ODE笔记6：解延拓定理、比较定理等

引理：$f(x,y)\in C(G), G$ 是开集。

（1）若 $\phi(x)$ 为 $y'=f(x,y)$ 在 $[x_0,b)$ 上的解，$\{(x,\phi(x)), x\in[x_0,b)\}\subset A\subset G$，$A$ 紧（有界闭），则解可延拓至 $[x_0,b]$。

（2）$\phi(x)$ 是 $y'=f(x,y)$ 在 $[x_0,b]$ 上的解，$\psi(x)$ 是 $y'=f(x,y)$ 在 $[b,c]$ 上的解，且 $\phi(b)=\psi(b)$，则 $y(x)=\begin{cases}\phi(x), x\in[x_0,b]\\ \psi(x), x\in(b,c]\end{cases}$ 为 $y'=f(x,y)$ 在 $[x_0,c]$ 上的解。

证明：（1）$\because$ A 紧 $\quad\therefore \max\limits_{(x,y)\in A}|f(x,y)|=M \quad \because \phi(x)$ 为 $(*)$ 的解 $\quad \therefore |\phi'(x)|=|f(x,\phi(x))|\le M,\ \forall x\in[x_0,b)$ 一致连续。

$\therefore \phi(b)=\lim\limits_{x\Rightarrow b^-}\phi(x)$，$\phi(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^x f(t,\phi(t))dt$，在 $[x_0,b]$ 成立。

（2）由 $y(x)$ 定义，$y(x)$ 是 $(*)$ 在 $[x_0,b]$，$(b,c]$ 上的解。$y'(b)=\phi'(b^-)=f(b,\phi(b))=f(b,\psi(b))=\psi'(b^+)=y'(b^+)$

$\therefore y'(b)=f(b,y(b)) \quad \Rightarrow y$ 在 $[x_0,c]$ 上满足 $(*)$。

解延拓定理

G 开，$f\in C(G), (x_0,y_0)\in G.$ $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 解 $y=\phi(x)$.积分曲线 γ，则 γ 必延伸至 G 边界。

可延拓、饱和解：若 $\phi(x)$ 为 $(*)y'=f(x,y)$ 在 I 上解，$\psi(x)$ 为 $(*)$ 在 (a,b) 上的解。$I\subsetneq(a,b)$，I 上 $\phi(x)=\psi(x)$，则称 $\phi(x)$ 可延拓。$\psi(x)$ 为 ϕ 在 (a,b) 上延拓。若不存在这样的 $\psi(x)$，称 $\phi(x)$ 为 $(*)$ 的饱和解。

定理：$f\in C(G)$，G 开，f 关于 y 满足局部lip条件，i.e. $\forall$ 紧集 $A\subset G, \exists L_k>0$，s.t. $\forall(x,y_1),(x,y_2)\in K.$

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L_k|y_1-y_2|$，则 $y'=f(x,y)$ 经过 G 中任何一点，$\exists!$ 饱和解。

证明：存在性：由解延拓定理成立。✓

唯一性：若 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 有不同解 y_1,y_2，不妨设$y_1(\bar{x})=y_2(\bar{x})=\bar{y},\ \forall x\in(\bar{x},b),\ y_1(x)>y_2(x),$

$\exists\ [\bar{x}-a,\bar{x}+a]\times[\bar{y}-b,\bar{y}+b]\subset G.$ 由Picard存在唯一性定理知 $y_1=y_2$，矛盾！

整体解：

$G=\{(x,y), a<x<b, y\in R\}, a,b$ 可取 $\pm\infty.$ 若解 $y=\phi(x)$ 在 $a<x<b$ 上存在，则称 $\phi(x)$ 为整体解。

定理：$f\in C(R)$，关于 y 满足一致lip条件 $\implies$ $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ $\exists!$ 整体解，$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$，$\forall(x,y_1),(x,y_2)\in R.$

