1.平稳过程定义

定义：$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程，对任意的$n(n=1,2,\cdots)$，

$t_1,t_2,\cdots t_n\in T$和任意实数h，当$t_1+h,t_2+h,\cdots,t_n+h\in T$时，

$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$和$(X(t_1+h),X(t_2+h),\cdots,X(t_n+h))$

具有相同的分布函数，称此过程为严平稳过程。

严平稳过程的参数集T,

可以为连续的, 如$(-\infty,+\infty),[0,+\infty)$;

可以为离散的, 如$\{0,\pm1,\pm2,\cdots\},\{0,1,2,\cdots\}$

$\{X_t\}$是严平稳过程当且仅当

（1）所有的X_t同分布。

（2）对任意n ≥ 2，$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$的分布

仅与时间差$t_2 - t_1, t_3 - t_2, ..., t_n - t_{n-1}$有关，

而与起始时间t_1无关。

严平稳过程的数字特征：

设严平稳过程$\{X(t)\}$是二阶矩过程，则

（1）$\mu_X(t)=E\left[X(t)\right]=E\left[X(0)\right]\overset{\text{记为}}{=\!=}\mu_X(\text{常数})$

（2）$R_X(t,t+\tau)=E\left[X(t)X(t+\tau)\right]$

$$=E\left[X(0)X(\tau)\right]\overset{\text{记为}}{=\!=}R_X(\tau)$$

定义：给定二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$，如果对任意的$t,t+\tau\in T$,

$$E\left[X(t)\right]=\mu_X\ (\text{常数})$$

$$E\left[X(t)X(t+\tau)\right]=R_X(\tau)$$

则称$\{X(t),t\in T\}$为宽平稳过程

注：

（1） 严平稳过程+二阶矩存在$\Rightarrow$宽平稳过程；

宽平稳过程+正态过程 $\Rightarrow$严平稳过程；

（2）今后，平稳过程均指宽平稳过程。

如果$\{X(t)\}$是宽平稳过程，那么

1. $EX(t)=\mu_X$ 常数

2. $EX^2(t)=R_X(0)$ 常数

3. $D[X(t)]=R_X(0)-\mu_X^2$ 常数

4. $EX_{t_1}X_{t_2}=R_X(t_2-t_1)$

5. $Cov(X_{t_1},X_{t_2})=R_X(t_2-t_1)-\mu_X^2$

例：一族随机变量$X_t(t\in T)$独立同分布，则随机过程$\{X_t;t\in T\}$是严平稳的.

证：设X_t的分布函数为F，对任意不同$t_1,\ldots,t_n$，任意h，

$$P(X_{t_1}\le x_1,\ldots,X_{t_n}\le x_n)=P(X_{t_1}\le x_1)\ldots P(X_{t_n}\le x_n)$$

$$=F(x_1)\ldots F(x_n)=P(X_{t_1+h}\le x_1,\ldots,X_{t_n+h}\le x_n)$$

$\therefore\left(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)\right)$和

$\left(X(t_1+h),X(t_2+h),\cdots,X(t_n+h)\right)$同分布，

$\therefore\{X_t;t\in T\}$是严平稳的.

例：设ξ是一随机变量，

对任何$t\in T, X_t=\xi$，

则随机过程$\{X_t; t\in T\}$是严平稳的.

证：对任意不同$t_1,\ldots,t_n$，任意h，

$$(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})=(\xi,\ \ldots,\ \xi)=(X_{t_1+h},\ldots,X_{t_n+h})$$

例：随机相位余弦波$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$

$-\infty<t<+\infty,\left(\Theta\sim \mathrm{U}(0,2\pi)\right)$。

$\mu_X(t)=0$（常数）

$R_X(t\ ,t+\tau)=\dfrac{a^2}{2}\cos\omega\tau$（只是$\tau$的函数）

$\therefore\{X(t)\}$是宽平稳过程

例 1:(离散白噪声)

设$\{X_k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$两两不相关，

$E(X_k)=0, E(X_k^2)=\sigma^2$,则有：

$$R_X(k,l)=E[X_kX_l]=\begin{cases}\sigma^2 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

