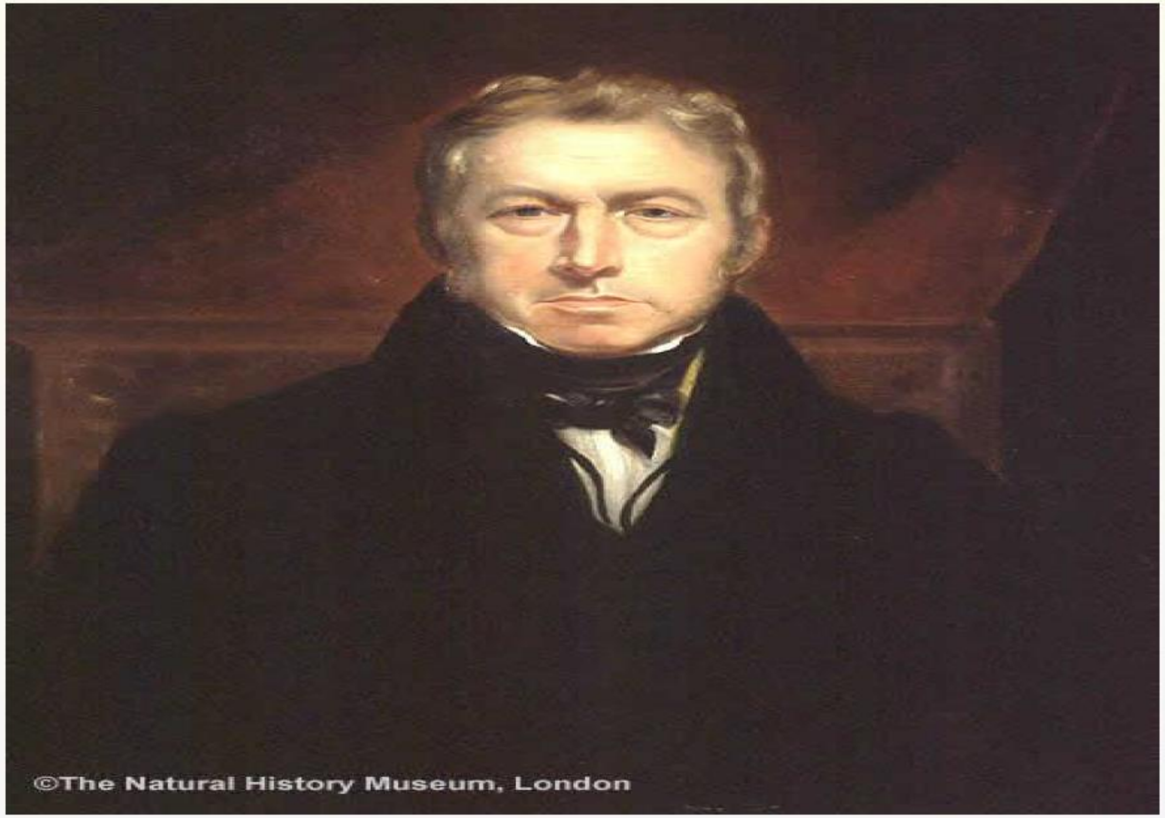
布朗运动

背景

1. Robert Brown

Robert Brown (1773-1858) 英国植物学家



Robert rown (1773-1858), [c.1845]

