第三十章 双曲几何

30.1 双曲度量

假设 Ω 是平面区域. Ω 上的一个*共形度量* ρ 指加权的长度元素 $\rho(z)|dz|$, 这里 $\rho \geq 0$ 是 Ω 上的非负连续函数, 称为*度量密度函数*. 共形度量可看成一种新的长度元素.

给定 Ω 中一条分段光滑曲线 γ, 它的 ρ-长度定义为

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz|.$$

很自然的, 面积元素 dA 可表示为沿 x-方向和沿 y-方向的长度元素的乘积:

$$dA = (\rho(z)dx) \times (\rho(z)dy) = \rho(z)^2 dxdy.$$

因此, 如果 $E \subset \Omega$ 是可测集, 其 ρ-面积很自然应表示为

$$A_\rho(E) = \int_E \rho(z)^2 dxdy.$$

假设 $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ 为全纯映射, 给定 Ω_2 上的共形度量 ρ_2, 通过 f 拉回, 可诱导 Ω_1 上的一个共形度量 $\rho_1 = f^*\rho_2$,

$$f^*\rho_2 = f^*(\rho_2(w)|dw|) = \rho_2(f(z))|f'(z)||dz|.$$

如果进一步要求 f 单叶, 则容易验证: 对任意分段光滑曲线 $\gamma \subset \Omega_1$, 任意可测集 $E \subset \Omega_1$, 有

$$\ell_{f^*\rho_2}(\gamma) = \ell_{\rho_2}(f(\gamma)),\ A_{f^*\rho_2}(E) = A_{\rho_2}(f(E)).$$

以上等式的本质是积分的变量代换.

给定一个平面区域, 其上的共形度量有很多, 但并非所有度量都有同等重要的意义. 我们钟情于那种特别的度量, 由它出发能引出漂亮的几何. 下面将对最简单的区域 –单位圆盘, 引入最具重要性的度量 –双曲度量, 开启美妙的几何之旅.

定理 30.1. 圆盘 $\mathbb{D}$ 上有唯一的共形度量 $\sigma = \sigma(z)|dz|$, 满足

1. (规范化条件) $\sigma(0) = 2$.
2. (群作用不变) σ 在 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 作用下保持不变:

$$f^*\sigma = \sigma,\ \forall f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}).$$

证明: 我们的目标是求出度量密度函数 $\sigma(z)$ 在每一点的取值. 对任意 $a \in \mathbb{D}$, 显然

$$\alpha(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

是单位圆盘的全纯自同构, 满足 $\alpha(a) = 0$. 利用群作用不变性得

$$\alpha^*\sigma = \sigma \iff \sigma(\alpha(z))|\alpha'(z)| = \sigma(z),\ \forall z \in \mathbb{D}.$$

在上式中, 令 $z = a$ 得

$$\sigma(a) = \sigma(0)|\alpha'(a)| = \frac{2}{1-|a|^2}.$$

由此得共形度量

$$\sigma = \sigma(z)|dz| = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}.$$

最后验证, 对任意 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, 有 $f^*\sigma = \sigma$. 为此, 利用 Schwarz-Pick 定理, 对任意的 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, 及任意 $z, w \in \mathbb{D}$, 成立

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right| = \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| \iff \left|\frac{f(z)-f(w)}{(z-w)(1-\overline{f(w)}f(z))}\right| = \left|\frac{1}{1-\overline{w}z}\right|.$$

令 $w \to z$ 得

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2} \iff f^*\sigma = \sigma.$$

这样就验证了度量 σ 的群作用不变性. □

我们称

$$\sigma = \sigma(z)|dz| = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}.$$

为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量, 或 Poincaré 度量.

30.2 双曲距离与测地线

给定区域 Ω 和及共形度量 ρ, 定义 Ω 中两点 z_1, z_2 的距离

$$d_\rho(z_1, z_2) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \int_\gamma \rho(z)|dz| = \inf_{\gamma\in\Gamma} \ell_\rho(\gamma),$$

其中 Γ 是连接 z_1, z_2 两点的分段光滑曲线全体.

给定 $\mathbb{D}$ 中两点 z_1, z_2, 它们在双曲度量 σ 下的距离 $d_\sigma(z_1, z_2)$ 称为双曲距离. 由距离定义及 σ 在 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 作用下的不变性, 可知

$$d_\sigma(f(z_1), f(z_2)) = d_\sigma(z_1, z_2),\ \forall f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}).$$

这说明单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的全纯自同构都是双曲度量的等距变换.

对任意全纯映射 $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, 由 Schwarz-Pick 定理可知

$$\frac{|g'(z)|}{1 - |g(z)|^2} \le \frac{1}{1 - |z|^2} \Longleftrightarrow g^*\sigma \le \sigma.$$

仍由距离的定义知

$$d_\sigma(g(z_1), g(z_2)) \le d_\sigma(z_1, z_2).$$

这给出了 Schwarz-Pick 定理的几何解释.

