1. 形如 $x_j' = d_j x_j$，其中 $d_j > 0$ 的变换称为变量的正尺度变换。一单纯形法的枢轴元选择准则称为尺度不变（scale invariant），若枢轴元在（部分）变量进行正尺度变换后保持不变。

（1)检验数最小的入基变量选择准则具有何种最优性，它是否是尺度不变的？为什么？

（2）如何选择枢轴元使每次转轴时目标函数值下降最多，该方法是否是尺度不变的？为什么？

2. 用单纯形法求解线性规划

$$\begin{aligned} \min\quad & -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 12x_4 \\ s.t.\quad & -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 \le 0 \\ & \frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2x_4 \le 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

试分别采用一种可能导致循环的枢轴元选择规则和 Bland 规则。

3. 试写出以下线性规划的对偶规划

（1）
$$\begin{aligned} \min\quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ s.t.\quad & \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \\ & \mathbf{y} \le \mathbf{b} \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} \min\quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ s.t.\quad & \mathbf{b}_l \le \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}_u \\ & \mathbf{l} \le \mathbf{x} \le \mathbf{u} \end{aligned}$$

4. 用对偶单纯形法求解以下线性规划

（1）
$$\begin{aligned} \min\quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ s.t.\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} \min\quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.t.\quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & x_1 - x_3 \ge 4 \\ & x_2 - x_3 \ge 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

5. 考虑线性规划

（P）
$$\begin{aligned} \min\quad & \mathbf{a}^\top \mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ s.t.\quad & \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \le \mathbf{0} \end{aligned}$$

（1）试给出它的一个可行解；

（2）写出它的对偶规划（D），并给出（P）有有限最优解时，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 应满足的充要条件；

（3）在（D）存在最优解时，求其最优解，并求（P）的最优解。