\partial B(x,\varepsilon)$ 两个区域, 先看 ε 小球, 显然和前面的计算一样结合 u 连续可导得知趋于 $u(x)$. 于是 $\varepsilon\to 0^+$ 便得到

$$u(x)=\int_{\partial U}\left(\Gamma(y-x)D_N u(y)-u(y)D_N\Gamma(y-x)\right)dS(y)$$

但是现在我们还是不知道 $D_N u(y)$, 于是我们希望找一个调和函数 ϕ^x, 满足

$$-\Delta_y\phi^x(y)=0\ (y\in U),\ \phi^x|_{\partial U}=\Gamma(y-x)$$

这次对 $\phi^x(y), u(y)$ 使用第二 Green 恒等式, 得到

$$0 = \int_{\partial U} (u(y) D_N \phi^x(y) - \Gamma(y-x) D_N u(y))\, dS(y)$$

把它与 $u(x)$ 的表达式相加消掉我们不要的东西, 得到

$$u(x) = \int_{\partial U} u(y) D_N (\phi^x(y) - \Gamma(y-x)) dS(y)$$

这条表达式中我们看到了 Poisson 核的影子. 自然地我们定义 [[Green 函数]], 显然这样的定义只和区域 U 本身有关.

【定义 3.3】(Green 函数) 对于 $x \neq y$ 为 U 中两点, 定义格林函数为:

$$G(x,y) = \Gamma(y-x) - \phi^x(y)$$

【定理 3.4】(Green 函数的对称性) 对一切 $x \neq y$ 为 U 内两点, 有 $G(y,x) = G(x,y)$.

证明. 取充分小 ε 使得 $B(x,\varepsilon), B(y,\varepsilon)$ 皆含于 U 且不交, 定义 $v(z) = G(x,z), w(z) = G(y,z)$. 显然依定义 $\Delta v(z) = 0$ $(z \neq x)$, $\Delta w(z) = 0$ $(z \neq y)$, 同时两者在 ∂U 上皆为 0. 于是在 $U - B(x,\varepsilon) - B(y,\varepsilon)$ 上对 v, w 使用第二 Green 恒等式得到

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} (w D_N v - v D_N w)\, dS(z) = \int_{\partial B(y,\varepsilon)} (v D_N w - w D_N v)\, dS(z)$$

先考察左式,$vD_N w, wD_N \phi^x(z)$ 显然随着 $\varepsilon \to 0^+$ 一致有界, 剩下的部分注意根据 w 的连续性

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} w(z) D_N \Gamma(z-x) dS(z) = w(x)$$

同理右边容易证明是 $v(y)$, 于是 $w(x) = v(y)$ 即 $G(y,x) = G(x,y)$. □

§3.2 Dirichlet 问题和次调和函数

我们现在可以考察上一小节所述的带有光滑边界 ∂U 的有界开集 U 上的 Dirichlet 问题, 令人惊讶的是下面的方法是如此的初等. 其核心的方法是研究次调和 (和超调和的函数). 下面这个定义可能有些奇怪, 但是更加广泛.

【定义 3.5】(次 (超) 调和函数) 对于 $u \in C(U)$, 如果它满足, 对每个 $\overline{B} \subset U$,$\overline{B}$ 上调和的 h 如果满足 $u \leq h$ 于 ∂B 则这不等式在内部 B 亦成立.

则称这样的 u 称次调和的, 如果上定义中的不等式改成 $u \geq h$, 则称超调和的.

注. [几个基本性质] 读者如果有耐心就看看证明.

(0). 次调和函数满足最大值原理. 更强地, 我们有下面的 **(i)**, 通过取常值函数很容易从 **(i)** 证明 **(0)**.

(i). 对有界连通开集 U, 若 v 在 $\overline{U}$ 超调和,u 在 $\overline{U}$ 次调和; 且 $v \geq u$ 于 ∂U, 则 $v = u$ 于 U 或者 $v > u$ 于 U 二者恰一成立.

若二者皆不成立, 说明存在 $x_0 \in U$ 使得 $(u-v)(x_0) = \sup_U (u-v) = M \geq 0$ 而且 $u \neq v$ 于某 U 中的点. 现在合理取 $x_0, B = B(x_0, R)$ 为 $u - v = M$ 在 ∂B 上不恒成立的小球 (否则连通性使 $u - v = M$ 于 U 恒成立), 设 $\overline{u},\overline{v}$ 为与 u,v 在 ∂B 上相等的球 Dirichlet 问题的解. 于是

$$M \geq \sup_{\partial B}(\overline{u}-\overline{v}) \geq (\overline{u}-\overline{v})(x_0) \geq (u-v)(x_0) = M$$

因此必然每一步都取等, 那么调和函数的最大值原理保证 $\overline{u}-\overline{v} = M$ 于 B 恒成立, 这与 B 的选择相矛盾.

(ii). 设 u 次调和于 $\overline{U}$, 对于开集 $B \subset U$, 不一定是球. 设 $\overline{u}$ 为以 u 为 ∂B 边界值的 Dirichlet 问题的解. 定义 U 中 u 于 B 的调和提升为

$$\tilde{u}|_B = \overline{u},\ \tilde{u}|_{U-B} = u$$

那么我们声称 $\tilde{u}$ 在 U 也是次调和的. 显然 $\tilde{u} \geq u$. 现在注意对 $\overline{B'} \subset U$,h 调和于 $\overline{B'}$. 如果 $h \geq \tilde{u}(\geq u)$ 于 $\partial B'$ 则根据 u 次调和有 $h \geq u$ 于 B', 即有 $h \geq \tilde{u} = u$ 于 $B' - B$. 这时因为 $\tilde{u}$ 调和于 B, 根据最大值原理,$h \geq \tilde{u}$ 于 $\partial(B' \cap B) \subset \partial(B' - B) \cup \partial B'$, 于是 $h \geq \tilde{u}$ 于 $B' \cap B$ 进而定义检查完成.

(iii). 设 $\{u_i\}_{i\in I}$ 次调和于 U, 则 $u(x) = \sup\{u_i(x)\}_i$ 亦次调和于 U. 这是依定义显然的.

有趣的部分来了, 现在设有界连通 U 和一个 $\varphi \in C(\partial U)$. 定义

$$S_\varphi = \{\overline{U} \qquad u : u|_{\partial U} \leq \varphi\}$$

称为相对 φ 的次函数, 同理定义相对一个函数的超函数. 很显然不超过 $\inf_{\partial U}\varphi$ 的常值函数都是次函数. 那么我们有如下很重要的定理.

【定理 3.6】(Perron 解) $u(x) = \sup_{v\in S_\varphi} v(x)$ 调和于 U.

原问题的证明. 首先根据最大值原理 $v \in S_\varphi$ 自然满足 $v \leq \sup \varphi$, 这证明了 u 良定. 下面任取定 $y \in U$.

根据 u 定义, 设 $\{v_n\} \subset S_\varphi$ 满足 $v_n(y) \to u(y)$. 现在考察用 $\max\{v_n, \inf \varphi\}$ 来代替 v_n, 它们还是次调和的, 不会影响任何事情, 于是可以假定一致有界性. 现在取定一个 $B = B(y,R)$ 使得 $\overline{B} \subset U$, 提升诸 v_n 于 B 得到 $\tilde{v}_n$. 根据一致有界性,$\{\tilde{v}_n\}$ 存在一个子列一致收敛, 我们用这个子列替代原序列.

