§1 马尔可夫链的定义

例1.(随机游动)

甲乙两人游戏,每一局甲赢1元的概率为p,输1元的概率为$q=1-p$.假设一开始甲带了0元钱。令S_n表示n局后甲所拥有的钱数。

计算$P\{S_8=4\,|\,S_1=1,S_3=1,S_4=2\}$和$P\{S_8=4\,|\,S_4=2\}$,它们是否相等?

解：$P\{S_8=4 \mid S_1=1, S_3=1, S_4=2\}$

$$=P\{S_8-S_4=2 \mid S_1=1, S_3=1, S_4=2\}$$

$$=P\{S_8-S_4=2\}=4p^3q$$

$$P\{S_8=4 \mid S_4=2\}$$

$$=P\{S_8-S_4=2 \mid S_4=2\}$$

$$=P\{S_8-S_4=2\}=4p^3q$$

$$\therefore P\{S_8=4 \mid S_1=1, S_3=1, S_4=2\}=P\{S_8=4 \mid S_4=2\}$$

更一般地： $\forall k \geq 1, \forall n_0 < n_1 < \ldots < n_{k+1},$

$\forall$状态$i_0, i_1, \ldots i_{k-1}, i, j$

$$P\{S_{n_{k+1}} = j \mid S_{n_0} = i_0, \ldots, S_{n_{k-1}} = i_{k-1}, S_{n_k} = i\}$$

$$= P\{S_{n_{k+1}} = j \mid S_{n_k} = i\}$$

定义:

如果$\{X_{n;} n=0,1,2,\ldots\}$是状态离散的随机过程,

并且具有Markov性，即对任何$k\geq 1$,

任何状态$i_0,\ldots,i_{k-1},i,j$，有

$$P\{X_{k+1}=j \mid X_0=i_0,\ldots,X_{k-1}=i_{k\text{-}1},X_k=i\}$$
$$=P\{X_{k+1}=j \mid X_k=i\}$$

则称$\{X_n;\ n=0,1,\ldots\}$是马尔可夫链（Markov chain）

$Markov$性的直观含义:

令$A=\{X_0=i_0,\ldots,X_{k-1}=i_{k-1}\}$........过去

$B=\{X_k=i\}$............现在

$C=\{X_{k+1}=j\}$...........将来

Markov性:

$$P(C\mid AB)=P(C\mid B)$$

已知到现在为止的所有状态条件下,

将来分布只与现在状态有关, 与过去状态无关.

Markov性的直观含义:

$$P(AC|B)=P(A|B)P(C|B)$$

在已知现在状态的条件下,

过去与将来相互独立.

设$\{X_{n;} n=0,1,2,\ldots\}$是马尔可夫链. 则

$\forall k \geq 1, m \geq 1, n_0 < n_1 < \ldots < n_{k+m},$ 状态$i_0, i_1, \ldots i_{k+m}$, 有:

$$P\{X_{n_{k+1}} = i_{k+1}, \cdots, X_{n_{k+m}} = i_{k+m} \mid X_{n_0} = i_0, \cdots, X_{n_k} = i_k\}$$

$$= P\{X_{n_{k+1}} = i_{k+1}, \cdots, X_{n_{k+m}} = i_{k+m} \mid X_{n_k} = i_k\}$$

$$P(X_n = j \mid X_m = i) \overset{\text{记为}}{=\!=} p_{ij}(m,n)$$

•在m时处于状态i的条件下，到n时转移到状态j的转移概率

性质：$p_{ij}(m,n) \geq 0, \quad \sum_{j \in I} p_{ij}(m,n) = 1$

记$P(m,m+n)=(p_{ij}(m,m+n))_{I\times I}$

为对应的n步转移矩阵，

这里I是状态空间

性质：各元素非负，每行之和为1

定义：

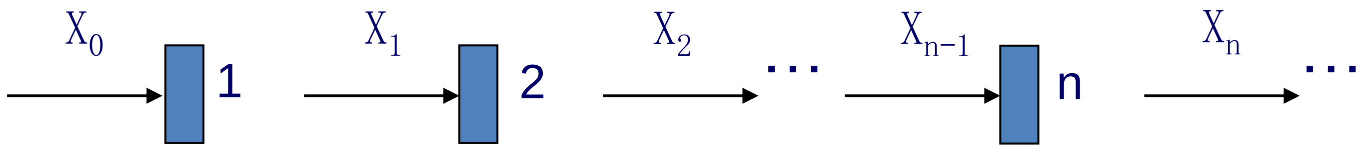
如果对任何状态$i, j, P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ 不依赖于n,则称$\{X_n\}$是时齐的Markov链

$p_{ij}:=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$

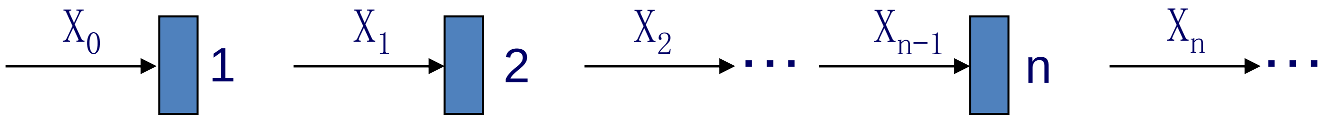
称为从i到j的一步转移概率

$P=(p_{ij})_{I\times I}$称为一步转移矩阵

例2.（$0-1$传输系统）



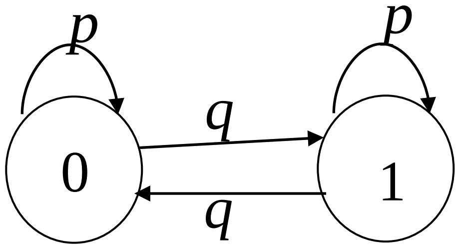
只传输0和1的串联系统中，设每一级的传真率为p, 误码率为$q=1-p$.以X_0表示第一级的输入，X_n表示第n级的输出（$n\geq 1$）.



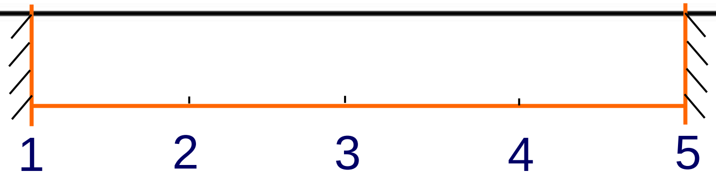
则$\{X_n\}$是一时齐Markov链，状态空间$I=\{0,1\}$,

$$p_{ij}=P\left(X_{n+1}=j\mid X_n=i\right)=\begin{cases}p & j=i\\ q & j\neq i\end{cases}\quad i,j=0,1$$

一步转移矩阵$P=\begin{bmatrix}p & q\\ q & p\end{bmatrix}$，状态转移图：



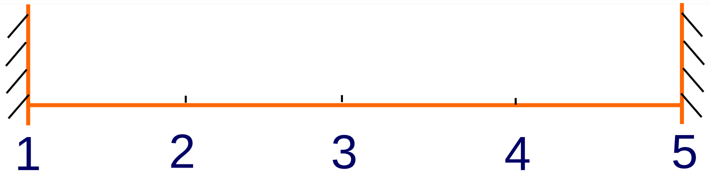
例3.（随机游动）



设一醉汉在$I=\{1,2,3,4,5\}$作随机游动：如果现在位于点$i(1<i<5)$,则下一时刻各以1/3概率向左或向右移动一格，或以概率1/3呆在原处；如果现在位于点1（或点5），则下一时刻以概率1移到点2（或点4）。

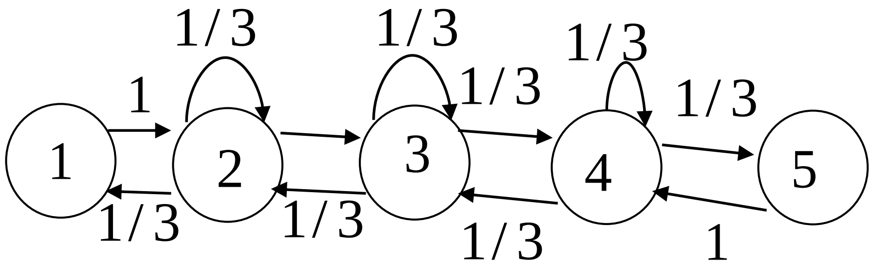
1和5两点称为反射壁，这种游动称为带两个反射壁的随机游动。

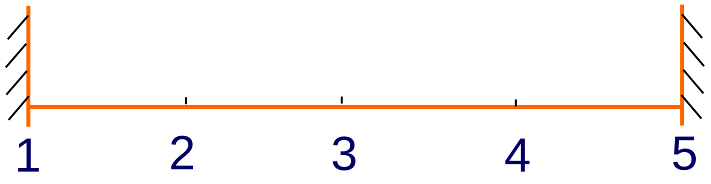
例3.（随机游动）



用X_n表示时刻n醉汉所在的位置。

则$\{X_n\}$是一时齐Markov链，





如果把1这点改为吸收壁，即Q一旦到达1这一点，则永远留在点1时，此时的转移概率矩阵为：

$$
P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}\end{array}
$$

$$
P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}\end{array}
$$

- 例4：卜里耶（Polya)罐子模型。设一罐子装有r个红球，t个黑球，现随机从罐中取出一球，记录其颜色，然后将球放回，并加入a个同色球。持续进行这一过程，X_n表示第n次试验结束时罐中的红球数，n=0，1, 2, ….
  $\{X_n, n=0，1, 2, \cdots\}$是一随机过程，
  状态空间$I=\{r, r+a, r+2a, \cdots\}$，当$X_n=i$ 时，$X_{n+1}=j$的概率只与i有关，与n时刻之前如何取到i值是无关的，
  这是一马氏链，但不是时齐的，一步转移概率为：

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)=\begin{cases} \dfrac{i}{r+t+na} & j=i+a \\ 1-\dfrac{i}{r+t+na} & j=i \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

例6：独立重复地掷骰子，用X_n表示第n次掷出的点数，令$Y_n = X_{n+1} + X_{n+2}, n \geq 0.$

（1）计算$P(Y_2 = 12 \mid Y_0 = 2, Y_1 = 7), P(Y_2 = 12 \mid Y_1 = 7)$

(2)判断$\{Y_n\}$是否是$Markov$链？

解： (1) $P(Y_2=12\mid Y_0=2,Y_1=7)$

$$=P(X_3=X_4=6\mid X_1=1,X_2=1,X_3=6)=1/6$$

$$P(Y_2=12\mid Y_1=7)=\frac{P(Y_1=7,Y_2=12)}{P(Y_1=7)}$$

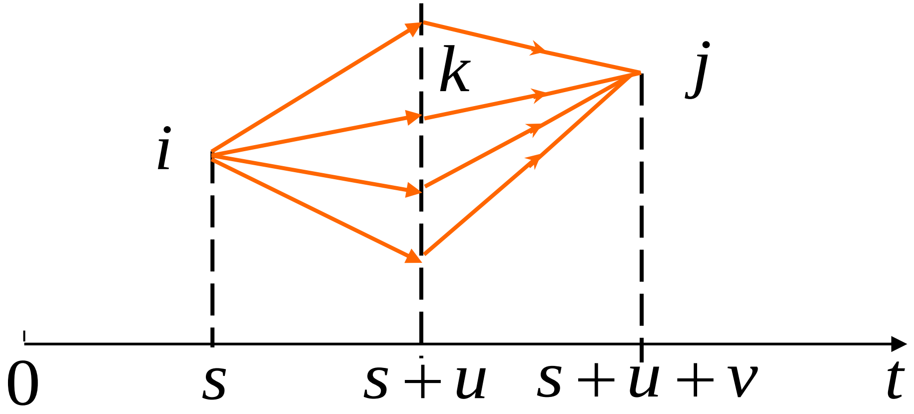
$$=\frac{P(X_2=1,X_3=X_4=6)}{P(X_2+X_3=7)}=\frac{(\frac{1}{6})^3}{\frac{6}{36}}=\frac{1}{36}$$

(2) $\because P(Y_2=12\mid Y_0=2,Y_1=7)\neq P(Y_2=12\mid Y_1=7)$

$\therefore \{Y_n\}$不是$Markov$链。

$C-K$方程

$$p_{ij}(s,s+u+v)=\sum_k p_{ik}(s,s+u)\,p_{kj}(s+u,s+u+v)$$



$C-K$方程可以写成矩阵形式:

$$P(s,s+u+v)=P(s,s+u)P(s+u,s+u+v)$$

$C-K$方程的证明：

$$p_{ij}(s,u+v)=P\{X_{s+u+v}=j\mid X_s=i\}$$

$$\overset{\text{全概率公式}}{=\!=\!=}\sum_k P\{X_{s+u}=k\mid X_s=i\}P\{X_{s+u+v}=j\mid X_s=i,X_{s+u}=k\}$$

$$\overset{\text{马氏性}}{=\!=\!=}\sum_k P\{X_{s+u}=k\mid X_s=i\}P\{X_{s+u+v}=j\mid X_{s+u}=k\}$$

$$=\sum_k p_{ik}(s,s+u)\,p_{kj}(s+u,s+u+v)$$

以后均假设$\{X_n\}$是时齐的Markov链

由C-K方程：$P(n,n+m)=P^m$不依赖于n，

记$P^{(m)}=P(n,n+m)$,称为m步转移矩阵

记$p_{ij}^{(m)}=p_{ij}(n,n+m)$,从i到j的m步转移概率

$$\text{则}P^{(m)}=P^m$$

命题：

(1) 对任何$n \geq 1$， $P(X_n = j) = \sum_i P(X_0 = i)\ p_{ij}^{(n)}$

(2) 对任何$n_1 < n_2 < \ldots < n_k$,

$$P(X_{n_1} = i_1, \ldots X_{n_k} = i_k) = P(X_{n_1} = i_1) p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \ldots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}$$

- 把初始分布和n步分布分别写成行向量

$\mu^{(0)}$和$\mu^{(n)}$,则$\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$

- 有限维分布完全由初始分布和一步转移概率所确定

证明： (1) 由全概率公式

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_0 = i)\ P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_i P(X_0 = i)\ p_{ij}^{(n)}$$

(2) 由乘法公式

$$P(X_{n_1} = i_1, \dots X_{n_k} = i_k)$$

$$= P(X_{n_1} = i_1) P(X_{n_2} = i_2 \mid X_{n_1} = i_1) \dots$$

$$P(X_{n_k} = i_k \mid X_{n_1} = i_1, \dots X_{n_{k-1}} = i_{k-1})$$

$$= P(X_{n_1} = i_1) p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \dots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}$$

例：设$\{X_n, n\geq 0\}$是具有三个状态0,1,2的时齐Markov链，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$P\{X_0=0\}=P\{X_0=1\}=\frac{1}{2}$$

试求：

(1) $P\{X_0=0, X_1=1, X_3=1\}$;