只与$k-l$有关，所以是宽平稳。

例2: （移动平均）

设$\{X_k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$两两不相关，

$EX_k=0, DX_k=\sigma^2$, 作$Y_n=\sum_{k=0}^{N} a_k X_{n-k}$

其中N是自然数，而$a_0, a_1, \cdots, a_N$是常数

证明:$\{Y_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是平稳序列

证：$E[Y_n]=\sum_{k=0}^{N}a_k E(X_{n-k})=0$

$$R_Y(n,n+m)=E[Y_n Y_{n+m}]$$

$$=E\left[\left(\sum_{k=0}^{N}a_k X_{n-k}\right)\left(\sum_{j=0}^{N}a_j X_{n+m-j}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}a_k a_j E(X_{n-k}X_{n+m-j})$$

$$=\sum_{\substack{k=0\\0\le m+k\le N}}^{N} a_k a_{m+k}\sigma^2$$

只与m有关，所以$\{Y_n\}$是平稳序列。

例3：设$S(t)$是一周期为T的函数，Θ是在$(0,T)$上服从均匀分布的随机变量，称$X(t)=S(t+\Theta)$为随机相位周期过程，试讨论它的平稳性。

解：由假设，Θ的概率密度为：$f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{T} & 0<\theta<T\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$于是, E\left[X(t)\right]=E\left[S(t+\Theta)\right]=\int_0^T S(t+\theta)\frac{1}{T}d\theta$$

$$=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}S(\varphi)d\varphi \overset{周期性}{=\!=\!=}\frac{1}{T}\int_0^T S(\varphi)d\varphi(常数)$$

$$R_X(t,t+\tau)=E\left[S(t+\Theta)S(t+\tau+\Theta)\right]$$

$$=\int_0^T S(t+\theta)S(t+\tau+\theta)\frac{1}{T}d\theta=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}S(\varphi)S(\varphi+\tau)d\varphi$$

$$\overset{周期性}{=\!=\!=}\frac{1}{T}\int_0^T S(\varphi)S(\varphi+\tau)d\varphi \overset{记为}{=\!=} R_X(\tau)$$

所以随机相位周期过程是平稳的。

相关函数的性质

设$X(t)$和$Y(t)$是平稳相关过程, 则

1. $R_X(0)=E\left[X^2(t)\right]=\psi_X^2\geq 0$

2. $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$(偶函数)

证明: $R_X(\tau)=R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$

$$=E[X(t+\tau)X(t)]\overset{t'=t+\tau}{=}E[X(t')X(t'-\tau)]=R_X(-\tau)$$

3. $\left|R_X(\tau)\right| \le R_X(0), \quad \left|C_X(\tau)\right| \le C_X(0) = \sigma_X^2.$

自相关(自协方差)函数在$\tau = 0$处取得最大值。

4. $R_X(\tau)$是非负定的:

对任意$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$和任意实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j) a_i a_j \geq 0$$

$$\because \quad \sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j) a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} E\left[X(t_i) X(t_j)\right] a_i a_j$$

$$= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} X(t_i) X(t_j) a_i a_j\right] = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} X(t_i) a_i\right]^2\right\} \geq 0$$

5. $X(t)$是周期为T_0的平稳过程$\Leftrightarrow$

$R_X(t)$是周期为T_0的函数。

即：$P\left\{X\left(t+T_0\right)=X\left(t\right)\right\}=1$

$\Leftrightarrow R_X\left(\tau+T_0\right)=R_X\left(\tau\right).$

证明：

"$\Rightarrow$"

因为$P\left\{X\left(t+\tau+T_0\right)=X\left(t+\tau\right)\right\}=1$,

所以$E\left[X\left(t\right)X\left(t+\tau+T_0\right)\right]=E\left[X\left(t\right)X\left(t+\tau\right)\right]$,

即$R_X\left(\tau+T_0\right)=R_X\left(\tau\right)$。

"$\Leftarrow$"

$$E\left\{\left[X\left(t+T_0\right)-X\left(t\right)\right]^2\right\}=2R_X\left(0\right)-2R_X\left(T_0\right)\overset{R_X\text{周期为}T_0}{=\!=\!=\!=}0,$$

所以 $P\left\{X\left(t+T_0\right)=X\left(t\right)\right\}=1$。

应用：

在实际中，各种具有零均值的非周期性噪声和干扰一般当$|\tau|$值适当增大时，$X(t+\tau)$和$X(t)$呈现独立或不相关，

即$\lim\limits_{\tau\to\infty} R_X(\tau)=\lim\limits_{\tau\to\infty} C_X(\tau)=0.$