假设它收敛到调和函数 v, 显然 $v_n \leq \tilde{v}_n \leq u$, 继而 $v \leq u$ 于 B 且 $v(y) = u(y)$. 现在我们声称 $v = u$ 于 B. 假若 $v(z) < u(z)$ 于某 $z \in B$, 则存在 $\overline{u} \in S_\varphi$ 使 $v(z) < \overline{u}(z)$. 故技重施, 设 $w_k = \max(\overline{u}, v_k)$, 并提升得到 $\tilde{w}_k$ 于 B. 现在 $\{\tilde{w}_k\}$ 一致有界故有一致收敛子列, 收敛到的 w 满足 $v \leq w \leq u$ 于 B, 而且 $v(y) = w(y) = u(y)$. 根据调和函数最大值原理 $v = w$ 于 B, 这与 $\overline{u}$ 的定义矛盾 (因为 $v_k(z) \to v(z) < \overline{u}(z) = w(z)$ 然而 $v(z) = w(z)$ 矛盾), 继而 $u = v$ 调和于 B. □

读者马上就会想到, 既然这个 u 调和于 U, 那么它是不是 Dirichlet 问题的解呢? 别急, 我们还要检查边界的连续性.

【定义 3.7】(屏障函数 (barrier function) 和正规点) 对于给定的 $\xi \in \partial U$, 若 $w \in C(\overline{U})$ 满足:

(i).w 超调和于 U;

(ii).$w \geq 0$ 于 $\overline{U}$, 取等当且仅当于 ξ.

则称 w 是 ξ 关于 U 的屏障函数. 若一个边界点 $\xi \in \partial U$ 有对应的屏障函数, 则称该点是正规的.

我们声称正规是一个局部性质, 更准确地说, 对任意一个 ξ 的邻域 $N \subset U$, 考虑一个小球 $\xi \in B$ 使得 $\overline{B} \cap U \subset N$. 再设 $w = \inf\limits_{N-B} w > 0$, 则如下的函数可以看作 $U - B$ 上函数 $\min(m, w(x))$ 的提升, 显然也是超调和的.

$$\overline{w}(x) = \begin{cases} \min(m, w(x)), & x \in \overline{U} \cap B \\ m, & \overline{U} - B \end{cases}$$

于是我们指出

【定理 3.8】 有界区域的 Dirichlet 问题对任意连续的边值可解当且仅当一切边界点都正规.

为此我们先证明如下的引理.

【引理 3.9】 设 φ 的 Perron 解 u 调和于 U, 若 ξ 是 U 的正规边界点, 则 $u(x) \to \varphi(\xi)$ 随 $x \to \xi$.

引理的证明. 任意 $\varepsilon > 0$ 取定, 记 $M = \sup |\varphi|$. 因为 ξ 的正规性, 设屏障函数 w.

根据 φ 的连续性, 设 $x \in \partial U, |x - \xi| < \delta$ 时 $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$. 再取常数 k 使得 $|x - \xi| \geq \delta$ 时 $kw(x) \geq 2M$. 于是现在,$\varphi(\xi) + \varepsilon + kw, \varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ 是相对 φ 的超函数和次函数. 那么根据 u 的定义和超调和 S_φ 中函数的次调和的关系 **(i)**, 我们有

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$$

从而写作

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x)$$

那么随着 $x \to \xi$ 我们知道 $w(x) \to 0$ 于是 ε 的任意性证明了 $u(x) \to \varphi(\xi)$. □

原则上来说, 我们比较关心的情形正是边界较好的情形, 所以有解性已经由上面的引理给出了. 但是一般的结论还是有其意义.

原问题的证明. 现在反过来, 假设对一切连续边值,Dirichlet 问题都能解. 设 $\xi \in \partial U$, 我们试图构造屏障函数. 实际上读者不难验证:$\varphi(x) = |x - \xi|$ 的解符合条件, 因为最小值原理保证只在该点取到 0. □

那么最后的问题是怎么确认边界上的点是正规的呢?

【定理 3.10】(外部球面条件) 如果有界开 U 的每个边界点 ξ 都满足, 存在一个 $B = B(y, R)$ 使得 $\overline{B} \cap \overline{U} = \xi$ 成立, 则每个边界点都是正规的.

证明. 考虑如下的屏障函数:

$$w(x) = \begin{cases} R^{2-n} - |x - y|^{2-n}, & n \geq 3 \\ \log \dfrac{|x - y|}{R}, & n = 2 \end{cases}$$

其可行性留给读者自行验证. □

很明显,C^2 的边界总符合这条件, 因为这时一个点附近的边界不会和过该点的切 (超) 平面相差太多. 细节留给读者验证.

【推论 3.11】 U 是有界开集, 边界 ∂U 是 C^2 的, 则其上的 Dirichlet 问题对任意边值存在唯一解.

§3.3 最大值原理

这个小节我们讨论的问题会更加一般一些. 我们声称也有如下方程版本的最大模原理.

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + c(x)u$$

仍然保持 U 是有界开集的传统, 不过我们还要额外假设 $c(x) \geq 0$ 于 U, 这很重要. 现在我们将在调和函数证明过的结果搬过来, 自然因为是更一般的形式, 证明过程也会有所不同.

【定理 3.12】(弱最大值原理) 设 $\mathcal{L}u < 0$ 于 U. 则 u 在 U 中不能取到一个非负的最大值.

其次, 如果 u 在 $\overline{U}$ 连续, 且减弱条件为 $\mathcal{L}u \leq 0$ 则仍然能保证

$$\max_{x\in\overline{U}} u^+(x) \leq \max_{x\in\partial U} u^+(x)$$

其中 $u^+ = \max\{u, 0\}$.

证明. 反设 u 在 $x_0 \in U$ 取非负最大值, 那么其 [[Hessian 矩阵]]$Hu(x_0)$ 非正定, 至少其迹非正. 于是 $\Delta u(x_0) \leq 0$, 但这立刻导致 $\mathcal{L}u \geq 0$ 而与题设矛盾.

对于后者, 不妨设 $0 \in U, \operatorname{diam}(U) = d$, 研究 $w(x) = u(x) - \varepsilon(d^2 - |x|^2)$. 很显然 $w(x) \leq u(x) \leq w(x) + \varepsilon d^2$ 而且 $\mathcal{L}w \leq \mathcal{L}u - 2n\varepsilon < 0$. 这样根据命题前半部分我们得到

$$\max_{x\in\overline{U}} w^+(x) \leq \max_{x\in\partial U} w^+(x)$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 立刻得到我们需要的结论. □

在讨论传统的强最值原理之前, 我们需要一个古怪的引理.

【引理 3.13】(Hopf 引理) 假设 $B = B(y, r)$, 在 B 上 $c(x) \geq 0$ 且有界, 如果 $\mathcal{L}u \leq 0$ 于 B,u 连续于 $\overline{B}$. 而且全局的最大值非负, 在 B 内取不到, 在某 $\xi \in \partial B$ 取到, 那么

$$D_\nu u(\xi) > 0$$

其中 ν 是与 ∂B 在 ξ 的外法向量 N 夹角小于 $\pi/2$ 的任意向量.