(2) $P\{X_3=1, X_1=1 \mid X_0=0\}$

(3) $P\{X_3=1\}$

(3) $P\{X_0=0 \mid X_3=1\}$

解：

$$P^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{7}{16}\end{bmatrix}\qquad P^3=\begin{bmatrix}0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{7}{16} & \frac{3}{32} & \frac{15}{32}\\ \frac{3}{32} & \frac{45}{64} & \frac{13}{64}\end{bmatrix}$$

$$(1)P\{X_0=0,X_1=1,X_3=1\}$$

$$=P(X_0=0)\ p_{01}p_{11}^{(2)}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$$

$$(2)\quad P\{X_3=1,X_1=1|X_0=0\}=p_{01}p_{11}^{(2)}=\frac{7}{8}$$

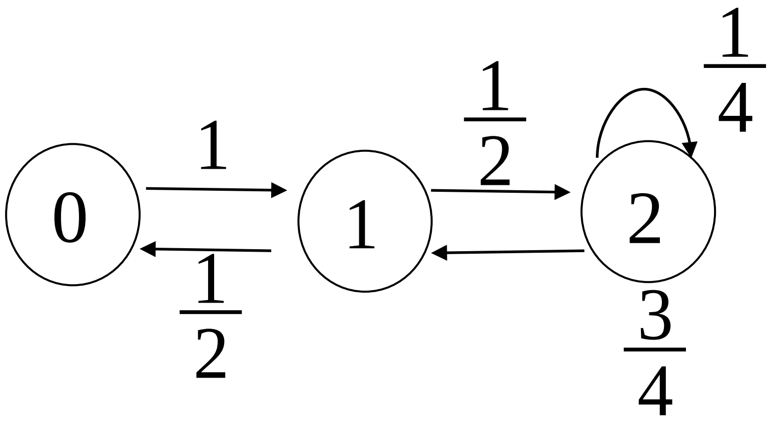
$$(3)P\{X_3=1\}=P(X_0=0)p_{01}^{(3)}+P(X_0=1)p_{11}^{(3)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{32}=\frac{31}{64}$$

$$(4)P\{X_0=0\mid X_3=1\}=\frac{P\{X_3=1\mid X_0=0\}P(X_0=0)}{P(X_3=1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}p_{01}^{(3)}}{\frac{31}{64}}=\frac{28}{31}$$

也可不计算P^2, P^3，根据状态转移图和C－K方程：



$$p_{11}^{(2)} = p_{10}p_{01} + p_{12}p_{21} = \frac{7}{8}$$

$$p_{01}^{(3)} = p_{01}p_{11}^{(2)} = \frac{7}{8}$$

$$p_{11}^{(3)} = p_{12}p_{22}p_{21} = \frac{3}{32}$$

例：淘宝网上有5家店卖同一种产品．设每位购买此种产品的顾客独立地任选一家网店购买。问经过5名顾客购买后，恰有3个网店被购买过的概率？

解：以X_n表示第$n+1$个顾客购买后被购买过的网店数目．那么$\{X_n\}$是以1, 2, 3, 4, 5为状态的MC，转移概率

$$p_{ii} = i/5 = 1 - p_{i,i+1}$$

所求概率为$p_{13}^{(4)}$.

$$P=\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^2=\begin{pmatrix}0.04 & 0.48 & 0.48 & 0 & 0\\ 0 & 0.16 & 0.60 & 0.24 & 0\\ 0 & 0 & 0.36 & 0.56 & 0.08\\ 0 & 0 & 0 & 0.64 & 0.36\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

因此$p_{13}^{(4)}=\sum_{i=1}^{5}p_{1i}^{(2)}p_{i3}^{(2)}$

$$=0.04\times0.48+0.48\times0.60+0.48\times0.36=0.48$$

§3 常返和暂留

问题:

1.从一个状态出发是不是一定能够在有限时间内返回该状态?(常返, 暂留)

2. 如果能够返回, 那么平均返回时间(平均回转时)一定有限吗?

(正常返, 零常返)

3.如果能够返回，那么平均返回时间的精确值是多少？（平稳分布）

定义：

$$\tau_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\} -----i\text{的首中时}$$

（约定$\min\varnothing = \infty$)

$$\text{状态}i\begin{cases}\text{常返：} & P(\tau_i < \infty \mid X_0 = i) = 1 \\ \text{暂留：} & P(\tau_i < \infty \mid X_0 = i) < 1\end{cases}$$

i常返：从i出发以概率1在有限时间内能返回i

i暂留：从i出发以正概率不再返回状态i

若i常返，定义

$$\mu_i = E(\tau_i \mid X_0 = i) \text{-----} i\text{的平均回转时}$$

$$i\text{常返}\begin{cases} \text{正常返：} & \mu_i < \infty \\ \text{零常返：} & \mu_i = \infty \end{cases}$$

*i*正常返：从*i*出发不但以概率1在有限时间内返回状态*i*，而且平均回转时有限

*i*零常返：从*i*出发虽然以概率1在有限时间内返回状态*i*，但平均回转时无限

正常返态返回速度快于零常返态

$P(\tau_i < \infty \mid X_0 = i)$和$\mu_i$的计算：

令 $$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i)$$

---从i出发第n步首次击中j的概率

$$f_{ij} = P(\tau_j < \infty \mid X_0 = i)$$

---从i出发能击中j的概率

则 $$\boxed{f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}}$$

$\therefore i$常返 $\Leftrightarrow f_{ii}=1$

若i常返，则 $\boxed{\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}}$

$p_{ij}^{(n)}$与$f_{ij}^{(n)}$关系：

$$(1)\, p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, 若 i = j \\ 0, 若 i \neq j \end{cases}, \qquad f_{ij}^{(0)} = 0$$

(2)对$n \geq 1$, $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$

证明: (2) 由全概率公式,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(\tau_j = k \mid X_0 = i) P(X_n = j \mid \tau_j = k, \ X_0 = i)$$

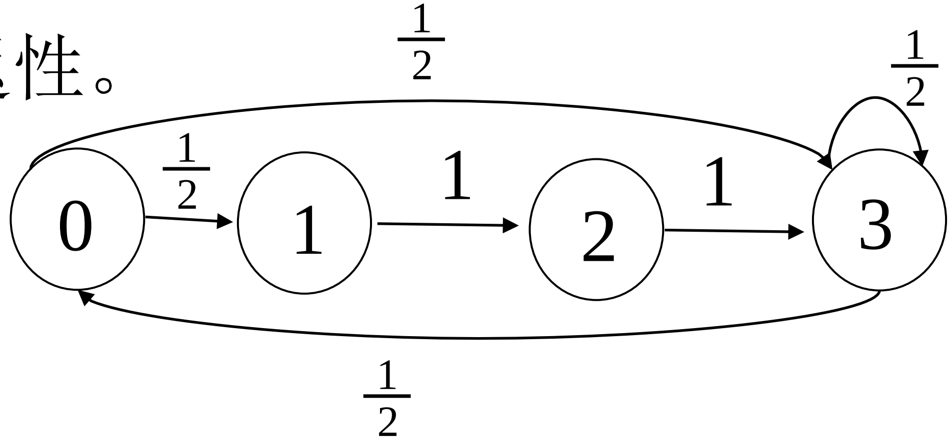
$$= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P(X_n = j \mid X_k = j, X_{k-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j, X_0 = i)$$

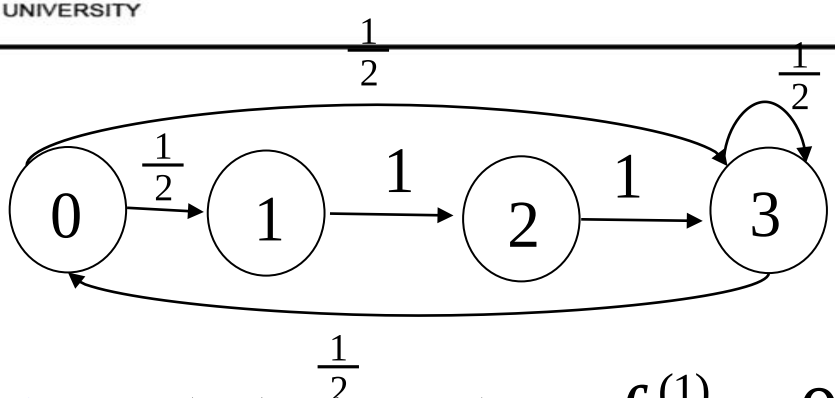
$$= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P(X_n = j \mid X_k = j) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

例1. 设$\{X_n\}$是时齐Markov链，$I=\{0,1,2,3\}$,

其一步转移矩阵$P=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$,

讨论状态0和3的常返性。





解：先考虑状态0，$f_{00}^{(1)}=0,$

$$f_{00}^{(2)}=p_{03}p_{30}=1/4,$$

$$f_{00}^{(3)}=p_{03}p_{33}p_{30}=1/8,$$

当$n\geq 4$时，

$$f_{00}^{(n)}=p_{03}p_{33}^{n-2}p_{30}+p_{01}p_{12}p_{23}p_{33}^{n-4}p_{30}$$

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\therefore\ f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=1$$

$\therefore$ 0是一个常返态

进一步地：

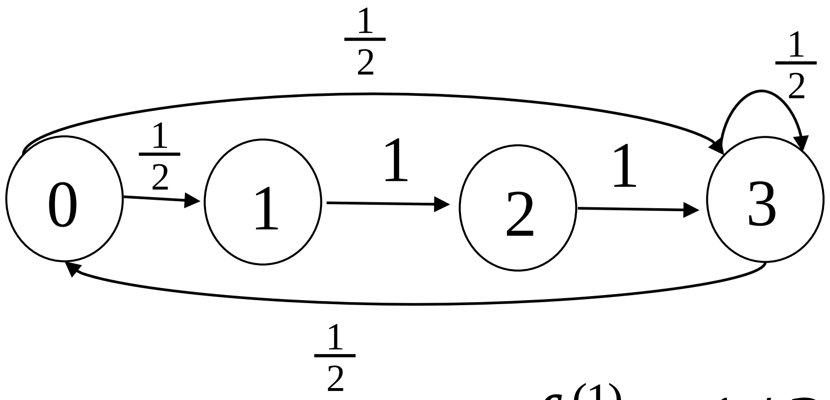
$$\mu_0=\sum_{n=2}^{\infty}n\frac{1}{2^n}+\sum_{n=4}^{\infty}n\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$=4$$

$\therefore$ 0是正常返态

问题：状态1和状态2的常返性又是如何呢？

（计算$f_{11}^{(n)}$和$f_{22}^{(n)}$很复杂，需引入新的方法）



解：再考虑状态3，$f_{33}^{(1)}=1/2$,

$$f_{33}^{(2)}=p_{30}p_{03}=1/4,$$

$$f_{33}^{(3)}=0,$$

$$f_{33}^{(4)}=p_{30}p_{01}p_{12}p_{23}=1/4,$$

当$n\geq 5$时，$f_{33}^{(n)}=0$

$$\therefore f_{33}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{33}^{(n)}=1$$

$\therefore$ 3是一个常返态

进一步地：

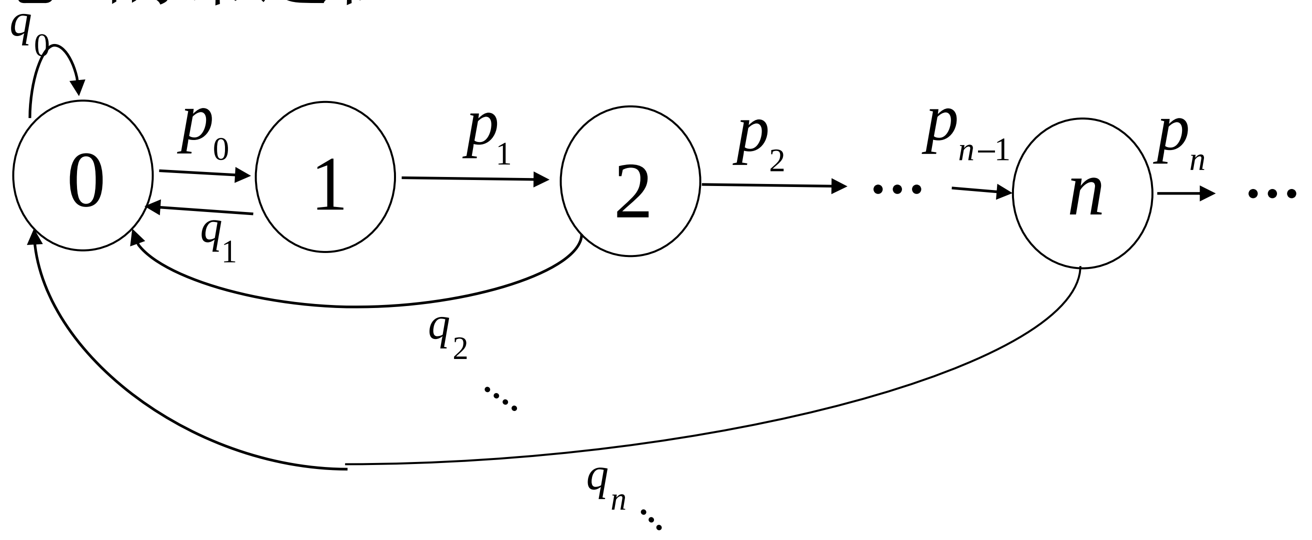
$$\mu_3=1\times\tfrac{1}{2}+2\times\tfrac{1}{4}+4\times\tfrac{1}{4}=2$$

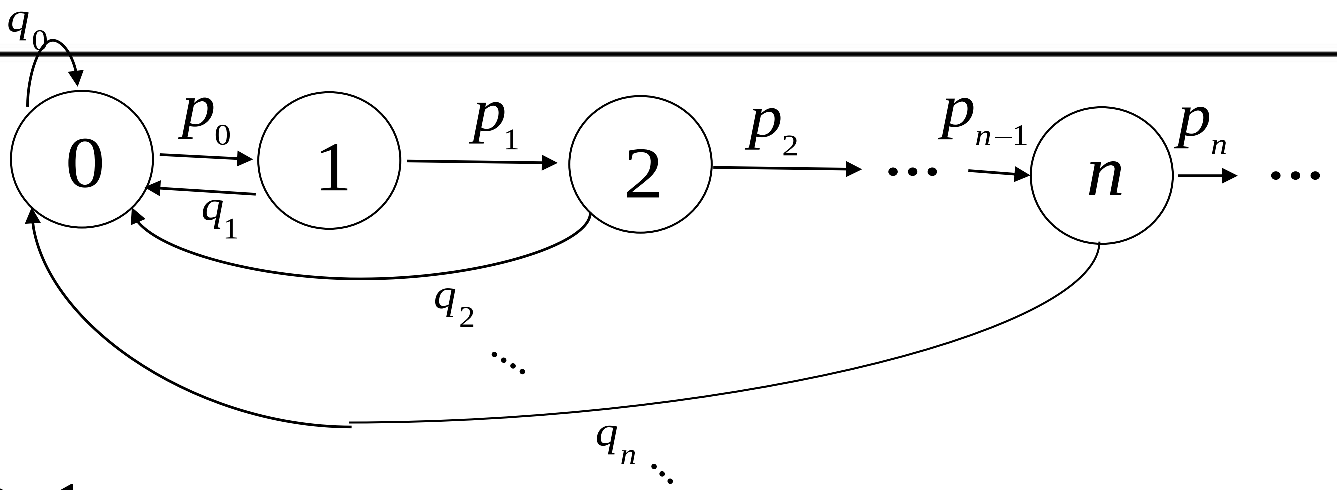
$\therefore$ 3也是正常返态

例2. （爬梯子模型） 设$\{X_n\}$是时齐Markov链，

$I=\{0,1,2,\ldots\}$，$p_{i,i+1}=p,\ p_{i,0}=q_i=1-p_i, 0<p_i<1, i\geq 0.$

讨论状态0的常返性。



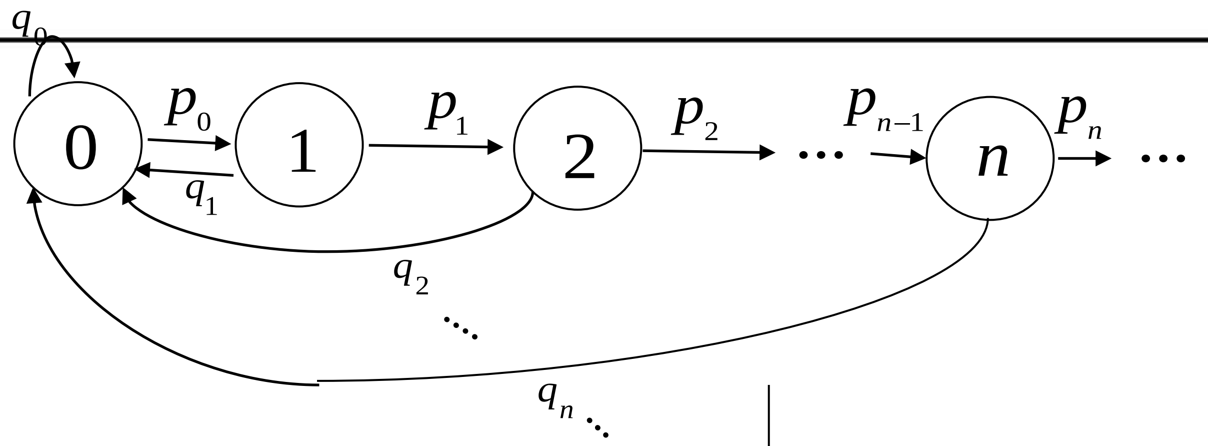


解：对$n \geq 1$,

$$P(\tau_0 > n \mid X_0 = 0) = p_0 p_1 \ldots p_{n-1} \text{记为} u_n$$

$$\therefore P(\tau_0 = \infty \mid X_0 = 0) = \lim_{n\to\infty} u_n$$

$\therefore$ 0是常返态当且仅当$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.