证明：由延拓定理，$\exists!$ 饱和解 $\phi(x)$，设右行最大存在区间为 $[x_0,\beta)$. 若 $\beta=b$, ✓

若 $\beta<b$，由延拓定理知 $\overline{\lim\limits_{x\to\beta}}|\phi(x)|=\infty$，矛盾！

$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,\phi(t))dt=y_0+\int_{x_0}^x(f(t,y_0)+f(t,\phi(t))-f(t,y_0))dt\le H+L|\phi(t)-y_0|$，$f(t,y_0)$ 在 $t\in[x_0,\beta]$ 上连续，$\therefore |f(t,y_0)|\le H$

$$|\phi(x)-y_0|\le\int_{x_0}^x(H+L|\phi(t)-y_0|)dt,\ \forall x\in[x_0,\beta) \qquad (\text{Gronwall不等式})$$

$$\implies \quad |\phi(x)-y_0|\le H(x-x_0)e^{L(x-x_0)}\le H(\beta-x_0)e^{L(x-x_0)}$$

$f\in C(R)$ 且 $|f(x,y)|\le A+B|y| \qquad \implies \quad \exists$ 整体解。

右行上（下）解（可通过图像理解）：

定义：若 V 在 $[x_0,a)$ 上满足

$$\frac{dV(x)}{dx}\le f(x,v(x)), V(x_0)\le y_0$$

则称 $V(x)$ 是**右行下解。**

反之，若 W 在 $[x_0,a)$ 上满足

$$\frac{dW(x)}{dx} > f(x, w(x)), W(x_0) \geq y_0$$

则称 $W(x)$ 是**右行上解**。

第一比较定理（定理5.1）：

$f, F \in C(G), (x_0, y_0) \in G, f(x,y) < F(x,y), \forall x, y \in G.$

（1）$f(x,y)$ 在 $[x_0, b)$ 上有解 $\phi(x)$.　　（2）$F(x,y)$ 在 $[x_0, b)$ 上有解 $\Phi(x)$.

则 $\Phi(x) > \phi(x), \forall x \in [x_0, b)$.

证明：设 $\psi(x) = \phi(x) - \Phi(x), \psi(x_0) = 0$，则 $\psi'(x_0) = F(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) > 0$. 由解定义，$\psi'(x) \in C([x_0, b])$.

$\therefore \exists\, \beta > x_0, \psi'(x) > 0,\ \forall x \in [x_0, \beta] \implies \forall x \in [x_0, \beta],\ \psi(x) > 0.$

反证：设 $\exists\, x_2 \in [x_0, b),\ \psi(x_2) = 0$. 设 $\alpha = \min\{x \in [x_0, b),\ \psi(x) = 0\}$ $\therefore x \in (x_0, \alpha),\ \psi(x) > 0,\ \psi(\alpha) = 0$

$\rightarrow\ \Phi(\alpha) = \phi(\alpha) \Rightarrow \psi'(\alpha) \leq 0$

另一方面，$\psi'(\alpha) = \Phi'(\alpha) - \phi'(\alpha) = F(\alpha, \Phi(\alpha)) - f(\alpha, \phi(\alpha)) > 0$，矛盾！

定理5.2：

若 $f \in C(G)$. 右行解 $\phi(x)$，右行上解 $W(x)$，右行下解 $V(x)$. 在 $[x_0, b)$ 上存在 $\Rightarrow V(x) < \phi(x) < W(x),\ \forall x \in (x_0, b)$

证明：令 $F(x,y) = W'(x) - f(x, w(x)), W' = F(x, w) = W'(x) - f(x, w(x)) + f(x, w(x)) + f(x, y)$.

由第一比较定理，$W(x) > \phi(x),\ x \in (x_0, b)$，同理，有 $V(x) < \phi(x),\ x \in (x_0, b)$

最大/小解：

ODE $(*)$ 在 $[x_0, b)$ 上存在2个解 $W(x), Z(x)$. 对 $(*)$ 所有解 $y(x)$，都有 $W(x) \leq y(x) \leq Z(x),\ \forall x \in [x_0, b)$，则 $W(x)$ 为 $(*)$ 在 $[x_0, b)$ 上**右行最小解**，$Z(x)$ 为**右行最大解**。

最大/小解的存在性（定理5.3）：

$f \in C(G), G = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \implies (*)$ 在 $[x_0 - b, x_0 + b]$ 上存在右行最大解。$h < \alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

第二比较定理（定理5.4）：

$f(x,y) \leq F(x,y), x, y \in G$

$$\left.\begin{aligned} &\phi\text{是}\begin{cases}\phi' = f(x,y) \\ \phi(x_0) = y_0\end{cases} \text{在}[x_0, b)\text{上右行最小解} \\ &\Phi\text{是}\begin{cases}\Phi' = f(x,y) \\ \Phi(x_0) = y_0\end{cases} \text{在}[x_0, b)\text{上右行最大解}\end{aligned}\right\} \implies \phi(x) \leq \Phi(x), \forall\, x \in (x_0, b)$$

