第三章　集合, 函数, 复球面

3.1　复平面的集合

任给两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 定义距离

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

显然, 此距离即为 $\mathbb{R}^2$ 两点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的欧氏距离。

以 $a \in \mathbb{C}$ 为中心, $r > 0$ 为半径的圆盘记为

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}.$$

记 $D^*(a, r) = D(a, r) \setminus \{a\}$ 为去心圆盘。

称 $U \subset \mathbb{C}$ 为开集, 如果对任意 $z \in U$, 存在 $r > 0$, 使 $D(z, r) \subset U$。称 $U \subset \mathbb{C}$ 为闭集, 如果 $\mathbb{C} \setminus U$ 是开集。

复数列 $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ 称为 Cauchy 列, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使当 $m, n \geq N$ 时, 有 $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

记 $z_n = x_n + iy_n$, 由不等式

$$\max\{|x_n - x_m|, |y_n - y_m|\} \leq |z_n - z_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m|$$

可知 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 列当且仅当实部与虚部对应的实数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}$ 都是 Cauchy 列。由 $\mathbb{R}$ 的完备性 (即: Cauchy 列总有极限) 可知复平面 $\mathbb{C}$ 也是完备的。

利用 Cauchy 列可以给出闭集的等价定义：$E \subset \mathbb{C}$ 是闭集当且仅当 E 中任意 Cauchy 列的极限在 E 中。

点 $a \in E$ 称为集合 E 的极限点或者聚点，如果对任意 $r > 0$, 交集 $D^*(a, r) \cap E \neq \emptyset$。集合 E 的所有极限点构成的集合称为 E 的导集，记为 E'。E 中不属于 E' 的点称为 E 的孤立点。E 和它的导集 E' 之并称为 E 的闭包，记为 $\overline{E}$，即 $\overline{E} = E \cup E'$。

给定集合 $E\subset\mathbb{C}$, 定义其直径

$$\operatorname{diam}(E)=\sup_{z,w\in E}|z-w|.$$

命题 3.1. 假设 $\Omega_1\supset\Omega_2\supset\cdots$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上一列递减的有界闭集, 满足 $\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}(\Omega_k)\to 0$, 则 $\bigcap_{k\geq 1}\Omega_k=\{w\}$. [a]

[a]本命题将用于证明 Heine-Borem 定理 (定理3.1), Goursat 定理 (定理??).

证明: 对任意 $n\geq 1$, 取 $z_n\in\Omega_n$, 如此得一点列 $\{z_n\}_{n\geq 1}$。对任意 $l\geq 1$, 有 $z_{n+l}\in\Omega_{n+l}\subset\Omega_n$, 且

$$|z_{n+l}-z_n|\leq\operatorname{diam}(\Omega_n)\to 0\ (n\to\infty).$$

这说明 $\{z_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{C}$ 中 Cauchy 列, 记极限为 w (由 $\mathbb{C}$ 的完备性)。

对任意 $n\geq 1$, 由 $\{z_{n+l}\}_{l\geq 1}\subset\Omega_n$ 以及 Ω_n 为有界闭集, 可得 $w\in\Omega_n$。因此 $w\in\bigcap_{k\geq 1}\Omega_k$。

最后说明 w 的唯一性。如果 $w'\in\bigcap_{k\geq 1}\Omega_k$ 且 $w'\neq w$, 则对任意 $k\geq 1$, 有 $w,w'\in\Omega_k$。于是 $0<|w-w'|\leq\operatorname{diam}(\Omega_k),\forall k\geq 1$。这矛盾于 $\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}(\Omega_k)\to 0$。 □

假设 E 是一个集合, $\mathcal{F}=\{U_\lambda;\lambda\in I\}$ 是一个开集族 (I 是标记开集的指标集), 即 $\mathcal{F}$ 中每一个元素是一个开集。如果 E 中每一点至少属于 $\mathcal{F}$ 中的一个开集, 则称 $\mathcal{F}$ 是 E 的一个开覆盖。

例如: 取 $r>0$, 则 $\mathcal{F}=\{D(z,r);z\in E\}$ 是 E 的一个开覆盖。

称点集 E 具有有限覆盖性质, 如果 E 的任何开覆盖 $\mathcal{F}$ 中必能选出有限个开集 $U_1,\cdots,U_n$, 使得 $E\subset\bigcup_{j=1}^n U_n$。称 $\mathcal{F}'=\{U_1,\ldots,U_n\}\subset\mathcal{F}$ 是 E 的一个有限子覆盖。