当0是常返态时，

$$\mu_0 = \sum_{n=0}^{\infty} P(\tau_0 > n \mid X_0 = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

这里$u_0 = 1, u_n = p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$对$n \geq 1$

$\therefore$ 0是正常返态当且仅当$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$.

问题：如何判断其它状态的常返性？

（很难，但利用互达的关系就容易判断）

例如，• 如果$p_i = e^{-\frac{1}{(i+1)^2}}$，

$$\text{那么} u_n = e^{-(1+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{n^2})} \to e^{-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}} > 0,$$

$\therefore 0$是暂留态

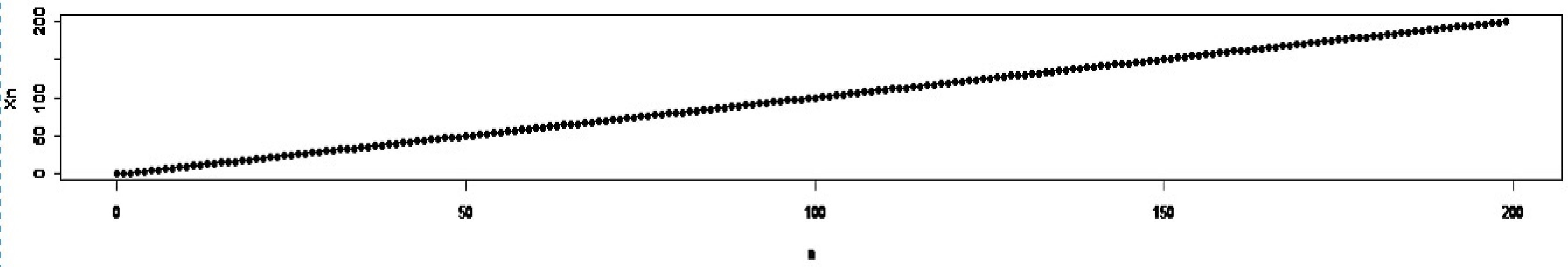
• 如果$p_i = \dfrac{i+1}{i+2}$，那么$u_n = \dfrac{1}{n+1}$，

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty, \therefore 0\text{是零常返态}$$

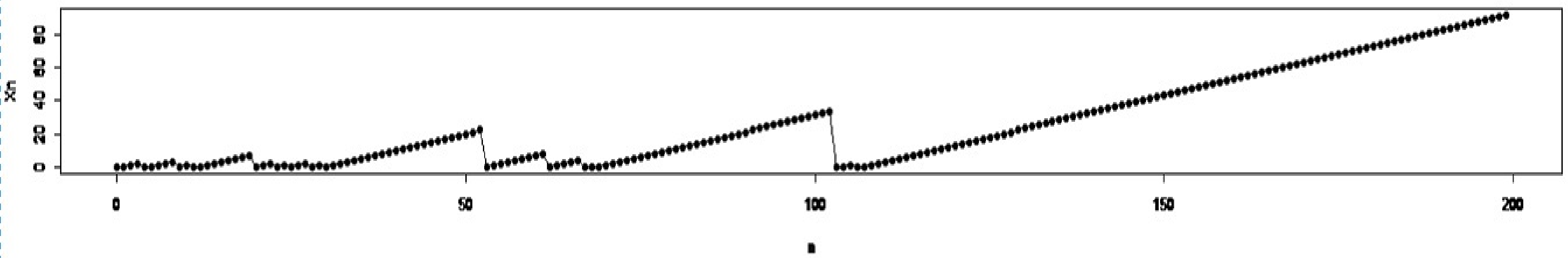
- 如果$p_i = \dfrac{(i+1)^2}{(i+2)^2}$，那么$u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$，

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty, \quad \therefore 0\text{是正常返态}$$

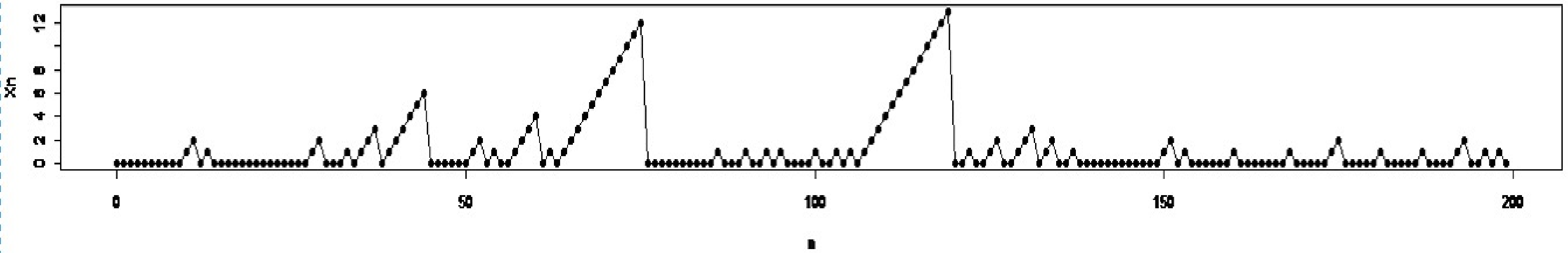
爬梯子模型p_i=exp(-1/(i+1)^2)一条样本轨道



爬梯子模型p_i=(i+1)/(i+2)的一条样本轨道



爬梯子模型p_i=(i+1)^2/(i+2)^2的一条样本轨道



常返和暂留的等价描述

1. i常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

   $\Leftrightarrow$ 从i出发以概率1返回状态i无穷多次

2. i暂留 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$

   $\Leftrightarrow$ 从i出发以概率0返回状态i无穷多次

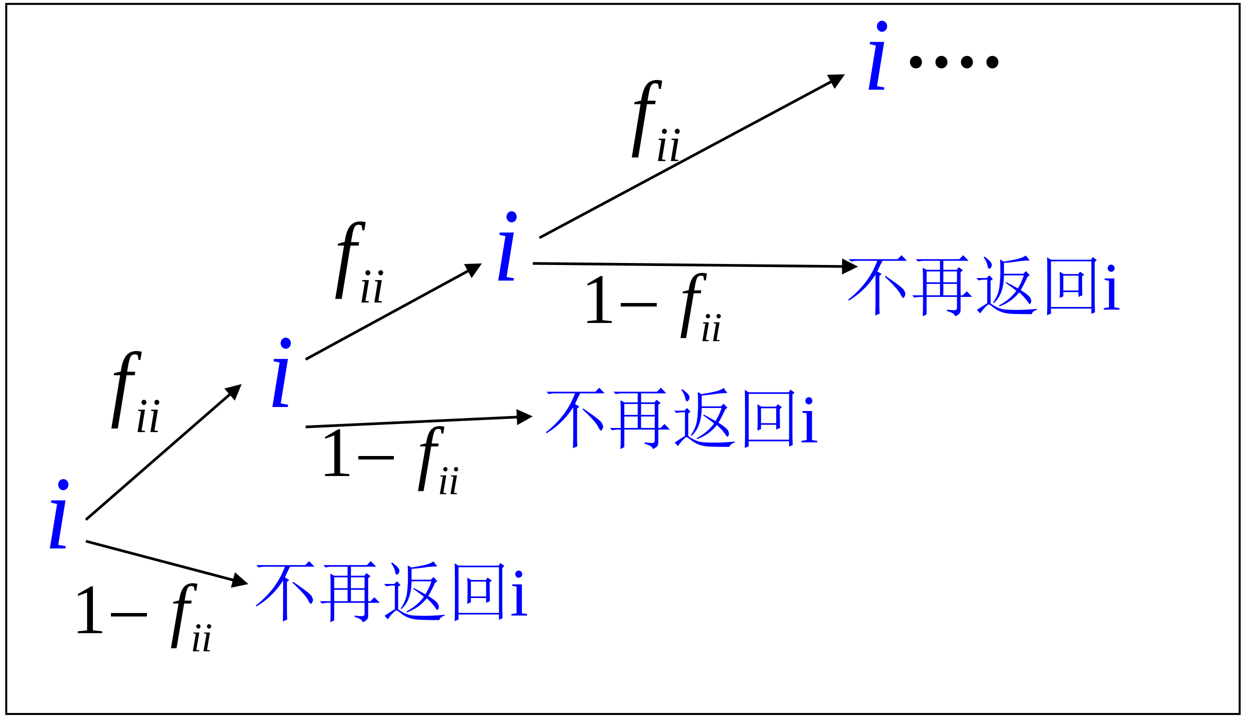
1. 若i常返，则$i \xrightarrow{\text{以概率1返回}} i \xrightarrow{\text{以概率1返回}} i \to \ldots$

以概率1无限次返回i

$$P(N_i = \infty \mid X_0 = i) = 1$$

N_i表示访问状态i的次数

2. 若i暂留，则$f_{ii}=P(\tau_i<\infty \mid X_0=i)<1$,



$\therefore$以概率0无限次返回i

$$P(N_i=\infty \mid X_0=i)=0$$

从i出发访问i的次数（包括0时刻）N_i服从几何分布：

$$P(N_i = n \mid X_0 = i) = f_{ii}^{\,n-1}(1 - f_{ii}),\quad n = 1, 2, \dots$$

$$\therefore E(N_i \mid X_0 = i) = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = E(N_i \mid X_0 = i) = \begin{cases} \infty & \text{若}i\text{常返} \\ \dfrac{1}{1-f_{ii}} < \infty & \text{若}i\text{暂留} \end{cases}$$

证明：令$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{若}X_n = i \\ 0 & \text{若}X_n \neq i \end{cases}$

则$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n$

$$\therefore E(N_i \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} E(Y_n \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

性质：设$i \neq j$,

1. 如果j常返且$f_{ij} > 0$,

$$\text{则} \sum_n p_{ij}^{(n)} = E(N_j \mid X_0 = i) = \infty$$

$$\text{且} P(N_j = \infty \mid X_0 = i) = f_{ij}$$

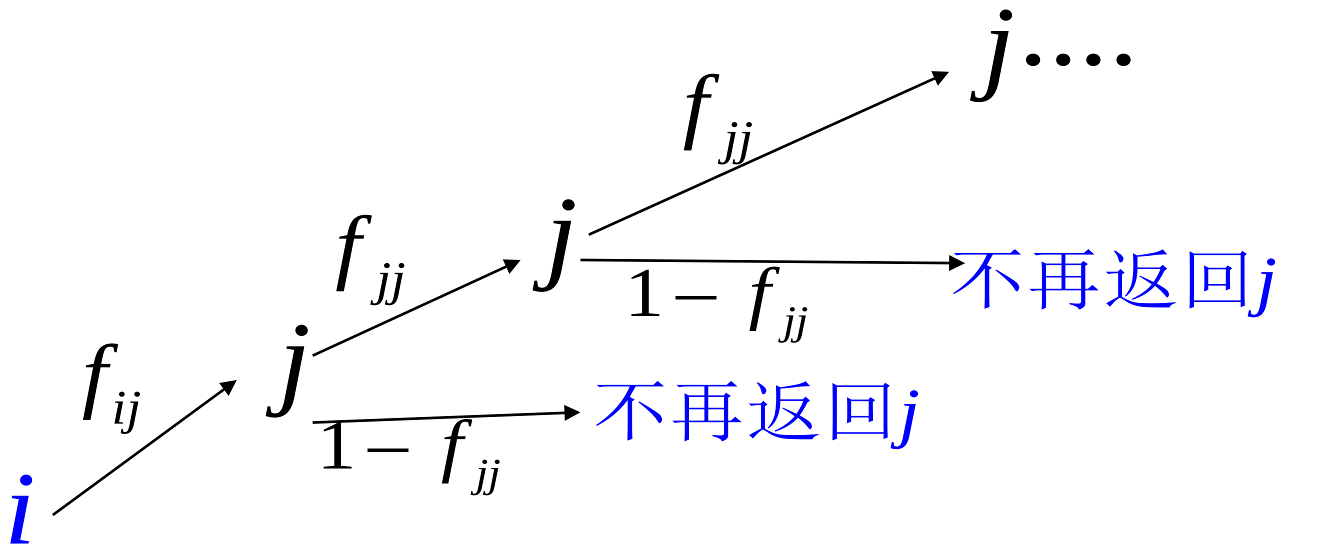
以概率f_{ij}访问　以概率1返回

$$i \quad \longrightarrow \quad j \quad \longrightarrow \quad j \rightarrow \ldots.$$

2. 如果j暂留，则

$$\sum_n p_{ij}^{(n)} = E(N_j \mid X_0 = i) = f_{ij} E(N_j \mid X_0 = j) < \infty$$

且$P(N_j = \infty \mid X_0 = i) = 0$



可达和互达:

设i，j是两个状态，

(1) i可达j，记为$i \searrow j$: 若存在$n \geq 0$, 使$p_{ij}^{(n)} > 0$

(2) i,j互达，记为$i \leftrightarrow j$: 若$i \searrow j$, 且$j \searrow i$

性质：互达是一个等价关系

(1) 自反性：$i \leftrightarrow i$

(2) 对称性: 若$i \leftrightarrow j$，则$j \leftrightarrow i$

(3)传递性：若$i \leftrightarrow j$，$j \leftrightarrow k$，则$i \leftrightarrow k$

•状态空间可分成不交的互达等价类的并

•称Markov链$\{X_n\}$不可约：

如果任意两个状态互达

周期：

定义状态i的周期$d(i)$为集合$\{n \geq 1: p_{ii}^{(n)} > 0\}$的最大公约数

（若该集合为空集，则定义d(i)=0），即可返回步数的最大公约数。

称i非周期：若$d(i) = 1$

称$\{X_n\}$常返（暂留，正常返，零常返，非周期）：

若所有状态常返（暂留，正常返，零常返，非周期）

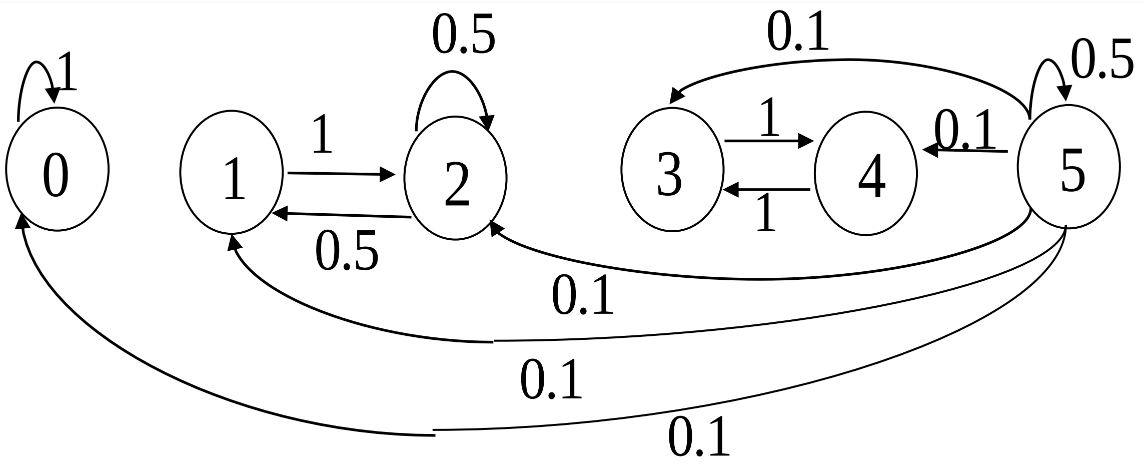
称i遍历：若i非周期正常返

称$\{X_n\}$遍历：若$\{X_n\}$不可约非周期正常返

例3. 设$\{X_n\}$是时齐Markov链，$I=\{0,1,2,3,4,5\}$，其一步转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

求出所有互达等价类，各状态的周期和常返性。


0
1
2
3
4
5
1
1
0.5
0.5
1
1
0.1
0.5
0.1
0.1
0.1
0.1

正常返和零常返的等价描述

1. i 正常返 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} p_{ii}^{(k)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} > 0$, 这里 $d = d(i)$

2. i 零常返 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ 但 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$

证明：(1) 只证明第一个等价：

若i常返，$X_0 = i$,

令τ_1表示第1次返回i的时间,

令τ_2表示第1次返回i和第2次返回i的时间间隔$\cdots$

则以概率1，$\tau_1 < \infty$，$\tau_2 < \infty$，$\tau_3 < \infty, \ldots,$ 且

τ_1，τ_2，$\ldots$ 独立同分布，且$E(\tau_i) = \mu_i$.

令$S_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$, 则由大数定律,

以概率1有，当$n \to \infty$时，$S_n / n \to \mu_i$.

令$N_i^{(n)}$表示$X_1, X_2, \ldots, X_n$访问i的次数，则$S_{N_i^{(n)}} \le n < S_{N_i^{(n)}+1}$,

因此$\dfrac{S_{N_i^{(n)}}}{N_i^{(n)}} \le \dfrac{n}{N_i^{(n)}} < \dfrac{S_{N_i^{(n)}+1}}{N_i^{(n)}+1} \dfrac{N_i^{(n)}+1}{N_i^{(n)}}$.

注意到$\lim\limits_{n\to\infty} N_i^{(n)} = \infty \; a.s$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_i^{(n)}}{n} = \frac{1}{\mu_i} \quad a.s. \, ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(N_i^{(n)})}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(k)} = \frac{1}{\mu_i}$$

互达等价类的同一性质：

如果$i \leftrightarrow j$，则

(1) $d(i) = d(j)$,

(2) i常返当且仅当j常返

(3) i正常返当且仅当j正常返

物以类聚，人以群分

互达等价类中各状态具有相同的周期和常返性。

判断一个状态的性质时，可以从它的等价类中找出一个容易判断的状态来判断。

证明: 设$i \leftrightarrow j$, $i \neq j$, 则存在正整数m,n使得$p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(n)} > 0$.

(1) 如果$p_{ii}^{(k)} > 0$, 则$p_{jj}^{(k+m+n)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)} > 0$.

所以$d(j) \mid k+m+n$. 特别地，$d(j) \mid m+n$.

所以，$d(j) \mid k$. 这推出$d(j) \mid d(i)$.

同理$d(i) \mid d(j)$. 因此$d(i)=d(j)$.

(2) 如果i常返，则$\sum_k p_{ii}^{(k)} = \infty$.

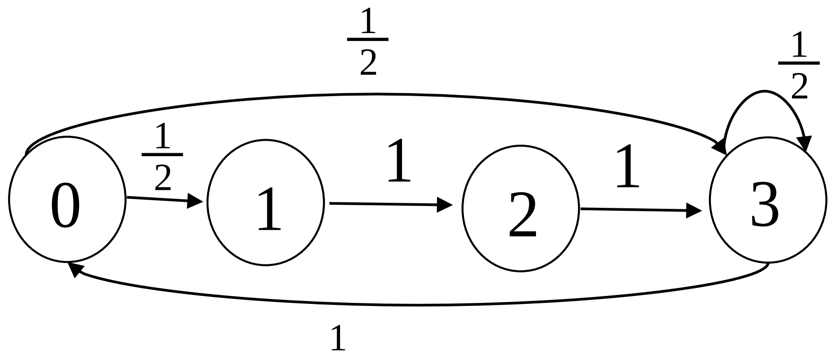
所以$\sum_k p_{jj}^{(k+m+n)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)} \sum_k p_{ii}^{(k)} = \infty$, 即j也常返.

(3) 如果$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$, 则$p_{ii}^{(k)} \leq p_{jj}^{(k+m+n)} \div (p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)}) \to 0$.

所以如果j零常返，则i也零常返。

例3. 讨论例1例2中各状态的周期和常返性.

例1



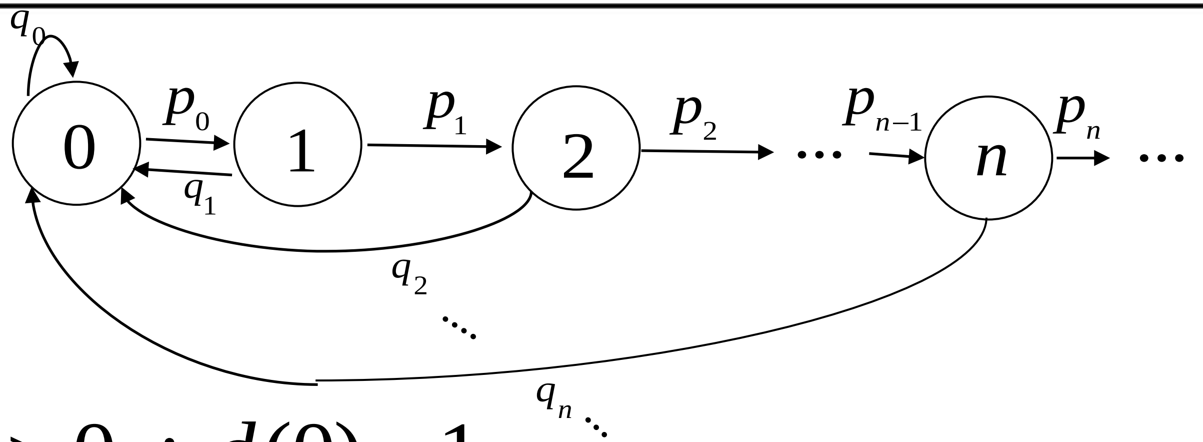
中已算得状态0正常返

$\because p_{33} > 0, \therefore d(3) = 1.$

$\because$ 各状态互达, $\therefore$ 所有状态非周期正常返。

这是一个遍历的Markov链。

例2



$\because p_{00} > 0, \therefore d(0) = 1.$

$\because$ 各状态互达，$\therefore$ 所有状态非周期，并且与0具有相同的常返性。

（1）当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n > 0$ 时，各状态暂留；

（2）当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$ 时，各状态零常返；

（3）当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$ 时，各状态正常返。

例:（随机游动） 设$X=\{X_n;n\ge 0\}$是$\mathbb{Z}$上的随机游动，

$$p_{i,i+1}=p=1-p_{i,i-1}, i=0,\pm1,\pm2,\dots,0<p<1.$$

则X不可约，$p_{00}^{(2n-1)}=0,$

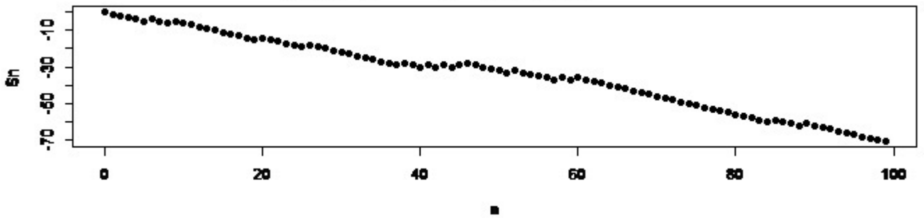
$$p_{00}^{(2n)}=\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n=\frac{(2n)!}{n!n!}[p(1-p)]^n, n=1,2,\dots$$

由Strling公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ 得：$p_{00}^{(2n)}\sim\dfrac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}\to 0$

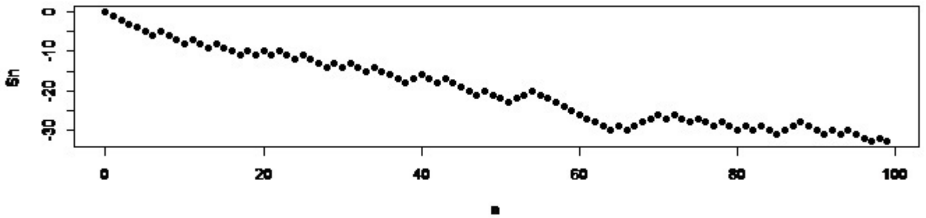
且$\sum_n p_{00}^{(n)}=\infty$当且仅当$p=1/2.$

所以$\boxed{\text{当}p=1/2\text{时，}X\text{零常返；否则}X\text{暂留。}}$

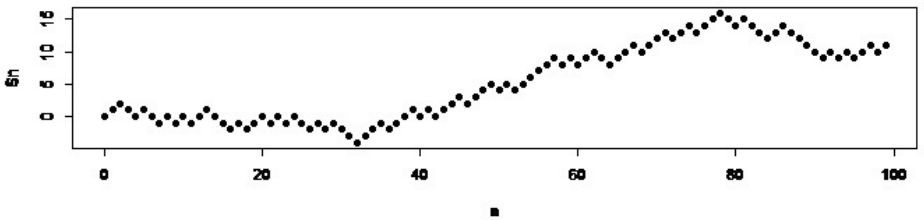
随机游动p=0.2的一条样本轨道



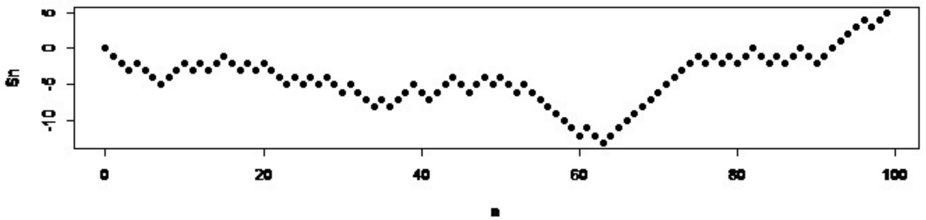
随机游动p=0.4的一条样本轨道



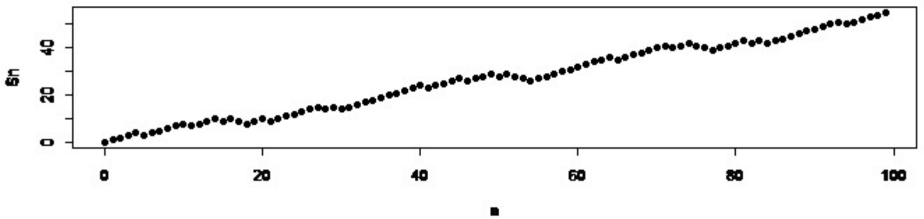
随机游动p=0.5的一条样本轨道



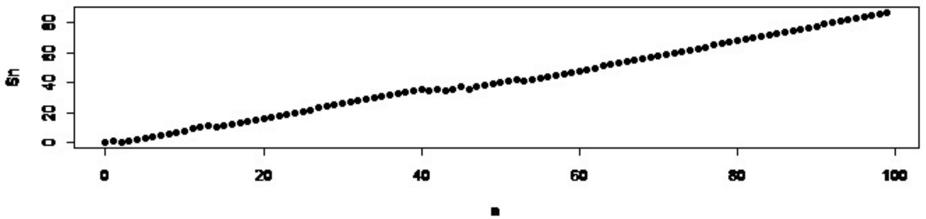
随机游动p=0.6的一条样本轨道



随机游动p=0.8的一条样本轨道



随机游动p=0.9的一条样本轨道



如果X是$\mathbb{Z}^2$上对称随机游动，即对每一对整数(i,j),

$$p_{(i,j),(i+1,j)} = p_{(i,j),(i-1,j)} = p_{(i,j),(i,j+1)} = p_{(i,j),(i,j-1)} = 1/4.$$

可得$p_{00}^{(2n)} = \dfrac{1}{4^{2n}} C_{2n}^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^k = \dfrac{1}{4^{2n}} (C_{2n}^n)^2 \sim \dfrac{1}{\pi n}$

这说明$\sum_n p_{00}^{(n)} = \infty$但$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = 0$。因此$X$零常返。

在3维对称随机游动中：

$$p_{00}^{(2n)}=\frac{1}{6^{2n}}\binom{2n}{n}\sum_{k_1+k_2+k_3=n}\left(\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}\right)^2$$

$$\leq\frac{1}{6^{2n}}\binom{2n}{n}3^n\max_{\substack{k_1\leq k_1\leq k_3\\ k_1+k_2+k_3=n}}\left(\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}\right)$$

而 $\max\limits_{\substack{k_1\leq k_1\leq k_3\\ k_1+k_2+k_3=n}}\left(\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}\right)$ 在 $k_3=k_1$ 或 $k_3=k_1+1$ 时达到，

由stirling公式 $\max\limits_{\substack{k_1\leq k_1\leq k_3\\ k_1+k_2+k_3=n}}\left(\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}\right)\sim\frac{3^n}{n}$

$\therefore p_{00}^{(2n)}=O(n^{-3/2}),\sum\limits_n p_{00}^{(2n)}<\infty$，因此暂留

事实上，

1维和2维对称随机游动都是零常返的

3维或3维以上对称随机游动都是暂留的

醉汉总会回来 

喝醉的小鸟可能一去不复返 

§4 平稳分布和极限分布

问题：在什么样的情况下，初始分布与一步之后的分布相同？（平稳分布）

- 设初始分布为$\pi=(\pi_j;\ j\in I)$，则一步之后的分布为：

$$P(X_1=k)=\sum_i P(X_0=i)p_{ik}=\sum_i \pi_i p_{ik},\forall k$$

所以初始分布与一步之后的分布相同当且仅当：

$$\pi_j\ge 0,\sum_j \pi_j=1.$$

$$\pi_k=\sum_i \pi_i p_{ik},\forall k$$

平稳分布

$\{\pi_j; j\in I\}$称为是$\{X_n\}$的平稳分布，如果

（1） $\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1.$

（2） $\pi_k = \sum_i \pi_i p_{ik}, \forall k$

即$\pi = \pi P$

平稳分布的意义

设初始分布为平稳分布$\pi=\{\pi_1,\pi_{2,}\ldots\}$,则

（1）所有X_n的分布均为π,

（2）对$k\geq 2,(X_{n_1},\ldots,X_{n_k})$的分布仅与时间差

$n_2-n_1,\ldots,n_k-n_{k-1}$有关，与时间起点$n_1$无关。

当初始分布为平稳分布时，Markov链为严平稳过程。

证：（1）X_n的分布为$\pi P^n=(\pi P)P^{n-1}=\pi P^{n-1}$

与X_{n-1}的分布相同，所以所有X_n的分布均为π.