定理5.5：

$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 解 $\phi(x), x \in [x_0, \beta)$

（1）右行上解 $W(x)$，右行下解 $V(x)$ 在 $[x_0, b)$ 上存在 $\Rightarrow \beta \geq b$

（2）$\lim\limits_{x \to b^-} V(x) = +\infty \Rightarrow \beta \leq b$

（3）$\lim\limits_{x \to b^-} W(x) = -\infty \Rightarrow \beta \leq b$　（以上三个结论可通过画图理解。）

证明：（1）$G_1 = \{(x,y), x_0 < x < b, V(x) < y < W(x)\}$。在 G 中用延拓定理解曲线延至 ∂G。由5.2，

$\forall x \in (x_0, b), W(x) > \phi(x) > V(x). \Rightarrow$ 解曲线延至 $x = b \Rightarrow \beta \geq b.$

（2）$G_2 = \{(x,y), x_0 < x < b, V(x) < y < N\}$。由延拓定理和5.2，解曲线延伸至 $y = N.\ \ N \to +\infty$

$\therefore \beta \leq b.$　（3）同理。

连续依赖性

$F, f \in C(G), |f(x,y) - F(x,y)| \leq \epsilon, \forall (x,y) \in G.$ f 关于 y 满足一致lip条件。$\phi(x), \Phi(x)$ 分别为 f, F 对应的Cauchy问题的解，则

$|\Phi(x)-\phi(x)|\leq C\cdot\varepsilon\ ,\forall x\in[x_0,x_0+\alpha]$

证明：$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi(t))dt$，$\Phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,\Phi(t))dt$

$$\Phi(x)-\phi(x)=\int_{x_0}^{x}(F(t,\Phi(x))-\underbrace{f(t,\phi(x))+f(t,\Phi(x))}_{\leq\mathcal{E}}-f(t,\Phi(x)))dt$$

$$\implies\ \Phi(x)-\phi(x)\leq\int_{x_0}^{x}(\varepsilon+L|\Phi(t)-\phi(t)|)dt$$

由Gronwall不等式，$|\Phi(x)-\phi(x)|\leq\varepsilon(x-x_0)\cdot e^{L(x-x_0)}\leq\varepsilon\alpha\cdot e^{L\alpha}$

解对初值的连续依赖性：

G 开，连通，$G\subset R^2,f\in C(G),f$ 在 G 上关于 y 满足局部lip条件。

$\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ $(x_0,y_0)\in G$，在 J 上存在唯一解 $\phi(x;x_0,y_0)$.设 $[x,b]\subset J,x_0\in[a,b]$. 当 (ξ,η) 充分靠近 (x_0,y_0) 时，

$\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(\xi)=\eta\end{cases}$ 在 $[a,b]$ 中存在唯一解 $\phi(x,\xi,\eta)$. 且 $\lim\limits_{(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)}\phi(x,\xi,\eta)=\phi(x,x_0,y_0)$

证明：$\because r=\{(x,y),y=\phi(x;x_0,y_0),x\in[a,b]\}$ 为 G 中有界闭集

$\therefore\exists\varepsilon_0>0,st\ G_{\varepsilon_0}=\{(x,y),x\in[a,b],|y-\phi(x,x_0,y_0)|\leq\varepsilon_0\}\subset G$

$\because f$ 关于 y 在 G 中满足局部lip条件

$\therefore\exists L,st\ \forall(x,y_1),(x,y_2)\in G_{\varepsilon_0},|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|,\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_o),\exists\ \delta=\min\{\varepsilon,x_0-a,b-x_0\},\forall(\xi,\eta)\in B_\delta(x_0,y_0)$

若 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(\xi)=\eta\end{cases}$ 在 G_ε 中 $\exists\,!$ 饱和解 $\phi(x;\xi,\eta),x\in[c,d]$ 断言：$c=a,d=b$

