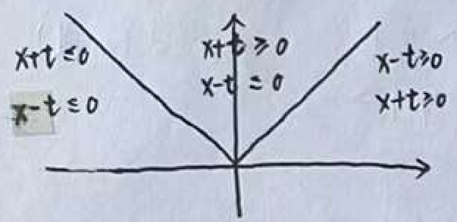
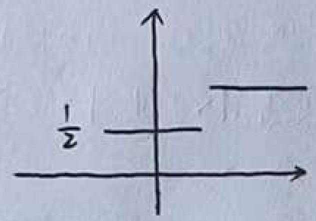
广义函数论：$Z \to Q \to R \to C$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x) \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+t) - \phi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(y)\,dy\right).$$

取 $\psi(x) = 0$. $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$





$\int_R (\partial_t^2 u - \partial_x^2 u)\phi\,dx = 0$, $\phi \in C_c^\infty(R) \times R_+$

$\int_R u\,\partial_t^2\phi - \int_R u\,\partial_x^2\phi\,dx = 0$ (若 $\phi(x,0) \neq 0$. $\int_R u\,\partial_t\phi(x,0) + \int_R u\,\partial_t^2\phi - \int_R u\,\partial_x^2\phi\,dx = 0$

u 可积.

$\Rightarrow Lu = 0$ $\quad \phi \in V$. $Lu \in V'$ (线性泛函)

$$\int_\Omega \langle Lu, \phi\rangle = 0 \iff \int \langle u, L^*\phi\rangle = 0$$

V 的选择：$C_c^\infty(R^n)$ $\quad C^\infty(R^n)$ $\quad S(R^n) \subseteq C^\infty(R^n)$

速降函数空间

$\forall m,k$, $\exists M(m,k)$. $(1+|x|^2)^m |D^k u(x)| \le M$, $|D^k u(x)| \le \dfrac{M}{(1+|x|^2)^m}$. 例：$e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

测试函数空间：$D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) +$ "收敛性" $\to$ "拓扑"向量空间.

定义：对 $\{\phi_i\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ 满足

(1) $\mathrm{supp}\,\phi_i \subset\subset K$ （$\{\phi_i\}$ 有公共的紧支集）（K 紧集）

(2) $\forall \alpha$ (多重指标). $\sup_K |\partial^\alpha \phi_i| \to 0$ $(i \to \infty)$, 则称 $\phi_i \to 0$ in $D(\Omega)$

$\phi_i \to \phi \iff \phi_i - \phi \to 0$.

定义：$\mathcal{D}'(\Omega)$

$u: \mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{R}$ 为线性映射且满足，对 Ω 中任一紧子集 K，$\exists C\geq 0$ 以及 $N\geq 0$，使得，

$$|\langle u,\phi\rangle| \leq C\sum_{|\alpha|\leq N}\sup_K|\partial^\alpha\phi| \quad ,\ \forall\phi\in\mathcal{D}(\Omega). \text{ 称 } u\in\mathcal{D}'(\Omega)$$

$A: L^1_{loc}(\Omega)\hookrightarrow\mathcal{D}'(\Omega) \quad Af=u_f \qquad (\forall\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ 且 $\operatorname{supp}\phi\subseteq K)$ （"有紧性"）

① 对 $f\in C(\mathbb{R}^n) \quad \langle f\ \phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f\phi\,dx \qquad \langle u_f\ \phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f\phi\,dx$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}f\phi\,dx\right|\leq C\sum_{|\alpha|\leq N}\sup_K|D^\alpha\phi| \ ?$$

$$\leq\int_K|f\phi|\,dx\leq\sup_K|\phi|\int_K|f|\,dx.$$ 取 $C=\int_K|f|\,dx$ ，$N=0$

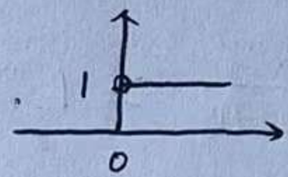
② $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \langle u_f,\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f\phi\,dx$ ，$u_f\in\mathcal{D}'(\Omega) \qquad (\forall K.\ f\in L^1(K))$

$\forall f\in L^1_{loc}(\Omega). \quad \langle v_f^i\ \phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f\,\partial_i\phi\,dx$. $|\langle v_f^i\ \phi\rangle|=\int_K|f||\partial_i\phi|\,dx\leq\sup_K|\partial_i\phi|\int_K|f|\,dx$

$\langle v_f^\alpha.\ \phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f\,\partial^\alpha\phi\,dx$

$$\leq\sum_{|\alpha|\leq1}\sup_K|\partial^\alpha\phi|$$

$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}$. $\langle v_f,\phi\rangle=-\int_{\mathbb{R}}f\,\partial_x\phi\,dx$



取 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ 1, & x>0\end{cases}\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ，则 $\langle v_f,\phi\rangle=-\int_0^{+\infty}\partial_x\phi\,dx=\phi(0)$ $\quad L_{loc}$：局部可积

$v_f:\phi(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R})\to\phi(0)$ 记为 $\delta(x)$. $\langle\delta.\phi\rangle=\phi(0)$. （$\mathbb{R}^n$ 也成立）

$\Omega=\mathbb{R}^n$ $\qquad$ Dirac 泛函

定理：$u\in \mathcal{D}'(\Omega) \iff \forall \{\varphi_i\}_{i\geq 1}\subset C_c^\infty(\Omega)$，满足 $\varphi_j\to 0$ (in $\mathcal{D}(\Omega)$) $(j\to+\infty)$，均有 $\langle u,\varphi_j\rangle\to 0$ （"连续性"）

证明："$\Rightarrow$" 取 K 为 $\{\varphi_j\}$ 公共紧支集，则 $\exists C,\ N\geq 0$ 使得 $|\langle u,\varphi_j\rangle|\leq C\sum\limits_{|\alpha|\leq N}\sup\limits_K|\partial^\alpha\varphi_j|\to 0$

($\exists K\ \ \operatorname{supp}\varphi_j\subset K,\ \forall\alpha\ \ \sup\limits_K|\partial^\alpha\varphi_j|\to 0$)

"$\Leftarrow$" 反证法，设 $u\notin\mathcal{D}'(\Omega)$，$\exists K$，使得 $\forall N\geq 0$，都 $\exists\varphi_N$ 使得 $\dfrac{|\langle u,\varphi_N\rangle|}{\sum\limits_{|\alpha|\leq N}\sup\limits_K|\partial^\alpha\varphi_N|}\geq N$ （无界）

令 $\psi_N=\dfrac{\varphi_N}{N\sum\limits_{|\alpha|\leq N}|\partial^\alpha\varphi_N|}$，则 $|\langle u,\psi_N\rangle|\geq 1$. $\forall\beta$，$\sup\limits_K|\partial^\beta\psi_N|=\dfrac{\sup\limits_K|\partial^\beta\varphi_N|}{N\sum\limits_{|\alpha|\leq N}|\partial^\alpha\varphi_N|}$

当 N 足够大时，$\sum\limits_{|\alpha|\leq N}|\partial^\alpha\varphi_N|\geq\sup\limits_K|\partial^\beta\psi_N|$ $(N\geq|\beta|)$

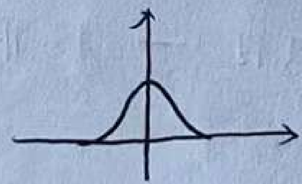
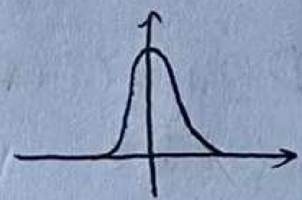
$\sup\limits_K|\partial^\beta\psi_N|\leq\dfrac{1}{N}\to 0\quad(N\to+\infty)$

总结：① $\mathcal{D}(\Omega)=C_c^\infty(\Omega)+$"收敛性"

② $\mathcal{D}'(\Omega)\in\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega),\mathbb{R})+$"有界性"　　"广义函数空间"

③ $u\in\mathcal{D}'(\Omega)\iff u$ 在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上"连续".

