第八章　复积分

8.1　复积分

本节定义复积分，可类比实函数沿曲线的积分。此时积分空间是一条曲线, 积分对象是复值函数。

假设 $\gamma(t) = x(t) + iy(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ 是一条分段光滑曲线，它的正方向指的是参数 t 增加的方向。沿此方向, $\gamma(a)$ 与 $\gamma(b)$ 分别为曲线的起点和终点。γ 的逆曲线 γ^- 定义为 $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t), t \in [a,b]$, 它与 γ 表示的点集相同, 但作为曲线, 方向相反。

假设 f 是定义在 γ 上的复值函数。在闭区间 $[a,b]$ 上取分点 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 分点集形成 $[a,b]$ 上的一个划分, 记为 $\mathcal{P} = \{t_0, \cdots, t_n\}$。这诱导沿着 γ 的正方向的一组分点 $z_0 = \gamma(a), z_1 = \gamma(t_1), \cdots, z_n = \gamma(b)$ (可能有重合), 它们将 γ 分解为 n 段弧, 位于 z_{k-1} 与 z_k 之间的一段记为 $\gamma_k = \gamma([t_{k-1}, t_k])$, $k = 1, \cdots, n$。

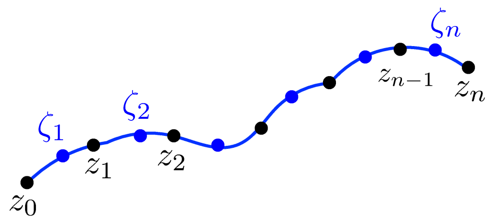

图 8.1: 曲线的划分

在弧段 γ_k 上取点 ζ_k, 并考虑 Riemann 和

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

记划分的长度 $|\mathcal{P}| = \max\{|t_k - t_{k-1}|; 1 \le k \le n\}$。如果当 $|\mathcal{P}| \to 0$ 时，不论 ζ_k 取法如何, Riemann 和总存在一确定的极限，就称 f 沿 γ 可积。此极限称为 f 沿 γ 的积分，记为

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} S(\mathcal{P}).$$

一个自然的问题是，上式右端极限何时存在？事实上，只需要 f 在 γ 上连续即可。为说明这一点, 我们将 Riemann 和写成实形式。记 $z_k = x_k + iy_k, f(z) = u(z) + iv(z)$, 则

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{n}(u(\zeta_k) + iv(\zeta_k))((x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(u(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\zeta_k)(y_k - y_{k-1})) \\
&+ i\sum_{k=1}^{n}(v(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) + u(\zeta_k)(y_k - y_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(u(\zeta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k)\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v(\zeta_k)\Delta x_k + u(\zeta_k)\Delta y_k).
\end{aligned}$$

f 在 γ 上连续等价于 u, v 在 γ 上连续。因此当 $|\mathcal{P}| \to 0$ 时, 上式趋于第二类曲线积分

$$\int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy.$$

因此, 如果 $f = u + iv$ 在 γ 上连续, 则 f 沿 γ 可积, 且

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy.$$

上式右端积分对象即是 $f(z)dz = (u + iv)(dx + idy)$ 的展开。

在曲线 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ 的参数化之下, 可验证

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

这一变量替换给出了计算积分的通用办法。

类似地，可用 Riemann 和的极限定义曲线积分 $\int_\gamma |f(z)||dz|$, $\int_\gamma f(z)|dz|$, $\int_\gamma f(z)d\bar{z}$, 并可验证

$$\int_\gamma |f(z)||dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt,$$

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt,$$
$$\int_\gamma f(z)d\bar{z} = \int_a^b f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}dt.$$

8.2 复积分的性质

沿着曲线的积分依赖于曲线的方向, 但不依赖于曲线的参数化。下面依次说明。以下讨论总假设 γ 分段光滑。

事实上, 沿 γ 的逆曲线 γ^- 积分为

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^-} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma^-(t)){\gamma^-}'(t)dt \\
&= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)dt \\
&= -\int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)(-ds) \\
&= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \\
&= -\int_\gamma f(z)dz.
\end{aligned}$$

这说明将曲线改变方向，积分反号。

任取可微同胚 $h:[a,b]\to[c,d]$, 可将曲线 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ 重新参数化为 $\widehat{\gamma}:[c,d]\to\mathbb{C}$, 满足 $\widehat{\gamma}(s)=\gamma(h^{-1}(s))$ 亦即 $\widehat{\gamma}(h(t))=\gamma(t)$。于是

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{\gamma}} f(z)dz &= \int_c^d f(\widehat{\gamma}(s))\widehat{\gamma}'(s)ds = \int_a^b f(\widehat{\gamma}(h(t)))\widehat{\gamma}'(h(t))h'(t)dt \\
&= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f(z)dz.
\end{aligned}$$