如：接收机输出电压$V(t)$是周期信号$S(t)$和噪声电压$N(t)$之和，

$V(t)=S(t)+N(t)$

又设$S(t)$和$N(t)$是两个互不相关的各态历经过程，且

$E[N(t)]=0, \lim\limits_{\tau\to\infty} R_N(\tau)=0$

则$V(t)$的自相关函数$R_V(\tau)=R_S(\tau)+R_N(\tau)$

则对于充分大的τ值，$R_V(\tau)\approx R_S(\tau)$

即如果将$V(t)$作为自相关分析仪的输入, 则对于充分大的τ 值，分析仪记录到的是函数$R_S(\tau)$的曲线。

例：设接收机输出电压中的信号和噪声过程的自相关函数分别为：

$$R_S(\tau)=\frac{a^2}{2}cos\omega\tau, R_N(\tau)=b^2e^{-a|\tau|}(a>0)$$

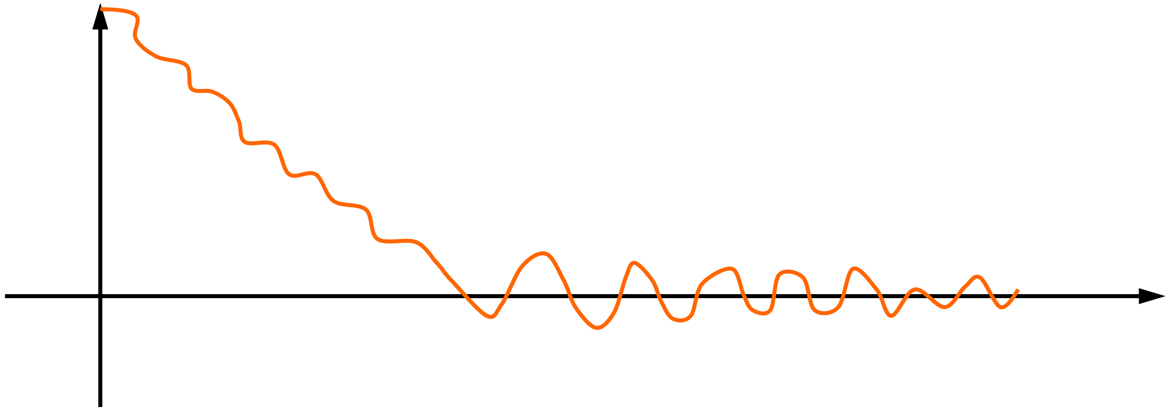
且噪声平均功率$R_N(0)=b^2$远大于信号平均功率$R_S(0)=\dfrac{a^2}{2}$

则$R_V(\tau)=\dfrac{a^2}{2}cos\omega\tau+b^2e^{-a|\tau|}\approx\dfrac{a^2}{2}cos\omega\tau$,当 τ充分大时