分布：$\eta(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$　$\operatorname{supp}\eta\subset B_1(0)$

$\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)\,dx=1$，$\eta(x)\geq 0$

$\eta_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，则 $\eta_\varepsilon(x)*f\to f$ (in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) （要证）

$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. $\eta_\varepsilon(x)*f\Rightarrow f$ (in $L^p(\mathbb{R}^n)$) $\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

定义：($\mathcal{D}'(\Omega)$ 中收敛性) 称 $u_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} u$ (in $\mathcal{D}'(\Omega)$) $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$，有 $\langle u_j, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$ $(j\to+\infty)$

例：$\eta_\varepsilon(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ $\varepsilon\to 0$，$\eta_\varepsilon(x)$ 在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中是否有极限

$\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\langle \eta_\varepsilon(x), \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\phi(x)\,dx \longrightarrow \phi(x)$ $\langle \delta(x), \phi(x)\rangle$

$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)(\phi(x)-\phi(0))\,dx \to 0$

因此 $\eta_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \delta(x)$ ($\mathcal{D}'(\Omega)$)

定理：若 (1) $\{f_j\}_{j\geq 1} \subset L^1_{loc}(\Omega) \to f$ a.e (2) $|f_j| \leq g \in L^1_{loc}(\Omega)$，$\forall j$

则有 $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ 且 $f_j \xrightarrow{(j\to+\infty)} f$ (in $\mathcal{D}'(\Omega)$)

证明：$\forall\phi$. $\langle f_j, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_j\phi\,dx \to \int_\Omega f\phi\,dx = \langle f\,\phi\rangle$ $f_j|_K \to f|_K$ (in $L^1(K)$)

定理：设 $\{u_j\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ 满足：$\forall \phi\in\mathcal{D}(\Omega)$ 有 $\langle u_j, \phi\rangle$ 极限存在，记作 $\langle u_0, \phi\rangle$

则有 $u_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ($\mathcal{D}'(\Omega)$ 序列完备)

证明：① u_0 为线性泛函 ② u_0 连续.

例：$u(t)\in\mathcal{D}'(\Omega)$ $(t\in T)$ 且 $\forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\langle u(t), \phi\rangle$ 均为 t 的可微函数，则 $\phi \to \partial_t(\langle u(t),\phi\rangle)$ 为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上连续线性泛函.

即 $\in \mathcal{D}'(\Omega)$，记作 $\partial_t u$.

$v_h = \dfrac{\langle u(t+h),\phi\rangle - \langle u(t),\phi\rangle}{h} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\langle v_h\ \phi\rangle$ 在 $h\to 0$ 时有极限.

把该极限记为 $\langle \partial_t u, \phi\rangle$，则有 $\partial_t u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

$C_c^\infty(\Omega)$ $\Omega = R^n$

$\Omega \subset R^n$ 子集

$C_c^\infty(\Omega)$ $\phi_j \to 0$ $\Leftrightarrow$ ① ∃紧子集 $K \subset \Omega$ $\operatorname{supp}\phi \subset K$

② α $\sup\limits_K |\partial^\alpha \phi_j| \to 0$

$D'(\Omega)$ $K << \Omega$

设 $u \in D'(\Omega)$ 定义 $\langle V_j, \phi\rangle = -\langle u, \partial_i \phi\rangle$, 则 $u_i \in D'$ $\left(|u\,\partial_i\phi| \le C \sum\limits_{|\alpha|\le N} \sup\limits_K |\partial^\alpha \alpha_i \phi| < C \sum\limits_{|\alpha|\le N} \sup\limits_K |\partial^\alpha \phi|\right)$

称 V_i 为 u 的第 i 个偏导数. 记作 $V_i = \partial_i u$ (广义导数)

同理定义: $\partial^\alpha u$: $\langle \partial^\alpha u, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \phi\rangle$. $\partial^\alpha : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ 线性算子.

定理: ∂^α 为 $D'(\Omega)$ 上连续线性算子.

证明: $\forall u_i \in D'(\Omega)$ 若 $u_j \to u$ (in $D'(\Omega)$)

$\langle \partial^\alpha u_j, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_j, \partial^\alpha\phi\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle u_0, \partial^\alpha \phi\rangle = \langle \partial^\alpha u_0, \phi\rangle$. 即 $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u_0$ (in $D'(\Omega)$)

对 $u \in C'(R^n)$, $\partial_i u = \tilde{\partial}_i u \in D'(\Omega)$

$C(R^n)$ 广义导数: $\tilde{\partial}_i u$

u < $u \in D'(\Omega) \to \tilde{\partial}_i u \in D'(\Omega)$
$u \in C'(\Omega) \to \partial_i u \in C(\Omega) \subset D'(\Omega)$

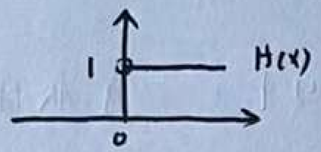
定理: $\partial_i u = \tilde{\partial}_i u$, $u \in C'(R^n)$

$$\langle \partial_i u, \phi\rangle = \langle \tilde{\partial}_i u, \phi\rangle = -\langle u, \partial_i\phi\rangle = -\int_{R^n} u\,\partial_i\phi\,dx \quad \text{(分部积分)}$$

$$\langle \partial_i u, \phi\rangle = \int_{R^n} \partial_i u\,\phi\,dx$$

定理: $f,g\in C(\Omega)$ 且 $\partial_i f = g$ (在广义函数意义下), 则 f 的经典导数存在且为 g.

