

## 1 第十一次作业

问题 1. 求证： $\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧致的。

问题 2. 证明离散拓扑是局部紧致的，由此和上一题给出局部紧致空间的像不是局部紧致的例子。

问题 3. 考虑 $\mathbb{R}$ 到圆周 $S^1$  (作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间) 的如图映射，证明该映射是嵌入。

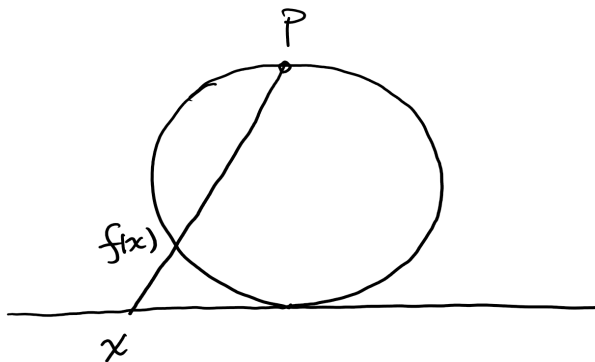


图 1: 嵌入

问题 4. 设 $(X_i, d_i)_{i=1,2}$ 是两个紧致度量空间，证明： $X_1 \times X_2$ 是紧致的。(利用乘积空间是度量空间，证明列紧性)

问题 5 (选做). 设 $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 是一列紧致度量空间，证明： $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 是紧致的。(利用乘积空间是度量空间，证明列紧性)

问题 6 (关于有序矩形“非列紧”的更正). 考虑有序矩形 $I_o^2$ 中的点列 $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{2})$ ，求证：序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 $(0, 1)$ ，其中的括号表示有序对。

实际上，紧致且满足第一可数公理的空间一定是列紧的，从而有序矩形是列紧的。紧致非列紧的空间仍需要Tychonoff定理，例如 $\{0, 1\}^{[0,1]}$ 是紧致而非列紧的空间。