1823年他注意到：

如果通过显微镜观察悬浮在水中的花粉颗粒，那么会发现花粉颗粒来回移动；

并称这种来回移动为Brown 运动。

他很快就意识到，该运动既不是源于液体流到，也不是液体蒸发而引起的，而是由于粒子本身运动形成。

观察有机体细胞，他能看得无休止运动。

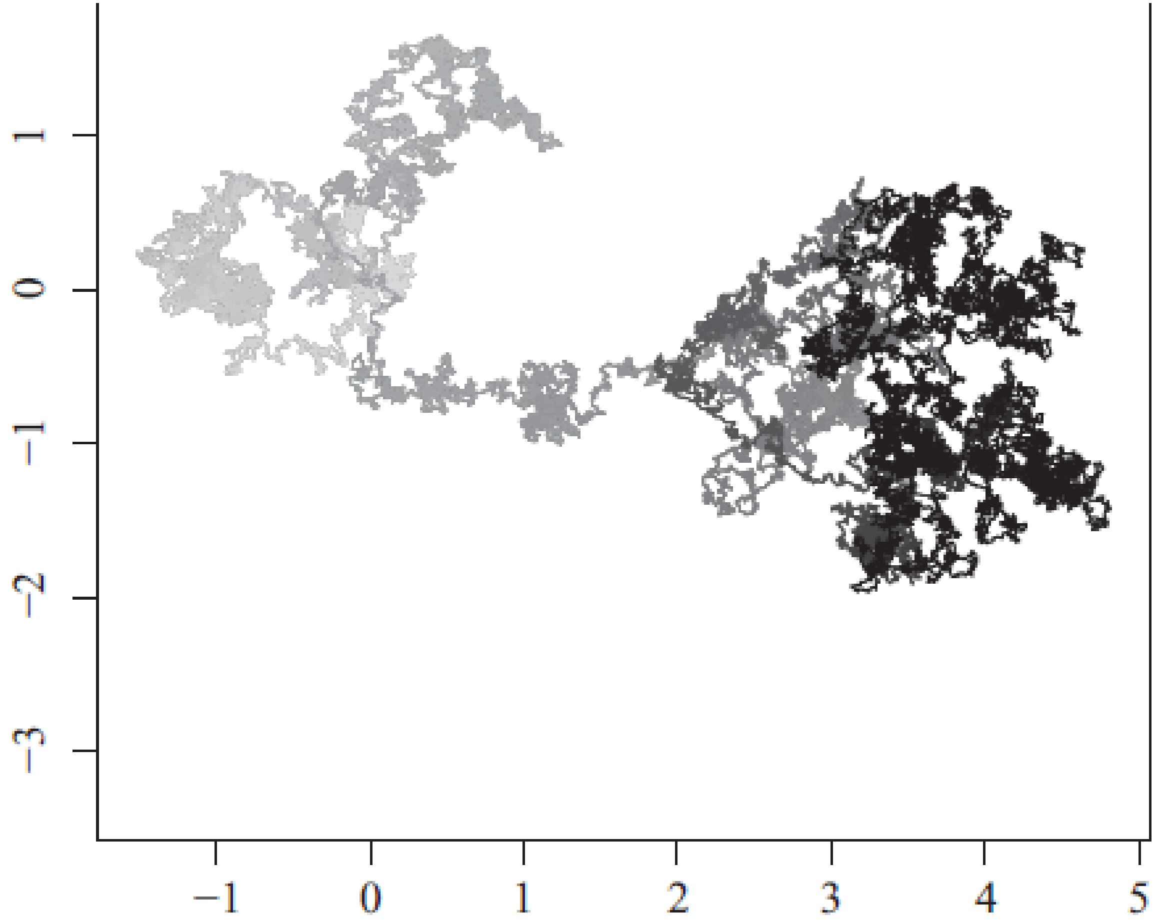
并且大多数看见这种现象的人，都认为他们看到的是生命本身在运动。

在许多活的植物标本中看到这种现象后，他不禁问：在死的植物中是否还能看见这种现象

接着，他把花粉颗粒放入乙醇中浸泡大约11个月左右，但仍能看到该现象

他继续考察大量明显不是有机体的标本，如矿石。他得出结论：对任何矿物质，只要矿石磨得像花粉颗粒那样足够的细，就能看到同样的现象

总之，他遇到了一个以前显微镜学家都熟知的一种现象，但对其物理本质提出了一种“革命性”的解释



2维布朗运动的一条样本轨道

2. Albert Einstein

Albert Einstein (1879-1955)

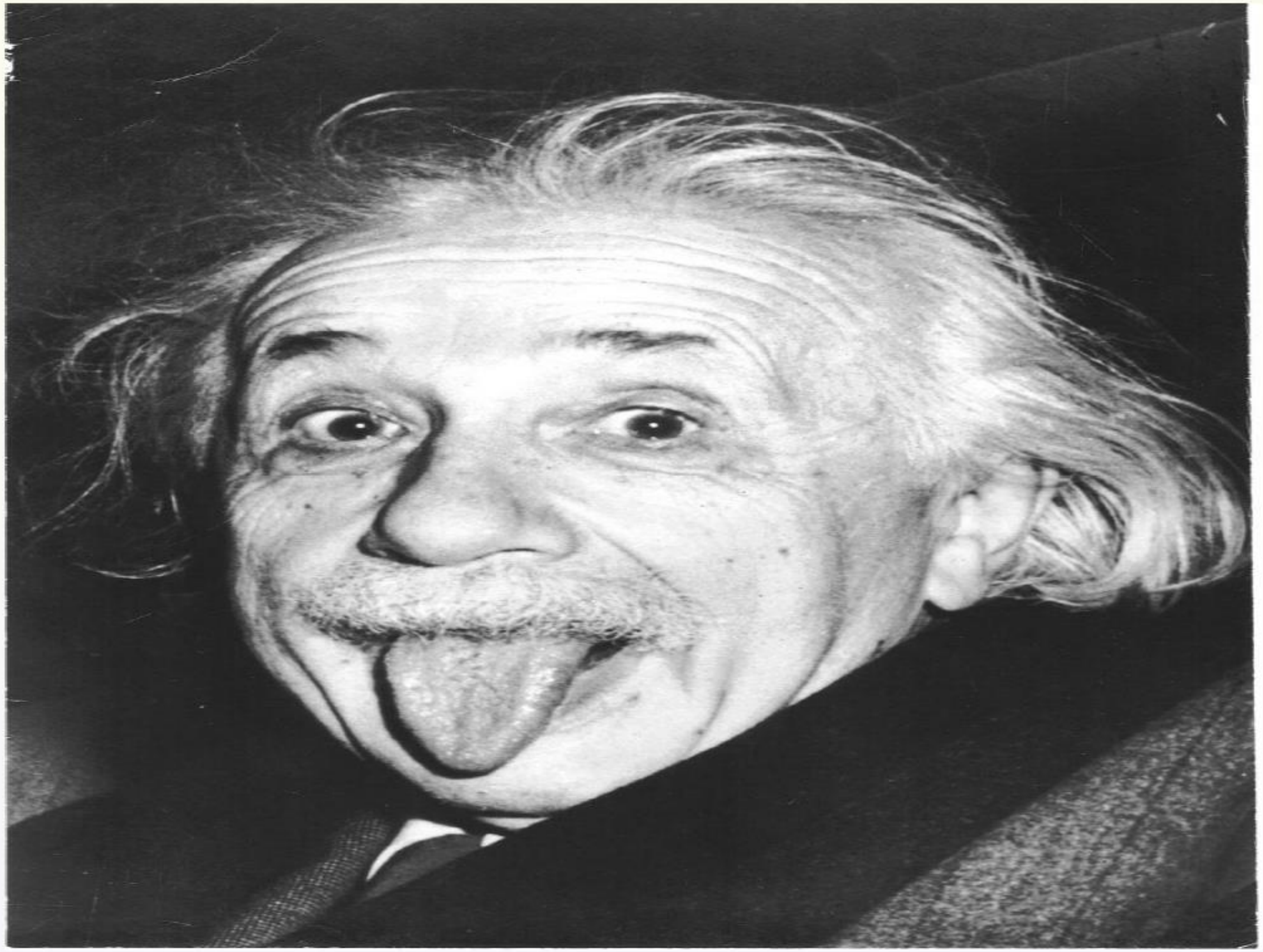
爱因斯坦1905年获得苏黎世大学博士学位，论文题目为

On a new determination of molecular dimensions

1905年，爱因斯坦发表了三篇论文，具有划时代意义。其中包括

On the Motion of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid, as Required by the Molecular Kinetic Theory of Heat

（《根据分子运动论研究静止液体中悬浮微粒的运动》）



Albert Einstein

自古希腊时代，人们就有了原子的概念。

早在爱因斯坦之前一个世纪，伟大化学家John Dalton就提出：所有化合物都是由分子组成；分子又由更细小的原子组成。

问题：并没有一个合理的存在性证明。

爱因斯坦意识到，Brown运动中所能看到的花粉颗粒无规则运动正是由于水分子撞击细小的花粉颗粒而成，正如足球比赛中运动员踢球那样。

能看到的是花粉颗粒，水分子是看不见的。所以，感觉好像是颗粒在不停地蹦跳着。

爱因斯坦注意到：通过观察花粉颗粒，可以计算出多少水分子在撞击单个花粉颗粒，甚至能计算出水分子运动速度。

更重要的是，爱因斯坦也推断出原子的一些性质。

后来，法国物理学家Jean Perrin使用爱因斯坦的推断计算出原子的大小，从而打消了对原子存在性的怀疑。

3. Louis Bachelier

Louis Bachelier (1870-1964)