集合 E 称为是紧集, 如果 E 具有有限覆盖性质, 即 E 的任何开覆盖都有有限子覆盖。

定理 3.1.(Heine-Borel) 复平面子集 E 是紧集的充要条件是 E 是有界闭集。

证明: (必要性) 假设 E 是紧集。任取 $\varepsilon>0$, 则 $\mathcal{F}=\{D(z,\varepsilon);z\in E\}$ 是 E 的一个开覆盖, 由 E 的紧性可知, $\mathcal{F}$ 有有限子覆盖 $\mathcal{F}'=\{D(z_k,\varepsilon);1\leq k\leq n\}$, 即 $E\subset\bigcup_{k=1}^n D(z_k,\varepsilon)$, 这说明 E 有界。

下证 E 是闭集, 等价于证明 $\mathbb{C}\backslash E$ 是开集。任取 $w\in\mathbb{C}\backslash E$, 对任意 $z\in E$, 定义 $d_z=|z-w|$。于是 $\{D(z,d_z/3);z\in E\}$ 是 E 的一个开覆盖。由 E 的紧性, 它存在有限子覆盖 $\{D(z_j,d_j/3);1\leq j\leq m\}$ (这里 d_{z_j} 简记为 d_j)。取 $d=\min\{d_1,\cdots,d_m\}$, 则对任意 j, 有 $D(z_j,d_j/3)\cap D(w,d/3)=\emptyset$。因此 $\left(\bigcup_{j=1}^m D(z_j,d_j/3)\right)\cap D(w,d/3)=\emptyset$。由 $E\subset\bigcup_{j=1}^m D(z_j,d_j/3)$ 可知, $D(w,d/3)\subset\mathbb{C}\setminus E$。由 w 的任意性知, $\mathbb{C}\setminus E$ 是开集。

(充分性) 现假设 E 是有界闭集, 我们将证明 E 是紧集。

如不然, 存在 E 的开覆盖 $\mathcal{F}$, 它没有有限子覆盖。因 E 有界, 故有 $R>0$ 使得 $E\subset Q_0=\{z=x+iy;|x|\leq R,|y|\leq R\}$。将 Q_0 分为四个相等的闭正方形。必存在其中之一 Q_1, 使 $\mathcal{F}$ 作为 $K_1=Q_1\cap E$ 的开覆盖但没有有限子覆盖, 再将 Q_1 分为四个相等的闭正方形, 必存在其中之一 Q_2, 使 $\mathcal{F}$ 作为 $K_2=Q_2\cap E$ 的开覆盖但没有有限子覆盖。这个过程可无限进行下去, 得一列闭正方形 $Q_1\supset Q_2\supset\cdots$, 满足 $\mathrm{diam}(Q_n)=2^{-n}\mathrm{diam}(Q_0)\to 0(n\to\infty)$。

记 $K_n=Q_n\cap E$, 则 $\{K_n\}_{n\geq 1}$ 是一列递减的有界闭集, 直径趋于零。由命题3.1可知, 存在 $z_0\in\mathbb{C}$ 使 $\bigcap K_n=\{z_0\}$。由 $z_0\in K_n\subset E$ 可知, 存在 $\mathcal{F}$ 中开集 U_0, 使 $z_0\subset U_0$。由 $\mathrm{diam}(K_n)\leq\mathrm{diam}(Q_n)\to 0$ 知, 当 n 充分大时, $K_n\subset U_0$。这说明 U_0 覆盖了 K_n, 与 K_n 的定义相矛盾。因此 E 是紧集。 $\square$

给定两个平面集合 A,B, 满足 $A\subset B$。称 A 是 B 的开子集，如果对任意 $a\in A$, 存在 $r>0$ 使 $D(a,r)\cap B\subset A$; 称 A 是 B 的闭子集，如果 $B\setminus A$ 是 B 的开子集。

容易验证, 开集的开子集也是开集，闭集的闭子集也是闭集。

平面点集 E 称为是连通的，如果 E 不可能分解为两个即开又闭的非空真子集，换言之，对任意两个不相交的非空集合 E_1 和 E_2，满足 $E=E_1\cup E_2$, 那么 E_1 必然含有 E_2 的极限点，或者 E_2 必然含有 E_1 的极限点。