证明. 显然有 $D_\nu u(\xi) \geq 0$, 只需证不能取等. 为方便讨论不妨设球心于原点, 在 $B^* = \{R/2 < |x| < R\}$ 上构造一个待定的辅助函数:

$$w(x) = u(x) - u(\xi) + \varepsilon v(x)$$

不妨要求 $v(\xi) = 0$ 这样 $w(\xi) = 0$, 因而 $w(x)$ 在 $\overline{B^*}$ 的非负最大值存在. 如果能找到一组 $\varepsilon > 0, v$ 使得 $w(x)$ 在 ξ 达到非负最大值, 那么

$$0 \leq D_\nu w(\xi) = D_\nu u(\xi) + \varepsilon D_\nu v(\xi)$$

于是目前需要的条件包含 (为了让 w 在边界取到非负最大值, 以及为了让 $D_\nu u(\xi) > 0$):

$$\mathcal{L}v \le 0\ (x \in B^*);\ D_\nu v(\xi) < 0$$

不仅如此, 还需要再内球面上不要取到非负的值. 根据对称性, 因为挖掉了球心的缘故, 我们可以大胆尝试

$$v(x) = |x|^\alpha - R^\alpha$$

其中 $\alpha < 0$ 待定, 那么在 B^* 上计算 $\mathcal{L}v$ 得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}v &= -\alpha(\alpha+n-2)|x|^\alpha + c(x)(|x|^\alpha - R^\alpha)\\ &\le (-\alpha(\alpha+n-2) + CR^2)|x|^{\alpha-2}\end{aligned}$$

于是取 $\alpha < 0$ 绝对值足够大, 这样 $\mathcal{L}v \le 0$, 这推出 $\mathcal{L}w \le 0$ 进而保证了 w 在球壳上取非负最大值. 而在内球面上 $u(x) - u(\xi)$ 的最大值显然应该是小于 0 的, 记作 β. 那么我们取 $\varepsilon > 0$ 足够小使得

$$w|_{\partial B(0,R/2)} \le \beta + \varepsilon R^\alpha(2^{-\alpha-1}) < 0$$

最后显然 $D_\nu v(\xi) < 0$, 于是结论得证. □

【定理 3.14】(强最大值原理) 连通有界开集 U,$c(x) \ge 0$ 有界, 那么如果 $\mathcal{L}u \le 0$ 于 U,u 连续于 $\overline{U}$ 且在 U 中某点取到非负最大值, 那么 u 在 $\overline{U}$ 为常数.

证明. 设 u 在 $\overline{U}$ 的最大值为 M, 记 $S = u^{-1}(M) \cap U$, 显然 S 是闭集, 下面只需证明 S 是开集. 任意 $x_0 \in S$, 取 $B = \overline{B(x_0, 2r)}U$, 如果 x_0 不是 S 的内点, 则存在 $\tilde{x} \in (U - S) \cap B(x_0, r)$, 记

$$0 < d = \operatorname{dist}(\tilde{x}, S) \le r$$

因此 $B(\tilde{x}, d) \subset B(x_0, 2r) \subset U$, 从而

$$u(x) < M,\ x \in B(\tilde{x}, d)$$

设 $\xi \in \partial B(\tilde{x}, d) \cap S$, 则 $u(\xi) = M$. 是函数 u 的极值点. 因此 $\nabla u(\xi) = 0$. 但这与 Hopf 引理得到的 $D_\nu u(\xi) > 0$ 矛盾, 这说明 x_0 是内点, 故 S 是开集. □

§3.4 最大模估计和能量模估计

这一小节中, 我们将感受定量分析的一些基本技巧. 研究位势方程边值问题的定量估计可以得到一些重要的稳定性结果. 先考察最熟悉的

【定理 3.15】(Dirichlet 问题的最大模估计) 对于 $-\Delta u = f\ (x \in U)$, $u|_{\partial U} = g$, 假设其有解 u, 那么

$$\max_{x \in \overline{U}} |u(x)| \le G + CF$$

其中 $G = \max|g|$, $F = \sup|f|$,C 是一个仅依赖于 U 的直径和维数的常数.

证明. 不妨设 $0\in U$, 设 $w(x)=u(x)-z(x)$, 其中

$$z(x)=G+\frac{F}{2n}(d^2-|x|^2)$$

容易验证 $-\Delta w=f-F\le 0\ (x\in U), w|_{\partial U}\le g-G\le 0$. 现在最大值原理告诉我们 $w\le 0$ 于 U, 也就是:

$$u(x)\le z(x)\le G+\frac{d^2}{2n}F$$

同理 $-u$ 也能类似地操作. □

可以看出, 证明的关键在于一上来就奇妙操作构造一个辅助函数, 然后利用最大值原理给出估计. 于是如法炮制我们得到

【定理 3.16】(第三边值问题的最大模估计) 对于 $-\Delta u+cu=f\ (x\in U),\ D_Nu+\alpha u=g$, 假设 $c\ge 0,\alpha\ge\alpha_0>0$, 假设其有解 u, 则

$$\max_{\overline{U}}|u(x)|\le C(G+F)$$

其中 G,F 如前,C 仅依赖于维数 n,U 的直径 d 以及 α_0.

证明. 设 $0\in U$, 传统设 $w=u-z$, 这次

$$z(x)=\frac{G}{\alpha_0}+\frac{F}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2-|x|^2\right)$$

不难验证 U 上 $-\Delta z+cz\ge F$,∂U 上

$$D_Nz+\alpha z\ge G+\frac{F}{2n}(-|x|^2-1+(1+d^2))\ge G$$

根据最大值原理 w 的非负最大值一定在边界取到, 假设最大值 $w(\xi)>0$

$$D_Nw+\alpha w\le g-G\le 0\ (x\in\partial U);\ D_Nw(\xi)\ge 0,\alpha(\xi)w(\xi)>0$$

矛盾, 因此 $u\le z\le C(G+F)$, 其中

$$C=\max\left(\frac{1}{\alpha_0},\frac{1}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2\right)\right)$$

时结论成立. □

至于稳定性, 也就是说假设 α,c,f,g 在很小的范围内波动, 对解的影响很小这一点, 只需将解做差应用最大模估计即可. 最后我们来看能量模估计, 其估计的对象是解函数和导数在 U 的二阶矩. 我们有

【定理 3.17】 对于 $-\Delta u+cu=f\ (x\in U),\ u|_{\partial U}=0$, 假设 $c\ge c_0>0$, 假设其有解 u, 则

$$\int_U\left(|\nabla u|^2+\frac{c_0}{2}|u|^2\right)dx\le M\int_U|f|^2dx$$

其中 M 是依赖于 c_0 的常数.

证明. 根据方程得到

$$-\int_U u\Delta u dx + \int_U c(x)u^2 dx = \int_U f u dx$$

左边第一项根据高斯公式等于 $|\nabla u|^2$ 的积分, 右边放缩 $2fu \le c_0 f^2 + \dfrac{1}{c_0}u^2$, 于是

$$\int_U (|\nabla u|^2 + |c_0|u^2)dx \le \frac{c_0}{2}\int_U u^2 dx + \frac{1}{2c_0}\int_U f^2 dx$$

移项即得证. □

结合经典的 Friedrichs 不等式, 即 $u \in C_c^1(U)$ 则

$$\int_U |u|^2 dx \le 4d^2 \int_U |\nabla u|^2 dx$$

这不等式证明简单, 只需要将 U 置于 $2d$ 边长的正方体 $[0,2d]^n$ 中, 注意

$$u(x_1,\cdots,x_n) = \int_0^{x_1} u'_{x_1}(\xi, x_2,\cdots,x_n)d\xi$$

结合 Cauchy 不等式

$$u^2 \le x_1 \int_0^{x_1} |u'_{x_1}|^2 d\xi \le 2d\int_0^{2d} |u'_{x_1}|^2 d\xi$$

然后积分并将对应 $x_1,\cdots,x_n$ 求导的式子相加即得.