法国数学家，现代金融数学之父。但该荣誉来之太迟！

Bachelier 1900年获得博士学位，论文题目

Theory of Speculation

Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier

March 11, 1870 – April 28, 1946

该博士论文给出了Brown 运动作为随机过程的分布函数。
似乎爱因斯坦1905年并没有注意到Bachelier的工作。
Bachelier论文中还推导出期权价格，
其中股票价格由Brown运动来描述；
另外，他也给出了Barrier Option 的价格。
所谓Barrier Option，就是该期权依赖于股票价格是否超过某上限。

Bachelier 关于Brown运动的理解和研究比爱因斯坦1905年的文章更优雅(Elegant)，更数学化(Mathematical)。

按照爱因斯坦承认的话来说，他对物理具有无可比拟的直觉，但数学直觉并不那么发达。

Bachelier的工作启发了后来Wiener (1923)、Kolmogorov (1931)、Black-Scholes (1973) 等人关于Brown 运动和期权定价的研究。

Bachelier的工作超越于他的时代，在其有生之年并没有得到欣赏。

由于国际衍生品交易(其定价要运用金融数学)的巨大影响，Bachelier的工作才得以承认，世界才给予Bachelier应有的地位。

4. Nobert Wiener

Nobert Wiener (1894-1964)

美国数学家。

维纳1906年进入Tufts 学院，1909年毕业。

18岁获得Harvard大学博士学位。

1923年维纳构造性地证明了Brown运动的存在性。

文献中也称Brown运动为Wiener过程。

1935-1936年应邀访问北京清华大学，并有机会学习一些
语。

Norbert Wiener

(November 26, 1894 – March 18, 1964)

1. 布朗运动的定义和性质

考虑直线上的对称随机游动，每隔Δt时间等概率地向左或向右移动距离Δx, 且每次移动相互独立, 记:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次质点右移}, \\ -1, & \text{第}i\text{次质点左移}. \end{cases}$$

令$X(t)$表示t时的位置，则

$$X(t) = \Delta x(X_1 + X_2 + \ldots + X_{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]})$$

则$E(X(t)) = 0, Var(X(t)) = (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right]$

$$X(t)=\Delta x(X_1+X_2+\ldots+X_{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]})$$

设$\Delta x=\sigma\sqrt{\Delta t}$，当$\Delta t\to 0$时，

（1）$E[X(t)]=0, D[X(t)]=\sigma^2 t,$

由中心极限定理，$X(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$

(2)$\{X(t),t\geq 0\}$是平稳独立增量过程，即

$0\leq s<t, X(t)-X(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s))$

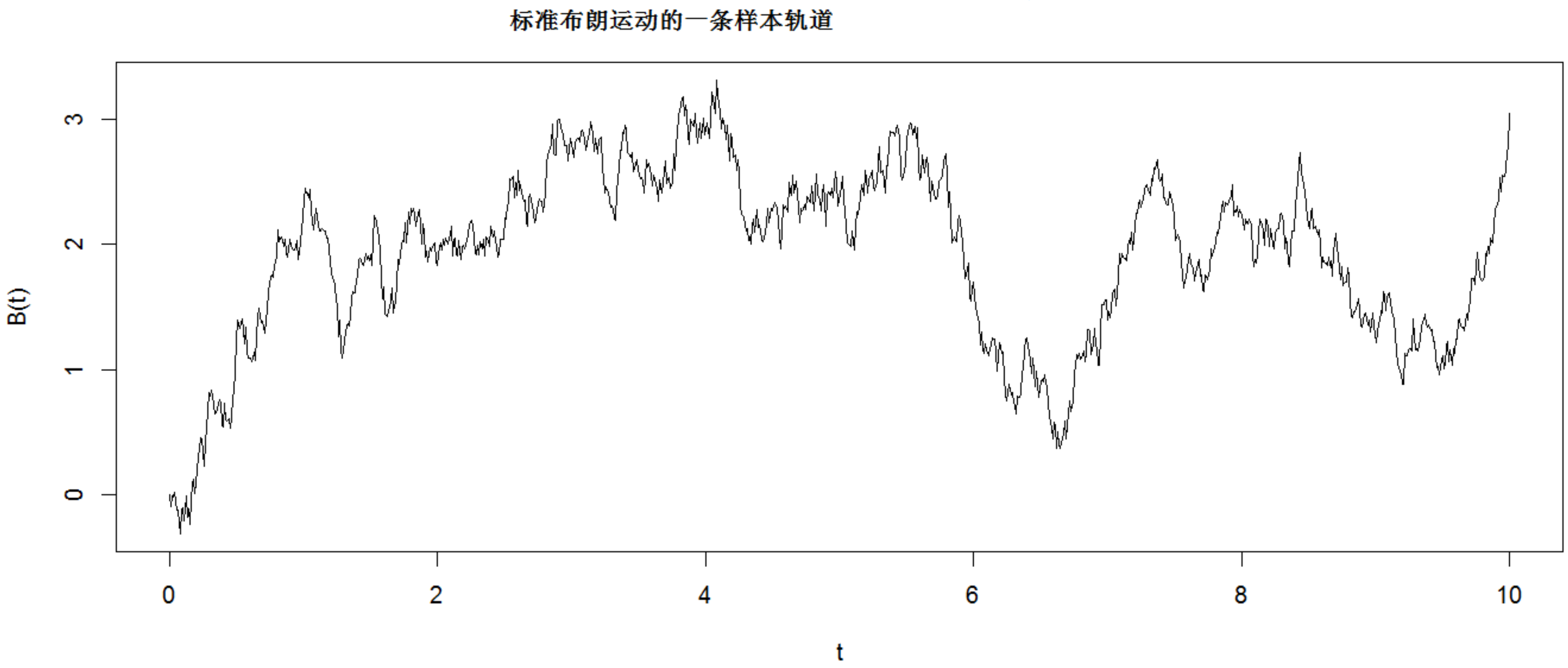
定义: $\{X(t), t \geq 0\}$ 称为布朗运动或维纳过程，如果:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ X(0)=0 \\ 2.\ \text{独立增量} \\ 3.\ \text{对}\ \forall t > s \geq 0, \end{array}\right\} \text{平稳独立增量过程}$$

$$X(t) - X(s) \sim N\left(0, \sigma^2 (t-s)\right)$$

4. 样本轨道连续

后面都讨论 $\sigma = 1$ 的标准布朗运动, 记为 $\{B(t); t \geq 0\}$.