例: $H(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$



$\partial_x H(x)=\delta(x)$ $\langle \partial\delta(x),\phi\rangle = -\langle \delta(x),\partial\phi\rangle = -\phi'(0)$

$\langle\delta,\phi\rangle=\phi(0)$, $\langle\partial^\alpha\delta,\phi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\phi^{(|\alpha|)}(0)$

$\phi:\Omega\to R$ $\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2$ $\phi_\lambda(x)=\phi(\lambda x)$, $x\in\frac{\Omega}{\lambda}$ $\phi_1\phi_2$, $\phi_1,\phi_2\in L^2 \Rightarrow \phi_1\phi_2\in L^1$

$u\in D'(R^n)$. 定义 $u_\lambda\in D'(R^n)$ 使得当 $u\in L^1_{loc}(R^n)$ $u_\lambda(x)=u(\lambda x)$

$u\to u_\lambda$, $L_{loc}(\Omega)\to L_{loc}(\Omega)\xrightarrow{延拓} D'(R^n)\to D'(R^n)$

$\langle u_\lambda,\phi\rangle=\int_{R^n}u(\lambda x)\phi(x)dx = \int_{R^n}u(y)\phi(\frac{y}{\lambda})\frac{1}{\lambda^n}dy = \langle u,\frac{1}{\lambda^n}\phi(\frac{\cdot}{\lambda})\rangle$

伸缩变换: 对 $u\in D'(R^n)$, 定义 $\langle u_\lambda,\phi\rangle=\langle u,\frac{1}{\lambda^n}\phi(\frac{\cdot}{\lambda})\rangle$

对 $u(x)\in L^1_{loc}(R^n)$, $\forall h\in R^n$, $(\tau_h u)(x)\triangleq u(x-h)\in L^1_{loc}(R^n)$

$\langle\tau_h u,\phi\rangle=\int_{R^n}u(x-h)\phi(x)dx=\int_{R^n}u(y)\phi(y+h)dy=\langle u,\tau_{-h}\phi\rangle$

平移变换: 对 $u\in D'(R^n)$, 定义 $\langle\tau_h u,\phi\rangle=\langle u,\tau_{-h}\phi\rangle$

性质: τ_h 为序列连续的, $\partial\tau_h u=\tau_h\partial u$, $u\in D'(R^n)$

$u\in L^1_{loc}(R^n)$, $\forall A\in R^{n\times n}$, $\det A\ne 0$, $h\in R^n$, 可定义 $u(Ax+h)\in L^1_{loc}(R^n)$

定义 A^*u: $\langle A^*u,\phi\rangle=(\det A)^{-1}\langle u,(A^{-1})^*\phi\rangle$

- $A^*: D'(R^n)\to D'(R^n)$ 是序列连续的
- $\forall$ 给定的 $u\in D'(R^n)$, $A^*u: GL(n,R)\to D'(R)\in C^\infty(GL(n,R))$

$C^\infty(\Omega)$ + "拓扑" $\longrightarrow \mathcal{E}(R^n)$

定义：设 $\{\phi_k(x)\}$ 为 $C^\infty(R^n)$ 中一列函数，若 ∀ 紧集 $K\subset\Omega$ 以及多重指标 α，都有

$$\sup_K |\partial^\alpha \phi_k| \to 0 \quad (k\to\infty)$$ 则称 $\phi_k\to 0$ (in $\mathcal{E}(\Omega)$)

定义：设 $u: C^\infty(R^n)\to R$ 为线性泛函，若 u 满足：存在紧子集 $K\subset\Omega$，常数 $C\geq 0$，$N\geq 0$，使得

$$|\langle u,\phi\rangle| \leq C\sum_{|\alpha|\leq N}\sup_K|\partial^\alpha\phi|$$ 称 u 为 $\mathcal{E}(\Omega)$ 上有界的线性泛函。

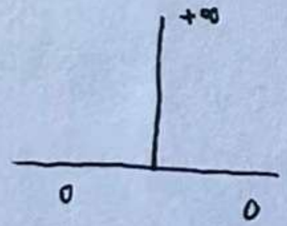
$\mathcal{E}'(\Omega)=\{u \mid u$ 为 $\mathcal{E}(\Omega)$ 上有界线性泛函$\}$

$\phi_i\in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow \phi_i\in C^\infty(\Omega)$

$\phi_i\to 0$ (in $\mathcal{D}(\Omega)$) $\Rightarrow \phi_i\to 0$ (in $\mathcal{E}(\Omega)$) $\quad\Rightarrow \mathcal{E}'(\Omega)\subset\mathcal{D}'(\Omega)$

事实上，$\mathcal{E}'(\Omega)=\{u\in\mathcal{D}'(\Omega)\mid \operatorname{supp} u$ 在 Ω 中紧$\}$

$\delta(x)$



$\operatorname{supp}\delta=\{0\}$

$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\delta(x-k)$，有 $u(x)\subset\mathcal{D}'(\Omega)$，但 $u(x)\notin\mathcal{E}'(\Omega)$

下面再来定义 supp u 概念：对于 $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$，定义 $\operatorname{supp} u=\{x\mid u$ 在 x 的某个邻域 U 上为 $0\}$ 的补集。

定义：对于 $U\subset\Omega$，若 $\forall\phi\in C_c^\infty(U)$，有 $\langle u,\phi\rangle=0$，则称 u 在 U 上等于 0。

$\forall U$ $(0\notin U)$，有 $\delta(x)$ 在 U 上等于 0 $\Rightarrow \operatorname{supp}\delta(x)=\{0\}$

定理：设 $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$，$\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$，$\operatorname{supp} u\cap\operatorname{supp}\phi=\phi$，则 $\langle u,\phi\rangle=0$

证明：$\exists U$，$\operatorname{supp} u\cap U=\phi$ 且 $\operatorname{supp}\phi\subset U$，$\phi\in C_c^\infty(U)$ $\Rightarrow$ $\langle u,\phi\rangle=0$ $(\forall\psi\in C_c^\infty(U))$

例：$\Omega=(0,1)$，$u(x)=\sum_{i=1}^{+\infty}\tau_{\frac{1}{2^i}}\delta$，$v(x)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\tau_{\frac{1}{2^i}}\partial$ ，$u,v\overset{?}{\in}\mathcal{D}'(\Omega)$，$\overset{?}{\in}\mathcal{E}'(\Omega)$

定理：$\mathcal{E}'(\Omega)=\{u\in\mathcal{D}'(\Omega)\mid\operatorname{supp}u$ 在 Ω 中紧$\}$

定理：$\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中稠密，即 $\forall\phi_0\in C^\infty(\Omega)$，$\exists\{\phi_n\}\subset C_c^\infty(\Omega)$，$\phi_n\to\phi_0$ (in $\mathcal{E}(\Omega)$)

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}'(\Omega)$ 在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中稠密.

函数卷积与乘积：$f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$，$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$，定义 fu：$\langle fu,\phi\rangle=\langle u,f\phi\rangle$ $(\forall\phi\in\mathcal{D}(\Omega))$

称为 f 与 u 的乘积. $fu\in\mathcal{D}'(\Omega)$

定理：$\partial^\alpha(fu)=\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\,\gamma!}\partial^\beta f\,\partial^\gamma u$.

对 $f,g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\,dy\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

(1) $f*g=g*f$ (2) $\partial_i(f*g)=(\partial_i f)*g=f*(\partial_i g)$ (3) $(f*g)*h=f*(g*h)$.

