第十八章　辐角原理

18.1　绕数的积分表示

将绕数应用于复分析需首先建立绕数的积分表示:

命题 18.1. 假设 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ 是一条分段光滑闭曲线, 且 $c \notin \gamma$，则 γ 关于 c 的绕数满足积分公式

$$w(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - c}.$$

证明: 由连续辐角函数的存在性 (见命题16.1) 可知, 曲线 γ 可参数化为:

$$\gamma(t) = c + \rho(t)e^{i\theta(t)}, t \in [a,b],$$

其中 ρ, θ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数。

先假设 γ 光滑, 此时 ρ, θ 都是可微函数, 于是

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - c} &= \int_a^b \frac{d(\rho(t)e^{i\theta(t)})}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} = \int_a^b \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} + i\theta'(t)\right)dt \\ &= \log\frac{\rho(b)}{\rho(a)} + i(\theta(b) - \theta(a)).\end{aligned}$$

当 γ 是闭曲线时, $\rho(a) = \rho(b)$, 上式右端为 $i\Delta(\gamma, c) = 2\pi i w(\gamma, c)$。由此得绕数的积分表示。

如果 γ 分段光滑, 不妨假设 $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ 光滑, 其中 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 是 $[a,b]$ 的一个划分。由上面等式得

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - c} &= \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - c} = \sum_{k=1}^n \left(\log\frac{\rho(t_k)}{\rho(t_{k-1})} + i(\theta(t_k) - \theta(t_{k-1}))\right) \\ &= \log\frac{\rho(b)}{\rho(a)} + i(\theta(b) - \theta(a)) = 2\pi i w(\gamma, c).\end{aligned}$$

由此得一般情形的积分公式。 □

绕数的积分表示建立了‘绕数’这一拓扑量与复积分中 Cauchy 积分定理/公式的联系。由此，可证明重要的“辐角原理”。辐角原理研究的是半纯函数的性质，为此需先引入半纯函数的概念。

18.2　极点与半纯函数

半纯函数是比全纯函数类更广的一类函数，它允许全纯函数有一类特殊的孤立奇点: 极点。

回忆: 称 $z_0 \in \mathbb{C}$ 是全纯函数 f 的孤立奇点，如果 f 在 z_0 的某去心邻域 $D^*(z_0,r) = D(z_0,r)\backslash\{z_0\}$ 内全纯。如果 $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, 称 z_0 是 f 的极点 (pole)。由定义, 存在 $M > 0$ 及 $\epsilon > 0$, 使得

$$|f(z)| \geq M \Longleftrightarrow \left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{M},\ z \in D(z_0,\epsilon) \setminus \{z_0\}.$$

由 Riemann 可去奇点定理知，z_0 是函数 $g = 1/f$ 在 $D(z_0,\epsilon)\backslash\{z_0\}$ 上的可去奇点。故可定义 $g(z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z) = 0$, 使 g 在 $D(z_0,\epsilon)$ 上全纯。假设 z_0 是 g 的 $m \geq 1$ 阶零点，由零点的局部性质可知, g 可表示为

$$g(z) = (z - z_0)^m h(z), \quad z \in D(z_0,\epsilon).$$

其中 h 是 $D(z_0,\epsilon)$ 上的全纯函数, 满足 $h(z_0) \neq 0$。适当缩小 ϵ, 不妨假设 h 在 $D(z_0,\epsilon)$ 上无零点。这样 f 可表示为

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, z \in D(z_0,\epsilon) \setminus \{z_0\},$$

其中 $\psi(z) = 1/h(z)$ 是 $D(z_0,\epsilon)$ 上的全纯函数。

我们称 m 为极点 z_0 的阶 (order), 它衡量的是当 z 趋于 z_0 时，$f(z)$ 趋于 ∞ 的快慢。f 的极点对应于 $1/f$ 的零点，它们都具有孤立性。

以上给出了平面上的点为极点的定义，下面给出 ∞ 为孤立奇点的定义。如果 f 在 $\{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$ 上全纯，我们称 ∞ 为孤立奇点。利用坐标变换，考虑原点的去心邻域 $D^*(0,1/R)$ 上的函数 $g(w) = f(1/w)$。我们称 ∞ 为 f 的可去奇点/零点/极点, 如果 0 为 g 的可去奇点/零点/极点。易知：

∞ 为 f 的可去奇点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to\infty} f(z) = A \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow f$ 在 ∞ 的邻域内有界；

∞ 为 f 的零点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to\infty} f(z)=0$；

∞ 为 f 的极点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$。

命题 18.2. 假设整函数 f 以 ∞ 为极点, 则 f 是多项式.