由积分定义, 可验证: 如果复值函数 f,g 都在 γ 上连续, 则对任何复数 α,β, 成立

$$\int_\gamma(\alpha f(z)+\beta g(z))dz = \alpha\int_\gamma f(z)dz + \beta\int_\gamma g(z)dz.$$

如果曲线 γ_1 的终点为 γ_2 的起点, 则

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

如果两曲线并非首尾相连, 积分亦可如上定义。

积分性质中最为常用的是如下不等式:

定理 8.1. (复积分基本不等式) 假设 f 在分段光滑曲线 γ 上连续, 记 $L(\gamma)$ 为 γ 的长度。则

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz| \le \max_{z\in\gamma}|f(z)|L(\gamma).$$

证明: 不妨假设 $\int_\gamma f(z)dz \neq 0$, 否则结论平凡。记 $\int_\gamma f(z)dz$ 的一个辐角为 θ。则

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= e^{-i\theta}\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt \\
&\quad + i\int_a^b \mathrm{Im}(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt \\
&\le \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \\
&\le \max_{z\in\gamma}|f(z)|\int_a^b |\gamma'(t)|dt \\
&= \max_{z\in\gamma}|f(z)|\cdot L(\gamma).
\end{aligned}$$

例题 8.1. 计算积分

$$\int_\gamma z^n dz$$

其中 n 是整数, γ 是以原点为圆心, 以 r 为半径的圆周。

解: 取 γ 的参数化 $\gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$, 则 $\gamma'(t) = ire^{it}$,

$$\int_\gamma z^n dz = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$$

8.3 原函数

如何有效计算沿曲线的积分？

现考虑一个自然的问题。假设 Ω 是一个平面区域, f 是 Ω 上的连续函数。在什么条件下, f 沿着曲线的积分与曲线的路径无关？即是说, 曲线积分只依赖于曲线起点和终点的位置？

事实上, 给定两点 $z_1, z_2 \in \Omega$, 记 γ_1, γ_2 都是以 z_1 为起点, z_2 为终点的分段光滑曲线。显然 $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ 是以 z_1 为起点和终点的分段光滑闭曲线。积分与路径无关, 意味着

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2{}^-} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

即沿闭曲线 $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ 积分为零。反之, 如果 f 沿着任何分段光滑闭曲线积分为零, 则容易说明 f 沿着曲线的积分与路径无关。

于是问题等价于: 在什么条件下, f 沿着任何分段光滑闭曲线积分为零?

为回答此问题, 引入原函数的概念。

称复值函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 在 Ω 上存在原函数 (primitive), 如果存在 Ω 上的全纯函数 F, 满足 $F'(z) = f(z), z \in \Omega$。

如果存在原函数，积分计算大大简化：

定理 8.2.(Newton-Leibniz 公式) 假设复值函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 连续, 存在原函数 F, 则对任意分段光滑曲线 $\gamma : [a, b] \to \Omega$, 成立

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

证明: 先假设 γ 光滑, 此时

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt}dt \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

如果 γ 分段光滑, 不妨假设 $\gamma : [t_{k-1}, t_k] \to \Omega$ 光滑, 其中 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$。则

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^n (F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1}))) \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

值得一提：并非所有复值函数都有原函数。后面将会看到, 如果 f 有原函数，则 f 只能为全纯函数。但即使 f 全纯，亦不

能保证 f 有原函数，例8.1表明，$1/z$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上没有原函数，因其沿单位圆周积分非零。

下面给出原函数存在性的一个等价描述。

命题 8.1. 假设复值函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 连续, 则以下等价

1. f 在 Ω 上存在原函数;
2. f 沿 Ω 中任何分段光滑闭曲线的积分为零。

证明: $1\Longrightarrow 2$ 由 Newton-Leibniz 公式得。

$2\Longrightarrow 1$. 取一定点 $z_0\in\Omega$。对任意 $z\in\Omega$, 存在分段光滑曲线 $\gamma_z:[a,b]\to\mathbb{C}$ 满足 $\gamma_z(a)=z_0,\gamma_z(b)=z$。定义函数

$$F(z)=\int_{\gamma_z}f(\zeta)d\zeta.$$

先说明 F 良定义。事实上, 如果 α_z 是另一条起点为 z_0, 终点为 z 的分段光滑曲线, 则 $\gamma_z\cup\alpha_z^-$ 是闭曲线。由条件知

$$\int_{\gamma_z\cup\alpha_z^-}f(\zeta)d\zeta=\int_{\gamma_z}f(\zeta)d\zeta-\int_{\alpha_z}f(\zeta)d\zeta=0,$$