【推论 3.18】 对于 $-\Delta u + cu = f\ (x\in U)$, $u|_{\partial U} = 0$, 假设 $c \ge 0$, 假设其有解 u, 则

$$\int_U \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) dx \le M \int_U |f|^2 dx$$

其中 M 是依赖于 U 直径的常数.

第四章

正调和函数和 Kelvin 变换

这一章节来自于《HFT》第三、四章, 这两个话题本身没什么关系，只是因为内容皆较少被整理了进来, 前一个话题的重点内容是 Harnack 不等式和正值的孤立奇点; 后一个话题的主要思想是将反演变换的想法推到更一般的情况, 研究一类无界区域上的调和函数和无穷远点的情况.

§4.1 Harnack 不等式

实际上, 取值为正其实对调和函数起到了不小的限制, 这方面的结果叫做 Harnack 不等式, 我们先看最特殊的情况.

【定理 4.1】(球的 Harnack 不等式) 设 u 非负调和于单位球 B, 那么对一切 $x \in B$ 有

$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}u(0)$$

实际上证明简单得出乎意料, 非负条件的使用也是非常自然的.

证明. 先考察 u 在 $\overline{B}$ 还连续的情形. 这时设 $S=\partial B$, 利用 Poisson 核计算得

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{S(1)}\int_S u(\zeta)\frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n}dS(\zeta) \\ &\leq \frac{1}{S(1)}\frac{1-|x|^2}{(1-|x|)^n}\int_S u(\zeta)dS(\zeta) = \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}u(0) \end{aligned}$$

现在对一般的情况, 在半径 r 的小球使用上述估计, 令 $r \to 1^-$ 即可. 另一边的不等式是相仿的. □

实际上, 这说明对于紧 $K \subset B$, 对其中的两点 $x, y \in K$, 比值 $u(x)/u(y)$ 有界, 而且上下界只依赖于 K 的位置而不是非负的函数本身. 我们立刻会问, 能不能把 B 换成更一般的形状呢? 答案是肯定的.

【定理 4.2】 U 是连通开集, 紧集 $K \subset U$, 则存在 $C > 1$ 使

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(y)}{u(x)} \leq C$$

对 K 中的任意两点 x, y 和一切正调和于 U 函数 u 成立.

<u>**证明.**</u> 只证其上界, 对 $(x,y)\in U\times U$, 定义

$$s(x,y)=\sup\left\{\frac{u(y)}{u(x)}:u \quad U\right\}$$

首先证明对一切 x,y 有 $s(x,y)<+\infty$, 技巧是对给定 $x\in U$ 定义 $E=\{y\in U:s(x,y)<+\infty\}$. 显然 $x\in E$ 于是 E 非空, 根据球版本者, 容易证明 $y\in E, B(y,2r)\subset U$ 时 $B(y,r)\subset E$. 这个条件立刻保证了 E 又闭又开, 于是 $E=U$.

最后我们注意对于 $\overline{B(a,r_a)}\subset B(a,R_a)\subset U$ 和 $\overline{B(b,r_b)}\subset B(b,R_b)\subset U$, 任取 $x\in B(a,r_a), y\in B(b,r_b)$, 那么 $s(x,y)$ 不会超过 $s(a,b)$ 乘上一个只与 r_a,r_b,R_a,R_b 有关的系数. 因为 $K\times K$ 仍是紧集, 于是有限覆盖之即可. □

<u>**注.**</u> 其实证明相当于不断用开球来开路, 用有限个开球来开出整个紧集.

Harnack 不等式的一大重要价值在于给出了如下的 Harnack 原则. 它对调和函数递增列的收敛情况作出论断.

【推论 4.3】(Harnack 原则) 设 U 是连通开集,$\{u_m\}$ 是其上的调和函数 (逐点) 递增列, 那么下列两种情况恰有其一发生

(i).$\{u_m\}$ 在 U 的任意一个紧子集上一致收敛到一个调和函数.

(ii).$u_m(x)\to+\infty$ 对每个 $x\in U$.

<u>**证明.**</u> 用 u_m-u_1+1 代替诸 u_m, 于是可不妨设为正. 记 $u(x)=\lim\limits_{m\to\infty}u_m(x)$.

如果 $u(x)<+\infty$ 在整个 U, 则对任意紧 $K\subset U$ 根据 Harnack 不等式, 存在 $C>1$ 使

$$u_m(y)-u_k(y)\le C(u_m(x)-u_k(x))$$

对一切 $m>k$, 于是 $\{u_m\}$ 在 K 是一致 Cauchy 的.

反过来若某 $u(x)=+\infty$, 则对于紧集 $K=\{x,y\}$, 得到 $u_m(x)\le Cu_m(y)$. 换言之 $u_m(y)\to+\infty$ 对一切 $y\in U$, 结论得证. □

§4.2 Bôcher 定理

在这一小节中, 我们介绍 Bôcher 定理, 它讨论了取正值的孤立奇点. 这节中我们始终用 $B=B(0,1), S=\partial B$.

【定理 4.4】(Bôcher 定理) 若 u 非负调和于 $B-0$, 则存在 B 上调和的函数 v, 常数 $b\ge 0$ 使得

$$u(x)=\begin{cases}v(x)-b\log|x|, & n=2\\ v(x)+b|x|^{2-n}, & n>2\end{cases}$$

对一切 $x\in B-0$.

在证明 Bôcher 定理前我们需要好几个引理, 并且引入球面平均算子, 对一切 $x\in B-0$, 定义

$$A[u](x)=\int_S u(|x|\zeta)dS(\zeta)$$

先来看第一个引理

【引理 4.5】 对于 $B-0$ 上的调和函数 u, 存在常数 a,b 使得

$$A[u](x)=\begin{cases} a+b\log|x|, & n=2 \\ a+b|x|^{2-n}, & n>2 \end{cases}$$

特别的,$A[u](x)$ 是 $B-0$ 上的调和函数.

证明. 对于 $r\in(0,1)$ 定义

$$f(r)=\int_S u(r\zeta)dS(\zeta)$$

于是左右求导, 交换右边的导数与积分得

$$f'(r)=\int_S \zeta\cdot(\nabla u)(r\zeta)dS(\zeta)=r^{-n}\int_{rS}\tau\cdot(\nabla u)(\tau)dS(\tau)$$

注意对于 $0<r_0<r_1<1$, 考察区域 $U=\{x:r_0<|x|<r_1\}$ 中 ∇u 的散度定理得到

$$\int_{\partial U} D_N u dS=\int_U \Delta u dV.$$

于是结合 u 调和以及 N 向内向外的正负相反, 得到

$$\frac{1}{r_0}\int_{r_0 S}\tau\cdot(\nabla u)(\tau)dS(\tau)=\frac{1}{r_1}\int_{r_1 S}\tau\cdot(\nabla u)(\tau)dS(\tau)$$

于是 $f'(r)=br^{1-n}$, 其中 b 是常数, 故 $f(|x|)=A[u](x)$ 确如此形式. □

接下来是 Harnack 不等式的位似版本

【引理 4.6】 存在 $c>0$, 使得对一切 $B-0$ 上的正调和函数和 $0<|x|=|y|\le 1/2$, 有

$$cu(y)<u(x)$$

证明. 对 $0<r<1$, 注意 $|x|=|y|=r/2$ 时对应 $K=(r/2)S\subset(rB-0)=U$ 时 Harnack 不等式情形. 因为形状是位似的, 所以可以取相同的常数. □