连通开集的一个直观刻画如下，证明略去 (参考史济怀，刘太顺《复变函数》命题 1.6.3)。

命题 3.2. 平面开集 E 是连通的充要条件是 E 中任何两点都可用 E 中的折线连接起来。

平面上的连通开集称为区域。一个常用事实是

假设 Ω 是平面区域。如果非空集合 E 是 Ω 的即开又闭的子集，则 $E=\Omega$。

事实上，如果结论不对，则 $\Omega\setminus E$ 是 Ω 的非空子集，即开又闭。这样得到分解 $\Omega = E\sqcup(\Omega\setminus E)$，矛盾于 Ω 的连通性。

这个事实将用于证明最大模原理 (定理??), 唯一性定理 (定理??) 等。

3.2 连续函数

平面集合 Ω 上的复值函数, 指的是取值为复数的映射 $f:\Omega\to\mathbb{C}$。它可表示为

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

其中,u,v 分别为 f 的实部与虚部。由此可见，一个复数函数 f 可由两个二元实值函数确定。

给定复值函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 及 Ω 极限点集 (即闭包) 中一点 $z_0\in\overline{\Omega}$，如果存在复数 $\zeta\in\mathbb{C}$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $z\in D^*(z_0,\delta)\cap\Omega$, 就有 $|f(z)-\zeta|<\varepsilon$, 称当 $z\to z_0$ 时, $f(z)$ 以 ζ 为极限，记为 $\lim_{z\to z_0} f(z)=\zeta$。

记 $\zeta=\alpha+i\beta$, $z_0=x_0+iy_0$, 则

$$\max\{|u(z)-\alpha|,|v(z)-\beta|\}\le|f(z)-\zeta|\le|u(z)-\alpha|+|v(z)-\beta|.$$

由上式可见,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\zeta \iff \lim_{z\to z_0} u(z)=\alpha,\ \lim_{z\to z_0} v(z)=\beta.$$

称 f 在 $z_0\in\Omega$ 连续, 如果 $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$。若 f 在 Ω 上每一点都连续, 则称 f 在 Ω 上连续。由上面不等式知, f 在 Ω 上连续当且 u,v 在 Ω 上连续。

称 f 在 Ω 上一致连续, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意 $z_1,z_2\in\Omega$, 只要 $|z_1-z_2|\le\delta$, 就有 $|f(z_1)-f(z_2)|\le\varepsilon$。

命题 3.3. 假设 $K\subset\mathbb{C}$ 是紧集, $f:K\to\mathbb{C}$ 是连续复值函数, 则

1. f 在 E 上有界;
2. 模长 $|f|$ 的最大值与最小值都可以在 E 上取到;
3. f 一致连续。[a]

[a] 本命题中第 3 条结论将用于证明折线逼近引理 (引理??), 绕数的同伦不变性 (命题??) 等.

证明: 1. 由定理3.1知平面紧集等价于有界闭集，因此只需证明 $f(E)$ 是平面紧集。为此取 $f(E)$ 的一个开覆盖 $\mathcal{F}$。任取开集 $U \in \mathcal{F}$, 由 f 的连续性知 $f^{-1}(U)$ 是平面开集，且 $\{f^{-1}(U); U \in \mathcal{F}\}$ 是 E 的开覆盖。由 E 是紧集可知，该开覆盖存在有限子覆盖 $\{f^{-1}(U_k); 1 \le k \le m\}$。这样得到 $f(E)$ 的有限子覆盖 $\{U_k; 1 \le k \le m\}$。

2. 只需证 $|f|$ 的最大值可取到。记 $M = \sup\{|f(z)|; z \in E\}$。由上确界的定义知，对任意自然数 n，存在 $z_n \in E$ 使得 $M \ge |f(z_n)| \ge M - 1/n$。因 E 为紧集，故点列 $\{z_n\}_{n\ge 1}$ 必有极限点，即有收敛的子列 $\{z_{n_k}\}_{k\ge 1}$ 其极限为 $a \in E$。由连续性可知 $|f(a)| = \lim_{k\to\infty} |f(z_{n_k})| = M$。

