第二十六章　调和函数 2

26.1　Harnack 不等式

假设 Ω 是平面区域, 称 u 在 $\overline{\Omega}$ 上调和, 如果 u 在包含 $\overline{\Omega}$ 的更大区域上调和. 如前所知, $\overline{\mathbb{D}}$ 上的调和函数 u 满足 Poisson 积分公式

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}d\theta.$$

这说明 u 在 $\mathbb{D}$ 内的值可由其边界值的积分表示. 积分核

$$P(z,e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)$$

称为 Poisson 核. 它满足如下性质:

- $P(z,e^{i\theta})>0,\ \forall(z,e^{i\theta})\in\mathbb{D}\times\partial\mathbb{D}$.
- 取定 $\theta\in\mathbb{R}$, $z\mapsto P(z,e^{i\theta})$ 是调和函数 (因其可表示为全纯函数之实部), 且满足不等式
$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-|z|}{1+|z|}\le P(z,e^{i\theta})\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{26.1}$$
- 任意取定 $z\in\mathbb{D}$, 积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}P(z,e^{i\theta})d\theta=1$.

定理 26.1. (Harnack 不等式) 假设 u 是 $\mathbb{D}$ 上的非负调和函数, 对任意 $z\in\mathbb{D}$, 成立

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}u(0)\le u(z)\le\frac{1+|z|}{1-|z|}u(0).$$

证明: 先假设 u 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上调和, 利用 Poisson 积分公式

$$u(z)=\int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})P(z,e^{i\theta})d\theta$$

及 Poisson 核的估计(26.1),

$$u(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta \cdot \frac{1+|z|}{1-|z|} = \frac{1+|z|}{1-|z|}u(0).$$

$$u(z) \ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta \cdot \frac{1-|z|}{1+|z|} = \frac{1-|z|}{1+|z|}u(0).$$

接下来考虑一般情形. 对任意 $r \in (0,1)$, 令 $u_r(z) = u(rz), z \in \mathbb{D}$. 易验证 u_r 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上调和. 由如前所证的 Harnack 不等式,

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}u_r(0) \le u_r(z) \le \frac{1+|z|}{1-|z|}u_r(0).$$

注意到 $u_r(0) = u(0)$, 且当 $r \to 1^-$ 时, $u_r(z) \to u(z)$. 在上式中令 $r \to 1^-$, 得到结论. □

注: Harnack 不等式表明, 如果 u 是 $\mathbb{D}$ 上的非负调和函数, 要么 $u > 0$, 要么 $u \equiv 0$.

Harnack 不等式的一个直接应用为:

命题 26.1. (调和函数的 Liouville 型定理) 复平面上有上界或下界的调和函数必为常数.

证明: 不妨假设 u 有下界. 将 u 换成 $u - \inf_{z\in\mathbb{C}} u(z)$, 不妨假设 $u \ge 0$. 对任意 $R > 0$, $v(z) = u(Rz)$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, 利用 Harnack 不等式得到

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}v(0) \le v(z) \le \frac{1+|z|}{1-|z|}v(0), \ \ z \in \mathbb{D}.$$

通过变量代换 $w = Rz$, 上式等价于

$$\frac{R-|w|}{R+|w|}u(0) \le u(w) \le \frac{R+|w|}{R-|w|}u(0), |w| < R.$$

若视 w 取定, 上式对任意 $R > |w|$ 都成立. 令 $R \to +\infty$ 可得 $u(w) = u(0)$. 由 w 的任意性, 可得 $u \equiv u(0)$. □

26.2 Dirichlet 问题的可解性

Dirichlet 问题: 给定平面区域 Ω, 及定义在边界的连续函数 $\psi \in C(\partial\Omega)$, 是否存在 Ω 上的调和函数 u, 连续到边界, 且满足 $u|_{\partial\Omega} = \psi$?

本节考虑特殊情形 $\Omega = \mathbb{D}$. 一般区域情形比较复杂, 此处不讨论. 此时圆域上的 Poisson 积分公式为求解 Dirichlet 问题提供了启发. 假设 ψ 是单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上的有界分段连续函数, 称

$$P_\psi(z) = \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})P(z, e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}d\theta$$

为 ψ 的 Poisson 积分.

