第一讲　Fourier 变换

设 d 是正整数, 对欧氏空间 $\mathbb{R}^d$, 这一讲我们引入 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 与 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 函数的 Fourier 变换的定义, 介绍它的重要性质, 并分析其成为调和分析核心工具的一些原因.

一　$L^1(\mathbb{R}^d)$ 上的 Fourier 变换

定义1. 设 $u(x)\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 称函数 $\mathcal{F}(u)(y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}u(x)\,\mathrm{d}x$ 为其 *Fourier* 变换, 简记为 $\hat{u}(y)$; 称 $\mathcal{F}^{-1}(u)(y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y}u(x)\,\mathrm{d}x$ 为其 *Fourier* 逆变换, 简记为 $\check{u}(y)$.

注意定义中 $x\cdot y$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中两个向量 x, y 的内积. 由于 $u\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 上述积分是绝对收敛的, 从而定义合理. 此外不难看出 $\|\hat{u}\|_{L^\infty}\le\|u\|_{L^1}$, 即 Fourier (逆)变换是 L^1 到 L^∞ 的有界线性算子. 下面我们还将看到 $\hat{u}$ 其实是一致连续的且在无穷远衰减到零的函数. 为熟悉定义, 先看一个重要的例子.

例1. 对任意 $t>0$, 成立 $(\mathrm{e}^{-t|y|^2})^\wedge(x)=(\frac{1}{2t})^{\frac{d}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

证明. 1. 对任意 $b>0$, $a\in\mathbb{R}$, 首先计算 $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax-bx^2}\,\mathrm{d}x$. 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax-bx^2}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^{\frac{-a^2}{4b}}\int_{\Gamma=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}z=\frac{-a}{2\sqrt{b}}\right\}}\frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{\sqrt{b}}\,\mathrm{d}z \qquad \left(z=\sqrt{b}x-\frac{\mathrm{i}a}{2\sqrt{b}}\right)\\ &= \mathrm{e}^{\frac{-a^2}{4b}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{\sqrt{b}} \qquad (\text{全纯函数的 Cauchy 积分定理})\\ &= \mathrm{e}^{\frac{-a^2}{4b}}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

2. 从而, 对任意 $t>0$, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y-t|y|^2}\,\mathrm{d}y=\prod_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_jy_j-ty_j^2}\,\mathrm{d}y_j=\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{d}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

由此利用定义, (在上式中将 x 换作 $-x$,) 即知 $(\mathrm{e}^{-t|y|^2})^\wedge(x)=\left(\frac{1}{2t}\right)^{\frac{d}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. □

下面的定理将在用 Fourier 分析方法证明 Sobolev 嵌入定理等结论时起重要作用.

定理1. 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $\hat{f}$ 和 $\check{f}$ 都是 $\mathbb{R}^d$ 上的一致连续的函数.

证明. 根据等式

$$\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\cdot y}-1\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\,\mathrm{d}y,$$

成立 (也可以用 Lebesgue 控制收敛定理直接证明 $h\to 0$ 时上式极限为零)

$$\begin{aligned}|\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)| &\le c_d\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\cdot y}-1|\,\mathrm{d}y\\ &\le C\int_{|y|\le r}|f(y)||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\cdot y}-1|\,\mathrm{d}y+2C\int_{|y|>r}|f(y)|\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 可取 r 充分大使得第二项小于 ε; 对这样取定的 r, 再令 $|h|$ 充分小, 就可以使 $\mathrm{C}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\cdot y}-1|\le\varepsilon$; 注意这里 $|h|$ 的大小与 x 无关. 从而我们得到 $|\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)|\le(1+\|f\|_{L^1})\varepsilon$. 这就证明了 $\hat{f}$ 一致连续. 对 $\check{f}$ 的证明完全相同. □

定理2 (Riemann-Lebesgue 引理). 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi)=0$ 且 $\lim_{|\xi|\to 0}\check{f}(\xi)=0$.

证明. 逼近思想. 1. 对一元函数 $f(x)=\chi_{[a,b]}(x)$, 它是闭区间 $[a,\,b]$ 的特征函数, 直接计算就得到

$$\widehat{\chi_{[a,\,b]}}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}}{-\mathrm{i}\xi},$$

所以结论成立.

2. 利用 Fourier 变换变量分离的特性, 若 $f(x)=\prod_{j=1}^{d}\chi_{[a_j,\,b_j]}(x)\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 那么

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\prod_{j=1}^{d}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_j\xi_j}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a_j\xi_j}}{-\mathrm{i}\xi_j},$$

所以结论依然成立 (在 $|\xi|\to\infty$ 过程中某个分量 $\xi_j=0$ 的话, 利用洛必达法则, 此项是个有界量, 不影响结论成立). 特别地, 定理结论对简单函数 g (有限个方体的特征函数的线性组合) 仍然成立.

3. 由实变函数知识, 对任意给定的 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在简单函数 g 使得 $\|f-g\|_{L^1}\le\varepsilon$, 从而

$$|\hat{f}(\xi)|\le|(\widehat{f-g})(\xi)|+|\hat{g}(\xi)|\le\|f-g\|_{L^1}+|\hat{g}(\xi)|\le\varepsilon+|\hat{g}(\xi)|.$$

于是就有 $\limsup_{|\xi|\to\infty}|\hat{f}(\xi)|\le\varepsilon$. 利用 ε 的任意小性即得所证. 对 Fourier 逆变换可类似证明. □

二 Plancherel 定理及 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上 Fourier 变换

定理3 (Plancherel 定理). 设 $u\in L^1\bigcap L^2(\mathbb{R}^d)$, 则 $\hat{u},\ \check{u}\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 并且成立等式 $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

证明. 以下第1步至第4步是证明此重要定理的核心思想; 其他步骤所包含的内容是一些常见的分析技巧.

1. 若 $v\ ,w\in L^1\bigcap L^2(\mathbb{R}^d)$, 则成立

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\hat{w}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}w(y)\hat{v}(y)\,\mathrm{d}y.} \tag{1.1}$$

事实上, 由于 $v,\ w\in L^1$, 从而 $\hat{v},\ \hat{w}\in L^\infty$, 所以上式两边积分有意义; 利用 Fubini 定理, 得

$$\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\hat{w}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\int_{\mathbb{R}^d}w(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}w(y)\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}w(y)\hat{v}(y)\,\mathrm{d}y.$$

以下证明的关键就是选取特殊的函数 v 和 w: v 选取为 Gauss 核, w 的选取与 u 有关.

2. 令 $v_\epsilon(x)=\mathrm{e}^{-\epsilon|x|^2}$ $(\epsilon>0)$. 利用例 1, $(v_\epsilon)^\wedge(y)=(\frac{1}{2\epsilon})^{\frac{d}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}}$. 代入 (1.1), 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}\hat{w}(x)\mathrm{e}^{-\epsilon|x|^2}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}w(y)\mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}y. \tag{1.2}$$

3. 对定理中给定的 $u(x)$, 令 $v(x)=\bar{u}(-x),\ w(y)=(u*v)(y)=\int_{\mathbb{R}^d}u(y-x)v(x)\,\mathrm{d}x$, 则成立以下事实 (待证, 读下面证明时请注意这些性质用在何处!)

1) $w(x)\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$; 2) $w(x)$ 连续; 3) $\hat{w}=(2\pi)^{\frac{d}{2}}\hat{u}\hat{v}$.

利用定义不难发现

$$\hat{v}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\bar{u}(-y)\,\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\overline{\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}u(y)\,\mathrm{d}y}=\overline{\hat{u}(x)},$$

所以由 3) 得到, $\hat{w}=(2\pi)^{\frac{d}{2}}\hat{u}\bar{\hat{u}}=(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\hat{u}|^2$.

4. 将上述表达式代入 (1.2), 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{u}(x)|^2\mathrm{e}^{-\epsilon|x|^2}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4\pi\epsilon}\right)^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}w(x)\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\epsilon\to0$, 左边由 Levi 定理, 利用被积函数的非负性及关于 ϵ 的单调性, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{u}(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{\epsilon\to0}|\hat{u}(x)|^2\mathrm{e}^{-\epsilon|x|^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{u}(x)|^2\mathrm{e}^{-\epsilon|x|^2}\,\mathrm{d}x.$$

右边利用逼近恒等的性质，成立

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon}\right)^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} w(x)\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x = w(0), \qquad (\text{待证}) \tag{1.3}$$

而 $w(0)=\int_{\mathbb{R}^d}u(-y)v(y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}u(-y)\bar{u}(-y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}u(y)\bar{u}(y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}|u|^2\,\mathrm{d}y=\|u\|_{L^2}^2$. 所以, $\|\hat{u}\|_{L^2}=\|u\|_{L^2}$. 类似可对 Fourier 逆变换给出相应证明.

5. 下面证明第 3 步 1) 式. 首先, 利用积分的平移不变性和 Fubini 定理, 对u, $v\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 成立

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)v(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right|\\
\le&\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)v(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\
\le&\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\,u(x-y)\,||\,v(y)\,|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
\le&\int_{\mathbb{R}^d}|\,v(y)\,|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\,u(x-y)\,|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
\le&\|\,u\,\|_{L^1}\|\,v\,\|_{L^1},
\end{aligned}$$

从而得到如下基本的卷积不等式:

$$\|u*v\|_{L^1}\le\|u\|_{L^1}\|v\|_{L^1}\,. \tag{1.4}$$

为证明 $w\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, 需要用到 $u\in L^2$ 的条件. 利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
|\,w(x)\,| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)\overline{u}(-y)\,\mathrm{d}y\right|\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^d}|\,u(x-y)\,|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\,\overline{u}(-y)\,|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|\,u\,\|_{L^2}^2, \ (\text{这里使用了积分的平移不变性})
\end{aligned}$$

从而 $\|w\|_{L^\infty}\le\|u\|_{L^2}^2$.

6. 下面证明第 3 步 2) 式, 使用的是常见的逼近思想. 首先考虑 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 的情形, 此时利用 Lagrange 中值定理, 显然 w 是连续的. 再考虑一般情形. 由于 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ 中是稠密的, 故 $\forall u\in L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d)$, $\exists u_k\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 使得 $u_k\to u$ (依 L^2 范数收敛). 特别地, 存在与 k 无关的常数 C 使得 $\|u_k\|_{L^2}\le C$. 定义 $w_k(x)=\int_{\mathbb{R}^d}u_k(x-y)\bar{u}_k(-y)\,\mathrm{d}y$, 那么对几乎所有

x, 成立

$$\begin{aligned}
|w_k(x)-w(x)| &\leq \Big|\int_{\mathbb{R}^d}|u_k(x-y)-u(x-y)||\overline{u}(-y)|\mathrm{d}y \\
&\qquad +\int_{\mathbb{R}^d}u_k(x-y)(\bar{u}_k(-y)-\bar{u}(-y))\,\mathrm{d}y\Big| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_k(x-y)-u(x-y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\overline{u}(-y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad +\|u_k\|_{L^2}\|u_k-u\|_{L^2} \\
&\leq (\|u_k\|_{L^2}+\|u\|_{L^2})\|u_k-u\|_{L^2}\leq C'\|u_k-u\|_{L^2},
\end{aligned}$$

其中常数 C' 与 k 无关. 这表明连续函数列 $\{w_k\}$ 一致收敛到 w, 于是 w 是连续函数.

第 3) 式是 Fourier 变换的一个重要性质的应用, 将在下面定理 4 中予以证明.

7. 最后证明 (1.3) 式. 这里体现了依据被积函数不同地点不同形态对积分加以分解研究的基本方法. 首先, 通过换元法不难验证

$$\frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x=1,$$

从而只需证明 [1]

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon}\right)^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}|w(x)-w(0)|\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x=0.$$

为此, 利用 $w(x)$ 在 $x=0$ 的连续性, 对任意 $\delta>0$, 存在 $R>0$ 使得当 $|x|\leq R$ 时 $|w(x)-w(0)|\leq\delta$. 那么

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{4\pi\epsilon})^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}|w(x)-w(0)|\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x \\
=\;&(\frac{1}{4\pi\epsilon})^{\frac{d}{2}}\int_{|x|\leq R}|w(x)-w(0)|\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x+(\frac{1}{4\pi\epsilon})^{\frac{d}{2}}\int_{|x|\geq R}|w(x)-w(0)|\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x \\
\leq\;&\delta(\frac{1}{4\pi\epsilon})^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x+2\|w\|_{L^\infty}(\frac{1}{4\pi\epsilon})^{\frac{d}{2}}\int_{|x|\geq R}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x \\
\leq\;&\delta+2\|w\|_{L^\infty}(\frac{1}{\pi})^{\frac{d}{2}}\int_{|y|\geq R/(2\sqrt{\epsilon})}\mathrm{e}^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

现取 $\epsilon\to 0$, 第二项收敛于零; 则由 δ 的任意性, 即得所证. □

---

[1] 该式左边就是 $\frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}|w(\sqrt{4\varepsilon}y)-w(0)|\mathrm{e}^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y$, 利用 w 有界以及 $\mathrm{e}^{-|y|^2}$ 可积, 以及 $\varepsilon\to 0$ 时 $w(\sqrt{4\varepsilon}y)-w(0)$ 点态收敛到零, 根据 Lebesgue 控制收敛定理也可直接得到结论.

Plancherel 定理说明 Fourier 变换 $\mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \subset L^2 \to L^2$ 是算子范数为 1 的有界线性算子. 由于 $L^1 \cap L^2$ 在 L^2 中稠密, 由 Banach 稠定有界线性算子保范延拓定理, 可对任意 L^2 函数定义其 Fourier 变换, 且保持L^2范数不变: $\|\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$. 类似可定义 L^2 上 Fourier 逆变换, 它也是保范的.

三 Fourier 变换的基本性质

定理4. *以下设* $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

1) Fourier 变换保持 L^2 内积: $\int_{\mathbb{R}^d} u\bar{v}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\bar{\hat{v}}\,\mathrm{d}x$;

2) 若 $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *(其中 α 是多重指标), 则* $\widehat{D^\alpha u} = (\mathrm{i}y)^\alpha \hat{u}(y)$;

3) 设 $u, v \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, *则* $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{u}\hat{v}$;

4) $(\hat{u})^\vee = u$.

注意, 对多重指标$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$, $y = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, 有$(\mathrm{i}y)^\alpha = (\mathrm{i}y_1)^{\alpha_1} \cdots (\mathrm{i}y_d)^{\alpha_d}$.

性质 4) 实际上说明了 Fourier 变换是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的保距同构, 而 Plancherel 定理也可视作勾股定理的一种推广. 性质 2)是使 Fourier 变换极为重要的原因. 一方面, 它表明 Fourier 变换可以把超越 (涉及极限) 的微分运算化为频率空间内的代数运算 (乘法), 从而可以在微局部下通过代数工具较灵活而简单地研究偏微分算子; 另一方面, 也可看出函数的 (导数的) 光滑性体现在其 Fourier 变换在高频 ($|y|$ 充分大时) 的衰减性. 由于衰减性比光滑性简单, 所以可以利用 Fourier 变换较精细且简洁地研究函数的光滑性及函数空间的构造. 此外, 很多情形下一个性质较差的函数的 Fourier 变换往往比较光滑, 所以研究其 Fourier 变换相较原来的函数往往要容易些. 这些都是 Fourier 变换在偏微分方程研究中具有极其重要作用的原因.

证明. 1. Fourier 变换 $\mathcal{F}$ 是 Hilbert 空间 L^2 上的保距有界算子, 则由泛函分析结论 (极化恒等式), 它自然要保内积, 即 $(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v)_{L^2} = (u, v)_{L^2}$, 从而性质 1) 得证.

2. 用逼近的思想证明 2). 首先设 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 分部积分得到

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha u}(y) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}D^\alpha u(x)\mathrm{d}x\\ &= (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} D_x^\alpha(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y})u(x)\mathrm{d}x\\ &= (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}(-\mathrm{i}y)^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}u(x)\mathrm{d}x\\ &= (\mathrm{i}y)^\alpha(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}u(x)\mathrm{d}x\\ &= (\mathrm{i}y)^\alpha\hat{u}(y).\end{aligned}$$

然后逼近: 对任意满足 $D^\alpha u\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 的 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的函数 u, 通过标准的磨光算子就可以找到一族函数 $u_k\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 使得 $u_k\xrightarrow{L^2}u$, $D^\alpha u_k\xrightarrow{L^2}D^\alpha u$. 利用 Fourier 变换保 L^2 范数的性质, 就有$\mathcal{F}u_k\xrightarrow{L^2}\mathcal{F}u$, $\mathcal{F}(D^\alpha u_k)\xrightarrow{L^2}\mathcal{F}(D^\alpha u)$. 通过取一个子列, 可设上述收敛还是几乎处处意义下成立的. 从而将已证上式应用于 u_k 并两边取极限 $k\to\infty$ 即可.

3. 由于 $(u*v)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y$, 直接计算得到

$$\begin{aligned}\widehat{u*v}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}u(x-y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}v(y)\,\mathrm{d}y\\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi).\end{aligned}$$

4. 下面证明 4). 首先, 对 $u,\ v\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 成立如下公式

$$\int_{\mathbb{R}^d}\check{u}(x)v(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\check{v}(y)u(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1.5}$$

此式当 $u,\ v\in L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ 时与第 1 步证明 (1) 一样可直接按 Fourier 变换的定义验证. 对 $u,\ v\in L^2$, 则存在 $\{u_k\}$, $\{v_k\}\subset L^1\cap L^2$ 使得当 $k\to\infty$ 时按 L^2 范数 $u_k\to u$, $v_k\to v$. 利用 Fourier 逆变换保 L^2 范数及 Hölder 不等式, 就得到 $\int_{\mathbb{R}^d}\check{u}_k(x)v_k(x)\,\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^d}\check{u}(x)v(x)\,\mathrm{d}x$. 由此就可以证明 (1.5).

其次, 我们有

$$\check{v}(y)=\overline{(\overline{v})^\wedge}(y).$$

对 $v\in L^1$ 情形这可直接验证:

$$右边 = \overline{(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\overline{v}(x)\mathrm{d}x}=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y}v(x)\,\mathrm{d}x=\check{v}(y)=左边.$$

一般情形通过逼近即可得到. 结合上述两公式, 我们得到 $\forall v \in L^2$ 成立

$$\int \hat{u}^{\vee} v \, \mathrm{d}x = \int \hat{u} \check{v} \, \mathrm{d}x = \int \hat{u} \, \overline{(\overline{v})^{\wedge}} \, \mathrm{d}x = \int u \, \overline{\overline{v}} \, \mathrm{d}x = \int u v \, \mathrm{d}x.$$

这里第三个等号用到了 Fourier 变换保内积性质 1). 于是由 v 的任意性知 $\hat{u}^{\vee} = u$. 证毕. □

四 应用举例

Fourier 变换的应用主要表现在两个方面: 1) 得到解的表达式; 2) 利用 Plancherel 定理得到解的 L^2 范数的估计式 (能量不等式). 后一点在非线性问题的研究中尤为重要, 将在第二讲中举例介绍. 这里我们只看一个求出解表达式的简单例子.

例2. *求全空间内椭圆型方程* $-\triangle u + u = f$ *的解的表达式, 其中* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

解. 对函数 u, 就空间变量作 Fourier 变换得到 $|y|^2 \hat{u} + \hat{u} = \hat{f}$, 从而 $\hat{u} = \frac{\hat{f}}{1+|y|^2}$. 若 $\hat{B} = \frac{1}{1+|y|^2}$, 则有 $u = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} B * f$. 求出 B 往往是问题的难点. 下面形式地予以计算.

注意到 $\forall \alpha > 0$ 成立 $\frac{1}{\alpha} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{d}t$. 取 $\alpha = 1 + |y|^2$, 则 $\frac{1}{1+|y|^2} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(1+|y|^2)} \, \mathrm{d}t$, 从而可算得 Bessel 位势 B 为

$$\begin{aligned} B &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+|y|^2}\right) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|y|^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y} \, \mathrm{d}y \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \mathrm{e}^{-t|y|^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y} \, \mathrm{d}t \mathrm{d}y \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y - t|y|^2} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} \, \mathrm{d}t = 2^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty t^{-\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-t-\frac{|x|^2}{4t}} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□

五 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^d)$

利用 Fourier 变换的性质, 可以方便地定义任意阶的 (非齐次) Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^d)$. 这类空间本身是作为求解众多偏微分方程的工作空间而引入的, 也是理解其它更复杂空间 (如下节将遇到的加权 Sobolev 空间) 的基础.

定义2. 设 $0 < s < \infty$，且 $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. 定义 $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ 当且仅当 $(1+|\xi|^s)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$，其范数为

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \left\|(1+|\xi|^s)\hat{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

可以证明 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 是 Hilbert 空间; 它的内积可如下给定:

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = ((1+|\xi|^s)^{\frac{1}{2}}\hat{u},\ (1+|\xi|^s)^{\frac{1}{2}}\hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

下面的命题说明 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 确实可看作经典 Sobolev 空间 $W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ 的一种推广. 我们回忆，按定义，$u \in W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$ 当且仅当 u 及其直到 k 阶的弱导数 $D^\alpha u$ $(|\alpha| \le k)$ 均是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 函数，且 $\|u\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{2}}$.

命题1. 对 $k = 1, 2, \ldots$，$H^k(\mathbb{R}^d) = W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$.

证明. 只需证 $u \in L^2$ 是 $W^{k,2}$ 中函数当且仅当 $(1+|\xi|^k)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$，即 $u \in H^k$.

1. 首先设 $u \in W^{k,2}$，则 $\forall |\alpha| \le k$，$D^\alpha u \in L^2$，而对 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$，成立

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}(\xi).$$

通过逼近可知此式对 $u \in W^{k,2}$ 也成立. [2] 于是得知 $(\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2$, $\forall |\alpha| \le k$. 特别地, 对 $0 \le l \le k$, 利用 $|\xi|^{2l} \le C \sum_{|\beta|=l} |\xi^\beta|^2$ 和 Plancherel 定理，就得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2l} |\hat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \le C \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\beta=l} |\xi^\beta|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |D^l u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

利用 $l = 0$ 和 $l = k$ 两式，就有

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^k)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \le C \|u\|^2_{W^{k,2}},$$

即 $u \in H^k$ 且 $\|u\|_{H^k} \le C\|u\|_{W^{k,2}}$.

2. 反之，设 $u \in H^k$，则对 $|\alpha| \le k$,

$$\|(\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)\|^2_{L^2} \le \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2|\alpha|} |\hat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \le C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^k)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < \infty. \tag{1.6}$$

[2] 设 $u_k \in C_0^\infty$ 满足 $u_k \to u$ $(W^{k,2})$，则 $\widehat{u_k} \to \hat{u}$ (L^2), 于是有子列 $\widehat{u_{k_j}} \to \hat{u}$ a.e. 又由 $D^\alpha u_k \to D^\alpha u$ (L^2) 知 $(\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{u_k} = \widehat{D^\alpha u_k} \to \widehat{D^\alpha u}$ (L^2)，从而有子列，不妨仍设为 u_{k_j}，使得 $(\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{u_{k_j}} \to \widehat{D^\alpha u}$ a.e. 于是利用几乎处处收敛极限的唯一性，得到 $(\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u} = \widehat{D^\alpha u}$.

置 $u_\alpha := \mathcal{F}^{-1}[((\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}(\xi))]$, 则上式说明了 $u_\alpha \in L^2$.

下面证明 u_α 在弱导数意义下就是 $D^\alpha u$. 事实上, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 确实成立

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} (D^\alpha \varphi)\,\bar{u}\,\mathrm{d}x = \int \widehat{D^\alpha \varphi}\,\bar{\hat{u}}\,\mathrm{d}\xi = \int (\mathrm{i}\xi)^\alpha\,\hat{\varphi}\,\bar{\hat{u}}\,\mathrm{d}\xi \\
= \ &(-1)^{|\alpha|} \int \hat{\varphi}\,\overline{(\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}}\,\mathrm{d}\xi = (-1)^{|\alpha|} \int \hat{\varphi}\,\overline{\widehat{u_\alpha}}\,\mathrm{d}\xi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\,\overline{u_\alpha}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

从 (1.6) 我们还得到 $\|D^\alpha u\|_{L^2} \le C\|u\|_{H^k}$, 于是 $\|u\|_{W^{k,2}} \le C\|u\|_{H^k}$. 证毕. □

注记. 我们已经讲了 Fourier 变换有很多优点, 但它也有两个较为明显的缺点: 第一, 只能在全空间、周期区域 (环面) 等具有特殊对称性的区域上定义 Fourier 变换;[3] 第二, 很难用来处理非 L^2 空间上的估计.

---

[3] Fourier 变换的基本思想是通过代表元的组合来表示函数. 代表元的存在要求底空间具有某些群作用下不变的性质, 从而要求区域具有某些特殊的对称性质.

第二讲　能量积分，Lopatinskii 条件，微局部对称化子的构造与 L^2 估计

这一讲主要通过研究实例说明利用 Fourier 变换在微局部观点下得到偏微分方程问题解的 L^2 估计的方法. 我们首先回顾经典的能量积分方法, 分析其优点与不足; 然后引入调和分析方法予以更精确的分析: 以双曲型方程组初边值问题稳定性的 Kreiss–Lopatinskii 条件为例介绍规范模式分析方法 (Normal Modes Analysis); 再就一个具体实例较为详细地介绍如何将问题微局部化并利用线性代数和复变函数知识构造对称化子; 然后利用单位分解、齐次扩张和 Plancherel 定理得出 L^2 估计. 这些清晰地体现了 Fourier 变换的巨大威力, 以及调和分析研究问题非常精细深入的特点.

一　能量积分方法: 对称双曲组及强耗散边界条件

能量积分方法肇源与物理启发, 其数学上的基本思想是假设未知函数 U 具有良好性质 (如具紧致支集的光滑函数), 通过在方程组两边同时乘以 U (或 U 的函数), 在恰当的区域上积分并通过分部积分和方程组的特性配平导数, 得到关于 U 或其导数的某个正定的表达式; 利用此类表达式作为范数引入函数空间, 并利用性质较好函数在其中的稠密性通过算子延拓或泛函延拓得到一般情形的 L^2 估计.

作为例子, 我们考察一阶线性偏微分方程组的边值问题:

$$LU \doteq A_0\partial_t U + \sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha \partial_\alpha U + DU = f, \quad t\in\mathbb{R},\ x=(y',x_d),\ \ x_d>0,\ y'\in\mathbb{R}^{d-1}, \tag{2.1}$$

$$BU = g, \quad t\in\mathbb{R},\ x=(y',x_d),\ \ x_d=0,\ y'\in\mathbb{R}^{d-1}, \tag{2.2}$$

其中 A_j $(j=0,1,\cdots,d)$ 和 D 是 $n\times n$ 矩阵, U 为未知 n 维向量值函数. 不失一般性, 通过减去一个特殊向量函数, 我们可假设 $g=0$.

方程 (2.1) 两边同时与 U 作 $\mathbb{R}^n$ 的内积, 得到

$$(A_0\partial_t U, U) + \sum_{\alpha=1}^{d}(A_\alpha\partial_\alpha U, U) + (DU, U) = (f, U). \tag{2.3}$$

我们发现, 为了配平导数, 得到关于 U 对称的量, 必须把导数扔到系数上去; 为此**必须要求 A_α ($\alpha=0,\cdots,d$) 是对称矩阵.** 在此条件下成立

$$\begin{aligned}\partial_\alpha(A_\alpha U,U) &= (A_\alpha\partial_\alpha U,U)+(A_\alpha U,\partial_\alpha U)+((\partial_\alpha A_\alpha)U,U)\\ &= (A_\alpha\partial_\alpha U,U)+(U,A_\alpha\partial_\alpha U)+((\partial_\alpha A_\alpha)U,U)\\ &= 2(A_\alpha\partial_\alpha U,U)+((\partial_\alpha A_\alpha)U,U).\end{aligned}$$

这里由于出现了 A_α 的偏导数, 故此处及以下需 假设 $A_\alpha\in W^{1,\infty}$. 于是 (2.3) 变为 ($\partial_0=\partial_t$)

$$\sum_{\alpha=0}^{d}\partial_\alpha(A_\alpha U,U)-\Big((\sum_{\alpha=0}^{d}\partial_\alpha A_\alpha)U,U\Big)+\Big((D+D^T)U,U\Big)=2(f,U),$$

将其在 $\Omega=\{x_d>0\}$ 上积分, 利用 $U\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的假设, 就得到

$$\boxed{-\int_{\mathbb{R}^{d-1}}(A_dU,U)|_{x_d=0}\,\mathrm{d}y+\int_\Omega(PU,U)\,\mathrm{d}x=2\int_\Omega(f,U)\,\mathrm{d}x,}\tag{2.4}$$

其中

$$P=D+D^T-\sum_{\alpha=0}^{d}\partial_\alpha A_\alpha$$

是对称矩阵.

我们希望 (2.4) 左边是非负的, 那么必要条件就是: 1) P 是 Ω 上的正定矩阵 ($P\ge\lambda I_n$, $\lambda>0$); 2) 在 $\ker B$ 上 $(A_dU,U)\le 0$. 由此就须自然地引入 $L^2(\Omega)$ 空间, 并对右端应用 Cauchy–Schwarz 不等式得到

$$\lambda\|U\|^2_{L^2(\Omega)}\le 2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|U\|_{L^2(\Omega)},$$

即能量估计

$$\|U\|_{L^2(\Omega)}\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

以此为基础发展的理论称为 正对称方程组理论 , 它可以用来研究许多混合型方程的边值问题.

现在, 如果我们仅知道 A_0 是正定的, 那么一般来说不可能得到 P 是正定的, 似乎上面的能量积分方法就会失效. 但这时一个重要的技巧 "加权" 可以帮助我们度过难关. 令 $\gamma\ge 1$ 是待定的正的常数, 并置

$$\boxed{\tilde{U}=\mathrm{e}^{-\gamma t}U,}$$

则 $\tilde{U}$ 满足如下边值问题:

$$L\tilde{U} \doteq A_0\partial_t\tilde{U} + \sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha\partial_\alpha\tilde{U} + (D+\gamma A_0)\tilde{U} = \mathrm{e}^{-\gamma t}f, \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{2.5}$$

$$B\tilde{U} = 0, \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{2.6}$$

其相应矩阵 $\tilde{P} \doteq 2\gamma A_0 + P$, 从而选取 γ 充分大, 只要 A_0 正定, 就可以保证 $\tilde{P}$ 正定: $\tilde{P} \geq \gamma I_n$.

定义1 (对称双曲组). 称一阶偏微分方程组 (2.1) 是对称双曲型的, 如果 A_α $(\alpha = 0, \cdots, d)$ 均为对称阵, 且 A_0 是正定的.

与上述关于方程的性质相配合, 为了得到估计, 还需要边界条件的帮助. 我们称边界矩阵 B 是**弱耗散**的, 若在 $\ker B$ 上二次型 $(A_dU, U) \leq 0$ (半负定). 此时可以得到关于 U 的如下加权估计: 存在 γ_0 及 $C > 0$, 使得当参数 $\gamma \geq \gamma_0$ 时成立

$$\gamma\left\|\tilde{U}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\gamma}\left\|\mathrm{e}^{-\gamma t}f\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma}{2}\left\|\tilde{U}\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

即

$$\gamma\|U\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} \leq \frac{4}{\gamma}\|f\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)}. \tag{2.7}$$

这里我们自然地引入加权空间 $L^2_\gamma(\Omega) \doteq \left\{u: \|u\|_{L^2_\gamma(\Omega)} \doteq \left\|\mathrm{e}^{-\gamma t}u\right\|_{L^2(\Omega)} < \infty\right\}$.

习题 1. 证明 $L^2_\gamma(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间. □

为了求解含自由边界的非线性问题, 我们往往需要得到 U 在边界上的估计. 这就要求如下的 **强耗散** 边界条件: (A_dU, U) 在 $\ker B$ 上除在 $\ker A_d$ 之外必须严格负定. [1] 这相当于要求存在正的常数 C 和 ε 使得二次型 $w \mapsto \varepsilon|A_dw|^2 + (A_dw, w) - C|Bw|^2$ 半负定且仅在 $\ker A_d$ 上为零. [2] 假如边界条件确实是强耗散的, 由 (2.4) 我们就有 边界估计

$$\varepsilon\int_{x_d=0}|A_d\tilde{U}|^2\,\mathrm{d}y \leq C\left(\frac{1}{\gamma}\left\|\mathrm{e}^{-\gamma t}f\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\mathrm{e}^{-\gamma t}g\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}\right). \tag{2.8}$$

[1] 一般双曲组初边值问题适定的一个要求是 $\ker A_d \subset \ker B$.

[2] 证明. 必要性. 由于 $\ker A_d \subset \ker B$, 这里定义的双线性型 $\mathcal{B}(u, v) = \varepsilon(A_du, A_dv) + (A_du, v) - C(Bu, Bv)$ 在 $\ker A_d$ 上为零. 注意到 A_d 是对称的, 所以有正交直和分解 $\mathbb{R}^n = \mathrm{R}(A_d)\bigoplus^\top \ker A_d$. 设 $w = w_r + w_k$, 其中 $w_r \in \mathrm{R}(A_d)$, $w_k \in \ker A_d$, 那么 $\mathcal{B}(w, w) = \mathcal{B}(w_r, w_r)$. 我们只需证明存在 ϵ 和 C 使得 $B(w, w)$ 在 $\mathrm{R}(A_d)$ 上严格负定. 这里记号 $\mathrm{R}(A_d)$ 指 A_d 的像集.

反证法. 假设上述断言不对, 那么存在序列 $\{w_m\}$, $w_m \in \mathrm{R}(A_d)$, $|w_m| = 1$ 使得 $\frac{1}{m}|A_dw_m|^2 + (A_dw_m, w_m) \geq m|Bw_m| \geq 0$. 注意根据线性映射同态基本定理, A_d是$\mathrm{R}(A_d) = \mathbb{R}^n/\ker(A_d) \to \mathrm{R}(A_d)$的同构, 所以在$\mathrm{R}(A_d)$上$A_d$

综合上述回顾,我们发现普通的能量积分方法有如下优点:它适用于变系数的线性方程组 (要求系数属于 $W^{1,\infty}$); 但其缺点也很明显: 要求方程组对称, 而且边界条件强耗散. 特别是后一点, 很多物理问题都不满足. 这就需要发展更精细的分析方法: 调和分析方法.

