第十三章　全纯函数的幂级数与零点

13.1　全纯函数的幂级数

定理 13.1. (Cauchy, 1831) 假设 f 在 $D = D(a, R)$ 上全纯，则 f 可以展成以 a 为中心的幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \ \forall z \in D.$$

证明： 对任意 $z \in D$, 取 $\rho \in (0, R)$, 使得 $z \in D(a, \rho)$。利用 Cauchy 积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

当 $\zeta \in \partial D(a, \rho)$, $z \in D(a, \rho)$ 时，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

当 z 取定时, 上式右端以 ζ 为变量的函数项级数在 $\partial D(a, \rho)$ 上一致收敛到 $\frac{1}{\zeta - z}$, 这保证下式的积分与求和可交换次序：

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \right) f(\zeta) d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n.
\end{aligned}$$

上面最后一步，利用了高阶导数的 Cauchy 型积分公式。

例题 13.1. (收敛半径的性质) 假设 f 在平面区域 Ω 上全纯, 对任意 $a \in \Omega$, 记 f 以 a 为中心的幂级数展式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

的收敛半径为 $R(a)$，则成立

$$R(a) \geq d(a, \partial\Omega).$$

进一步, $R : \Omega \to (0, +\infty)$ 满足 Lipschitz 连续:

$$|R(b) - R(a)| \leq |b-a|, \ \forall a, b \in \Omega, |a-b| \leq \min\{R(a), R(b)\}.$$

证明: 对任意 $0 < \rho < d(a, \partial\Omega)$, 显然 f 在 $\overline{D(a,\rho)}$ 上全纯, 且 $\|f\|_{D(a,\rho)} < \infty$. 由定理13.1以及 Cauchy 不等式, f 以 a 为中心的 (任意) 圆盘上幂级数系数满足

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{\|f\|_{D(a,\rho)}}{\rho^n}.$$

因此有 $\limsup |a_n|^{1/n} \leq 1/\rho$。由此得收敛半径 $R(a) \geq \rho$。由 $\rho \in (0, d(a, \partial\Omega))$ 的任意性可知，$R(a) \geq d(a, \partial\Omega)$。(此处, 之所以取 $\rho \in (0, d(a, \partial\Omega))$, 是为保证 $\|f\|_{D(a,\rho)} < +\infty$。否则, 直接取 $\rho = d(a, \partial\Omega)$, 有可能 $\|f\|_{D(a,\rho)} = +\infty$, 导致上面系数不等式平凡, 无法有效估计收敛半径)。

利用上述性质, 并注意到当 $b \in D(a, R(a))$ 时, 有

$$D(b, R(a) - |b-a|) \subset D(b, R(b)) \subset D(b, R(a) + |b-a|).$$

由此得 $|R(b) - R(a)| \leq |b-a|$.

注: 幂级数展式是唯一的。事实上，给定 $D(a, \epsilon)$ 上两个幂级数展式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n, \ \forall z \in D(a, \epsilon).$$

两边对 z 求 k 阶导数，并令 $z = a$ 得到

$$k! a_k = k! b_k \Longleftrightarrow a_k = b_k.$$

13.2 级数形式的 Cauchy 不等式

定理 13.2. 假设 f 在 $D = D(a, R)$ 上全纯，有幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

则成立不等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} \leq \|f\|_D^2.$$

特别地，对任意 $n \geq 0$, 成立 Cauchy 不等式

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! \frac{\|f\|_D}{R^n}.$$

上式等号对某个 $n = n_0$ 成立当且仅当 $f(z) = a_{n_0}(z-a)^{n_0}$.

证明： 如果 $\|f\|_D = +\infty$, 结论显然成立，因此不妨假设 $\|f\|_D < +\infty$。取 $\rho \in (0, R)$, 考虑积分

$$I(\rho) = \int_{|z-a|=\rho} |f(z)|^2 |dz| = \int_{|z-a|=\rho} f(z)\overline{f(z)} |dz|.$$

利用积分基本不等式，显然有

$$I(\rho) \leq 2\pi\rho \|f\|_D^2.$$

另一方面, 做变量代换 $z = a + \rho e^{i\theta}$, 并利用幂级数展开式, 得到

$$\begin{aligned} I(\rho) &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} \rho^m e^{-im\theta} \right) \rho d\theta \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n+1}. \end{aligned}$$

由此可得

$$2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n+1} \leq 2\pi\rho \|f\|_D^2 \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leq \|f\|_D^2.$$