（2）$P(X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2 \ldots, X_{n_k}=i_k)$

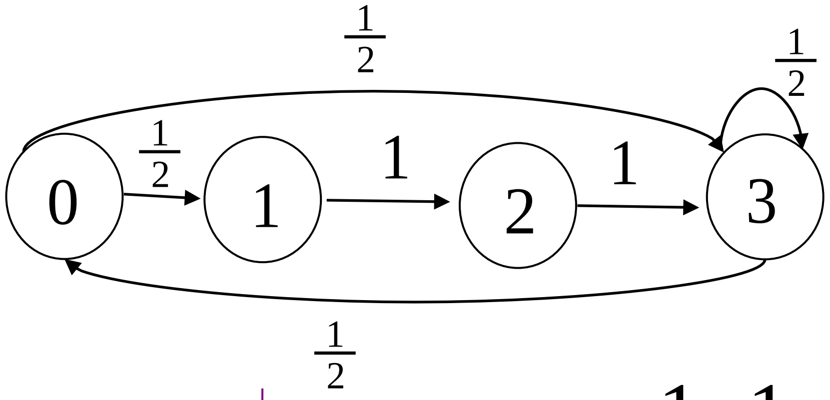
$=P(X_{n_1}=i_1)p_{i_1,i_2}^{(n_2-n_1)}p_{i_2,i_3}^{(n_3-n_2)}\ldots p_{i_{k-1},i_k}^{(n_k-n_{k-1})}$

$=\pi_{i_1}p_{i_1,i_2}^{(n_2-n_1)}p_{i_2,i_3}^{(n_3-n_2)}\ldots p_{i_{k-1},i_k}^{(n_k-n_{k-1})}$

例1. 求上1节例1中Markov链的平稳分布。

解：$I=\{0,1,2,3\}$,

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$



设平稳分布$\pi=(\pi_0,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3)$

则
$$\begin{cases} \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \\ \pi_0=\frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_1=\frac{1}{2}\pi_0 \\ \pi_2=\pi_1 \end{cases}$$

解得$\pi=(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{2})$

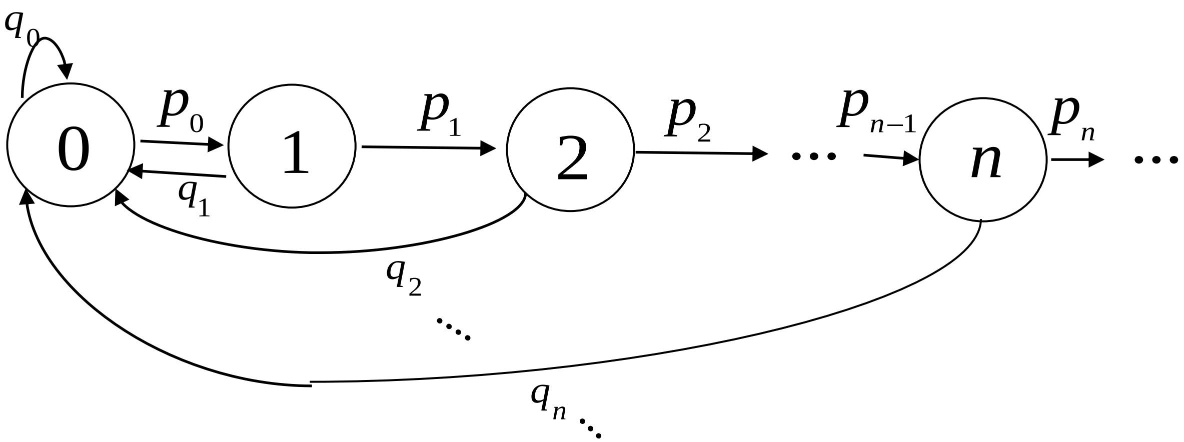
已算得$\mu_0=4,\ \ \mu_3=2$

恰好$\pi_0=\frac{1}{\mu_0},\ \ \pi_3=\frac{1}{\mu_3}$

是否$\pi_1=\frac{1}{\mu_1},\ \ \pi_2=\frac{1}{\mu_2}$?

完全正确^_^

例2. 求上1节例2中Markov链的平稳分布。



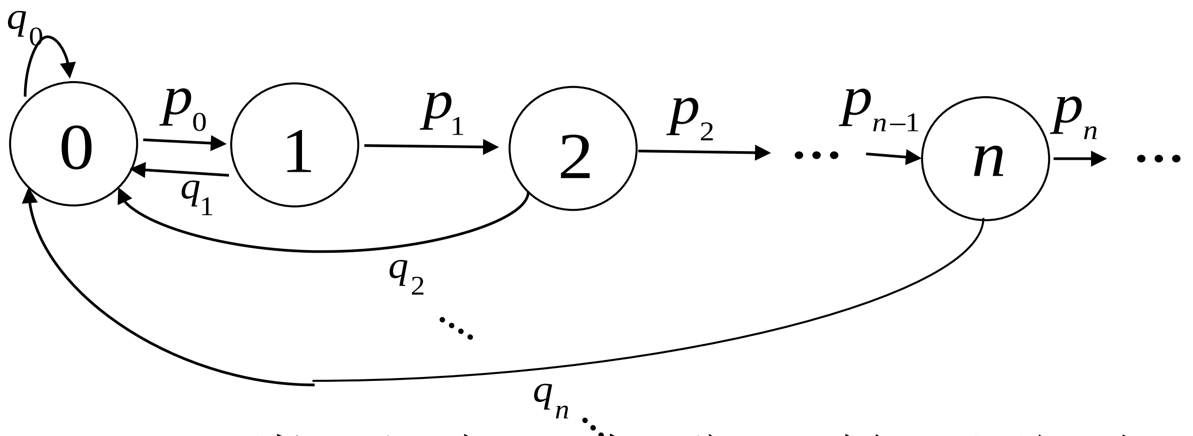
解：设平稳分布π，则$\pi_1 = p_0\pi_0, \pi_2 = p_1\pi_1,$

$\ldots\pi_n = p_{n-1}\pi_{n-1}\cdots$ 得$\pi_n = p_0 p_1 \ldots p_{n-1}\pi_0 = u_n\pi_0$

又$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = 1$ $\therefore$ 平稳分布存在当且仅当$\sum_{n=0}^{\infty}u_n < \infty$

即当且仅当$\{X_n\}$正常返

例2. 求上1节例2中Markov链的平稳分布。



当$\{X_n\}$正常返时，有唯一的平稳分布

$$\pi_i = \frac{u_i}{\sum_{n=0}^{\infty} u_n}, i = 0,1,\ldots$$

已算得$\mu_0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, 恰好$\pi_0 = \dfrac{1}{\mu_0}$, 实际上$\pi_i = \dfrac{1}{\mu_i}$，$\forall i$

命题：

(1) 如果j暂留或零常返，则对所有i, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$

(2) 设$\{X_n\}$有平稳分布π，则对所有暂留和零常返态j，有$\pi_j=0$.

证明：(1) 对$n\ge 1$, $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, (\text{这里令} p_{jj}^{(n-k)}=0 \text{当} k>n \text{时})$$

由控制收敛定理, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n-k)}=0$

(2) 对任何$n\ge 1$, $\pi P^n=\pi$, 由控制收敛定理,

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}\sum_i \pi_i p_{ij}^{(n)}=\sum_i (\pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)})=0.$$

不可约Markov链的性质

设$\{X_n\}$不可约，则

（1）存在平稳分布当且仅当$\{X_n\}$正常返，

此时平稳分布π唯一且$\pi_i = \dfrac{1}{\mu_i}$

（2）若$\{X_n\}$遍历，则对任何i，j,$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$

(极限与出发点无关）

（3）若状态空间I有限，则$\{X_n\}$一定正常返。

如果μ_i越小，即访问状态i的平均时间间隔越小，则访问i越频繁，从而访问i的极限概率也越大，所以π_i越大

证明：（3）设$\{X_n\}$不可约，且状态空间I有限.

如果$\{X_n\}$不是正常返，则所有状态暂留或所有状态零常返.　所以对所有状态$i, j, p_{ij}^{(n)} \to 0,$

注意到$1=\sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)}$, 令$n \to \infty$并注意到$I$有限，得到，

$1=\sum_{j\in I} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$，矛盾。

所以$\{X_n\}$正常返.

平稳分布的意义

设初始分布为平稳分布$\pi=\{\pi_1,\pi_{2,}\ldots\}$,则

（1）所有X_n的分布均为π,

（2）对$k\geq 2,(X_{n_1},\ldots,X_{n_k})$的分布仅与时间差

$n_2-n_1,\ldots,n_k-n_{k-1}$有关，与时间起点$n_1$无关。

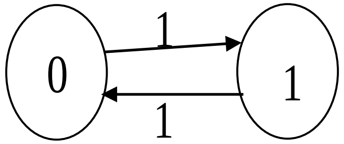
当初始分布为平稳分布时，Markov链为严平稳过程。

Markov链的极限分布

对于时齐的Markov链$\{X_n\}$，如果存在状态空间I上的概率分布$\mu=(\mu_i;i\in I)$使得对所有状态i,有

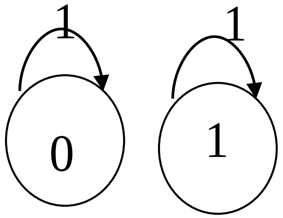
$\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=i)=\mu_i$，则称$\mu$是$\{X_n\}$的极限分布.

注：(1) 极限分布可以不存在；

例 

则$\forall i$，$j,\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$不存在

（2）极限分布可以依赖于初始分布.

例 

$P(X_0=0)=\alpha=1-P(X_0=1),0\le\alpha\le 1$

则$P(X_n=0)=\alpha\to\alpha,P(X_n=1)=1-\alpha\to 1-\alpha.$

例：考虑3状态Markov链，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

状态空间$I = \{1, 2, 3\}$,

计算极限分布。

分成以下三步：

（1）计算特征根

（2）计算特征向量

（3）计算$\mathbf{P}^n$

（1）计算特征根

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{P}-\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-\frac{\lambda}{4}-\frac{3}{16})\end{aligned}$$

特征根为

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{8}(-1+3i), \quad \lambda_3 = \frac{1}{8}(-1-3i)$$

（2）计算特征向量

求解方程：

$$\mathbf{P}\vec{r} = \lambda\vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = (1, 1, 1)$$
$$\vec{r}_2 = (-7-9i, -16+24i, 26)$$
$$\vec{r}_3 = (-7+9i, -16-24i, 26)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -7-9i & -7+9i \\ 1 & -16+24i & -16-24i \\ 1 & 26 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{780}\begin{pmatrix} 418 & 156 & 208 \\ -8+14i & -3-11i & 11-3i \\ -8-14i & -3-11i & 11-3i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+3i}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-3i}{8} \end{pmatrix}\mathbf{C}^{-1}$$

（3）计算$\mathbf{P}^n$

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{-1+3i}{8})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{-1-3i}{8})^n \end{pmatrix}\mathbf{C}^{-1}$$

令$n \to \infty$

$$\mathbf{P}^n \to \mathbf{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{C}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

极限分布为$\mu = (\frac{8}{15}, \frac{1}{5}, \frac{4}{15})$

另一方面，也可以计算平稳分布$\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$

$$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \\ \pi_2=\frac{1}{8}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3=\frac{3}{8}\pi_1+\frac{1}{4}\pi_3 \end{cases}$$

解得$\pi=(\frac{8}{15},\frac{1}{5},\frac{4}{15})$与极限分布相同

例：　一步转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 0.0 & 0.3333333 & 0.3333333 & 0.3333333 \\ 0.5 & 0.0000000 & 0.5000000 & 0.0000000 \\ 0.5 & 0.5000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 1.0 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \end{bmatrix}$$

$$P^2=\begin{bmatrix} 0.6666667 & 0.1666667 & 0.1666667 & 0.0000000 \\ 0.2500000 & 0.4166667 & 0.1666667 & 0.1666667 \\ 0.2500000 & 0.1666667 & 0.4166667 & 0.1666667 \\ 0.0000000 & 0.3333333 & 0.3333333 & 0.3333333 \end{bmatrix}$$

$$P^4=\begin{bmatrix} 0.5277778 & 0.2083333 & 0.2083333 & 0.05555556 \\ 0.3125000 & 0.2986111 & 0.2361111 & 0.15277778 \\ 0.3125000 & 0.2361111 & 0.2986111 & 0.15277778 \\ 0.1666667 & 0.3055556 & 0.3055556 & 0.22222222 \end{bmatrix}$$

$$P^8=\begin{bmatrix} 0.4180170 & 0.2383295 & 0.2383295 & 0.1053241 \\ 0.3574942 & 0.2567033 & 0.2527971 & 0.1330054 \\ 0.3574942 & 0.2527971 & 0.2567033 & 0.1330054 \\ 0.3159722 & 0.2660108 & 0.2660108 & 0.1520062 \end{bmatrix}$$

$$P^{16}=\begin{bmatrix} 0.3784205 & 0.2490721 & 0.2490721 & 0.1234354 \\ 0.3736081 & 0.2503852 & 0.2503700 & 0.1256367 \\ 0.3736081 & 0.2503700 & 0.2503852 & 0.1256367 \\ 0.3703061 & 0.2512734 & 0.2512734 & 0.1271471 \end{bmatrix}$$

$$P^{32}=\begin{bmatrix} 0.3750216 & 0.2499941 & 0.2499941 & 0.1249901 \\ 0.3749912 & 0.2500024 & 0.2500024 & 0.1250040 \\ 0.3749912 & 0.2500024 & 0.2500024 & 0.1250040 \\ 0.3749703 & 0.2500081 & 0.2500081 & 0.1250136 \end{bmatrix}$$