一个自然而基本的问题是, $\mathbb{D}$ 中两点之间的双曲距离是多少? 下面的命题给出了回答.

命题 30.1. 单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内两点 z_1, z_2 之间的双曲距离为

$$d_\sigma(z_1, z_2) = \log \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)},\quad \delta(z_1, z_2) = \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|.$$

证明: 先考虑一种特殊情况 $z_1 = 0,\ z_2 = r \in (0, 1)$. 假设 γ 是连接 0 和 r 的简单光滑曲线段, 将其参数化为极坐标形式 $\gamma(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}, t \in [0, 1]$, 其中 $\rho(0) = 0,\ \rho(1) = r$. 由 γ 是简单曲线段 (无自交) 知, ρ, θ 都是光滑函数. 于是

$$|\gamma'(t)| = |\rho'(t) + i\rho(t)\theta'(t)| \ge |\rho'(t)| \ge \rho'(t).$$

由此, 可估计 γ 的双曲长度

$$\begin{aligned}
\ell_\sigma(\gamma) &= \int_\gamma \sigma(z)|dz| = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|dt}{1 - |\gamma(t)|^2} \\
&\ge \int_0^1 \frac{2\rho'(t)dt}{1 - \rho(t)^2} = \int_0^1 \frac{2d\rho(t)}{1 - \rho(t)^2} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + \rho(t)} + \frac{1}{1 - \rho(t)}\right) d\rho(t) \\
&= \log \frac{1 + \rho(t)}{1 - \rho(t)}\bigg|_0^1 = \log \frac{1 + r}{1 - r}.
\end{aligned}$$

上面不等式等号可取到. 取等时, $\rho' \geq 0, \theta' = 0$. 这说明 θ 为常数, 因此 γ 为连接 $0, r$ 的直线段 $[0, r]$. 如此便给出 $0, r$ 两点之间的双曲距离

$$d_\sigma(0, r) = \log \frac{1+r}{1-r}.$$

现考虑一般情形: 任给两点 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, 存在 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, 使 $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = \delta \in (0, 1)$. 此时可取

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z} \Longrightarrow \delta = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|,$$

此处, $e^{i\theta}$ 的选取使 $f(z_2) \in (0, 1)$. 利用等距性可知

$$d_\sigma(z_1, z_2) = d_\sigma(f(z_1), f(z_2)) = d_\sigma(0, \delta) = \log \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

给定平面区域 Ω 和共形度量 ρ. 给定两点 $z_1, z_2 \in \Omega$, 我们称连接 z_1, z_2 的光滑曲线 $\gamma \subset \Omega$ 是关于 ρ-度量的测地线 (geodesic)[1], 如果 γ 的 ρ-长度恰好是两点之间的距离:

$$d_\rho(z_1, z_2) = \ell_\rho(\gamma).$$

从命题30.1的证明可见, $\mathbb{D}$ 上双曲度量测地线满足如下性质:

- 连接 0 和 $r \in (0, 1)$ 的测地线恰好是线段 $[0, r]$.
- 如果 $\gamma \subset \mathbb{D}$ 为测地线, 则对任意 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, 像曲线 $f(\gamma)$ 也是测地线.
- 连接任意两点 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ 的测地线是一条过 z_1, z_2 的圆弧, 此圆弧延长线与 $\partial\mathbb{D}$ 正交.

30.3 单连通域的双曲度量

本节给出平面单连通区域上双曲度量的定义.

由 Riemann 映射定理知, 对任意单连通域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 且 $\Omega \neq \mathbb{C}$, 存在双全纯映射 $f: \Omega \to \mathbb{D}$. 定义 Ω 上的度量 $\sigma_\Omega = \sigma_\Omega(z)|dz|$ 为 $\mathbb{D}$ 的双曲度量 σ 关于 f 的拉回

$$\sigma_\Omega = f^*\sigma,\ \sigma_\Omega(z) = \sigma(f(z))|f'(z)|,\ z \in \Omega.$$

[1]严格来说, 此处定义不严谨, 应为对 γ 中任意距离很小的两点, γ 在它们之间一段的长度恰好为两点的距离. 对双曲圆盘而言, 这两种定义并无区别. 其它情形一般不同.