上式对任意 $\rho \in (0, R)$ 都成立。特别地,

$$\sum_{n=0}^{m} |a_n|^2 \rho^{2n} \leq \|f\|_D^2, \ \forall \rho \in (0, R), \forall m \geq 1.$$

令 $\rho \to R$ 可得，$\sum_{n=0}^{m} |a_n|^2 R^{2n} \leq \|f\|_D^2$, $\forall m \geq 1$。最后令 $m \to \infty$, 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} \leq \|f\|_D^2.$$

特别地, $|a_n|R^n \le \|f\|_D$, 即为 Cauchy 不等式 $|f^{(n)}(a)| \le n!\|f\|_D/R^n$. 如果对某个 n_0，不等式等号成立，此时

$$\begin{aligned}|a_{n_0}|R^{n_0} = \|f\|_D \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{n\neq n_0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a_n = 0, \forall n \neq n_0 \\ &\Longleftrightarrow \quad f(z) = a_{n_0}(z-a)^{n_0}.\end{aligned}$$

13.3 零点与唯一性定理

下面利用幂级数展式讨论全纯函数的零点.

假设 f 在平面区域 Ω 上全纯, $a \in \Omega$ 并且 $D(a,R) \subset \Omega$，f 在 $D(a,R)$ 上幂级数展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

利用幂级数展式的唯一性可知，

$$f|_{D(a,R)} \equiv 0 \Longleftrightarrow f(a) = f'(a) = \cdots = 0.$$

这说明, 如果 $f(a) = 0$, 但 f 在 $D(a,R)$ 上不恒为 0, 则必然存在自然数 $m \ge 1$, 满足

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \text{ 且 } f^{(m)}(a) \neq 0.$$

此时，称 a 为 f 的 m 阶零点。在零点附近，我们有

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \\ &= (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-m} \\ &= (z-a)^m g(z),\end{aligned}$$

这里, g 在 $D(a,R)$ 上全纯，满足 $g(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$。利用 g 的连续性知, 存在 $\rho \le R$, 使得 g 在 $D(a,\rho)$ 不取零值。这表明，f 在 $D(a,\rho)$ 上除了 a 之外，没有其他的零点。

总结以上讨论：如果 a 是 f 的零点，则以下等价

$$\begin{aligned}f|_{D(a,R)} \not\equiv 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{存在} m \ge 1, \text{使得} f^{(m)}(a) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{存在} \rho > 0, \text{使} f \text{在} D(a,\rho) \setminus \{a\} \text{上无零点}.\end{aligned}$$

特别地，$f|_{D(a,R)} \not\equiv 0$ 意味着零点具有孤立性。

定理 13.3. (唯一性定理) 区域 Ω 上的全纯函数 f 在一列在 Ω 中有聚点的非平凡点列上取零值, 则 $f \equiv 0$.

点列 $\{z_n\}$ “非平凡” 指点列中有无穷多个互不相同的点。互异点列指的是点点不同的点列。

证明: 假设点列 $\{z_n\} \subset \Omega$, 满足 $\lim z_n = \zeta \in \Omega$, 且 $f(z_n) = 0$。由连续性可知 $f(\zeta) = 0$。这说明 ζ 是 f 的非孤立零点, 因此必有 $f^{(k)}(\zeta) = 0,\ \forall k \geq 0$。现定义集合

$$E = \left\{z \in \Omega; f^{(k)}(z) = 0,\ \forall k \geq 0\right\}.$$

显然 $\zeta \in E$, 因此 E 非空。由 $f^{(k)}$ 的连续性可知 E 是 Ω 的闭子集。另一方面, 取 $z_0 \in E$, 则存在 $\epsilon > 0$ 使得 f 在 $D(z_0, \epsilon)$ 上有 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = 0,\ \forall z \in D(z_0, \epsilon).$$

由此得 $D(z_0, \epsilon) \subset E$, 因此 E 是 Ω 的开子集。由 Ω 的连通性得 $E = \Omega$。 □

唯一性定理有一直接推论: 给定区域 Ω 上两个全纯函数 f, g, 如果它们在一个在 Ω 中有聚点的非平凡点列上取值相等，则它们恒等。这说明, 全纯函数可由在区域中有聚点的非平凡点列上的取值完全决定。

13.4　零点趋于边界的情况

当全纯函数的零点在区域中没有聚点时, 唯一性定理是否成立呢？这是一个自然而基本的问题。容易找到反例，说明唯一性定理不成立。Weierstrass 证明了一个令人吃惊的结论：