二 Kreiss–Lopatinskii 条件

我们利用规范模式分析 (Normal modes analysisi) 方法推导出双曲型方程组初边值问题满足稳定性要求的一个必要条件: Kreiss-Lopatinskii 条件. 由于类似 (2.7)(2.8) 的估计必然隐含着解对非齐次项 f 和 g 的 (某种) 稳定性, 所以 Kreiss-Lopatinskii 条件也是得到能量估计的必要条件. 所谓规范模式分析方法, 本质就是利用分离变量等手段获得问题的一些有意义的特解的方法. 这些特解对于理解物理现象及一般理论的发展都有着重要的启发或借鉴意义.

1. 双曲性

考虑边值问题 (2.1)(2.2). 由于即使一般情形仍总需假设 A_0 非奇异, 从而不失一般性, 以下都设 $A_0 = I_n$.

定义2 (双曲性)**.** 称一阶方程组

$$\partial_t U + \sum_{\alpha=1}^{d} A^\alpha \partial_\alpha U + DU = f \tag{2.9}$$

是双曲型的, 若

$$A(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{d} A^\alpha \xi_\alpha, \qquad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_d)$$

关于 ξ 可一致对角化, 且特征值均为实数:

$$A(\xi) = P(\xi)^{-1}\mathrm{diag}(\rho_1, \cdots, \rho_n)P(\xi), \quad \rho_j \in \mathbb{R};$$

$$\|P(\xi)\|\left\|P(\xi)^{-1}\right\| < C, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

可逆, 于是 $\mathrm{R}(A_d)$ 是闭集, 从而由于 $\{w_m\}$ 是紧的, 不失一般性, 设 $w_m \to w$ $(m \to \infty)$, 则 $w \in \mathrm{R}(A_d)$. 又显然 $w \in \ker B$, $|w| = 1$, 而且 $(A_d w, w) \geq 0$, 与强耗散的假设矛盾!

充分性: 显然.

该定义来源于对许多具体数学物理方程 (Maxwell 方程组, 可压缩 Euler 方程组等) 的性质的抽象和 Fourier 分析 (形如 $e^{i(t\lambda - x\cdot\xi)}a$ 的行波解的存在性). 所以线性双曲型方程适合用调和分析方法研究.

以下都需要假设 A^α 是常数矩阵. 对变系数情形需要拟微分算子或仿微分算子工具.

2. 基本思想

推导 Kreiss–Lopatinskkii (K-L) 条件的思想如下: 对 $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\tau \in \mathbb{C}$, 考察 (2.9) 当 $D = 0$, $f = 0$ 时如下形式的特殊解

$$\boxed{U(x,\, t) \doteq \exp(\tau t + \mathrm{i}\eta \cdot y) U(x_d).} \tag{2.10}$$

我们的目的是要找到充分条件以保证存在破坏稳定性的如上形式的解, 即形如 (2.10) 的关于时间变量 $t > 0$ 指数增长, 关于空间变量快速衰减到零的特解. 这就要求

$$\gamma = \mathrm{Re}\tau > 0. \tag{2.11}$$

一旦我们找到这种条件, 其反面就是边值问题 (2.1)(2.2) 稳定的必要条件, 即 K -L 条件.

将 (2.10) 代入方程 (2.9) (其中 $D = 0 = f$), 就得到

$$A^d \frac{\mathrm{d}U(x_d)}{\mathrm{d}x_d} + (\tau I_n + \mathrm{i}A(\eta))U(x_d) = 0,$$

其中 $A(\eta) = \sum_{\alpha=1}^{d-1} A^\alpha \eta_\alpha$. 为简单起见, 下面我们仅就边界 $\{x_d = 0\}$ 非特征的情形, 即 $\det A_d \neq 0$ 的情形加以推导. 置

$$\boxed{\mathcal{A}(\tau,\eta) \doteq -(A^d)^{-1}(\tau I_n + \mathrm{i}A(\eta)),}$$

上式就是以 τ,η 为参数的自治线性常微分方程组 (ODE)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U(x_d)}{\mathrm{d}x_d} = \mathcal{A}(\tau,\, \eta)U.} \tag{2.12}$$

3. 破坏稳定性特解的构造

引理1. 设算子 $\partial_t + \sum_\alpha A^\alpha \partial_\alpha$ 是双曲型的, 则 $\forall \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\mathrm{Re}\tau > 0$, 矩阵 $\mathcal{A}(\tau,\eta)$ 没有纯虚数的特征值; 其稳定的特征值 (即实部为负数的特征值) 的个数 (按重数计算) 等于 A^d 的正特征值的个数.

证明. 1. 设 ω 是 $\mathcal{A}(\tau,\eta)$ 的纯虚数特征值, 即 $P(\omega;\tau,\eta)=\det(\omega I_n-\mathcal{A}(\tau,\eta))=0$, 则 ω 满足 $\det(\tau I_n+\mathrm{i}A(\eta)+\omega A^d)=0$. 由双曲型的定义, τ 必须是纯虚数, 与假设 $\mathrm{Re}\tau>0$ 矛盾.

2. 由于多项式 $P(\cdot\,;\,\tau,\,\eta)$ 光滑地依赖于 $\tau,\,\eta$, 则它的根也连续依赖于 $(\tau,\,\eta)$ [3], 从而利用 $\{\mathrm{Re}\tau>0\}\times\mathbb{R}^{d-1}$ 的连通性, 具正 (负) 实部根的个数不会变化. 取 $\tau=1,\,\eta=0$, 则 $\mathcal{A}=-(A^d)^{-1}$, 可知 $\mathcal{A}(\tau,\,\eta)$ 的负实部特征根个数就是 A^d 正特征值的个数. □

由上述引理, 可得空间 $\mathbb{C}^n$ 的如下直和分解

$$\mathbb{C}^n=E_-(\tau,\eta)\bigoplus E_+(\tau,\eta),\quad \mathrm{Re}\tau>0,\,\eta\in\mathbb{R}^{d-1},$$

其中 $E_\pm(\tau,\eta)$ 分别为 $\mathcal{A}(\tau,\,\eta)$ 的稳定/不稳定子空间 (实部为负/正的特征值对应的特征向量和广义特征向量张成的子空间), 它们均为 $\mathcal{A}(\tau,\,\eta)$ 的不变子空间. 记 $\pi_\pm(\tau,\,\eta)$ 分别为上述分解确定的 $\mathbb{C}^n$ 到 $E_\pm(\tau,\,\eta)$ 的投影算子, 那么 $\pi\mathcal{A}=\mathcal{A}\pi$. 又记 $U_\pm(x_d)=\pi_\pm(\tau,\,\eta)U(x_d)$, 则 ODE (2.12) 相应分解为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_d}U_\pm=\mathcal{A}U_\pm$, 解分别为

$$U_\pm(x_d)=\exp\Big(x_d\mathcal{A}\tau,\,\eta)\Big)U_\pm(0),$$

而 $U=U_-+U_+$. 注意到除非 $U_+(0)=0$, 否则 $U_+(x_d)$ 将在 $x_d\to\infty$ 时指数增长; 而 $U_-(x_d)$ 在 $x_d\to\infty$ 时总是指数衰减到零. 由于我们要求的破坏稳定性的特解在空间方向要衰减, 所以我们取 $U_+(0)=0$, 即 $U(0)\in E_-(\tau,\,\eta)$. 另一方面, 考虑 (2.10) 要满足齐次边界条件 $BU|_{x_d=0}=0$, 那么 $U(0)\in\ker B$. 所以如果存在 $\mathrm{Re}\tau>0,\,\eta\in\mathbb{R}^{d-1}$ 使得 $\ker B\cap E_-(\tau,\,\eta)$ 含有非零向量, 那末我们就可构造出所希望的特解. 后文会解释这种特解必然导致 Hardmard 不稳定性. 所以我们得到了如下 K-L 条件.

定义3 (K-L条件)**.** *称双曲型方程组边值问题 (2.1)(2.2) 满足 K-L 条件, 若 $\forall\mathrm{Re}\tau>0,\,\eta\in\mathbb{R}^{d-1}$, 都成立*

$$\boxed{\ker B\cap E_-(\tau,\,\eta)=\{0\}.}\tag{2.13}$$

上述定义是几何化的, 不便于计算. 为此, 设 $e_-^1(\tau,\,\eta),\cdots,e_-^p(\tau,\,\eta)$ 是 $E_-(\tau,\,\eta)$ 的一组基

[3] 见 [21] 第 26 页, Theorem 3.9.1.

(由引理 1, 这组基存在, 其中参数 $\mathrm{Re}\tau>0,\ \eta\in\mathbb{R}^{d-1}$). 引入 Lopatinskii 行列式[4]

$$\boxed{\Delta(\tau,\eta)=\det(Be_-^1(\tau,\eta),\cdots,Be_-^p(\tau,\eta)),}$$

则 K-L 条件相当于要求 $\Delta(\tau,\eta)$ 在 $\mathrm{Re}\tau>0,\ \eta\in\mathbb{R}^{d-1}$ 上没有零点. 进一步, 若 $\Delta(\tau,\eta)$ 在闭集 $\mathrm{Re}\tau\geq 0,\ \eta\in\mathbb{R}^{d-1}$ 上都没有零点, 则称一致 K-L 条件成立.

4. Hölder 空间中 Hadamard 不稳定性: 尺度变换

对特解 (2.10), 利用微分算子关于 t, x 都只含一阶导数的特点, 我们做伸缩变换, 得到一族函数

$$u^\lambda(x,t)=u(\lambda x,\lambda t)=\mathrm{e}^{\lambda\tau t+\mathrm{i}\lambda\eta\cdot y}u(\lambda x_d),\quad \lambda>0;$$

它们仍然满足方程 (2.9) (其中 $D=f=0$), 以及同样的边界条件

$$Bu^\lambda(x,t)|_{x_d=0}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t+\lambda\eta\cdot y}B(u(0))=0;$$

但是初始条件为

$$u^\lambda(x,0)=\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{i}\eta\cdot y}U(\lambda x_d).$$

可以看出当 $\lambda\to\infty$ 时初值在 Hölder 空间 $C^k(\mathbb{R}_+)$ 中范数 $\|u^\lambda(x,0)\|_{C_x^k}\sim O(\lambda^k)$ 至多为多项式增长. 然而, 对于任何固定的 $t>0$, 解 $u^\lambda(x,t)=\mathrm{e}^{\tau\lambda t}\cdot\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{i}\eta\cdot y}U(\lambda x_d)$ 在任何空间 $C^k(\mathbb{R}_+)$ 中关于 λ 都是指数增长的. 所以不可能通过初值的任何 Hölder 范数来控制 $u(x,t)$ 的某个 Hölder 范数. 这也就表明了该边值问题至少在 Hölder 空间框架下是不稳定的. 可以证明在 Sobolev 空间框架下它仍不稳定. 所以我们说 K-L 条件是边值问题稳定 (能得到估计) 的必要条件. 后面我们会看到, 它在某种程度上讲也是一种充分条件.

三 例：超音速排气管附近的涡面的线性稳定性分析

我们通过一个具体例子来展示如何利用 Fourier 变换得到双曲型方程边值问题的能量估计. 这里介绍的思路对于解决其它问题, 建立一般理论也具有借鉴和启发意义.[5]

[4]这里 p 是 A_d 正特征值的个数. 通过分析进入 Ω 的特征的个数, 可以说明, 边界条件的矩阵 B 的秩必须是 p, 边值问题的解才有可能存在、唯一, 所以这里计算的是一个$p\times p$矩阵的行列式.

[5]本节及以下都是选读内容.

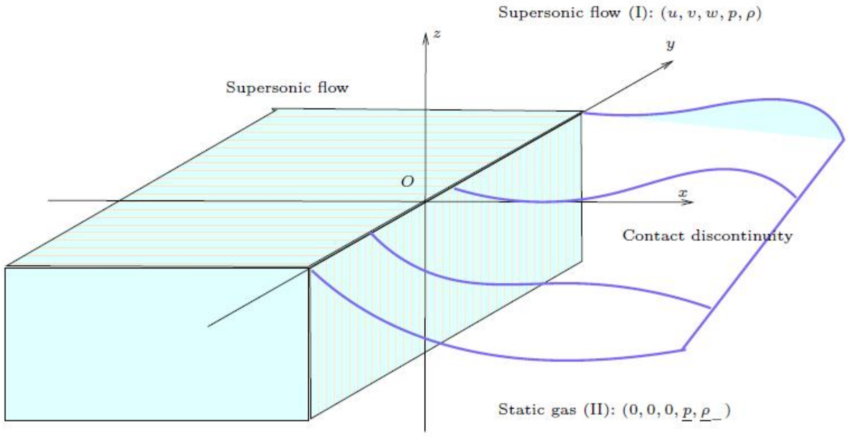

图 2.1 接触间断(涡与熵层)曲面将其上面的超音速气流与下方的静止气体分隔开来.

1. 稳态可压缩 Euler 方程组

我们考虑的问题是气体动力学中超音速排气管附近的涡面的线性稳定性分析 (见图 2.1). 这里气体运动的控制方程是如下三维定常可压缩 Euler 方程组:

$$
\begin{cases}
(\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0, \\
(\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0, \\
(\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y + (\rho uw)_z = 0, \\
(\rho wu)_x + (\rho wv)_y + (\rho w^2 + p)_z = 0, \\
(\rho uE)_x + (\rho vE)_y + (\rho wE)_z = 0,
\end{cases}
$$

其中 $E \doteq \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + \frac{\gamma'}{\gamma'-1} \cdot \frac{p}{\rho}$, $\gamma' > 1$ 是常数 (对空气约为 1.4). 这里未知量 (u, v, w) 是气体流速, p 是气体压强 ,ρ 是气体密度, 状态方程是 $p = A(s)\rho^{\gamma'}$, 其中 s 是熵, 而函数 $A(s) \doteq \exp(\frac{s}{c_v})$. 音速定义为 $c \doteq \sqrt{\gamma' p/\rho}$.

对于经典解, 当不出现真空时, 上述 Euler 方程组可写为如下对称形式

$$
A_1(u)\partial_x U + A_2(u)\partial_y U + A_3 \partial_z U = 0,
$$

其中$U = (u, v, w, p, s)^\top$,

$$A_1(u) = \begin{pmatrix} \rho u & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{u}{\rho c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},\quad A_2(u) = \begin{pmatrix} \rho v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{v}{\rho c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$A_3(u) = \begin{pmatrix} \rho w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{w}{\rho c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

注意上述矩阵中不同元素可能具有不同量纲, 所以在以后计算中不能任意地做矩阵乘法或求特征值对角化—必须要保证具有相同量纲的量才能相加. 故用数学理论研究这类物理问题时常需要将其无量纲化.

习题 2. *若流体沿 x 轴为超音速流, 即 $u > c > 0$, 则上述 Euler 方程组是对称双曲组.* □

2. 非线性自由边界问题

如图 2.1 所示, 我们考虑区域 $\{x > 0\}$ 中气体的运动. 设涡面 (自由边界) 的方程为 $z = \psi(x, y)$ ($\psi(0, y) \equiv 0$), 则待求解的区域是 $\left\{x \geq 0,\ z \geq \psi(x, y)\right\}$, 在其中要解得函数 U 使得 Euler 方程组 (在适当意义下) 成立. 它有两个边界. 由于假设气体沿 x 轴方向为超音速的 ($u > c$), 所以在 $\{x = 0, z \geq 0\}$ 上应该给初值条件, 即 (u, v, w, p, s) 都给定. 在自由边界上需要两个条件, 即两侧压强相等, $p = \underline{p}$, 以及沿自由边界气体法向速度为零, 即 $(\psi_x, \psi_y, -1)(u, v, w) = 0$, 或者 $u\psi_x + v\psi_y = w$. 这就是非线性自由边界问题的提法. 这个问题有一个特解 $(\underline{U}, \psi \equiv 0)$, 其中超音速流是均匀的, 即由常向量 $\underline{U} \doteq (\underline{u}, \underline{v}, 0, \underline{p}, \underline{\rho}_+)$ 给定, 而静止气体状态由常向量$(0, 0, 0, \underline{p}, \underline{\rho}_-)$ 给定; 涡面就是平面 $\{x > 0, z = 0\}$. 下文中这个特解也被称作背景解.

3. 常系数线性化问题

为了解决求解区域不确定的困难, 可以通过类似 $z - \psi(x, y) \mapsto z$ 之类的坐标变换将区

域化为 $\{x>0,\ z>0\}$, 而自由边界就固定为 $\{z=0,\ x>0\}$. 然后在背景解处线性化, 并利用初边值条件所应满足的相容性条件构造近似解, 利用近似解化简, 就会得到以下常系数线性边值问题:

$$\begin{cases} A_1(\underline{U})\partial_x\dot{U}+A_2(\underline{U})\partial_y\dot{U}+A_3(\underline{U})\partial_z\dot{U}=f, & z>0,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}, \\ \dot{p}=\underline{p}, & z=0, \end{cases} \tag{2.14}$$

其中 $\dot{U}$ 为未知函数, 代表气流状态的小扰动. 扰动的自由边界 $\dot{\psi}$ 的方程为

$$\underline{u}\dot{\psi}+\underline{v}\dot{\psi}=\dot{w}|_{z=0}.$$

这是一个输运方程, 其初值条件为 $\dot{\psi}(0,\ y)=0$.

习题 3. 验证边值问题 (2.14) 中边界 $\{z=0\}$ 是特征边界, 其边界条件是弱耗散但不强耗散的. ($\ker B=\{\dot{p}=0\}$, $(A_3(\underline{U})\dot{U},\ \dot{U})=2\dot{p}\dot{w}$ 在 $\ker B$ 上负定但不严格负定.) □

由此可知我们不能指望普通的能量积分方法告诉我们 $\dot{w}|_{z=0}$ 的估计, 而这个估计却是求解 $\dot{\psi}$ 必需的.[6] 下文我们将介绍如何利用调和分析在微局部下逐点构造对称化子得到能量估计的方法解决这一困难. 不过首先我们需要计算 K-L 条件. 下面习题给出了验证 K-L 条件是否成立的一个快速算法. 以后我们会看到 K-L 条件成立可以帮助我们构造微局部的对称化子.

习题 4. 将 $\dot{U}(x,\ t)=\mathrm{e}^{\tau\cdot x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\cdot y}\mathrm{e}^{\lambda z}\dot{U}$ 代入 (2.14), 其中 $\mathrm{Re}\tau>0$, $\mathrm{Re}\lambda<0$, $\dot{U}$ 是常向量, 计算 Lapatinskii 行列式并检验 K-L 条件是否成立. □

为书写简单, 以下我们把 $\underline{U}$ 就写为 U.

四 微局部化与对称化子的构造及能量估计

这一节的目的, 就是在 $\dot{U}\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^3)$ 的假设下, 对问题 (2.14) 给出 $\dot{p}$, $\dot{w}$ 在 $z=0$ 处的 L^2 估计. [7]所用方法是通过 Fourier变换将问题代数化, 在频率空间逐点构造对称化子, 通过 ODE 能量积分及 Plancherel 定理得出可能的估计式.

[6]不排除对某些物理问题可能存在不同的数学描述和转化方式, 例如通过未知量的变换, 得到其它形式的对称双曲组, 而对应边界条件还是强耗散的.

[7]一般说来, 一旦对这样的函数得到估计, 利用稠密性和逼近就可以得到更广泛的函数所必须满足的估计式. 所以一开始仅对光滑函数作估计具有一般意义.

1. 常系数线性问题的无量纲化和 $A_3(U)$ 对角化

线性问题 (2.14) 来自于物理问题, 所以不同的量可能有不同的量纲. 例如矩阵

$$A_3(U)=\begin{pmatrix} \underline{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underline{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0} \end{pmatrix},$$

虽然对角线上的数值均为零, 但是量纲却不完全相同, 而且与其它非对角线元素相比量纲也不同. 如果把 A_3 当作没有量纲的纯数字矩阵进行矩阵运算, 就可能会出现不同量纲量相加的错误, 必然得到错误的结论.[8] 所以对物理问题研究起初就要特别注意量纲及无量纲化的问题. 这也是在下面对 A_3 对角化时矩阵选取要注意的地方. 此外, 在将 $A_3(U)$ 对角化的同时, 应保持相应 $A_1(U)$ 仍然对称正定.

为此, 令 $\dot{U}=PV,\ V$ 为新未知量, 同时在方程两边左乘 Q. 这里选取

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & c & 0 \\ 0 & 0 & \gamma' p & -\gamma' p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma' p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma' p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{\gamma' p} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{\gamma' p} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2c} & \frac{1}{2\gamma' p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2\gamma' p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[8]从数学上讲, 原因是只有具有相同量纲的数的加法运算才有意义; 所以具有不同量纲的数并不关于加法和乘法构成一个环; 而矩阵运算只有元素所在集合是数域才有意义. 关于量纲的这一点在线性代数教学中强调得不够.

若记 $V = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)^\top$, 则

$$\begin{cases} V_1 = \dot{u}, \\ V_2 = \dot{v}, \\ V_3 = \dfrac{\dot{w}}{2c} + \dfrac{\dot{p}}{2\gamma' p}, \\ V_4 = \dfrac{\dot{w}}{2c} - \dfrac{\dot{p}}{2\gamma' p}, \\ V_5 = \dot{s}, \end{cases}$$

而 (2.14) 就转化为

$$\begin{cases} B_1(U)\partial_x V + B_2(U)\partial_y V + B_3(U)\partial_z V = Qf, & z > 0, \\ \beta V^{\mathrm{nc}} = \dfrac{g}{\gamma' p}, & z = 0, \end{cases}$$

其中 $\beta = (1, -1)$, $V^{\mathrm{nc}} = (V_3, V_4)^\top$, 而

$$B_1(U) = QA_1(U)P = \begin{pmatrix} \frac{u}{c^2} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{u}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$B_2(U) = QA_2(U)P = \begin{pmatrix} \frac{v}{c^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{c^2} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2v & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$B_2(U) = QA_2(U)P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 加权

对参数 $\gamma > 0$, 令 $\tilde{V} \doteq \mathrm{e}^{-\gamma x}V$, 则有

$$\begin{cases} \gamma B_1(U)\tilde{V} + B_1(U)\partial_x\tilde{V} + B_2(U)\partial_y\tilde{V} + B_3(U)\partial_z\tilde{V} = \mathrm{e}^{-\gamma x}Qf, & z > 0, \\ \beta\tilde{V}^{\mathrm{nc}} = \mathrm{e}^{-\gamma x}\dfrac{g}{\gamma' p}, & z = 0. \end{cases}$$

注意这里 γ' 就是绝热指数, 是个固定的正数. 现在的关键 (目标) 就是估计 $\tilde{V}^{\mathrm{nc}}\big|_{z=0}$.

为此, 我们只需考虑 $f = 0$ 的情形. 事实上, 考虑辅助问题

$$\begin{cases} \gamma B_1(U)\tilde{V}' + B_1(U)\partial_x\tilde{V}' + B_2(U)\partial_y\tilde{V}' + B_3(U)\partial_z\tilde{V}' = \mathrm{e}^{-\gamma x}Qf, & z > 0, \\ (0,0,1,0,0)\tilde{V}' = 0, & z = 0. \end{cases}$$

记 $B = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$, 从而 $\ker B = \{\tilde{V}'_3 = 0\}$, 则

$$(B_3\tilde{V}',\ \tilde{V}') = 2c({\tilde{V}'_3}^2 - {\tilde{V}'_4}^2) \ \text{在}\ \ker B\ \text{上负定},$$

所以上述问题满足强耗散条件. 由前节内容可知 $\tilde{V}'^{\mathrm{nc}}\big|_{z=0}$ 可由普通能量积分估计. 此时令 $\tilde{V}'' = \tilde{V} - \tilde{V}'$, 显然有: $\tilde{V}''^{nc}\big|_{z=0}$ 可估计 $\Rightarrow$ $\tilde{V}^{nc}\big|_{z=0}$ 可估计.

所以下面我们仅考虑问题：

$$\begin{cases} \gamma B_1(U)\tilde{V} + B_1(U)\partial_x\tilde{V} + B_2(U)\partial_y\tilde{V} + B_3(U)\partial_z\tilde{V} = 0, & z > 0, \\ \beta\tilde{V}^{nc} = h, & z = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

3. Fourier 变换 $\longrightarrow$ ODE + 代数方程

对问题 (2.15), 由于假设 $\dot{U}$ 是紧支光滑的, 可对 $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ 做 Fourier 变换. 记 $\mathcal{F}_{x\to\delta,\ y\to\eta}(\tilde{V}(x,\ y,\ z)) = \hat{V}(\delta,\ \eta,\ z)$ 和 $\mathcal{F}(g) = \hat{g}$, 方程变为

$$(\gamma + \mathrm{i}\delta)B_1(U)\hat{V} + \mathrm{i}\eta B_2(U)\hat{V} + B_3(U)\frac{\mathrm{d}\hat{V}}{\mathrm{d}z} = 0.$$

令 $\tau = \gamma + \mathrm{i}\delta$, 其中 $\gamma > 0$, 则得到以 $(\tau,\ \delta)$ 为参数的方程

$$\begin{cases} B_3(U)\dfrac{\mathrm{d}\hat{V}}{\mathrm{d}z} + (\tau B_1(U) + i\eta B_2(U))\hat{V} = 0 & z > 0, \\ \beta\hat{V}^{nc} = \hat{h} & z = 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

这里 $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\tau > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$. 由于 B_3 奇异, 这是一个 ODE 和代数方程耦合的系统.

4. 代数方程与 ODE 解耦

直接将(2.16)展开, 利用

$$\tau B_1(U)+\mathrm{i}\eta B_2(U)=\begin{pmatrix} \dfrac{u\tau+\mathrm{i}v\eta}{c^2} & 0 & \tau & -\tau & 0 \\ 0 & \dfrac{u\tau+\mathrm{i}v\eta}{c^2} & \mathrm{i}\eta & \mathrm{i}\eta & 0 \\ \tau & \mathrm{i}\eta & 2(u\tau+\mathrm{i}v\eta) & 0 & 0 \\ -\tau & -\mathrm{i}\eta & 0 & -2(u\tau+\mathrm{i}v\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u\tau+\mathrm{i}v\eta \end{pmatrix},$$

考虑一、二、五行, 可得代数方程部分

$$\begin{cases} (u\tau+\mathrm{i}v\eta)\hat{V}_1+\tau c^2(\hat{V}_3-\hat{V}_4) & =0, \\ (u\tau+\mathrm{i}v\eta)\hat{V}_2+\mathrm{i}\eta c^2(\hat{V}_3-\hat{V}_4) & =0, \\ (u\tau+\mathrm{i}v\eta)\hat{V}_5 & =0; \end{cases}$$

考虑三、四行, 可得 ODE 部分

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{V}_3}{\mathrm{d}z}+\dfrac{1}{2c}(\tau\hat{V}_1+\mathrm{i}\eta\hat{V}_2)+\dfrac{u\tau+\mathrm{i}v\eta}{c}\hat{V}_3 & =0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{V}_4}{\mathrm{d}z}+\dfrac{1}{2c}(\tau\hat{V}_1+\mathrm{i}\eta\hat{V}_2)-\dfrac{u\tau+\mathrm{i}v\eta}{c}\hat{V}_4 & =0. \end{cases}$$

由代数方程部分解出 $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ 代入 ODE 部分, 得出解耦的 ODE:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{V}^{\mathrm{nc}}}{\mathrm{d}z}=\mathcal{B}(\tau,\eta)\hat{V}^{nc}, & z>0, \\ \beta\hat{V}^{\mathrm{nc}}=\hat{h}, & z=0, \end{cases} \tag{2.17}$$

其中,

$$\mathcal{B}(\tau,\eta)=\begin{pmatrix} -a(\tau,\eta) & b(\tau,\eta) \\ -b(\tau,\eta) & a(\tau,\eta) \end{pmatrix},$$

$$a(\tau,\eta)=\frac{c}{2}\frac{\eta^2-\tau^2}{u\tau+\mathrm{i}v\eta}+\frac{u\tau+\mathrm{i}v\eta}{c}, \quad b(\tau,\eta)=\frac{c}{2}\frac{\eta^2-\tau^2}{u\tau+\mathrm{i}v\eta}.$$

不难看出问题 (2.17) 有如下特点: 1) 矩阵 $\mathcal{B}(\tau,\eta)$ 在 $u\tau+\mathrm{i}v\eta=0$ 处有一阶极点; 2) $\mathcal{B}(\tau,\eta)$ 关于 (τ,η) 正齐次一次, 即 $\mathcal{B}(t\tau,t\eta)=t\mathcal{B}(\tau,\eta)$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$. 后一性质使得我们可以在一个紧集 $\Sigma=\{(\tau,\eta):\ \tau\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\tau\ge 0,\ \eta\in\mathbb{R},\ |\tau|^2+|\eta|^2=1\}$ 上考虑常微分方程的能量估计问题.

5. Kreiss-Lopatinskii 条件

考察 ODE 问题 (2.17). 记 $E_-(\tau, \eta)$ 为 $\mathcal{B}(\tau, \eta)$ 的稳定子空间, $E_+(\tau, \eta)$ 为其不稳定子空间. 现需验证 K-L 条件：

$$\ker B \bigcap E_-(\tau,\eta) = \{0\}, \quad \forall \mathrm{Re}\tau > 0, \eta \in \mathbb{R}.$$

这等价于 Lopatinskii 行列式

$$\Delta(\tau,\eta) = \det(Be_-(\tau,\eta)) \neq 0,$$

其中 $e_-(\tau,\eta)$ 是 $E_-(\tau, \eta)$ 的基底.

为此先计算特征值. 考虑 $\det(\lambda I - \mathcal{B}(\tau, \eta)) = 0$ 得

$$\lambda^2 = (a+b)(a-b) = \eta^2 - \tau^2 + \frac{1}{c^2}(u\tau + \mathrm{i}v\eta)^2.$$

当 $\tau = 1, \eta = 0$ 时, $\lambda^2 = -1 + \left(\frac{u}{c}\right)^2 \Rightarrow \lambda_- = -\sqrt{\left(\frac{u}{c}\right)^2 - 1}$, $\lambda_+ = \sqrt{\left(\frac{u}{c}\right)^2 - 1}$. 故对于 $\mathrm{Re}\tau > 0$, 必有特征值$\lambda_\pm$, 满足 $\mathrm{Re}\lambda_- < 0$, 且 $\mathrm{Re}\lambda_+ > 0$.

记 r_- 为对应于 λ_- 的特征向量, 则

$$\begin{pmatrix} \lambda_- + a & -b \\ b & \lambda_- - a \end{pmatrix} r_- = 0 \Longrightarrow r_- = \begin{pmatrix} \lambda_- - a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow e_-(\tau,\eta) = r_- \cdot (u\tau + \mathrm{i}v\eta) = \begin{pmatrix} \lambda_-(u\tau + \mathrm{i}v\eta) - \frac{c}{2}(\eta^2 - \tau^2) - \frac{(u\tau + \mathrm{i}v\eta)^2}{c} \\ -\frac{c}{2}(\eta^2 - \tau^2) \end{pmatrix}.$$

同理可得, $e_+(\tau,\eta) = (u\tau + \mathrm{i}v\eta)\begin{pmatrix} b \\ \lambda_+ + a \end{pmatrix}$.

习题 5. 为什么不能取 $(b, \lambda_- + a)^\top$ 作为稳定子空间的基底？ □

因此,

$$\Delta(\tau, \eta) = \beta e_-(\tau, \eta) = \left(\lambda_- - \frac{u\tau + \mathrm{i}v\eta}{c}\right)(u\tau + \mathrm{i}v\eta).$$

若$\lambda_- = \dfrac{u\tau + \mathrm{i}v\eta}{c}$, 则

$$\frac{(u\tau + \mathrm{i}v\eta)^2}{c^2} = \lambda^2 = \eta^2 - \tau^2 + \frac{1}{c^2}(u\tau + \mathrm{i}v\eta)^2 \Rightarrow \eta^2 = \tau^2 \Rightarrow \tau = \pm|\eta|,$$

而$\mathrm{Re}\tau \geq 0$, 则$\tau = |\eta| \in \mathbb{R}^+$. 所以 $\mathrm{Re}\lambda_- = \dfrac{u\tau}{c} > 0$, 与假设 $\mathrm{Re}\lambda_- < 0$ 矛盾!

综上, 在去掉非零因子 $\lambda_- - \dfrac{u\tau + \mathrm{i}v\eta}{c}$ 后, 有以下结论:

1) Lopatinskii 行列式为 $\Delta(\tau, \eta) = u\tau + \mathrm{i}v\eta$;

2) Lopatinskii 条件成立, 即 $\mathrm{Re}\tau > 0$ 时 $\Delta(\tau, \eta) \neq 0$;

3) 一致 Lopatinskii 条件不成立: $\tau = -\dfrac{\mathrm{i}v\eta}{u}$ 是 $\Delta(\tau, \eta) = 0$ 的一阶零点. 后面将会看到, 这会导致能量估计含有一阶导数损失.

6. 微局部对称化子

本节要解决的问题是对 ODE

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{V}^{nc}}{\mathrm{d}z} = \mathcal{B}(\tau,\eta)\hat{V}^{nc}, & z > 0, \\ \beta\hat{V}^{nc} = \hat{h}, & z = 0 \end{cases}$$

得到 $\hat{V}^{nc}|_{z=0}$ 的估计. 这里 $\hat{V}^{nc} = \hat{V}^{nc}(z;\ \tau,\ \eta)$, $\beta = (1,\ -1)$, $\mathcal{B}(\tau,\ \eta) = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

定义4 (Kreiss 对称化子). 记紧集

$$\Sigma = \left\{(\tau,\ \eta)\ :\ \tau \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\tau) \geq 0,\ \eta \in \mathbb{R},\ |\tau|^2 + |\eta|^2 = 1\right\}.$$

设 $(\tau_0,\ \eta_0)$ 为 Σ 内给定一点, 若存在 $(\tau_0,\ \eta_0)$ 在 Σ 上的邻域 $\mathcal{V}$ 和 C^∞ 映射 $T,\ r$, 其中 $T: V \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $r: V \to \mathbb{H}_2(\mathbb{C})$ (二阶 *Hermite* 矩阵), 满足下列条件: $\exists$ 常数 $k,\ C > 0$ 使得

(1) $\forall(\tau,\ \eta) \in \mathcal{V}$, $\mathrm{Re}(r(\tau,\ \eta)\ T(\tau,\eta)\ \mathcal{B}(\tau,\eta)\ T^{-1}(\tau,\eta)) \geq k\gamma I_2$, 其中 $\gamma = \mathrm{Re}(\tau)$;

(2) $\forall(\tau,\eta) \in \mathcal{V}$, $r(\tau,\eta) + C(\beta T^{-1}(\tau,\eta))^*\ (\beta T^{-1}(\tau,\eta)) \geq I_2$,

则 称 $r(\tau,\ \eta)$ 为 $(\tau_0,\ \eta_0)$ 附近的一个 (局部) 对称化子.