命题 26.2. 假设 ψ 是 $\partial\mathbb{D}$ 上的有界分段连续函数, 则 ψ 的 Poisson 积分 P_ψ 是 $\mathbb{D}$ 上的调和函数, 满足在 ψ 的连续点 $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ 处,

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} P_\psi(z) = \psi(e^{i\theta}).$$

证明: 利用 Possion 核 $P(z, e^{i\theta})$ 关于 z 调和可知

$$\Delta P_\psi(z) = \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})\Delta_z P(z, e^{i\theta})d\theta = 0,$$

这说明 P_ψ 在 $\mathbb{D}$ 内调和.

由 Poisson 核的性质 $\displaystyle\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})d\theta = 1$, 可知

$$\begin{aligned}
|P_\psi(z) - \psi(e^{i\theta})| &= \left|\int_0^{2\pi}(\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta}))P(z, e^{it})dt\right| \\
&\le \int_{\theta-2\delta}^{\theta+2\delta} |\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})|P(z, e^{it})dt \\
&+ \left(\int_{\theta-\pi}^{\theta-2\delta} + \int_{\theta+2\delta}^{\theta+\pi}\right)|\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})|P(z, e^{it})dt \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

下面估计积分 I_1 与 I_2.

因 ψ 在 $e^{i\theta}$ 处连续, 对任意 $\epsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 足够小, 使 $|\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})| \le \epsilon$, $\forall\, t \in (\theta - 2\delta, \theta + 2\delta)$. 于是

$$I_1 \le \epsilon \int_{\theta-2\delta}^{\theta+2\delta} P(z, e^{it})dt \le \epsilon \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(z, e^{it})dt = \epsilon.$$

下面估计 I_2. 记 $z = re^{i\alpha}$, 假设 $|\alpha - \theta| < \delta$. 当 $|t - \theta| \ge 2\delta$ 时,

$$\begin{aligned}
|\alpha - t| &\ge |\theta - t| - |\theta - \alpha| \ge 2\delta - \delta = \delta, \\
|e^{i\theta} - z|^2 &= 1 + r^2 - 2r\cos(\alpha - t) \ge 1 + r^2 - 2r\cos\delta \\
&= (r - \cos\delta)^2 + \sin^2\delta \ge \sin^2\delta.
\end{aligned}$$

由此可得,

$$I_2 \le \left(\int_{\theta-\pi}^{\theta-2\delta} + \int_{\theta+2\delta}^{\theta+\pi} \right) 2\|\psi\|_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-r^2}{2\pi \sin^2\delta} dt \le \frac{2\|\psi\|_{\partial\mathbb{D}}}{\sin^2\delta}(1-r^2).$$

取 r 足够靠近 1, 上式右端 $\le \epsilon$. 于是

$$|P_\psi(z) - \psi(e^{i\theta})| \le \epsilon + \frac{2\|\psi\|_{\partial\mathbb{D}}}{\sin^2\delta}(1-r^2) \le 2\epsilon.$$

结合之前所证的唯一性定理, 得

定理 26.2. 假设 ψ 是 $\partial\mathbb{D}$ 上的有界分段连续函数, 则 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & z \in \mathbb{D}, \\ u(z) = \psi(z), & z \in \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

的有界解存在且唯一, 可表示为 $u = P_\psi$.

26.3 可去奇点定理

利用圆域 Dirichlet 问题的可解性, 可以研究调和函数的孤立奇点. 假设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是区域, $a \in \Omega$. 如果 u 是 a 的去心邻域 $D(a,\epsilon)\setminus\{a\}$ 上的调和函数, 则称 a 是 u 的孤立奇点; 进一步, 如果存在 $D(a,\epsilon)$ 上的调和函数 v, 满足在 $D(a,\epsilon)\setminus\{a\}$ 上, $u = v$, 称 a 是 u 的可去奇点.

定理 26.3. 假设 a 是 u 的孤立奇点, 满足在 a 附近

$$u(z) = o(\log|z-a|) \left(\iff \lim_{z\to a} \frac{u(z)}{\log|z-a|} = 0 \right).$$

则 a 是 u 的可去奇点.

证明: 取 $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. 在 $D = D(a,r)$ 上由 Dirichlet 问题的可解性可知, 存在唯一有界调和函数 v, 满足 $v|_{\partial D} = u|_{\partial D}$. 为证 a 是 u 的可去奇点, 只需证在 $D(a,r)\setminus\{a\}$ 上, $v \equiv u$.

