1 第七次作业

问题 1. 取球面上的北极点N, 再取赤道上东经*0°, 90°*的点A, B, 写出球面三角形NAB到平面三角形的同胚映射。

问题 2. 设J是无限集，求证($\mathbb{R}^J$, 箱拓扑不可度量化。

问题 3. 用ω表示正整数集，$\mathbb{R}^\omega$表示笛卡尔积. 记$\mathbb{R}^\infty = \{(x_i) \in \mathbb{R}^\omega \mid x_i \text{ 中只有有限项非零}\}$. 分别在积拓扑、一致拓扑和箱拓扑中确定$\mathbb{R}^\infty$的闭包。

问题 4. 设$\mathbb{R}^\omega$的子集$X = \Pi_{n \in N^*}\left[0, \frac{1}{n}\right]$，对$x = (x_n), y = (y_n)$定义 $d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.证明$d$是$X$上的度量。$X$作为$\mathbb{R}^\omega$在积拓扑，箱拓扑，一致拓扑的子空间拓扑以及$d$所诱导的度量拓扑这四种拓扑的关系如何？

问题 5. 取定素数p，在有理数域$\mathbb{Q}$上定义映射ν_p如下*:* 将非零有理数r写成$r = p^k \frac{a}{b}$的形式，其中k是整数，且$(p, a) = (p, b) = (a, b) = 1$ *(*这种表示是唯一的*)*，令$\nu_p(r) = k$以及$\nu_p(0) = +\infty$. 证明*:* $d_p(r_1, r_2) = p^{-\nu_p(r_1 - r_2)}$ 是$\mathbb{Q}$上的度量。*(*例如*:* $\nu_3(9) = 2, d_3(1, 10) = 3^{-2}$*)*