标准布朗运动的一条样本轨道

例： 设$\{B(t), t \geq 0\}$是标准布朗运动，求：

(1) $B(1)+3B(2)$分布;

(2) $Cov(B(1)+B(3), B(3)-B(2))$;

(3) $P\{B(7)\leq 3 \mid B(1)=1, B(3)=2\}$.

$$\text{解}:(1)\ \ B(1)+3B(2)$$
$$=B(1)+3[B(1)+(B(2)-B(1))]$$
$$=4B(1)+3[B(2)-B(1)]\sim N(0,25)$$

$$(2)\ \ Cov(B(1)+B(3),B(3)-B(2))$$
$$=Cov(B(1)+B(2)+[B(3)-B(2)],B(3)-B(2))$$
$$=D[B(3)-B(2)]=1$$

$$(3)\ \ P\{B(7)\le 3\mid B(1)=1,B(3)=2\}$$
$$=P\{B(7)-B(3)\le 1\mid B(1)=1,B(3)=2\}$$
$$=P\{B(7)-B(3)\le 1\}=\Phi(\frac{1}{2})$$

性质： 1. 样本轨道连续的随机过程$\{B(t);t\geq 0\}$是布朗运动当且仅当它是正态过程，$E(B(t))=0$且$E[B(t)B(s)]=t\wedge s$.

2. **Markov性**：固定$s>0,\{B(t+s)-B(s);t\geq 0\}$是布朗过程，且与$\{B(u);u\leq s\}$独立.

3. 自相似性：固定$a \neq 0, \{\frac{1}{a}B(a^2 t); t \geq 0\}$是布朗运动

4. 0与∞对称性：

令$\tilde{B}(t) = \begin{cases} tB(1/t), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$，则$\{\tilde{B}(t); t \geq 0\}$是布朗过程.

例： 设$\{B(t),t\geq 0\}$是标准布朗运动，求：
$P\{B(0.5)\leq 1\mid B(1)=1,B(2)=2\}$.

解：$\{\tilde{B}(t);t\geq 0\}$是标准布朗运动.又$B(t)=t\tilde{B}(1/t)$,所以

$$P\{B(0.5)\leq 1\mid B(1)=1,B(2)=2\}$$
$$=P\{0.5\tilde{B}(2)\leq 1\mid \tilde{B}(1)=1,2\tilde{B}(0.5)=2\}$$
$$=P\{\tilde{B}(2)\leq 2\mid \tilde{B}(1)=1,\tilde{B}(0.5)=1\}$$
$$=P\{\tilde{B}(2)-\tilde{B}(1)\leq 1\mid \tilde{B}(1)=1,\tilde{B}(0.5)=1\}$$
$$=P\{\tilde{B}(2)-\tilde{B}(1)\leq 1\}=\Phi(1)=0.8413$$

2. 与布朗运动相关的过程

(1) 反射Brown 运动

假设$\mathbf{B}=(B_t, t\geq 0)$是Brown 运动，令$X_t=|B_t|$。称$\mathbf{X}=(X_t, t\geq 0)$为反射Brown 运动。

反射Brown 运动不是一个正态过程；它的数字特征：

$$
\begin{aligned}
EX_t &= E|B_t| = \int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx \\
&= 2\int_0^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx = \left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$Var(X_t)=EX_t^2-(EX_t)^2=\frac{\pi-2}{\pi}t$$

分布：

$x < 0$，$P(X_t \leq x) = 0$

$x > 0$，

$$\begin{aligned} P(X_t \leq x) &= P(|B_t| \leq x) \\ &= P(-x \leq B_t \leq x) \\ &= 2P(B_t \leq x) - 1 \\ &= 2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1 \end{aligned}$$

(2) 几何Brown 运动

假设$\mathbf{B}=(B_t,t\geq 0)$是Brown 运动，α是一个常数。

令$X_t=e^{\alpha B_t}$。

称$\mathbf{X}=(X_t,t\geq 0)$为几何Brown 运动。

几何Brown 运动不是一个正态过程；它的数字特征：

$$\begin{aligned} EX_t &= Ee^{\alpha B_t}=Ee^{\alpha\sqrt{t}\frac{B_t}{\sqrt{t}}} \\ &= e^{\frac{\alpha^2 t}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Ee^{2\alpha B_t}-(Ee^{\alpha B_t})^2 \\ &= e^{2\alpha^2 t}-e^{\alpha^2 t} \end{aligned}$$

$\ln X(t)=\alpha B(t)$服从正态分布，所以$X(t)$服从对数正态分布

$\because \alpha B(t)$与$-\alpha B(t)$同分布，$\therefore e^{\alpha B(t)}$与$e^{-\alpha B(t)}$同分布

对$\alpha > 0, x > 0,$

$$P(X_t \le x) = P(e^{\alpha B_t} \le x) = P(\alpha B_t \le \ln x)$$

$$= P(B_t \le \frac{\ln x}{\alpha}) = \Phi(\frac{\ln x}{\alpha\sqrt{t}})$$

$$\therefore f_{X_t}(x) = \phi(\frac{\ln x}{\alpha\sqrt{t}})\frac{1}{\alpha x\sqrt{t}}1_{\{x>0\}} = \frac{1}{\alpha x\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(\ln x)^2}{2\alpha^2 t}}1_{\{x>0\}}$$

(3)布朗桥过程

定义：设$X(t)=B(t)-tB(1)$, 称$\{X(t), 0\le t\le 1\}$为布朗桥过程。

性质:1. $X(0)=0$，$X(1)=0$

2.正态过程

3. $\mu_X(t)=0$,

对$0\le s\le t\le 1$, $C_X(t,s)=s(1-t)$

4.样本轨道连续

注: $2+3+4 \Leftrightarrow$ 布朗桥运动

$$EX(t)=E[B(t)]-tE[B(1)]=0,$$

设$0\le s\le t\le 1,\quad C_X(s,t)=Cov(X(s),X(t))$

$$=Cov[B(s)-sB(1),B(t)-tB(1)]$$

$$=Cov[B(s),B(t)]-Cov[sB(1),B(t)]$$
$$-Cov[B(s),tB(1)]+stCov[B(1),B(1)]$$

$$=s-st-st+st=s(1-t)$$

(4) 积分过程

定义 $$X_t = \int_0^t B_s ds, \quad t \geq 0$$

称$\mathbf{X} = (X_t, t \geq 0)$为Brown 运动的积分过程

$$\int_0^t B_s ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) B_{s_i}$$

$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是正态过程,

所以$\sum_{k=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) B_{s_i}$为正态随机变量;

另外，正态随机变量序列的极限仍为正态随机变量,

所以$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) B_{s_i}$为正态随机变量

可以证明$\{X(t);t\geq 0\}$是一个正态过程(练习)

因为$\int_0^t E(|B_s|)ds \leq \int_0^t \sqrt{E(B_s^2)}ds = \int_0^t \sqrt{s}ds < \infty$,

所以由**Fubini**定理,

$$\begin{aligned} EX_t &= E\int_0^t B_s ds \\ &= \int_0^t EB_s ds = 0 \end{aligned}$$