对任意平面区域 Ω, 以及在区域中没有聚点的非平凡点列 $\{z_n\}_{n\geq 1}$, 总存在 Ω 上的全纯函数, 使其零点集恰好是给定的点列，除此之外并无其它零点。

Weierstrass 对 $\Omega = \mathbb{C}$ 的情形给出了证明：构造一种特殊的收敛因子，并利用了无穷乘积的理论。对此方法稍加改造，可得一般区域的证明。细节将在无穷乘积一章讨论。

需要说明的是，Weierstrass 构造的全纯函数一般是无界的。如果我们在有界全纯函数类考虑问题，情况变得非常微妙。如果点列趋于边界的速度较 “慢” , 唯一性定理仍有可能成立; 如果点

列趋于边界的速度较快，唯一性定理依然不能保证。对区域 Ω 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的情形, 点列趋于边界的速度快慢可以量化, 这两种情形的对比令人吃惊:

定理 13.4. 假设 $\{z_n\}$ 是在圆盘 $\mathbb{D}$ 上满足 $|z_n| \to 1$ 的点列。

1. (点列趋于边界较慢) 如果点列 $\{z_n\}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(z_n, \partial\mathbb{D}) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) = \infty,$$

则在此点列上取零值的有界全纯函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 必恒为零。

2. (点列趋于边界较快) 如果点列 $\{z_n\}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(z_n, \partial\mathbb{D}) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty,$$

则存在非平凡的全纯函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, 恰好以点列为零点集, 并且无其他零点。

证明: 我们只证明 1。第 2 条结论属于德国数学家 Blaschke, 证明利用无穷 Blascke 乘积的构造, 将在无穷乘积一节讨论。

为证 1, 先证明一个有趣的事实:

如果全纯函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 有界, 在点 $z_1,\cdots,z_n$(可以有重复, 重复次数贡献为零点阶数) 取零值, 则

$$|f(0)| \le \|f\|_{\mathbb{D}}|z_1|\cdots|z_n|.$$

证明思路: 选取适当的比较函数, 并利用最大模原理。为此, 定义

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right).$$

容易验证, B 在 $\mathbb{D}$ 上全纯, 在 $z_1,\cdots,z_n$ 取零值, $B(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$。$B$ 可以连续到 $\partial\mathbb{D}$, 并且当 $|z|=1$ 时, $|B(z)|=1$。考虑函数

$$g(z) = f(z)/B(z).$$

显然, 它在 $\mathbb{D}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上全纯。在 z_k 的邻域 $D(z_k,\epsilon)$ 中, 利用全纯函数在零点的局部表示可知

$$f(z) = (z-z_k)^{n_k}\psi(z), \psi(z_k)\neq 0; B(z) = (z-z_k)^{m_k}\phi(z), \phi(z_k)\neq 0,$$

这里零点阶数 $n_k \ge m_k$。由此知，在 z_k 的去心邻域 $D^*(z_k,\epsilon) = D(z_k,\epsilon)-\{z_k\}$ 内,

$$g(z) = \psi(z)/\phi(z)$$

有界。由 Riemann 可去奇点定理, g 在 $\mathbb{D}$ 上全纯。由最大模原理知, 对任意 $z\in\mathbb{D}$, 以及任意 $r\in(|z|,1)$

$$|g(z)|\le\max_{|\zeta|=r}|g(\zeta)|\le\|f\|_{\mathbb{D}}/\min_{|\zeta|=r}|B(\zeta)|.$$

利用 $\lim_{r\to 1}\min_{|\zeta|=r}|B(\zeta)|=1$ 以及 $r\in(|z|,1)$ 的任意性，在上式中令 $r\to 1$, 得 $|g(z)|\le\|f\|_{\mathbb{D}}$。因此有

$$|f(z)|\le\|f\|_{\mathbb{D}}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right|.$$

特别地, $|f(0)|\le\|f\|_{\mathbb{D}}|z_1|\cdots|z_n|$。

下面证明定理。假设 f 有界且满足 $f(z_n)=0$。如果 $f\not\equiv 0$, 通过将 f 换成 f/z^m, 不妨假设 $f(0)\neq 0$。注意点列可以有重复出现的点 (出现的次数则为 f 零点的重数)，条件 $|z_n|\to 1$ 保证每个这样的点重复至多有限次。