最后一个引理是证明的核心所在

【引理 4.7】 设 u 正值调和于 $B-0$, 且 $|x|\to 1^-$ 时 $u(x)\to 0$. 则存在常数 $b>0$ 使得对一切 $x\in B-0$ 有

$$u(x)=\begin{cases} b\log|x|, & n=2 \\ b(|x|^{2-n}-1), & n>2 \end{cases}$$

证明. 根据第一个引理, 只需证明 $u=A[u]$. 实际上只需证明 $u\ge A[u]$, 假设这一点已成立. 若存在某 $x\in B-0$ 有 $u(x)>A[u](x)$, 那么根据连续性

$$A[u](x)>A[A[u]](x)=A[u](x)$$

而矛盾. 为此, 设 c 为第二个引理所述者. 显然 $u-cA[u]$ 是 $(1/2)B-0$ 中取正值的 $B-0$ 中调和的函数. 而且依照定义 $u(x)-cA[u](x)\to 0$ 随 $|x|\to 1^-$. 于是根据区域 $0<\varepsilon\le|x|\le 1-\varepsilon$ 上

的最值原理,$u - cA[u] > 0$ 于 $B - 0$.(在某点取到 0 会怎么样, 通过连通性, 可以证明在整个区域中必须皆为 0)

能不能把 c 换成更靠近 1 的常数呢? 于是接下来的思想是迭代上面的操作, 设 $g(t) = c + t(1-c), t \in [0,1]$. 现在对于满足 $w = u - tA[u] > 0$ 于 $B - 0, w(x) \to 0$ 随 $x \to 1^-$ 的函数 w, 完全一样的原因, 我们有

$$w - cA[w] = u - g(t)A[u] > 0$$

同样的 $w - cA[w]$ 在 $x \to 1^-$ 时仍趋于 0. 这操作可以一直执行下去. 注意 $g^{(m)}(t) \to 1$ 随 $m \to \infty$ 对一切 $t \in [0,1]$. 于是根据

$$u - g^{(m)}(0)A[u] > 0$$

我们推出 $u - A[u] \geq 0$. □

终于我们做好了证明 Bôcher 定理的所有准备.

Bôcher 定理的证明. 以 $n > 2$ 为例,$n = 2$ 时只需换成对应的 $\log|x|$ 即可. 考察 u 调和于 $\overline{B} - 0$, 取值为正. 现定义

$$w(x) = u(x) - P[u|_S](x) + |x|^{2-n} - 1$$

显然 $w \to 0$ 随 $|x| \to 1^-, w \to +\infty$ 随 $|x| \to 0^+$. 根据区域 $0 < \varepsilon \leq |x| \leq 1 - \varepsilon$ 上的最值原理,w 正值于 $B - 0$. 根据第三个引理,$w = \tilde{b}|x|^{2-n}$ 即 $u(x) = v(x) + b|x|^{2-n}$, 而令 $|x| \to 0^+$ 可证明 b 非负.

最后我们去掉 u 连续于 $\overline{B}$ 的条件, 为此在一系列 $(1 - 1/n)B$ 上研究即可. 不难验证 $n < m$ 时对应 $(1 - 1/m)B$ 中者是 $(1 - 1/n)B$ 中者的延拓. □

§4.3 Kelvin 变换

【定义 4.8】(Kelvin 变换) 记 $x^* = x/|x|^2, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 u 的 Kelvin 变换记作

$$K[u](x) := |x|^{2-n}u(x^*)$$

它是 $\Omega^* = \{x^* : x \in \Omega\}$ 上的函数.

读者不难检查 $K[K[u]] = u$. 下面的结论是 Kelvin 变换在我们讨论中最大的好处.

【定理 4.9】 u 是调和函数当且仅当 $K[u]$ 是调和函数.

证明. 首先, 如果 p 是 $\mathbb{R}^n$ 中齐 m 次的多项式, 那么

$$\Delta(|x|^{2-n-2m}p) = |x|^{2-n-2m}\Delta p$$

这是非常具体的计算, 其关键在于, 若 p 是齐 m 次的多项式, 则齐次函数的欧拉公式告诉我们 $x \cdot \nabla p = mp$, 结合

$$\Delta(|x|^t p) = |x|^t \Delta p + 2t|x|^{t-2}x \cdot \nabla p + t(t+n-2)|x|^{t-2}p$$

于是对于任意多项式 u 有

$$\Delta(K[u]) = K[|x|^4\Delta u]$$

因为 K 是线性的, 所以只需观察齐次多项式.

$$\Delta(K[p]) = \Delta(|x|^{2-n-2m}p) = |x|^{2-n-2m}\Delta p = K[|x|^4\Delta p]$$

于是对 u 调和, 由调和函数的局部解析性得知我们可以使用调和多项式逼近, 于是 $K[u]$ 调和.

反过来 $K[u]$ 调和当然也有 $K[K[u]] = u$ 调和. □

第 五 章

离散调和函数

我们都知道, $\mathbb{R}^n$ 中的**调和函数** $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$ 要求满足如下的表达式:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) f = 0.$$

现在进行类比, 我们定义 $\mathbb{Z}^n$ 中的调和函数指的是一个 $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ 的函数, 也称**离散调和函数**, 满足:

$$2nf(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1+1, x_2, \cdots) + f(x_1-1, x_2, \cdots) + \cdots + f(\cdots, x_{n-1}, x_n+1) + f(\cdots, x_{n-1}, x_n-1). \tag{1}$$

马上将会发现很多对调和函数成立的命题对离散调和函数也成立.

顺带一提, 本文参考了 H. A. Heilbronn 在 1948 年的论文 *On Discrete Harmonic Functions*.

§ 5.1 基本定义和性质

首先我们把标准的图论框架搭出来:

【定义 5.1】(图论构成) $\mathbb{Z}^n$ 中的两个点坐标如果只有一个分量差 1, 其他分量相同则称为**相邻**的. 在相邻关系下 $\mathbb{Z}^n$ 自然成为一个无限网格状的简单图 G, 它的任何子集 $S \subset \mathbb{Z}^n$ 自然可视作 G 的一个完全子图. 那么图论中诸如**邻居**, **连通性**, **距离**这样的概念都自然在这里适用. 此外我们还能类似定义子集 $S \subset \mathbb{Z}^n$ 中的点的类型, 我们把 S 中的点不重不漏分成两类, 称为内点和边界点, 分别构成的集记 S° 和 ∂S. 如果一个点 $x \in S$ 在 $\mathbb{Z}^n$ 中的全体邻居都在 S, 则称之为**内点**, 否则称**边界点**. 定义集合 $S \subset \mathbb{Z}^n$ 的闭包 $\overline{S}$ 为 S 中的点和 S 的全部邻居构成的集合.

由此我们可以定义一个集合上的调和函数.

【定义 5.2】 现在我们也能定义一个在 $S \subset \mathbb{Z}^n$ (离散) 调和的函数, 指的是一个在每个内点处都满足上述 (1) 的 $S \to \mathbb{R}$ 的函数.

让我们开始证明一些定理.

【定理 5.3】(最大值原理) 设 $f(x)$ 是 S 上的调和函数, 若 S° 连通, 则要么 f 为常数, 要么 f 的最大值不在内部取到.