定义：对 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$，$v\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，$\langle u*v,\phi\rangle=\langle u,\langle\tau_y v,\phi\rangle_x\rangle_y$. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

想法：若 $u,v\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，$u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle u*v,\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}u(y)v(x-y)\phi(x)\,dy\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}u(y)\Big[\int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{v(x-y)}_{v(-(y-x))}\phi(x)\,dx\Big]dy=\int u(y)\,(v(-\cdot)*\phi)\,dy=$$

$$\langle u,v(-\cdot)*\phi\rangle=\langle u,\langle\tau_y v,\phi\rangle\rangle$$

$\forall v\in \mathcal{D}'(R^n)$. $\phi\in C_c^\infty(R^n)$，有 $\langle \tau_y v,\phi\rangle$ 是关于 y 的 C^∞ 函数.（可用定义验证）

$$\partial_{y_i}\int_{R^n} v(x)\,\phi(x+y)\,dx = \int_{R^n} v(x)\,\partial_{y_i}\phi(x+y)\,dx = \langle v,\partial_{y_i}\tau_{-y}\phi\rangle \quad\Rightarrow u*v\in\mathcal{D}'(R^n)$$

例：$\delta(x)\in\mathcal{E}'(R^n)$．计算 $\langle v*\delta,\phi\rangle = \langle v,\langle\tau_y\delta,\phi\rangle_x\rangle_y = \langle v,\phi(y)\rangle_y \Rightarrow v*\delta = v$ "单位元"

$Lu=f$ $(-\Delta u=f)$. 若 $\exists E\in\mathcal{D}'(R^n)$，使得 $LE=\delta$．则 $L(E*f)=(LE)*f=\delta*f=f$

$\Rightarrow E*f$ 是 $Lu=f$ 的解. 事实上，$(-\Delta)\Gamma=\delta(x)$．$\Gamma$ 为基本解．方程的解为 $\Gamma*f$.

正则化

$u\in\mathcal{D}'(R^n)$，$\rho\in C_c^\infty(R^n)\subset\mathcal{E}'(R^n)$．$u*\rho\in\mathcal{D}'(R^n)$

定理：$u*\rho\in C^\infty(R^n)$

考虑 $\rho_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\xrightarrow{\varepsilon\to0}\delta(x)$．$u*\rho_\varepsilon\in C^\infty(R^n)\xrightarrow{\varepsilon\to0}u*\delta(x)=u$

即对 $\forall u\in\mathcal{D}'(R^n)$．$\exists u_\varepsilon\in C^\infty(R)$．$u_\varepsilon\to u$ (in $\mathcal{D}'(R^n)$) （$C^\infty(R^n)$ 在 $\mathcal{D}'(R^n)$ 中稠密）

速降函数空间：

定义 $\phi\in C^\infty(R^n)$．满足 $\|\phi\|_{\alpha\beta}=\sup_{R^n}|x^\alpha\partial^\beta\phi|<+\infty$ $(\forall\alpha,\beta)$ 则称 ϕ 为速降函数.

$$\Leftrightarrow |\partial^\beta\phi|\le\frac{C_{\alpha,\beta}}{(1+|x|)^{|\alpha|}}$$

$\beta=0$．$\forall n$，有 $|\phi(x)|\le\frac{C_n}{(1+|x|)^n}$ 收敛到0的速度比任意多项式都快.

例：$e^{-|x|^2}$，$p(x)e^{-|x|^2}$ （$p(x)$ 为多项式） 为速降函数.

定义：设 $\mathcal{S}(R^n)$ 为所有速降函数构成的线性空间且其拓扑如下：

$$\phi_j \to 0 \quad (\text{in } \mathcal{S}(R^n)) \iff \sup_{R^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi_j| \to 0 \quad \text{对} \forall \alpha, \beta \text{成立}.$$

$$(\|\phi\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow{j\to\infty} 0)$$

(1) $\mathcal{S}(R^n)$ 在上述拓扑下完备. $\Rightarrow$ $\mathcal{S}(R^n)$ 是一个 Frechet 空间.

(2) $p(x)q(\partial)\phi$ 为 $\mathcal{S}(R^n)$ 上的连续映射，其中 p, q 为多项式.

(3) $C_c^\infty(R^n) \subset \mathcal{S}(R^n) \subset C^\infty(R^n)$

定理：$F: \mathcal{S}(R^n) \to \mathcal{S}(R^n)$ 为连续映射（F 为傅立叶变换）

证明：$\forall \phi \in \mathcal{S}(R^n)$，$(F\phi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \phi(x) e^{-ix\xi} dx$

$$|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta (F\phi)(\xi)| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{R^n} \xi^\alpha \phi(x) \partial_\xi^\beta e^{-ix\xi} dx \right| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{R^n} \xi^\alpha (\phi(x)\cdot(-ix)^\beta) e^{-ix\xi} dx \right|$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{R^n} \phi(x)\cdot(-ix)^\beta \cdot \frac{\partial_x^\alpha (e^{-ix\xi})}{(-i)^\alpha} dx \right| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{R^n} \underbrace{\frac{\partial_x^\alpha((-ix)^\beta \phi(x))}{(-i)^\alpha}}_{=\psi_{\alpha,\beta}(x) \in \mathcal{S}(R^n)} e^{-ix\xi} dx \right| \le C_{\alpha,\beta}$$

即 $\sup_{\xi \in R^n} |\xi^\alpha \partial^\beta F\phi| \le C_{\alpha,\beta} \Rightarrow F\phi \in \mathcal{S}_\xi(R^n)$

若 $\phi_i \to 0$ (in $\mathcal{S}(R^n)$) $\Rightarrow F\phi_i \to 0$ (in $\mathcal{S}(R^n)$)

定义：对 $\mathcal{S}(R^n)$ 上的线性泛函 u，若存在 $C, N \ge 0$，使得 $|\langle u, \phi \rangle| \le C \sum_{|\alpha|,|\beta| \le N} \sup_{R^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi|$

则称 u 为 $\mathcal{S}(R^n)$ 上的有界线性泛函，记作 $u \in \mathcal{S}'(R^n)$.

缓增分布：$\mathcal{S}'(R^n)$ 中的元素.

$$\mathcal{D}(R^n) \subset \mathcal{S}(R^n) \subset \mathcal{E}'(R^n)$$

$$\mathcal{E}'(R^n) \subset \mathcal{S}'(R^n) \subset \mathcal{D}'(R^n)$$

紧支集分布　缓增分布

定理：u为缓增分布 $\Leftrightarrow$ $\forall \phi_j \to 0$ (in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)，有 $\langle u, \phi_j \rangle \to 0$ $(j \to \infty)$

① 对 $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，$F^{-1}F\phi = FF^{-1}\phi = \phi$

② $F\partial_{x_j}\phi = i\xi_j F\phi$，$\partial_{\xi_j}(F\phi) = -iF(x_j\phi)$

定义：对 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，定义 Fu 如下：$\langle Fu, \phi \rangle = \langle u, F\phi \rangle$，$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$F: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 为连续映射.

证明：$Fu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，对 $\forall \phi_j \to 0$ (in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)，$\langle Fu, \phi_j \rangle = \langle u, \overset{\nearrow 0}{F\phi_j} \rangle \to 0$

只需验证 $u_j \to 0$，有 $Fu_j \to 0$.