反证：不妨设 $d<b$，则 $|\phi(d;\xi,\eta)-\phi(d;x_0,y_0)|=\varepsilon.$

另一方面，

$|\phi(x,\xi,\eta)-\phi(x;x_0,y_0)|=|\eta+\int_{\xi}^{x}f(t,\phi(t,\xi,\eta))dt-y_0-\int_{x_0}^{x}f(t;\phi(t;x_0,y_0))dt|\leqslant|\eta-y_0|+|\int_{\xi}^{x_0}f(t,\phi(t;\xi,\eta))dt|+\int_{x_0}^{x}|f(t,\phi(t;\xi,\eta$

$f(t,\phi(t;x_0,y_0))|dt\leqslant\delta+M\delta+\int_{x_0}^{x}L|\phi(t;\xi,\eta)-\phi(t;x_0,y_0)|dt.$

由Gronwall不等式，$|\phi(x;\xi,\eta)-\phi(x;x_0,y_0)|\leqslant(1+M)\delta e^{L(b-a)}<\varepsilon,\ \forall x\in[\xi,d],|\phi(x;x_0,y_0)-\phi(x;\xi,\eta)|\leqslant\varepsilon.\forall x\in[a,b]$

$\phi\left(x;x_0,y_0\right)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(t,\phi\left(t;x_0,y_0\right)\right)dt$ $\quad\frac{\partial\phi}{\partial x_0}=-f\left(x_0,\phi\left(x_0,x_0,y_0\right)\right)+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_0}dt$

令 $Z(x)=\frac{\partial\phi}{\partial x_0}(x;x_0,y_0)\quad(x_0,y_0$固定)

$$Z(x)=-f\left(x_0,y_0\right)+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}Z(t)dt\iff\begin{cases}Z'=\frac{\partial f(x,\phi(x_0,x_0,y_0))}{\partial y}Z\\Z\left(x_0\right)=-f\left(x_0,y_0\right).\end{cases}$$

$\frac{\partial\phi}{\partial y_0}=1+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y_0}dt$，$(x_0,y_0)$固定。同理，令$W(x)=\frac{\partial\phi}{\partial y_0}$

$$W(x)=1+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}W(t)dt\iff\begin{cases}W'=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x;x_0,y_0))W\\W(x_0)=1\end{cases}$$

例1：$y'=\sin(xy),\phi\left(x;x_0,y_0\right)$,求 $\frac{\partial\phi}{\partial x_0}|_{x_0=y_0=0}$, $\frac{\partial\phi}{\partial y_0}|_{x_0=y_0=0}$

解：$f(x,y)=\sin(xy)\quad\therefore\frac{\partial f}{\partial y}=\cos(xy)x\quad\phi(x;0,0)=0.$

$\begin{cases}y'=\sin(xy)\\y(0)=0\end{cases}$ $\exists!$ 解 $y\equiv0$，$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x;0,0))=x$

$$令Z(x)=\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\Big|_{x_0=y_0=0},\ \begin{cases}Z'=xZ\\Z(0)=f(0,0)=0\end{cases}\implies Z(x)=0$$

$$令W(x)=\frac{\partial\phi}{\partial y_0}\Big|_{x_0=y_0=0},\ \begin{cases}W'=xW\\W(0)=1\end{cases}\implies W=e^{\frac{x^2}{2}}$$

解对初值的可微性：

G 开，连通，$G \subset R^2, f \in C(G), \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$

$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 解 $\phi(x;x_0,y_0)$，则 $\phi(x;x_0,y_0)$ 存在范围内关于 $(x;x_0,y_0)$ 连续可微。

在 $V = \{(x;x_0,y_0), x \in [a,b], |\xi - x_0| \leqslant \delta, |\eta - y_0| \leqslant \delta\}$ 中看 $\phi(x;\xi,\eta)$，关于 x 连续可微，关于 ξ, η 连续。

看 $\frac{\Delta\phi}{\Delta\eta}$ 的收敛性：$\phi(x;\xi,\eta+\Delta\eta) = \eta + \Delta\eta + \int_\xi^x f(t,\phi(t,\xi,\eta+\Delta\eta))dt \qquad \phi(x;\xi,\eta) = \eta + \int_\xi^x f(t,\phi(t,\xi,\eta))dt$

$\implies \frac{\Delta\phi}{\Delta y} = 1 + \int_\xi^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,\zeta)\frac{\Delta\phi}{\Delta\eta}dt$ （中值定理：ζ 介于 $\phi(x;\xi,\eta+\Delta\eta)$ 和 $\phi(x;\xi,\eta)$ 之间。）