这说明 F 的取值不依赖于路径 γ_z 的选取。因此良定义。

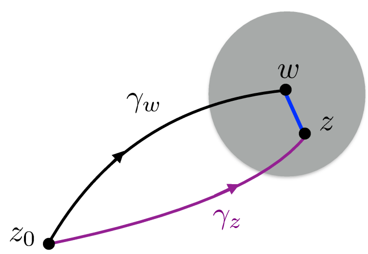

图 8.2: 原函数的构造与积分路径

为说明 F 全纯, 只需说明 F 在任意点导数存在。任取 $z\in\Omega$, 取 $r>0$ 足够小使得 $D(z,r)\subset\Omega$。当 $w\in D(z,r)$ 时,

$$F(w)-F(z)-\int_{[z,w]}f(\zeta)d\zeta=\int_{\gamma_w\cup\gamma_z^-\cup[w,z]}f(\zeta)d\zeta=0.$$

利用基本事实

$$\int_{[z,w]}1d\zeta=w-z,\quad \int_{[z,w]}1|d\zeta|=|w-z|,$$

可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z}-f(z)\right| &= \left|\frac{1}{w-z}\int_{[z,w]}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{|w-z|}\int_{[z,w]}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta| \\ &\le \max_{\zeta\in[z,w]}|f(\zeta)-f(z)| \\ &\to 0 \text{ as } w\to z.\end{aligned}$$

上式说明, 极限

$$\lim_{w\to z}\frac{F(w)-F(z)}{w-z}=f(z).$$

这说明 F 全纯, 且 $F'(z)=f(z)$。因此, F 是 f 的原函数。

原函数存在性是一个非常基本的问题, 是否存在不仅依赖于全纯函数本身, 亦依赖于区域本身的拓扑。本质上，是函数与区域这一配对的综合作用。要回答此问题，需要全纯函数的积分理论以及同调群的基础知识。后文分解。

8.4 习题

“科学和人类其他事业完全不同，它是一种平等的事业。真正的科学没有在中国诞生，这是有原因的。这是因为中国的文化传统里没有平等：从打孔孟到如今，讲的全是尊卑有序。上面说了，拿煤球炉子可以炼钢，你敢说要做实验验证吗？你不敢。炼出牛屎一样的东西，也得闭着眼说是好钢。在这种框架之下，根本就不可能有科学。

科学的美好，还在于它是种自由的事业。它有点像它的一个产物互联网（Internet）——谁都没有想建造这样一个全球性的电脑网络，大家只是把各自的网络连通，不知不觉就把它造成了。科学也是这样的，世界上各地的人把自己的发明贡献给了科学，它就诞生了。这就是科学的实质。还有一样东西也是这么诞生的，那就是市场经济。做生意的方法，你发明一些，我发明一些，慢慢地形成了现在这个东西，你看它不怎么样，但它还无可替代。一种自由发展而成的事业，总是比个人能想出来的强大得多。参与自由的事业，像做自由的人一样，令人神往。当然，扯到这里就离了题。现在总听到有人说，要有个某某学，或者说，我们要创建有民族风格的某某学，仿佛经他这么一规划、一呼吁，在他

画出的框子里就会冒出一种真正的科学。老母鸡“格格”地叫一阵，挣红了脸，就能生一个蛋，但科学不会这样产生。人会情绪激动，又会爱慕虚荣。科学没有这些毛病，对人的这些毛病，它也不予回应。最重要的是：科学就是它自己，不在任何人的管辖之内。

对于科学的好处，我已经费尽心机阐述了一番，当然不可能说得全面。其实我最想说的是：科学是人创造的事业，但它比人类本身更为美好。我的老师说过，科学对中国人来说，是种外来的东西，所以我们对它的理解，有过种种偏差：始则惊为洪水猛兽，继而当巫术去理解，再后来把它看做一种宗教，拜倒在它的面前。他说这些理解都是不对的，科学是个不断学习的过程。我老师说得很对。我能补充的只是：除了学习科学已有的内容，还要学习它所有、我们所无的素质。我现在不学科学了，但我始终在学习这些素质。这就是说，人要爱平等、爱自由，人类开创的一切事业中，科学最有成就，就是因为有这两样做根基。”

—王小波《科学的美好》

1. (原函数的唯一性) 证明: 一个复值函数的原函数, 在差一个常数的意义下是唯一的.

2. (原函数的存在性) 函数 $f(z)=1/z$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上是否存在原函数? 函数 $g(z)=\overline{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上是否存在原函数? 证明你的结论。

3. (复积分计算) 假设 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{H}:=\{z;\Im z>0\}$ 是上半平面的一条光滑曲线, 起点 $\gamma(0)=1+i$, 终点 $\gamma(1)=i$。

(a). 计算积分

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz,\ \int_\gamma zdz.$$

(b). z 和 $1/z$ 在上半平面是否有原函数? 说明理由。

4. (复积分计算) 令 $\gamma(t)=z_0(1-t)+tz_1, t\in[0,1]$.

(a). 计算积分

$$\int_\gamma \mathrm{Re}(z)\ dz,\ \int_\gamma \overline{z}dz.$$

(b). 求满足

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right|=\int_\gamma |f(z)||dz|$$

的连续函数 f 的一般形式。

5. (复积分的极限) 假设复值函数 f 在 z_0 连续, 证明

$$f(z_0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$