1. 令 $P_n$ 为全体 $n$ 次有理多项式的集合，

$P_n = \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Q} \} \cong \mathbb{Q}^{n+1}$ 为可列集

而对每一多项式 $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$，其至多有 $n$ 个不同的根

从而 $A_n := \{ \alpha$ 是代数数且为某 $n$ 次有理多项式的根 $\}$

为可列集

全体代数数 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为可列集

2. 若 $X$ 为有限集，则

$$\mathcal{T}=\{U \mid X\setminus U=\phi \text{ 或 } X\setminus U=X\}=\{\phi, X\}$$ 为平凡拓扑.

若 $X$ 为无限集，$\mathcal{T}$ 不一定是 $X$ 上的拓扑.

如取 $X=(0,1)$，则 $(0,\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2},1)\in\mathcal{T}$

但 $(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)\notin\mathcal{T}$

3. 对 $X=\{a,b\}$. $P(X)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

$X$ 上的任意拓扑 $\mathcal{T}$ 需包含 $\phi$ 和 $\{a,b\}$. 则 $\mathcal{T}$ 仅可能以下4种

$\mathcal{T}_1=\{\phi,\{a,b\}\}$

$\mathcal{T}_2=\{\phi,\{a,b\},\{a\},\{b\}\}$

$\mathcal{T}_3=\{\phi,\{a,b\},\{a\}\}$

$\mathcal{T}_4=\{\phi,\{a,b\},\{b\}\}$.

易验证 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_3,\mathcal{T}_4$ 确实为 $X$ 上拓扑.

4. 利用定义3.22证明.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in ([x]-1, [x]+1)$, $[x]-1, [x]+1 \in \mathbb{Q}$
- 若 $x \in (a,b) \cap (c,d)$, $a、b、c、d \in \mathbb{Q}$

  不妨假定 $b > c$.

  令 $p = \max\{a,c\}$, $q = \min\{b,d\}$. $p, q \in \mathbb{Q}$

  则 $x \in (p,q)$, 且 $(p,q) \subset (a,b) \cap (c,d)$

5. $\mathbb{R}$上标准拓扑$\mathcal{T}$的任意基元素$(a,b)$可由下限拓扑$\mathcal{T}_l$的基生成：

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\tfrac{1}{n},b)$$

从而 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_l$（因为拓扑中的任意元素是基元素的并）

另一方面，$[a,b)\notin\mathcal{T}$

这是因为若$[a,b)\in\mathcal{T}$，则对 $a\in[a,b)$

$\exists\,(a_1,a_2)\in\mathcal{T}$ s.t. $a\in(a_1,a_2)\subset[a,b)$

但 $a_1<a$，矛盾.

于是 $\mathcal{T}\subsetneq\mathcal{T}_l$