3. 任取 $\varepsilon > 0$。对任意 $z \in K$, 由 f 的连续性, $f^{-1}(D(f(z), \varepsilon/2))$ 为包含 z 的开集。因此存在 $\delta_z > 0$, 使 $D(z, \delta_z) \subset f^{-1}(D(f(z), \varepsilon/2))$。开集族 $\{D(z, \delta_z/2); z \in K\}$ 是 K 的一个开覆盖。由 K 的紧性知，存在有限子覆盖 $\{D(z_k, \delta_k/2); 1 \le k \le n\}$。取 $\delta = \min\{\delta_k; 1 \le k \le n\}/2$。

对任意 $p, q \in K$, 假设满足 $|p-q| < \delta$。不妨设 $p \in D(z_1, \delta_1/2)$。由模长的三角不等式，

$$|z_1 - q| \le |z_1 - p| + |p - q| < \delta_1/2 + \delta \le \delta_1.$$

因此，$p, q \in D(z_1, \delta_1)$, 蕴含 $f(p), f(q) \in D(f(z_1), \varepsilon/2)$。由此得

$$|f(p) - f(q)| \le |f(p) - f(z_1)| + |f(z_1) - f(q)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

这样就证明了一致连续性。 □

3.3 球极投影

在复分析中, 为今后讨论的需要，我们需要在 $\mathbb{C}$ 中引进一个抽象的无穷远点, 记为 ∞, 其模长为无穷大 (辐角无意义)。它与其他复数的运算规则定义为：对所有复数 $a \in \mathbb{C}$, 成立

$$a \pm \infty = \infty, \ \frac{a}{\infty} = 0,$$

同时对所有非零复数 $b \in \mathbb{C}$,

$$b \cdot \infty = \infty, \ \frac{b}{0} = \infty.$$

需注意的是 $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ 和 $\infty \pm \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ 是无法定义的。

显然, 平面 $\mathbb{C}$ 中无处安放 ∞。因此我们需将 ∞ 视为外来点并入复平面, 从而得到扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。接下来, 要给 $\widehat{\mathbb{C}}$ 赋予适当的拓扑使之成为有意义的拓扑空间。在点集拓扑学中, 这可以通过“一点紧化”的方式来实现, 从而使 $\widehat{\mathbb{C}}$ 和球面

$$S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$$

同胚。此外，还有另一种处理方式, 更易理解。1857 年, Riemann(黎曼) 发现了将 $\widehat{\mathbb{C}}$ 等同于 S^2 的更聪明的办法, 这种办法不仅有很强的几何直观, 而且诱导了 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上面的一个典型的度量。因此, 我们也将 $\widehat{\mathbb{C}}$ 称为 Riemann 球面.

Riemann 通过球极投影 (stereographic projection) 的办法构造了从 S^2 到 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的同胚。记 S^2 的北极点为 N(坐标为 $(0,0,1)$)。在 $\mathbb{R}^3$ 中将 xOy-平面等同于复平面 $\mathbb{C}$。任取 $P \in S^2 - \{N\}$, 记 P 的坐标为 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, 将 N 和 P 的连线延长交复平面于 $z = x + iy$(它在 $\mathbb{R}^3$ 中坐标为 $(x, y, 0)$)。此时, 称 z 为 P 的球极投影；反过来，称 P 为 z 的球面表示。将 z 视为 P 的函数 $z = \Phi(P)$, 称 Φ 为球极投影映射, 其逆映射记为 Ψ。

下面将 Φ, Ψ 的表达式求出来。利用 N, P, z 三点共线知, 向量 $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{Nz}$ 方向相同, 因此存在实数 $t \in \mathbb{R}$ 满足

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 - 1) = t(x, y, -1).$$

由此得 $t = 1 - \zeta_3$, 以及

$$z = \Phi(P) = \frac{\zeta_1 + i\zeta_2}{1 - \zeta_3}.$$

利用 $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 1$ 解出 $t = 2/(|z|^2 + 1)$。从而

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \Psi(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right).$$

不难验证, 球极投影给出了 $S^2 - \{N\}$ 与 $\mathbb{C}$ 之间的同胚[1]。同时可见, 当 $P \to N$ 时, $\Phi(P) \to \infty$。反之亦然。因此可将 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中的 ∞ 等同于 S^2 上的北极点 N。这样 $\Phi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ 是一个双射。自然地, S^2 的拓扑诱导了 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的拓扑 (即: 可以将 S^2 上的开集在 Φ 下的像定义为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的开集)。更为重要的是, S^2 的弦长度量诱

[1]同胚指连续的双射且要求逆映射也连续. 此处, 逆映射连续的条件不可少. 例如: $f(t) = e^{2\pi it}$ 给出了从 $[0,1]$ 到 $\partial\mathbb{D}$ 的连续双射, 但逆映射在 $1 \in \partial\mathbb{D}$ 处不连续, 因此不是同胚.