证明： 由极点的定义知, 任给 $M>0$, 总存在 $R>0$, 使得当 $|z|\geq R$ 时，$|f(z)|\geq M$。由唯一性定理知, f 在 $\{|z|<R\}$ 上只有有限个零点，记为 $z_1,\cdots,z_n$，阶数分别为 $m_1,\cdots,m_n$。考虑函数

$$g(z)=\frac{(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_n)^{m_n}}{f(z)}.$$

显然, 它在 $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上全纯, 在 z_k 附近有界 (利用 f 在零点附近的局部表示可得), 且没有零点。由 Riemann 可去奇点定理知，g 在 $\mathbb{C}$ 上全纯。

注意到当 $|z|\geq R$ 时，$1/f(z)$ 有界。由此知，存在 $C>0$, 使

$$|g(z)|\leq C(1+|z|^d),\ \forall z\in\mathbb{C},$$

这里, $d=m_1+\cdots+m_n$。利用 Liouville 定理的推广形式得, g 是次数不超过 d 的多项式。由代数学基本定理，以及 g 没有零点这一事实，得 g 为常数。这说明 f 是多项式。 □

称 f 是区域 $\Omega\subset\widehat{\mathbb{C}}$ 上的半纯函数 (meromorphic function, 也称亚纯) 函数, 如果 f 在 Ω 上的一个离散点集 A 之外全纯, 并且 A 的每一点都是 f 的极点。称 f 在 $\overline{\Omega}$ 上半纯，如果 f 在包含 $\overline{\Omega}$ 的更大的区域上半纯。由离散性，如果 f 在 $\overline{\Omega}$ 上半纯，在 $\overline{\Omega}$ 上只有有限个极点。

如果将半纯函数的值域放在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上看，区域 Ω 上的半纯函数 f，总可以视为从 Ω 到 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的全纯映射 $f:\Omega\to\widehat{\mathbb{C}}$。

以下函数

$$f(z)=\frac{z-2}{z(z-1)},\ g(z)=\frac{1}{e^z-1}$$

都是平面 $\mathbb{C}$ 上的半纯函数, f 的极点为 $0,1$; g 的极点为 $2k\pi i, k\in\mathbb{Z}$。容易看出，f 也是复球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的半纯函数。但 g 并不是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的半纯函数，这是因为 ∞ 不是孤立奇点，它是一列极点 $\{2n\pi i; n\in\mathbb{Z}\}$ 的聚点。

18.3 辐角原理 (Argument principle)

假设 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ 是分段光滑闭曲线, f 在 γ 的邻域上全纯, 且没有零点, 则 $\Gamma = f(\gamma)$ 也是分段光滑闭曲线, 参数化为 $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a,b]$。因为 f 没有零点, 所以 $0 \notin \Gamma$。于是 Γ 关于 0 的绕数有意义且可用积分表示给出:

$$w(\Gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

假设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是平面有界区域，边界由有限条分段光滑的简单闭曲线 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 组成。每条边界曲线有一个自然的正定向。如果 f 在 $\partial\Omega$ 的邻域内全纯，不取零值，则 $f(\partial\Omega)$ 由有线条分段光滑的闭曲线 $f(\gamma_1), \cdots, f(\gamma_n)$ 组成，且 $f(\gamma_k)$ 的定向由 γ_k 的定向诱导。此时，$\Gamma = f(\partial\Omega)$ 关于 0 的绕数自然地由下式给出

$$w(\Gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

定理 18.1. (辐角原理) 假设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是平面有界区域，边界由有限条分段光滑的简单闭曲线组成。假设 f 在 $\overline{\Omega}$ 上半纯, 在 $\partial\Omega$ 上没有零点和极点，则成立等式

$$w(f(\partial\Omega),0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z(f,\Omega) - P(f,\Omega),$$

