1. 若 $A\cup(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha)$ 不连通，则存在分割 $A\cup(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha)=C\cup D$

由 $A\subset A\cup(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha)=C\cup D$ 且 A 连通，知 $A\subset C$ 或 $A\subset D$

不妨设 $A\subset C$.

同理可得，$\forall\alpha\in J$，$A_\alpha\subset C$ 或 $A_\alpha\subset D$ 但 $A_\alpha\cap A\neq\phi$. 只能 $A_\alpha\subset C$.

于是有 $A\cup(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha)\subset C$，$D=\phi$. 矛盾！

（或者，由 $A\cup(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in J}(A_\alpha\cup A)$，是有公共点（集合A）的连通子空间

（A、A_α 连通，$A\cap A_\alpha\neq\phi$）的并，也为连通）

2. $\mathbb{R}^\omega$ 在一致拓扑下不连通.

令 $A=\{(x_i)_{i=1}^\infty\in\mathbb{R}^\omega \mid (x_i)_{i=1}^\infty$ 为有界数列$\}$.

$B=\{(x_i)_{i=1}^\infty\in\mathbb{R}^\omega \mid (x_i)_{i=1}^\infty$ 为无界数列$\}$

则 $A\cup B=\mathbb{R}^\omega$，$A\cap B=\phi$. 下证 A、B 均为一致拓扑中开集.

任取 $(x_i)_{i=1}^\infty\in A$，$(x_i)_{i=1}^\infty\in B_{\bar\rho}((x_i)_{i=1}^\infty,\frac{1}{2})\subset A$

$B_{\bar\rho}((x_i)_{i=1}^\infty,\frac{1}{2})$ 为一致拓扑中开集.

对 $(x_i)_{i=1}^\infty\in B$，同样有 $(x_i)_{i=1}^\infty\in B_{\bar\rho}((x_i)_{i=1}^\infty,\frac{1}{2})\subset B$.

故 A、B 均为开集，从而是 $\mathbb{R}^\omega$ 的一个分割.

3. · 先证条件 ii. 反设，若 $x,y\in L$，$x<y$，但不存在 $z\in L$ s.t. $z\in(x,y)$

则 $(-\infty,y)$，$(x,+\infty)$ 是 L 的一个分割，与 L 连通矛盾.

· 再证条件 i. 任取非空子集 $A\subset L$，A 有上界，我们需证 A 在 L 中有上确界.

令 $B=\{b\in L \mid \forall a\in A,\ a\leq b\}$，即 A 的上界的集合，$B\neq\phi$.

$C=\{c\in L \mid \exists a_0\in A.\ s.t.\ a_0\geq c\}$. 则 $C\supset A$. $C\neq\phi$. 且 $L=B\cup C$

由 B 是 A 的上界，知 B 也是 C 的上界

1) 若 C 有最大元，则也是 B 的最小元，即 A 的上确界

2) 若 C 无最大元，则 C 为开集：$\forall c\in C$. $\exists c'\in C$. $c'>c$.

$c\in(-\infty,c')\subset C$.

由 L 连通，知 C 不是闭集（否则结论平凡）.

于是 $\exists b\in L$，b 为 C 的极限点，$b\notin C$，有 $b\in B$（注意 $L=B\cup C$）.

下说明 b 是 B 的最小元：

若否，则 $\exists b'\in B$、$b'<b$. 由 $b\in(b',+\infty)$

且 $(b',+\infty)\cap C=\phi$. 与 b 是 C 的极限点矛盾！

于是 b 是 B 的最小元，即 A 的上确界.

4. $\mathbb{R}^{\omega}$ 在积拓扑下是道路连通的.

任取 $x, y \in \mathbb{R}^{\omega}$, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$

令 $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^{\omega}$

$$t \mapsto (1-t)x + ty.$$

为说明 γ 连续, 只需注意到

$\pi_i \circ \gamma(t) = (1-t)x_i + ty_i$ 为 $[0,1] \to \mathbb{R}$ 上连续映射.

且在积拓扑下, γ 连续 $\Leftrightarrow$ $\pi_i \circ \gamma$ 连续, $\forall i$.

从而 γ 为连接 x, y 的道路.