导了 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的度量 d, 即对任意两点 $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$, 可用它们的球面表示 $\Psi(z), \Psi(w)$ 的弦长距离来定义 $d(z,w)$。计算可知

$$\begin{aligned} d(z,w)^2 &= \|\Psi(z)-\Psi(w)\|^2 = 2-2\Psi(z)\cdot\Psi(w) \\ &= 2-\frac{4xu+4yv+(|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)} \\ &= \frac{4|z-w|^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}. \end{aligned}$$

由此得

$$d(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}.$$

若 $w=\infty$, 则

$$d(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

定理 3.2. (Ptolemy) 球极投影 Φ 将 S^2 上的圆周映为 $\mathbb{C}$ 中的圆周或直线。反之亦然。

证明： 易知, S^2 上的圆周为 S^2 与某平面

$$L: a\zeta_1 + b\zeta_2 + c\zeta_3 = d$$

的交点。若平面经过北极点 $N(0,0,1)$, 则有 $c=d$。此时, 显然 L 与复平面交集为直线。如果平面不过北极点, 则有 $c \neq d$。将复数的球面表示代入直线方程得

$$a\frac{2x}{|z|^2+1} + b\frac{2y}{|z|^2+1} + c\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = d.$$

整理得

$$(c-d)|z|^2 + 2ax + 2by - (c+d) = 0.$$

由于 $|z|^2$ 系数不为零, 上式表示平面圆周的方程.

反之, 下面说明平面上圆周或直线的球面表示也是 S^2 上的圆周。事实上, 平面上圆周或直线的方程可统一表示为

$$k|z|^2 + Ax + By + C = 0.$$

将 $z = (\zeta_1 + i\zeta_2)/(1-\zeta_3)$ 代入上式, 得 z 的球面表示 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ 满足的方程

$$A\zeta_1 + B\zeta_2 + (k-C)\zeta_3 + (k+C) = 0.$$

此为平面方程。这说明, 圆周或直线的球面表示为 S^2 与平面的交集, 即圆周。 □

定理 3.3. (Halley[a] 1696) 球极投影 Φ 是共形的。

[a]埃德蒙・哈雷 (Edmond Halley，1656-1742), 英国天文学家.

证明略去。

复数 z 在球面表示 $\Psi(z)$ 处的面积元素记为 $dA(z)$, 它可表示为径线方向长度增量 $d\ell_1$ 与纬线方向长度增量 $d\ell_2$ 之积。在距离公式

$$d(z,w)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}$$

中, 记 $z=re^{i\theta}, w=\rho e^{i\phi}$。当 w 分别沿径向 (即 $\phi\equiv\theta, \rho\to r$) 和沿以原点为心的圆周切向 (即 $\rho\equiv r, \phi\to\theta$) 趋于 z, 可得

$$d\ell_1=\frac{2dr}{1+r^2},\ d\ell_2=\frac{2rd\theta}{1+r^2}.$$

因此有

$$dA(z)=d\ell_1\times d\ell_2=\frac{4rdrd\theta}{(1+r^2)^2}=\frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2}.$$

由上式, 任意平面可测集 E 的球面表示 $\Psi(E)$ 的面积为

$$\operatorname{area}(\Psi(E))=\int_E\frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2}.$$

最后，考虑一个有趣的等面积问题：

一个平面可测集 E, 其面积给定，其球面表示的面积最大值是多少？

定理 3.4. 给定平面可测集 E, 其面积 (即：Lebesgue 测度) 为 A, 其球面表示的面积记为 A_s, 则成立不等式

$$A_s\le\frac{4\pi A}{A+\pi}.$$

等号成立当且仅当 $A=0$, 或 $A=+\infty$ 且 $E=\mathbb{C}$, 或 $0<A<+\infty$ 且 $E=D(0,\sqrt{A/\pi})$.