这里 $Z(f,\Omega)$ 是 f 在 Ω 上所有零点的个数 (计重数), $P(f,\Omega)$ 是 f 在 Ω 上所有极点的个数 (计重数)。

辐角原理表明，区域边界的像曲线关于原点的绕数 (拓扑量) 等于半纯函数在区域内部零点数和极点数之差 (分析量)。联系这两个量的中间项是绕数的积分表示。

证明: 如果 f 为常数, 等式两边都为 0, 结论显然成立。

不妨假设 f 非常值。此时先说明: f 在 Ω 中零点与极点都只有有限个。如果极点个数无限，则至少有一聚点 $a \in \overline{\Omega}$。因 f 在 $\overline{\Omega}$ 上半纯, 则 a 要么是极点，要么是全纯的点。不管哪种情形，f 在 a 的某去心邻域上必然全纯，这矛盾于 a 是一列极点的聚点。同理可证，零点数有限。

记 f 在 Ω 中的零点为 $z_1, \cdots, z_l$, 阶分别为 $n_1, \cdots, n_l$; 极点为 $p_1, \cdots, p_s$, 阶分别为 $m_1, \cdots, m_s$。

接下来的证明分为两种方法，本质是一样的。

证法 1(刘师赫)：

考虑函数

$$g(z)=f(z)/R(z),\ R(z)=\frac{(z-z_1)^{n_1}\cdots(z-z_l)^{n_l}}{(z-p_1)^{m_1}\cdots(z-p_s)^{m_s}}.$$

利用 f 在零点与极点附近的局部表示可知，g 在 $\overline{\Omega}$ 上除了 z_k, p_j 之外全纯，在 z_k, p_j 附近有界。由 Riemann 可去奇点定理可知，g 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯。由 $f=gR$ 可知，在 $\partial\Omega$ 的邻域上

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{g'(z)}{g(z)}+\frac{R'(z)}{R(z)}.$$

显然, R'/R 在 $\partial\Omega$ 的邻域中全纯, 且有表达式

$$\frac{R'(z)}{R(z)}=\sum_{j=1}^{l}\frac{n_j}{z-z_j}-\sum_{k=1}^{s}\frac{m_k}{z-p_k}.$$

利用 Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \int_{\partial\Omega}\frac{g'(z)}{g(z)}dz+\int_{\partial\Omega}\frac{R'(z)}{R(z)}dz\\
&= \sum_{j=1}^{l}\int_{\partial\Omega}\frac{n_j}{z-z_j}dz-\sum_{k=1}^{s}\int_{\partial\Omega}\frac{m_k}{z-p_k}dz\\
&= 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{l}n_j-\sum_{k=1}^{s}m_k\right)\\
&= 2\pi i(Z(f,\Omega)-P(f,\Omega)).
\end{aligned}$$

上式中间等号利用了常值函数的 Cauchy 积分公式:

$$\int_{\partial\Omega}\frac{1}{z-b}dz=2\pi i,\ b\in\Omega.$$

证法 2(常规方法): 选取 $\epsilon>0$ 很小, 满足

- f 在每个零点 z_j 的邻域 $D(z_j,\epsilon)$ 上可以表示为 $f(z)=(z-z_j)^{n_j}\psi_j(z)$, 其中 ψ_j 在 $\overline{D(z_j,\epsilon)}$ 上全纯, 不取零值。
- f 在每个极点 p_k 的邻域 $D(p_k,\epsilon)$ 上可以表示为 $f(z)=(z-p_k)^{-m_k}\phi_k(z)$, 其中 ϕ_k 在 $\overline{D(p_k,\epsilon)}$ 上全纯, 不取零值。

易见, f 的零点 z_j 或者极点 p_k 都对应于 f'/f 的一阶极点，因此 f'/f 在 $\overline{\Omega}\setminus\{z_1,\cdots,z_l,p_1,\cdots,p_s\}$ 上全纯。特别地，f'/f