此时, 需说明 σ_Ω 的定义与 f 的选取无关. 等价于证明, 如果 $g:\Omega\to\mathbb{D}$ 也是双全纯映射, 则 $g^*\sigma=f^*\sigma$. 此式又等价于

$$\sigma=(f^{-1})^*(f^*\sigma)=(f^{-1})^*(g^*\sigma)=(g\circ f^{-1})^*\sigma.^2$$

由 $g\circ f^{-1}\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 及双曲度量 σ 的群作用不变性知, 上式成立. 因此 Ω 上的度量 σ_Ω 良定义. 称 σ_Ω 为 Ω 上的*双曲度量*. 由此, 可谈论 Ω 中分段光滑曲线 γ 的双曲长度 $\ell_\Omega(\gamma)$, 及 Ω 中可测集 E 的双曲面积 $A_\Omega(E)$. 易知: 双全纯映射 $f:\Omega\to\mathbb{D}$ 将 Ω 中的测地线映为 $\mathbb{D}$ 中的测地线, 反之亦然. 利用积分的变量替换可知,

$$\ell_\Omega(\gamma)=\ell_\sigma(f(\gamma)),\ A_\Omega(E)=A_\sigma(f(E)).$$

上式说明, 单连通域到 $\mathbb{D}$ 的双全纯映射既保持双曲距离, 又保持双曲面积.

例题 30.1. 求上半平面 $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Im}(z)>0\}$ 的双曲度量.

解: 取双全纯映射 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{D}$:

$$f(z)=\frac{z-i}{z+i},\ f'(z)=\frac{2i}{(z+i)^2}.$$

由双曲度量的定义

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbb{H}}(z) &= \sigma(f(z))|f'(z)|=\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\\ &= \frac{4}{|z+i|^2-|z-i|^2}=\frac{1}{y}.\end{aligned}$$

由此得上半平面的双曲度量

$$\sigma_{\mathbb{H}}=\frac{|dz|}{y}.$$

易见, 上半平面 $\mathbb{H}$ 在双曲度量下的测地线为垂直于实轴的直线, 或与实轴正交的半圆周.

30.4 测地三角形的面积

利用单连通域之间双全纯映射关于双曲度量的等距性知, 谈论双曲空间的几何, 只需在标准模型 —单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中讨论即可. 有时为计算方便, 会利用上半平面模型.

[2]此处用到如下性质: 如果 $f_1:D_1\to D_2$, $f_2:D_2\to\Omega$ 都全纯, 任给 Ω 上的共形度量 ρ, 有

$$(f_2\circ f_1)^*\rho=f_1^*(f_2^*\rho).$$

单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中由三条测地线围成的区域称为测地三角形. 三条测地线两两夹角分别记为 α,β,γ, 此时测地三角形记为 $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$. 如果 $\alpha=\beta=\gamma=0$, 此时三条测地线两两交于 $\partial\mathbb{D}$, 所围三角形称为*理想测地三角形*.

定理 30.2. 测地三角形 $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ 的面积 (即双曲面积)

$$A_\sigma(\Delta(\alpha,\beta,\gamma))=\pi-(\alpha+\beta+\gamma).$$

证明: (1). 先讨论极端情况 $\alpha=\beta=\gamma=0$. 此时 $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ 是理想测地三角形, 三条测地线在 $\partial\mathbb{D}$ 上两两相交, 交点按逆时针序记为 a,b,c. 存在分式线性变换 f, 将 a,b,c 分别映为 $-1,1,\infty$. 由 f 的保向性, 它将 $\mathbb{D}$ 映为上半平面 $\mathbb{H}$. 记 $D=f(\Delta(\alpha,\beta,\gamma))$, 则 ∂D 由上半平面 $\mathbb{H}$ 的三条测地线组成: 两条为垂直实轴于 ±1 的直线, 一条是上半单位圆周, 即

$$D=\left\{z=x+iy;-1<x<1,\ y>\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

利用变量代换, 只需计算 D 在上半平面的双曲度量下的面积

$$\begin{aligned}A_{\mathbb{H}}(D)&=\int_D\frac{dxdy}{y^2}=\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{dy}{y^2}\\&=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\ (x=\sin t)\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t}dt=\pi.\end{aligned}$$

(2). 现考虑 $\gamma=0$ 的情况. 此时, 可选取适当的分式线性变换 f(如何选取?), 将 $\Delta(\alpha,\beta,0)\subset\mathbb{D}$ 映为 $D\subset\mathbb{H}$, 其中 D 的一部分边界在上半单位圆周上, 另外两部分边界垂直于实轴, 且与上半单位圆周的夹角分别为 α,β,

$$D=\left\{z=x+iy;\ \sin(\alpha-\pi/2)<x<\sin(\pi/2-\beta),y>\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

其双曲面积为

$$\begin{aligned}A_{\mathbb{H}}(D)&=\int_{\sin(\alpha-\pi/2)}^{\sin(\pi/2-\beta)}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{dy}{y^2}\\&=\int_{\sin(\alpha-\pi/2)}^{\sin(\pi/2-\beta)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\ (x=\sin t)\\&=\int_{\alpha-\pi/2}^{\pi/2-\beta}1dt=\pi-(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