证明: 不妨 $0 < A < +\infty$, 记 $D = D(0, r_0), r_0 = \sqrt{A/\pi}$,

$$\begin{aligned}
A_s &= \int_E \frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2} \\
&= \int_{E\cap D} \frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2} + \int_{E\setminus D} \frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2} \\
&\leq \int_{E\cap D} \frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2} + \int_{E\setminus D} \frac{4dxdy}{(1+|r_0|^2)^2} \\
&= \int_{E\cap D} \frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2} + \int_{D\setminus E} \frac{4dxdy}{(1+|r_0|^2)^2} \\
&\leq \int_{E\cap D} \frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2} + \int_{D\setminus E} \frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2} \\
&= \int_D \frac{4dxdy}{(1+|z|^2)^2} = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \frac{4rdrd\theta}{(1+r^2)^2} \\
&= \frac{4\pi r_0^2}{1+r_0^2} = \frac{4\pi A}{A+\pi}.
\end{aligned}$$

3.4 习题

“一个年轻人要想学到真正的知识, 最好是向那些愿意共同进取的人去学, 而不是向那些已负盛名的人去学。我再次感到, 志同道合将会结出累累硕果。”

—斯蒂芬・茨威格《昨日的世界》

回顾: $\Phi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为球极投影, 逆映射 $\Psi : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2$ 将 $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ 映为其球面表示 $\Psi(z)$。$N = (0,0,1)$ 为 S^2 上北极点。

1. (无穷远点) 如何理解 ∞ 满足的运算规则? (对所有复数 $a \in \mathbb{C}$, 成立 $a \pm \infty = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, 同时对所有非零复数 $b \in \mathbb{C}$, $b \cdot \infty = \infty$, $\frac{b}{0} = \infty$.)

2. (对径点) 证明 $\Psi(z), \Psi(w)$ 是球面的对径点的充要条件是 $z\overline{w} = -1$.

3. (对称点) 证明球面表示 $\Psi(z), \Psi(1/\overline{z})$ 关于 xOy-平面对称.

4. (函数奇偶分解的推广) 熟知：平面上的复值函数 $f(z)$ 总可以唯一表示为一个奇函数 $f_1(z) = (f(z) - f(-z))/2$ 和一个偶函数 $f_2(z) = (f(z) + f(-z))/2$ 之和。本题将此结论稍作推广，证明平面上任何复值函数 ϕ 总可以唯一分解为具有 3-重旋转对称性的函数之和:

$$\phi(z) = f(z) + g(z) + h(z),$$

其中 f, g, h 满足如下的旋转对称性:

$$f(\omega z) = f(z), g(\omega z) = \omega g(z), h(\omega z) = \omega^2 h(z),\ \omega = e^{2\pi i/3}.$$

(思考：推广到 n-重旋转对称性的情况，不做要求。)

5. (相似三角形) 证明线段 Nz 与 $N\Psi(z)$ 的长度乘积为定值。由此证明，给定平面上的不同两点 z, w，三角形 ΔNzw 与 $\Delta N\Psi(w)\Psi(z)$ 相似。

***(以下为附加题，不做要求)

6. (圆弧距离) 假设 $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$, 采用球面 S^2 上连接 $\Psi(z), \Psi(w)$ 的 (较短的) 大圆弧长来定义 z, w 的球面距离 $\sigma(z, w)$, 证明

$$\sigma(z, w) = 2 \arctan \left| \frac{z - w}{1 + z\overline{w}} \right|.$$

7. (球面面积元) 球面 S^2 可以用方程 $\zeta_3 = \pm\sqrt{1 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2}$ 表示，验证面积元

$$dS := \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta_3}{\partial \zeta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_3}{\partial \zeta_1}\right)^2} d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{1}{|\zeta_3|} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

另一方面，复数 $z = re^{i\theta}$ 的球面表示为

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \left(\frac{2r\cos\theta}{1 + r^2}, \frac{2r\sin\theta}{1 + r^2}, \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right).$$

通过计算 Jacobi 矩阵与行列式，证明

$$d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{4r(1 - r^2)}{(1 + r^2)^3} dr d\theta.$$

由上面两式可得

$$dS = \frac{4r}{(1 + r^2)^2} dr d\theta = \frac{4 dx dy}{(1 + |z|^2)^2}.$$