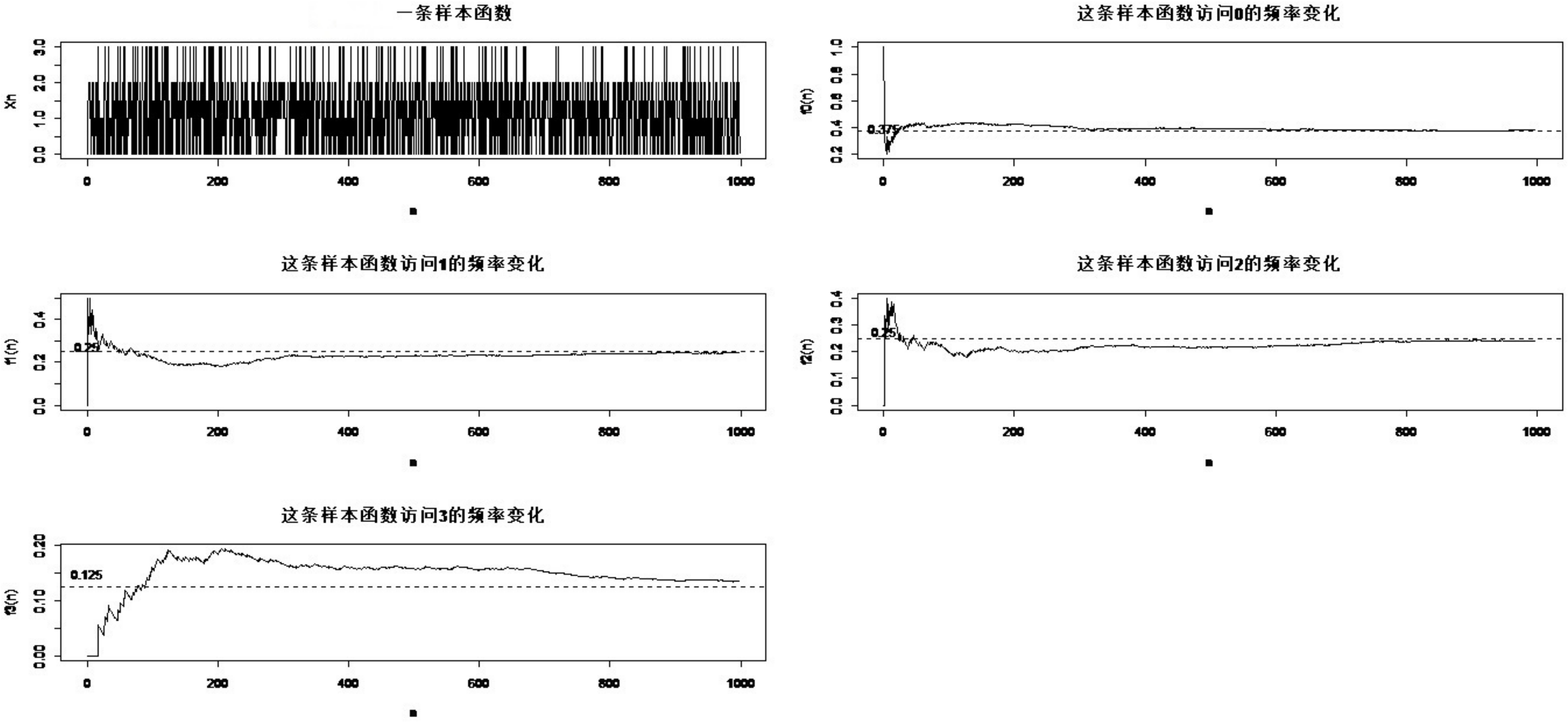
$$P^{34} = \begin{bmatrix} 0.3750115 & 0.2499969 & 0.2499969 & 0.1249947 \\ 0.3749953 & 0.2500013 & 0.2500013 & 0.1250021 \\ 0.3749953 & 0.2500013 & 0.2500013 & 0.1250021 \\ 0.3749842 & 0.2500043 & 0.2500043 & 0.1250072 \end{bmatrix}$$

$$P^{35} = \begin{bmatrix} 0.3749916 & 0.2500023 & 0.2500023 & 0.1250038 \\ 0.3750034 & 0.2499991 & 0.2499991 & 0.1249984 \\ 0.3750034 & 0.2499991 & 0.2499991 & 0.1249984 \\ 0.3750115 & 0.2499969 & 0.2499969 & 0.1249947 \end{bmatrix}$$

……

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0.125 \\ 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0.125 \\ 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0.125 \\ 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0.125 \end{bmatrix}$$

极限分布和平稳分布都是$\begin{pmatrix} 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0.125 \end{pmatrix}$


一条样本函数
Xn
n
这条样本函数访问0的频率变化
f0(n)
0.375
n
这条样本函数访问1的频率变化
f1(n)
0.25
n
这条样本函数访问2的频率变化
f2(n)
0.25
n
这条样本函数访问3的频率变化
f3(n)
0.125
n

状态空间I的子集C称为是闭集：

若对于任意状态$i \in C$和任意状态$j \notin C$，$p_{ij} = 0$

即C是封闭的，从C中出发将永远不会跑出C外

性质：若C是闭集，$P(X_0 \in C) = 1$, 则

$$P(X_n \in C, \ \forall n) = 1,$$

此时$\{X_n\}$可以看成是状态空间C上的Markov链

性质：

(1)如果i常返且$i \searrow j$，则$i \leftrightarrow j$且$f_{ij} = f_{ji} = 1$

(2)如果i的互达等价类不闭，则i暂留

（如果i常返，则i的互达等价类是闭的）

(3) 如果i的互达等价类是有限闭集，则i正常返

证明（1）$\because i \searrow j, \therefore$ 存在n使得$p_{ij}^{(n)} > 0.$

$\because i$常返，所以$1 = P(N_i = \infty \mid X_0 = i)$

$= p_{ij}^{(n)} P(N_i = \infty \mid X_n = j, X_0 = i)$

$+ (1 - p_{ij}^{(n)}) P(N_i = \infty \mid X_n \neq j, X_0 = i)$

$\because p_{ij}^{(n)} > 0, \therefore P(N_i = \infty \mid X_n = j, X_0 = i) = 1.$

由Markov性，$P(N_i = \infty \mid X_0 = j) = 1.$

$\therefore f_{ji} = 1.$

因此$i \leftrightarrow j$，j也常返，从而$f_{ij} = 1.$

有限Markov链的状态分解：

$$I = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$$

这里C_1，$C_2,\ldots,C_k$是所有闭的互达等价类，T是余下的状态

则（1）C_1，$C_2,\ldots,C_k$中各状态正常返，T中各状态暂留

(2) 如果X_0在某个C_i中，则此Markov链永不离开C_i。

可以把$\{X_n\}$限制在C_i上得到一个不可约正常返的Markov链

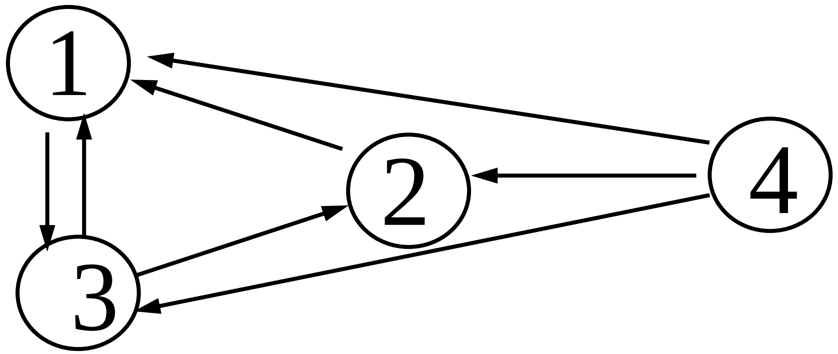
(3) 如果$X_0 \in T$，则此Markov链最终会进入某个C_i并将不再离开

例. 设$\{X_n\}$状态空间$I=\{1,2,3,4\}$，一步转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

讨论各状态的周期和常返性，

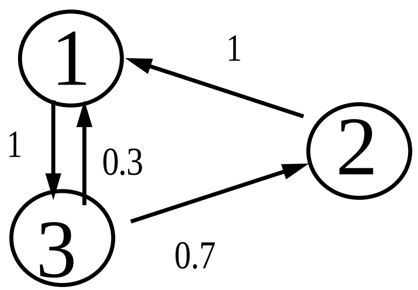
计算正常返态的平均回转时。



有两个等价类$C_1=\{1,2,3\}$和$\{4\}$,其中C_1是闭的,$\{4\}$不闭

故1,2,3正常返，4暂留 ,1,2,3非周期，$d(4)=0$

把$\{X_n\}$限制在C_1上得到一个遍历Markov链，状态空间为C_1

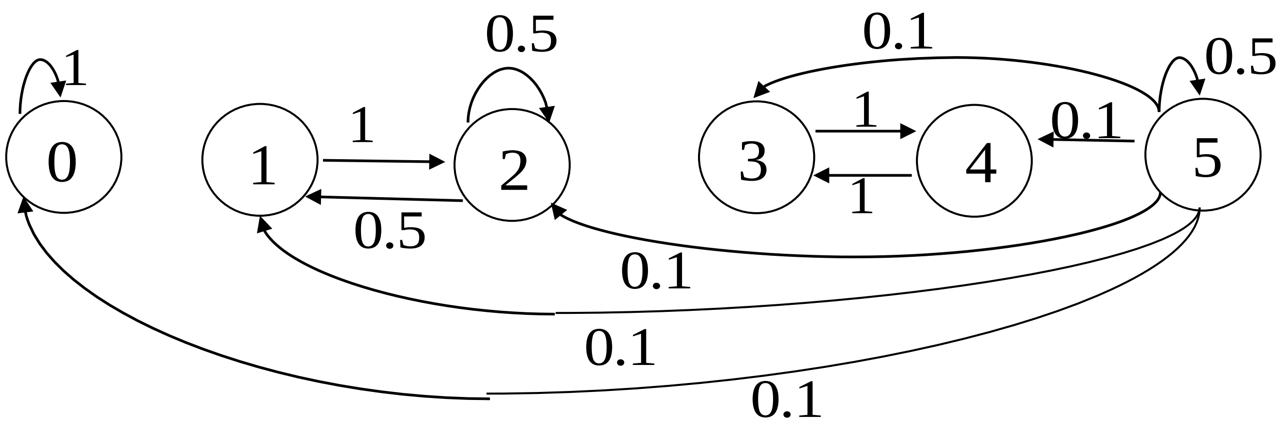


转移矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$

平稳分布$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\dfrac{10}{27},\dfrac{7}{27},\dfrac{10}{27})$

$\therefore(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=(\dfrac{27}{10},\dfrac{27}{7},\dfrac{27}{10})$

例4. 讨论上节例3各状态性质，计算正常态的平均回转时



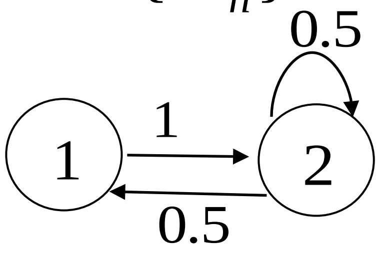
解：有四个等价类$C_1=\{0\},C_2=\{1,2\}$，$C_3=\{3,4\}$和$\{5\}$

只有{5}不闭。$\therefore$ 0,1,2,3,4正常返，5暂留，

0,1,2,5非周期,3,4周期为2

0是吸收态,$\therefore\ \mu_0=1$

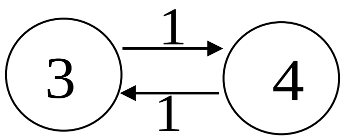
把$\{X_n\}$限制在C_2上得到一个遍历Markov链，



状态空间为C_2

平稳分布$(\pi_1,\pi_2)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\therefore(\mu_1,\mu_2)=(3,\frac{3}{2})$

把$\{X_n\}$限制在C_3上得到一个不可约正常返周期为2的Markov链，状态空间为C_3.



平稳分布$(\pi_3,\pi_4)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\therefore(\mu_3,\mu_4)=(2,2)$

例：欧亚洲绝大多数汽车年保险金由所谓好-坏系统确定．以$s_i(k)$表示上年处在状态i且上年有k次理赔要求的参保人在今年的状态．设此人理赔次数服从参数为λ的泊松分布，那么此人相继状态构成一个MC，转移概率

$$p_{ij} = \sum_{k:s_i(k)=j} a_k, \text{这里} a_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

当前状态		下一状态			
状态	年保险金	0个理赔	1个理赔	2个理赔	2个以上理赔
1	2000	1	2	3	4
2	2500	1	3	4	4
3	4000	2	4	4	4
4	6000	3	4	4	4

$$\text{则}P=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1-a_0-a_1-a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 & 1-a_0-a_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 1-a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & 1-a_0 \end{pmatrix}$$

问题：如果λ=1/2, 求长远来看参保人平均所付的年保险金.

解：
$$P=\begin{bmatrix} 0.6065 & 0.3033 & 0.0758 & 0.0144 \\ 0.6065 & 0 & 0.3033 & 0.0902 \\ 0 & 0.6065 & 0 & 0.3935 \\ 0 & 0 & 0.6065 & 0.3935 \end{bmatrix}$$

算得：

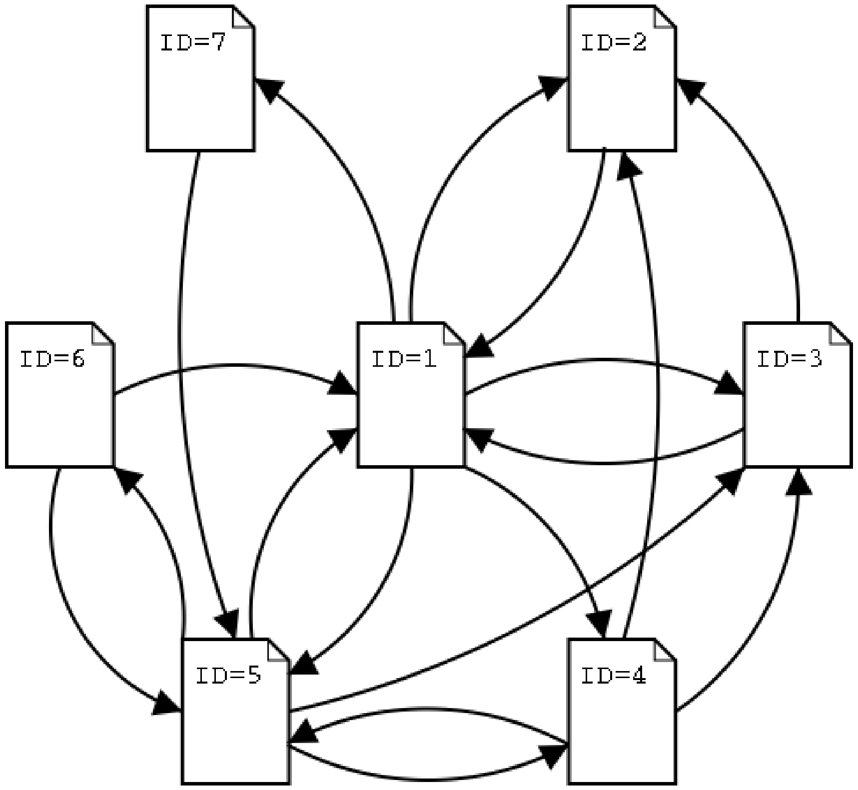
π_1=0.3692， π_2=0.2395， π_3=0.2103， π_4=0.1809

长远来看参保人所付的年保险金是：

$2000\pi_1+2500\pi_2+4000\pi_3+6000\pi_4=3263.75$

Markov链的应用—PageRank

PageRank, 就是网页排名，又称网页级别，是一种由搜索引擎根据网页之间相互的超链接计算的网页排名技术，Google用它来体现网页的重要性。是Google的创始人拉里·佩奇和谢尔盖·布林在斯坦福大学发明了这项技术, 并最终以拉里·佩奇（Larry Page）之姓来命名。



链接源ID	链接目标
1	2,3,4,5, 7
2	1
3	1,2
4	2,3,5
5	1,3,4,6
6	1,5
7	5

访问网络可看成是在这些网络上的随机游动,每次都等可能地访问所在网页的友情连接,若用X_n表示第n次访问的网页, 则$\{X_n\}$是Markov链,转移矩阵P=

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

其PageRank满足 : (1) $\pi_j > 0, \sum \pi_j = 1$

(2) $\pi_j = \sum \pi_i p_{ij}, \forall j$

恰好为平稳分布．解得:

$\pi = (0.3035, 0.1661, 0.1406, 0.1054, 0.1789, 0.0447, 0.0607)$

所以网络的PageRank评价排名为:

(1) $\pi_1 = 0.3035$

(2) $\pi_5 = 0.1789$

(3) $\pi_2 = 0.1661$

(4) $\pi_3 = 0.1406$

(5) $\pi_4 = 0.1054$

(6) $\pi_7 = 0.0607$

(7) $\pi_6 = 0.0447$

§5 吸收概率与平均吸收时间

有限Markov链的状态分解:

$$I = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$$

这里T是所有暂留态,

C_1, $C_2,\ldots,C_k$是所有闭的常返的互达等价类

•如果$X_0 \in T$,则最终会进入某个C_i并将不再离开

问题:1. 进入$C_1,\ldots,C_k$的概率分别是多少?