证明. 一个内点处取最大值能推出其全体邻居都取该值, 于是命题是显然的. □

当然最小值也有类似的结果. 然后是边值原理, 从边界总能唯一确定内部取值的定理:

【定理 5.4】 有限集 $S \subset \mathbb{Z}^n$ 的边界点上的任意函数 $g : \partial S \to \mathbb{R}$, 存在唯一的 S 上调和函数 f 使 $f|_{\partial S} = g$.

证明. 对任意实函数 $f : S \to \mathbb{R}$ 我们考虑定义这样一个量:

$$E(f) := \sum_{x,y \in S; d(x,y)=1} (f(x) - f(y))^2.$$

其中 $x, y \in S; d(x, y) = 1$ 表示取遍所有邻居的对子. 由二次型理论 (先通过估计得出最小值一定在一个紧集内取到) 不难证明 $E(f)$ 存在最小值, 在此最小值时对某个给定 $x \in S$ 处的 f 值求偏导就得到

$$\frac{\partial}{\partial f(x)} E(f) = 4 \sum_{y \in S, d(x,y)=1} (f(x) - f(y)) = 0.$$

这即 x 处的 (1) 表达式. 现在证明了存在性, 而唯一性是对每个 S° 的连通分支使用最大值原理 5.3 的推论. □

这两个定理可以认为是这一理论的垫脚石. 另外从主对角占优的角度也能很好地理解这个定理.

§ 5.2 Liouville 定理

我们都知道对 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数, 有界就意味着必然是常数. 毫不意外地, 离散调和函数也是如此. 本节我们就来研究一系列离散调和函数版本的 Liouville 定理与证明:

【定理 5.5】(Liouville 定理) 若 $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ 调和且有界, 则 f 是常函数.

首先我们来看这一定理最初等的证明.

证明. 对维数归纳, $n = 0$ 时命题显然. 我们记 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$ 并记 $g(x) := f(x + e_1) - f(x)$. 如果 g 恒等于 0, 则由 $2, \cdots, n$ 这 $n - 1$ 维的情况证出命题. 现在 g 也有界且调和, 不妨设 $|g|$ 的上确界为 $m > 0$ 且设正 g 能趋于此值, 再设 $|f|$ 的上确界为 M.

现在来待定一个 $\epsilon > 0$, 无论 ϵ 取何值总能找到 x 使 $g(x) \geq m - \epsilon$, 那么利用 g 的上界和调和性不难证明对任意 y 有

$$g(y) \geq m - (2n)^{d(x,y)}\epsilon.$$

这是因为 $g(x) \geq m - \epsilon$ 那么 x 的全体邻居处 g 值不小于 $m - 2n\epsilon$ 然后归纳. 由此取 $k > 0$ 为一个足够大的正整数, 使 $km > 2M$, 再取 ϵ 足够小使得

$$m - (2n)^k\epsilon \geq 0, \sum_{i=0}^{k-1} (m - (2n)^i\epsilon) > 2M.$$

这将导致

$$|f(x) - f(x + ke_1)| = \sum_{i=0}^{k-1} g(x + ie_1) \geq \sum_{i=0}^{k-1} (m - (2n)^i\epsilon) > 2M$$

推出矛盾. □

一个有趣的事实是, 离散 Liouville 定理也曾是一道竞赛题, 出自 2003 的保加利亚 TST. 看到这证明 (也是官方证明) 初等的程度也就知道这一命题作为竞赛题还算合情合理. 然而这个证明虽然初等而且漂亮, 但是不够本质. 假设读者知道如下的定理:

【定理 5.6】(Krein–Milman) 设 K 是 Banach 空间 V 中的一个紧凸集. 若一个点 $x \in K$ 满足它不位于 K 中任意不同两点的连线线段内部, 则称 x 为 K 的一个极端点. 那么 K 是其全体极端点的凸包的闭包.

这样一来, 我们来给出 Liouville 定理的一个简洁的证明:

离散 Liouville 定理的另一个证明. 首先在最大模范数下我们有 Banach 空间 $V = C^0(\mathbb{Z}^n)$. 我们首先证明 $\mathbb{Z}^n \to [-1,1]$ 的离散调和函数 X 构成其中的紧凸集. 凸性显然, 紧性是列紧性的推论. 于是我们只需研究此时 X 的极端点是什么, 由于一个调和函数是其 $2n$ 个方向平移所得函数的平均, 因此 X 的极端点在任意平移下不变. 由此 X 的极端点只含常函数. □

此外我们来观察一些维数现象.

【定理 5.7】 当 $n = 2$ 时, 若 $f : \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ 有界且已知在原点以外调和, 则 f 为常数.

证明. 对正整数 R, 定义 $U_R := \{|x_1| + |x_2| \le R\}$, 不妨设 $f(0) = 1, 0 \le f(x) \le 2$. 现在令 $f_R(x)$ 为 $f(0) = 1$, 且对 $|x_1| + |x_2| = R$ 成立着 $f_R(x) = 0$ 的调和函数, 它的存在唯一性由边值原理 5.4 保证. 我们指出在相邻函数的公共区域上有不等式

$$0 \le f_2(x) \le f_3(x) \le \cdots \le 1.$$

这实则是最值原理 5.3 的推论, 将 f_{R+1} 视作 f_R 对应更大边值问题的解即可. 这样一来 f_R 逐点单调递增必有极限, 记这逐点极限为 f_∞. 我们声称 $f_\infty = 1$ 恒成立, 我们将在下一段利用维数 2 来证明这一点. 假设这已得证, 那么同样的技巧可证 $f_R \le f$ 从而 $f_\infty \le f$ 可知 $1 \le f$, 用 $2 - f$ 代替 f 可证明 $1 \le 2 - f$ 从而 $f = 1$.

定义一个辅助函数

$$g_R(x) := 1 - \frac{\log(1 + |x_1| + |x_2|)}{\log(1 + R)}.$$

我们计算 U_R 上的 $E(g_R)$:

$$E(g_R) \ge \sum_{k=1}^{R-1} k \left(\frac{\log(1+k)}{\log(1+R)} - \frac{\log k}{\log(1+R)} \right)^2 = O\left(\frac{1}{\log R} \right).$$

由于 g_R 和 f_R 具有一样的边值, 根据边值原理的证明过程, $E(f_R) \le E(g_R)$. 这表明随 R 趋于无穷, 在原点附近 f_R 下降得很慢, 具体来说存在常数 C 使得 $f_R(x) \ge 1 - C(|x_1| + |x_2|)/\sqrt{\log R}$. 因此 $f_\infty = 1$, 命题得证. □

这表现得像是某种可去奇点的性质, 不过此命题对 $n \ge 3$ 不真, 构造需要用到比较细致的估计, 此处略去.

§5.3 一般边值问题

所谓的一般边值, 在这里无非是研究一般的无界集合上边值问题的一些最基本的性质. 我们首先研究边值有界的情况, 这和前一小节的定理是类似的:

【定理 5.8】 设 $S \subset \mathbb{Z}^n$, 则任意 $F : \partial S \to [0, 1]$ 可以延拓成为 S 上的一个调和函数. 特别地, 对 $n = 2$ 且 $S \neq \mathbb{Z}^2$ 的情况, 符合条件的延拓是存在唯一的.