下面分三种情形分别构造对称化子: ① (τ_0,η_0) 是 Σ 的内点; ② (τ_0,η_0) 是 Σ 的边界点但 $\Delta(\tau_0,\ \eta_0) \neq 0$; ③ (τ_0,η_0) 是 Σ 的边界点且 $\Delta(\tau_0,\ \eta_0) = 0$.

情形① 我们首先考虑内点的情形, 即 $(\tau_0,\ \eta_0)\in\Sigma$, $\mathrm{Re}(\tau_0)>0$. 可以找到 (τ_0,η_0) 的一个邻域 $\mathcal{V}$, 使得 $\forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}$,成立 $\mathrm{Re}(\tau)>0$.

第一步. 找到 $T(\tau,\ \eta)$ 使之将 $\mathcal{B}(\tau,\ \eta)$ 对角化.

如前所计算过的, 可令

$$e_-(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}\lambda_--a & -b\end{pmatrix}^T,\ e_+(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}b & \lambda_++a\end{pmatrix}^T,$$

以及 $T(\tau,\eta)=(e_-(\tau,\eta),\ e_+(\tau,\eta))^{-1}$, 则

$$T(\tau,\eta)\mathcal{B}(\tau,\eta)T(\tau,\eta)^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_-(\tau,\eta) & 0\\ 0 & \lambda_+(\tau,\eta)\end{pmatrix}.$$

由引理1, 我们可适当缩小 $\mathcal{V}$, 使得存在正的常数 k 满足如下要求: $\mathrm{Re}\lambda_-(\tau,\eta)<-k$, $\mathrm{Re}\lambda_+(\tau,\eta)>k$, $\forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}$.

第二步. 构造对称化子, 即 Hermite 阵 $r(\tau,\eta)$.

假设 $r=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & K\end{pmatrix}$, 其中 $K>0$ 为待定常数. 那么对任意 $K\geq 1$, 都有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(r(\tau,\eta)T(\tau,\eta)\mathcal{B}(\tau,\eta)T^{-1}(\tau,\eta)) &= \mathrm{Re}\begin{pmatrix}-\lambda_-(\tau,\eta) & \\ & K\lambda_(+)(\tau,\eta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\mathrm{Re}(\lambda_-(\tau,\eta)) & \\ & K\mathrm{Re}(\lambda_+(\tau,\eta))\end{pmatrix}\\ &\geq \begin{pmatrix}k & \\ & kK\end{pmatrix}\\ &\geq kI\geq k\gamma I.\qquad (0\leq\gamma\leq 1)\end{aligned}$$

下面只需验证要求 2).

为此, 我们需要利用 Lopatinskii 条件. 回忆 $\Delta(\tau,\eta)\neq 0\Longleftrightarrow \ker\beta\cap E_-(\tau,\eta)=\{0\}$, 且就目前问题, $\dim\ker\beta=1$, $\dim E_-(\tau,\eta)=1$, 于是

$$\ker\beta\oplus E_-(\tau,\eta)=\mathbb{C}^2.$$

从而由代数同态定理, $\beta:\ E_-(\tau,\eta)\longrightarrow\mathbb{C}$ 是同构映射. 在 $\mathbb{C}^2$ 的坐标变换 $\hat{W}=T\hat{V}^{\mathrm{nc}}$ 下 (由标准基底变为 $(e_-,\ e_+)$ 基底), $E_-(\tau,\eta)=(z_1,\ 0)^\top, E_+(\tau,\ \eta)=(0,\ z_2)^\top, z_1,z_2\in\mathbb{C}$, 而 β 变为 βT^{-1}. 利用这些性质, 考虑 $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 的线性变换 $P:\ Z=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\beta T^{-1}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}\\ z_2\end{pmatrix}$, 不难发现 P 是单射, 从而也是可逆的. 所以存在 $C_0>0$ 使得

$$|Z|^2\le C_0|PZ|^2\le C_0(|z_2|^2+|\beta T^{-1}Z|^2).$$

现对于 $C=2C_0,\ K=2C_0+1$, 利用上面这个不等式, 我们有

$$\begin{aligned}Z^*r(\tau,\eta)Z+C|\beta T^{-1}Z|^2 &\ge -|z_1|^2+(2C_0+1)|z_2|^2+2|Z|^2-2C_0|z_2|^2\\ &\ge |Z|^2.\end{aligned}$$

这也就是所希望的 $r(\tau,\eta)+C_0(\beta T^{-1}(\tau,\ \eta))^*(\beta T^{-1}(\tau,\eta))\ge I_2$.

情形② 我们再考虑 Lopatinskii 行列式不为零的那些边界点: $(\tau_0,\ \eta_0)\in\Sigma, \mathrm{Re}(\tau_0)=0, \Delta(\tau_0,\eta_0)\neq 0$.

对此我们须分三种情况讨论.

- $\eta_0^2+\delta_0^2>\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}$:
  这种情况下, $\lambda_\pm=\pm\sqrt{\eta_0^2+\delta_0^2-\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}}$, 所以 $\exists(\tau_0,\ \eta_0)$ 的邻域 $\mathcal{V}\subset\Sigma$ 及正数 k, 使得 $\forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}$, $\mathrm{Re}(\lambda_-)\le -k$, $\mathrm{Re}(\lambda_+)\ge k$. 这与 ①完全相同.

- $\eta_0^2+\delta_0^2=\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}$:
  这种情况下 $\lambda_\pm=0$, 矩阵 $\mathcal{B}(\tau,\eta)$ 不能对角化, 所以对称化子构造比较复杂, 我们略去详细过程 (见[23]).

- $\eta_0^2+\delta_0^2<\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}$:
  这种情况下, $\lambda=\pm\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}-\eta_0^2-\delta_0^2}$, 由于 $\lambda_\pm$ 互不相同, 局部地它们都是 $\tau=\gamma+\mathrm{i}\delta$

的全纯函数. 根据柯西–黎曼方程组, 我们有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda_-}{\partial r}\right|_{(\tau_0,\eta_0)} &= \left.\frac{\partial \mathrm{Im}\lambda_-}{\partial \delta}\right|_{(\tau_0,\eta_0)}\\ &= \pm\frac{\partial}{\partial\delta}\left.\sqrt{\frac{(u\delta+v\eta)^2}{c^2}-(\eta^2+\delta^2)}\right|_{\delta=\delta_0,\eta=\eta_0}\\ &= \pm\left.\frac{(u^2-c^2)\delta+uv\eta}{c^2\sqrt{\frac{(u\delta+v\eta)^2}{c^2}-(\eta^2+\delta^2)}}\right|_{\delta=\delta_0,\eta=\eta_0}.\end{aligned}$$

对此又有两种情形:

◇ $(u^2-c^2)\delta+uv\eta>0$, 于是 $\lambda_\pm=\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}-\eta_0^2-\delta_0^2}$;

◇ $(u^2-c^2)\delta+uv\eta<0$, 于是 $\lambda_\pm=\mp\mathrm{i}\sqrt{\frac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}-\eta_0^2-\delta_0^2}$.

容易计算此时不可能出现 $(u^2-c^2)\delta+uv\eta=0$, 所以总有 $\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_-}{\partial\gamma}|_{(\tau_0,\eta_0)}<0$. 类似计算得 $\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_+}{\partial\gamma}|_{(\tau_0,\eta_0)}>0$.

对 T, r 的构造同 ① 一样, 因为 $e_\pm$ 在 (τ_0,η_0) 的邻域内仍有定义;唯一区别在于得到

$$\mathrm{Re}(r(\tau,\eta)T(\tau,\eta)\mathcal{B}(\tau,\eta)T^{-1}(\tau,\eta)) = \begin{pmatrix}-\mathrm{Re}(\lambda_-(\tau,\eta)) & \\ & K\mathrm{Re}(\lambda_+(\tau,\eta))\end{pmatrix}$$

后, 要利用 $\frac{\partial\mathrm{Re}\lambda_\pm}{\partial\gamma}|_{(\tau_0,\eta_0)}\gtrless 0$, 那么在 (τ_0,η_0) 的小邻域内 $\mathrm{Re}\lambda_\pm|_{(\tau,\eta)}\gtrless\pm k\gamma$.

情形③ $(\tau_0,\eta_0)\in\Sigma$, $\mathrm{Re}(\tau_0)=0$, $\Delta(\tau_0,\eta_0)=0$.

注意到 $\mathcal{B}(\tau,\eta)$ 在 (τ_0,η_0) 的一个去心邻域内仍可对角化. 令 $m=u\tau+iv\eta$, 由于 $m^2(\lambda_--a)^2+m^2b^2=\frac{c^2(\eta_0^2+\delta_0^2)}{2}|_{(\tau_0,\eta_0)}\neq 0$, 则可定义 $T(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}m(\lambda_--a) & mb\\ -mb & (\lambda_--a)\end{pmatrix}^{-1}$, 它使得下式成立

$$T(\tau,\eta)B(\tau,\eta)T^{-1}(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}\lambda_-(\tau,\eta) & 2b(\tau,\eta)\\ 0 & \lambda_+(\tau,\eta)\end{pmatrix}.$$

由于 $\lambda_\pm(\mathrm{i}\delta_0,\eta_0)=\pm\sqrt{\eta_0^2+\delta_0^2}\in\mathbb{R}$ 互不相同, 所以在 (τ_0,η_0) 的小邻域 $\mathcal{V}$ 内 $\lambda_\pm$ 连续, 且存在正数 k 使得

$$\mathrm{Re}\lambda_-(\tau,\ \eta)<-k,\quad \mathrm{Re}\lambda_+(\tau,\eta)>k,\quad \forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}. \tag{2.18}$$

对这种情形我们不能构造对称化子, 将通过 ODE 积分利用边界条件直接得到估计.

7. 齐次扩张与 ODE 的能量估计

由上面的分析可知, 对 Σ 上每一个点都可以找到一个邻域 $\mathcal{V}$, 在其上构造对称化子或矩阵 T, 它们构成 Σ 的一个开覆盖. 由于 Σ 是紧集, 必存在有限子覆盖 $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_J\}$. 于是, 有从属于此有限子覆盖的单位分解 $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_J\}$, 其中 $0 \le \chi_j \le 1$, $\mathrm{supp}\chi_j \subset \mathcal{V}_j$, $\Sigma \subset \cup_{j=1}^J \mathcal{V}_j$, 且 $\sum \chi_j^2 = 1$.

记相应于 $\mathcal{V}_j$ 上的 r, T 分别为 r_j, T_j. 对 $r_j(\tau,\eta)$, $T_j(\tau,\eta)$, $\chi_j(\tau,\eta)$ 均作正齐次零次扩张, 使得它们定义在 $\mathrm{Re}\tau > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$ 上.

现在开始在 $\mathcal{V}_j$ 上作估计. 首先令 $W_j(z;\tau,\eta) = \chi_j(\tau,\eta)T_j(\tau,\eta)\hat{V}_j^{\mathrm{nc}}(z;\tau,\eta)$, 那么由 (2.17),

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}W_j(z;\tau,\eta)}{\mathrm{d}z} = T_j(\tau,\eta)\mathcal{B}(\tau,\eta)T_j(\tau,\eta)^{-1}W_j(z;\tau,\eta), & z > 0, \\ \beta T_j(\tau,\eta)^{-1}W_j(0;\tau,\eta) = \chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta), & z = 0. \end{cases}$$

对于 $\mathcal{V}_j$ 不是由极点所得邻域的情形, 利用对称化子性质,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(W_j^* r_j W_j) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(W_j^*) r_j W_j + W_j^* r_j \frac{\mathrm{d}W_j}{\mathrm{d}z} \\ &= W_j^*(T_j\mathcal{B}T_j^{-1})^* r_j Wj + W_j^* r_j T_j \mathcal{B} T_j^{-1} W_j \\ &= W_j^*(rjT_j\mathcal{B}T_j^{-1})^* Wj + W_j^* r_j T_j \mathcal{B} T_j^{-1} W_j \\ &= 2W_j^* \mathrm{Re}(r_jT_j\mathcal{B}T_j^{-1})W_j \\ &\ge 2k\gamma |W_j|^2. \end{aligned}$$

利用当 $z \to \infty$ 时 $W_j \to 0$ 的假设条件,

$$\begin{aligned} 2k\gamma \int_0^{+\infty} |W_j(z;\tau,\eta)|^2 \mathrm{d}z &\le \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(W_j^* r_j W_j)\mathrm{d}z \\ &= -(W_j^* r_j W_j)\Big|_{z=0} \\ &\le -|W_j|^2\Big|_{z=0} + CW^*(\beta T^{-1})^*(\beta T^{-1})W^* \\ &= -|W_j(0;\tau,\eta)|^2 + C|\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta)|^2, \end{aligned}$$

就有

$$2k\gamma \int_0^{+\infty} |W_j(z,\tau,\eta)|^2 \mathrm{d}z + |W_j(0,\tau,\eta)|^2 \le c|\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta)|^2.$$

再利用 T_j 及其逆在 $\mathrm{supp}\chi_j$ 上算子范数有界, 我们得到

$$|\chi_j(\tau,\eta)\hat{V}^{nc}(0,\tau,\eta)|^2 \le C'|\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta)|^2, \tag{2.19}$$

其中 C' 仅依赖$\mathcal{V}_j$.

极点邻域上估计 设 $\mathcal{V}_j$ 是包含 $\mathcal{B}$ 的极点 $\{(\tau,\eta):\ u\delta+v\eta=0\}$ 的一个邻域, 其中 $\tau=\gamma+\mathrm{i}\delta$. 回忆我们有如下方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{pmatrix} W_j^1(z,\tau,\eta) \\ W_j^2(z,\tau,\eta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_-(\tau,\eta) & 2b(\tau,\eta) \\ 0 & \lambda_+(\tau,\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_j^1(z,\tau,\eta) \\ W_j^2(z,\tau,\eta) \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

其中$b=\dfrac{c}{2}\dfrac{\eta^2-\tau^2}{u\tau+\mathrm{i}v\eta}$, λ 满足$\lambda^2=\eta^2-\tau^2+\frac{1}{c^2}(u\tau+\mathrm{i}v\eta)^2$. 根据 (2.18), 对 λ 作正齐次一次延拓, 就得到对 $\mathrm{Re}\tau>0$, $\eta\in\mathbb{R}$, 成立

$$\mathrm{Re}\lambda_-<-k\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2},\quad \mathrm{Re}\lambda_+>k\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2}.$$

现在看 (2.20) 中第二个方程

$$\frac{\mathrm{d}W_j^2}{\mathrm{d}z}=\lambda_+W_j^2.$$

为保证 $\lim_{z\to\infty}W_j^2(z;\,\tau,\eta)=0$, 其初值必须为零: $W_j^2(0,\,\tau,\,\eta)=0$, 所以 $W_j^2(z,\,\tau,\,\eta)\equiv 0$. 由于 (2.20) 的第一个方程就是

$$\frac{\mathrm{d}W_j^1}{\mathrm{d}z}=\lambda_-W_j^1+2bW_j^2,$$

从而可利用 $W_j^2=0$ 消去极点, 得到 $\dfrac{\mathrm{d}W_j^1}{\mathrm{d}z}=\lambda_-W_j^1$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}|W_j^1|^2}{\mathrm{d}z}=2\mathrm{Re}(\lambda_-)|W_j^1|^2,$$

积分就得到 $|W_j^1(0,\tau,\eta)|^2\geq 2k\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2}\int_0^{+\infty}|W_j^1|^2\mathrm{d}z$. 我们发现, 关键还是估计 $|W_j^1(0,\tau,\eta)|$. 这要依靠边界条件 $\beta T_j(\tau,\eta)^{-1}W_j(0,\tau,\eta)=\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta)$.

回忆

$$T_j^{-1}(\tau,\eta)=\begin{pmatrix} m(\lambda_--a) & mb \\ -mb & m(\lambda_--a) \end{pmatrix},\quad \text{其中}\quad m=u\tau+\mathrm{i}v\eta.$$

所以

$$\begin{aligned}
\beta T_j^{-1}W_j(0,\tau,\eta) &= (1,-1)\begin{pmatrix} m(\lambda_--a) & mb \\ -mb & m(\lambda_--a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_j^1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m(\lambda_--a+b) & m(b-\lambda_-+a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_j^1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= m(\lambda_--a+b)W_j^1=\hat{h}\chi_j.
\end{aligned}$$

注意到 $m(\lambda_- - a + b) = \Delta(\tau,\eta)S(\tau,\eta)^{-1}$, 其中 $S(\tau,\eta) \neq 0$, 则

$$\Delta(\tau,\eta)W_j^1(0,\tau,\eta) = S\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta), \quad (\tau,\eta) \in \mathcal{V}_j.$$

对 $\Delta(\tau,\eta) = u\tau + \mathrm{i}v\eta$, 在 $\mathcal{V}_j$ 上显然成立 $|\Delta(\tau,\eta)| \geq c\gamma$, 进行正齐次零次延拓[9]得

$$\boxed{|\Delta(\tau,\eta)| \geq \frac{c\gamma}{\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2}}, \quad (\tau,\eta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{V}_j.}$$

注意这是估计带一阶导数损失的起源. 于是利用 S 的有界性, $|W_j^1(0,\tau,\eta)| \leq c\dfrac{\chi_j\hat{h}\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2}}{\gamma}$, 即 $|W_j(0,\tau,\eta)|^2 \leq C\dfrac{|\chi_j|^2|\hat{h}|^2(|\tau|^2+|\eta|^2)}{\gamma^2}$, 或者等价地,

$$|\chi_j(\tau,\eta)|^2|\hat{V}(0,\tau,\eta)|^2 \leq C_j\frac{|\chi_j|^2|\hat{h}|^2(|\tau|^2+|\eta|^2)}{\gamma^2}. \tag{2.21}$$

8. 最终估计: Plancherel 定理及加权 Sobolev 空间

注意到 $|\tau|^2+|\eta|^2 > \gamma^2$, 将 (2.19) 和 (2.21) 关于 j 从 1 到 J 求和, 就有

$$|\hat{V}(0,\tau,\eta)|^2 \leq c\frac{|\hat{h}|^2(|\tau|^2+|\eta|^2)}{\gamma^2}, \quad (\tau = \gamma + \mathrm{i}\delta).$$

关于 δ, η 在 $\mathbb{R}^2$ 上积分, 则

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\hat{V}(0,\tau,\eta)|^2 \mathrm{d}\delta\mathrm{d}\eta \leq c\frac{1}{\gamma^2}\iint_{\mathbb{R}^2} |\hat{h}|^2(|\gamma|^2+|\delta|^2+|\eta|^2)\mathrm{d}\delta\mathrm{d}\eta.$$

利用 Plancherel 定理得

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} |\tilde{V}(x,y,0)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{e}^{-\gamma x}\hat{V}(x,y,0)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{C}{\gamma^2}\iint_{\mathbb{R}^2} |\hat{h}|^2(|\gamma|^2+|\delta|^2+|\eta|^2)\mathrm{d}\delta\mathrm{d}\eta \triangleq \frac{C}{\gamma^2}\|h\|^2_{H^1_\gamma}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

这个不等式建议我们引入新的空间

$$H^1_\gamma(\mathbb{R}^2) = \left\{u:\ \|u\|_{H^1_\gamma(\mathbb{R}^2)} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} |\hat{u}(\delta,\eta)|^2(|\gamma|^2+|\delta|^2+|\eta|^2)\mathrm{d}\delta\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\},$$

$$L^2_\gamma(\mathbb{R}^2) = \left\{u:\ \|u\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^2)} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\gamma x}|u(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\},$$

[9]由于对 T_j 进行正齐次零次延拓, 所以此处 Δ 也必须是正齐次零次延拓, 虽然看上去它是正齐次一次的. 同样对 S 也要作正齐次零次延拓.

于是 (2.22) 可以简单地写为

$$\boxed{\|V^{nc}\|^2_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^2)} \le \frac{c}{\gamma^2}\|h\|^2_{H^1_\gamma(\mathbb{R}^2)}.}$$

这就是我们所需要的估计式.

第三讲　广义函数(一): 概念和基本性质

广义函数理论为调和分析和偏微分方程的发展提供了一个极为宽广却又有丰富装备 (运算) 的舞台, 有着广泛的应用. 这一讲我们介绍关于广义函数的一些基本知识. 首先是由 C^∞ 函数构成的若干测试函数空间的定义及其拓扑 (收敛性). 这些空间上的连续线性泛函就构成各类广义函数. 然后介绍广义函数的求导、卷积及 Fourier 变换等运算及其性质.

一　测试函数空间

1. Schwartz 速降函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

定义1. 设 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 C^∞ 复值函数, 若对任意多重指标 α, β, 成立

$$\rho_{\alpha,\,\beta}(f) \doteq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < +\infty,$$

则称 f 是一个 *Schwartz* 函数. 所有 *Schwartz* 函数组成的集合记为 $S(\mathbb{R}^d)$, 称为 *Schwartz* 速降函数空间. 这是一个线性空间.

这里 $\{\rho_{\alpha,\beta}\}$ 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上的一族半范数. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 是一个 Frechet 空间 (可度量化的完备的局部凸拓扑线性空间), 即:

◇ 可度量化: 若 f, $g \in S(\mathbb{R}^n)$, 定义距离

$$d(f,g) \doteq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(f-g)}{1+\rho_j(f-g)}, \tag{3.1}$$

其中 ρ_j 为 $\rho_{\alpha,\beta}$ 的一个列举. 不难验证 d 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上的一个度量 (满足正定性、对称性及三角不等式).

◇ 关于 d 完备: 可验证任一 Cauchy 列都收敛;

◇ 局部凸: 原点有一个凸邻域 $\{f:\ \rho_{\alpha,\,\beta}(f) < r\}$, 其中 $r \in \mathbb{Q}$, α, β 为多重指标.

例1. $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

例2. 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 则对任何多重指标 α,β, 成立$\partial^\alpha f$, $x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

例3. 若 $f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, 则

$$f_1 \otimes f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\, f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

习题 1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \forall$ 多重指标 α, β, $|\partial^\alpha(x^\beta f(x))| < C_{\alpha,\beta}$. □

下面的结论在今后将会经常用到.

习题 2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 当且仅当 $\forall$ 多重指标 α, 自然数 N, 存在常数 $C_{\alpha,N} > 0$ 使得 $|\partial^\alpha f(x)| \le C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N}$. □

定义2 (收敛)**.** 设 $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 若 $\forall \alpha, \beta$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{\alpha,\beta}(f_k - f) = 0$, 则称 $f_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.

注意, 通过将(3.1)中的和分为两部分, 让后面的无限项的和充分小, 再考虑前面有限项, 不难证明, 上述收敛的定义与按距离 $d(\cdot,\cdot)$ 收敛是等价的.

习题 3. 证明求导、乘以多项式、加法等运算均关于该拓扑连续. □

例4. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. 定义 $f_k(x) = f(x + \frac{x_0}{k})$, 则 $f_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ $(S(\mathbb{R}^d))$.

定义3 (卷积)**.** 如果 f, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 定义它们的卷积为

$$(f * g)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\, \mathrm{d}y.$$

定理1. 如果 f, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 则 $(f*g)(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 且 $\partial^\alpha(f*g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g$.

证明. 1. 先证 $\partial_j(f*g) = \partial_j f * g$, 这是由于成立

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{(f*g)(x+he_j) - (f*g)(x)}{h} \\
= \; & \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^d} [f(x+he_j-y) - f(x-y)] g(y)\, \mathrm{d}y \\
= \; & \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^d} [f(z+he_j) - f(z)] g(x-z)\, \mathrm{d}z \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [f(z+he_j) - f(z)] g(x-z)\, \mathrm{d}z \quad \text{(Lebesgue控制收敛定理)} \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j f(z) g(x-z))\, \mathrm{d}z \\
= \; & \partial_j f * g
\end{aligned}.$$

从而 $\partial_i\partial_j(f*g) = \partial_i(\partial_j f * g) = \partial_i\partial_j f * g$. 类似可归纳证明 $\partial^\alpha(f*g) = \partial^\alpha f * g \Rightarrow f*g \in C^\infty$.

2. $f*g$ 快于任何多项式衰减. 对任何充分大的 N, 我们有

$$\begin{aligned}|f*g(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y\\ &\le C_N\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x-y|)^{-N}(1+|y|)^{-N}\mathrm{d}y\quad (\text{取 } N>d)\\ &\le C_N\int_{|x-y|>\frac{1}{2}|x|}(1+|x-y|)^{-N}(1+|y|)^{-N}\mathrm{d}y\\ &\quad +C_N\int_{|x-y|\le\frac{1}{2}|x|}(1+|x-y|)^{-N}(1+|y|)^{-N}\mathrm{d}y\\ &\triangleq I_1+I_2.\end{aligned}$$

这里

$$I_1\le C\Big(1+\frac{|x|}{2}\Big)^{-N}\int_{\mathbb{R}^d}(1+|y|)^{-N}\mathrm{d}y\le C_N(1+|x|)^{-N}.$$

对于 I_2, 此时 $|x|-|y|\le|x-y|\le\frac{1}{2}|x|$, 那么 $|y|\ge\frac{1}{2}|x|$, 从而有

$$\begin{aligned}I_2 &\le C(1+\tfrac{|x|}{2})^{-N}\int_{|x-y|\le\frac{1}{2}|x|}(1+|x-y|)^{-N}\mathrm{d}y\\ &= C(1+\tfrac{|x|}{2})^{-N}\int_{|z|\le\frac{1}{2}|x|}(1+|z|)^{-N}\mathrm{d}z\\ &= C(1+\tfrac{|x|}{2})^{-N}\int_{\mathbb{R}^d}(1+|z|)^{-N}\mathrm{d}z\le C_N(1+|x|)^{-N}.\end{aligned}$$

因此, $|f*g(x)|\le C_N(1+|x|)^{-N}$. 于是得到

$$|\partial^\alpha(f*g)(x)|=|\partial^\alpha f*g(x)|\le C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N},$$

从而 $f*g\in\mathcal{S}$. □

定理2. *Fourier 变换 (逆变换) 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上的同构.*

证明. 1. 我们需要证明: ① $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\Rightarrow\hat{u},\check{u}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$; ② Fourier (逆) 变换是线性映射, 且可逆; ③ 连续性: $u_k\to u\,(S(\mathbb{R}^d))$ 意味着 $\hat{u}_k\to\hat{u}$ $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ 以及 $\check{u}_k\to\check{u}$ $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.

2. 下证 ① $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\Rightarrow\hat{u}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. 首先, 不难看出 $\partial^\alpha\hat{u}(\xi)=F_{x\to\xi}[(-\mathrm{i}x)^\alpha u(x)](\xi)$ 存在, 即 $\hat{u}\in C^\infty$. 其次,

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha,\beta}(\hat{u}) &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\xi^\alpha\partial^\beta\hat{u}|\\ &= C\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\xi^\alpha\widehat{(x^\beta u)}|=C\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\widehat{(\partial^\alpha(x^\beta u))}|\\ &\le C'\|\partial^\alpha(x^\beta u)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\le C'\sum_{\substack{|\alpha'|\le m\\|\beta'|\le n}}\rho_{\alpha',\beta'}(u)<+\infty.\end{aligned}$$

这里 $m=|\beta|+d+1$, $n=|\alpha|$,

3. 因为 $\mathcal{S}\subset L^2$, 所以 Fourier 变换可逆且其逆就是 Fourier 逆变换.

4. 下证 ③ $u_k\to 0$, 则 $\hat{u}_k\to 0$, 即对任何重指标 α, β, $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}(\hat{u}_k)=0$. 事实上,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\|\xi^\alpha\partial^\beta\hat{u}_k\|_{L^\infty} &\le C\lim_{k\to\infty}\|\partial^\alpha\widehat{(x^\beta u_k)}\|_{L^\infty}\\ &\le C\lim_{k\to\infty}\|\partial^\alpha(x^\beta u_k)\|_{L^1}\\ &\le C\lim_{k\to\infty}\sum_{\substack{|\alpha'|\le m\\|\beta'|\le n}}\rho_{\alpha',\beta'}(u_k)=0.\end{aligned}$$

□

下面的结论以后会用到. 这里平移算子τ^y定义为: $\tau^y f(x)\doteq f(x-y)$.

例5. 对 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 及 $e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$, $h\ne 0$, 当 $h\to 0$ 时, $(\tau^{-he_j}\varphi-\varphi)/h$ 以 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 的拓扑收敛到 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$.

证明. 对 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 及任意的多重指标 α, β, 用 Taylor 公式 (展开到两阶),

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|x^\alpha\partial^\beta\left(\frac{\tau^{-he_j}\varphi(x)-\varphi(x)}{h}-\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\right)\right| &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\partial^\beta\frac{\partial^2\varphi(x+\theta he_j)}{\partial x_j^2}\cdot(h)|\\ &\le C|h|\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\partial^{\tilde\beta}\varphi|\to 0,\qquad(\text{当 } h\to 0,)\end{aligned}$$

其中 $|\tilde\beta|=|\beta|+2$, $\theta\in[0,1]$, 并利用了 $h\to 0$ 时 $\frac{|x^\alpha|}{|(x+he_j)^\alpha|}=\left|\frac{x_j^{\alpha_j}}{(x_j+h)^{\alpha_j}}\right|$ 的一致有界性. □

2. 其它测试函数空间: $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 和 $C^\infty(\mathbb{R}^d)$

除了上述为 Fourier 变换量身定做的 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 外, 在偏微分方程和调和分析中还经常需要以下两类测试函数空间.

♡ $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)=\left\{u\in C^\infty(\mathbb{R}^d): u \text{ 的支集是紧集}\right\}$.

收敛性. 设 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中的一列函数, 且存在紧集 K 使得 $\operatorname{supp} f_k\subset K$. 若对于任何多重指标 α, 都成立

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha(f_k-f)(x)|=0,$$

则称 f_k 在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中收敛到 f, 记作 $f_k\to f\ \ (C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$.

♡ $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

收敛性. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}$ 是 $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中的一列函数, 若 $\forall \alpha$, $\forall N \in \mathbb{N}$ 成立

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\rho}_{\alpha,N}(f_k - f) = 0,$$

则称 f_k 在 $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中收敛到 f, 记作 $f_k \to f \quad (C^\infty(\mathbb{R}^d))$. 这里半模 $\tilde{\rho}_{\alpha,N}$ 定义为

$$\tilde{\rho}_{\alpha,N}(f) = \sup_{|x|\le N} |\partial^\alpha f(x)|.$$

例6. 设 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 定义 $\varphi_k(x) \doteq \varphi(x-k)/k$. 序列 φ_k 几乎处处收敛到零, 且 $\varphi_k \to 0$ (C^∞), 但 φ_k 并不在 C_0^∞ 中收敛, 也不在 $\mathcal{S}$ 中收敛.

由上述收敛性我们有如下连续嵌入关系, 且前者在后者中是稠密的:

$$C_0^\infty \subset \mathcal{S} \subset C^\infty. \tag{3.2}$$

二 广义函数及其基本运算

1. 广义函数的定义及例

广义函数就是定义在测试函数空间上的连续线性泛函.

◇ 广义函数: $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) = (C_0^\infty(\mathbb{R}^d))'$;

◇ 缓增广义函数: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))'$;

◇ 具有紧支集的广义函数: $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) = (C^\infty(\mathbb{R}^d))'$.

我们常把线性泛函 u 作用于测试函数 f 写作 $u(f)$ 或 $\langle u, f\rangle$.

下面结果用 "有界性" 刻画连续性, 在理论分析中经常用到.

命题2. 设 u 是定义在给定测试函数空间上的线性泛函. 则

1) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \Longleftrightarrow \forall K \subset \mathbb{R}^d$, K 为紧集, $\exists m \in \mathbb{N}$, $C > 0$, 使得 $|\langle u, f\rangle| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \left\|\partial^\alpha f\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$, 其中 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且 $\operatorname{supp} f \subset K$.

2) $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\iff\exists C>0,k\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}$, 使得 $|\langle u,f\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le k,|\beta|\le m}\rho_{\alpha\beta}(f)$ 对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 均成立.

3) $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)\iff\exists C>0,\ k\in\mathbb{N},\ N\in\mathbb{N}$, 使得 $|\langle u,f\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le k}\tilde{\rho}_{\alpha,N}(f)$ 对任意 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 均成立.

证明. 这里以 2) 为例给出证明. [1]

由缓增广义函数及$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$中收敛的定义, 显然可以得到 "$\Longleftarrow$" (充分性). 下证必要性 "$\Longrightarrow$".

我们回忆, 称 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ 是拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的拓扑基, 若对于任意的开集 $U\in\mathcal{T}$ 及 $x\in U$, 存在 $V\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in V\subset U$, 即 $\mathcal{B}$ 中开集通过并运算就可以得到 $\mathcal{T}$ 中的任意开集. 显然在度量空间 (X,d) 中, 所有球 $B(x,\varepsilon)$ 就构成了由度量 d 诱导的拓扑的一个拓扑基. 现根据映射 u 的连续性, 以及由于线性, $u(0)=0$, 从而 $(-1,1)$ 的原像集应该是包含零函数的一个开集. 于是存在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 中的一个球 $B(0,\delta)$ 使得对任意 $f\in B(0,\delta)$, 成立 $|\langle u,f\rangle|<1$.

根据前面对 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 的距离 (3.1) 的定义, 对上述确定的 $\delta>0$, 可找到 $k,\ m\in\mathbb{N}$ 使得集合 $\{f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d):\ \forall|\alpha|\le k,\ |\beta|\le m,\ \rho_{\alpha\beta}(f)<\delta/2\}$ 是 $B(0,\delta)$ 的一个子集. (距离 $d(f,0)=\sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\frac{\rho_j(f)}{1+\rho_j(f)}$ 定义中取 $j=J$ 充分大使得 $2^{-J}\le\delta/2$, 就可以使 J 后面无限项之和不大于 $\delta/2$. 由此 J 就可以确定 k 和 m, 因为ρ_j 是半范$\rho_{\alpha,\beta}$的一个列举.) 这样我们证明了 $\exists k,\ m\in\mathbb{N},\ \delta>0$, 使得

$$\forall\,|\alpha|\le m,\ \ |\beta|\le k,\ \ \rho_{\alpha\beta}(f)<\delta/2\Longrightarrow|\langle u,f\rangle|<1.$$

现对 $\tilde{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 令 $f=\frac{\tilde{f}}{\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le k}\rho_{\alpha\beta}(\tilde{f})}\frac{\delta}{3}$, 则由上述性质知 $|\langle u,\ f\rangle|<1$, 于是

$$\begin{aligned}|\langle u,\tilde{f}\rangle| &= \left|\langle u,\frac{3}{\delta}\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le k|}\rho_{\alpha\beta}(\tilde{f})f\rangle\right|=\frac{3}{\delta}\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le k|}\rho_{\alpha\beta}(\tilde{f})|\langle u,f\rangle|\\ &< \frac{3}{\delta}\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le k|}\rho_{\alpha\beta}(\tilde{f}).\end{aligned}$$

所以取 $C=\frac{3}{\delta}$, 即可得证. □

例7. 定义 δ_0 为对 $\forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\langle\delta_0,f\rangle=f(0)$, 则 $\delta_0\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

[1]在证明 1) 时注意, 支集在 K 上的 C^∞ 函数在 C^k $(k\in\mathbb{N})$ 半模下也是可度量化的.