对$s\leq t$,因为$\int_0^s du\int_0^t E(|B_u B_v|)dv$

$$\leq \int_0^s du\int_0^t \sqrt{E(B_u^2)}\sqrt{E(B_v^2)}dv$$

$$= \int_0^s du\int_0^t \sqrt{u}\sqrt{v}dv \leq \int_0^s du\int_0^t t dv = st^2 < \infty$$

所以由**Fubini**定理,

对$0 \leq s \leq t$,

$$
\begin{aligned}
Cov(X_s, X_t) &= EX_sX_t = E\int_0^s B_u du \int_0^t B_v dv \\
&= E\int_0^s \int_0^t B_u B_v du dv \\
&= \int_0^s \int_0^t EB_u B_v du dv \\
&= \int_0^s \int_0^t u \wedge v du dv \\
&= \int_0^s du \int_0^u v dv + \int_0^s u du \int_u^t dv \\
&= \frac{ts^2}{2} - \frac{s^3}{6}
\end{aligned}
$$

3. 最大值与首中时分布

设$\{B(t); t\geq 0\}$是标准布朗运动，$a\neq 0$，

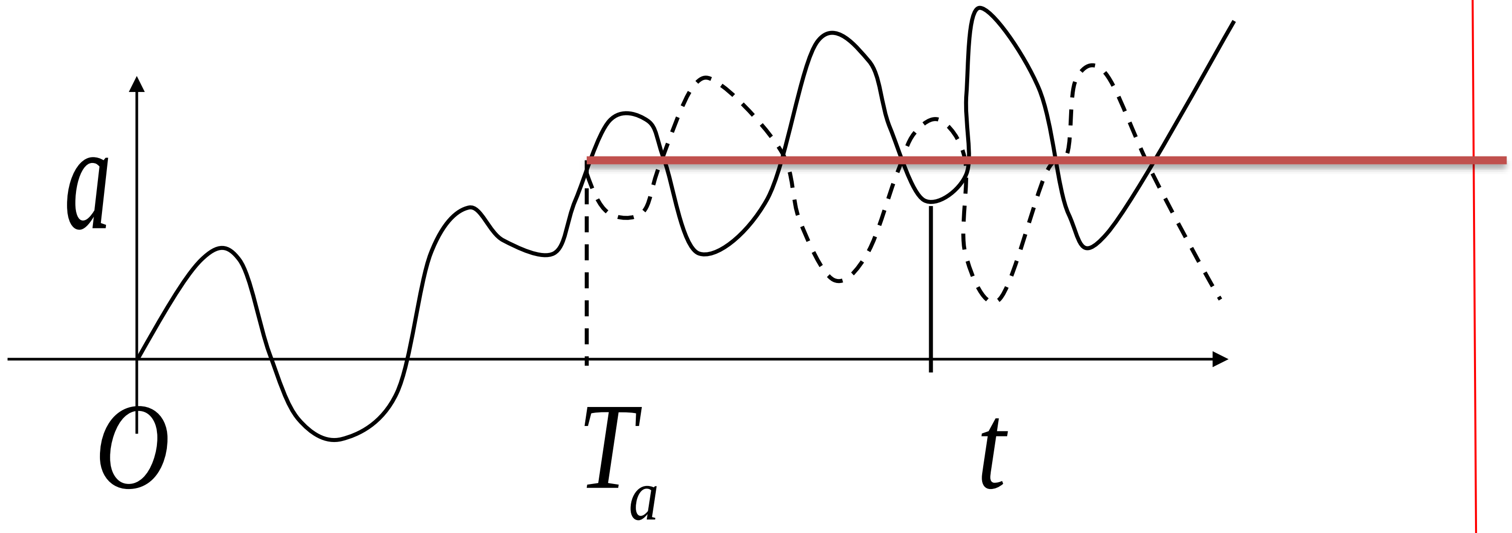
令$T_a=\inf\{t>0 : B(t)=a\}$,

表示首次击中a的时刻, 称为a的首中时.

定理(反射原理)： 固定实数a,令

$$\widehat{B}(t)=\begin{cases} B(t), & t<T_a \\ 2a-B(t), & t\ge T_a \end{cases},$$

则$\{\widehat{B}(t);t\ge 0\}$也是布朗运动.



证明： 对$t\geq 0$,令$Y(t)=B(t)1_{\{t\leq T_a\}}, Z(t)=B(t+T_a)-a.$

则$Z=\{Z(t);t\geq 0\}$是独立于$Y=\{Y(t);t\geq 0\}$的布朗运动.

所以$-Z=\{-Z(t);t\geq 0\}$是独立于Y的布朗运动.

所以(Y,Z)与$(Y,-Z)$具有相同的有限维分布.

$\varphi:(Y,Z)\to\{Y(t)1_{\{t\leq T_a\}}+(a+Z(t-T_a))1_{\{t>T_a\}};t\geq 0\}$

生成一个连续过程，$\varphi(Y,-Z)$也是一个连续过程,

且两个具有相同的有限维分布.

又$\varphi(Y,Z)=B,\varphi(Y,-Z)=\widehat{B}$，所以$\widehat{B}$也是布朗运动.

令$M_t=\sup\{B(u):u\le t\}$.

(1) 对任意$a,y,t\ge 0$,

$$P(M_t\ge a, B_t\le a-y)=P(B_t\ge a+y);$$

(2) $P(M_t\ge a)=2P(B_t\ge a),\forall a\ge 0$,

即M_t与$|B_t|$同分布.

(3) 对任何$a\ne 0, P(T_a<\infty)=1$,

$$f_{T_a}(t)=\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{a^2}{2t})1_{\{t>0\}},$$

从而$E(T_a)=\infty$.