令 $h = v - u$. 显然 $h|_{\partial D} = 0$. 下面将证明, 对任意 $\epsilon > 0$, 在 $D\setminus\{a\}$ 上总成立

$$-\epsilon\log(r/|z-a|) \le h(z) \le \epsilon\log(r/|z-a|). \tag{26.2}$$

由上式及 $\epsilon > 0$ 的任意性, 得 $h = 0$ 在 $D\setminus\{a\}$ 上成立.

为证明(26.2), 记 $w_\epsilon(z)=\epsilon\log(r/|z-a|), z\in D\setminus\{a\}$. 显然 w_ϵ 是 $D\setminus\{a\}$ 上的正值调和函数, 且 $w_\epsilon|_{\partial D}=h|_{\partial D}=0$.

由假设条件 $u(z)=o(\log|z-a|)$ 可知, $\lim_{z\to a}h(z)/w_\epsilon(z)=0$. 对之前给定的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta(\epsilon)\in(0,r)$, 使对任意 $\delta\in(0,\delta(\epsilon))$,

$$-w_\epsilon(z)=-\epsilon\log(r/\delta)\le h(z)\le\epsilon\log(r/\delta)=w_\epsilon(z),\ \ |z-a|=\delta.$$

在环域 $A_\delta=\{\delta<|z-a|<r\}$ 上对 $h\pm w_\epsilon$ 应用极值原理, 得

$$-w_\epsilon(z)\le h(z)\le w_\epsilon(z),\ \forall z\in A_\delta.$$

上式对任意 $\delta\in(0,\delta(\epsilon))$ 都成立. 令 $\delta\to0^+$ 得(26.2)式. $\square$

26.4 调和多项式

实二元多项式 p 可表示为

$$p(x,y)=\sum_{0\le j+k\le n}a_{jk}x^jy^k.$$

它的次数 $\deg(p)$ 定义为 $\max\left\{j+k;a_{jk}\ne0\right\}$. 如果 $\Delta p=0$, 称 p 为调和多项式.

定理 26.4. 假设 $p=p(x,y)$ 是 $m\ge2$ 次实多项式, 则其 Poisson 积分 $P_{p|_{\partial\mathbb{D}}}(z)$ 可以表示为

$$(1-|z|^2)q(x,y)+p(x,y)\tag{26.3}$$

的形式, 其中 q 是次数 $\le m-2$ 的实多项式.

证明: 我们已知 Poisson 积分 $P_{p|_{\partial\mathbb{D}}}(z)$ 调和, 为使其具有(26.3)式的形式, 需使 q 满足

$$\Delta((1-|z|^2)q(x,y))=-\Delta p(x,y).$$

下面将证 q 的存在性。为此, 令 $\mathcal{W}$ 为次数 $\le m-2$ 的实多项式组成的 (有限维) 实线性空间. 定义线性映射

$$T:\mathcal{W}\to\mathcal{W},\ \ q\mapsto\Delta((1-|z|^2)q).$$

如果 $T(q)=0$, 则 $(1-|z|^2)q$ 为调和函数. 它在 $\partial\mathbb{D}$ 上取值为 0. 由极值原理, 在 $\mathbb{D}$ 上 $(1-|z|^2)q=0$, 因此 $q=0$. 这说明 T 是单

射. 由线性代数知识, 同维数线性空间之间的线性单射必为同构, 特别地, 也是满射. 因此, 存在唯一 $q \in \mathcal{W}$ 满足 $T(q) = -\Delta p$.

最后, 因 $P_{p|_{\partial\mathbb{D}}}(z)$ 与 $(1-|z|^2)q(x,y)+p(x,y)$ 都在 $\mathbb{D}$ 上调和, 在 $\partial\mathbb{D}$ 上取值相同. 由 Dirichlet 问题解的唯一性可知, 在 $\mathbb{D}$ 上 $P_{p|_{\partial\mathbb{D}}}(z) = (1-|z|^2)q(x,y)+p(x,y)$. □

注 1. 定理26.4说明: 任给次数为 $m \geq 2$ 的多项式, 存在唯一次数 $\leq m-2$ 的多项式 q, 使 $(1-|z|^2)q(x,y)+p(x,y)$ 调和.