解. 显然 δ_0 是 C_0^∞ 上线性泛函. 设 $f_k \longrightarrow f \ \ (C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$, 则 $\langle \delta_0, f_k\rangle = f_k(0) \longrightarrow f(0) = \langle \delta_0, f\rangle$. □

例8. 对局部可积函数 g , **约定** 通过如下积分来定义线性泛函

$$L_g(f) \doteq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

可将 g 视为广义函数.

例如: 1, $|x|^2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 1, $\mathrm{e}^{|x|^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ 等. 特别地, $L^p(1 \le p \le \infty)$ 中的函数均可被视为缓增广义函数.

例9. 对任何 σ-有限的 *Borel* 测度 μ, 通过如下积分来定义线性泛函

$$L_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

所以可把 μ 看作缓增广义函数. 显然 $f_k \longrightarrow f \ \ (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \Longrightarrow L_\mu(f_k) \longrightarrow L_\mu(f)$.

特别的, Lebesgue 测度可视为一个缓增广义函数.

例10. 奇异函数 $\log|x| \in S'(\mathbb{R}^d)$.

例11. 对于函数 $g(x)$, 如果 $\exists C$, k, 使得对任意的 x, 有

$$|g(x)| \le C(1+|x|)^k,$$

则 $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

证明. 利用命题 2 2), 对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 成立

$$\begin{aligned} |L_g(f)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|)^m|f(x)|\right)\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|)^{k-m}\mathrm{d}x \\ &\le C\sum_{|\alpha|\le m}\rho_{\alpha,0}(f). \end{aligned}$$

这里已取 m 充分大使得积分有限. □

例12. $\mathbb{R}$ 上既非函数又非测度的紧支广义函数的例子.

$$\langle u,\ f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1} f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1}(f(x)-f(0))\frac{\mathrm{d}x}{x}. \qquad (\dagger)$$

证明. 利用分部积分, 有

$$\langle u,f\rangle = -\int_{-1}^{1} f'(x)\ln|x|\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon\ln|\varepsilon|\frac{f(-\varepsilon)-f(\varepsilon)}{2\varepsilon} = -\int_{-1}^{1} f'(x)\ln|x|\,\mathrm{d}x.$$

所以 (†) 确实定义了一个线性泛函. 由 (†) 也容易看出 $|u(f)| \le 2\|f'\|_{L^\infty}$, 从而若 $f_k \to f$ $(C^\infty(\mathbb{R}))$, 则 $u(f_k) \to u(f)$, 即这是一个连续泛函. 它依赖于测试函数 f 的导数而非 f 本身, 故不能看作是函数或测度. □

对广义函数空间, 我们应用其弱拓扑定义收敛性.

定义4. *称广义函数序列 $\{u_k\} \subset \mathcal{D}'$ (相应地 $\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}'$) 收敛到 $u \in \mathcal{D}'$ (相应地 $\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}'$), 若对于任何 $f \in C_0^\infty$ (相应地 $\mathcal{S}$, C^∞) 都成立*

$$\lim_{k\to\infty}\langle u_k, f\rangle = \langle u, f\rangle.$$

容易看出广义函数的极限是唯一的. 此外, 由 (3.2), 成立如下连续嵌入

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

2. 基本运算

广义函数理论的成功之处在于在很大限度内不仅包括了众多数学研究对象 (演员), 而且具有丰富的结构和运算 (设备). 下面介绍广义函数的一些常见运算及其局部性质. 我们主要以 $\mathcal{S}'$ 为例说明.

1. 求导: 设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 对任意多重指标 α, 定义其导数 $\partial^\alpha u \in \mathcal{S}'$ 如下: $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \partial^\alpha u, f\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha f\rangle.$$

2. Fourier 变换: $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, 其 Fourier 变换 $\hat{u} \in \mathcal{S}'$ 和逆变换 $\check{u} \in \mathcal{S}'$ 定义为: $\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \hat{u}, f\rangle = \langle u, \hat{f}\rangle, \quad \langle \check{u}, f\rangle = \langle u, \check{f}\rangle.$$

3. 平移算子: $\forall u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 定义其平移 $\tau^t u\in\mathcal{S}'$ 为:

$$\langle\tau^t u,f\rangle=\langle u,\tau^{-t}f\rangle.$$

这里 $\tau^t f(x)=f(x-t)$, 而 $t\in\mathbb{R}^d$ 是给定向量.

4. 伸缩算子: $\forall u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 定义其伸缩为 $\delta^a(u)\in\mathcal{S}'$:

$$\langle\delta^a(u),f\rangle=\langle u,a^{-n}\delta^{\frac{1}{a}}(f)\rangle.$$

这里 $\delta^a f(x)=f(ax)$, 而 $a>0$ 是给定的实数.

5. 反射算子: $\forall u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 定义其反射 $\tilde{u}\in\mathcal{S}'$ 为

$$\langle\tilde{u},f\rangle=\langle u,\tilde{f}\rangle,$$

这里 $\tilde{f}(x)=f(-x)$.

6. 卷积: $\forall u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 定义其卷积 $h*u\in\mathcal{S}'$ 为

$$\langle h*u,\ f\rangle=\langle u,\ \tilde{h}*f\rangle,$$

其中 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

平移、伸缩、反射、旋转等是 $\mathbb{R}^d$ 的重要的不变群, 所以上面相当于定义了在这些 (坐标) 变换下广义函数的变换形式. 请读者结合广义函数为光滑函数时的特殊情形, 自己验证上述定义的合理性.

例13. 求 δ_0 的 *Fourier* 变换.

解. 因为 $\langle\hat{\delta_0},\ f\rangle=\langle\delta_0,\ \hat{f}\rangle=\hat{f}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot 0}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathrm{d}x$, 所以 $\hat{\delta_0}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}$. □

例14. 求 $\partial^\alpha\delta_0$ 的 *Fourier* 变换.

解. 由于

$$\begin{aligned}\langle(\partial^\alpha\delta_0)^\wedge,f\rangle &= \langle\partial^\alpha\delta_0,\hat{f}\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle\delta_0,\partial^\alpha\hat{f}\rangle\\ &= (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\hat{f}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}(\mathrm{i}x)^\alpha f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以 $(\partial^\alpha\delta_0)^\wedge = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}(\mathrm{i}x)^\alpha$. □

从这两个例子看, 往往性质较差的函数的 Fourier 变换性质倒比较好. 所以经常先对一个 (广义) 函数的 Fourier 变换开展研究, 再回到原 (广义) 函数本身.

例15. 设 $h\in S(\mathbb{R}^d)$, 求 $h*\delta_{x_0}$.

解. 根据定义,

$$\begin{aligned}\langle h*\delta_{x_0}, f\rangle &= \langle \delta_{x_0}, \tilde{h}*f\rangle = (\tilde{h}*f)(x_0) = \int_{\mathbb{R}^d}\tilde{h}(x_0-y)f(y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} h(y-x_0)f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

所以 $\boxed{(h*\delta_{x_0})(y) = h(y-x_0)}$. □

注意, 对一般的两个广义函数, 现在还没有找到普遍认可的乘积的定义, 所以在出现两个广义函数相乘时必须特别小心. 下面研究卷积及 Fourier 变换两种运算.

3. 局部性质

广义函数是作用在测试函数上的泛函, 直接看是非局部的, 无法探究它在自变量空间局部的“取值”. 但是, 通过测试函数的局部性, 确实可以研究广义函数在自变量空间的一些开集上的性质. 这都依赖于如下广义函数支集的概念.

定义5. 设 $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, 定义 u 的支集为 (注意这里横线代表取闭包)

$$\operatorname{supp} u = \overline{\bigcap\left\{K^c:\ K\subset\mathbb{R}^d, \forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \operatorname{supp}\varphi\subset K, 则\langle u,\varphi\rangle = 0\right\}},$$

即 $\operatorname{supp} u$ 是最小的闭集 M, 当 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 的支集与 M 不相交时, $\langle u,\varphi\rangle = 0$.

例16. 已知 $\langle\delta_{x_0}, f\rangle = f(x_0)$, 则 $\operatorname{supp}\delta_{x_0} = \{x_0\}$.

定义6. 设 h 是可积函数, 称 u 在开集 V 上等同于 h, 若 $\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且 $\operatorname{supp}\varphi\subset V$, 成立 $\langle u,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} h\varphi\mathrm{d}x$.

命题3. 1) 设 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, 则 $\operatorname{supp} u$ 为紧集; 2) 若 $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, 且 $\operatorname{supp} u$ 为紧集, 则 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

证明. 1. $\forall f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, 由连续性, 存在 C, m 和 N 使得

$$|\langle u,f\rangle| \le C\sum_{|\alpha|\le m}\tilde{\rho}_{\alpha,N}(f), \quad 其中 \quad \tilde{\rho}_{\alpha,N}(f) = \sup_{x\in B(0,N)}|\partial^\alpha f(x)|.$$

若取 $f(x)$ 满足 $\operatorname{supp} f \cap B(0,N) = \emptyset$, 则 $\tilde{\rho}_{\alpha,N}(f) = 0 \Rightarrow \langle u, f\rangle = 0$, 从而 $\operatorname{supp} u \subset B(0,N)$. 由定义, $\operatorname{supp} u$ 是闭集, 从而证得它是紧集.

2. 设 $\operatorname{supp} u \subset B(0,N)$; 令 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足要求: 在 $B(0,N)$ 上 $\eta \equiv 1$, 在 $B(0,N+1)$ 之外 $\eta \equiv 0$. 若 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则在 $B(0,N)$上 $f(1-\eta) \equiv 0$, 所以

$$\langle u, f\rangle = \langle u, \eta f\rangle + \langle u, (1-\eta) f\rangle = \langle u, \eta f\rangle.$$

从而, $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, 可定义 $\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \eta\varphi\rangle$; 易验证此定义与 η 的选取无关, 且 (利用求导的 Leibniz 法则和 η 已知的性质)

$$|\langle u, \varphi\rangle| = |\langle u, \eta\varphi\rangle| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in B(0,N)} |\partial^\alpha(\eta\varphi)(x)| \le \text{ 有限个 } \tilde{\rho}_{\alpha,N}(\varphi) \text{ 之和}.$$

所以 $u \in \mathcal{E}'$. □

第四讲　广义函数(二): 卷积与 Fourier 变换

这一讲我们详细地介绍有关广义函数卷积和 Fourier 变换的一些较为深入的性质.

一　广义函数和卷积

1. $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{S}'$ 的卷积

定理1. 设 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

1) $\varphi*u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且成立公式 $\partial^\alpha(\varphi*u)=(\partial^\alpha\varphi)*u=\varphi*(\partial^\alpha u)$;

2) $\varphi*u$ 及其任意阶导数在 $|x|\to\infty$ 时, 至多以多项式增长; 即对任意重指标 α, $\exists C_\alpha, k_\alpha>0$, 使得 $|\partial^\alpha(\varphi*u)(x)|\le C_\alpha(1+|x|)^{k_\alpha}$;

3) 若 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\varphi*u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

证明. 1. 设 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 那么根据定义, 就有 (注意区分参数与广义函数所作用的函数的自变量)

$$
\begin{aligned}
\langle\varphi*u,\psi\rangle &= \langle u,\tilde\varphi*\psi\rangle \qquad [\text{其中 } \tilde\varphi(x)=\varphi(-x)]\\
&= \langle u,\int_{\mathbb{R}^n}\tilde\varphi(\cdot-y)\psi(y)\mathrm{d}y\rangle \quad [\text{以下}y\text{是参数}]\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\langle u,\tilde\varphi(\cdot-y)\rangle\psi(y)\mathrm{d}y \quad [\text{利用积分Riemann和在}\mathcal{S}\text{中收敛}]\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\langle u,\tau^y\tilde\varphi\rangle\psi(y)\mathrm{d}y \qquad [\text{其中 } \tau^y\varphi(x)=\varphi(x-y)]\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}u(\tau^y\tilde\varphi)\psi(y)\mathrm{d}y \qquad [\text{此处 } u(\tau^y\tilde\varphi) \text{ 为关于 } y \text{ 的函数}]
\end{aligned}
$$

所以 (这个结论在下面证明中要多次用到)

$$\boxed{(\varphi*u)(y)=u(\tau^y\tilde\varphi),}$$

即 $\varphi*u$ 是个点点有定义的函数. 这里 Riemann 和在 $\mathcal{S}$ 中收敛将在第 5 步予以验证.

2. 下证 $(\varphi*u)(y)\in C^\infty$, 为此先证 $(\varphi*u)(y)\in C^1$. 由导数和平移算子定义,

$$\frac{(\varphi*u)(y+he_j)-(\varphi*u)(y)}{h}=\frac{u(\tau^{y+he_j}\tilde\varphi)-u(\tau^y\tilde\varphi)}{h}=u\left(\frac{\tau^{y+he_j}\tilde\varphi-\tau^y\tilde\varphi}{h}\right),$$

所以根据例上一讲例 5 的结论,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(\varphi*u)(y+he_j)-(\varphi*u)(y)}{h}=\lim_{h\to 0}u\left(\frac{\tau^{y+he_j}\tilde{\varphi}-\tau^y\tilde{\varphi}}{h}\right)\\
=\;& u\left(\lim_{h\to 0}\frac{\tau^{y+he_j}\tilde{\varphi}-\tau^y\tilde{\varphi}}{h}\right)=\left\langle u,\frac{\partial(\tau^y\tilde{\varphi})}{\partial y_j}\right\rangle.
\end{aligned}\tag{4.1}$$

根据定义, 我们有

$$\frac{\partial(\tau^y\tilde{\varphi}(x))}{\partial y_j}=\frac{\partial(\tilde{\varphi}(x-y))}{\partial y_j}=\frac{\partial(\varphi(y-x))}{\partial y_j}=(\partial_j\varphi)(y-x)=\widetilde{(\partial_j\varphi)}(x-y)=\tau^y\widetilde{(\partial_j\varphi)}(x).\tag{4.2}$$

这里 $\partial_j g$ 表示对函数 g 的第 j 个自变量求偏导数. 于是我们得到

$$\partial_j(\varphi*u)(y)=u(\tau^y\widetilde{(\partial_j\varphi)})=(\partial_j\varphi)*u(y).$$

这就证明了 $\partial_j(\varphi*u)=(\partial_j\varphi*u)$.

我们还需证明 $\partial_j(\varphi*u)=\varphi*(\partial_j u)$. 从 (4.2) 第四个等号出发, 成立

$$\frac{\partial(\tau^y\tilde{\varphi}(x))}{\partial y_j}=(\partial_j\varphi)(y-x)=-\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi(y-x)),$$

从而, 按照(4.1),

$$\partial_j(\varphi*u)(y)=\left\langle u,-\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi(y-x))\right\rangle=\left\langle\partial_j u,\varphi(y-x)\right\rangle=\partial_j u(\tau^y\tilde{\varphi})=\varphi*(\partial_j u)(y).$$

注意在这里计算时 $\tau^y\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\varphi}(x-y)=\varphi(y-x)$. 由此利用归纳法, 对于任意多重指标 α, 可得 $\partial^\alpha(\varphi*u)=(\partial^\alpha\varphi*u)=\varphi*(\partial^\alpha u)$, 故 $\varphi*u\in C^\infty$.

3. 下证结论 2). 由 u 的连续性及 φ 速降的性质, (注意以下u_x 表示 u 是作用在以 x 为自变量的测试函数上的广义函数, 而不是导数!)

$$\begin{aligned}
&|\partial^\alpha(\varphi*u)(y)|=|u(\tau^y\widetilde{\partial^\alpha\varphi})|=|\langle u,\widetilde{\partial^\alpha\varphi}(\cdot-y)\rangle|=|\langle u_x,\partial^\alpha\varphi(y-x)\rangle|\\
\le\;& C\sum_{|\gamma|\le m,|\beta|\le k}\|x^\gamma\partial_x^{\alpha+\beta}\varphi(y-x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_x)}\\
=\;& C\sum_{|\gamma|\le m,|\beta|\le k}\|(y-z)^\gamma\partial_z^{\alpha+\beta}\varphi(z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_z)}\\
\le\;& CC_M\|(|y|+|z|)^m(1+|z|)^{-M}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_z)}\\
\le\;& C'_M(1+|y|)^m\qquad(\text{取 } M=m).
\end{aligned}$$

最后一步利用了对 $a,\ b>0$, 成立 $a+b\le(1+a)(1+b)$.

4. 对 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 要证 $\varphi*u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 只需证: $\forall\,\alpha, M>0$, 成立

$$|\partial^\alpha(\varphi*u)|\le C_{\alpha,M}(1+|y|)^{-M}.$$

事实上, φ 是速降的, 从而是 C^∞ 的, 则存在 N 和 m, 使得

$$\begin{aligned}|(\varphi*u)(y)| &= |\langle u_x,\varphi(y-x)\rangle\le C\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in B(0,N)}|\partial_x^\alpha\varphi(y-x)|\\ &\le C_M\sup_{x\in B(0,N)}(1+|y-x|)^{-M}\\ &\le C_M\frac{1}{(1+|y|/2)^M}\quad(\text{当 } |y|\ge 2N \text{ 时, 成立 } |x|\le|y|/2,\text{ 则 } |y|/2\le|y|-|x|\le|y-x|)\\ &\le C_M'\frac{1}{(1+|y|)^M}.\end{aligned}$$

类似地对$\partial^\alpha(\varphi*u)$可得相应衰减性结论.

5. 最后我们说明第 1 步中积分 Riemann 和按 $\mathcal{S}$ 拓扑收敛. 将方体 $[-N,\ N]^n$ 分割为边长是 $\frac{1}{N}$ 的 $(2N^2)^n$ 个小方体 Q_m, 记 y_m 为 Q_m 的中心, 则 Riemann 和为 $\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m)|Q_m|$.

我们需要证明对任意 $\alpha,\ \beta$, Riemann 和 $\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}x^\alpha\partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m)|Q_m|)$ 依 $L^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ 范数收敛到 $\int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y$, 即 (符号 A^c 表示集合A的补集 $\mathbb{R}^n\setminus A$)

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}x^\alpha\partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m)|Q_m|)-\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\,\mathrm{d}y\\ &-\int_{([-N,N]^n)^c}x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\,\mathrm{d}y\xrightarrow{L^\infty}0,\qquad\text{当 } N\to\infty.\end{aligned}$$

下面记

$$\begin{aligned}I &= \sum_{m=1}^{(2N^2)^n}x^\alpha\partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m)|Q_m|)-\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y;\\ II &= \int_{([-N,N]^n)^c}x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

首先分析 II, 注意到对任意 $M>0$, 成立

$$\begin{aligned}|II| &\le \int_{([-N,N]^n)^c}|x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)|\mathrm{d}y\\ &\le C_M|x|^{|\alpha|}\int_{([-N,N]^n)^c}\frac{1}{(1+|x-y|)^M}\frac{1}{(1+|y|)^M}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

这里控制积分的困难在于 x, y 都可以非常大, 它们之间存在竞争. 分两种情况. 若 $|x-y| \ge \dfrac{|x|}{2}$, 则

$$\frac{1}{(1+|x-y|)^M} \le \frac{1}{(1+|x|/2)^M} \le C_M \frac{1}{(1+|x|)^M},$$

从而,

$$\frac{1}{(1+|x-y|)^M(1+|y|)^M} \le C_M \frac{1}{(1+|x|)^M}\frac{1}{(1+|y|)^M} \le C_M \frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}};$$

又若 $||x|-|y|| \le |x-y| \le \frac{|x|}{2}$, 则 $|x| \le 2|y|$, 舍弃第一项, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+|x-y|)^M(1+|y|)^M} \le \frac{1}{(1+|y|)^M} &= \frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}} \\ &\le C_M \frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}.\end{aligned}$$

所以,

$$|II| \le C_M'|x|^{|\alpha|}\frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\int_{([-N,N]^n)^c}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y \tag{4.3}$$

在 (4.3) 式中, 取定 $M \ge 2|\alpha|$ 且 $\dfrac{M}{2} > n+1$, 则利用积分收敛性, 就得到

$$|II| \le C_M'\int_{([-N,N]^n)^c}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y \to 0 \quad 当\ N \to \infty.$$

另一方面, 利用中值定理, 成立 ($\xi = \theta y_m + (1-\theta)y$, $\theta \in [0,1]$)

$$\begin{aligned}|I| &= \left|\sum_{m=1}^{(2N^2)^n} x^\alpha \int_{Q_m}[\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m) - \partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)]\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\sum_{m=1}^{(2N^2)^n} x^\alpha \int_{Q_m}\nabla_y[\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)]|_{y=\xi}(y_m-y)\mathrm{d}y\right| \\ &\le \sum_{m=1}^{(2N^2)^n}|x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\int_{Q_m}C_M\frac{1}{(1+|x-\xi|)^M}\frac{1}{(1+|\xi|)^M}\mathrm{d}y \\ &\le C_M'\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}|x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\int_{Q_m}\frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\frac{1}{(1+|\xi|)^{M/2}}\mathrm{d}y \\ &\le C_M'\frac{\sqrt{n}}{N}\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}\frac{1}{(1+|\xi|)^{M/2}}\mathrm{d}y \qquad [已取\ M \ge 2|\alpha|].\end{aligned}$$

这里第三行中控制积分的方法与对 II 的处理一样 (即分 $|x-\xi|\geq|x|/2$ 和 $|x-\xi|<|x|/2$. 对于后一种情形, 成立 $|\xi|\geq|x|/2$). 由于 $1+|\xi|\geq 1+\dfrac{|\xi|}{2}$, 从而 $\dfrac{1}{(1+|\xi|)^{M/2}}\leq\dfrac{1}{(1+|\xi|/2)^{M/2}}$, 故

$$|I|\leq C''_M\frac{\sqrt{n}}{N}\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}\frac{1}{(2+|\xi|)^{M/2}}\mathrm{d}y \tag{4.4}$$

又注意到成立 $y=\xi-\theta(y_m-y)$, $\theta\in[0,1]$, 从而当 N 充分大时 $|y|\leq|\xi|+|y_m-y|\leq|\xi|+1$. 代入 (4.4) 式, 得

$$\begin{aligned}|I| &\leq C''_M\frac{\sqrt{n}}{N}\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y\leq C''_M\frac{\sqrt{n}}{N}\int_{\cup_{m=1}^{(2N^2)^n}Q_m}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y\\ &\leq C''_M\frac{\sqrt{n}}{N}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y\leq C'''_M\frac{1}{N}\to 0 \qquad \text{当 } N\to\infty.\end{aligned}$$

□

类似于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换将卷积变为乘法, 我们有

定理2. 对任意的 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 成立 $\widehat{\varphi*u}=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{\varphi}\hat{u}$.

证明. 对任意的 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$\begin{array}{ll}\langle\widehat{\varphi*u},\psi\rangle & \langle(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{\varphi}\hat{u},\psi\rangle\\ =\langle\varphi*u,\hat{\psi}\rangle & =(2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle\hat{u},\hat{\varphi}\psi\rangle\\ =\langle u,\tilde{\varphi}*\hat{\psi}\rangle & =(2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle u,(\hat{\varphi}\psi)^\wedge\rangle\\ & =\langle u,\hat{\hat{\varphi}}*\hat{\psi}\rangle.\end{array}$$

所以只需要证明 $\tilde{\varphi}=\hat{\hat{\varphi}}$, 或者 $\check{\tilde{\varphi}}=\hat{\varphi}$, 而这由定义是显然的. □

2. 其它卷积

上面我们考虑了广义函数 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 与速降函数 ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) 的卷积. 事实上, 对于以下情形我们也可以定义卷积:

- $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 此时可以定义 $u*v$: $\langle u*v,\ \varphi\rangle=\langle v,\ \tilde{u}*\varphi\rangle$, $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 由前面定理可知 $\tilde{u}*\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 容易验证 $u*v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

- 当 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 时也可按

$$\boxed{\langle u*v,\ \varphi\rangle=\langle v,\ \tilde{u}*\varphi\rangle,\ \ \forall\ \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

定义它们的卷积 $u*v\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. 这在定义常系数线性微分算子的基本解时会用到. (注意要利用 $\operatorname{supp}\tilde{u}*\varphi\subset\operatorname{supp}\tilde{u}+\operatorname{supp}\varphi$ 的性质来保证 $\tilde{u}*\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.)

- $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 此时可以定义 $u*\varphi(x)=\langle u_y,\ \varphi(x-y)\rangle$. 可以证明 $u*\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. (留作习题.) 这里 u_y 表示 u 是作用在以 y 为自变量函数上的广义函数.

对上述定义的卷积, 都成立公式 $\partial^\alpha(u*v)=(\partial^\alpha u)*v=u*(\partial^\alpha v)$.

3. 卷积的应用: 稠密性

我们知道 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在许多的函数空间 (比如$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $L^p(1\leqslant p<\infty)$) 中稠密. 令人满意的是 — 纵使我们将函数的定义扩展到广义函数空间 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 我们仍然可以有这种稠密性. 更准确地说, 我们有如下定理:

定理3. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.*

证明. 我们只证明 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 分两步:

1. 证明 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

取标准光滑化子 φ, 即要求 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\geqslant 0$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\mathrm{d}x=1, \tilde{\varphi}=\varphi$. 令 $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon>0$. 于是我们有

$$u_\varepsilon(x)\doteq u*\varphi_\varepsilon(x)=\langle u_y,\ \ \varphi_\varepsilon(x-y)\rangle\in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

我们断言: $\langle u_\varepsilon,\psi\rangle\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\langle u,\psi\rangle,\ \forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 即 $u_\varepsilon\to u\ (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$. 进而可知 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

事实上,

$$\begin{aligned}\langle u_\varepsilon,\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\langle u_y,\varphi_\varepsilon(x-y)\rangle\psi(x)\mathrm{d}x = \lim_{d(\Delta_i)\to 0}\sum_i\langle u_y,\varphi_\varepsilon(x_i-y)\rangle\psi(x_i)|\Delta_i| \\ &= \lim_{d(\Delta_i)\to 0}\langle u_y,\sum_i\varphi_\varepsilon(x_i-y)\psi(x_i)|\Delta_i|\rangle \quad [\text{由 } \operatorname{supp}\psi \text{ 紧性, 此处为有限和}] \\ &= \langle u_y,\lim_{d(\Delta_i)\to 0}\sum_i\varphi_\varepsilon(x_i-y)\psi(x_i)|\Delta_i|\rangle \quad [\text{Riemann 和在 } C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ 中收敛, 留作习题}] \\ &= \langle u_y,\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)\psi(x)\mathrm{d}x\rangle = \langle u_y,\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(y-x)\psi(x)\mathrm{d}x\rangle \\ &= \langle u_y,\psi_\varepsilon\rangle \xrightarrow{\varepsilon\to 0}\langle u,\psi\rangle. \quad [\text{利用 } \psi_\varepsilon \text{ 在 } C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ 中收敛到 } \psi, \text{留作习题}]\end{aligned}$$

于是断言成立, 这就完成了证明的第一步. [1]

2. 现在证明 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

为此我们考虑函数截断的方法. 取 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 满足在 $B(0,1)$ 上 $\psi\equiv 1$; 在 $B(0,2)$ 外 $\psi\equiv 0$. 令 $\psi_k(x)=\psi(\frac{x}{k})$, 再取 $\{u_k\}\subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $u_k\xrightarrow{k\to\infty}u$ $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$. 显然, 我们有 $\psi_k u_k\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 我们断言: $\psi_k u_k\xrightarrow{k\to\infty}u$ $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$.

事实上, 对任意 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 注意当 k 充分大使得 $\operatorname{supp}\varphi\subset B(0,k)$ 时 $\varphi\cdot(\psi_k-1)$ 为零, 于是

$$\begin{aligned}\langle\psi_k u_k,\varphi\rangle &= \langle u_k,\psi_k\varphi\rangle = \langle u_k,\varphi\rangle+\langle u_k,\varphi(\psi_k-1)\rangle \\ &= \langle u_k,\varphi\rangle+\langle u_k,0\rangle = \langle u_k,\varphi\rangle\xrightarrow{k\to\infty}\langle u,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

□

二 广义函数和 Fourier 变换

1. Fourier 变换是 $\mathcal{S}'$ 上同构

定理4. *Fourier 变换 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性同构.*

证明. 1. 显然 $\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是线性映射.

[1]注意成立如下支集关系: $\operatorname{supp}\varphi*\psi\subset\operatorname{supp}\varphi+\operatorname{supp}\psi$.

2. $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是连续映射. 验证: 设$u_k \longrightarrow u$, 因为

$$\langle \hat{u}_k, f\rangle = \langle u_k, \hat{f}\rangle \longrightarrow \langle u, \hat{f}\rangle = \langle \hat{u}, f\rangle$$

所以 $\hat{u}_k \longrightarrow \hat{u}$.

3. $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是可逆映射. 事实上, $\forall u \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{S}$,

$$\langle (u^\vee)^\wedge,\ f\rangle = \langle (u^\vee),\ f^\wedge\rangle = \langle u,\ (f^\wedge)^\vee\rangle = \langle u,\ f\rangle.$$

即 $(u^\vee)^\wedge = u$. 同理 $(u^\wedge)^\vee = u$. □

2. $\mathcal{E}'$ 上 Fourier 变换及 Paley-Wiener-Schwartz 定理

这一节要用到多复变量的复值解析函数的性质. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个区域 (连通开集), 连续函数 $f: \Omega \to \mathbb{C}$ 称为是解析的 (或全纯的), 如果对 $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \Omega$, f是实可微的, 且 $\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j$. 这里$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$, $\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}x_j + \mathrm{i}\mathrm{d}y_j$, 其中 $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. 等价的定义是在广义函数意义下成立 Cauchy-Riemann 方程组:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = 0, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

可以证明对多元全纯函数, 仍然成立 Cauchy 积分公式; 在 $z^0 \in \Omega$ 的邻域内可以展开为收敛的多元幂级数 $\sum_\alpha a_\alpha (z - z^0)^\alpha$. 此外, 多元全纯函数有一个特别的性质, 即关于各变量分别全纯的函数就是多元全纯函数. 换句话说, 如果对任意 $z^0 \in \Omega$, 对任意 $1 \le k \le n$, 关于复变量 $z_k \in \mathbb{C}$ 的函数 $g(z_k) \doteq f(z_1^0, \cdots, z_{k-1}^0, z_k, z_{k+1}^0, \cdots, z_n^0)$ 如果关于 z_k 是全纯的, 那么 f 本身就在 Ω 上全纯. 对多元全纯函数还有如下唯一性定理: 如果一个全纯函数在一点的领域为零, 那么它在包含这个点的整个全纯的区域内都是零. 这些结论的证明可参见 [20, 第7章].

定理5. 设 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\hat{u}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left\langle u_x, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\right\rangle$, 它可以开拓为 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数.

证明. 对 $\varphi \in \mathcal{S}$, 利用积分 $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi$ 的黎曼和在 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中收敛 (留作习题), 就得到

$$\begin{aligned}\langle \hat{u}(\xi),\ \varphi(\xi)\rangle &= \langle u_x,\ \hat{\varphi}\rangle = \langle u_x,\ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\langle u_x,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\rangle\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

即 $\hat{u}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left\langle u_x,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\right\rangle$.

以下忽略常数 $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$. 由于 $(\mathrm{i}x)^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 可以定义 $F(z)=\left\langle u_x,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}\right\rangle$. 不难验证$\mathbb{C}\ni h\to 0$ 时 (留作习题)

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot(z+he_j)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}}{h}\to\frac{\partial}{\partial z_j}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z})=-\mathrm{i}x_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}\ (\text{在 } C^\infty \text{ 中}),$$

所以还成立

$$\partial^\alpha F(z)=\langle u_x,(-\mathrm{i}x)^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,z\rangle}\rangle.$$

根据多复变量的函数解析的定义, $F(z)$ 是复解析的 (或称作全纯的). □

定理6. (1)（**紧支光滑函数的 *Paley-Wiener-Schwartz* 定理**）*设 $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}u\subseteq B(0,A)$, 则 $\hat{u}$ 可延拓为 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 $F(z)$, 且满足*

(P1) $\quad\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists$ *常数* $C_N>0$, *使得*

$$|F(z)|\leqslant C_N(1+|z|)^{-N}\mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}z|}.$$

反之, 若 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 $F(z)$ 满足 (P1), 则存在 $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}u\subseteq B(0,A)$, 使得 $\hat{u}(\xi)=F(\xi)$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$.

(2)（**紧支广义函数的 *Paley-Wiener-Schwartz* 定理**）*设 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}u\subseteq B(0,A)$, 则 $\hat{u}$ 可延拓为 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 $F(z)$, 且满足*

(P2) $\quad\exists\, C, N>0$ *为常数, 使得*

$$|F(z)|\leqslant C(1+|z|)^N\mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}z|}.$$

反之, 若 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 $F(z)$ 满足 (P2), 则存在 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}u\subseteq B(0,A)$, 使得 $\hat{u}(z)=F(z)$.

(1)**的证明. 先证“$\Rightarrow$”**: 我们分以下几步. 为简洁起见, 我们略去 Fourier 变换中的因子$1/(2\pi)^{\frac{n}{2}}$.

第一步: 解析开拓. 注意到对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有 $\hat{u}(\xi)=\int_{|x|\leqslant A}u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x$. 我们可以将其延拓如下:

$$F(z)=\int_{|x|\leqslant A}u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}\,\mathrm{d}x,\quad z\in\mathbb{C}^n.$$

这是有意义的, 因为

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}| = |\mathrm{e}^{x\cdot \mathrm{Im}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot \mathrm{Re}z}| \leqslant \mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}z|}. \tag{4.5}$$

第二步: $F(z) \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$. 由估计式 (4.5) 以及 u 有紧支集, 我们可以交换求导与积分的顺序, 于是显然有 $F(z) \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$. 特别地, $F(z)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上解析.

注: 由 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上解析可知非零 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Fourier 变换不可能具有紧支集 (测不准原理). 如若不然, 全纯函数 F 将在一个开集上为零, 因而 $F \equiv 0$, 于是 u 将恒为零.