$\langle Fu_j, \phi \rangle = \langle u_j, F\phi \rangle \to 0$，对 $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，同时 $Fu_j \to 0$ (in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$)

① 若 $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，$Fu$ 即为经典的Fourier变换.

$$\langle Fu, \phi \rangle = \langle (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\,dx, \phi(\xi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\,dx \cdot \phi(\xi)\,d\xi$$

$$\langle Fu, \phi \rangle = \langle u, F\phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \phi(\xi)\,d\xi \right) dx$$

用Fubini定理知两者相等. $\langle F^{-1}Fu, \phi \rangle = \langle Fu, F^{-1}\phi \rangle = \langle u, FF^{-1}\phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$

② $F^{-1}F$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的同构映射.（—— 线性映射，连续可逆）

F的性质：

(1) $F(a_1u_1 + a_2u_2) = a_1Fu_1 + a_2Fu_2$ $(a_1, a_2 \in \mathbb{C},\ u_1, u_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$

(2) $FF^{-1}u = F^{-1}Fu = u$

(3) $F(\partial_k u) = i\xi_k Fu$，$F(D_k u) = \xi_k Fu$，$F(D^\alpha u) = \xi^\alpha Fu$ $\quad (D_k = \frac{\partial_k}{i} = -i\partial_k)$

(4) $F(xu) = i\partial_\xi Fu$ $\quad F(x^\alpha u) = (i\partial_\xi)^\alpha Fu$

(5) $F(\tau_h u) = e^{-i\xi h} Fu$ $(h \in \mathbb{R}^n)$ $\quad F(e^{ixh}u) = \tau_h Fu$.

对于 $\delta(x)$，有 $\langle F\delta, \phi\rangle = \langle \delta, F\phi\rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n} e^{-ix\xi}\phi(x)\,dx\Big|_{\xi=0} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}\phi(x)\,dx = \langle (2\pi)^{-\frac{n}{2}}, \phi\rangle$

$\Rightarrow F\delta = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$

考虑 $\partial_k\delta$：$F(\partial_k\delta) = i\xi_k F\delta = i\xi_k(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$.　　同理 $\partial^\alpha\delta \longrightarrow (i\xi)^\alpha(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$

考虑 1 的傅立叶变换：$F1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta(x)$.　　$F(x^\alpha) = (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{\frac{n}{2}}D^\alpha\delta$.

定理. $u\in\mathcal{E}'(R^n)\subseteq\mathcal{S}'(R^n)$，则 $Fu\in C^\infty(R^n_\xi)$，且 $Fu(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\langle u, e^{-ix\xi}\rangle \in C^\infty(R^n_x)$

拟微分算子。　$F(\Delta u(x)) = -|\xi|^2 Fu$，$F(D^\alpha u)\longrightarrow \xi^\alpha Fu$

设 $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le M} a_\alpha(x)\xi^\alpha$，$a_\alpha(x)\in C^\infty(R_x{}^n)$

定义：$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le M} a_\alpha(x)D^\alpha$　$(D = \frac{\partial}{i})$

$p(x,D)\phi(x) = \sum_{|\alpha|\le M} a_\alpha(x)D^\alpha\phi(x) = \sum_{|\alpha|\le M} a_\alpha(x) * F^{-1}(\xi^\alpha F\phi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{|\alpha|\le M} a_\alpha(x)e^{ix\xi}\xi^\alpha(F\phi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n} e^{ix\xi}$ $p(x,\xi)(F\phi)(\xi)\,d\xi$.　　$F(p(x,D)\phi) = p(x,\xi)F\phi$

定义：$P(x,\xi)\in C^\infty(R_x{}^n\times R_\xi{}^n)$. 若 $\exists\, m\in N$ 使得 $\forall\alpha,\beta$，有 $|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta p(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$　(*)

则称 $p(x,\xi)$ 为 S^m 类函数，记作 $p(x,\xi)\in S^m$

定义：对于 $p(x,\xi)\in S^n$，定义 $p(x,D)\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n} e^{ix\xi}p(x,\xi)(F\phi)(\xi)\,d\xi$ 为 $\mathcal{S}(R^n)$ 上的连续线性变换，称 $\phi(x,D)$ 为拟微分算子.　　$\Rightarrow F(p(x,D)\phi) = p(x,\xi)F\phi$

其中使得 (*) 成立的最小的 m 称为 $p(x,D)$ 的阶.　$p(x,\xi)$ 称为 $p(x,D)$ 的象征. (symbol)

定理：$p(x,D): \mathcal{S}(R^n) \to \mathcal{S}(R^n)$ 为连续线性映射，从而可延拓成 $\mathcal{S}'(R^n) \to \mathcal{S}'(R^n)$ 的连续线性映射.

$F(-\Delta u) = |\xi|^2 Fu$, $F((-\Delta)^{\frac{1}{2}} u) = |\xi| Fu$, $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = (-\Delta) u$.

$F((I-\Delta)u) = (1+|\xi|^2) Fu$

$F((I-\Delta)^{\frac{1}{2}} u) = \sqrt{1+|\xi|^2}\, Fu$

基本解：$p(\partial) u = \sum\limits_{|\alpha| \le M} a_\alpha \partial^\alpha u = f$, $f \in C_c^\infty(R^n)$ (1)

若 $\underset{(**)}{p(\partial) u = \delta(x)}$ 有解 $E(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$. $p(\partial)(E * f) = (p(\partial) E) * f = \delta * f = f$.

满足 (**) 的解称为 (1) 的基本解.

例：$\frac{d}{dx} u = f(x)$. $p(\partial) u = \partial_x u$. 基本解满足 $\partial_x u = \delta(x)$ (习题：$\frac{d}{dx} u + au = f(x)$. a 为常数)

$\Rightarrow u = H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $\frac{d}{dx} u = f$ 的解为 $H(x) * f$.

例：热方程 $\partial_t u - \Delta u = f$. $\partial_t u - \Delta u = \delta(t,x)$

两边 Fourier 变换（对 x 作变换） $\Rightarrow \partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \delta(t)$

$\Rightarrow \hat{u}(t,\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-|\xi|^2 t} H(t)$. $F^{-1} \hat{u}(t,\xi)$ 即满足 $\partial_t u - \Delta u = \delta(t,x)$

$F^{-1} \hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} H(t)$

位势方程：$-\Delta u = f$. 基本解：$-\Delta u = \delta(x)$ $\Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{|\xi|^2}$ $\Rightarrow E(x) = F^{-1}\left(\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{|\xi|^2}\right)$

$\langle -\Delta E, \phi \rangle = \phi(0)$ $\Leftrightarrow$ $\langle E, (-\Delta)\phi \rangle = \phi(0)$ $\Leftrightarrow$ $\int_{R^n} E(x) \Delta\phi(x)\, dx = -\phi(0)$

假设 $E(x) = E(r)$. 左边 $= w_{n-1} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} E(r) \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r + \frac{\partial_\theta^2}{r^2}\right) \phi(r,\theta)\, d\theta\, dr = -\phi(0)$

$= w_{n-1} \int_0^\infty E(r) \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r\right) \phi\, r^{n-1}\, dr$

最后可以得到 $E'(r) \cdot r^{n-1} = const$.