2.进入$C = C_1 \cup \cdots \cup C_k$的平均时间是多少?

对状态i, 令

$$T_i = \min\{n \geq 0 : X_n = i\}$$

为首次访问状态i的时刻,

对I的子集A, 令

$$T_A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

为首次访问子集A的时刻,

约定 $\min \varnothing = \infty$.

例. 赌徒输光问题:

甲乙两人玩抛硬币游戏，一开始甲带有i元钱，乙带有$m-i$元钱，独立重复抛一枚均匀硬币，若第n次出现正面，则甲赢1元，否则甲输1元。游戏一直到某人输光结束。计算(1)甲输光的概率；

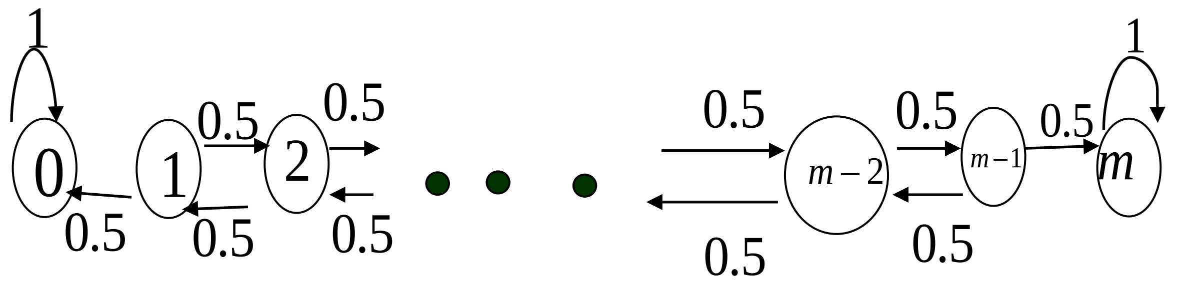
(2)游戏平均持续时间.

解：以S_n表示抛n次硬币后甲所拥有的钱数。

则$\{S_n\}$是一时齐Markov链，状态空间是

$\{0,1,\dots,m\}$，一步转移概率为：

$$p_{00}=p_{mm}=1,\ p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=0.5,\ 0<i<m.$$



令$h_i = P(\text{输光} \mid S_0 = i) = P(T_0 < \infty \mid S_0 = i)$，则$h_0 = 1, h_m = 0,$

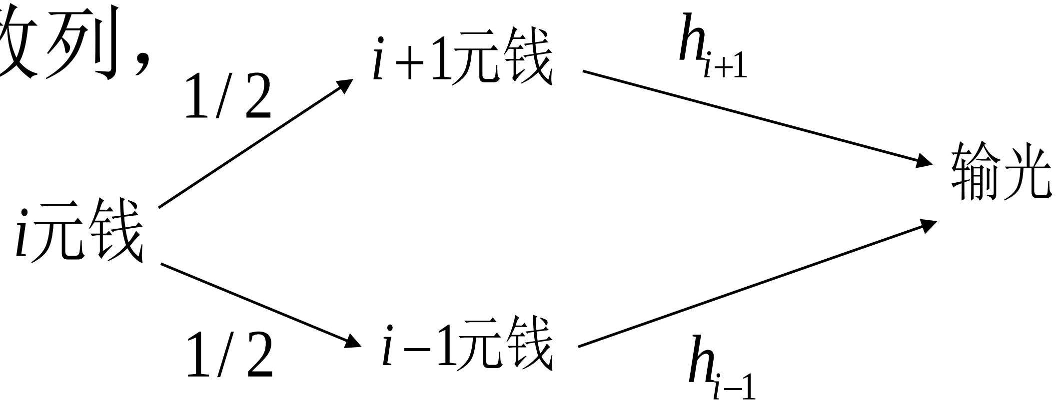
$$h_i = \sum_j P(S_1 = j \mid S_0 = i) P(\text{输光} \mid S_1 = j, S_0 = i)$$

$$= \sum_j p_{ij} P(\text{输光} \mid S_0 = j) = \tfrac{1}{2}(h_{i+1} + h_{i-1}), 0 < i < m.$$

即$h_{i+1} - h_i = h_i - h_{i-1}, 0 < i < m.$

所以$\{h_i\}$是等差数列，

所以$h_i = \frac{m-i}{m}$.



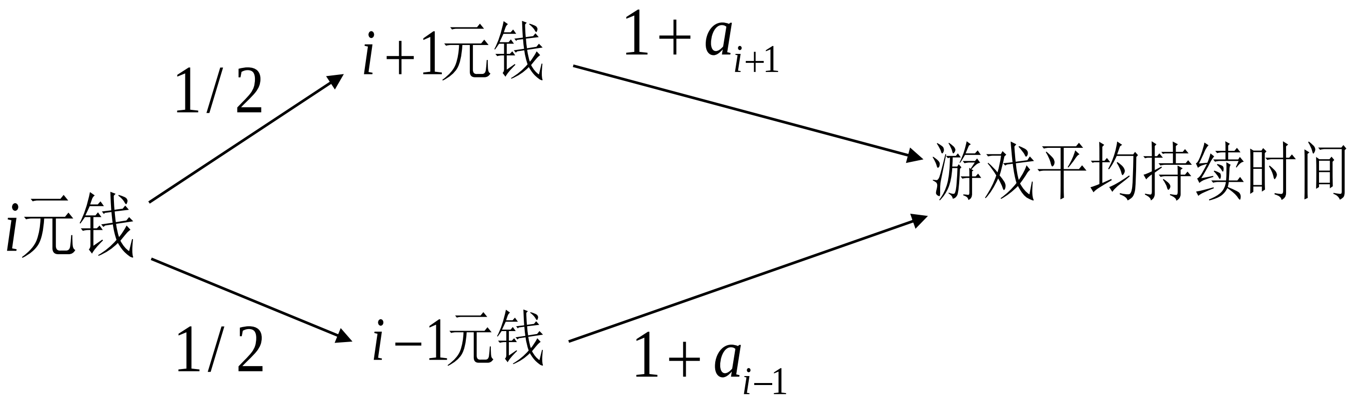
令$T = T_{\{0,m\}}$为游戏结束时间

令$a_i = E(T \mid S_0 = i)$, 则$a_0 = 0, a_m = 0$

对$0 < i < m$

$$a_i = \sum_j P(S_1 = j \mid S_0 = i) E(T \mid S_1 = j, S_0 = i)$$

$$= \sum_j p_{ij} [1 + E(T \mid S_0 = j)] = 1 + \tfrac{1}{2}(a_{i+1} + a_{i-1})$$



已得到$a_0=0, a_m=0$

$$a_i=1+\tfrac{1}{2}(a_{i+1}+a_{i-1}), 0<i<m$$

令$d_i=a_i-a_{i-1},\quad i=1,2,\dots,m$

则$d_{i+1}=d_i-2$

$$a_i=d_1+\dots+d_i=id_1-i(i-1)$$

$$\because a_m=0, \therefore d_1=m-1$$

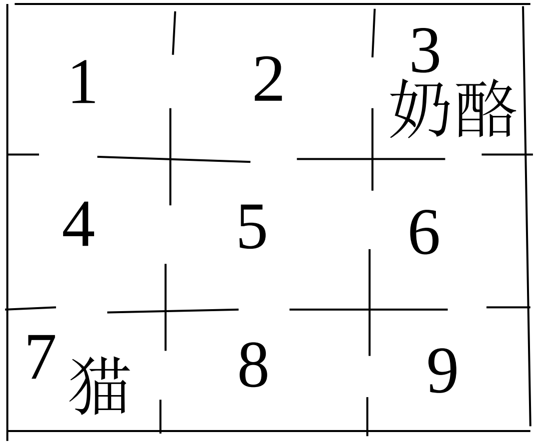
$$a_i=i(m-i),\quad \forall i$$

上例中有两个吸收态0和m，我们需要计算的是最终被状态0吸收的概率，以及最终被吸收态集合$\{0,m\}$吸收的平均时间.

当Markov链有多个闭集时，我们可以利用Markov性和全概率公式, 利用1步分析法建立方程，计算被某一个特定闭集吸收的概率.也用类似的方法来计算平均吸收时间.

例. 迷宫中的老鼠:

如下图，假设猫不动，老鼠从2号房间出发在迷宫中作随机游动：如果n时老鼠呆在$i(i \neq 3,7)$号房间，则下一时刻老鼠等可能地移到相邻的房间（即有门与i号房间相连的房间）;一旦老鼠到达7号房间，就被猫吃掉；一旦到达3号房间，老鼠就吃掉奶酪。计算老鼠在吃掉奶酪前被猫吃掉的概率？



解：一旦老鼠跑到3号或7号房间，我们就认为老鼠将永远呆在那个房间。用X_n表示n时老鼠所在的位置。则$\{X_n\}$是一时齐Markov链，状态空间是$\{1,2,...,9\}$,3和7是两个吸收态。所求的就是从2出发最终被7吸收的概率。

令$h_i = P(T_7 < \infty \mid X_0 = i)$,

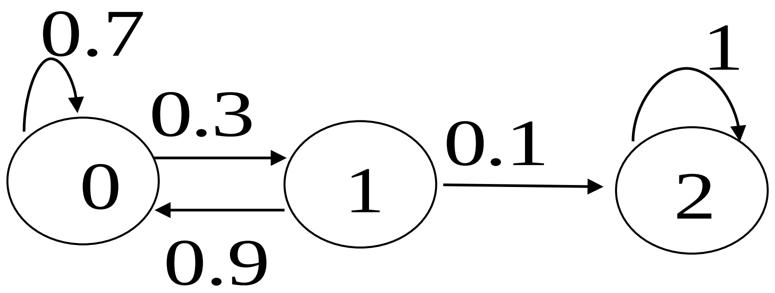
则$h_7 = 1, h_3 = 0.$

利用对称性，$h_1 = h_5 = h_9 = \dfrac{1}{2}.$

利用Markov性和全概率公式:

$$h_2 = \frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{3}h_5 + \frac{1}{3}h_3 = \frac{1}{3}.$$

例：以X_n表示某人打n次游戏后所处的游戏等级. 2是最高等级.设$\{X_n\}$是Markov链，状态转移图如下。设$X_0=0$, 计算到达等级2的平均时间.



解：令$a_i=E(T_2\mid X_0=i)$

则$a_2=0,\quad a_0=1+0.7a_0+0.3a_1,\ a_1=1+0.9a_0+0.1a_2,$

解得$a_0=130/3, a_1=40.$

$\therefore$ 到达等级2的平均时间是$a_0=130/3.$

例：以X_n(单位：元）表示n时刻某股票的价格.设$\{X_n\}$是Markov链，状态空间$I=\{1,2,3,4,5\}$,

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/8 & 4/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

已知$P(X_0=2)=P(X_0=3)=1/2$, 计算:

(1)股票价格在涨到4元前不曾跌到1元的概率;

（2）股票价格到达4元的平均时间.

解：(1) 所求概率为$P(T_4 < T_1)$，这个值与到达1或4之后的过程没有关系. 所以可将1和4看成吸收态.

令$h_i = P(T_4 < T_1 \mid X_0 = i)$，则$h_1 = 0, h_4 = 1,$

$$h_2 = \frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{3}h_2 + \frac{1}{3}h_3,$$

$$h_3 = \frac{1}{4}h_2 + \frac{1}{4}h_3 + \frac{1}{2}h_4$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/8 & 4/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

解得：$h_2 = \frac{2}{5}$， $h_3 = \frac{4}{5}$

$$\therefore P(T_4 < T_1) = \sum_{i=1}^{4} P(X_0 = i)h_i = \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_3 = \frac{3}{5}.$$

(2) 所求概率为$E(T_4)$, 这个值与到达4之后的过程没有关系. 所以可将4看成吸收态.　令$a_i = E(T_4 \mid X_0 = i)$, 则

$$a_4 = 0, a_1 = 1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2,$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3,$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{2}a_4$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/8 & 4/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

解得：$a_1 = \dfrac{23}{2}, a_2 = \dfrac{19}{2},\ \ a_3 = \dfrac{9}{2}$

$$\therefore E(T_4) = \sum_{i=1}^{4} P(X_0 = i)E(T_4 \mid X_0 = i) = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 = 7.$$

例:(随机游动) 设$X=\{X_n;n\geq 0\}$是$\mathbb{Z}$上的随机游动,

$$p_{i,i+1}=p=1-p_{i,i-1}, i=0,\pm1,\pm2,\ldots,0<p<1.$$

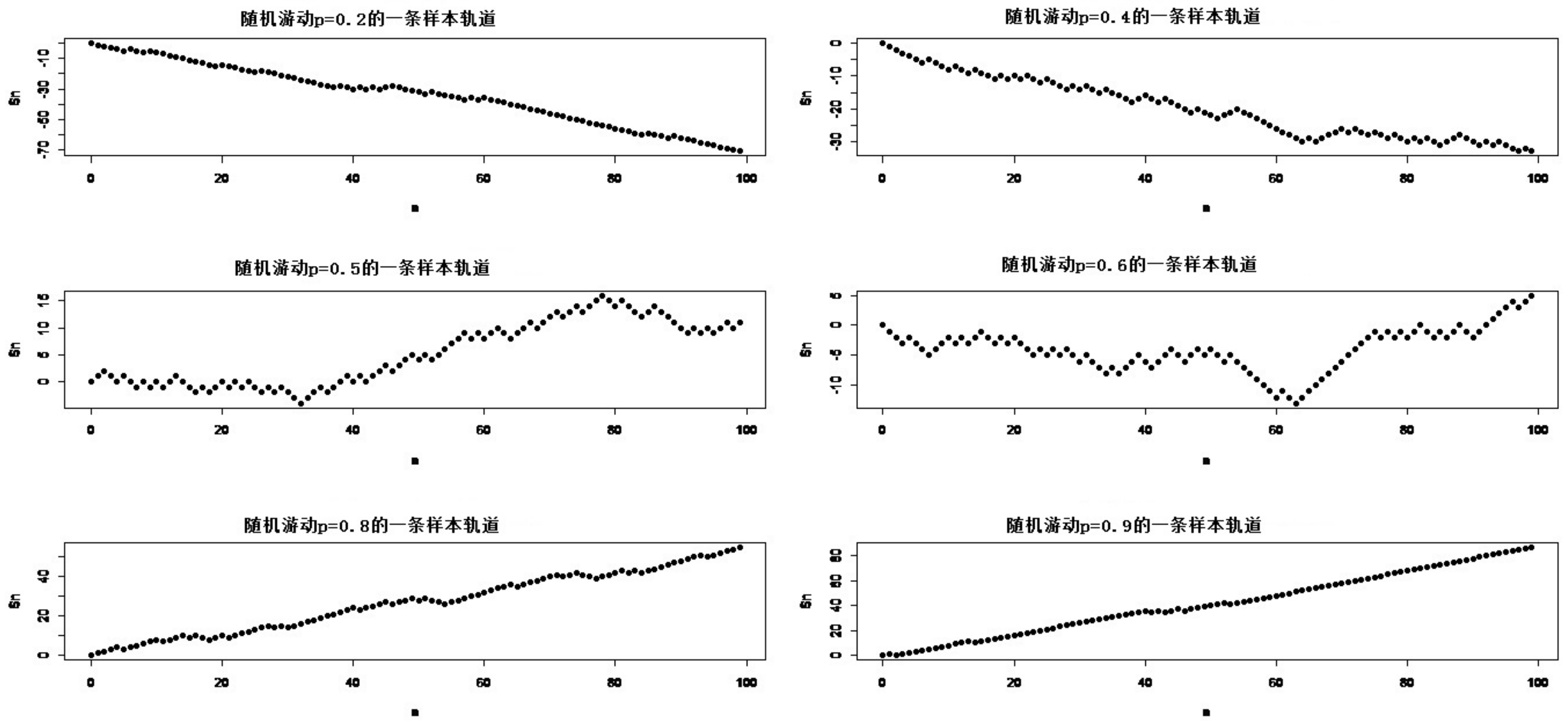
则X不可约,$p_{00}^{(2n-1)}=0$,

$$p_{00}^{(2n)}=\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n=\frac{(2n)!}{n!n!}[p(1-p)]^n, n=1,2,\ldots$$