第四步: 证明 (P1) 成立. 对任意的多重指标 α, 利用分部积分

$$\begin{aligned}
|z^\alpha F(z)| = C\left|\widehat{\partial^\alpha u}(z)\right| &= C\left|\int_{|x|\leqslant A}\partial^\alpha u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant C\int_{|x|\leqslant A}|\partial^\alpha u(x)|\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant C_\alpha \mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}z|},
\end{aligned}$$

因而有

$$(1+|z|)^N|F(z)| \leqslant C_N\mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}z|}, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

由此立得 (P1) 成立.

再证“$\Leftarrow$”: 设 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 $F(\xi)$ 满足 (P1), 我们利用 Fourier 逆变换定义如下 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

我们将分两步证明这就是要找的函数.

第一步: $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 对任意的重指标 α, 由 $F(\xi)$ 的衰减性, 注意 ξ 是实的, $|F(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}$, 取$N > |\alpha|+n+2$, 那么

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha u &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^\alpha\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\right)F(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{i}\xi)^\alpha\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\right)F(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

所以 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

第二步: u 具有紧支集.

这一步的关键, 是证明对于固定的 x, 以及任意取定的 $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$, 成立

$$\boxed{u(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}F(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot(\xi+\mathrm{i}\eta)}F(\xi+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\xi. \qquad (\spadesuit)}$$

先考虑单个变元 ξ_n 的情形, 用一元全纯函数的 Cauchy 积分定理,

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n z}F(\xi_1,\cdots,\xi_{j-1},z)\,\mathrm{d}z=0,$$

其中 Γ 是由 $\mathrm{Im}z=0$, $\mathrm{Im}z=\eta_n$ 和 $\mathrm{Re}z=\pm a$ 确定的矩形围线. 注意当 $z=\pm a+\mathrm{i}s$ (s 位于 0 和 η_n 之间) 时, $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{d}s$, 而由 F 的衰减性, 上述被积函数收控于

$$\left|\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}ax_n-x_ns}F(\xi_1,\cdots,\xi_{j-1},a+\mathrm{i}s)\right|\le C_N\mathrm{e}^{-sx_n+A|s|}(1+|a|+|s|)^{-N}\le C_N\mathrm{e}^{-sx_n+A|s|}(1+|a|)^{-N},$$

而积分 $\left|\int_0^{\eta_n}\mathrm{e}^{-sx_n+A|s|}\,\mathrm{d}s\right|<C$, 其中 C 与 a 无关, 从而当 $|a|\to\infty$ 时

$$\left|\int_{\{\mathrm{Re}z=\pm a,\mathrm{Im}z\in(0,\eta_n)\}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_nz}F(\xi_1,\cdots,\xi_{j-1},z)\,\mathrm{d}z\right|\le\frac{C_{N,s,x}}{(1+|a|)^N}\to 0.$$

这就证明了

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n\xi_n}F(\xi_1,\cdots,\xi_{j-1},\xi_n)\,\mathrm{d}\xi_n=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n(\xi_n+\mathrm{i}\eta_n)}F(\xi_1,\cdots,\xi_{j-1},\xi_n+\mathrm{i}\eta_n)\,\mathrm{d}\xi_n,$$

从而,

$$\begin{aligned}
u(x)&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}F(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n-1}x_j\xi_j}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n\xi_n}F(\xi_1,\cdots,\xi_{j-1},\xi_n)\,\mathrm{d}\xi_n\right)\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}\\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n-1}x_j\xi_j}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n\xi_n+\mathrm{i}\eta_n}F(\xi_1,\cdots,\xi_{j-1},\xi_n+\mathrm{i}\eta_n)\,\mathrm{d}\xi_n\right)\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}\\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot(\xi+\mathrm{i}(0,\cdots,0,\eta_n)}F(\xi+\mathrm{i}(0,\cdots,0,\eta_n)\,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

再把 ξ_{n-1} 视为 z, 同样用上述办法引入 η_{n-1}, 依次类推, 最终就会得到 ($\spadesuit$).

由 ($\spadesuit$), 不难看出

$$|u(x)|\leqslant C\mathrm{e}^{-x\cdot\eta}\int_{\mathbb{R}^n}|F(\xi+\mathrm{i}\eta)|\,\mathrm{d}\xi.$$

取 N 足够大, 使得 $(1+|\xi|+|\eta|)^{-N}\le(1+|\xi|)^{-N}$ 可积, 再次利用 F 的衰减性 (注意, $|\xi+\mathrm{i}\eta|=\sqrt{|\xi|^2+|\eta|^2}\sim|\xi|+|\eta|$),

$$|u(x)|\leqslant C_N\mathrm{e}^{-x\cdot\eta+A|\eta|}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{d}\xi}{(1+|\xi|)^N}=\tilde{C}_N\mathrm{e}^{-x\cdot\eta+A|\eta|}.$$

现在取 $\eta = t\frac{x}{|x|}$, $t>0$, 得

$$|u(x)| \leqslant \tilde{C}_N \mathrm{e}^{t(A-|x|)}, \quad \forall t>0.$$

因此, 当 $|x|>A$ 时, 令 $t\to\infty$ 可知 u 在 $B(0, A)$ 之外为 0, 即有 $\operatorname{supp} u \subseteq B(0,A)$. □

(2) 的证明. 先证 “ $\Rightarrow$ ”: 前一断言已在定理 5 中证明. 现在我们证明 $F(z)$ 满足性质 (P2).

为此, 取函数 $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$, 它在 $(-\infty,1/2)$ 中取值为 1, 在 $(1, \infty)$ 中取值为零. 置

$$\varphi_\xi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\psi(|\xi|(|x|-A)) \in C^\infty,$$

它在 u 的支集 $\{|x|\le A\}$ 的邻域上与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}$ 一致. 于是由连续性,

$$|F(\xi)| = |\langle u_x, \varphi_\xi(x)\rangle| \le C\sum_{|\alpha|\le N}\sup_x |D_x^\alpha\varphi_\xi(x)|.$$

因为 φ_ξ 的支集在 $|x|\le A+\frac{1}{|\xi|}$ 上, 所以

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}| \le \mathrm{e}^{(A+\frac{1}{|\xi|})|\mathrm{Im}\xi|} \le \mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}\xi|+1},$$

而 $D_x^\alpha\varphi_\xi(x)$ 至多增加关于 $|\xi|$ 的多项式项, 其次数被这里的 N 控制. 所以 (P2) 成立.

再证 “ $\Leftarrow$ ”. 注意到当 $F(z)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上取值时成立

$$|F(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^N, \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^n.$$

于是 $F(\xi)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 故存在 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\hat{u}(\xi)=F(\xi)$.

取 φ_ε 如定理 3 中所定义的磨光核, 则 $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon\subset B(0,\varepsilon)$, 且 $u*\varphi_\varepsilon$ 的 Fourier 变换 $(2\pi)^{n/2}\hat{u}\hat{\varphi}_\varepsilon$ 有 $\mathbb{C}^n$ 上的解析延拓 $F(z)\hat{\varphi}_\varepsilon(z)$, 满足 (这里 M 是任意的自然数)

$$\begin{aligned}|F(z)\hat{\varphi}_\varepsilon(z)| &\leqslant C(1+|z|)^N\mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}z|}\cdot C_{M+N}(1+|z|)^{-M-N}\mathrm{e}^{\varepsilon|\mathrm{Im}z|}\\ &= C_M(1+|z|)^{-M}\mathrm{e}^{(A+\varepsilon)|\mathrm{Im}z|}.\end{aligned}$$

由本定理的第一部分 (紧支光滑函数的 Paley-Wiener-Schwartz 定理) 可知, $u*\varphi_\varepsilon$ 是 C^∞ 函数且 $\operatorname{supp}(u*\varphi_\varepsilon)\subseteq B(0, A+\varepsilon)$. 令 $\varepsilon\to0$, 由于 $u*\varphi_\varepsilon\to u$ $(\mathcal{D}')$, 利用广义函数支集的定义即得 $\operatorname{supp}u\subset B(0,A)$, 从而 $u\in\mathcal{E}'$. □

第五讲　广义函数(三): 微分算子的基本解及 Schwartz 核定理

这一讲我们首先介绍微分算子的基本解的概念, 求出 Laplace 算子的基本解, 然后介绍连续平移不变算子用广义函数卷积表示的定理以及 Schwartz 核定理. 这些结果都涉及用广义函数来表示算子, 对于今后理解卷积型及非卷积型奇异积分算子都有着基本的重要性.

一　常系数线性微分算子的基本解

定义1. 称广义函数 $E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是常(复)系数微分算子 $P\doteq\sum a_\alpha\partial^\alpha$ 的一个基本解, 若 $PE=\delta_0$.

微分算子的基本解的重要性体现在其具有如下性质: 设 $u,\ f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\begin{aligned} E*(Pu) &= P(E*u)=(PE)*u=\delta_0*u=u,\\ P(E*f) &= P(E)*f=f. \end{aligned}$$

这不难用求导与卷积换序的性质验证. 这两条性质表明, 与基本解 E 做卷积, 既是 P 的左逆, 也是 P 的右逆. 第二式表明, 只要找到一个基本解, 那么对任意的 $f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 方程 $Pu=f$ 就有解 $u=E*f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 而且可以通过第一式, 由 f 的正则性信息得到 u 的正则性.

习题 1. 计算一元函数求导算子 u' 的基本解. □

下面计算 Laplace 算子的基本解. 这是我们后面研究的卷积型奇异积分算子的重要来源之一.

定理1. 置

$$E(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln|x|, & x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\},\\ -\frac{1}{(n-2)c_n}|x|^{2-n}, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\quad n>2,\end{cases}$$

其中 c_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的表面积. 那么 ∂_jE 是局部可积函数 $x_j|x|^{-n}/c_n$, 且

$$\Delta E=\sum_{j=1}^n\partial_j^2E=\delta_0.$$

证明. 1. 设 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则由控制收敛定理和 Gauss 公式,

$$\langle\partial_jE,\varphi\rangle=-\langle E,\partial_j\varphi\rangle=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|>\varepsilon}E(x)\partial_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\partial_jE(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|=\varepsilon}E(x)\varphi(x)\frac{x_j}{|x|}\,\mathrm{d}S.$$

最后一项面积分是 $O(\varepsilon)$ $(n>2)$ 或 $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|)$ $(n=2)$ 量级, 从而 $\varepsilon\to 0$ 时极限为零. 故广义函数导数 $\partial_j E$ 其实是局部可积函数 $\partial_j E(x)=x_j|x|^{-n}/c_n$.

2. 注意当 $x\neq 0$ 时, 直接计算, 确实成立 $\Delta E(x)=0$. 由此, 利用逼近和第二 Green 公式, 我们有

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta E,\varphi\rangle &= \langle E,\Delta\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}(E\Delta\varphi-\varphi\Delta E)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|=\varepsilon}\langle \varphi\nabla E-E\nabla\varphi,\frac{x}{|x|}\rangle\,\mathrm{d}S\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|=\varepsilon}\langle \varphi\nabla E,\frac{x}{|x|}\rangle\,\mathrm{d}S+\lim_{\varepsilon\to 0}O(\varepsilon\ln\varepsilon)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{c_n\varepsilon^n}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)\langle x,\frac{x}{|x|}\rangle\,\mathrm{d}S\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{c_n\varepsilon^{n-1}}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}S=\varphi(0).
\end{aligned}
$$

定理得证. □

回忆当 $n=2$ 时, 在复平面 z 上, 成立 $\Delta=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}$, 以及

$$4\frac{\partial E(z)}{\partial z}=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi}\ln|z|^2=\frac{1}{\pi}\frac{1}{z},$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{z}\right)=\delta_0,$$

即 Cauchy–Riemann 算子 (构成一阶椭圆型方程组) 的基本解是 $1/(\pi z)$.

二 平移不变算子与广义函数的卷积

定义2. 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的函数构成的线性空间. 称 X 是关于平移封闭的, 若 $\forall f\in X,\ \forall z\in\mathbb{R}^n$, 成立 $\tau^z f\in X$.[1] 设 X, Y 是两个关于平移封闭的线性空间, $T: X\to Y$ 是线性算子. 称 T 为平移不变算子, 若:

$$\tau^x(Tf)=T(\tau^x f),\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

例1. $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\le p\le\infty)$ 是关于平移封闭的空间.

[1] 回忆定义: $(\tau^x f)(y)=f(y-x)$, $\tilde f(x)=f(-x)$.

定理2 (平移不变算子的卷积表示)**.** 设 $1 \le p,\ q \le \infty$, T 是 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ 的平移不变的有界线性算子, 则存在唯一的 $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$Tf = f * v, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

这个定理的证明需要如下较为粗糙的嵌入引理. 它将在稍后证明.

引理1. 设 $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le q \le \infty)$, 且对任意多重指标 $|\alpha| \le n+1$, 成立 $\partial^\alpha h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 那么 h 几乎处处等于一个连续函数 H, 还满足不等式

$$|H(0)| \le c_{n,q} \sum_{|\alpha| \le n+1} \|\partial^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

定理 2 的证明 1. 首先证明: $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, α 是多重指标, 成立 $\partial^\alpha(Tf) = T(\partial^\alpha f)$. 为此只要证 $\partial_j(Tf) = T(\partial_j f)$.

回忆对任意 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 当 $h \to 0$ 时成立

$$\frac{\tau^{-he_j} g - g}{h} \to \partial_j g \ \ (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

由此,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_j(Tf), g\rangle &= -\langle Tf, \partial_j g\rangle = -\lim_{h\to 0}\left\langle Tf, \frac{\tau^{-he_j} g - g}{h}\right\rangle \\
&= -\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)\frac{\tau^{-he_j} g - g}{h}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tau^{he_j} - 1}{-h}(Tf)(x) g(x)\,\mathrm{d}x \quad [\text{差分的“分部积分”}] \\
&= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} T\left(\frac{\tau^{he_j} f - f}{-h}\right)(x) g(x)\,\mathrm{d}x \quad [\text{平移不变性}] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} T(\partial_j f)(x) g(x)\,\mathrm{d}x = \langle T(\partial_j f),\ g\rangle. \quad [T\ \text{的连续性}]
\end{aligned}$$

这就证明了 $\partial_j(Tf) = T(\partial_j f)$.

2. 定义 u 为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函: [2]

$$\boxed{\langle u,\ f\rangle \doteq (Tf)(0).}$$

[2]可以从卷积形式猜出该定义方式.

首先, 由第 1 步, $\forall$多重指标 α, $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 成立 $\partial^\alpha(Tf)=T(\partial^\alpha f)\in L^q(\mathbb{R}^n)$. 根据引理 1, 可知 $(Tf)(0)$ 有定义, 所以上述定义合理. 其次, 显然 $\langle u,\ f\rangle$ 关于 f 是线性的. 再次, 由引理 1, 成立

$$\begin{aligned}|\langle u,\ f\rangle|=|(Tf)(0)| &\le c_{n,q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|\partial^\alpha(Tf)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}=c_{n,q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|T(\partial^\alpha f)\|_{L^q}\\ &\le c_{n,q}\|T\|_{L^p\to L^q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\le c'_{n,q}\|T\|_{L^p\to L^q}\sum_{|\alpha|\le m,\ \ |\beta|\le k}\rho_{\alpha,\beta}(f),\end{aligned}$$

这就证明了 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3. 置 $v\equiv\tilde{u}$, 则 $Tf=f*v$. 事实上, 由上一讲给出的卷积的表达式,

$$\begin{aligned}f*v(x) &= \langle v,\tau^x\tilde{f}\rangle=\langle\tilde{u},\tau^x\tilde{f}\rangle=\langle u,\widetilde{\tau^x\tilde{f}}\rangle=\langle u,f(x+\cdot)\rangle\\ &= \langle u,\tau^{-x}f\rangle=T(\tau^{-x}f)(0)=(\tau^{-x}(Tf))(0)=(Tf)(x).\end{aligned}$$

4. 唯一性. 若有缓增广义函数 $v_1,\ v_2$ 使得 $Tf=f*v_1=f*v_2$, 则对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 均成立 $f*(v_1-v_2)=0$. 两边取 Fourier 变换就得到 $v_1-v_2=0$. □

下面我们再证明嵌入引理 1.

引理 1 的证明 1. 设 $h\in L^q(\mathbb{R}^n)$. 作截断函数

$$\Phi_R\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ \ \Phi_R(x)\doteq\begin{cases}1, & |x|\le R\\ 0, & |x|>2R\end{cases},\ \ 则\ \ \Phi_Rh\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

利用 L^1 函数的 Fourier (逆)变换是一致连续函数, 以及 Fourier (逆)变换是 $L^1(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的有界的算子, 只需要证 $\widehat{\Phi_Rh}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 就指导 $\Phi_Rh=(\widehat{\Phi_Rh})^\vee$ 是连续函数, 以及所断言的不等式. 这里的思想就是用光滑性换取衰减性, 或用衰减性换取光滑性. 这也是用 Fourier 分析证明诸如 Sobolev 嵌入定理的基本思路.

2. 利用如下关于多项式的基本不等式:

$$\begin{cases}|x|^k &\le\ c_{k,n}\sum_{|\alpha|=k}|x^\alpha|,\\ 1 &\le\ c_n(1+|x|)^{-(n+1)}\sum_{|\alpha|\le n+1}|(-\mathrm{i}x)^\alpha|.\end{cases}$$

其中第一式可以利用连续函数在单位球面 $\{|x|=1\}$ 上必取到最小值加以证明, 而第二式可由

第一式结合二项式定理证明. 由第二式, 我们得到 (注意如何实现用光滑性换衰减性)

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\Phi_R h}(x)| &\le c_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} |(-\mathrm{i}x)^\alpha \widehat{\Phi_R h}(x)| \\
&\le c_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} |\widehat{D^\alpha(\Phi_R h)}(x)| \\
&\le c_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha(\Phi_R h)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\le c_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha(\Phi_R h)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}((2R)^n)^{\frac{1}{q'}} \\
&\le c_{n,q,R}(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha(\Phi_R h)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&\le c_{n,q,R}(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

从而 $\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\Phi_R h}(x)|\,\mathrm{d}x \le c_{n,q,R}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|D^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. 由此即得

$$
|h(0)| = |\Phi_R h(0)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\Phi_R h}(x)\,\mathrm{d}x\right| \le c_{n,q,R} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.
$$

□

注记. 定理 2中得到的 $v \in \mathcal{S}'$ 使得 $Tf = f * v$ 仅仅对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 成立是必要的, 换句话说, f 的范围不能随意扩大. 例如考虑 $L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ 的平移不变算子. 设

$$
X \doteq \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}):\ \Phi(f) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^R f(t)\,\mathrm{d}t \text{ 存在} \right\} \subset L^\infty(\mathbb{R}),
$$

则 $\Phi(\cdot)$ 为 X 上有界线性泛函: $|\Phi(f)| \le \|f\|_{L^\infty}$. 由 Hahn-Banach 泛函延拓定理, Φ 可保范延拓为 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的泛函 $\tilde{\Phi}: L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$; 它亦可视为 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子.

$\tilde{\Phi}$ 是平移不变的. 这是因为 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(\tau^x f) - \tau^x \tilde{\Phi}(f) &= \tilde{\Phi}(\tau^x f) - \tilde{\Phi}(f) = \tilde{\Phi}(\tau^x f - f) \\
&= \Phi(\tau^x f - f) = 0.
\end{aligned}
$$

这里需验证对固定的 $x\in\mathbb{R}$, $\tau^x f-f\in X$. 事实上,

$$
\begin{aligned}
\left|\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R(\tau^x f-f)\mathrm{d}t\right| &= \left|\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\left(\int_0^R f(t-x)\mathrm{d}t-\int_0^R f(t)\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \left|\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\left(\int_{-x}^{R-x} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^R f(t)\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \left|\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\left(\int_{-x}^{0}-\int_{R-x}^R\right)f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\le \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\|f\|_{L^\infty}\cdot 2|x| \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

注意到 $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 都成立 $\Phi(f)=0$, 所以若存在 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 使得 $\tilde{\Phi}(f)=f*u$, 则必然有 $u\equiv 0$. 所以由于 L^∞ 的不可分性, 用广义函数的卷积未必能表示出 L^∞ 上所有平移不变有界线性算子.

三 Schwartz 核定理

Schwartz 核定理指出可以把很广泛的一类连续线性算子用乘积空间上的广义函数来表示. 这对于我们以后理解和定义非卷积型奇异积分算子具有重要意义.

1. 广义函数的张量积

先介绍广义函数的张量积的概念. 由下述定理 4 中的唯一性证明就可得到 Schwartz 核定理中断言的惟一性. 这里的其它结论后面不会用到, 但证明技巧是很有启发性的.

定理3. 设 $X\subset\mathbb{R}^m$, $Y\subset\mathbb{R}^n$ 都是开集, $\varphi(x,y)\in C^\infty(X\times Y)$, 且存在 X 的紧子集 K 使得只要 $x\notin K$, 就成立 $\varphi(x,y)=0$, 那么 $\forall u\in\mathcal{D}'(X)$, [3]

$$y\mapsto u(\varphi(\cdot,y))\in C^\infty,$$

且 $\partial_y^\alpha u(\varphi(\cdot,y))=u(\partial_y^\alpha\varphi(\cdot,y))$.

[3] $\mathcal{D}'(X)$ 是 $C_0^\infty(X)$ 上线性连续泛函构成的带有弱收敛拓扑的集合, 其元素叫作 X 上的广义函数. 这里 $C_0^\infty(X)$ 是支集在 X 中的 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数组成的、带半范数 $\rho_\alpha(u)=\sup_{x\in K}|\partial^\alpha u(x)|$ 的 Fréchet 空间.

证明. 取定 $y \in Y$, 将 φ 在 $(x,\ y)$ 点作 Taylor 展开, 得到

$$\varphi(x,y+h)=\varphi(x,y)+\sum_{j=1}^{n}h_j\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y_j}+\psi(x,y,h).$$

对任意多重指标 α, 在该式中将 φ 换做 $\partial_x^\alpha\varphi(x,\ y)$, 它仍成立. 注意到已假设 φ 关于变量 x 有紧支集, 则对固定的y,

$$\sup_x|\partial_x^\alpha\psi(x,y,h)|=O(|h|^2),\quad \text{当}\ h\to 0.$$

根据 u 的线性, 有

$$u(\varphi(\cdot,y+h))=u(\varphi(\cdot,y))+\sum_{j=1}^{n}h_j\langle u,\frac{\partial\varphi(\cdot,y)}{\partial y_j}\rangle+O(|h|^2),$$

其中最后一项利用了 u 连续的性质. 由此, 就知道 $u(\varphi(\cdot,y))$ 关于 y 是连续的, 而且 $\partial_j u(\varphi(\cdot,\ y))=u(\partial_{y_j}\varphi(\cdot,y))$. 通过迭代归纳, (将 $\partial_{y_j}\varphi(\cdot,\ y)$ 视作 φ), 就得到要证的结论. □

定义3. 设 $X_i\subset\mathbb{R}^{n_i}$ $(i=1,\ 2)$ 是开集, $u_i\in C(X_i)$. 定义 u_1 与 u_2 的张量积 $u_1\otimes u_2\in C(X_1\times X_2)$ 为

$$u_1\otimes u_2(x_1,x_2)=u_1(x_1)u_2(x_2),\qquad x_j\in X_j.$$

不难验证, 对任意 $\varphi_j\in C_0^\infty(X_j)$, 成立如下等式:

$$\iint(u_1\otimes u_2)(\varphi_1\otimes\varphi_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int u_1\varphi_1\,\mathrm{d}x_1\int u_2\varphi_2\,\mathrm{d}x_2. \tag{5.1}$$

定理4. 设 $u_j\in\mathcal{D}'(X_j)$ $(j=1,\ 2)$, 则存在唯一的广义函数 $u\in\mathcal{D}'(X_1\times X_2)$ 使得

$$u(\varphi_1\otimes\varphi_2)=u_1(\varphi_1)u_2(\varphi_2),\qquad \varphi_j\in C_0^\infty(X_j). \tag{5.2}$$

此外, u 还满足

$$u(\varphi)=u_1[u_2(\varphi(x_1,\ x_2))]=u_2[u_1(\varphi(x_1,\ x_2))],\qquad \varphi\in C_0^\infty(X_1\times X_2), \tag{5.3}$$

其中 u_j 作用在 x_j 为自变量的函数上.

若 $u_j\in\mathcal{E}'$, $j=1,\ 2$, 则对 $\varphi\in C^\infty$, 上述结论仍成立. u 称作 u_1 与 u_2 的张量积, 记作 $u=u_1\otimes u_2$.

请将该定理结论和定义 3 类比, 把关于函数的结论推广到广义函数, 而 (5.3) 就类似于关于重积分和累次积分的 Fubini 定理了.

证明. 1. 唯一性. 即证明若 $u\in\mathcal{D}'(X_1\times X_2)$ 对任何 $\varphi_j\in C_0^\infty(X_j)$ 都成立 $u(\varphi_1\otimes\varphi_2)=0$, 则 $u\equiv 0$.

取磨光核 $\psi_j\in\mathbb{R}^{n_j}$, $\psi_j\ge 0$, $\int\psi_j\mathrm{d}x_j=1$, 且 $\operatorname{supp}\psi_j\subset\{|x_j|\le 1\}$. 置

$$\Psi_\varepsilon(x_1,x_2)=\varepsilon^{-n_1-n_2}\psi_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\psi_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)=\psi_{1,\varepsilon}\otimes\psi_{2,\varepsilon}.$$

回忆 (上一讲定理 3 证明的第一步已证) 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 对于 $X_1\times X_2$ 的任意给定的紧子集 Y, 都成立 $\Psi_\varepsilon * u\to u$ $(\mathcal{D}'(Y))$; 另一方面

$$(\Psi_\varepsilon * u)(x_1,x_2)=u(\Psi_\varepsilon(x_1-\cdot,x_2-\cdot))=u(\psi_{1,\varepsilon}(x_1-\cdot)\otimes\psi_{2,\varepsilon}(x_2-\cdot))=0,$$

于是在 Y 上必有 $u=0$. 由 Y 的任意性可知在 $X_1\times X_2$ 上 u 为零.

2. 存在性. 设 K_j 为 X_j 的紧子集, 则

$$|u_j(\varphi_j)|\le C_j\sum_{|\alpha|\le k_j}\sup|\partial^\alpha\varphi_j|,\qquad \varphi_j\in C_0^\infty(K_j).$$

若 $\varphi\in C_0^\infty(K_1\times K_2)$, 根据定理 3, 就有

$$I_\varphi(x_1)\triangleq u_2(\varphi(x_1,\cdot))\in C_0^\infty(K_1),$$

而且 $\partial_{x_1}^\alpha I_\varphi(x_1)=u_2(\partial_{x_1}^\alpha\varphi(x_1,\cdot))$. 利用 u_2 的连续性, 就有

$$\sup_{x_1}|\partial_{x_1}^\alpha I_\varphi(x_1)|\le C_2\sum_{|\beta|\le k_2}\sup_{x_1,x_2}|\partial_{x_1}^\alpha\partial_{x_2}^\beta\varphi(x_1,x_2)|.$$

将 u_1 作用于 $I_\varphi(x_1)$, 利用其连续性和上面不等式,

$$|u_1(I_\varphi)|\le C_1C_2\sum_{|\alpha|\le k_1,|\beta|\le k_2}\sup_{x_1,x_2}|\partial_{x_1}^\alpha\partial_{x_2}^\beta\varphi(x_1,x_2)|.$$

由此, 定义 $u(\varphi)=u_1(I_\varphi)$, 则 $u\in\mathcal{D}'(X_1\times X_2)$. 它满足 (5.2) 和 (5.3) 的第一个等式. 同样可以得到 $v\in\mathcal{D}'(X_1\times X_2)$ 满足 (5.2) 和 (5.3) 的第二个等式. 利用唯一性, 必有 $u=v$, 从而 u 满足 (5.2) 和 (5.3).

3. 余下的结论, 即$u\in\mathcal{E}'$的情形, 可类似证明. □

2. Schwartz 核定理

给定 $K\in C(X_1\times X_2)$, 不难验证

$$(\mathcal{K}\varphi)(x_1)=\int K(x_1,x_2)\varphi(x_2)\,\mathrm{d}x_2,\qquad \varphi\in C_0(X_2),\ \ x_1\in X_1$$

定义了从 $C_0(X_2)$ 到 $C(X_1)$ 的一个积分算子[4], 而且成立等式 (将 K 视作广义函数)

$$\langle\mathcal{K}\varphi,\psi\rangle=K(\psi\otimes\varphi),\quad \psi\in C_0^\infty(X_1),\ \ \varphi\in C_0^\infty(X_2). \tag{5.4}$$

下面我们将证明, 当 K 推广为一个广义函数, 而 $\varphi\in C_0^\infty(X_2)$ 时, $\mathcal{K}\varphi$ 仍可视作一个广义函数.

定理5 (Schwartz 核定理). *对任意给定的 $K\in\mathcal{D}'(X_1\times X_2)$, (5.4) 定义了一个 $C_0^\infty(X_2)$ 到 $\mathcal{D}'(X_1)$ 的连续线性映射 $\mathcal{K}$ (即 φ_j 在 $C_0^\infty(X_2)$ 中收敛到 0 时 $\mathcal{K}\varphi_j$ 在 $\mathcal{D}'(X_1)$ 中收敛到 0).*

反之, 对任一给定的 $C_0^\infty(X_2)$ 到 $\mathcal{D}'(X_1)$ 的连续线性映射 $\mathcal{K}$, 都存在唯一的广义函数 $K\in\mathcal{D}'(X_1\times X_2)$ 使得 (5.4) 成立. 广义函数 K 称作映射 $\mathcal{K}$'的核.

证明. 1. 若 $K\in\mathcal{D}'(X_1\times X_2)$, 那么由其连续性, 对于 X_j 的紧子集 K_j, $j=1,\ 2$, 存在常数 $C>0$ 和自然数 k_1, k_2, 使得对任意 $\psi\in C_0^\infty(K_1)$ 和 $\varphi\in C_0^\infty(K_2)$, 成立不等式

$$|K(\psi\otimes\varphi)|\le C\sum_{|\alpha|\le k_1,\ \ |\beta|\le k_2}\sup_{x_1,x_2}|\partial_{x_1}^\alpha\psi||\partial_{x_2}^\beta\varphi|.$$

这表明若 φ 固定, 则线性泛函 $\psi\mapsto K(\psi\otimes\varphi)$ 就确定了一个 $\mathcal{D}'(X_1)$ 广义函数, 记作 $\mathcal{K}\varphi$. 按照广义函数与测试函数配对的写法, 也就是 (5.4) 成立. 当 ψ 作为测试函数固定时, 上面不等式还表明了线性算子 $\mathcal{K}$ 的连续性.

2. 下面证明定理第二部分. 对于唯一性, 证明和定理 4 中的完全一样. (取 $u=K_1-K_2$ 并按各变量分别磨光, 证明$u=0$.)

3. 下面开始证明存在性. 首先, 对任意给定的 X_j 的紧子集 K_j, $j=1,\ 2$, 存在常数 $C>0$ 和自然数 N_1, N_2 使得成立如下不等式:

$$|\langle\mathcal{K}\varphi,\psi\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le N_1}\sup_{x_1}|\partial_{x_1}^\alpha\psi|\sum_{|\beta|\le N_2}\sup_{x_2}|\partial_{x_2}^\alpha\varphi|,\qquad \forall\psi\in C_0^\infty(K_1),\ \ \varphi\in C_0^\infty(K_2). \tag{5.5}$$

[4]证明连续性时, 利用 x_2 在一个紧集上, x_1 在给定某点的闭包为紧集的开邻域上, 从而对 K 成立一致连续性.

事实上, 由假设, 双线性型

$$C_0^\infty(K_1)\times C_0^\infty(K_2)\ni(\psi,\varphi)\mapsto\langle\mathcal{K}\varphi,\psi\rangle$$

关于变量 ψ 和 φ 是分别连续的 (即 φ 任意固定时关于 ψ 连续, ψ 任意固定时关于 φ 连续). 但是利用泛函分析中的共鸣定理[5], Fréchet 空间的直积 (这仍然是非空的完备的度量空间, 从而是第二纲集) 上的关于各个变量分别连续的双线性型必然是关于所有变量连续的. 这就得到了 (5.5).

4. 取定 X_j 的紧子集 Y_j, 并取紧集 K_j 是 Y_j 的一个邻域. 对任意 $(x_1,\ x_2)\in Y_1\times Y_2$ 及 $\varepsilon>0$, 置

$$\boxed{K_\varepsilon(x_1,x_2)\triangleq\varepsilon^{-n_1-n_2}\Big\langle\mathcal{K}\psi_2\Big(\frac{x_2-\cdot}{\varepsilon}\Big),\ \psi_1\Big(\frac{x_1-\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle,}\tag{5.6}$$

其中 ψ_j 是定理 4 证明中定义的磨光函数. (不难证明, 这是关于 ε, x_1, x_2 的 C^∞ 函数.)

当 ε 小于 Y_j 到 K_j^c (K_j 的补集) 的距离时, (5.6) 是有定义的. 利用估计 (5.5), 不难得到, 对 $\mu=n_1+n_2+N_1+N_2$, 成立

$$|K_\varepsilon(x_1,x_2)|\le C\varepsilon^{-\mu},\quad x_j\in X_j,\ \ j=1,2.\tag{5.7}$$

注意到如果符合 (5.4) 要求的广义函数 K 存在, 那么根据卷积定义, 就有 $K_\varepsilon=K*\Psi_\varepsilon=K*(\psi_{1,\varepsilon}\otimes\psi_{2,\varepsilon})$, 从而当 $\varepsilon\to0$ 时应该在 $\mathcal{D}'(Y_1\times Y_2)$ 中 $K_\varepsilon\to K$. 受此启发, 下面的思路就是证明当 $\varepsilon\to0$ 时 K_ε 确实在 $\mathcal{D}'(Y_1\times Y_2)$ 中收敛, 其基本思想是, 把函数 $f(\varepsilon)$ 在 0 点附近作 Taylor 展开, 就比较容易找到 f 当 $\varepsilon\to0$ 时的极限.

[5]即一致有界性原理 [24, p. 69]: 设 X 是拓扑线性空间, 不能表示为可列个闭的稀疏集的并集 (即第二纲集). 设 $\{T_a:\ a\in A\}$ 是一族 X 到拟赋范线性空间 Y 的连续映射. 又设对任意 $a\in A$, x, $y\in X$, 成立

$$\|T_a(x+y)\|\le\|T_ax\|+\|T_ay\|,\quad \|T_a(\alpha x)\|=\alpha\|T_a(x)\|,\ \forall\alpha\ge0.$$

那么如果集合 $\{T_ax:\ a\in A\}$ 对每一个固定的 x 都有界, 则 $x\to0$ 时 T_ax 关于 $a\in A$ 一致地在 Y 中强收敛到零.