自相关分析仪记录到的$R_V(\tau)$，$\tau>0$的图形，

当τ充分大后应呈现正弦曲线，

亦即从强噪声中检测到微弱的正弦信号。



§2 时间平均

如何根据实验记录确定平稳过程的均值呢？按照大数定律，需对一个平稳过程重复进行大量观察，获得一族样本函数

用统计实验方法，均值近似地为：$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_N(t)$,

$$\boxed{\mu_X \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)}$$

悲伤的是：

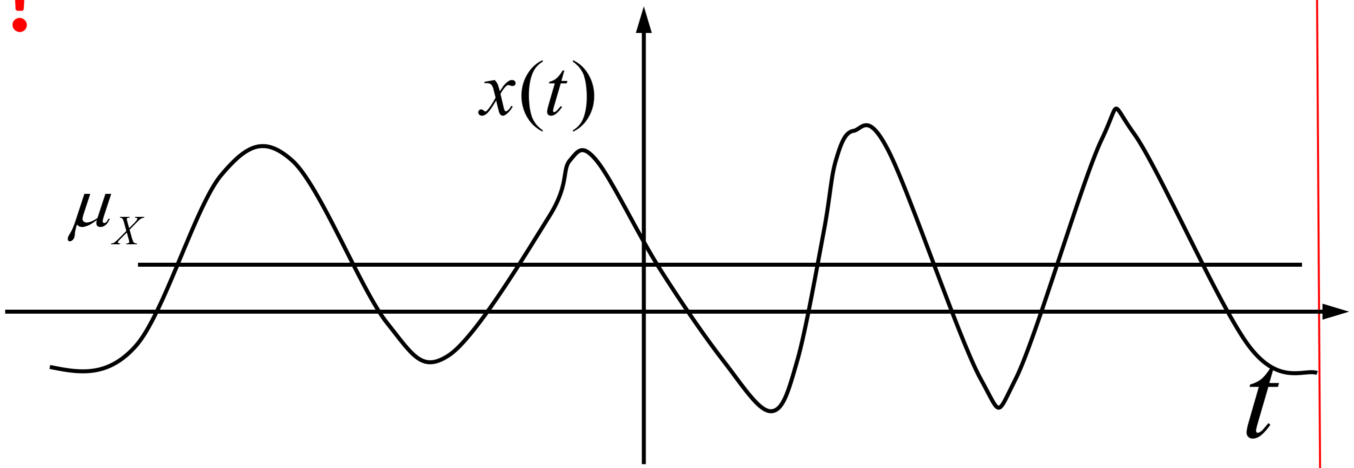
我们很难得到对同一个时间的多次观察

平稳过程的统计特性不随时间的推移而变化，根据这一特点，能否通过在一个很长时间内观察得到的一个样本曲线来估计平稳过程的数字特征呢？

均值遍历性定理证实，只要满足某些条件，那么均值可以用一个样本函数在整个时间轴上的平均值来代替。

即：时间平均 估计 空间的平均 $\mu_X = E(X_t)$

需要条件！！！



例: 独立同分布平稳序列的均值遍历性

设$X_1,\ldots,X_n,\ldots$,独立同分布,$EX_1=\mu, DX_1=\sigma^2>0$,

则大数定理成立:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{p} \mu$$

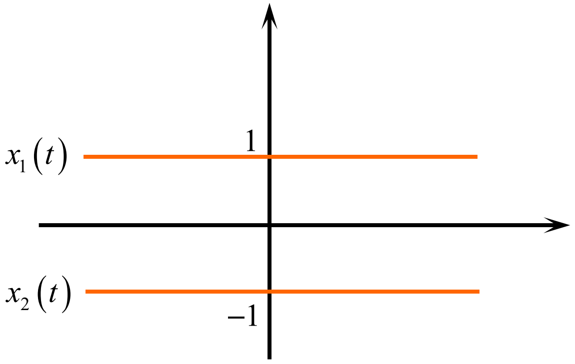
时间平均=空间的平均√

例：$X(t)=X, t\in(-\infty,+\infty),\ P(X=\pm 1)=\frac{1}{2}.$

$$\mu_X(t)=EX=0\text{常值函数}$$

$$R_X(t,t+\tau)=E\left(X^2\right)=1\ \text{是常值函数}$$

所以$\{X(t)\}$是宽平稳过程.



$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Xdt=X$$

时间平均≠空间的平均

定理(von Neumann遍历定理：)

设$\{X_n: n=1,2,\ldots\}$为平稳过程，则存在

一个随机变量η使得$E\eta=\mu_X$,且当$N\to\infty$时，

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n \xrightarrow{L^2} \eta,\ \text{即} E[(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n-\eta)^2]\to 0$$

(当$\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n$以概率1，或依概率收敛时，

收敛的极限一定是η)

定义过程的**时间平均**：

$$<X_n>=\eta=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n \text{(均方意义下的极限)}$$

类似地：设$\{X_n: n\in Z\}$为平稳过程，

Z为整数集，定义过程的时间平均：

$$<X_n> = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}X_n \text{(均方意义下的极限)}$$

•设$\{X(t):\ t\geq 0\}$为平稳过程，定义过程的时间平均：

$$<X_t>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt(\text{均方意义下的极限})$$

•设$\{X(t):\ t\in R\}$为平稳过程，R为实数集，

定义过程的时间平均：

$$<X_t>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^T X(t)dt(\text{均方意义下的极限})$$

$\int_a^b X(t)dt$含义：

1. 划分：对$[a,b]$做划分列$\{t_i^n\}_{i=0}^n$，使得

$$\delta_n = \max_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0;$$

2. 取点：在$[t_i^n, t_{i+1}^n]$取点s_i^n；

3. 求和：$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} X(s_i^n)(t_{i+1}^n - t_i^n)$;

4. 取极限：

若存在随机变量ξ，使得对所有划分和取点，

当$n\to\infty$时，都有S_n均方收敛于ξ

（即极限存在且不依赖于划分和取点）

则称$X(t)$在$[a,b]$内均方可积，积分为ξ，

记为$\int_a^b X(t)dt=\xi$

均方可积的性质：

设$X(t)$在$[a,b]$均方可积，则

$$(1)E(\int_a^b X(t)dt)=\int_a^b E[X(t)]dt;$$

$$(2)E[(\int_a^b X(t)dt)^2]=\int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

定理：假设对$a \le t \le b, E[X^2(t)] < \infty$,且

$\int_a^b \int_a^b R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2 < \infty$，那么$X(t)$在$[a,b]$均方可积.

推论：如果$\{X(t);t \in T\}$是宽平稳过程，那么对

任何$[a,b] \subseteq T$有，$X(t)$在$[a,b]$均方可积.