$= 1 + \int_\xi^x [\frac{\partial f}{\partial y}(t,\phi(t,\xi,\eta)) + R]\frac{\Delta\phi}{\Delta\eta}dt$，其中 $\lim\limits_{\Delta y \to 0} R = 0$

令 $W(x)$ 满足：$\begin{cases} W' = \frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\phi(x,\xi,\eta)W \\ W(\xi) = 1 \end{cases} \implies \quad W(x) = e^{\int_\xi^x \frac{\partial f}{\partial y}dt}$

claim：$|\frac{\Delta\phi}{\Delta\eta} - W| \to 0.$ 当 $\Delta\eta \to 0, \frac{\partial f}{\partial \eta} = W$ 连续。

令 $u = \frac{\Delta\phi}{\Delta\eta} - W, \quad u(x) = \int_\xi^x (\frac{\partial f}{\partial y}u + Ru + R\omega)dt$

$|u(x)| \leqslant \int_\xi^x \left(\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |u| + |u| + |R| \cdot |w|\right)dt.$

由Gronwall不等式，

$$|u(x)| \leqslant |R| \cdot |w| \cdot (b-a)e^{\int_\xi^x (|\frac{\partial f}{\partial y}|+1)dt} \xrightarrow{\Delta y \to 0} 0$$

更高维情况：

$\begin{cases} y' = f(x,y,\lambda_0) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' = f(x,y,\lambda) \\ \lambda' = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \lambda(x_0) = \lambda_0 \end{cases} \implies$ 解 $y = \phi(x;x_0,y_0,\lambda_0)$ 关于 $(x;x_0,y_0,\lambda_0)$ 连续可微。

ODEs解：$\begin{pmatrix} \phi(x;x_0,y_0,\lambda_0) \\ \lambda(x_i,x_0,y_0,\lambda_0) \end{pmatrix}$ 关于 $(x;x_0,y_0,\lambda_0)$ 连续可微。

$\phi(x;x_0,y_0,\lambda_0) = y + \int_{x_0}^x f(t,\phi(t;x_0,y_0,\lambda_0),\lambda_0)dt$

$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_0} = \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\lambda_0} + \frac{\partial f}{\partial\lambda_0}\right)dt. \quad (x_0,y_0,z_0)$ 固定。令 $u(x) = \frac{\partial\phi(x;x_0,y_0,\lambda_0)}{\partial\lambda_0}$，有 $u(x) = \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y}u + \frac{\partial f}{\partial\lambda_0}dt$

$$\implies \begin{cases} u' = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x;x_0,y_0,\lambda_0),\lambda_0)u + \frac{\partial f}{\partial\lambda_0} \\ u(x_0) = 0 \end{cases}$$

例2： $\begin{cases} y' = \ln(1+(\lambda+x)y) = f \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \phi(x;x_0,y_0,\lambda)$ **为解。求：**

$\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\Big|_{x_0=y_0=0}$，$\frac{\partial\phi}{\partial y_0}\Big|_{x_0=y_0=0}$，$\frac{\partial\phi}{\partial z_0}\Big|_{x_0=y_0=0}$

解：$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\lambda+x}{1+(1+x)y}, \frac{\partial f}{\partial\lambda} = \frac{y}{1+(\lambda+x)y}$

$\because \phi(x;0,0,\lambda) = 0 \quad \therefore \frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x;0,0,y),\lambda) = \lambda + x$，$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\phi(x,0,0,y),\lambda) = 0 \implies \frac{\partial\phi}{\partial\lambda} \equiv 0$

令 $Z(x) = \frac{\partial\phi}{\partial x_0}\Big|_{x_0=y_0=0}$，则 $\begin{cases} Z' = \frac{\partial f}{\partial y}Z = (\lambda+x)Z \\ Z_0 = f(0,0) = 0 \end{cases} \implies Z(x) \equiv 0$

令 $W(x) = \frac{\partial\phi}{\partial y_0}\Big|_{x_0=y_0=0}$，则 $\begin{cases} W' = (\lambda+x)W \\ W(0) = 1 \end{cases} \implies W(x) = e^{\lambda x + \frac{1}{2}x^2}$