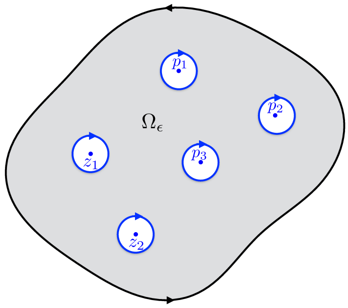

图 18.1: 区域 Ω_ϵ

在区域

$$\Omega_\epsilon = \Omega - \left(\bigcup_{j=1}^{l} \overline{D(z_j,\epsilon)}\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{s} \overline{D(p_k,\epsilon)}\right)$$

的闭包上全纯。

对 f'/f 在区域 Ω_ϵ 上应用 Cauchy 积分定理

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

由图知

$$\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l} C^-(z_j,\epsilon)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{s} C^-(p_k,\epsilon)\right)$$

这里, $C(z_j,\epsilon) = \partial D(z_j,\epsilon), C(p_k,\epsilon) = \partial D(p_k,\epsilon)$, 方向为逆时针方向，$C^-(\cdot,\cdot)$ 表示自然定向的反方向, 即顺时针方向。由此得

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{j=1}^{l} \int_{C(z_j,\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \sum_{k=1}^{s} \int_{C(p_k,\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&= \sum_{j=1}^{l} \int_{C(z_j,\epsilon)} \left(\frac{n_j}{z-z_j} + \frac{\psi_j'(z)}{\psi_j(z)}\right) dz \\
&+ \sum_{k=1}^{s} \int_{C(p_k,\epsilon)} \left(\frac{-m_k}{z-p_k} + \frac{\phi_k'(z)}{\phi_k(z)}\right) dz \\
&= 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{l} n_j - \sum_{k=1}^{s} m_k\right) \\
&= 2\pi i (Z(f,\Omega) - P(f,\Omega)).
\end{aligned}$$

辐角原理至此证完。 □

18.4　习题

“美是一种美妙奇异的东西，艺术家只有通过灵魂的痛苦折磨才能从宇宙的混沌中塑造出来。当美被创造出以后，它不是为了叫每个人都能认出来。要想认识它，一个人必需重复艺术家经历的一番冒险。”

—毛姆《月亮与六便士》

1. (花式分披萨)　一个圆形的奶酪披萨, 其奶酪与面饼的密度连续分布, 都具有正质量。假设披萨为单位圆盘 $\mathbb{D}$, 证明存在 $0 \le r < R \le 1$, 使得圆环区域 $A(r, R) = \{r < |z| < R\}$ 中奶酪与面饼的质量都占各自总质量的一半。

2. (辐角原理的推广) 假设 Ω 是平面区域, 边界为分段光滑的简单闭曲线。假设 g 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯，f 在 $\overline{\Omega}$ 上半纯且在 $\partial\Omega$ 上没有零点或极点。假设 f 在 Ω 中的零点为 $a_1, \cdots, a_n$, 阶分别为 $k_1, \cdots, k_n$; 极点为 $p_1, \cdots, p_m$, 阶分别为 $q_1, \cdots, q_m$, 证明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} k_j g(a_j) - \sum_{s=1}^{m} q_s g(p_s).$$

(注: 此结论当 $g \equiv 1$ 时, 即为辐角原理, 故可以看成辐角原理的推广。若取 $f(z) = z - a_1$, 上式是 Cauchy 积分公式, 因此结论又可看成 Cauchy 积分公式的推广。)

3. (求根) 假设 f 在 $\overline{D(0, R)}$ 上全纯, 并且 f 在 $\{|z| = R\}$ 上不取零值. 如果

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} z^2\frac{f'(z)}{f(z)}dz = -4.$$

求出 f 在 $D(0, R)$ 上的所有根。

附加题 (不做要求)

“肥而滋”奖委员会为促进“舌尖上的数学”事业发展，使大众能更公平地享受美食，特设“肥而滋”奖，征解如下问题：

问题 18.1. 一个任意形状的奶酪披萨，奶酪与面饼密度连续分布。在内部任取一点，能否找到经过此点的一条曲线将披萨一分为二，使奶酪与面饼同时等分？

“肥而滋”奖委员会: 柯嘻嘻，黎蔓蔓，喂尔吃特辣丝