由Strling公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ 得:$p_{00}^{(2n)}\sim\dfrac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}\to 0$

且$\sum_n p_{00}^{(n)}=\infty$当且仅当$p=1/2.$

所以$\boxed{\text{当}p=1/2\text{时,}X\text{零常返;否则}X\text{暂留。}}$


随机游动p=0.2的一条样本轨道
随机游动p=0.4的一条样本轨道
随机游动p=0.5的一条样本轨道
随机游动p=0.6的一条样本轨道
随机游动p=0.8的一条样本轨道
随机游动p=0.9的一条样本轨道
Sn
n

如果X是$\mathbb{Z}^2$上对称随机游动，即对每一对整数(i, j),

$$p_{(i,j),(i+1,j)} = p_{(i,j),(i-1,j)} = p_{(i,j),(i,j+1)} = p_{(i,j),(i,j-1)} = 1/4.$$

可得$p_{00}^{(2n)} = \dfrac{1}{4^{2n}} C_{2n}^{n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^k = \dfrac{1}{4^{2n}} (C_{2n}^{n})^2 \sim \dfrac{1}{\pi n}$

这说明$\sum_n p_{00}^{(n)} = \infty$但$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = 0$。因此$X$零常返。

在3维对称随机游动中：

$$p_{00}^{(2n)}=\frac{1}{6^{2n}}\binom{2n}{n}\sum_{k_1+k_2+k_3=n}\left(\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}\right)^2$$

$$\le\frac{1}{6^{2n}}\binom{2n}{n}3^n\max_{\substack{k_1\le k_2\le k_3\\ k_1+k_2+k_3=n}}\left(\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}\right)$$

而 $\max\limits_{\substack{k_1\le k_2\le k_3\\ k_1+k_2+k_3=n}}\left(\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}\right)$在$k_3=k_1$或$k_3=k_1+1$时达到，

由stirling公式 $\max\limits_{\substack{k_1\le k_2\le k_3\\ k_1+k_2+k_3=n}}\left(\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}\right)\sim\frac{3^n}{n}$

$\therefore p_{00}^{(2n)}=O(n^{-3/2}),\sum\limits_n p_{00}^{(2n)}<\infty$,因此暂留

事实上，

1维和2维对称随机游动都是零常返的

3维或3维以上对称随机游动都是暂留的

醉汉总会回来 

喝醉的小鸟可能一去不复返 

§6 可逆Markov链

设$\{X_n\}$是不可约的**Markov**链，且X_0的分布为平稳分布π.
则对任何$n > m \geq 1$,任何状态$i, j, i_{m+1}, \ldots, i_n$有：

$$P(X_{m-1} = j \mid X_m = i, X_{m+1} = i_{m+1}, \ldots, X_n = i_n)$$

$$= P(X_{m-1} = j \mid X_m = i) = \frac{P(X_{m-1} = j, X_m = i)}{P(X_m = i)}$$

$$= \frac{P(X_{m-1} = j) p_{ji}}{P(X_m = i)} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

即对任何n，随机序列$X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0$都是时间齐次的

Markov链，其一步转移概率为 $q_{ij} = \dfrac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$.

定义： 设$\{X_n\}$是不可约具有平稳分布π的Markov链，如果对所有状态i, j有$q_{ij} = p_{ij}$，即$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ij}$，则称$\{X_n\}$为**可逆**的Markov链.

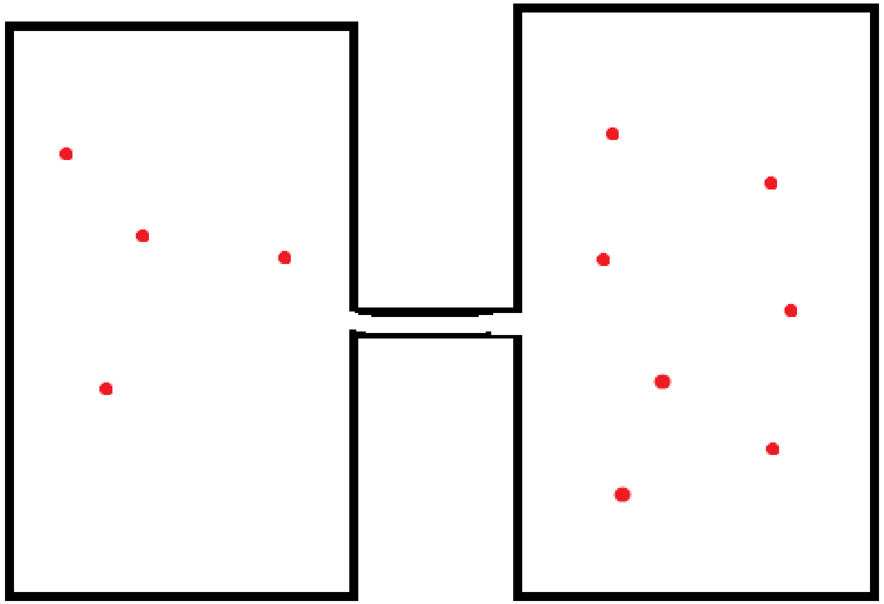
定义： 一个概率分布π称为是可逆分布如果对所有i, j有
$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$.

定理： 可逆分布一定是平稳分布.

证明：设π是可逆分布，则对任何状态j有：

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_i p_{ji} = \pi_j$$

例1：有A，B两只容器，中间有一细管相连. 有m只跳蚤，每次有一只随机地从一个容器跳到另一个容器. 以X_n表示n次后A中跳蚤数。则$\{X_n\}$是时间齐次Markov链，转移概率为：



$$p_{i,i+1}=\frac{m-i}{m},\quad p_{i,i-1}=\frac{i}{m}, i=0,\ldots,m$$

问题： 求平稳分布.

解：先试着求可逆分布π，则

$$\pi_i p_{i,i-1} = \pi_{i-1} p_{i-1,i}, i = 1,\ldots,m$$

得：$$\pi_i = \frac{m-i+1}{i}\pi_{i-1} = \ldots = \frac{(m-i+1)(m-i+2)\ldots m}{i!}\pi_0$$

$$= \frac{m!}{(m-i)!i!}\pi_0 = \binom{m}{i}\pi_0, \quad i = 0,\ldots,m$$

$$\therefore \pi_i = \frac{\binom{m}{i}}{2^m}, i = 0,1,..,m$$

因为$\{X_n\}$不可约，所以这个可逆分布π也是唯一的平稳分布

例2： 设$\{X_n\}$是平稳的时齐Markov链, 状态空间$I=\{1,2\}$,

一步转移矩阵为P=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

问:$\{X_n\}$可逆吗?

解： 设$\pi=(\pi_1,\pi_2)$是可逆分布,

则$\pi_1 p_{12}=\pi_2 p_{21}$, 即$\pi_1=0.5\pi_2$

又$\pi_1+\pi_2=1$, 所以$\pi=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$,

$\{X_n\}$不可约且可逆分布存在, 所以$\{X_n\}$可逆

例3： 设$\{X_n\}$是平稳的时齐Markov链，状态空间$I=\{1,2,3\}$，

一步转移矩阵为$P=\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$

问：$\{X_n\}$可逆吗？

解： 设$\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$是可逆分布，

则$\pi_2 p_{23}=\pi_3 p_{32}$，即$\pi_2=0$，

又$\pi_1 p_{12}=\pi_2 p_{21}$，得到$\pi_1=0$，

再有$\pi_1 p_{13}=\pi_3 p_{31}$，得到$\pi_3=0$

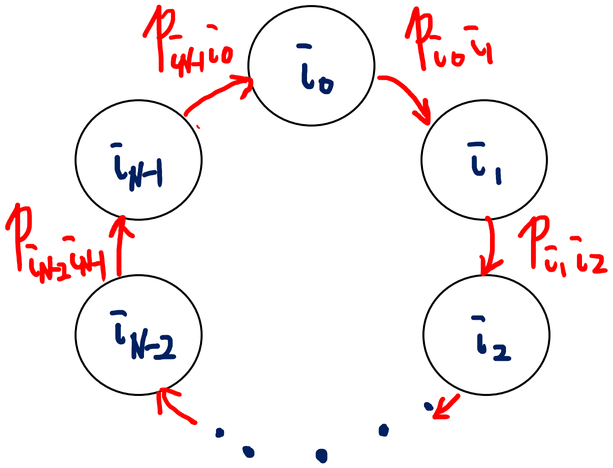
但$\pi_1+\pi_2+\pi_3=0\neq 1$，所以不存在可逆分布，

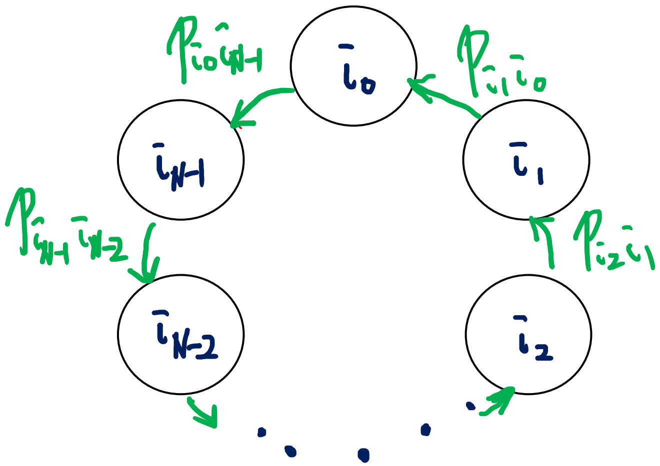
所以$\{X_n\}$不可逆

*Kolmogorov*准则：

设$\{X_n\}$是不可约的时齐**Markov**链，初始分布为平稳分布π，则该**Markov**链可逆当且仅当对任意正整数N和任意状态$i_0, i_1, \ldots, i_{N-1}$有：

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{N-1} i_0} = p_{i_0 i_{N-1}} p_{i_{N-1} i_{N-2}} \cdots p_{i_1 i_0}.$$





例3： 设$\{X_n\}$是平稳的时齐**Markov**链, 状态空间$I=\{1,2,3\}$,

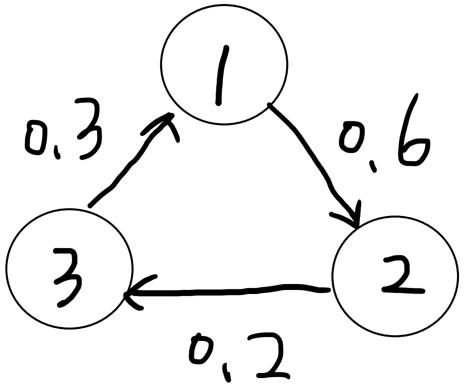
一步转移矩阵为P=$\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$

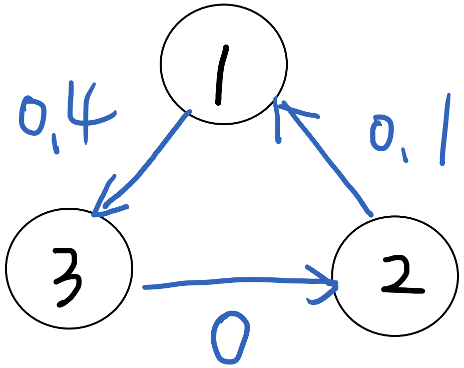
问:$\{X_n\}$可逆吗?

解： $p_{13}p_{32}p_{21}=0$, $p_{12}p_{23}p_{31}>0$,

所以$p_{13}p_{32}p_{21}\neq p_{12}p_{23}p_{31}$.

由**Kolmogorov**准则,$\{X_n\}$不可逆





Markov链应用

Markov 链在资源管理中的应用

例. 仓储装货

某仓库能容纳c单位货物. 每天货物需求量为随机变量。如果有足够货物供应的话，在第n个天货物需求量为D_n.

令X_n表示第n天结束后仓库货物存储量。

假设m为某临界值，只要当天结束时货物存储量少于或等于m，那么就将仓库添满。显然，

$$X_{n+1} = \begin{cases} (c - D_{n+1})^+ & X_n \le m \\ (X_n - D_{n+1})^+ & m < X_n \le c \end{cases}$$

进一步假定$D_1, D_2, \cdots$是独立同分布序列；那么$X_n, n \geq 1$是Markov链，状态空间为$\{0, 1, 2, \cdots, c\}$。除一些特殊情形外，该Markov链式不可约的。

因此，存在稳定分布π，它决定着长时间之后，每个状态的分布。

给定$X_n = i$的条件下，第$n+1$天不能满足货物要求的平均量为

$$u_i = \begin{cases} E(D-c)^+ & i \leq m \\ (D-i)^+ & m < i \leq c \end{cases}$$

因此，从长远来看，不能满足货物要求的平均量

$$u(m) = \sum_{i=0}^{c} \pi_i u_i$$

同样，从长远来看，需要装货的概率

$$r(m) = \sum_{i=0}^{m} \pi_i$$

注意，随着m增加，那么$u(m)$减少，$r(m)$增加。

假定a表示装运货物的费用，b销售每单位货物的利润。那么，仓库经理需要计算m使得

$$ar(m) + bu(m)$$

达到最优。

考虑下列具体情形：$c = 3$. 因此，可能的临界值为0,1,2,3.
假设销售每单位货物获取利润为$b = 1$，每天货物要求量为

$$P(D \geq i) = 2^{-i}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

那么

$$\begin{aligned} E(D-i)^{+} &= \sum_{k=1}^{\infty} P((D-i)^{+} \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(D \geq i+k) = 2^{-i} \end{aligned}$$

当$m=0,1,2$时，转移矩阵分别为:

$m=0$

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$m=1$

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$m = 2$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

平稳分布分别为

$$\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$

$$\pi = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\pi = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

因此

$$u(0) = \frac{1}{4}, \quad u(1) = \frac{1}{6}, \quad u(2)\frac{1}{8}$$

$$r(0) = \frac{1}{4}, \quad r(1) = \frac{1}{3}, \quad r(2) = \frac{1}{2}$$

为了达到最优，应该选择

(1) $a \leq \frac{1}{4}$

$$m = 2$$

(2) $\frac{1}{4} < a \leq 1$

$$m = 1$$

(3) $a > 1$

$$m = 0$$