证明：(1) 对任意$a,y,t\geq 0$,

$$P(M_t \geq a, B_t \leq a-y) = P(\widehat{M}_t \geq a, \widehat{B}_t \geq a+y)$$

$$= P(\widehat{B}_t \geq a+y) = P(B_t \geq a+y);$$

(2) 对$a>0, P(M_t \geq a)$

$$= P(M_t \geq a, B_t > a) + P(M_t \geq a, B_t \leq a) = 2P(B_t \geq a),$$

(3) 对$a>0$和$t>0$,

$$F_{T_a}(t)=P(T_a\le t)=P(M_t\ge a)=2(1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})).$$

$$\therefore\ f_{T_a}(t)=F'_{T_a}(t)=2\phi(\frac{a}{\sqrt{t}})\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{t^3}}=\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{a^2}{2t})$$

$$E(T_a)=\int_0^\infty\frac{a}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{a^2}{2t})dt=\infty$$

例：设$\{B(t); t \geq 0\}$是标准布朗运动，令

$X(t)=\left|\min\limits_{0\le s\le t} B(s)\right|$，求 $X(t)$的分布函数。

解：$X(t)=\left|\min\limits_{0\le s\le t} B(s)\right| = -\min\limits_{0\le s\le t} B(s) = \max\limits_{0\le s\le t} B_1(s)$

这里$B_1(s)=-B(s)$. 因为$\{-B(s); s\geq 0\}$也是布朗运动，

当$y>0$时，$P\{X(t)\le y\}=P\{\max\limits_{0\le s\le t} B_1(s)\le y\}$

$$=1-P\{\max_{0\le s\le t} B_1(s)>y\}=1-2P(B_1(t)>y)$$

$$=1-2[1-\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)]=2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)-1.$$

$$\therefore F_{X(t)}(y)=\begin{cases} 2\Phi\left(\dfrac{y}{\sqrt{t}}\right)-1, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

例：以$X(t)$表示t时刻的股票价格（单位：元）．设$X(t)=2^{B(t)}$，其中$\{B(t);t\ge 0\}$是标准布朗运动．求$[0,4]$内股票价格不曾达到8元的概率？

解：$P\{\max\limits_{t\le 4} X(t)<8\}=P\{\max\limits_{t\le 4} B(t)<3\}$

$$=1-2P(B_4\ge 3)=1-2(1-\Phi(\frac{3}{2}))$$

$$=1-2(1-0.9332)=0.8664$$

4. Ito积分

1. Riemann-Stieltjes 积分

首先，回忆如何定义

$$\int_a^b f(x)dx$$

(1) 分割

在$[a,b]$上插入$n-1$个分点：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

(2) 取点

在每个$[x_{i-1},x_i]$任取一点ξ_i

(3) 作和(Riemann 和)

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

(4) 求极限

如果存在一个S，使得对任意划分，任意取点，

$$\lim_{\max_i(x_i - x_{i-1}) \to 0} S_n = S$$

那么称S为函数f在$[a, b]$上的Riemann积分，记作

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

- 什么时候f在$[a,b]$上Riemann 可积呢？

当f是连续或者逐段连续时，f在$[a,b]$上Riemann 可积。

- Riemann 积分的性质

(a) 线性性质

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

(b) 可加性

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx, \quad a \leq b \leq c$$

- Newton-Lebinitz 积分公式

假设F是f的原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

例.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_0^1 = \frac{1}{3}$$

- 分部积分公式

假设u和v具有导函数，那么

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

2. Riemann-Stieltjes 积分

回忆f关于$G(x)$的积分

$$\int_a^b f(x)dG(x)$$

(1) 分割

在$[a,b]$上插入$n-1$个分点：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

(2) 取点

在每个$[x_{i-1},x_i]$任取一点ξ_i

(3) 作和(Riemann-Stieltjes 和)

$$S_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(G(x_i)-G(x_{i-1}))$$

(4) 求极限

如果存在一个S，使得对任意划分，任意取点，

$$\lim_{\max_i (x_i - x_{i-1}) \to 0} S_n = S$$

那么称S为函数f在$[a, b]$上的Riemann-Stieltjes 积分，记作

$$\int_a^b f(x) dG(x) = S$$

- 什么条件下$\int_a^b f(x) dG(x)$存在呢？

- 有界变差函数

假设G是$[a,b]$上的实值函数。对$[a,b]$进行分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

如果

$$\sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} |G(x_i) - G(x_{i-1})| < \infty$$

那么称G在$[a,b]$上具有有界变差。

假设G是$[0,\infty)$上的实值函数。如果

$$\sup_{t>0} \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} |G(x_i) - G(x_{i-1})| < \infty$$

其中Δ是$[0,t]$上的分割，

那么称G在$[0,\infty)$上具有有界变差。

- 有界变差函数的性质

(1) 任何有界变差函数都可以写成两个单调增函数的差;

(2) 任何有界变差函数都几乎处处可微;

(3) $[a,b]$上具有有界导函数的函数是有界变差函数;

(4) $[a,b]$上的单调函数是有界变差函数

- 假设f是$[a,b]$上的连续函数，G是$[a,b]$上的有界变差函数，那么

$$\int_a^b f(x)dG(x) \quad \text{存在}$$

性质： 对于布朗运动$\{B(t); t \geq 0\}$.

1.几乎所有轨道连续；

2.几乎所有轨道在任何区间上不单调；

3.几乎所有轨道在任何点不可导；

4.几乎所有轨道在任何区间上都不是有界变差.

证明: 4.令 $V_n=\sum_{i=0}^{2^n-1}\left|B\left(\frac{(i+1)t}{2^n}\right)-B\left(\frac{it}{2^n}\right)\right|$,则 V_n 单调递增.

若 $X\sim N(0,1)$,则 $E(|X|)=\sqrt{2/\pi}, E(X^4)=3, D(X^2)=2$

$$\therefore E(V_n)=2^n\sqrt{\frac{t}{2^n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sqrt{\frac{2^{n+1}t}{\pi}}\to\infty$$

$$D(V_n)=2^n\times\frac{t}{2^n}\times\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)t$$

$$\therefore P(V_n<EV_n/2)\le P(|V_n-EV_n|\ge EV_n/2)$$

$$\le 4D(V_n)/(EV_n)^2\to 0$$

$\therefore V_n\xrightarrow{P}\infty$, 又 V_n 单调递增, $\therefore V_n\to\infty\ \ a.s.$

定理： 对任何$t>0$,对$[0,t]$的任何划分列$\{t_i^n\}_{i=0}^n$,

当$\delta_n=\max\limits_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\to 0$时，

$$M_n=\sum_{i=1}^n[B(t_i^n)-B(t_{i-1}^n)]^2$$依均方收敛到t.

证明： 对任何$t>0$，对$[0,t]$的任何划分列$\{t_i^n\}_{i=0}^n$，

令$\delta_n=\max\limits_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)$.

$$E(M_n)=\sum_{i=1}^n E[B(t_i^n)-B(t_{i-1}^n)]^2=\sum_{i=1}^n (t_i^n-t_{i-1}^n)=t$$

$$D(M_n)=\sum_{i=1}^n D[B(t_i^n)-B(t_{i-1}^n)]^2=\sum_{i=1}^n 2(t_i^n-t_{i-1}^n)^2$$

$$\le\sum_{i=1}^n 2\delta_n(t_i^n-t_{i-1}^n)=2\delta_n t$$

$\therefore$当$\delta_n\to 0$时，$E(M_n-t)^2=D(M_n)\to 0$,

即$M_n\xrightarrow{L^2}t$

问题：怎么定义$\int_0^T X(t)dB(t)$?