这里回忆所谓稀疏集, 是指内部是空集的集. Baire 纲定理指出完备度量空间是第二纲集. 拟赋范线性空间是带有拟范数的数域K上的线性空间 Y. 拟范数是一个 $Y\to\mathbb{R}_+$ 的函数 h, 满足要求 i) $h(x)=0\Rightarrow x=0$, ii) 存在正的常数 C 使得 $h(x+y)\le C(h(x)+h(y))$, $\forall x,\ y\in Y$, iii) $h(kx)\le|k|h(x)$, $\forall k\in K, x\in Y$.

请读者选取恰当的 A, X, Y, T_a, 用共鸣定理证明上述关于双线性型的论断.

5. 注意若 $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 利用 $\psi_\varepsilon(x)$ 关于 (ε,x) 的齐次 $-n$ 次性质,[6] 成立 (这里设 $x=(x^1,\cdots,x^m)$)

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\varepsilon(x)+\sum_j x^j\frac{\partial}{\partial x^j}\psi_\varepsilon(x)=-n\psi_\varepsilon(x),$$

从而有

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(\varepsilon^{-n}\psi(\frac{x}{\varepsilon})\Big)=\sum_j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\varepsilon^{-n}\psi_j(\frac{x}{\varepsilon})\Big),\qquad \psi_j(x)=-x^j\psi(x). \tag{5.8}$$

利用连续性 (5.5), 不难通过差分证明对 (5.6) 可求导, 而且求导可以和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 以及 $\mathcal{K}$ 换序. 于是由性质 (5.8), 得

$$\frac{\partial K_\varepsilon(x_1,x_2)}{\partial\varepsilon}=\sum_\nu\frac{\partial L^\nu_\varepsilon(x_1,x_2)}{\partial x_\nu},$$

其中 ν 跑遍 $(x_1,\,x_2)$ 的所有坐标分量 $(x_1^1,\cdots,x_1^m,\,x_2^1,\cdots,x_2^n)$, 而 L^ν_ε 是在 (5.6) 中将 ψ_1 或 ψ_2 换做 $-x^\nu\psi_1$ 或 $-x^\nu\psi_2$ 得到的表达式. 从而估计 (5.5) 对 L^ν_ε 仍然有效. 注意这里可以将导数 ∂_{x^ν} 提出来, 因为 x_1 与 x_2 的各个变量间是互相独立的.

6. 重复上述求导过程, 可以得到 $K^{(j)}_\varepsilon(x_1,\,x_2)=\frac{\partial^j K_\varepsilon(x_1,\,x_2)}{\partial\varepsilon^j}$, 它可 **表为满足估计 (5.5) 的函数的 j 阶导数的和.** 现在取定充分小的 $\delta>0$ 和 $\varepsilon>0$, 有如下带 Cauchy 余项的 Taylor 展开式

$$K_\varepsilon=\sum_{j=0}^{\mu}\frac{1}{j!}(\varepsilon-\delta)^jK^{(j)}_\delta+\frac{1}{\mu!}(\varepsilon-\delta)^{\mu+1}\int_0^1K^{(\mu+1)}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}(1-t)^\mu\,\mathrm{d}t.$$

再取定 $\Phi\in C_0^\infty(Y_1\times Y_2)$, 那么当 $\varepsilon\to0$ 时, 成立

$$\langle K_\varepsilon,\Phi\rangle\to\langle K_0,\Phi\rangle\triangleq\sum_{j=0}^{\mu}\frac{1}{j!}(-\delta)^j\langle K^{(j)}_\delta,\Phi\rangle+\frac{1}{\mu!}(-\delta)^{\mu+1}\int_0^1\langle K^{(\mu+1)}_{\delta(1-t)},\,\Phi\rangle(1-t)^\mu\,\mathrm{d}t.$$

事实上这里只需证明 $\int_0^1\langle K^{(\mu+1)}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)},\;\Phi\rangle(1-t)^\mu\,\mathrm{d}t\to\int_0^1\langle K^{(\mu+1)}_{\delta(1-t)},\;\Phi\rangle(1-t)^\mu\,\mathrm{d}t$. 为此, 可将 $K^{(\mu+1)}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}$ 的 $\mu+1$ 阶导数 (注意这些导数都是关于变量 x^ν 的) 转移到 Φ 身上, 再利用 (5.5) 的估计, 成立

$$C(1-t)^\mu(\delta+t(\varepsilon-\delta))^{-\mu}\le C\delta^{-\mu},$$

从而由 Lebesgue 控制收敛定理, 以及再把 Φ 的导数搬回来得到结论. 利用 K_0 的上述表达式, 不难根据定义, 以及 (5.5), 验证 $K_0\in\mathcal{D}'(Y_1\times Y_2)$.

[6] 函数 $f(x)$ 称为 k 次齐次的, 如果对任意 $t>0$, 有 $f(tx)=t^kf(x)$. 该式两边对 t 在 $t=1$ 求导, 就有 $x\cdot Df(x)=kf(x)$.

7. 现在证明 K_0 确实是满足 (5.4) 的广义函数. 取 $\varphi_j \in C_0^\infty(Y_j)$, 那么

$$\langle K_\varepsilon, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \iint K_\varepsilon(x_1, x_2)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

又记 $\tilde{\psi}_{j,\varepsilon}(x) \doteq \varepsilon^{-n}\psi_j(-x/\varepsilon)$, 则由算子 $\mathcal{K}$ 和 $\langle\ ,\ \rangle$ 的线性,

$$\iint K_\varepsilon(x_1, x_2)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \iint \langle \mathcal{K}\tilde{\psi}_{2,\varepsilon}(\cdot - x_2)\varphi_2(x_2), \tilde{\psi}_{1,\varepsilon}(\cdot - x_1)\varphi_1(x_1)\rangle\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

将右侧积分写为 Riemann 和, 利用 $\mathcal{K}$ 和 $\langle\ ,\ \rangle$ 的连续性, 可以证明积分号可与 $\langle\ ,\ \rangle$ 交换. 于是成立

$$\langle K_\varepsilon, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle \mathcal{K}(\varphi_2 * \tilde{\psi}_{2,\varepsilon}),\ \varphi_1 * \tilde{\psi}_{1,\varepsilon} \rangle.$$

因为 $\varepsilon \to 0$ 时 $\varphi_j * \tilde{\psi}_{j,\,\varepsilon}$ 在 $C_0^\infty(Y_j)$ 中收敛到 φ_j, 于是得到

$$\langle K_0, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle \mathcal{K}\varphi_2, \varphi_1 \rangle, \qquad \varphi_j \in C_0^\infty(Y_j).$$

由于 Y_j 是 X_j 的任意紧子集, 定理得证. □

例2. 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集. 恒等映射 $\mathcal{I}:\ C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X)$ 的核是如下确定的广义函数 K:

$$\langle K, \Phi \rangle = \int_X \Phi(x, x)\,\mathrm{d}x, \quad \Phi \in C_0^\infty(X, X).$$

注意验证 K 的支集在对角线 $\{(x,\ x):\ x \in X\}$ 上.

例3. 设 $f:\ X_1 \to X_2$ 是连续映射, 定义 $\mathcal{K}\varphi = \varphi \circ f,\ \varphi \in C_0^\infty(X_2)$, 则它的核 K 由如下方式确定:

$$\langle K,\ \Phi \rangle = \int_{X_1} \Phi(x, f(x))\,\mathrm{d}x, \quad \Phi \in C_0^\infty(X_1, X_2).$$

可见 K 的支集在 f 的图像 $\{(x,\ f(x)):\ x \in X_1\}$ 上.

第六讲　插值定理

研究偏微分方程的重要方法之一, 是在适当函数空间得到它的解的(范数的)估计式, 再利用逼近和紧性求解. 在调和分析中, 这往往对应着证明某些线性算子在适当空间之间的有界性. 插值定理可以帮助我们通过仅仅考虑一些极端的或特殊的情形, 就得到在一般情形算子的有界性. 显然这是证明算子有界性的强有力的工具.

按证明方法是基于实分析方法还是复分析方法, 插值定理分为实插值和复插值两类. 前者的典型代表是 Marcinkiewicz 插值定理, 后者的典型代表是 Riesz–Thorin 插值定理. 它们在后续奇异积分算子理论中扮演着非常重要的角色. 此外, 这两个定理的证明技巧也很有启发性, 值得玩味.

一　分布函数与弱 L^p 空间

1. 分布函数

设 (X,μ) 是测度空间, $f(x)$ 是 $(X,\ \mu)$ 上的可测函数. 我们回忆常用的函数空间 L^p 的定义:

定义1. $L^p(X,\ \mu) \doteq \left\{f(x) : \| f(x) \|_{L^p(X,\mu)} \triangleq \left(\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}, 1 \le p < \infty$; 当 $p = \infty$ 时, $L^\infty(X,\ \mu) \doteq \left\{f(x) : \| f(x) \|_{L^\infty(X,\ \mu)} = \operatorname{esssup}_{x\in X}|f(x)| < \infty\right\}$.

定义2 (分布函数). 设 f 是可测函数, 定义其分布函数为

$$\boxed{d_f(\alpha) \doteq \mu\Big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\Big),\ \ \forall\, \alpha \ge 0.}$$

显然 d_f 是单调递减函数. 注意: 分布函数只能反映函数整体的大小, 不能反映其局部的具体的取值情况.

例1. 设 $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0,\ \infty)$, 取 μ 为 *Lebesgue* 测度, 则 $d_f(\alpha) = |\{x \in (0,\infty) :\ |f(x)| > \alpha\}| = |\{x \in (0,\infty) :\ x < \frac{1}{\alpha}\}| = \frac{1}{\alpha}$. 注意这里 $|U|$ 表示集合 U 的 *Lebesgue* 测度.

习题 1. 对如下简单函数, 求其分布函数: $f(x) = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} c_\alpha I_{M_\alpha}(x)$, 这里 $M_\alpha \subset X$ 是可测子集, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, 而 I_M 是集合 M 的特征函数. □

命题1 (基本性质). *1)* $|f|\le|g|\Rightarrow d_f\le d_g$;

2) $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则 $d_{cf}(\alpha)=d_f(\frac{\alpha}{|c|})$;

3) $d_{f+g}(\alpha+\beta)\le d_f(\alpha)+d_g(\beta)$;

4) $d_{fg}(\alpha\beta)\le d_f(\alpha)+d_g(\beta)$.

证明. 这里只证明 3), 其它作为习题. 依定义, 利用 $|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$ 可得

$$\begin{aligned}
d_{f+g}(\alpha+\beta) &= \mu(\{x\in X:|(f+g)(x)|>\alpha+\beta\})\\
&\le \mu(\{x\in X:|f(x)|+|g(x)|>\alpha+\beta\})\\
&\le \mu(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}\cup\{x\in X:|g(x)|>\beta\})\\
&\le \mu(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\})+\mu(\{x\in X:|g(x)|>\beta\})\\
&= d_f(\alpha)+d_g(\beta).
\end{aligned}$$

□

命题2. 若 $f\in L^p(X,\mu)$ $(0<p<\infty)$, 则 $\|f\|^p_{L^p(X,\mu)}=p\int_0^\infty\alpha^{p-1}d_f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$.

证明. 用 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty\alpha^{p-1}d_f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha &= p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\left(\int_X I_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\alpha\\
&= \int_X\left(p\int_0^{|f(x)|}\alpha^{p-1}\,\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_X\alpha^p\Big|_0^{|f(x)|}\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_X|f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \|f\|^p_{L^p(X,\mu)}.
\end{aligned}$$

□

推论1. 若 φ 为 $(0,\ \infty]$ 上的连续可微的单调递增的函数, 且 $\varphi(0)=0$, 则 $\int_X\varphi(|f|)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_0^\infty\varphi'(\alpha)d_f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$.

由上述结论可见, 利用分布函数能够方便地计算只涉及函数大小的量; 它把多元函数积分问题转化为对集合估计测度大小这样一个相对较为简单的 (几何) 问题. 所以上述公式经常用到. 下面是一个很有用的的例子, 注意 $|U|$ 表示集合 U 的 Lebesgue 测度.

例2 (Good-lambda 不等式). 设 u, v 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数, 并且 $\inf\{1,\,u\}$ 和 $v\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 若存在 $\varepsilon>0$ 和 $\gamma\in[0,1)$ 满足 $(1+\varepsilon)^p\gamma<1$ 使得对任何 $\lambda>0$ 都成立

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : u(x)>(1+\varepsilon)\lambda,\, v(x)\le\lambda\}|\le\gamma|\{x\in\mathbb{R}^n : u(x)>\lambda\}|, \tag{6.1}$$

那么

$$\|u\|_{L^p}\le C(p,\varepsilon,\gamma)\,\|v\|_{L^p}.$$

证明. 1. 先设 $\|u\|_{L^p}<\infty$, 那么

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p}^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{u(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda=(1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\\
&= (1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda,\, v(x)\le\lambda\}\cup\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda,\, v(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\\
&\le (1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda, v(x)\le\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda+(1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{v(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\\
&\le \gamma(1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{u(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda+(1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{v(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\\
&= \gamma(1+\varepsilon)^p\,\|u\|_{L^p}^p+(1+\varepsilon)^p\,\|v\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

由于 $\gamma(1+\varepsilon)^p<1$, 并且 $\|u\|_{L^p}<\infty$, 我们就得到

$$\|u\|_{L^p}^p\le\frac{(1+\varepsilon)^p}{1-\gamma(1+\varepsilon)^p}\,\|v\|_{L^p}^p.$$

2. 若 $\inf\{1,\,u\}\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则不难验证对于任意 $m>1$, 都成立 $\inf\{m,\,u\}\in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\|\inf\{m,\,u\}\|_{L^p}^p &= \int_{u\le1}|u|^p+\int_{1<u\le m}|u|^p+m^p\int_{u>m}\le\int_{u\le1}|u|^p+m^p\int_{u>1}\\
&\le m^p\int_{u\le1}|u|^p+m^p\int_{u>1}=m^p\,\|\inf\{1,\,u\}\|_{L^p}^p<\infty.
\end{aligned}$$

此外, $\inf\{m,\,u\}$ 仍然满足条件 (6.1). 事实上, 若 $(1+\varepsilon)\lambda\ge m$, 则左端就是零, 当然成立; 若 $(1+\varepsilon)\lambda<m$, 那么 $\lambda<m$, 而且 $\Big\{\inf\{m,\,u\}(x)>(1+\varepsilon)\lambda\Big\}=\Big\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda\Big\}$. 所以对 $\inf\{m,\,u\}$ 利用已证结论, 就得到 $\|u\|_{L^p}=\lim_{m\to\infty}\|\inf\{u,\,m\}\|_{L^p}\le C(p,\,\varepsilon,\,\gamma)\,\|v\|_{L^p}$. □

2. 弱 L^p 空间

定义3. *1)* 弱 $L^\infty(X,\,\mu)=L^{\infty,\,\infty}(X,\,\mu)\triangleq L^\infty(X,\,\mu)$;

2) 对 $0<p<\infty$, 弱 $L^p(X,\mu)\doteq\left\{f: f \text{ 是 } (X,\mu) \text{ 上的可测函数, 并且 } \|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}<\infty\right\}$, 其中

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} &\doteq \inf\left\{c: d_f(\alpha)\le\frac{c^p}{\alpha^p},\quad \forall\alpha>0\right\} &(6.2)\\ &= \sup\left\{rd_f(r)^{\frac{1}{p}}: \forall r>0\right\} &(6.3)\end{aligned}$$

习题 2.利用 $d_f(\alpha)\le\frac{c^P}{\alpha^p}\Leftrightarrow \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\le c$, 再由上下确界的定义, 证明 (6.2) 和 (6.3) 相等. □

我们注意弱 L^p 空间 $(1\le p\le\infty)$ 为拟赋范线性空间, 即 $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 不是一个范数, 而满足如下性质:

◇ 齐次性:

$$\begin{aligned}\|kf\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} &= \sup\left\{rd_{kf}(r)^{\frac{1}{p}}: \forall r>0\right\} = \sup\left\{rd_f\left(\frac{r}{|k|}\right)^{\frac{1}{p}}: \forall r>0\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{r}{|k|}d_f\left(\frac{r}{|k|}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot|k|: \forall r>0\right\}\\ &= |k|\sup\left\{\frac{r}{|k|}d_f\left(\frac{r}{|k|}\right)^{\frac{1}{p}}: \forall r>0\right\} = |k|\,\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}.\end{aligned}$$

◇ 正定性: $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}=0 \Rightarrow \forall r>0,\ rd_f(r)^{\frac{1}{p}}=0 \Rightarrow d_f(r)=0 \Rightarrow f\equiv 0$ a.e.

◇ 三角不等式不成立, 但是对 $C_p=\max\{1, 2^{p-1}\}$, 成立[1]

$$\|f+g\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\le C_p(\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}+\|g\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}).$$

命题3. 对 $0<p<\infty$, 有 $L^P(X,\mu)\subsetneq L^{P,\infty}(X,\mu)$, 但 $L^\infty(X,\mu)=L^{\infty,\infty}(X,\mu)$.

证明. 1. $L^P\subseteq L^{P,\infty}$. 设 $f\in L^p$, 则

$$\|f\|^P_{L^p(X,\mu)}=\int_X|f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\ge\int_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}}\alpha^p\,\mathrm{d}\mu(x)=\alpha^p d_f(\alpha),\ \forall\alpha>0,$$

即 $\forall\alpha>0$, $\alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\le\|f\|_{L^p(X,\mu)}\Rightarrow\|f\|_{L^{p,\infty}}\le\|f\|_{L^p}$. 所以 $f\in L^{p,\infty}$.

[1] 可利用 $\forall p>0$, 成立 $(a+b)^p\le C_p(a^p+b^p)$, 以及分布函数的第三个性质加以验证.

2. 要找一个函数 $h(x)$，使得 $h(x)\notin L^p$，但 $h(x)\in L^{p,\infty}$. 为此取 $h(x)=|x|^{-\frac{n}{p}}$, $x\in X=\mathbb{R}^n$, μ 取 Lebesgue 测度, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}|h(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{1}{r}\mathrm{d}r\cdot|c_n|=\infty,$$

所以 $h(x)\notin L^p$. 但

$$d_h(\alpha)=\left|\{x\in\mathbb{R}^n:\ |h(x)|>\alpha\}\right|=\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|<\alpha^{-\frac{p}{n}}\right\}\right|=nc_n\alpha^{-p},$$

所以 $\|h\|_{L^{p,\infty}}=\sup\limits_{\alpha>0}\left(\alpha d_h(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)=(nc_n)^{\frac{1}{p}}<\infty$. □

习题 3.[Kolmogrov 不等式] 设 $u\in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 则对 $\mathbb{R}^n$ 的任意一个具有有限测度的可测子集 E 及任何 $\delta\in(0,1)$, 都成立

$$\int_E|u(x)|^\delta\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{1-\delta}|E|^{1-\delta}\|u\|^\delta_{L^{1,\infty}}.$$

□

(提示: 利用

$$\int_E|u(x)|^\delta\,\mathrm{d}x=\delta\int_0^\infty\lambda^{\delta-1}|\{x\in E:|u(x)|>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\le\delta\int_0^\infty\lambda^{\delta-1}\inf\left\{|E|,\ \frac{\|u\|_{L^{1,\infty}}}{\lambda}\right\}\mathrm{d}\lambda,$$

然后将积分分两部分计算.)

二 范数插值

定理1. 设 $0<p<q\le\infty$, $f\in L^{p,\infty}\cap L^{q,\infty}(X,\mu)$, 则 $\forall r\in(p,q)$, 成立 $f(x)\in L^r(X,\mu)$, 且

$$\boxed{\|f\|_{L^r(X,\mu)}\le\left(\frac{r}{r-p}+\frac{r}{q-r}\right)\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}^{\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\|f\|_{L^{q,\infty}(X,\mu)}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}.}$$

注意, 置 $\theta=\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, 则 $1-\theta=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, $\frac{1}{r}=\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{q}$.

证明. 主要思想是将积分 (函数) 等通过设定若干待定参数分解, 以达到最佳控制. 分两种情形.

1. $q<\infty$ 情形. 因为 $f\in L^{p,\infty}\cap L^{q,\infty}$, 而由定义,

$$\forall\alpha>0,\qquad \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\le\|f\|_{L^{p,\infty}},\qquad \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{q}}\le\|f\|_{L^{q,\infty}}.$$

所以,

$$d_f(\alpha) \le \min\left\{\frac{\| f \|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p},\ \frac{\| f \|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right\}.$$

因此, 利用 $\| f(x) \|^r_{L^r(X,\mu)} = r\int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$, 通过取积分限 B 为参数, 就有

$$\begin{aligned}
\| f(x) \|^r_{L^r(X,\mu)} &\le r\int_0^\infty \alpha^{r-1}\min\left\{\frac{\| f \|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p},\ \frac{\| f \|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right\}\mathrm{d}\alpha \\
&= r\int_0^B \alpha^{r-1}\min\left\{\frac{\| f \|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p},\ \frac{\| f \|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right\}\mathrm{d}\alpha \\
&\quad + r\int_B^\infty \alpha^{r-1}\min\left\{\frac{\| f \|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p},\ \frac{\| f \|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right\}\mathrm{d}\alpha \\
&\le \| f \|^p_{L^{p,\infty}} \int_0^B r\alpha^{r-1-p}\mathrm{d}\alpha + \| f \|^q_{L^{q,\infty}} \int_B^\infty r\alpha^{r-1-q}\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{r}{r-p}\| f \|^p_{L^{p,\infty}} B^{r-p} + \frac{r}{q-r}\| f \|^q_{L^{q,\infty}} B^{r-q}.
\end{aligned}$$

现取参数 B 满足 $\| f \|^p_{L^{p,\infty}} B^{r-p} = \| f \|^q_{L^{q,\infty}} B^{r-q}$, 即 $B = \left(\frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}\right)^{\frac{1}{q-p}}$, 那么就有[2]

$$\| f \|^r_{L^r} \le \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)\| f \|^p_{L^{p,\infty}}\left(\frac{\| f \|^q_{L^{q,\infty}}}{\| f \|^p_{L^{p,\infty}}}\right)^{\frac{r-p}{q-p}}.$$

化简之后即得要证之式.

2. $q = \infty$ 情形. 此时对于 $\alpha > \| f \|_{L^\infty}$, 成立 $d_f(\alpha) = 0$. 于是再利用 $d_f(\alpha) \le \alpha^{-p}\left\|f\right\|^p_{L^{p,\infty}}$, 得到

$$\begin{aligned}
\left\|f\right\|^r_{L^r} &\le r\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-1}\alpha^{-p}\left\|f\right\|^p_{L^{p,\infty}}\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{r}{r-p}\left\|f\right\|^p_{L^{p,\infty}}\left\|f\right\|^{r-p}_{L^\infty},
\end{aligned}$$

即得所证. □

三 实插值方法: Marcinkiewicz 插值定理

下面介绍 Marcinkiewicz 插值定理, 它适用于较线性算子为广的一类算子.

定义4. 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是两个测度空间, T 为定义在 (X,μ)上的可测函数类(的一个子集)上的算子, 取值为 (Y,ν) 上的可测函数. 若对于任意 $c \in \mathbb{C}$ 和使 T 有定义的 f, g, 成立

[2]注意这里通过参数的选取, 用两个项的乘积控制它们的和的办法.

◇ $T(f+g)=T(f)+T(g)$,$T(cf)=cT(f)$, 则 T 称为线性算子.

◇ $|T(f+g)|\le|T(f)|+|T(g)|$, $|T(cf)|=|c||T(f)|$, 则 T 称为次线性算子.

◇ $|T(f+g)|\le K(|T(f)|+|T(g)|)$, $|T(cf)|=|c||T(f)|$, 则 T 称为拟线性算子. 这里 K 是与 f, g 无关的常数.

下面再引入两个常用的术语.

定义5. 对算子 T , 若存在常数 C 满足 $\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)}\le C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$,则 T 称为是 (p,q) 型算子; 若 T 满足 $\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}\le C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$,则 T 称为是弱 (p,q) 型算子.

Marcinkiewicz 插值定理分为对角线情形和下三角情形两种, 其中对角线情形最为常用. 下面分别叙述.

定理2 (对角线情形 Marcinkiewicz 插值定理)**.** 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是两个测度空间, T 为定义在 $L^{p_0}(X,\mu)\cap L^{p_1}(X,\mu)$ $(0<p_0<p_1\le\infty)$ 上的次线性算子. 设存在常数 A_0, A_1 使得

$$\|Tf\|_{L^{p_0,\infty}(Y,\nu)}\le A_0\|f\|_{L^{p_0}(X,\mu)},\quad \forall f\in L^{p_0}(X,\mu),$$

$$\|Tf\|_{L^{p_1,\infty}(Y,\nu)}\le A_1\|f\|_{L^{p_1}(X,\mu)},\quad \forall f\in L^{p_1}(X,\mu).$$

则 $\forall p\in(p_0,p_1)$, $f\in L^p(X,\mu)$, 都成立 $\|Tf\|_{L^p(Y,\nu)}\le M\|f\|_{L^p(X,\mu)}$, 其中

$$M\doteq 2\left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}}A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}.$$

注: 在该定理中, 若 T 为线性算子, 可仅要求 T 定义在 (X,μ) 的简单函数类上.

证明. 1. 设 $p_1<\infty$. 对 $f\in L^{p_0}\cap L^{p_1}$ 和任意的 $s>0$, 作分解

$$f_0(x)=\begin{cases} f(x), & 若\ |f(x)|>s,\\ 0, & 若\ |f(x)|\le s,\end{cases}\qquad f_1(x)=\begin{cases} 0, & 若\ |f(x)|>s,\\ f(x), & 若\ |f(x)|\le s,\end{cases}$$

则由 $|Tf|\le|Tf_0|+|Tf_1|$, 成立

$$\mu(t)\doteq d_{Tf}(t)\le d_{Tf_0}(t/2)+d_{Tf_1}(t/2)\le\left(\frac{2A_0}{t}\right)^{p_0}\int|f_0|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu+\left(\frac{2A_1}{t}\right)^{p_1}\int|f_1|^{p_1}\,\mathrm{d}\mu.$$

从而

$$\begin{aligned}\int |Tf|^p \, d\nu &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(t)\, dt\\ \le\ & p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty t^{p-1-p_0}\left(\int_{|f|>s}|f|^{p_0}\, d\mu\right) dt + p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty t^{p-1-p_1}\left(\int_{|f|\le s}|f|^{p_1}\, d\mu\right) dt.\end{aligned}$$

2. 现取 s 为 t 的函数, 即 $t = As$, 其中 A 为待定的正的常数,[3] 那么

$$\begin{aligned}\int |Tf|^p \, d\nu &= p(2A_0)^{p_0}A^{p-p_0}\int_0^\infty s^{p-1-p_0}\left(\int_{|f|>s}|f|^{p_0}\, d\mu\right) ds\\ &\quad + p(2A_1)^{p_1}A^{p-p_1}\int_0^\infty s^{p-1-p_1}\left(\int_{|f|\le s}|f|^{p_1}\, d\mu\right) ds.\end{aligned}$$

根据 Fubini 定理,

$$\int_0^\infty s^{p-1-p_0}\left(\int_{|f|>s}|f|^{p_0}\, d\mu\right) ds = \int |f|^{p_0}\, d\mu \int_0^{|f|} s^{p-1-p_0}\, ds = \frac{1}{p-p_0}\int |f|^p\, d\mu,$$

类似地

$$\int_0^\infty s^{p-1-p_1}\left(\int_{|f|\le s}|f|^{p_1}\, d\mu\right) ds = \int |f|^{p_1}\, d\mu \int_{|f|}^{\infty} s^{p-1-p_1}\, ds = \frac{1}{p_1-p}\int |f|^p\, d\mu,$$

从而

$$\int |Tf|^p\, d\nu \le \left\{\frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}A^{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}(2A_1)^{p_1}A^{p-p_1}\right\}\int |f|^p\, d\mu.$$

3. 取参数 A 使得上式右端括号内系数达到最小. 通过对 A 求导, 不难得到

$$A = 2A_0^{-\frac{p_0}{p_1-p_0}}A_1^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}.$$

将此代入直接计算, 括号内数就是 M^p.

4. $p=\infty$ 情形: 留作习题. □

定理3 (下三角情形 Marcinkiewicz 插值定理). 设 (X, μ) 与 (Y, ν) 是两个测度空间, T 为定义在 $L^{p_0}(X, \mu)\cap L^{p_1}(X, \mu)$ 上的拟线性算子, 取值为 (Y, ν) 上的可测函数. 设 $0<p_0\ne p_1\le\infty$, $0<q_0\ne q_1\le\infty$, 且 T 是弱 (p_0, q_0) 型和弱 (p_1, q_1) 型 (即 $T: L^{p_0}(X)\to L^{q_0,\infty}(X)$, $T: L^{p_1}(X)\to L^{q_1,\infty}(X)$). 那么对 $0<\theta<1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad p\le q,$$

[3]这一步是证明中的点睛之笔! 即, 对 f 的分解高度 s 是动态的, 线性依赖于另一个参量 t.

T 为 (p,q) 型, 即若 f 在 T 的定义域中, 则 $\| Tf \|_{L^q(Y,\nu)} \leq C \| f \|_{L^p(X,\mu)}$. 如果 T 是线性算子, 它可以保范延拓为 $L^p(X,\mu) \to L^q(Y,\nu)$ 的有界线性算子.

证明基于 Lorentz 空间理论, 可见 [12, p. 62].

四 复插值方法: Riesz–Thorin 插值定理

1. Riesz–Thorin 插值定理

定理4 (Riesz–Thorin 插值定理)**.** 设 (X,μ), (Y,ν) 是测度空间, T 是线性算子, 定义在 (X,μ) 的简单函数类上, 取值为 (Y,ν) 上的可测函数. 假设 T 为 (p_0, q_0) 型 和 (p_1, q_1) 型, 其中 $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, 且

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(Y)} \leq M_0 \, \|f\|_{L^{p_0}(X)}, \quad \|Tf\|_{L^{q_1}(Y)} \leq M_1 \, \|f\|_{L^{p_1}(X)}.$$

则 T 为 (p,q) 型 且

$$\|Tf\|_{L^q(Y)} \leq M_0^{1-\theta} \, M_1^{\theta} \, \|f\|_{L^p(X)}.$$

这里指标 (p,q) 由下式确定, 其中 $0 \leq \theta \leq 1$:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

进一步, 由简单函数在 L^p 中的稠密性, T 可以延拓为 $L^p(X,\mu) \to L^q(Y,\nu)$ 的有界线性算子, 且算子范数 $\|T\|_{L^p \to L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

该定理的证明依赖于如下复分析结论.

定理5 (Phragmén–Lindelöf 最大模原理)**.** 设 $f(z)$ 在带状区域 $D \doteq \{z \in \mathbb{C}: \ 0 < \mathrm{Re} z < 1\}$ 上全纯, 在 $\bar{D}$ 上连续有界, 并且存在常数 M 使得

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \partial D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z = 1\},$$

那么对任意的 $z \in D$, 成立 $|f(z)| \leq M$. 此外, 若存在 $z_0 \in D$ 使得 $|f(z_0)| = M$, 则 $f(z)$ 是常值函数.

证明. 设 $|f(z)|$ 在 D 上的一个上界为 B. 对 $n\in\mathbb{N}$, 定义全纯函数

$$f_n(z)=f(z)\mathrm{e}^{\frac{z^2}{n}}=f(z)\mathrm{e}^{\frac{x^2-y^2}{n}}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}xy}{n}},$$

则在 ∂D 上 $|f_n(z)|\le M\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, 而当 $z\in D$ 时 $|f_n(z)|\le B\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{n}}$, 从而对固定的 n, 存在 $R>0$, 使得 $|y|\ge R$ 时 $|f_n(z)|\le B\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{-\frac{R^2}{n}}\le M$. 对 $f_n(z)$ 在 $\bar{D}\cap\{|\mathrm{Im}\,z|\le R\}$ 上用紧区域中全纯函数的最大模原理, 就成立 $|f_n(z)|\le M\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$; 于是在无界集 $\bar{D}$ 上也成立 $|f_n(z)|\le M\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. 令 $n\to\infty$ 就得到在 $\bar{D}$ 内 $|f(z)|\le M$. 若在 $z_0\in D$ 成立 $|f(z_0)|=M$, 则由标准的最大模原理, 就知道 $f(z)$ 恒为常数. □

定理6 (Hadamard 三线定理)**.** *设 $w(z)$ 是带形区域 $\bar{D}$ 上的有界连续函数, 在 D 内全纯, 且在 $\{\mathrm{Re}z=0\}$ 上满足 $|w(z)|\le B_0$, 在 $\{\mathrm{Re}z=1\}$ 上满足 $|w(z)|\le B_1$. 那么对于任意 $z\in D$, 成立 $|w(z)|\le B_0^{1-\mathrm{Re}z}B_1^{\mathrm{Re}z}$.*

证明. 不妨设 B_0, B_1 是正数 (若为零, 可通过逼近证明). 考虑函数 $f(z)\doteq\frac{w(z)}{B_0^{1-z}B_1^z}$, 显然它在 D 内全纯, 且在 $\bar{D}$ 上连续有界. 又 $|f(\mathrm{i}y)|\le 1$, $|f(1+\mathrm{i}y)|\le 1$, 从而在 D 上 $|f(z)|\le 1$. □

定理4的证明. 1. 取 $f(x)=\sum_{k=1}^m a_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k}I_{A_k}(x)$ 是 X 上的简单函数, 其中 $a_k>0$, $\alpha_k\in\mathbb{R}$, A_k 是 X 的互不相交的具有有限测度的子集, 而 I_A 是集合 A 的特征函数. 根据算子范数的定义, 只需控制 (注意这里的 q' 是 q 的共轭指标: $\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}=1$)

$$\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)}=\sup\left\{\left|\int_Y T(f)(x)g(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\right|: g \text{ 是简单函数且 } \|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)}\le 1\right\}.$$

我们可把 g 写作 $g=\sum_{j=1}^n b_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_j}I_{B_j}$, 其中 $b_j>0$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, B_j 是 Y 的互不相交的具有有限测度的子集.