利用上述结论, 对任意 n,

$$\begin{aligned}|f(0)| &\le \|f\|_{\mathbb{D}}\prod_{k=1}^{n}|z_k|=\|f\|_{\mathbb{D}}\prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|-1)\\ &\le \|f\|_{\mathbb{D}}\prod_{k=1}^{n}e^{|z_k|-1}=\|f\|_{\mathbb{D}}e^{\sum_{k=1}^{n}(|z_k|-1)}.\end{aligned}$$

此处, 利用了不等式 $1+t\le e^t$。上式等价于

$$\sum_{k=1}^{n}(1-|z_k|)\le\log\frac{\|f\|_{\mathbb{D}}}{|f(0)|}.$$

由 n 的任意性, 得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)\le\log\frac{\|f\|_{\mathbb{D}}}{|f(0)|}.$$

这矛盾于假设。

13.5 习题

“我喜欢这些学科的原因，恰恰也是它们之所以被研究了数百年的原因所在：它们自身的内在趣味，已发现的优美的深刻联系，还有找到并证明新的深刻联系的挑战。”

—— 约翰. 泰特, 数学家

1. (唯一性定理的应用) 是否存在满足下面条件, 在原点附近全纯的函数 $f(z)$?

(1). $f(\frac{1}{2n-1}) = 0$, $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n}$, $\forall n \geq 1$.

(2). $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ $\forall n \geq 1$.

(3). $f(\frac{1}{2n-1}) = f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 1$.

2. (唯一性定理的妙用) 假设 $f(z)$ 在圆盘 $D(0,r)$ 上全纯。假设实数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 点点不同且趋于零，f 在此实数列取实值。

(1). 证明 f 是实函数, 即在实轴上取值为实数。

(2). 如果所有 a_n 为正数，且 $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$, $\forall n \geq 1$, 证明 f 是常值函数。

(提示: (1). 比较 f 与 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, 并利用唯一性定理. (2). 利用 (1) 的结论，以及实函数的微分中值定理)

3. (妙题：唯一性定理的妙用) 假设 f 在平面区域 Ω 上全纯。对任意 $z \in \Omega$, 存在整数 $n = n(z) \geq 0$, 使得 $f^{(n)}(z) = 0$. 证明 f 是一个多项式。

(提示：将 Ω 表示为 $\bigcup_{n\geq 0} g_n^{-1}(0)$, 其中 $g_n(z) = f^{(n)}(z)$)

4. (收敛半径的性质) 假设 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 全纯，以 $a \in \Omega$ 为中心的幂级数展式的收敛半径为 $R(a)$.

(1). 证明 R 是 Ω 上的连续函数。

(提示：利用收敛半径的估计)

(2). 如果 p 是次数至少为 1 的多项式，对于特例：$f(z) = 1/p(z)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$, 以及 $a \in \Omega$, 求 $R(a)$.

5. (面积的级数表示) 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $D(0,R)$ 上全纯，将 $D(0,R)$ 一一映为区域 Ω，证明 Ω 的面积为

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 R^{2n}.$$

如果限制 $f'(0) = 1$, 那么 Ω 的面积达到最小的充要条件是什么？

6. (幂级数的余项) 假设 f 在 $D = D(0,R)$ 的闭包上全纯，可展成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ \forall z \in D.$$

记其部分和函数 $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, 证明

$$f(z) - S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta - z)} d\zeta, \ \forall z \in D(0,R).$$

(注：由此可得,

$$|f(z)-S_n(z)|\le \frac{\|f\|_D|z|^{n+1}}{R^n(R-|z|)},\ \forall z\in D.$$

上式不仅说明 S_n 内闭一致收敛于 f, 而且给出收敛的误差估计.)

7. (利用幂级数证明最大模原理) 假设 f 在 $D=D(z_0,R)$ 上全纯，有幂级数展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

现给出两种思路证明最大模原理，请补充证明细节：

(1). 利用幂级数的余项估计 (参考上一题) 证明：如果 f 非常值函数，则存在 $w\in D(z_0,R)$, 满足 $|f(w)|>|f(z_0)|$.

(2). 利用幂级数形式的 Cauchy 不等式证明: 如果 f 在区域的内点 z_0 取得最大模，则 $f\equiv f(z_0)$.

8. (零点的局部性质) 假设 f 在原点邻域内全纯, 如果存在常数 $\rho\in(0,1),C>1$, 使得对充分大的自然数 n, 总有

$$\big|f\big(1/n\big)\big|\le C\rho^n,$$

证明 $f\equiv 0$。