证明：由Cauchy-Schwarz不等式,

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \le \sqrt{E[X(t_1)^2]}\sqrt{E[X(t_2)^2]} = R_X(0)$$

$$\therefore \int_a^b \int_a^b R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2 \le R_X(0)(b-a)^2 < \infty$$

由定理知，$X(t)$在$[a,b]$均方可积.

推论：如果$\{X(t);t\in T\}$是宽平稳过程,$[a,b]\subseteq T$,

存在Ω_0使得$P(\Omega_0)=1$并且对任何$\omega\in\Omega_0$,函数$X(t,\omega)$

在$[a,b]$上Riemann可积，积分为$\int_a^b X(t,\omega)dt=\sigma(\omega)$,

令$\sigma(\omega)$=0当$\omega\notin\Omega_0$时,

那么$X(t)$在$[a,b]$上的均方积分为

$$\int_a^b X(t)dt=\sigma$$

证明：对$[a,b]$做划分列$\{t_i^n\}_{i=0}^n$，使得

$\delta_n=\max\limits_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\to 0$；在$[t_i^n,t_{i+1}^n]$取点$s_i^n$；

当$n\to\infty$时且$\omega\in\Omega_0$时，

$$S_n(\omega)=\sum_{i=0}^{n-1}X(s_i^n,\omega)(t_{i+1}^n-t_i^n)\to\sigma(\omega),$$

所以S_n以概率1收敛到σ

设$X(t)$在$[a,b]$上的均方积分为ξ，则

$$当n\to\infty时，S_n=\sum_{i=0}^{n-1}X(s_i^n)(t_{i+1}^n-t_i^n)\xrightarrow{L^2}\xi$$

所以$P(\xi=\sigma)=1$

3.均值遍历性

定义：设$\{X(t);t\in T\}$是一宽平稳过程，

如果时间平均等于空间平均$\mu_X=E[X(t)]$，

即$P(<X(t)>=\mu_X)=1$，

则称$\{X(t);t\in T\}$具有**均值遍历性**

（或**均值各态历经性**）.

例：计算随机相位余弦波：$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$ 的时间平均 $<X(t)>$，并判断是否具有均值遍历性.

解：$$<X(t)> = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega t+\Theta)\,dt$$

$$\overset{\text{将}\Theta\text{看作一定值}}{=\!=\!=\!=} \lim_{T\to+\infty}\frac{a\left[\sin(\omega T+\Theta)-\sin(-\omega T+\Theta)\right]}{2T\omega}$$

$$=0$$

所以 $<X(t)>=\mu_X$，具有均值遍历性。

例： 证明:余弦波$X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)\quad -\infty<t<+\infty$,

其中ω是常数,A与Θ相互独立,$A\sim f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0,\quad 其它\end{cases}$,

Θ在$(0,2\pi)$上均匀分布,是宽平稳过程;并判断其是否为均值各态历经过程.

证明: $\mu_X(t)=E[X(t)]=E\left[A\cos\left(\omega t+\Theta\right)\right]$

$=E(A)E[\cos\left(\omega t+\Theta\right)]=0$是常值函数

$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[A^2]E[\cos(\omega t_1+\Theta)\cos(\omega t_2+\Theta)]$

$=\frac{1}{4}\cos\omega(t_2-t_1)$只是$t_2-t_1$的函数

所以,$\{X(t)\}$是宽平稳过程.

$$< X(t) > \; = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A\cos(\omega t + \Theta)\, dt$$

$$\overset{\text{将A看作定值}}{=\!=\!=\!=} A \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos(\omega t + \Theta)\, dt$$

$$= 0 = E[X(t)]$$

即$X(t)$的均值具有各态历经性.

定理一.(均值各态历经定理)

设$\{X_n：n\in T\}$为宽平稳过程，T为自然数集或整数集，则均值各态历经当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}C_X(n)=0.$$

推论：在$\lim\limits_{\tau\to+\infty}C_X(\tau)$存在的条件下，

若$\lim\limits_{\tau\to+\infty}C_X(\tau)=0$, 则均值具有各态历经性

若$\lim\limits_{\tau\to+\infty}C_X(\tau)\neq 0$, 则均值不具有各态历经性

定理二:(均值各态历经定理)

设$\{X(t):\ t\in T\}$为宽平稳过程，T为$[0,\infty)$或$(-\infty,\infty)$,则均值各态历经当且仅当：

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C_X(\tau)d\tau=0. \qquad (*)$$