注 2. 对 $\partial\mathbb{D}$ 上的复值连续函数, 也可定义 Poisson 积分, 此积分为调和映射. 同样的方法可证, 定理26.4对复多项式亦成立.

26.5 Harnack vs Schwarz

调和函数理论与全纯函数的理论互相平行. 本节说明全纯函数的 Schwarz 引理与调和函数的 Harnack 不等式等价.

Harnack 不等式: 假设 u 是 $\mathbb{D}$ 上的正值调和函数, 对任意 $z \in \mathbb{D}$, 成立

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}u(0) \leq u(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}u(0).$$

Schwarz 引理: 假设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, $f(0) = 0$. 则

$$|f(z)| \leq |z|, \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

等号对某一点 $z_0 \neq 0$ 成立当且仅当 $f(z) = e^{i\theta}z$.

命题 26.3. Harnack 不等式 $\Longleftrightarrow$ Schwarz 引理.

证明: (Schwarz $\Longrightarrow$ Harnack) 假设 u 是 $\mathbb{D}$ 上的正值调和函数. 它可表示为某全纯函数 $f = u + iv : \mathbb{D} \to \mathbb{H}_R$ 的实部, 其中 $\mathbb{H}_R = \{z; \mathrm{Re}(z) > 0\}$ 为右半平面. 用 $v - v(0)$ 取代 v, 不妨假设 $v(0) = 0$, 此时 $f(0) = u(0) > 0$. 定义函数

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f(z) + f(0)},$$

显然 $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯, $g(0) = 0$. 对 g 应用 Schwarz 引理

$$\left|\frac{u(z) - u(0)}{u(z) + u(0)}\right| \leq \left|\frac{u(z) - u(0) + iv(z)}{u(z) + u(0) + iv(z)}\right| = |g(z)| \leq |z|.$$

上式用到了初等不等式

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+c}, 0 < a < b, c \geq 0. \text{ 等号成立} \Longleftrightarrow c = 0.$$

由此可得 Harnack 不等式

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}u(0) \le u(z) \le \frac{1+|z|}{1-|z|}u(0).$$

以上证明的优点是, 可给出等号成立的充要条件. 事实上, 如果上式对某个 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ 成立, 逆推可得

$$\frac{f(z)-f(0)}{f(z)+f(0)} = e^{i\theta}z,\ v(z_0)=0,$$

这里 $\theta \in \mathbb{R}$. 由此可得

$$f(z) = \frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z}u(0) = \frac{1-|z|^2+2i\mathrm{Im}(e^{i\theta}z)}{|1-e^{i\theta}z|^2}u(0).$$

结合条件 $v(z_0)=0$ 可得 $e^{i\theta} = \pm e^{-i\theta_0}$. 因此

$$u(z) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta_0} \mp z|^2}u(0),\ v(z) = \frac{\pm 2\mathrm{Im}(e^{-i\theta_0}z)}{|e^{i\theta_0} \mp z|^2}u(0).$$

(Harnack $\Longrightarrow$ Schwarz) 假设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯, 满足 $f(0)=0$, 下面利用 Harnack 不等式证明 $|f(z)| \le |z|$. 为此, 只需对任意取定的点 z_0 证明即可, 通过复合旋转, 不妨假设 $f(z_0)\in[0,1]$.

显然分式线性变换

$$T(w) = \frac{1+w}{1-w}$$

将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映为右半平面 $\mathbb{H}_R$, 满足 $T(0)=1$. $g(z)=T(f(z))$ 将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映为右半平面 $\mathbb{H}_R$. 记 $u=\mathrm{Re}(g)$, 则 u 是 $\mathbb{D}$ 上的正值调和函数, 满足 $u(0)=1$. 利用 Harnack 不等式

$$u(z_0) = \frac{1+f(z_0)}{1-f(z_0)} \le \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

上式等价于 $f(z_0)\le|z_0|$, 即得 Schwarz 引理. □

26.6 Schwarz 公式的应用

假设 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, 实部为 u, 由 Schwarz 积分公式给出

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \overline{f(0)},\ z\in\mathbb{D}.$$