证明. 如果 $S^\circ = \varnothing$ 则无需证明, 现只需对 S° 的每个连通分支进行讨论, 设 x_0 是一个内点并记 $S_0 = \{x_0\}$, 归纳地定义 S_{k+1} 为 S_k 添加上它们在 S 中的邻居. 这样递增列 $\{S_k\}$ 将穷竭 x_0 所在的连通分支.

现在令 F_k 为 S_k 上这样一个边值问题的调和解: 对 $x \in \partial S_k$, 如果 $x \in \partial S$ 则 $F_k(x) := F(x)$, 否则 $F_k(x)$ 取 0. 用和 **??** 中一样的方法可知 F_k 单调有界从而逐点极限存在, 该极限函数 F_∞ 即为符合的解.

再来看 $n = 2$ 时的唯一性, 只需证明零边值时解只能为 0 即可. 假设此时有一个解 $F : S \to \mathbb{R}$ 非零, 由于 $S \neq \mathbb{Z}^2$ 故 S 存在边界点, 不妨设原点就是这样一个边界点. 设 $|F(x)| \leq M$ 对某 $M > 0$, 对正整数 R 我们构造辅助函数 $G_R(x) := F(x) + M(1 - f_R(x))$, 这里的 f_R 来自前一小节 **??**. 这样 G_R 调和而且非负 (为什么? 把它看成什么边值问题的解?), 因此令 $R \to +\infty$ 得到 $F(x) \geq 0$, 同理 $F(x) \leq 0$. □

我们又一次看到了维数特殊性, 同样地对 $n \geq 3$ 维的一般区域, 唯一性通常无法保证.

然后我们来看边值无界的情况:

【定理 5.9】 设 $S \subset \mathbb{Z}^n$, 则任意 $F : \partial S \to \mathbb{R}$ 可以延拓成为 S 上的一个调和函数.

证明. 为了应用前述有界情况的定理, 对正整数 m 我们引入截断函数 $F_m : \partial S \to [-m, m]$ 为

$$F_m(x) := \begin{cases} m, & F(x) > m, \\ F(x), & |F(x)| \leq m, \\ -m, & F(x) < -m. \end{cases}$$

这样 F_m 可以 (不唯一地) 延拓为整个 S 上的调和函数, 但是不保证逐点收敛性. 为此我们将 S 的内点不重不漏地记作 $\{x_l\}_{l=1}^\infty$ (有限个内点的情形问题显然). 对每个 $l \geq 0$ 我们企图构造序列 $F_{l,m}$ 满足它在 S 调和而且在点 $\{x_k\}_{k=1}^l$ 处收敛, 而且我们希望对给定的 k, 无论对何 $l \geq k$, $F_{l,m}(x_k)$ 都收敛到同一值.

我们的构造从 $l = 0$ 开始, 此时没有收敛性要求从而可取 $F_{0,m} := F_m(x)$, 现在我们来对 l 归纳地构造 $F_{l+1,m}$. 倘若 $F_{l,m}(x_{l+1})$ 有收敛子列, 那么该子列自动符合条件. 否则 $|F_{l,m}(x_{l+1})| \to +\infty$, 这表明存在一个子列 $G_{l,m}$ 使得

$$G_{l,m+1}(x_{l+1})/G_{l,m}(x_{l+1}) \to +\infty,\ m \to +\infty.$$

这样我们记

$$\rho_m = \frac{G_{l,m}(x_{l+1})}{G_{l,m}(x_{l+1}) - G_{l,m+1}(x_{l+1})} \to 0,\ m \to +\infty.$$

再令 $F_{l+1,m}(x) := (1 - \rho_m)G_{l,m}$, 则它符合条件. □

这一技巧也在分析中碰到可数集时屡试不爽.

§5.4
Poisson 核

最后我们来看 Poisson 核的类比. 根据边值问题解的存在唯一性定理, 对于一个有限区域 $S \subset \mathbb{Z}^n$ 上的边值问题, 就能定义 $K(x,y) : \partial S \times S \to \mathbb{R}$, 使得对一切 $y \in S$ 和 $f : \partial S \to \mathbb{R}$ 有

$$f(y) = \sum_{x \in \partial S} K(x,y) f(x)$$

是 S 上的调和函数. 不难证明 $0 < K(x,y) < 1$ 对一切 $y \in S^\circ$. 然而虽然求解在一个一般区域 S 上的 Poisson 核并不容易, 通常来说, 这是一个计算数学问题. 我们仍然有一些理论

一个矩形区域指的是 $V = \prod_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k]$. 特别地, 记 $V_R := [-R, R+1] \times \prod_{k=2}^{n} [-R, R]$ 以及 $T_R = [-R, R]^n$, 仍如前面记 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$.

【引理 5.10】 对 $n \geq 2$ 的矩形区域 S, 我们有 $K(x,y) = O(d(F_x, y)^{1-n})$, 其中 F_x 表示 x 所在的矩形区域的面.

先假设这一命题为真, 在本节的最后我们会给出这个引理的证明. 我们来看看能得到什么推论:

【引理 5.11】 设 $f(x)$ 在 V_R 上调和且在 $x \in \partial V_R$ 上满足

$$f(x) \geq 0, \text{ 对 }, x_1 > 0; \ f(x) \leq 0, \text{ 对 } x_1 \leq 0.$$

则 $f(e_1) \geq f(0)$. 倘若 $f(x)$ 还满足 $f(x) + f(e_1 - x) = 0$ 对一切 $x \in V_R$, 则对一切 $x \in V_R$ 我们都有

$$f(x) \geq 0, \text{ 对 }, x_1 > 0; \ f(x) \leq 0, \text{ 对 } x_1 \leq 0.$$

<u>**证明.**</u> 先看后半个命题, 设有 $f(x) = -f(e_1 - x)$. 定义辅助函数 $g(x)$ 为

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & (x_1 - 1/2) f(x) \geq 0, \\ 0, & (x_1 - 1/2) f(x) < 0. \end{cases}$$

显然 $f = g$ 于 V_R 边界且不难发现 $E(g) \leq E(f)$, 因为在所以 $g = f$ 从而 f 在 V_R 处处符合这式子.

再看前半个命题, 记 $F(x) = f(x) - f(e_1 - x)$ 则使用后半个命题可得 $F(u_1) \geq 0$. □

【定理 5.12】 若 $f(x)$ 在 V_R 上调和, 且 $|f(x)| \leq M$, 则

$$|f(e_1) - f(0)| = O\left(\frac{M}{R}\right).$$

<u>**证明.**</u> 不妨设 $M = 1$, 注意到前面的引理 5.11 告诉我们边界点对 $f(e_1) - f(e_0)$ 的线性贡献来说, $x_1 \geq 1$ 时是非负的, $x_1 \leq 0$ 时是非正的, 因此我们构造极端边值, 考虑 f_R 为 V_R 在如下边值情况下的解:

$$f_R(x) = \begin{cases} 1, & x_1 > 0, \\ -1, & x_1 \leq 0. \end{cases}$$

那么 $|f(e_1)-f(0)|\le f_R(e_1)-f_R(0)$. 记 $g_R(x)=f_R(x)-(x_1-1/2)/(R+1/2)$, 我们来研究 g_R, 从它对应的边值得知 $g_R(x)+g_R(e_1-x)=0$ 从而符合引理 5.11 . 于是在 V_R 上看:

$$\begin{aligned} g_R(x)\ge 0,\ \text{对}\ x_1=R;\ g_R(x)\le 0,\ \text{对}\ 1-R\le x_1\le 0;\\ g_R(x)=0,\ \text{对}\ x_1=R+1\ \text{和}\ x_1=-R; \end{aligned}$$

于是在 ∂T_R 上看:

$$\begin{aligned} g_R(x+e_1)-g_R(x)\le 0,\ \text{对}\ |x_1|=R;\ g_R(x+e_1)-g_R(x)=2-\frac{1}{R+1/2},\ \text{对}\ x_1=0;\\ g_R(x+e_1)-g_R(x)=-\frac{1}{R+1/2},\ \text{对}\ 0<|x_1|<R. \end{aligned}$$

最后使用前面的引理 5.10 就得到 $g_R(e_1)-g_R(0)\le O(1/R)$ 从而命题得证. □

最后我们来展示一个传统的控制定理:

【推论 5.13】 假设 $f(x)$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的调和函数且存在正数 C 和自然数 k 使

$$f(x)=O(1+(|x_1|+\cdots+|x_n|)^k),$$

则 $f(x)$ 是一个至多 k 次的多项式.