Sobolev 空间:

定义: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 开集, $k \geq 0$, $1 \leq p \leq +\infty$. $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \sim \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

$(1 \leq p \leq +\infty)$ $\qquad$ $(1 \leq p < +\infty)$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}$$

$u \in W^{k,p}(\Omega) \longleftrightarrow \forall \alpha, |\alpha| \leq k, \exists V_\alpha \in L^p(\Omega), D^\alpha u = V_\alpha$

定理: $W^{k,p}(\Omega)$ 是一个 Banach 空间 (线性、赋范完备空间)

证明: 线性显然. $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \forall \alpha, \|D^\alpha u\|_{L^p} = 0 \iff \forall \alpha, D^\alpha u = 0 \iff u = 0$.

只需证完备性。设 $\{u_j\}$ 是 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 列, $\|u_j - u_l\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$ $(j, l \to +\infty)$

有 $D^\alpha u_j$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列! $\big(\|D^\alpha u_j - D^\alpha u_l\|_{L^p} \leq \|u_j - u_l\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0\big)$

因此存在 $V_\alpha \in L^p(\Omega)$, 使得 $\|D^\alpha u_j - V_\alpha\|_{L^p} \to 0$. $\|u_j - V_0\|_{L^p} \to 0$, 只需证 $D^\alpha V_0 \in L^p(\Omega)$, $V_0, V_\alpha \in L^p(\Omega)$

$$\langle D^\alpha V_0, \phi \rangle = (-1)^\alpha \langle V_0, D^\alpha \phi \rangle = (-1)^\alpha \lim_{j\to+\infty} \langle u_j, D^\alpha \phi \rangle \qquad (\|u_j - V_0\|_{L^p} \to 0)$$

$$= \lim_{j\to+\infty} \langle D^\alpha u_j, \phi \rangle = \langle V_\alpha, \phi \rangle \implies D^\alpha V_0 = V_\alpha \in L^p(\Omega)$$

因此 $V_0 \in W^{k,p}(\Omega)$. $\|u_j - V_0\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$ $\big(\iff \|D^\alpha u_j - D^\alpha V_0\|_{L^p} \to 0\big)$

性质: ① $k=0$ 时, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, $W^{k+1,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$

② 若 Ω 有界, $p_1 \geq p_2 \geq 1$, 则 $W^{k,p_1}(\Omega) \subseteq W^{k,p_2}(\Omega)$

③ 若 $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$, 则 $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

④ 设 $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $a_\alpha(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap L^\infty(\bar{\Omega})$

$P(x,D): W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-m,p}(\Omega)$ 为连续映射 $(m \leq k)$

定义：令 $M=\{\phi\in C^\infty(\Omega) \mid \|\phi\|_{W^{k,p}(\Omega)}<+\infty\}$ （线性、赋范但不完备的空间）

记 $H^{k,p}$ 为 M 在 $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ 下的完备化.

定理：设有界区域 Ω 具有 C^∞ 边界，则 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中稠密.（习题）

$(\forall u\in W^{k,p}(\Omega),\ \exists u_j\in C^\infty(\bar{\Omega}).\ \|u_j-u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\to 0)$

定理. ① $M\in D'(\Omega) \Rightarrow H^{k,p}(\Omega)\subseteq W^{k,p}(\Omega)$

② $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中稠密. 而 $C^\infty(\bar{\Omega})\subset C^\infty(\Omega)$ $\Rightarrow$ $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中稠密 $\Rightarrow W^{k,p}(\Omega)\subseteq H^{k,p}(\Omega)$

实指数 Sobolev 空间：$(H^s(\mathbb{R}^n))$

$\Leftrightarrow (I-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\in L^2 \overset{s\text{整数}}{\Longleftrightarrow} u\in L^2+\partial^s u\in L^2$

定义：设 $s\in\mathbb{R}$，记 $H^s(\mathbb{R}^n)=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$

$\langle u,v\rangle_{H^s}=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\,\hat{u}(\xi)\cdot\hat{v}(\xi)\,d\xi$. $\|u\|_{H^s}^2=\langle u,u\rangle$

定理：$\forall s\in\mathbb{R}$. $H^s(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Hilbert 空间（有内积的 Banach 空间）且 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.（习题）

定理：$H^s(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间是 $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. （有界线性泛函 $|\langle h,u\rangle|\le C\|u\|_{H^s}$）

证明：若 h 为 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中的有界线性泛函，即 $\forall u\in H^s$. $|\langle h,v\rangle|\le C\|u\|_{H^s}$

当 $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 由于"$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上收敛" $\Rightarrow$ "H^s 上收敛". 因此 h 可视作 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的广义函数.

($\langle h,\varphi\rangle_{(H^s)'\times H^s}$ 定义了 $\mathcal{S}$ 上的连续线性泛函.) $\langle h,u\rangle$ 可看作 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的广义函数 h 作用在 $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上.

$\langle\hat{h},\hat{u}\rangle=\langle h,u\rangle\le C\|u\|_{H^s} \Rightarrow \langle(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{h},\overbrace{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}}^{\in L^2}\rangle\le C\|u\|_{H^s}$

对 $v\in L^2$，$\langle(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{h}, v\rangle \le C\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{v}\|_{H^s} = C\|v\|_{L^2}$

因此 $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{h}\in L^2 \Rightarrow h\in H^{-s}$

定理：设 $k\in\mathbb{N}$，则 $H^k(\mathbb{R}^n)=W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ （习题）　　考虑 $W^{k_1,p_1}(\Omega)$ 与 $W^{k_2,p_2}(\Omega)$ 的关系

引理：$1\le p<n$，则对 $\forall u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，有 $\|u\|_{L^q}\le C\|\nabla u\|_{L^p}$ $\left(\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n},\ \frac{n}{n-1}\le q<\infty\right)$

($u_\lambda(x)=u(\lambda x)$ 代入：$\|u_\lambda\|_{L^q}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(\lambda x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \xlongequal{\lambda x=y} \left(\frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}=\lambda^{-\frac{n}{q}}\|u\|_{L^q}$

$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\lambda|^p|(\nabla u)(\lambda x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\lambda\cdot\lambda^{-\frac{n}{p}}\|\nabla u\|_{L^p}=\lambda^{1-\frac{n}{p}}\|\nabla u\|_{L^p}$.)

习题：证明 $p=1$ 的情形.