2. 记[4]

$$P(z)=\frac{p}{p_0}(1-z)+\frac{p}{p_1}z,\quad Q(z)=\frac{q'}{q'_0}(1-z)+\frac{q'}{q'_1}z.$$

注意 $P(\theta)=1$, $Q(\theta)=1$. 对 $z\in\bar{D}$ (前述定理所定义的闭带形区域), 定义复变函数

$$F(z)=\int_Y T(f_z)(x)g_z(x)\,\mathrm{d}\nu(x),$$

其中

$$\boxed{f_z=\sum_{k=1}^m a_k^{P(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k}I_{A_k},\quad g_z=\sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_j}I_{B_j}.}$$

[4]对一个纯粹的实分析问题, 是如何引入全纯函数, 从而可以用全纯函数的性质的呢? 这一段是关键, 把 $\theta\in[0,1]$ 这个实轴上单位区间的变量解析开拓为复平面带形区域 D 上的变量 z.

显然 $z=\theta$ 时 $f_z=f$, $g_z=g$. 下面研究函数 $F(z)$ 的性质.

3. 利用线性, 可知

$$F(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_k^{P(z)}b_j^{Q(z)}e^{i\alpha_k}e^{i\beta_j}\int_Y T(I_{A_k})(x)I_{B_j}(x)\,d\nu(x),$$

从而, 注意到 a_k, $b_j>0$, 则 $F(z)$ 在 D 上全纯, 在 $\bar{D}$ 上连续, 并且有界 (依赖于 f 和 g).

4. 当 $\mathrm{Re}z=0$ 时, 由 A_K 互不相交及 $|a_k^{P(z)}|=a_k^{p/p_0}$ 可知 $\left\|f_z\right\|_{L^{p_0}}^{p_0}=\left\|f\right\|_{L^p}^{p}$; 类似地, 成立 $\left\|g_z\right\|_{L^{q_0'}}^{q_0'}=\left\|g\right\|_{L^{q'}}^{q'}$. 在 $\mathrm{Re}z=1$ 时, 也成立 $\left\|f_z\right\|_{L^{p_1}}^{p_1}=\left\|f\right\|_{L^p}^{p}$ 以及 $\left\|g_z\right\|_{L^{q_1'}}^{q_1'}=\left\|g\right\|_{L^{q'}}^{q'}$. 于是由 Hölder 不等式, 在 $\mathrm{Re}z=0$ 时

$$|F(z)|\le\left\|T(f_z)\right\|_{L^{q_0}}\left\|g_z\right\|_{L^{q_0'}}\le M_0\left\|f_z\right\|_{L^{p_0}}\left\|g_z\right\|_{L^{q_0'}}=M_0\left\|f\right\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}}\left\|g\right\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}};$$

类似地, 在 $\mathrm{Re}z=1$ 时

$$|F(z)|\le\left\|T(f_z)\right\|_{L^{q_0}}\left\|g_z\right\|_{L^{q_0'}}\le M_1\left\|f\right\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}}\left\|g\right\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1'}}.$$

5. 根据 Hadamard 三线定理, 对 $\theta=\mathrm{Re}z$, 成立

$$|F(z)|\le\left(M_0\left\|f\right\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}}\left\|g\right\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}}\right)^{1-\theta}\left(M_1\left\|f\right\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}}\left\|g\right\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1'}}\right)^{\theta}=M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\left\|f\right\|_{L^p}\left\|g\right\|_{L^{q'}}.$$

回忆 $P(\theta)=Q(\theta)=1$, 从而 $F(\theta)=\int_Y(Tf)g\,d\nu$, 利用 $\left\|g\right\|_{L^{q'}}\le 1$, 得到

$$\left\|Tf\right\|_{L^q}\le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\left\|f\right\|_{L^p},$$

即得所证. □

2. 应用举例

定理7 (Schur 定理)**.** 设 $K(x,y)$ 是乘积测度空间 $(X\times Y,\ \mu\times\nu)$ 上的局部可积函数, 且

$$\sup_{x\in X}\int_Y|K(x,y)|\,d\nu(y)=A<\infty,\quad \sup_{y\in Y}\int_X|K(x,y)|\,d\mu(x)=B<\infty.$$

则 $Tf(x)=\int_Y K(x,y)f(y)\,d\nu(y)$ ($f\in L^\infty(Y,\nu)$ 具有紧支集) 可延拓为 $L^p(Y,\nu)\to L^p(X,\mu)$ 上的有界线性算子, 且

$$\|T\|\le A^{1-\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{p}},\quad (1\le p\le\infty).$$

证明. 由条件易知

$$|(Tf)(x)| \le A\|f\|_{L^\infty}, \quad \forall x \in X,$$

从而算子 T 是 (∞, ∞) 型. 下证 T 为 $(1, 1)$ 型:

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^1} &\le \int_X \left| \int_Y K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) \\ &\le \int_Y \left(\int_X |K(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x) \right) |f(y)|\,\mathrm{d}\nu(y) \\ &\le B\|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

利用 Riesz 插值定理即得结论. □

例3. $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p \le 2)$ 上的 *Fourier* 变换.

设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le 2)$, 作分解 $f = g + h$, 其中 $g \in L^1$, $h \in L^2$ 如下:

$$g = \begin{cases} f, & 若\ |f| \ge 1, \\ 0, & 若\ |f| \le 1; \end{cases} \qquad h = \begin{cases} 0, & 若\ |f| \ge 1, \\ f, & 若\ |f| \le 1. \end{cases}$$

定义 f 的 Fourier 变换为

$$\hat{f} = \hat{g} + \hat{h}.$$

这个定义是合理的, 即不依赖于具体分解. 事实上, 假设存在两个分解: $f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$. 那么 $g_1 - g_2 = h_2 - h_1$, 从而 $\widehat{g_1 - g_2} = \widehat{h_2 - h_1}$. 利用 L^1 及 L^2 上 Fourier 变换的线性, 就有 $\hat{g}_1 - \hat{g}_2 = \hat{h}_2 - \hat{h}_1$, 或者 $\hat{g}_1 + \hat{h}_1 = \hat{g}_2 + \hat{h}_2$.

由于 $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$, 即 $\mathcal{F}$ 是 $(1,\infty)$ 型; 又 $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是酉算子, $\|\mathcal{F}\| = 1$, 即 $\mathcal{F}$ 是 $(2, 2)$ 型. 那么令

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2},$$

则 $\mathcal{F}: L^p \to L^q$ 且 $\|\mathcal{F}\| \le 1$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = 1$. 所以最终我们有如下结果:

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 其中\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 \le p \le 2.$$

例4. 关于卷积的 *Young* 不等式. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \qquad 1 \le r \le \infty.$$

证明. 定义如下卷积型 (非奇异) 积分算子 $T_f(g) = f * g$. 在第一讲我们就证明了

$$\|T_f g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

另外显然成立

$$\|T_f g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

所以 T_f 既是 $(1, 1)$ 型, 也是 (∞, ∞) 型, 而且算子范数 $M_0 = \|f\|_{L^1}$, $M_1 = \|f\|_{L^1}$. 那么对任意 $1 \le p \le \infty$, T_f 为 (p, p) 型: $\|T_f g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$, 即得所证. □

例5. 关于卷积的 *Young* 不等式 (续). 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \ \le\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $1 \le p, q, r \le \infty$.

证明. 1. 仍定义线性算子 $T_f(g) = f * g$. 由上一例, T_f 是 $(1, p)$ 型:

$$\|T_f g\|_{L^p} = \|f * g\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}, \text{ 其中 } M_0 = \|f\|_{L^p}.$$

2. 若 $q = p'$, 则由 Hölder 不等式, T_f 为 (p', ∞) 型, 且

$$\|T_f g\|_{L^\infty} = \|f * g\|_{L^\infty} = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}, \text{ 其中 } M_1 = \|f\|_{L^p}.$$

3. 于是由 Riesz–Thorin 插值定理知 T_f 是 (q, r) 型, 且相应算子范数不大于 $\|f\|_{L^p}$, 其中

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{\infty}.$$

直接计算就有

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p'} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1-\theta}{p} = 1 + \frac{1}{r}.$$

证毕. □

第七讲　平移不变算子与 Fourier 乘子

这一讲我们介绍有关平移不变算子及其 Fourier 乘子的基本知识, 其中算子的转置 (共轭) 以及 (2,2) 型平移不变算子 Fourier 乘子的刻画在奇异积分算子的研究中常常用到.

一　算子的共轭和转置

在泛函分析的学习中, 我们知道一个线性空间 X 的对偶空间 X^* 是研究 X 本身的重要工具; 类似地线性算子 T 的伴随算子 T^* 也是研究 T 自己的重要参照. 设 T 是 $X \to Y$ 的有界线性算子, 则由泛函分析结论, 其伴随算子 T^* 是 $Y^* \to X^*$ 的有界线性算子, 且算子范数相同: $\|T^*\| = \|T\|$. 对于实 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间, 泛函的作用定义为 $\langle f,\, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$, 我们也写作 $(f,\, g) \doteq \langle f,\, g\rangle$; 对复 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间, 为了与 $p=2$ 时内积的定义相符, 泛函作用定义为

$$(f \mid g) \doteq \langle g,\, \bar{f}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, \overline{f(x)}\, \mathrm{d}x.$$

由于这里泛函作用方式约定的区别, 伴随算子的具体叫法也有所不同: 对实 (内积) 空间, 若 $(Tf,\, g) = (f,\, T'g)$, 我们称 T' 是 T 的转置算子; 对复 (内积) 空间, 若 $(Tf \mid g) = (f \mid T^*g)$, 则称 T^* 是 T 的共轭算子.

下面我们看一些形式计算的例子.

例1. 设 $(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$, 其中 $K(x,\, y)$ 称为 T 的核, 则

(1) T' 的核为 $K(y,\, x)$;

(2) T^* 的核为 $\overline{K(y,\, x)}$.

证明. (1) 由于

$$\begin{aligned}(f,\, T'g) &= (Tf,\, g) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以 $(T'g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)g(x)\,\mathrm{d}x$. 设 T' 的核为 $K'(x,y)$. 作变量替换 $x \rightleftarrows y$ 得

$$(T'g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K'(x,y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} K(y,x)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

所以, $K'(x, y) = K(x, y)$. (2) 的证明留作习题. □

例2. 设 $Tf(x) = (m(\xi)\hat{f}(\xi))^\vee(x)$, 其中函数 $m(\xi)$ 叫作算子 T 的 Fourier 乘子, 则

(1) T' 的 Fourier 乘子为 $m(-\xi)$;

(2) T^* 的 Fourier 乘子为 $\overline{m(\xi)}$.

证明. (1) 利用等式 $\int u\hat{v} = \int \hat{u}v$, 得到

$$\begin{aligned}(f, T'g) &= (Tf, g) = \int Tf\,(\check{g})^\wedge\,\mathrm{d}\xi = \int (Tf)^\wedge\,\check{g}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int m\,\hat{f}\,\check{g}\,\mathrm{d}\xi = \int f\,(m\check{g})^\wedge\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

于是 $T'g = (m\check{g})^\wedge$, 从而[1]

$$(T'g)^\wedge = (m\check{g})^{\wedge\wedge} = \widetilde{m\check{g}} = \tilde{m}\tilde{\check{g}} = \tilde{m}\hat{g} = m(-\xi)\hat{g},$$

即 T' 的 Fourier 乘子是 $m(-\xi)$.

(2) 用 Plancherel 定理,

$$\begin{aligned}(f \mid T^*g) &= (Tf \mid g) = \int \overline{Tf}\,g\,\mathrm{d}\xi = \int \overline{\widehat{Tf}}\,\hat{g}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int \bar{m}\,\bar{\hat{f}}\,\hat{g}\,\mathrm{d}\xi = \int \bar{\hat{f}}\,((\bar{m}\,\hat{g})^\vee)^\wedge\,\mathrm{d}\xi = \int \bar{f}\,(\hat{g}\,\bar{m})^\vee\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

即得 $T^*g = (\hat{g}\bar{m})^\vee$. □

二 平移不变算子空间 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

我们定义

$$\boxed{\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{T \in B(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)) : T\tau^x = \tau^x T, \forall x \in \mathbb{R}^n\right\}}$$

是与平移算子可交换的 (p, q) 型有界线性算子组成的赋范线性空间, 其范数是 $\|T\|_{p,q} = \|T\|_{L^p \to L^q}$. 由简单的泛函分析结论, 可知 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 是完备的, 即 Banach 空间.

[1]这里利用了等式 $\mathcal{F}^2(f) = \tilde{f}$, 即 $\hat{f}^\wedge = \tilde{f}$, 或者 $\hat{f} = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})$. 事实上, $\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\xi)e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(-\xi)e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi = \hat{f}(x)$.

定理1. 若 $1 \le q < p < \infty$, 则 $M^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

证明. 1. 首先, 我们断言: 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 则 $\lim\limits_{|h|\to\infty} \|\tau^h f + f\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p}$.

事实上, 此结论对 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 显然成立. [2]

在一般情形, 采取逼近的方法证明: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, $\exists f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f_k \to f \ \ (L^p)$; 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$, 当 $k > K$ 时, $\|f_k - f\|_{L^p} \le \epsilon$. 利用三角不等式, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, 成立

$$\begin{aligned}\Big|\|\tau^h f + f\|_{L^p} - \|\tau^h f_k + f_k\|_{L^p}\Big| &\le \|\tau^h (f - f_k) + f - f_k\|_{L^p} \\ &\le \|\tau^h (f - f_k)\|_{L^p} + \|f - f_k\|_{L^p} \\ &= 2\|f - f_k\|_{L^p} \le 2\epsilon,\end{aligned}$$

于是 $\|\tau^h f_k + f_k\|_{L^p} - 2\epsilon \le \|\tau^h f + f\|_{L^p} \le \|\tau^h f_k + f_k\|_{L^p} + 2\epsilon$. 令 $|h| \to \infty$, 就有

$$2^{\frac{1}{p}}\|f_k\|_{L^p} - 2\epsilon \le \liminf_{|h|\to\infty}\|\tau^h f + f\|_{L^p} \le \limsup_{|h|\to\infty}\|\tau^h f + f\|_{L^p} \le 2^{\frac{1}{p}}\|f_k\|_{L^p} + 2\epsilon, \quad \forall k > K.$$

再令 $k \to \infty$, 得到

$$2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} - 2\epsilon \le \liminf_{|h|\to\infty}\|\tau^h f + f\|_{L^p} \le \limsup_{|h|\to\infty}\|\tau^h f + f\|_{L^p} \le 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} + 2\epsilon,$$

由 ε 的任意性, 即得所证.

2. 利用 T 的平移不变性和线性, 有

$$\|\tau^h (Tf) + Tf\|_{L^q} = \|T(\tau^h f + f)\|_{L^q} \le \|T\|_{L^p \to L^q}\|\tau^h f + f\|_{L^p}.$$

令 $|h| \to \infty$, 因为 $2^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} < 1$, 由第一步的结论, 就得到

$$\|Tf\|_{L^q} \le 2^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\|T\|_{L^p \to L^q}\|f\|_{L^p}.$$

于是按算子范数的定义, $\|T\|_{L^p \to L^q} \le 2^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\|T\|_{L^p \to L^q}$, 从而 $T = 0$. □

定理2. 若 $1 < p \le q < \infty$, 则 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{q',p'}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

这个定理说明 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{M}^{q',p'}(\mathbb{R}^n)$ 其实是 “两块招牌, 一班人马”.

证明. 1. 第五讲中, 我们已经证明了作用在速降函数空间上的平移不变算子的卷积表示: 对 $T \in \mathcal{M}^{p,q}$, 存在唯一的 $u \in \mathcal{S}'$, 使得 $\forall f \in \mathcal{S}$, 成立 $\boxed{Tf = f * u}$.

[2] 如果 $f \in C_0^\infty$, 则当 h 很大时, $\tau^h f$ 和 f 的支集不相交. 此外, 注意上述断言对 L^∞ 函数显然不成立.

下面说明

$$T^*g = g * \tilde{\bar{u}}, \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{7.1}$$

事实上,

$$\begin{aligned}(f \mid T^*g) &= (Tf \mid g) = \langle \overline{f*u}, g\rangle = \langle \bar{f} * \bar{u}, g\rangle = \langle \bar{u}, \bar{\tilde{\bar{f}}} * g\rangle = \langle \bar{u}, \bar{\tilde{\bar{f}}} * \tilde{\tilde{g}}\rangle = \langle \bar{u}, (\bar{f} * \tilde{g})^{\sim}\rangle \\ &= \langle \tilde{\bar{u}}, \bar{f} * \tilde{g}\rangle = \langle \tilde{\bar{u}}, \tilde{g} * \bar{f}\rangle = \langle g * \tilde{\bar{u}}, \bar{f}\rangle = \langle \bar{f}, g * \tilde{\bar{u}}\rangle.\end{aligned}$$

这里利用了$(f*g)^{\sim}(x) \doteq (f*g)(-x) = \tilde{f} * \tilde{g}(x)$. 此外, 由泛函分析的结论, $T^* \in \mathcal{M}^{q',p'}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|T\|_{p,q} = \|T^*\|_{q',p'}$.

2. 我们说明 *T 可定义在 $L^{q'}$ 上, 且在 $L^{q'} \cap L^p$ 上的定义与其原来在 L^p 上的定义一样*. 首先, T 在 $L^{q'}$ 上可如下定义:

$$\boxed{Tf = \widetilde{\overline{T^* \bar{\tilde{\bar{f}}}}}.}$$

它可先对 $f \in \mathcal{S}$ 定义, 然后利用稠密性, 将该算子延拓到 $L^{q'}$. 进一步, 对 $f \in \mathcal{S}$, 由 (7.1), 成立

$$\left\langle \widetilde{\overline{T^* \bar{\tilde{\bar{f}}}}}, g \right\rangle = \langle \widetilde{\overline{\bar{\tilde{\bar{f}}} * \tilde{\bar{u}}}}, g\rangle = \langle \tilde{\bar{\bar{\tilde{\bar{f}}}}} * \tilde{\bar{\tilde{\bar{u}}}}, g\rangle = \langle f * u, g\rangle = \langle Tf, g\rangle.$$

所以由延拓的唯一性, 在 $L^{q'} \cap L^p$ 中上述两种 T 作用的方式是相同的.

3. 最后证明 $\|T\|_{p,q} = \|T\|_{q',p'}$. 已知 $\|T\|_{p,q} = \|T^*\|_{q',p'}$, 所以只需证 $\|T^*\|_{q',p'} = \|T\|_{q',p'}$. 由 $\|T^*\|_{q',p'} = \sup \frac{\|T^* f\|_{p'}}{\|f\|_{q'}}$ 以及 $\|T\|_{q',p'} = \sup \frac{\left\|\widetilde{\overline{T^* \bar{\tilde{\bar{f}}}}}\right\|_{p'}}{\|f\|_{q'}}$, 这是显然的. 所以我们证明了 $\mathcal{M}^{p,q} \subset \mathcal{M}^{q',p'}$. 由对称性, 同理可得 $\mathcal{M}^{q',p'} \subset \mathcal{M}^{p,q}$, 定理得证. □

三 $\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画

这一节我们给出通过广义函数 u 的性质来刻画算子空间 $\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 的两个定理.

我们首先回忆 $\mathbb{R}^n$ 上有限复值 Borel 测度构成的 Banach 空间 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, 它是 $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间; 而 $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 上连续且在无穷远处收敛到 0 的函数按最大模范数构成的 Banach 空间. 设 $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|\mu\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{\substack{f \in C_{00}(\mathbb{R}^n) \\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{d}\mu(x) \right|.$$

我们注意到通过 $h \mapsto \int_M h(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $M \subset \mathbb{R}^n$ 为 Borel 集, 可视 $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ 中的测度, 且显然

$$\|h\|_{\mathfrak{M}} \le \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

所以有连续嵌入: $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

定理3. $T \in \mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $\exists!\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $Tf = f * \mu$. 此时还成立 $\|T\|_{1,1} = \|\mu\|_{\mathfrak{M}}$.

证明. 1. 充分性. 设 $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, 由于 $(Tf)(x) = \int f(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$, 显然 T 是平移不变的, 且

$$\begin{aligned}\int |(Tf)(x)|\mathrm{d}x &= \int \left|\int f(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\right| \mathrm{d}x \\ &\le \int\int |f(x-y)|\mathrm{d}x|\mathrm{d}\mu(y)| \\ &= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{d}\mu(y)| \le \|\mu\|_{\mathfrak{M}}\|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

于是 $T \in \mathcal{M}^{1,1}$ 且 $\|T\|_{1,1} \le \|\mu\|_{\mathfrak{M}}$.

2. 必要性. 对 $T \in \mathcal{M}^{1,1}$, 存在唯一的 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 使得 $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 有 $Tf = f * u$. 为了得到 u 的信息, 可利用卷积逼近恒等的性质. 对任意 $\epsilon > 0$, 取$f_\epsilon(x) \doteq \frac{1}{\epsilon^n}\mathrm{e}^{-\pi|\frac{x}{\epsilon}|^2}$, 计算得 $\|f_\epsilon\|_{L^1} = \|\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}\|_{L^1} = 1$, 且

$$\|Tf_\epsilon\|_{L^1} \le \|T\|_{1,1}\|f_\epsilon\|_{L^1} = \|T\|_{1,1}.$$

所以 $\{Tf_\epsilon\}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中一致有界. 由于 $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) = (C_{00}(\mathbb{R}^n))'$, 所以$\{Tf_\epsilon\}$ 在 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ 中一致有界.

因为 $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ 是可分的, 由 Banach–Alaoglu 定理, $\{Tf_\epsilon\}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中是弱 $*$ 列紧的; 即存在 $\mu \in \mathfrak{M} \subset \mathcal{S}'$ 和子列 $\epsilon_k \to 0$, 使得 $\forall g \in \mathcal{S} \subset C_{00}$,

$$\langle Tf_{\epsilon_k}, g\rangle \to \langle \mu, g\rangle.$$

另一方面, 注意到 $f_{\epsilon_k} * g \to g$ 在 $\mathcal{S}$ 中收敛, 那么

$$\langle Tf_{\epsilon_k}, g\rangle = \langle f_{\epsilon_k} * u, g\rangle = \langle u, \widetilde{f_{\epsilon_k}} * g\rangle = \langle u, f_{\epsilon_k} * g\rangle \to \langle u, g\rangle.$$

这就说明 $u = \mu$. 于是 μ 的唯一性由 u 的唯一性保证.

3. 此时由于

$$
\begin{aligned}
\frac{|\langle \mu, g\rangle|}{\|g\|_{L^\infty}} &= \lim_{\epsilon_k\to 0}\frac{|\langle Tf_{\epsilon_k}, g\rangle|}{\|g\|_{L^\infty}} \le \lim_{\epsilon_k\to 0}\|Tf_{\epsilon_k}\|_{L^1}\\
&\le \|T\|_{1,1}\lim_{\epsilon_k\to 0}\|f_{\epsilon_k}\|_{L^1} = \|T\|_{1,1},
\end{aligned}
$$

所以 $\|\mu\|_{\mathfrak{M}} \le \|T\|_{1,1}$. 再结合第一步所得不等式, 就得到 $\|T\|_{1,1} = \|\mu\|_{\mathfrak{M}}$. 证毕. □

下面我们研究 $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画. 这个定理对于以后研究奇异积分算子相当重要.

定理4. $T\in\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 若 $Tf = f*u$, 则 $\hat{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 此时还成立 $\|T\|_{2,2} = C\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, 这里 $C=(2\pi)^{\frac{n}{2}}$.

证明. 1. 充分性. $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 若 $\hat{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $Tf = f*u$, 则两端作 Fourier 变换, 得到 $\widehat{Tf} = C\hat{f}\hat{u}$. 由 Plancerel 定理,

$$
\|Tf\|_{L^2} = \|\widehat{Tf}\|_{L^2} = C\|\hat{f}\hat{u}\|_{L^2} \le C\|\hat{u}\|_{L^\infty}\|\hat{f}\|_{L^2} = C\|\hat{u}\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2},
$$

所以 $\|T\|_{L^2\to L^2}\le C\|\hat{u}\|_{L^\infty}$.

2. 必要性. 我们已知, 对 $T\in\mathcal{M}^{2,2}$, 存在唯一的 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 使得 $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 成立 $Tf = f*u$. 那么 $\widehat{Tf} = C\hat{f}\hat{u}$, 下面要证明 $\hat{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

取 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi\in B(0,2)$, 且在 $B(0,1)$ 上 $\varphi\equiv 1$, $0\le\varphi\le 1$. 令 $\varphi_R(x) = \varphi(\frac{x}{R})$, 则 $C\varphi_R\hat{u} = (T\check{\varphi}_R)^\wedge$. 由于 $\varphi_R\in L^2$, $\check{\varphi}_R\in L^2$, 且 $T\in\mathcal{M}^{2,2}$, 所以有 $T\check{\varphi}_R\in L^2$. 根据 Plancherel 定理, 即得 $(T\check{\varphi}_R)^\wedge\in L^2$, 于是 $\varphi_R\hat{u}\in L^2$. 这就说明了 $\hat{u}|_{B(0,R)} = \varphi\hat{u}\big|_{B(0,R)}\in L^2(B(0,R))$. 由 R 的任意性, 可得 $\hat{u}\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

下面进一步说明 $\hat{u}\in L^\infty$. 设 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则成立

$$
\begin{aligned}
C^2\int_{\mathbb{R}^n}|f\hat{u}|^2\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n}|(T\check{f})|^2\mathrm{d}x \le \|T\|^2_{L^2\to L^2}\|\check{f}\|^2_{L^2}\\
&= \|T\|^2_{2,2}\|f\|^2_{L^2} = \|T\|^2_{2,2}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

这就意味着

$$
\int_{\mathbb{R}^n}(C^2|\hat{u}|^2 - \|T\|^2_{2,2})|f|^2\,\mathrm{d}x \le 0.
$$

由 f 的任意性, 必然几乎处处成立 $C^2|\hat{u}|^2\le\|T\|^2_{2,2}$. 从而 $\hat{u}\in L^\infty$ 且 $C\|\hat{u}\|_{L^\infty}\le\|T\|_{2,2}$. 此外, 结合第一步的不等式, 就得到 $C\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|T\|_{2,2}$. 证毕. □

四 Fourier 乘子空间 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$

这一节我们对于卷积型算子侧重于从 Fourier 乘子的角度, 即卷积核 u 的 Fourier 变换的角度, 研究算子空间 $\mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$.

定义1. *定义 L^p–Fourier 乘子空间如下:*

$$\boxed{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{m \in L^\infty(\mathbb{R}^n) :\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), T_m f \doteq (m\hat{f})^\vee \text{ 是 } (p,p) \text{ 型线性算子}\right\},}$$

其范数定义为 $\|m\|_{\mathcal{M}_p} = \|T_m\|_{L^p \to L^p}$.

考虑 Fourier 乘子的关键在于它将算子演算转化为对应象征 (乘子) 的函数演算, 从而具有非常重要的启发意义, 往往使得问题得到很大的简化. 为此我们注意以下四条对应关系 (请利用定义直接验证):

- $m \in \mathcal{M}_p \Longleftrightarrow T_m \in \mathcal{M}^{p,p}$,
- $m_1 m_2 \Longleftrightarrow T_{m_1} T_{m_2} = T_{m_1 m_2}$,
- $\overline{m_1} \Longleftrightarrow T^*_{m_1} = T_{\overline{m_1}}$,
- $k m_1 \Longleftrightarrow k T_{m_1} = T_{k m_1}, \quad k \in \mathbb{C}$.

但若仅局限于 Fourier 乘子, 缺点是对应的 Banach 代数还不够大, 没有单位元或关于取逆不封闭. 这也是发展拟微分算子等理论的原因之一.

例3. *1) $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}(\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$;*

2) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

事实上, 由定理 3, 由于

$$|\hat{\mu}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mu(x)\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{d}\mu(x)| = \|\mu\|_{\mathfrak{M}},$$

所以 1) 成立. 2) 则是定理 4 的推论.

例4. *对任意 $1 \le p \le \infty$, 有 $m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot b} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$.*

证明. 因为 $\widehat{T_m f} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot b}\hat{f}(\xi)$, 所以

$$\begin{aligned} T_m f &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot b}\hat{f}(\xi))^{\vee} = \left(\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-b)\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\vee} \\ &= \left(\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi} f(y+b)\,\mathrm{d}y\right)^{\vee} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_y f(y+b)) = f(y+b), \end{aligned}$$

所以 $(T_m f)(t) = f(t+b)$. 由于 $\|T_m f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$, 故而 $T_m \in \mathcal{M}^{p,p}$, 即得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot b} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. □

定理5. (1) 当 $1 < p < \infty$ 时, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p'}(\mathbb{R}^n)$;

(2) 当 $1 < p < q < 2$ 时, $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_2 = L^\infty$.

证明. 1. 由定理 2, $\mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{p',p'}(\mathbb{R}^n)$, 从而 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p'}(\mathbb{R}^n)$.

2. 下证 $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_p$. 由 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{F}(\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n))$ 得$\forall m \in \mathcal{M}_1$, 有 $T_m f = (\hat{f}m)^{\vee} = f * \mu/C$ 为 (1,1) 型 (算子范数为 $\|\mu\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)}/C$), 其中 $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$. 另一方面,

$$\|T_m f\|_{L^\infty} = \frac{1}{C}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right| \le \|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{d}\mu(y)|\frac{1}{C} = \frac{1}{C}(\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)})\|f\|_{L^\infty},$$

即 T_m 是 (∞, ∞) 型. 所以由 Riesz–Thorin 插值定理, $T_m \in \mathcal{M}^{p,p}$ 且 $\|T_m\|_{p,p} \le \frac{1}{C}\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$. 于是 $m \in \mathcal{M}_p$, 还成立

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p} = \|T_m\|_{p,p} \le \frac{1}{C}\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \|T_m\|_{1,1} = \|m\|_{\mathcal{M}_1}.$$

3. 再证 $\mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_2$. 若 $m \in \mathcal{M}_q$, 则 $T_m \in \mathcal{M}^{q,q} = \mathcal{M}^{q',q'}$. 由 Riesz–Thorin 插值定理, $T_m \in \mathcal{M}^{2,2}$. 所以, $m \in \mathcal{M}_2 = L^\infty$, 且

$$\|m\|_{\mathcal{M}_2} = \|T_m\|_{2,2} \le \|T_m\|_{q,q} = \|m\|_{\mathcal{M}_q}.$$

4. 最后, 注意到 $p < q < p'$, 则 $\mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}_q$ 的证明与第三步类似. □

定理6. $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 按函数乘法是一个 *Banach* 代数.

证明. 1. 容易验证 $\mathcal{M}_p$ 是个线性空间, 而 $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_p}$ 是一个范数. 下证 $\mathcal{M}_p$ 关于乘法封闭: $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_p \implies m_1 m_2 \in \mathcal{M}_p$, 且 $\|m_1 m_2\| \le \|m_1\|\|m_2\|$. 这是因为 (注意区分哪些是 $\mathcal{M}_p$ 范数, 哪些是算子范数)

$$\|m_1 m_2\| = \|T_{m_1 m_2}\| = \|T_{m_1} T_{m_2}\| \le \|T_{m_1}\|\|T_{m_2}\| = \|m_1\|\|m_2\|.$$

2. 完备性. 取 $\mathcal{M}_p$ 中 Cauchy 列 $\{m_k\}$, 那么

$$\lim_{k,j\to\infty}\|m_k-m_j\|_{\mathcal{M}_p}=0.$$

因为 $\mathcal{M}_p\hookrightarrow\mathcal{M}_2=L^\infty$, 所以 $\{m_k\}$ 也是 L^∞ 中的 Cauchy 列; 于是存在 $m\in L^\infty$, 使得 $m_k\to m\quad(L^\infty)$. 下面只需证 a) $m\in\mathcal{M}_p$; b) $m_k\to m\quad(\mathcal{M}_p)$.

为证明 a), 对任意 $f\in\mathcal{S}$, 注意到

$$T_{m_k}f(x)=\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)m_k(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi,$$

令 $k\to\infty$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$T_{m_k}f(x)\to T_mf(x)=\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)m(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi\quad a.e.$$

所以用 Fatou 引理, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|T_mf(x)|^p\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n}\liminf_{m_k\to m}|T_{m_k}f(x)|^p\mathrm{d}x\\ &\le \liminf_{m_k\to m}\int_{\mathbb{R}^n}|T_{m_k}f(x)|^p\mathrm{d}x\\ &\le \liminf_{m_k\to m}\Big(\|T_{m_k}\|_{p,p}\|f\|_{L^p}\Big)^p.\end{aligned}$$

这就是说 $m\in\mathcal{M}_p$ 且

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p}\le\liminf_{m_k\to m}\|m_k\|_{\mathcal{M}_p}.$$

取固定的 j, 将 $\{m_k\}$ 替换为 $\{m_k-m_j\}$, 利用上式可得

$$\|m-m_j\|_{\mathcal{M}_p}\le\liminf_{m_k\to m}\|m_k-m_j\|_{\mathcal{M}_p}.$$

由于 $\{m_k\}$ 是 Cauchy 列, 令 $j\to\infty$, 即得 $\lim\limits_{j\to\infty}\|m_j-m\|_{\mathcal{M}_p}=0$. 证毕. □

除 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 外, 对一般的 $\mathcal{M}_p$ 加以刻画是一个困难且尚未完成的工作, 目前仅有一些零散的充分或必要条件. 后面我们将介绍奇异积分算子的理论, 以及 Hörmander–Mihlin 乘子定理. 它们给出了一类卷积型算子是 $(p,\,p)$ 型的充分条件, 在偏微分方程中有着重要的应用.

第八讲　Hardy–Littlewood 极大函数

经过前面的准备, 我们现在开始进入调和分析实变理论的核心地带.

一　Hardy–Littlewood 极大函数

1. 极大函数的定义及极大算子的 (∞,∞) 型

定义1 (中心与非中心极大函数). 设 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 其中心与非中心 *Hardy–Littlewood (H-L)* 极大函数分别定义为

$$M_c f(x)\doteq\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}|f(y)|\mathrm{d}y;$$
$$Mf(x)\doteq\sup_{x\in B_r(y)}\frac{1}{|B_r(y)|}\int_{B_r(y)}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi.$$

这里 $B_r(x)$ 是以 x 为中心, r 为半径的开球体.

这两个极大函数之间可以点态地互相控制, 即 $M_cf(x)\le Mf(x)\le 2^nM_cf(x)$. 实际上, 若 $x\in B_r(y)$, 则必有 $B_r(y)\subset B_{2r}(x)$, 于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B_r(y)|}\int_{B_r(y)|}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi\le\frac{1}{|B_r(y)|}\int_{B_{2r}(x)}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi\\=&\frac{1}{|B_{2r}(x)|2^{-n}}\int_{B_{2r}(x)}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi=2^n\frac{1}{|B_{2r}(x)|}\int_{B_{2r}(x)}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

两边分别取上确界即得. 此外不难看出极大算子 M 作为一个次线性算子, 是 (∞,∞) 型:

$$|Mf(x)|\le\|f\|_{L^\infty}.$$

2. 覆盖引理与极大算子的弱 (1,1) 型

定理1. M 是弱 (1,1) 型: $\boxed{|\{Mf(x)>\alpha\}|\le\frac{3^n}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.}$

这个定理不但如后文解释有许多应用, 而且利用覆盖估计集合测度也是非常基本的方法. 下面先介绍 Vitali 覆盖引理.