证明. 应用前一定理立刻得知 $f(x+e_1)-f(x)=O(1+(|x_1|+\cdots+|x_n|)^{k-1})$, 由此可知 f 对固定 $x_2,\cdots,x_n$ 是关于 x_1 的多项式. 从而

$$f(x)=f_rx_1^r+f_{r-1}x_1^{r-1}+\cdots+f_0.$$

对维数 n 归纳, 现发现取定 $x_1=0,1,2,\cdots,r$ 得到的 $f_r,\cdots,f_0$ 的各种线性组合都是 $x_2,\cdots,x_n$ 的多项式因此由 Vandermonde 矩阵的可逆性可知诸 f_i 都是 $x_2,\cdots,x_n$ 的多项式. 最后确定它的次数至多为 k 是容易的, 留给读者. □

最后我们回到本小节一开头承诺的引理证明.

引理的证明. 我们只需构造一个 $\{x_n\ge 0\}$ 上的调和函数 h, 使得边界情况为: $h(0)=1$; 非原点时 $h(x)=0$ 对 $x_n=0$ 且 $x\ne 0$. 在 $x_n>0$ 时 $h(x)$ 总取正值且有估计

$$h(x)=O(x_n^{1-n}).$$

对 $\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1}\in\mathbb{R}$, 定义 $\phi(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})$ 为满足下列方程的两个根中小的那个

$$\phi+\phi^{-1}=2n-\sum_{k=1}^{n-1}2\cos\zeta_k.$$

通过初等的计算可知 $1/(4n-2)<\phi(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})\le 1$. 再定义

$$h(x):=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x_1\zeta_1)\cdots\cos(x_{n-1}\zeta_{n-1})\phi(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})^{x_n}d\zeta_1\cdots d\zeta_{n-1}.$$

不难检查 h 离散调和而且满足关于边界条件的一切事宜. 为了估计 $h(x)$, 我们注意到

$$\phi(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})=1-\sqrt{\zeta_1^2+\cdots+\zeta_{n-1}^2}+O(\zeta_1^2+\cdots+\zeta_{n-1}^2),$$

按照 $\zeta_1^2+\cdots+\zeta_{n-1}^2$ 和 x_n^{-1} 的大小关系划分积分区域, 不难得知 $h(x)=O(x_n^{1-n})$. 最后为了检查 ϕ 非负, 对正整数 u 设 $M(u):=\min\limits_{x_n=u} h(x)$, 显然 $2M(u)\geq M(u+1)+M(u-1)$, 在凸性的帮助下利用 $M(0)=0$ 以及 $\lim\limits_{u\to+\infty} M(u)=0$ 锁定了 $M(u)=0$. □

实际上不难看出如果做更细致的估计就能得到更好的阶, 例如改进为 $O(d(x,y)^{-1})$.

== 尾声 ==

最后我们来讨论一些简单的推广和讨论.

首先调和函数的概念不只可以在 $\mathbb{Z}^n$ 中讨论, 在第一节的图论构成中, 我们就暗示了在一般的图上也有定义调和函数的可能性. 不出所料地, 我们可以在一个每个顶点度数都有限的有向图上定义调和函数, 即在每个顶点上取值, 每个顶点的值等于被它指向的所有顶点的平均. 更加一般地, 我们甚至能给这些边加权. 用一样的方法, 我们能证明有限简单图上任意边值调和函数的存在唯一性.

现在有意思的来了, 给定连通简单图 G 顶点集的非空子集 $S\subset V=V(G)$ 和一个 $\pi_0:S\to\mathbb{R}$. 以下我们用不同的手段来刻画 $\pi:V\to\mathbb{R}$ 作为 π_0 唯一的调和延拓:

第一, G 上从 v 出发的随机游走, 第一次到达 S 中的顶点时停下, 到达的处 $\pi_0(s)$ 的期望值, 记作 $\pi(v)$.

第二, G 上在 S 的顶点处安置 $\pi_0(s)$ 的电压, 设每条边都是单位电阻, v 处的电压记作 $\pi(v)$.

第三, 将 S 中的顶点对应放在实数轴 $\mathbb{R}$ 的 $\pi_0(s)$ 处, 然后按照图 G 在每条边连接同一根弹簧, 此时 v 按胡克定律稳定所处的位置记作 $\pi(v)$.

所以只要遵从相同的公式, 我们立刻用唯一性得到了这些结果. 实际上, 我在一个 AOPS 回答中看到: 1940-1950 年的一篇文章中, 人们试图用这些性质来理解基尔霍夫定律, 并试图将这一理论推广为某种离散 Hodge 理论. 离散调和函数的背后甚至 Hodge 理论的背后, 多多少少都是有一些组合的动机在里面的.

然后还有更多奇怪的技巧可以研究离散调和函数, 例如我们如果考虑 $\mathbb{Z}^2$ 上的标准随机游走 X. 那么一个 $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}$ 的函数定义了一个鞅 $f(X)$. 所以如果 f 有界, 那么 $f(X)$ 必然 a.s. 收敛. 这时注意到随机游走会 a.s. 地抵达每个顶点无穷多次, 因此 f 必须在 $\mathbb{Z}^2$ 上取常数. 所以我们对二维的 Liouville 定理给出了一个巧妙的解释, 问题是更高的维度会怎么样呢?

技巧是这样的, 我们将说明从 $\pm e_1=(\pm1,0,0,\cdots,0)$ 出发的随机游走在有限步内最后的终点是依概率等分布的, 我们马上把细节明确一下: 对一个 $-e_1$ 出发的路径, 我们定义 e_1 出发的一条路径关于 $x_1=0$ 镜面对称, 直至它第一次碰到 $x_1=0$, 此后两条路径重合, 很明显这样一一配对了经过 $x_1=0$ 的路径, 而我们知道 $\pm e_1$ 出发的路径 a.s. 会碰到 $x_1=0$. 现在考虑在 V_R 中从 $\pm e_1$ 出发的随机游走, 因为 $K(x,\pm e_1)$ 刻画了它第一次撞到 ∂V_R 时撞到 x 的概率, 很明显随着 $R\to+\infty$, 两条道路最后以趋于 1 的概率等分布, 这样不难通过估计得知若 f 有界, $f(e_1)=f(-e_1)$, 从而坐标模 2 相等的两点处 f 值相同. 于是问题被化归到一个有限集上的调和函数: 将所有点上的取值按照模 2 对应为一个超立方体图 C_n 上的离散调和函数, 它必为常数.