如果假设 f 在 $\overline{D(0,R)}$ 上全纯, 通过变量代换, 容易验证

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \overline{f(0)},\ z\in D(0,R).$$

上式即为 Cauchy 型积分. 对任意 $n \geq 1$, 成立

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

由积分基本不等式,

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\pi}\int_{|\zeta|=R} \left|\frac{u(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\right| |d\zeta| \leq n! \cdot \frac{2\|u\|_{\partial D(0,R)}}{R^n}. \tag{26.4}$$

上式是 Cauchy 不等式的一个较强的形式。

命题 26.4. (调和函数的 Liouville 型定理) 假设 u 在复平面上调和. 如果存在 $C > 0$, 整数 $m \geq 1$, 使得

$$|u(z)| \leq C(1 + |z|^m),\ \forall z \in \mathbb{C},$$

则 u 是关于 x, y 的次数不超过 m 的多项式.

证明: 因复平面单连通, 故 u 是某整函数 f 的实部. 由(26.4)式, 当 $n > m$ 时,

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \cdot \frac{2\|u\|_{D(0,R)}}{R^n} \leq \frac{C_0}{R^{n-m}}.$$

上式右端当 $R \to +\infty$ 时, 趋于 0. 因此, $f^{(n)}(0) = 0, \forall n > m$. 这说明 f 是次数不超过 m 的多项式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

因此 u 也是关于 $z, \bar{z}$(或者 x, y) 的次数不超过 m 的多项式. □

26.7 习题

“美丽有两种, 一是深刻而动人的方程, 一是你泛着倦意淡淡的笑容。”

—-ukim, Heroes in My Heart

1. (Harnack 不等式的应用) 假设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 全纯, 证明

$$\max_{|z|=1/5} |f(z)|^2 \leq \min_{|z|=1/7} |f(z)|,\ \min_{|z|=1/5} |f(z)| \geq \max_{|z|=1/7} |f(z)|^2.$$

(提示: 对 $u(z) = -\log|f(z)|$ 应用 Harnack 不等式.)

2. (调和函数的 Liouville 型定理) 假设 u 是平面上的调和函数, 满足当 $|z|$ 很大时, $|u(z)| = O(\log|z|)$. 按照如下两种方法, 证明 u 为常数.

(1). 假设 f 是以 u 为实部的整函数, 通过对 $F = e^f$ 应用全纯函数的 Liouville 定理证明结论.

(2). 利用平均值公式

$$u(a) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{D(a,R)} u(z) dxdy$$

通过估计 $u(a) - u(0)$ 来证明结论.

3. (Schwarz 引理的应用) u 在 $\mathbb{D}$ 上非负调和, $u(0) = 1$.

(1). 求 $u(1/2)$ 的最大值和最小值.

(2). 当 $u(1/2)$ 达到极值时, 求出 u 的表达式.

4. (跳跃定理) 给定连续函数 $g : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, 定义 Cauchy 积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ |z| \neq 1.$$

证明对任意 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, 成立

$$\lim_{|z|<1, z\to\zeta} \big(f(z) - f(1/\bar{z})\big) = g(\zeta).$$

5. (可去奇点定理的应用) 假设 u 是 $\mathbb{D}$ 上的调和函数.

(1). 定义函数

$$v(w) = \sum_{z^n = w} u(z).$$

利用调和函数的可去奇点定理证明 v 在 $\mathbb{D}$ 上调和.

(2). 如果 $u > 0$ 且满足 n-重旋转对称性: $u(e^{2\pi i/n} z) = u(z)$. 证明强 Harnack 不等式

$$\frac{1 - |z|^n}{1 + |z|^n} u(0) \leq u(z) \leq \frac{1 + |z|^n}{1 - |z|^n} u(0).$$

(3). 请用 Schwarz 引理证明 (2) 中的不等式.

6. (Liouville 型定理的应用) 假设 u 是 $\mathbb{C}$ 上的调和函数, 满足

$$|u(z)| \leq |x + y|,\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C};\ u(i) = 1/2,$$

求 u 的表达式.

7. (Schwarz 公式的应用) 给定全纯函数列 $f_n = u_n + iv_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, 满足实部 $u_n : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ 内闭一致收敛, 且 $\{v_n(0)\}_{n\geq 1}$ 是 Cauchy 列. 证明 f_n 内闭一致收敛.