引理1 (Vitali 覆盖引理). 设 $\{B_j\}_{j=1}^k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有限个开球, 则必存在其中若干个开球 $\{B_{j_i}\}_{i=1}^l$, 满足:

1) 它们两两互不相交;

2) $\left|\bigcup_{i=1}^{l} B_{j_i}\right| \geq 3^{-n}\left|\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right|$.

证明. 1. 不妨设 $|B_1| \geq |B_2| \geq \cdots \geq |B_k|$. 下面使用归纳法并按照一定的规则选取所要的 $\{B_{j_i}\}_{i=1}^{l}$.

取 $B_{j_1} = B_1$. 假设 $B_{j_1}, \cdots, B_{j_i}$ 已选定, 那么 $B_{j_{i+1}}$ 按如下规则选取:

- 它与 $B_{j_1}, \cdots, B_{j_i}$ 均不相交;
- 它是在 $\{B_j\}_{j=1}^{k}$ 中与 $B_{j_1}, \cdots, B_{j_i}$ 均不相交的剩下的球中测度最大的一个.

由于 $k < \infty$, 以上选取经过有限步后结束, 即存在 $l < \infty$ 使得 $\forall B_j \notin \{B_{j_i}\}_{i=1}^{l}$, B_j 必与 $\{B_{j_i}\}_{i=1}^{l}$ 中的某一个球相交.

2. 性质 1) 根据以上第一个取法规则已成立. 下面验证 2). 事实上, 若某个 $B_j \notin \{B_{j_i}\}_{i=1}^{l}$, 则必存在某个 B_{j_r} 使得 $|B_{j_r}| \geq |B_j|$ 且 $B_{j_r} \cap B_j \neq \emptyset$, [1] 从而 $B_j \subset 3B_{j_r}$ [2]成立. 由此可推出 $\bigcup_{j=1}^{k} B_j \subset \bigcup_{r=1}^{l} 3B_{j_r}$. 那么

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right| &\leq \left|\bigcup_{r=1}^{l} 3B_{j_r}\right| \leq \sum_{r=1}^{l} |3B_{j_r}| \\
&= 3^n \sum_{r=1}^{l} |B_{j_r}| = 3^n \left|\bigcup_{r=1}^{l} B_{j_r}\right|.
\end{aligned}
$$

□

这个证明的关键, 和极大函数一样, 都是考虑"极大". 这是处理许多问题的关键点.

定理 1 的证明. 1. 集合 $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}$ 是开集. 这是因为对 $x \in E_\alpha$, 由非中心极大函数的定义, 必存在一个球 B_x, 使得

- $x \in B_x$;
- $\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f(y)|\mathrm{d}y > \alpha$.

所以 $\forall y \in B_x$, 有

$$
Mf(y) = \sup_{y \in B} \frac{1}{|B|}\int_B |f(z)|\mathrm{d}z \geq \frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f(z)|\mathrm{d}z > \alpha,
$$

[1]否则, 若与 B_j 相交的球 B_{j_i} 都比 B_j 小, 假设 B_{j_k} 是这些球中最大的那个, 那么当初在选取 B_{j_k} 时, 就应该选取 B_j 而不是现在的 B_{j_k}.

[2]kB 表示与 B 同心, 但半径是 B 半径 k 倍的球体.

从而存在 x 的一个球邻域 B_x 使得 $B_x\subset E_\alpha$.

2. 设 K 是 E_α 的任意一个紧子集. $\forall x\in K$, $\exists B_x\subset E_\alpha$, 使得 $\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x}|f(y)|\mathrm{d}y>\alpha$, 所以 $\{B_x\}_{x\in K}$ 构成了 K 的一个开覆盖. 由 K 的紧性, 存在 K 的一个有限开覆盖 $\{B_i\}_{i=1}^k$. 再由 Vitali 覆盖引理, 存在两两互不相交的 $\{B_{j_i}\}_{i=1}^l\subset\{B_i\}_{i=1}^k$, 且 $\left|\bigcup\limits_{i=1}^l B_{j_i}\right|\geq 3^{-n}|\bigcup\limits_{j=1}^k B_j|$. 因为

$$\begin{aligned}|K| &\leq \left|\bigcup_{i=1}^k B_i\right|\leq 3^n\sum_{i=1}^l|B_{j_i}|\leq 3^n\sum_{i=1}^l\frac{1}{\alpha}\int_{B_{j_i}}|f(z)|\mathrm{d}z\\ &= \frac{3^n}{\alpha}\int_{\bigcup\limits_{i=1}^l B_{j_i}}|f(z)|\mathrm{d}z\leq\frac{3^n}{\alpha}\int_{E_\alpha}|f(z)|\,\mathrm{d}z,\end{aligned}\tag{8.1}$$

所以 $|K|\leq\frac{3^n}{\alpha}\int_{E_\alpha}|f(z)|\mathrm{d}z\leq\frac{3^n}{\alpha}\|f\|_{L^1}$. 再由 Lebesgue 测度的内正则性, 即得

$$|E_\alpha|=\sup\{|K|:\ K\subset E_\alpha,\ K\text{是紧集}\}\leq\frac{3^n}{\alpha}\|f\|_{L^1}.$$

□

因为 M 既是弱 (1,1) 型, 又是 (∞,∞) 型, 由 Marcinkiewicz 插值定理, M是 (p,p) 型 $(1<p\leq\infty)$.

例1 (Kolmogorov 不等式)**.** 设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$|\{x:\ Mf(x)>\lambda\}|\leq\frac{C_n}{\lambda}\int_{\{x:\ Mf(x)>\lambda\}}|f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

证明. 这个不等式可以由 (8.1) 看出. 这里给出另一个证明.

记 $E_\lambda=\{x:\ Mf(x)>\lambda\}$. 对函数 f 作分解 $f=f_1+f_2$, 其中 $f_1=f\chi_{E_\lambda}$, $f_2=f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus E_\lambda}$. 对任意 $x\in E_\lambda$, 由 H-L 极大函数的定义, 存在包含 x 的球 B, 使得 $\frac{1}{|B|}\int_B|f|>\lambda$, 于是 $B\subset E_\lambda$, 从而在 B 上 $f=f_1$, 则必有 $M(f_1)(x)>\lambda$. 这就证明了

$$E_\lambda\subset\{x:Mf_1(x)>\lambda\}.$$

利用 M 是弱 (1,1) 型, 如果 f_1 可积, 就得到

$$|E_\lambda|\leq\frac{C}{\lambda}\left\|f_1\right\|_{L^1}=\frac{C}{\lambda}\int_{E_\lambda}|f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

如果 f_1 不可积, 则上式右端就是 $+\infty$, 从而不等式仍然成立. □

例2. 设 $f\in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $E\subset\mathbb{R}^n$ 测度有限, 且 $0<p<1$. 证明:

$$\int_E |f|^p \le \frac{1}{1-p}|E|^{1-p}\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}^p.$$

证明. 记 $E_\lambda=\{x\in E:\ |f(x)|>\lambda\}$, 那么 $|E_\lambda|\le|E|$ 且 $|E_\lambda|\le\frac{1}{\lambda}\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}$. 于是对任意 $\delta>0$, 成立

$$\begin{aligned}\int_E|f|^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|E_\lambda|\,\mathrm{d}\lambda\\ &\le p|E|\int_0^\delta \lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda+p\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}\int_\delta^\infty \lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda\\ &= \delta^p|E|+\frac{p}{1-p}\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}\delta^{p-1}.\end{aligned}$$

取 $\delta=\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}/|E|$ 即得所证. □

习题 1. 定义 $M_pf(x)=[M(|f|^p)(x)]^{\frac{1}{p}}$. 利用上述习题结论证明, 对 $0<p<1$, M_p 是 $L^{1,\infty}$ 上有界算子, 即 $\left\|M_pf\right\|_{L^{1,\infty}}\le C(n,p)\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}$. □

例3. 证明: 对 $1<p<\infty$, *Hardy–Littlewood* 极大算子是 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的连续映射.

证明. 1. 利用例 2 的方法, 不难证明以下事实: 设 (X,μ) 为测度空间, $E\subset X$ 且 $\mu(E)<\infty$. 又设 $f\in L^{p,\infty}(X,\mu)$ (其中 $p\in(0,\infty)$), 则对 $0<q<p$, 成立

$$\int_E|f(x)|^q\,\mathrm{d}\mu(x)\le\frac{p}{p-q}\mu(E)^{1-\frac{q}{p}}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}^q.$$

由此得到

$$\sup_{E:\ 0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_E|f(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\le\left(\frac{p}{p-q}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}.$$

下面将对 $q=1$, $p\in(1,\infty)$ 利用此不等式.

2. 设 $f\in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)\subset L^1_{\mathrm{loc}}$. 定义 $E_\lambda\doteq\left\{x:\ Mf(x)>\lambda\right\}$, 以及 $E_\lambda^R\doteq\left\{x:\ Mf(x)>\lambda\right\}\cap\left\{|x|<R\right\}$, 后者测度有限. 那么根据第 1 步的结论,

$$|E_\lambda^R|^{\frac{1}{p}-1}\int_{E_\lambda^R}|f(x)|\,\mathrm{d}x\le\frac{p}{p-1}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}.$$

令 $R\to\infty$, 就得到

$$|E_\lambda|^{\frac{1}{p}-1}\int_{E_\lambda}|f(x)|\,\mathrm{d}x\le\frac{p}{p-1}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}.$$

由例 1, 成立

$$\lambda|E_\lambda|^{\frac{1}{p}}\le C_n|E_\lambda|^{\frac{1}{p}-1}\int_{E_\lambda}|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

从而

$$\lambda |E_\lambda|^{\frac{1}{p}} \le C_n \frac{p}{p-1} \left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}.$$

左边关于 $\lambda > 0$ 取上确界, 就证明了 $\left\|Mf\right\|_{L^{p,\infty}} \le C_n \frac{p}{p-1} \left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}$. □

二 极大函数的应用: 点态收敛的极大函数法

1. 用 Hardy–Littlewood 极大算子控制其它极大算子

Hardy–Littlewood 极大算子作为对函数绝对值在各点周围的平均值的最大者, 可以用来控制其它一些平均化算子, 例如常见的卷积磨光算子, 后者在微分方程中有许多应用.

定理2. 设 k 为 $[0, \infty)$ 上单调递减, 除有限个点外连续的非负函数. 又设 $K(x) = k(|x|)$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$, 并记 $K_\epsilon(x) \doteq \frac{1}{\epsilon^n} K(\frac{x}{\epsilon})$. 则

$$\sup_{\epsilon>0} (|f| * K_\epsilon)(x) \le M_c f(x) \|K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

证明. 1. 只需对 K 有紧支集且连续情形证明; 对一般的 K, 可用满足上述条件的 K_j 单调向上逼近 K, 相应的结论可用 Levi 单调收敛定理得出. 此外, 可只对 $x = 0$ 证明, 一般情形用估计式两边的平移不变性, 用函数 $f(x+t)$ 代替 $f(x)$ 即可.

2. 下面只需证: 对取定的 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y) K_\epsilon(-y)| \mathrm{d}y \le M_c f(0) \|K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

取 $e_1 = (1, \cdots, 0)$, 则 $K_\epsilon(-y) = K_\epsilon(|y| e_1)$. 记 $F(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(r\theta)| \mathrm{d}\theta$, $a(r) = \int_0^r F(s) s^{n-1} \mathrm{d}s$, 注意到 $a(0) = 0$, K_ϵ 有紧支集, 得到

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) K_\epsilon(|y| e_1)| \mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(r\theta)| K_\epsilon(r e_1) r^{n-1} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \\ = & \int_0^\infty F(r) K_\epsilon(r e_1) r^{n-1} \mathrm{d}r = \int_0^\infty a'(r) K_\epsilon(r e_1) \mathrm{d}r \\ = & \ a(r) K_\epsilon(r e_1)|_0^\infty - \int_0^\infty a(r) \mathrm{d}K_\epsilon(r e_1) = \int_0^\infty a(r) \mathrm{d}(-K_\epsilon(r e_1)). \end{aligned}$$

此处最后一项为 Lebesgue–Stielges 积分. 因为

$$\begin{aligned} a(r) &= \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(s\theta)| \mathrm{d}\theta s^{n-1} \mathrm{d}s \\ &= \int_{B_r(0)} |f(y)| \mathrm{d}y \le |B_r(0)| M_c f(0), \end{aligned}$$

所以, 记 $\omega_n = |B(0,1)|$, 再利用 $\mathbf{S}^{n-1}$ 的表面积为 $n\omega_n$, 最终就有

$$\begin{aligned}
|f| * K_\epsilon(0) &\le \int_0^\infty r^n \omega_n M_c f(0) \mathrm{d}(-K_\epsilon(re_1)) \\
&= M_c f(0)\omega_n\Big((r^n)(-K_\epsilon(re_1))|_0^\infty + \int_0^\infty K_\epsilon(re_1) n r^{n-1} \mathrm{d}r\Big) \\
&= n\omega_n M_c f(0) \int_0^\infty K_\epsilon(re_1) r^{n-1} \mathrm{d}r \\
&= M_c f(0) \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^{n-1}} K_\epsilon(re_1) r^{n-1} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \\
&= M_c f(0) \|K_\epsilon\|_{L^1} = M_c f(0) \|K\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

证毕. □

推论1. *设 φ 有控制函数 Φ: $|\varphi| \le \Phi$, 且 $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 为径向对称*[3]*单调递减的连续函数, 则*

$$\sup_{\epsilon>0} (|\varphi_\epsilon| * |f|)(x) \le M_c f(x) \|\Phi\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1_{\mathrm{loc}}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

2. 点态收敛的极大函数法

设 (X,μ), (Y,ν) 是测度空间. 对 $\epsilon > 0$, 设 T_ϵ 是定义在 $L^p(X,\mu)$ 上, 取值为 (Y, ν) 中可测函数的线性算子. 定义极大算子:

$$\boxed{(T_* f)(x) \doteq \sup_{\epsilon>0} |(T_\epsilon f)(x)|.}$$

所谓 点态收敛的极大函数法 是指, 只要对 $L^p(X,\mu)$ 的某个稠密子集中的 f, 成立 $(T_\varepsilon f)(x)$ 点态收敛, 那么由 T_* 的弱 (p,q) 型就可推出对一般的 f, $T_\epsilon f$ 也几乎处处收敛. 严格来说, 我们有以下定理.

定理3. *设 D 是 $L^p(X,\mu)$ 的稠密子集, $\{T_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ 是 D 上的一族线性算子, 若*

- *存在 $B > 0$ 使得 $\|T_* f\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \le B\|f\|_{L^p(X,\mu)}$;*
- *对任意的 $g \in D$, 在 ν 测度意义下, 对几乎所有的 x, $\epsilon \to 0$ 时 $(T_\epsilon g)(x)$收敛, (记其极限为$(T|_D g)(x)$, 从而确定了一个线性映射 $T|_D$),*

则 $\forall f \in L^p(X,\mu)$, $T_\epsilon f$ 在 ν 测度意义下几乎处处收敛于某个 Tf; 此时线性映射 T 是 $T|_D$ 在 $L^p(X,\mu)$ 上的唯一线性延拓, 且为弱 (p,q) 型.

[3] $\Phi(x)$ 只依赖于 $|x|$.

证明. 1. 给定 $f \in L^p(X,\mu)$, 对任意 $y \in Y$, 定义

$$O_f(y) = \overline{\lim_{\epsilon>0}}\ \overline{\lim_{\theta>0}} |(T_\epsilon f)(y) - (T_\theta f)(y)|.$$

显然 $O_f(y) \le \sup_{\epsilon,\theta>0}(|T_\epsilon f(y)| + |T_\theta f(y)|) \le 2T_* f(y)$. 下面证明: $\forall \delta > 0$, 有

$$\nu(\{y \in Y:\ O_f(y) > \delta\}) = 0. \tag{8.2}$$

若 (8.2) 成立, 就有 $O_f(y)$ 关于测度 ν-几乎处处为 0, 从而可推出 $\{(T_\epsilon f)(y)\}_{\epsilon>0}$ 几乎处处为 Cauchy 列.

2. 由稠密性, $\forall \eta > 0$, $\exists g \in D$, 使得 $\|f-g\|_{L^p} < \eta$. 利用三角不等式易知 $O_f(y) \le O_{f-g}(y) + O_g(y)$, 而由定理条件可得 $O_g(y) = 0$. 所以成立

$$\begin{aligned}
\nu(\{y \in Y:\ O_f(y) > \delta\}) &\le \nu(\{y \in Y:\ O_{f-g}(y) > \delta\}) \\
&\le \nu(\{y \in Y:\ 2(T_*(f-g))(y) > \delta\}) \\
&\le \left(\frac{2B}{\delta}\|f-g\|_{L^p}\right)^q \le \left(\frac{2B\eta}{\delta}\right)^q.
\end{aligned}$$

这里用了 T_* 是弱 (p,q) 型. 再由 η 的任意小性, 就得到 (8.2).

3. 由 $\{T_\epsilon f(y)\}$ 几乎处处为 Cauchy 列知, 对 ν 测度下几乎所有的y, 数列 $\{T_\epsilon f(y)\}_{\epsilon>0}$ 收敛, 记其极限为 $Tf(y)$. 这就确定了ν可测函数 $Tf(y)$, 从而给出了线性算子 T 在 $L^p(X,\mu)$ 上的定义. 因为 $|Tf(y)| \le T_* f(y)$, 且 T_* 是弱 (p,q) 型, 由定义就可得到 T 是弱 (p,q) 型. 证毕. □

3. 在微分定理中的应用

下面首先介绍定理 3 在函数微分 (局部性质) 方面的应用.

定理4 (Lebesgue 微分定理). *若 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则*

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)} f(y)\mathrm{d}y = f(x), \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n.$$

使得此式成立的点 x 叫作 f 的 Lebesgue 点.

证明. 任给 $N > 0$, 通过将 f 在以原点为心, $N+1$ 为半径的球 $B_{N+1}(0)$ 外作零延拓, 可不妨设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 对 $R > 0$, 定义线性算子 T_R 如下: $(T_R f)(x) \doteq \frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)} |f(y)|\mathrm{d}y$. 它对应的极大算子由

$$T_* f(x) \doteq \sup_{R>0} \frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)} |f(y)|\mathrm{d}y = M_c f(x)$$

确定, 从而 T_* 是弱 (p,p) 型. 对于连续函数 g, 当 $R\to 0$ 时, 对满足 $|x|\le N$ 的任意 x 都成立 $(T_R f)(x)\to g(x)$. 由连续函数在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性, 用定理 3, 可知对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $Tf(x)\doteq \lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)}|f(y)|\mathrm{d}y$ 几乎处处存在, 而且 T 是恒等映射的保范延拓, 从而就是恒等映射. 这就是说存在一个 Lebesgue 零测集 $S_N\subset B_N(0)$, 对 $x\in B_R(0)\setminus S_N$, 成立 $\lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)}|f(y)|\mathrm{d}y=f(x)$. 现在记 $S=\cup_{N=1}^{\infty}S_N$, 它是 Lebesgue 零测集, 那么对任意 $x\in\mathbb{R}^n\setminus S$, 也成立 $\lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)}|f(y)|\mathrm{d}y=f(x)$. □

注意这里球体 $B_R(x)$ 若换为任何包含 x 且测度趋于零的球体或方体, 用完全相同的证明思路, 也可证得结论成立. 所以对局部可积函数 f, 我们得到

$$|f(x)|\le Mf(x),\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

我们注意到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\le p<\infty)$ 空间是通过全局的积分定义的. 这里的微分定理说明一个 L^p 函数在每点附近值的分布还是体现出某种连续性的. 此外, 对一般的函数如何判定哪些点是 Lebesgue 点, 则是用积分和测度工具无法解决的问题. 这需要针对给定函数的具体特点具体验算.

推论2. *设 $T_\epsilon f=f*\varphi_\epsilon$, φ 满足: $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$; $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\mathrm{d}x=a$; φ 有一个径向对称单调递减且 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 可积的连续控制函数 Φ. 则对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, 成立*

$$T_\epsilon f(x)\to af(x)\quad a.e.$$

证明. 1. 结论对 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$ 显然成立. 又极大算子

$$T_*f(x)=\sup_{\epsilon>0}|f*\varphi_\epsilon|(x)\le\sup_{\epsilon>0}|f|*\Phi_\epsilon(x)\le M_cf(x)\|\Phi\|_{L^1}$$

为弱 (p,p) 型, 由定理 3 即得证. □

三 椭圆型方程的 L^p 边值问题

下面我们用极大函数研究具有 L^p 边值的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题. 这类问题在研究双曲–椭圆复合–混合型方程组的诸如跨音速接触间断或跨音速激波问题时会遇到: 由于双曲部分的解可能含有激波等间断而光滑性很差, 导致亚音速流 (椭圆) 部分边界只有 Lipschitz 光滑性, 而边界值也仅是 L^p 函数.

我们考虑最简单的情形, 以获得对这类问题最基本的认识. 考虑 Laplace 方程的如下 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 该问题是否有解? 若有解 $u(x,t)$, 则当 $t \to 0$ 时, $u(x,t)$ 是否点态收敛到 $f(x)$?

1. 点态收敛

由偏微分方程知识, 我们知道 Laplace 方程在上半空间的 Dirichlet 问题对应的 Green 函数为如下 Poisson 核

$$P(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

它满足 $\|P\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. 令 $P_t(x) \doteq \frac{1}{t^n} P(\frac{x}{t})$, 可以验证

$$\frac{\mathrm{d}^2 P_t(x)}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 P_t(x) = 0,$$

即 $P_t(x)$ 是关于 (x,t) 的调和函数. 上述 Laplace 方程 Dirichlet 问题的解就是

$$u(x,t) = (f * P_t)(x).$$

这是一个逼近恒等, 所以边值在 $\lim_{t\to 0} \left\| u(\cdot,t) - f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$ 意义下满足. 又若 $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 利用第一讲中处理 Gauss 核的方法 (热方程的 Cauchy 问题), 可以证明 $u(t,x) \to f(x)$ $(t \to 0)$ 处处成立.

另一方面，由定理 2, $(|f| * P_t)(x) \le M_c f(x) \|P\|_{L^1} = M_c f(x)$, 所以 $(T_* f)(x) = \sup\limits_{t>0} |f| * P_t(x) \le M_c f(x)$. 这样根据定理 3, $\forall f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, 有 $u(t,x) = (f * P_t)(x) \to f(x)$ 几乎处处成立.

2. 非切向收敛

设 $F(x,t)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_+ \doteq \left\{ (x,t) : \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \right\}$ 上的可测函数, 我们定义它的开口为 $a > 0$ 的非切向极大函数

$$F_a^*(x) \doteq \sup_{t>0} \sup_{|y-x|<at} |F(y,t)|,$$

它也就是 F 在锥 $\Gamma_a(x) \doteq \left\{ (y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : \ |y-x| < at \right\}$ 上的上确界.

定理5. 设 φ 具有径向对称的且连续递减的属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的控制函数 Φ, 则对于任意 $f \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, 置 $F(x,t) = \varphi_t * f(x)$, 那么成立

$$F_a^*(x) \le C_{n,a}\Big(\|\Phi\|_{L^1} + |\Phi(0)|\Big)M_c f(x).$$

这里 $M_c f(x)$ 是 f 的 *Hardy–Littlewood* 中心极大函数.

证明. 利用定理 2 证明第一步所采取的简化, 只需证明: 对任意 $|z| < a\varepsilon$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||\Phi_\varepsilon(z-y)|\,\mathrm{d}y \le C_{n,a} M_c f(0)\Big(\|\Phi\|_{L^1} + |\Phi(0)|\Big). \tag{8.3}$$

事实上, 令

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Phi(0), & |x| \le a, \\ \Phi(|x|-a), & |x| > a, \end{cases}$$

则 $\Psi(x)$ 就是 $\sup_{|u|\le a} |\Phi(x-u)|$ 的一个径向对称连续递减且可积的控制函数. 于是 $|\Phi_\varepsilon(z-y)| = |\Phi_\varepsilon(y-z)| = \varepsilon^{-n}\Phi(\varepsilon^{-1}y - \varepsilon^{-1}z) \le \sup_{|u|\le a} \varepsilon^{-n}\Phi(\varepsilon^{-1}y - u) \le \varepsilon^{-n}\Psi(\varepsilon^{-1}y) = \Psi_\varepsilon(y) = \Psi_\varepsilon(-y)$. 定理 2 证明第 2 步已经证得 $|f| * \Psi_\varepsilon(0) \le C_n M_c f(0)\|\Psi\|_{L^1}$. 由此就得到 (8.3) 成立. □

根据上述定理, 容易看出, 当 $\varphi(x)$ 是 Poisson 核 $P(x)$ 时, 以 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ 为边值的上半空间的调和函数 $u(x,t)$ 非切向几乎处处收敛于 $f(x)$, 即对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$, 对所有 $a > 0$, 成立

$$\lim_{\Gamma_a(x)\ni(y,t)\to(x,0)} u(y,t) = f(x).$$

四 Calderon–Zygmund 分解

最后, 我们介绍极其重要的 Calderon–Zygmund 分解定理, 它结合了函数值在空间的分布, 把函数分解为有界的好的部分和有若干性质的“不好”的部分. 这将在今后研究奇异积分算子的弱 (1,1) 型时起关键作用.

定义2 (二进方体). $\mathbb{R}^n$ 中边长为 2^k, 各边平行于坐标轴的正方体

$$[2^k m_1, 2^k(m_1+1)) \times [2^k m_2, 2^k(m_2+1)) \times \cdots \times [2^k m_n, 2^k(m_n+1))$$

称为二进方体. 这里 $k, m_1, \cdots, m_n$ 均为整数.

固定 k, 全空间可被这样的二进方体覆盖, 且具有以下两条基本性质:

(a) 当 k 相同时, 它们两两互不相交;

(b) 当 k 不同时, 必有一个包含在另一个中或互不相交.

定理6 (Calderon–Zygmund 分解)**.** *设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 g 和 b, 满足:*

1) $f = g + b$;

2) $\|g\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$, $\|g\|_{L^\infty} \le 2^n\alpha$;

3) $b = \sum\limits_j b_j$, 其中 supp b_j 包含在某个二进方体 Q_j 中, 且 $Q_j \cap Q_k = \emptyset (k \neq j)$;

4) $\int_{Q_j} b_j \mathrm{d}x = 0$;

5) $\|b_j\|_{L^1(Q_j)} \le 2^{n+1}\alpha|Q_j|$;

6) $\sum\limits_j |Q_j| \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1}$;

7) $\alpha < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)| \mathrm{d}x \le 2^n\alpha$;

8) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus (\cup_j Q_j)$, 成立 $|f(x)| \le \alpha$.

证明. 1. 选择满足定理要求的方体.

因为 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$, 可取 l 充分大, 使得对任意的边长为 2^l 的方体 Q, 都成立 $|Q| > \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1}$. 这样的方体被称为第 0 代方体, 其集合记作 G_0.

对每个 $Q \in G_0$, 将其每个边二等分得到 2^n 个小方体, 后者边长为 2^{l-1}, 称为第 1 代方体, 其集合记作 G_1.

按照如下准则选择方体 $(k = 1, 2, \cdots)$:

- 对第 k 代方体 $Q \in G_k$, 若
$$\boxed{\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \mathrm{d}x > \alpha,}$$
则其被选中, 予以保留. 记所有被选中的第 k 代方体为 S_k.

- 对没有选中的第 k 代方体 $Q \in G_k \setminus S_k$, 将其每边二等分得到第 $k+1$ 代方体. 所有第 $k+1$ 代方体集合记作 G_{k+1}.

对 $k=1,2,\cdots$, 上述步骤可以无限进行下去. 记 $S\doteq\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$. 这就是定理性质 3) 中出现的方体的集合.

2. 构造满足条件的 b_j.

对任意的 $Q_j\in S$, 令 $b_j(x)\doteq f(x)-\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(y)|\mathrm{d}y$, 则性质 4) 显然成立. 令 $b\doteq\sum_{j=1}^{\infty}b_j$, 则 3) 成立.

3. 令 $g\doteq f-b$, 则性质 1) 满足.

4. 再验证性质 5). 从定义可知 $\int_{Q_j}|b_j|\mathrm{d}x\le 2\int_{Q_j}|f|\mathrm{d}x$. 因为 Q_j 被选中, 必有 $Q_{j'}$ 使得通过其边对分一次[4]得到 Q_j, 则 $|Q_{j'}|=2^n|Q_j|$ 且 $Q_j\subset Q_{j'}$; 而 $Q_{j'}$ 之所以被分解, 是因为没有被选中, 即成立 $\frac{1}{|Q_{j'}|}\int_{Q_{j'}}|f(x)|\mathrm{d}x\le\alpha$, 或 $\int_{Q_{j'}}|f(x)|\mathrm{d}x\le 2^n\alpha|Q_j|$. 于是得到 $\int_{Q_j}|b_j|\mathrm{d}x\le 2^{n+1}\alpha|Q_j|$.

特别的, 若 $Q_j\in S$, 则 $\alpha<\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{2^n}{|Q_{j'}|}\int_{Q_{j'}}|f(x)|\mathrm{d}x\le 2^n\alpha$. 性质 7) 得证.

5. 下证性质 6). 若 $Q_j\in S$, 则 $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x>\alpha$,[5] 于是

$$\sum_j|Q_j|<\frac{1}{\alpha}\sum_j\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\int_{\bigcup Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

6. 再验证性质 2). 因为

$$g=f-b=\begin{cases} f, & x\notin\bigcup Q_j,\\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x, & x\in Q_j,\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^1} &\le \sum_j\int_{Q_j}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^n\setminus\bigcup Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又对 $x\in Q_j$, 如前所述存在 Q_j' 使得 Q_j 由 Q_j' 分解一次得到, 从而

$$|g(x)|\ \le\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(y)|\mathrm{d}y\le\frac{2^n}{|Q_{j'}|}\int_{Q_{j'}}|f(y)|\mathrm{d}y\le 2^n\alpha.$$

另一方面, 对于 $x\notin\bigcup Q_j$, 必存在一列 $\{\tilde{Q}_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使得 $\tilde{Q}_j\in G_j$, 且 $x\in\tilde{Q}_j$, $\bigcap\tilde{Q}_j=\{x\}$, $|\tilde{Q}_j|\to 0$. 所以由 Lebesgue 微分定理, 利用 $\frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j}|f(x)|\mathrm{d}x\le\alpha$ 对这列 $\tilde{Q}_j$ 成立, 令 $j\to\infty$, 即 $|\tilde{Q}_j|\to 0$,

[4] 注意所有第 0 代方体都被分割掉了.

[5] 从而在 Q_j 上成立 $Mf(x)>\alpha$.

可得

$$\lim_{|\tilde{Q}_j|\to 0}\frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j}|f(x)|\mathrm{d}x=|f(x)|\le\alpha.$$

这就证明了性质 8), 从而也成立 $|g(x)|<2^n\alpha$. 证毕. □

极大函数和 C-Z 分解是调和分析中最重要的方法之一. 下面再举一个例子, 帮助大家熟悉这套方法.

例4. 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 以 $\lambda>0$ 为水平对 f 作 C-Z 分解, 所得方体记为 $\{Q_k^\lambda\}$, 则:

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:\ M_c f(x)>7^n\lambda\}|\le 2^n\sum_k|Q_k^\lambda|.$$

分析: $\left\{x:\ |f(x)|>\lambda\right\}\subset\{x:\ Mf(x)>\lambda\}\subset(\cup_k Q_k^\lambda)\cup Z$, 其中 $|Z|=0$.

证明. 1. 对任意 Q_k^λ, 记 $(Q_k^\lambda)^*$ 为与 Q_k^λ 同心但边长为其两倍的方体. 下面说明: 对任意 $x\notin\bigcup_k(Q_k^\lambda)^*$, 有 $M_c f(x)\le 7^n\lambda$, 即若 $x\notin\bigcup_k(Q_k^\lambda)^*$, 则对任意以 x 为中心的方体 Q, 成立:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y\le 7^n\lambda.$$

下面分两种情形讨论.

2. $Q\subset\mathbb{R}^n\backslash(\bigcup_k Q_k^\lambda)$. 此时对任意 $x\in Q$ 有 $|f(x)|\le\lambda\implies\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x\le\lambda\le 7^n\lambda$ 成立.

3. 否则 Q 必与某个 Q_k^λ 相交. 由于 x 在 Q 中且 $x\notin(Q_k^\lambda)^*$, 所以成立 $Q_k\subset 3Q$, ($3Q$ 是以 Q 的中心为心, 边长为 Q 的边长的 3 倍的方体), 于是对所有与 Q 相交的 Q_k^λ 取并, 成立 $\bigcup Q_k^\lambda\subset 3Q$. 那么

$$\begin{aligned}
\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y &= \int_{Q\cap(\mathbb{R}^n\backslash\bigcup_k Q_k^\lambda)}|f(y)|\mathrm{d}y+\int_{Q\cap(\bigcup_k Q_k^\lambda)}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le \lambda|Q|+\int_{\bigcup_k(Q\cap Q_k^\lambda)}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le \lambda|Q|+\int_{\bigcup_{k\in\mathcal{A}}(Q_k^\lambda)}|f(x)|\mathrm{d}x\quad(\text{这里记 }\mathcal{A}\doteq\{k:\ Q_k^\lambda\cap Q\ne\emptyset\})\\
&= \lambda|Q|+\sum_{k\in\mathcal{A}}\int_{Q_k^\lambda}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le \lambda|Q|+\sum_{k\in\mathcal{A}}2^n\lambda|Q_k^\lambda|\quad\left(\text{因为 }\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(y)|\mathrm{d}y\le 2^n\lambda\right)\\
&= \lambda|Q|+2^n\lambda\sum_{k\in\mathcal{A}}|Q_k^\lambda|=\lambda|Q|+2^n\lambda\Big|\bigcup_{k\in\mathcal{A}}Q_k^\lambda\Big|\\
&\le \lambda|Q|+2^n\lambda\cdot 3^n|Q|=\lambda(1+6^n)|Q|\le\lambda 7^n|Q|.
\end{aligned}$$

证毕. □