(3). 最后考虑一般情况. 此时, 可通过补充三条在边界两两相切的测地线, 得到一个理想测地三角形, 如图所示, 其面积满足

$$\pi = A_\sigma(R_1) + A_\sigma(R_2) + A_\sigma(R_3) + A_\sigma(\Delta(\alpha,\beta,\gamma)),$$

其中 R_1, R_2, R_3 是相邻的测地三角形. 利用 (1)(2) 两种情形下的面积公式得 $A_\sigma(R_1) = \pi - (\pi - \beta) = \beta$, 同理 $A_\sigma(R_2) = \alpha$, $A_\sigma(R_3) = \gamma$. 因此

$$A_\sigma(\Delta(\alpha,\beta,\gamma)) = \pi - (\alpha+\beta+\gamma).$$

面积公式证完. □

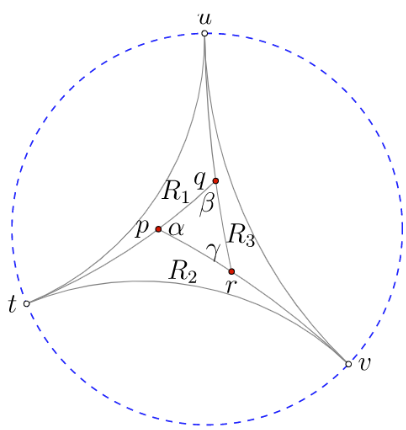

图 30.1: 双曲测地三角形

面积公式至少说明了两点:

双曲测地三角形的面积与它所在的位置无关 (只与内角和有关), 这说明双曲空间点点 ‘平等’ (几何学中称之为“齐性空间”).

双曲测地三角形的三个内角之和总是小于 π. 这说明测地三角形是瘦的 (与欧式三角形相比).

30.5　习题

1. (裂纹平面) 求出裂纹平面 $\mathbb{C} - [0, +\infty)$ 的双曲度量.

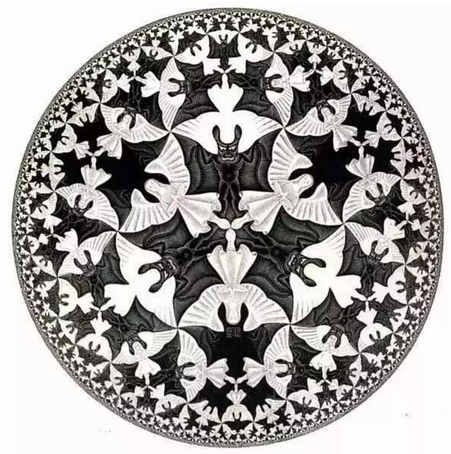

图 30.2: 魔鬼与天使, by Escher (1898-1972)

2. (带域) 证明带域 $B=\{z\in\mathbb{C};|\mathrm{Im}(z)|<\pi/2\}$ 的双曲度量

$$\sigma_B=\frac{|dz|}{\cos y}.$$

尝试描述 B 中测地线的形状.

3. (双曲圆盘 vs 欧氏圆盘) 取单位圆作为双曲空间的模型,

(1). 证明欧氏圆盘 $D_r=\{z\in\mathbb{D},|z|<r\}$ 的双曲面积是

$$\frac{4\pi r^2}{1-r^2}.$$

(2). 取定 $z_0\in\mathbb{D}$, 证明半径为 r 的双曲圆盘 $D_\sigma(z_0,r)=\{z\in\mathbb{D};d_\sigma(z_0,z)<r\}$ 的双曲面积为 $4\pi\sinh^2(r/2)$. (注意: 与 z_0 无关)

(3). 双曲圆盘是欧氏圆盘吗?

4. (圆盘上的等距变换) 我们已经知道 $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 保持单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的双曲距离. 同样可验证 $z\mapsto\bar{z}$ 也保持双曲距离. 现考虑反问题, 如果 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是一个等距变换, 证明 $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 或者 $\bar{f}\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

5. (一种别致的等周不等式) 假设 $\mathbb{D}$ 中的两条测地线相切于圆周上一点. 给你一条光滑曲线段 γ, 起点和终点分别在两条测地线上, 且与两条测地线围成一个区域 D. 如果 γ 的双曲长度给定,

所围区域 D 的最大双曲面积是多少？证明

$$A_\sigma(D) \le \ell_\sigma(\gamma).$$

等号成立的充要条件是什么？

附加题 (不做要求)

问题 30.1. 如果世界是双曲的, 会与欧氏世界有什么不同？以此为题, 作文一篇. 要求观点新颖, 语言简洁, 字数不限.

问题 30.2. 给定单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的可测集, 证明其双曲面积 A_σ 和欧氏面积 A 满足不等式

$$A_\sigma \ge 4\pi \frac{A}{\pi - A}.$$