推论：在$\lim\limits_{\tau\to+\infty}C_X(\tau)$存在的条件下，

若$\lim\limits_{\tau\to+\infty}C_X(\tau)=0$, 则均值具有各态历经性

若$\lim\limits_{\tau\to+\infty}C_X(\tau)\neq 0$, 则均值不具有各态历经性

定理二的证明：

令 $Y(t)=X(t)-\mu_X$，则 $E(Y(t))=0$，$E(Y(s)Y(t))=C_X(t-s)$

$$\langle Y(t)\rangle=\langle X(t)\rangle-\mu_X.$$

令 $Y_T=\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}Y(t)\,\mathrm{d}t$，

则 $\{X(t)\}$ 的均值具有各态历经性当且仅当 $P(\langle Y(t)\rangle=0)=1$

即当 $T\to\infty$ 时，$Y_T\xrightarrow{L^2}0$，也就是当且仅当 $\lim\limits_{T\to\infty}E(Y_T^2)=0$.

若 $\lim\limits_{T\to\infty} E(Y_T^2)=0$，则由柯西-施瓦茨不等式，

$$|E(Y(0)Y_T)| \leq \sqrt{E(Y^2(0))}\sqrt{E(Y_T^2)} \to 0.$$

由于 $C_X(t)$ 是偶函数，则

$$E(Y(0)Y_T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_X(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} C_X(t)\,\mathrm{d}t,$$

所以（*）成立.

反之，若（*）成立，

则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得 $T>N$ 时有

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T C_X(\tau)\mathrm{d}\tau\right| < \varepsilon.$$

计算得 $E(Y_T^2)=\dfrac{1}{4T^2}\displaystyle\int_{-T}^{T}\mathrm{d}s\int_{-T}^{T}C_X(t-s)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2T^2}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}s\int_{s}^{T}C_X(t-s)\mathrm{d}t \quad (C_X(\tau)\text{ 是偶函数})$$

$$=\frac{1}{2T^2}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}s\int_{0}^{T-s}C_X(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (\text{令 } \tau=t-s)$$

$$\leqslant\frac{1}{2T^2}\int_{-T}^{T}\left|\int_{0}^{T-s}C_X(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\mathrm{d}s.$$

当$-T\leqslant s<T-N$时，$T-s>N$，

$$\left|\int_0^{T-s} C_X(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant (T-s)\varepsilon \leqslant 2T\varepsilon.$$

当 $T\geqslant s\geqslant T-N$ 时，$0\leqslant T-s\leqslant N$，

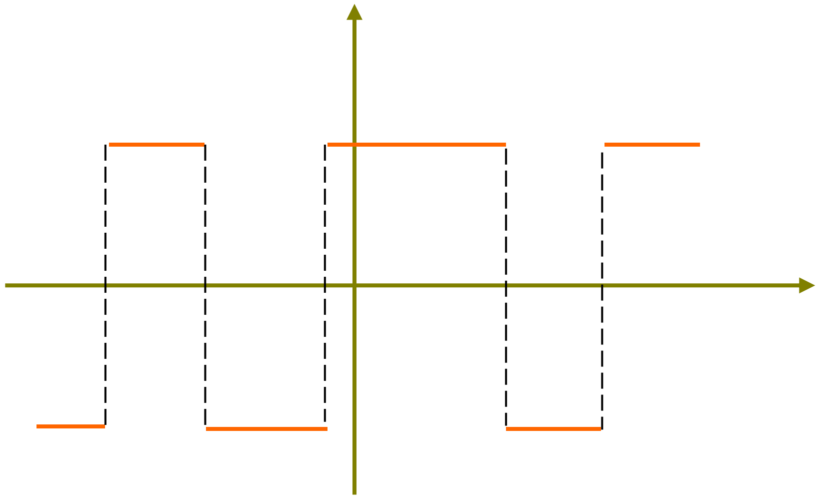
$$\left|\int_0^{T-s} C_X(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \int_0^{T-s} C_X(0)\,\mathrm{d}\tau \leqslant NC_X(0).$$

所以，$E(Y_T^2) \leqslant \frac{1}{2T^2}\left(\int_{-T}^{T-N} 2T\varepsilon\,\mathrm{d}s + \int_{T-N}^{T} NC_X(0)\,\mathrm{d}s\right)$

$$\leqslant 2\varepsilon + \frac{N^2}{2T^2}C_X(0) \to 2\varepsilon,\quad \text{当 } T\to\infty \text{ 时}.$$

由 ε 任意性，知$\lim\limits_{T\to\infty} E(Y_T^2)=0$. 过程

例：考虑随机电报信号，$P\left(X\left(t\right)=\pm I\right)=\dfrac{1}{2}$，而正负号在区间$(t,t+\tau]$内变化的次数$\sim\pi(\lambda\tau)$，证明$X\left(t\right)$是宽平稳过程，并判断是否有均值各态历经性.