$W^{k,p}(\Omega)=\{u\in\mathcal{D}'(\Omega)\mid D^\alpha u\in L^p(\Omega),|\alpha|\le k\}$

引理：$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ $\left(\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n},\ 1\le p<n\right)$

定理：$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ $(\forall u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\ /\ \forall u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$

$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{W^{0,q}(\mathbb{R}^n)}$　　$\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{k+1,p}(\mathbb{R}^n)}$

$\forall u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，取 $\{u_j\}\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\|u_j-u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\to 0$. $\|u_j\|_{W^{0,q}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$

$\|u\|_{W^{p,q}(\mathbb{R}^n)}\le\lim\limits_{j\to+\infty}\|u_j\|_{W^{0,q}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$

$\downarrow$

$u_j\to w\ (=u)\ (L^q(\mathbb{R}^n)$　　$\left(\begin{array}{l} u_j\to u \text{ in } L^p \\ \|u\|_{L^p}\le\lim\limits_{j\to+\infty}\|u_j\|_{L^p}\end{array}\right)$

$\|u\|_{W^{0,q}(\mathbb{R}^n)}\le\lim\limits_{j\to+\infty}\|u_j\|_{W^{0,q}(\mathbb{R}^n)}$

定理：$\|u\|_{W^{k,q}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{k+m,p}(\mathbb{R}^n)}$ $\left(\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n},\ m\geq 1\right)$

取 q_j 满足 $\frac{1}{q_j}=\frac{1}{p}-\frac{m-j}{n}$ $(j=1,2,\cdots,m)$

$\|u\|_{W^{k+j-1,q_{j-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{k+j,q_j}(\mathbb{R}^n)}$ $\left(\frac{1}{q_{j-1}}=\frac{1}{q_j}-\frac{1}{n},\ j=1,2,\cdots,m\right)$

$\|u\|_{W^{k,q}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{k+m,q_m}(\mathbb{R}^n)}$

推论：$W^{k+m,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$ $\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{b}-\frac{m}{n}>0,\ p\geq 1\right)$ $W^{k+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$ 连续嵌入

例：$\partial_t u=\Delta u+u^2$ $\|u^2\|_{L^2} \leq C\|\Delta u\|_{L^2}$ （形式上说法）

Hölder 空间 $(\Omega\subseteq\mathbb{R}^n)$

$C^0(\Omega)$，$C^1(\Omega)$. $C^k(\Omega)=\{\partial^\alpha u\in C(\Omega)\mid |\alpha|\leq k\}$ $C^{0,\alpha}(\Omega)=\left\{u\in C(\Omega)\,\middle|\,\sup\limits_{x,y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}<+\infty\right\}$，$0<\alpha<1$

$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leq M$，$\forall x,y\in\Omega$ 成立. $|u(x)-u(y)|\leq M|x-y|^\alpha$. $u\in C^{0,\alpha}(\Omega)$，$u\notin C^1(\Omega)$

例：$u=|x|^\alpha$，$\Omega=(-1,1)$

$\alpha=1$. $C_0^1=\left\{u\in C(\Omega)\,\middle|\,\sup\limits_{x,y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}<+\infty\right\}=Lip(\Omega)$. $C^1\subset C^{0,1}(\Omega)\subset C^{0,\alpha}(\Omega)\subset C(\Omega)$

$C^{k,\alpha}(\Omega)=\{u\in C^k(\Omega)\mid \partial^k u\in C^{0,\alpha}(\Omega)\}$. $\forall|\alpha|=k$ $\Longleftrightarrow$ $\sup\limits_{x,y}\frac{|\partial^k u(x)-\partial^k u(y)|}{|x-y|^\alpha}<+\infty$

$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}=\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\sup\limits_{x,y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$，$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}=\|u\|_{C^k(\Omega)}+\|\partial^k u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$

定理: 若 $\frac{k-1}{n} \le \frac{1}{p} < \frac{k}{n}$ $(k \le m)$. 记 $\alpha = k - \frac{n}{p} \in (0,1]$, $k-1 \le \frac{n}{p} < k$

$0 < \alpha < 1$ 时, 有 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-k,\alpha}(\Omega)$ (不用记)

(若 $u \in W^{m,p}(\Omega)$, 则有 $u \in C^{m-k,\alpha}(\Omega)$ 且 $\|u\|_{C^{m-k,\alpha}(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$) $m = k$ ✓ $\Rightarrow m = k+1$.

$p = 2$, $k-1 \le \frac{n}{2} < k$, $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{k,2}(\Omega)}$ $(\alpha > 0)$ $\|\partial^\beta u\| \in L^2(\Omega)$ $(|\beta| \le k)$

若 $u, \partial u, \cdots, \partial^{[\frac{n}{2}]+1} u \in L^2 \Rightarrow u \in C(\Omega)$.

$u \in H^k(\Omega)$ $v \in H^k(\Omega)$ $uv \in H^k(\Omega)$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$ Banach 代数.

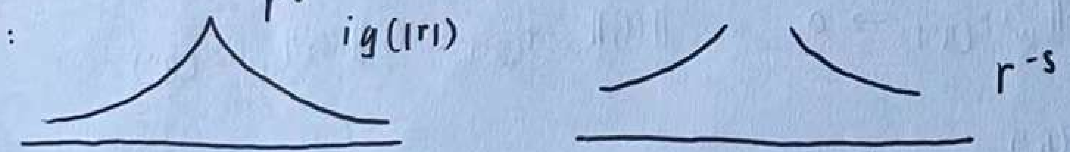
$k > \frac{n}{2}$ $v \in H^k(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$

$$\|uv\|_{H^k(\Omega)} \le C\left(\|u\|_{H^k(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{H^k(\Omega)}\right) \le C\|u\|_{H^k}\|v\|_{H^k}$$

$$\left(\begin{aligned} &\partial^k(uv) = \partial^k u v + u\partial^k v + \cdots \\ &\|\partial^k uv\|_{L^2} \le \|v\| \cdot \|\partial^k u\|_{L^2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\partial_t u = \Delta u + 2uv \\ &\partial_t u = \Delta u - 3uv \end{aligned}\right)$$

证明: $\exists u \in H^{\frac{n}{2}}(\Omega)$, 但 $u \notin C(\Omega)$ (取 $n = 2k$). (习题)

[提示:



$$\|u\|_{W^{k-m,q}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{m}{n} > 0$$

取 $p = 2$. $\|u\|_{W^{k-m,q}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}$ $(k < \frac{n}{2})$ $(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} - \frac{k}{m})$

$q = \frac{2n}{n-2k}$

$H^k(\mathbb{R}^n)$]

紧嵌入定理：(与泛函相关)

紧映射：$A: X \to Y$ 为连续线性映射，若 $\overline{A(B_1)}$ 在 Y 中为紧集则称 A 为紧映射(紧算子)。其中 B_1 为 X 中单位球。

U 为 X 中紧集 $\Leftrightarrow \forall \{u_j\} \subset U$ 存在子序列 $\{u_{k_j}\}$ 在 X 中有极限。

$\overline{A(B_1)}$ 在 Y 中为紧集 $\Leftrightarrow$ 对 X 中任一有界序列 $\{x_i\}$ $\{Ax_i\}$ 在 Y 中有收敛子列。($\Leftrightarrow \{x_{k_j}\}$ 以及 $y_0 \in Y$，$\lim\limits_{j\to+\infty} Ax_{k_j} = y_0$ 存在)

定理：$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为边界光滑的有界开集 $1 \le q < p^*$ ($\frac{1}{p^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$)。则 $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ 的嵌入映射为紧映射。

$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\quad$ ($W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1,2}(\Omega)$)

连续嵌入

$\forall u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u \in L^q$ 且 $\|u\|_{L^q} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$。对 $W^{1,p}(\Omega)$ 中任一有界序列 $\{u_j\}$，$\{u_j\}$ 在 $L^q(\Omega)$ 中有收敛子列。$\exists \{u_{k_j}\}$ 以及 $u_0 \in L^q(\Omega)$ 使得 $\|u_{k_j} - u_0\|_{L^q(\Omega)} \to 0$ $(j \to +\infty)$