这里$\{X(t)\}$是一个随机过程.

比如怎么定义$\int_0^T B(t)dB(t)$?

思路：1. 划分：对$[0,T]$做划分列$\{t_i^n\}_{i=0}^n$，使得

$$\delta_n = \max_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0;$$

2. 取点：在$[t_i^n, t_{i+1}^n]$取点s_i^n;

3. 求和：$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} B(s_i^n)[B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]$;

4. 取极限：S_n的极限就是$\int_0^T B(t)dB(t)$.

取s_i^n为$[t_i^n, t_{i+1}^n]$的左端点t_i^n,

$$\text{则} S_n = \sum_{i=0}^{n-1} B(t_i^n)[B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B(t_{i+1}^n) + B(t_i^n)}{2}[B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)}{2}[B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]$$

$$= \frac{1}{2} B^2(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]^2$$

$$\xrightarrow{L^2} \frac{1}{2} B^2(T) - \frac{1}{2} T$$

取s_i^n为$[t_i^n, t_{i+1}^n]$的右端点t_{i+1}^n，

$$\text{则} S_n = \sum_{i=0}^{n-1} B(t_{i+1}^n)[B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B(t_{i+1}^n) + B(t_i^n)}{2}[B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)}{2}[B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]$$

$$= \frac{1}{2}B^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]^2$$

$$\xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}B^2(T) + \frac{1}{2}T$$

极限依赖于点的选取！！！（$\because$ 不是有界变差）

取左端点------Ito积分 ----记为 $\int_0^T B(t)dB(t)$

取中点------Stratonovich积分 ---- $\int_0^T B(t)\circ dB(t)$

假设f是$[a,b]$的连续函数且是有界变差函数. 设

$$a = x_0^n < x_1^n < \cdots < x_n^n = b$$

是$[a,b]$ 的划分, 且当$n \to \infty$时,

$$\delta_n = \max_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1}^n - x_i^n) \to 0.$$

证明:

1.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)]^2 = 0.$$

2. 如果g是$[a,b]$上函数且

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}[g(x_{i+1}^{n})-g(x_i^{n})]^2<\infty.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1}^{n})-f(x_i^{n})][g(x_{i+1}^{n})-g(x_i^{n})]=0.$$

证：f 在 $[a,b]$ 一致连续 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{0\le i\le n-1} |f(x_{i+1}^n)-f(x_i^n)|=0$

1. $$\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_{i+1}^n)-f(x_i^n)\right)^2 \le \max_{0\le i\le n-1}|f(x_{i+1}^n)-f(x_i^n)|\cdot\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1}^n)-f(x_i^n)|$$

$$\le \max_{0\le i\le n-1}|f(x_{i+1}^n)-f(x_i^n)|\cdot K \to 0 \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时}$$

这里 $K=\bigvee_a^b f$ 是 f 在 $[a,b]$ 的全变差

2. 由Cauchy不等式

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_{i+1}^n)-f(x_i^n)\right)\left(g(x_{i+1}^n)-g(x_i^n)\right)\right|$$

$$\leq\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_{i+1}^n)-f(x_i^n)\right)^2}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\left(g(x_{i+1}^n)-g(x_i^n)\right)^2}$$

$\longrightarrow 0$ 当 $n\to\infty$ 时.

- Ito 积分

假设$\mathbf{B}=(B_t, t\geq 0)$是标准Brown运动，$f(t), t\geq 0$是一个关于$\mathbf{B}$适应的随机过程，即$f(t)$仅依赖于$\{B_s, 0\leq s\leq t\}$。进一步假设

$$\int_0^\infty Ef(s)^2 ds < \infty.$$

对任意$t>0$，

(1) 分割

在$[0,t]$上插入$n-1$个分点：$0=s_0<s_1<\cdots<s_n=t$，使得

$$\Delta = \max_{1\leq i\leq n} |s_i - s_{i-1}| \to 0$$

(2) 取点

选择$\xi_i = s_{i-1}$ (区间的左端点)

(3) 作和

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} f(s_{i-1})(B(s_i) - B(s_{i-1}))$$

(4) 一定存在一个随机变量X_t使得

$$E(S_n(t) - X_t)^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

定义

$$\int_0^t f(s)dB_s = X_t$$

- 称X_t是f关于**B**的Ito 积分。

- Ito 积分运算性质

(1) 数学期望

$$E\int_0^t f(s)dB_s = 0$$

(2) 方差

$$E\left(\int_0^t f(s)dB_s\right)^2 = \int_0^t Ef^2(s)ds$$

(3) 线性性质

$$\int_0^t (af(s)+bg(s))dB_s = a\int_0^t f(s)dB_s + b\int_0^t g(s)dB_s$$

(3) 可加性

$$\int_0^T f(s)dB_s = \int_0^t f(s)dB_s + \int_t^T f(s)dB_s$$

证明：$S_n(t)=\sum_{i=1}^{n} f(s_{i-1})(B(s_i)-B(s_{i-1}))$

$\because S_n(t)\xrightarrow{L^2} X_t=\int_0^t f(s)dB(s), \therefore E[S_n^2(t)]\to E(X_t^2),$

且$S_n(t)\xrightarrow{L^1} X_t, \therefore E[S_n(t)]\to E(X_t)$

(1)$\because f(s_{i-1})$与$B(s_i)-B(s_{i-1})$独立，

$$\therefore E(S_n(t))=\sum_{i=1}^{n} E(f(s_{i-1}))E(B(s_i)-B(s_{i-1}))=0$$

$\therefore E(X_t)=0.$

$$(2).E[S_n^2(t)]=E[\sum_{i=1}^{n} f(s_{i-1})(B(s_i)-B(s_{i-1}))]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n} E[f^2(s_{i-1})(B(s_i)-B(s_{i-1}))^2]$$

$$+2\sum_{1\le i<j\le n} E[f(s_{i-1})f(s_{j-1})(B(s_i)-B(s_{i-1}))(B(s_j)-B(s_{j-1}))$$

$\because f(s_{i-1})$与$B(s_i)-B(s_{i-1})$独立，且对$i<j$有

$f(s_{i-1})f(s_{j-1})(B(s_i-B(s_{i-1}))$与$(B(s_j)-B(s_{j-1}))$独立

$$\therefore E[S_n^2(t)] = \sum_{i=1}^{n} E[f^2(s_{i-1})](s_i - s_{i-1}) \rightarrow \int_0^t E[f^2(s)]ds$$

$$\therefore E[X_t^2] = \int_0^t E[f^2(s)]ds$$

例已算得 $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

确实有$E\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}[E(B_t^2) - t] = 0$

$E[(\int_0^t B_s dB_s)^2 = Var[\frac{1}{2}(B_t^2 - t)] = \frac{t^2}{2}$

又$\int_0^t E(B_s^2) ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}$

确实有$E[(\int_0^t B_s dB_s)^2] = \int_0^t E(B_s^2) ds$

上面给出了$f(t)$关于Brown运动的Ito积分定义。
除了少数过程之外，很难从定义直接计算出$\int_0^t f(s)dB_s$
需要一个基本公式帮助计算$\int_0^t f(s)dB_s$。