证明：$E\left[X(t)\right]=0$是常数

设$\tau>0$, $\quad R_X(t,t+\tau)=E\left[X(t)X(t+\tau)\right]$

$$=I^2P\left\{X(t)X(t+\tau)=I^2\right\}-I^2P\left\{X(t)X(t+\tau)=-I^2\right\}$$

$$=I^2\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k}e^{-\lambda\tau}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k+1}e^{-\lambda\tau}}{(2k+1)!}\right\}=I^2e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\tau)^k}{k!}=I^2e^{-2\lambda\tau}$$

若$\tau<0$,则$R_X(t,t+\tau)=R_X(t+\tau,t)=I^2e^{2\lambda\tau}$.

另外$R_X(t,t)=E(X^2(t))=I^2$

综合得，$R_X(t,t+\tau)=I^2e^{-2\lambda|\tau|}$仅与$\tau$有关，

故是宽平稳过程。

因为当$\tau \to \infty$时，

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2 = I^2 e^{-2\lambda|\tau|} \to 0$$

所以均值具有各态历经性。

注：这里无法直接计算出$\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt.$

例：证明:随机过程$X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t,-\infty<t<+\infty,$是平稳过程；其中$\omega$是非0常数,$A$与$B$独立同$\sim N(0,\sigma^2)$,讨论此过程的均值是否具有各态历经性。

证明:$\mu_X(t)=E[X(t)]=E(A)\cos\omega t+E(B)\sin\omega t=0$常数

$$R_X(t,t+\tau)=E[(A\cos\omega t+B\sin\omega t)(A\cos\omega(t+\tau)+B\sin\omega(t+\tau))]$$

$$=E(A^2)\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)+E(B^2)\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)$$

$$=\sigma^2[\cos\omega t\cos\omega(t+\tau)+\sin\omega t\sin\omega(t+\tau)]=\sigma^2\cos\omega\tau$$

只是τ的函数

所以$X(t)$是宽平稳过程。

方法一：直接用定义判断：

$$<X(t)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{2A\sin\omega T}{\omega}-\frac{B(\cos\omega T-\cos\omega(-T))}{\omega}\right]=0=\mu_X,$$

方法二，用定理二判断：

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}C_X(\tau)\,d\tau=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\sigma^2\cos\omega\tau\,d\tau$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{\sigma^2}{T}\frac{\sin\omega T}{\omega}=0$$

即$X(t)$的均值具有各态历经性。

例：（Ornstein-Uhlenbeck过程）

设$X(t)=e^{-\frac{\alpha t}{2}}B(e^{\alpha t})$,这里$\alpha>0$,$\{B(t);t\geq 0\}$是标准布朗运动.

（1）证明$\{X(t);t\geq 0\}$是严平稳过程;

(2)它的均值具有各态历经性吗？为什么？

（1）证明：$\mu_X(t)=E(X(t))=e^{-\frac{\alpha t}{2}}E[B(e^{\alpha t})]=0$是常数，

对$t,\tau\geq 0, R_X(t,t+\tau)=E(X(t)X(t+\tau))$

$=e^{-\frac{\alpha t}{2}}e^{-\frac{\alpha(t+\tau)}{2}}E[B(e^{\alpha t})B(e^{\alpha(t+\tau)})]=e^{-\frac{\alpha t}{2}}e^{-\frac{\alpha(t+\tau)}{2}}e^{\alpha t}=e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$

对$t\geq\tau\geq 0, R_X(t,t-\tau)=E(X(t)X(t-\tau))$

$=E(X(t-\tau)X(t))=e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$

所以对所有τ，$R_X(t,t-\tau)=e^{-\frac{\alpha|\tau|}{2}}$只是$\tau$的函数

所以$\{X(t);\ t\geq 0\}$是宽平稳过程. 又由于它是正态过程，

所以它也是严平稳过程.

（2）

因为当$\tau \to \infty$时，$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2 = e^{-\frac{\alpha|\tau|}{2}} \to 0$

所以它的均值具有各态历经性.

例：设$X_1, X_2, \ldots$两两不相关，且对所有$i, E(X_i) = \mu$，$D(X_i) = \sigma^2 > 0$.