$Lu = N(u, f)$ 非线性项

思路：① $Lu_1 = N(u_0, f)$，$Lu_2 = N(u_1, f)$ ⋯ $Lu_{k+1} = N(u_k, f)$

② $\{u_k\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 有界，$\|u_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \le C$ $\Rightarrow \|u_{k+1}\|_{W^{m,p}(\Omega)} \le C$。(能量估计)

③ $\{u_{k_j}\}$ 在 $W^{m-1,q}$ 有极限 u_0，$u_0 \in W^{m-s,q}(\Omega)$ 且满足原方程。

Dirichlet 原理和变分法：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x\in\Omega \\ u=g, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$ $\Omega\subseteq R^n$ 为有界开集

$$g=0 \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & x\in\Omega \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \quad (*)$$

定义：$I(u)=\int_\Omega(\frac{1}{2}|\nabla u|^2-uf)\,dx$，对 $u\in C^2(\bar\Omega)$，$I: C^2(\Omega)\to R$ $\quad u\in A=\{u\in C^2(\bar\Omega)\,|\,u|_{\partial\Omega}=0\}$

定理：$u\in C^2(\bar\Omega)$ 满足 $(*)$ $\Leftrightarrow$ u 是 I 的极小值解.

证明："$\Leftarrow$"：若 $u\in C^2(\bar\Omega)$ 为 I 的极小值点，则 $I(u+\varepsilon v)\geq I(u)$，$\forall v\in A$，$\varepsilon$ 充分小成立.

从而有 $\int_\Omega[\frac{1}{2}(|\nabla u|^2+2\varepsilon\nabla u\nabla v+\varepsilon^2|\nabla v|^2)-(u+\varepsilon v)f]\,dx \geq \int_\Omega[\frac{1}{2}|\nabla u|^2-uf]\,dx$

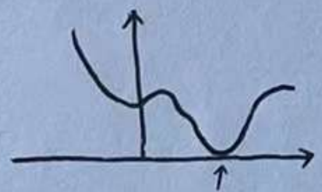
由 $\varepsilon\int_\Omega|\nabla u\nabla v-vf|\,dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int|\nabla v|^2dx\geq 0$ （ε 可取正、负）

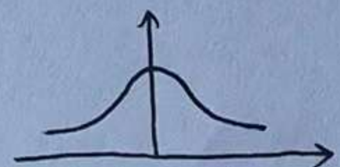
$\Rightarrow \int_\Omega|\nabla u\nabla v-vf|\,dx=0 \Leftrightarrow \int_\Omega v(-\nabla u-f)\,dx=0 \quad \Rightarrow -\Delta u=f$，$\forall x\in\Omega$ 成立.

"$\Rightarrow$" 同理.

例：① f 下有界

② f 在无穷远处 $\to+\infty$





$f\geq -M$. $M_0=\inf_{x\in R^n}\{f(x)\}$. $\exists\{x_j\}$, $f(x_j)\to M_0$. $\{x_j\}$ 有界. $\exists x_0$, $x_{k_j}\to x_0$. $f(x_0)=M_0$. $I(u)$ 下有界. ✓

$\int\frac{1}{2}|\nabla u|^2-uf\,dx\geq -M$. $\forall u\in A$ 成立. $\qquad \int_\Omega|\nabla u|^2dx\geq C_0\int_\Omega|u|^2dx$

$\int_\Omega\frac{1}{2}|\nabla u|^2-uf\,dx \geq \int\frac{1}{2}|\nabla u|^2-(\frac{C_0}{4}|u|^2+\frac{1}{C_0}f^2)\geq\frac{1}{C_0}\int_\Omega f^2dx.$ $\quad (f(x_0)=M_0)$

因此 $M_0=\inf\{I(u)\mid u\in A\}$ 存在. 从而 $\exists\{u_j\}\subset A$, $I(u_j)\to M_0$. 则 $I(u_j)\le 2M_0$

$\int \frac{1}{2}|\nabla u_j|^2-u_jf\,dx\le 2M_0$ ，左边 $\ge\int\frac{1}{4}|\nabla u_j|^2-\frac{1}{c_0}\int_\Omega f^2dx$ $\iff\int_\Omega|\nabla u_j|^2dx\le M_1$

$\Rightarrow$ u_j 在 $H^1(\Omega)$ 中有界. ($H_0^1(\Omega)=\{C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 下的完备化$\}$)

$\Rightarrow$ ① $\exists w\in H^1(\Omega)$, $u_{k_j}\to w$ (在 $H_0^1(\Omega)$)

② $\|u_j-u\|_{L^2(\Omega)}\to 0$

①: 由 $H_0^1(\Omega)$ 的弱列紧性得出 $\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\le\varliminf_{j\to+\infty}\|u_{k_j}\|_{H_0^1(\Omega)}$ $\quad\int|\nabla u_{k_j}|^2dx\ge\int|\nabla w|^2$

$\int u_{k_j}f\to\int wf$.

① + ② $\quad I(w)\le\varliminf_{j\to+\infty}I(u_{k_j})=M_0$ $\quad w\in H_0^1(\Omega)$ ($f\in L^2$)

定理: $\forall f\in L^2(\Omega)$, $I(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中存在极小值解.

$I(u+\varepsilon v)\ge I(u)$, $\forall u\in H_0^1(\Omega)$, ε 充分小成立. $\iff\int_\Omega|\nabla u\nabla v-vf|dx=0$. $\forall v\in H_0^1(\Omega)$ 成立.

($\int_\Omega v(-\Delta u-f)dx=0$, $\int\nabla u\nabla v\,dx=-\int\Delta u v\,dx$)

$\langle-\Delta u,v\rangle=\langle f,v\rangle$, $\forall v\in H_0^1(\Omega)$ 成立. $\quad -\Delta u=f$ ($\mathcal{D}'(\Omega)$), $\forall v\in C_c^\infty(\Omega)$ 成立. $\quad (C_c^\infty(\Omega))'=\mathcal{D}'(\Omega)$

$-\Delta u=f$ 看成是 $(H_0^1(\Omega))'=H^{-1}(\Omega)$

$H^{-1}(\Omega)=\{\partial u\mid u\in L^2\}$

定理: 对 $f\in L^2(\Omega)$, $\exists u\in H_0^1(\Omega)$ 使得 $\langle\nabla u,\nabla v\rangle=\langle f,v\rangle$ (**) $\forall v\in H_0^1(\Omega)$ 成立.

(**) 称为 (*) 的弱形式. (**) 的解称为 (*) 的弱解.

若 $u\in C^2(\Omega)$ 且为弱解 $\Rightarrow$ u 为 (*) 的经典解.

$u \in L^2$. $\langle \partial u, v \rangle = -\langle u, \partial v \rangle \in L^2$.

$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - uf \, dx$ 有界 , $u \in H^1(\Omega)$

$u_j \in C^2(\Omega)$. $\| u_j \|_{H^1(\Omega)} \le M$ (**) . $\| \ \|_{H^1(\Omega)}$ 下完备 $H^1(\Omega)$.

$f \in C(\Omega)$, $u \overset{?}{\in} C^2(\Omega)$. (正则性提升) ✓