1维Ito公式：

(1) 设f是R上具有二阶连续导数，则

$$\boxed{f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds}$$

证明思路：

对$[0,t]$做划分列$\{t_i^n\}_{i=0}^n$，使得$\delta_n=\max\limits_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\to 0.$

$$f(B(t))-f(B(0))=\sum_{i=0}^{n-1}[f(B(t_{i+1}^n))-f(B(t_i^n))]=\mathbf{I}+\mathbf{II}$$

$$\mathbf{I}=\sum_{i=0}^{n-1}f'(B(t_i))(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)),$$

$$\mathbf{II}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f''(B(\theta_i^n))(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2,\theta_i^n\in(t_i^n,t_{i+1}^n)$$

当$n\to\infty$时，$\mathbf{I}\to\int_0^t f'(B(s))dB(s)$

$$\mathbf{II}\to\frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds$$

定理：如果g是连续有界函数且$\{t_i^n\}_{i=0}^n$是$[0,t]$划分列使得$\delta_n=\max\limits_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)\to 0$. 则对任何$\theta_i^n\in(t_i^n,t_{i+1}^n)$，当$n\to\infty$时,

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(B(\theta_i^n)\right)\left(B\left(t_{i+1}^n\right)-B\left(t_i^n\right)\right)^2 \xrightarrow{P} \int_0^t g(B(s))ds.$$

证明：先证明$\theta_i^n = t_i^n$ 时结果成立. 由于$g(B(t))$是t的连续函数, 所以

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(B\left(t_i^n\right)\right)\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) \to \int_0^t g(B(s))\,ds \text{ a.s.}$$

因此只需说明

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(B\left(t_i^n\right)\right)\left(B\left(t_{i+1}^n\right) - B\left(t_i^n\right)\right)^2 - \sum_{i=0}^{n-1} g\left(B\left(t_i^n\right)\right)\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) \xrightarrow{L^2} 0.$$

记$\Delta B_i = B\left(t_{i+1}^n\right) - B\left(t_i^n\right)$, $\Delta t_i = t_{i+1}^n - t_i^n$. 设$|g| \le C$. 得:

$$
\begin{aligned}
& E\left(\sum_{i=0}^{n-1} g\left(B\left(t_i^n\right)\right)\left(\left(\Delta B_i\right)^2-\Delta t_i\right)\right)^2 \\
= & \sum_{i=0}^{n-1} E g^2\left(B\left(t_i^n\right)\right) E\left(\left(\left(\Delta B_i\right)^2-\Delta t_i\right)^2\right) \\
= & 2 C^2 \sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta t_i\right)^2 \leq 2 C^2 \delta_n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i \rightarrow 0 .
\end{aligned}
$$

现在假设$\theta_i^n \in (t_i^n, t_{i+1}^n)$, 则

$$
\begin{aligned}
& |\sum_{i=0}^{n-1} (g(B((\theta_i^n))) - g(B(t_i^n)))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2| \\
\leq \quad & \max_i |(g(B((\theta_i^n))) - g(B(t_i^n)))| \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \xrightarrow{P} 0.
\end{aligned}
$$

这是因为

(1)$g(B(t))$是连续函数, 所以$\max_i |(g(B((\theta_i^n))) - g(B(t_i^n)))| \to 0$ a.s.

(2) $\sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \xrightarrow{P} t.$ $\square$

Ito 公式特别给出：

$$\int_0^t f'(B_s)dB_s = f(B_t) - f(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$$

例1.

$$\begin{aligned}\int_0^t B_s dB_s &= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\int_0^t 1ds \\ &= \frac{1}{2}(B_t^2 - t)\end{aligned}$$

例2.

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds$$

例3. $$\int_0^t \cos(B_s)dB_s = \sin(B_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_s)ds$$

例4.

$$\int_0^t e^{B_s} dB_s = e^{B_t} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s} ds$$

Lemma

II

假设$f(t,x)$是二元函数，关于t和x的二阶偏导数存在并且连续，那么

$$\begin{aligned} f(t,B_t) &= f(0,0)+\int_0^t f_2(s,B_s)dB_s \\ &\quad +\int_0^t f_1(s,B_s)ds+\frac{1}{2}\int_0^t f_{22}(s,B_s)ds \end{aligned}$$

其中，f_1, f_2分别表示f关于t和x的一阶偏导数；

f_{22}表示f关于x的二阶偏导数。

- Ito 过程

假设$\mathbf{B} = (B_t, t \geq 0)$是标准Brown 运动，$a(t,x)$和$b(t,x)$是两个二元函数。称满足下列方程:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s$$

的随机过程X_t为Ito 扩散过程，

称$a(t,x)$为漂移系数，$a(t,x)$为扩散系数。

通常，简记为

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

例5. 考虑下列形式的几何Brown运动 $X(t)=e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t}$,

问$\{X(t);t\geq 0\}$所满足的随机微分方程.

解：令$f(t,x)=e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma x}$，则$X(t)=f(t,B_t)$

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial t}=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma x}$$

$$f_2=\frac{\partial f}{\partial x}=\sigma e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma x}$$

$$f_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\sigma^2 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma x}$$

$$f_1(t,B_t)=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})X_t$$

$$f_2(t,B_t)=\sigma X_t$$

$$f_{22}(t,B_t)=\sigma^2 X_t$$

由Ito公式，

$$dX_t=f_1(t,B_t)dt+f_2(t,B_t)dB_t+\frac{1}{2}f_{22}(t,B_t)dt$$

$$=\mu X_t dt+\sigma X_t dB_t$$

所以$\{X(t);t\geq 0\}$满足随机微分方程为：

$$dX_t=\mu X_t dt+\sigma X_t dB_t$$

Lemma

III

假设$X_t, t \geq 0$ 是Ito扩散过程，具有漂移系数$a(t,x)$，扩散系数$b(t,x)$；$f(t,x)$是二元函数，关于t和x的二阶偏导数存在并且连续，那么

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f_2(s, X_s) dX_s \\ &\quad + \int_0^t f_1(s, X_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t b^2(s, X_s) f_{22}(s, X_s) ds \end{aligned}$$