（1）证明$\{X_n; n = 1, 2, \ldots\}$是宽平稳过程；

(2)它的均值具有各态历经性吗？为什么？

（1）证明：$\mu_X(n) = EX_n = \mu$是常数，

$$C_X(n, n+m) = Cov(X_n, X_{n+m}) = \begin{cases} 0, 若m \neq 0, \\ \sigma^2, 若m = 0 \end{cases}$$

只是m的函数，所以$\{X_n; n = 1, 2, \ldots\}$是宽平稳过程；

(2)当$m \to \infty$时，$C_X(m) \to 0$，

所以它的均值具有各态历经性.

例: 设$\{X_k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$两两不相关，$EX_k=0, DX_k=1$,

作$Y_n=\sum_{k=0}^{N} a_k X_{n-k}$

其中N是自然数，而$a_0, a_1, \cdots, a_N$是常数

则:$\{Y_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$具有均值各态历经性.

这是因为$C_Y(m)=R_Y(m) = \sum_{\substack{k=0 \\ 0\le m+k\le N}}^{N} a_k a_{m+k}=0$当$m>N$时,

所有$\lim\limits_{m\to\infty} C_Y(m)=0.$

例：设$\{X_k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$两两不相关，$EX_k=0, DX_k=1$,

设$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$. 作$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{n-k}$

问$\{Y_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$具有均值各态历经性吗？

解：$EY_n = 0$

$m \geq 0$, $E(Y_n Y_{n+m}) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{n-k} \sum_{l=0}^{\infty} a_l X_{n+m-l}\right]$

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\infty} a_l \, E(X_{n-k} X_{n+m-l})$

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k a_{m+k}$

$$|R_Y(m)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k a_{m+k}\right|$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k}^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} a_k^2} \to 0 \quad \text{当 } m\to\infty \text{ 时}$$

$\therefore \{Y_n\}$ 具有均值各态历经性.

即 $\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{n-k} \xrightarrow{P} 0$ 当 $N\to\infty$ 时.

例：令 $X_n = \cos(nU)$,这里$U \sim U(-\pi,\pi)$.

(1)证明$\{X_n; n=1,2,\cdots\}$是宽平稳过程;

(2)判断当$N\to\infty$时，$\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$是否依概率收敛?如果收敛,收敛到什么?

需说明理由.　$(\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)].)$

例(*)：设X_0具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}.$$

对$n\ge 0$, 在已知$X_0,\ldots,X_n$的条件下，X_{n+1}服从 $(1-X_n,1]$ 上的均匀分布.

(1)证明$\{X_n;n=0,1,\cdots\}$是宽平稳过程;

(2)判断当$N\to\infty$时，$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i$是否依概率收敛？如果收敛,收敛到什么？

(1)证明:

$$E(X_0)=\int_0^1 x(2x)dx=\frac{2}{3},$$

对$n\geq 0$,

$$E(X_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n)=\frac{1}{2}(1-X_n+1)=1-\frac{X_n}{2},$$

推得

$$E(X_{n+1})=E[E(X_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n)]=1-\frac{E(X_n)}{2}.$$

由归纳法得: $E(X_n)=\frac{2}{3}$对所有n成立.

$$E(X_0^2) = \int_0^1 (x^2)(2x)dx = \frac{1}{2}.$$

对$n \geq 0$,

$$E(X_{n+1}^2|X_0, X_1, \cdots, X_n) = \frac{1}{12}X_n^2 + (1 - \frac{X_n}{2})^2 = \frac{X_n^2}{3} - X_n + 1.$$

推得

$$E(X_{n+1}^2) = \frac{E(X_n^2)}{3} - E(X_n) + 1 = \frac{E(X_n^2)}{3} + \frac{1}{3}.$$

由归纳法得: $E(X_n^2) = \frac{1}{2}$对所有n成立.

对$n, m \geq 0$,

$$E(X_n X_{n+m+1} | X_0, X_1, \cdots, X_{n+m}) = X_n(1 - \frac{X_{n+m}}{2}).$$

推得

$$E(X_n X_{n+m+1}) = E[X_n(1 - \frac{X_{n+m}}{2})] = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} E[X_n X_{n+m}].$$

由归纳法得对任意$m \geq 0$,

$$R_X(n, n+m) = \frac{4}{9} + \frac{(-1)^m}{18 \times 2^m}.$$

由于$\mu_X(n)=\frac{2}{3}$是常值函数, $R_X(n,n+m)$只是m的函数, 所有$\{X_n\}$是宽平稳过程.

(2)当$m\to\infty$时,

$$C_X(m)=R_X(m)-\mu_X^2=\frac{(-1)^{|m|}}{18\times 2^{|m|}}\to 0,$$

所以$\{X_n\}$的均值具有各态历经性. 从而当$N\to\infty$时, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i$ 依概率收敛到$\mu_X=\frac{2}{3}$.