ODE笔记8：周期系数LODEs、n阶LODE、特征方程

周期系数LODEs（Floqnet理论）：

$\vec{X}' = A(t)\vec{X}, A(t+T) = A(t)$. 若 $\Phi(t)$ 为基解矩阵，则：
$\Phi'(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) \implies \Phi(t+T)$ 也是基解矩阵。故

存在 $\vec{c}$ 可逆，$\Phi(t+T) = \Phi(t)\vec{c} = \Phi(t)e^{RT} \implies \Phi(t+T)e^{-R(t+T)} = \Phi(t)e^{-RT} \triangleq P(t)$

那么 $P(t)$ 为周期函数，可逆，$\Phi(t) = P(t)e^{Rt}$

令

$\vec{X}(t) = P(t)\vec{Y}(t), \vec{Y}' = R\vec{Y}, |c| \neq 0, c = PJP^{-1}, J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}, J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i E + D$

$\ln(J_i) = \ln(\lambda_i E) + \ln(E + \frac{D}{\lambda_i}) = (\ln\lambda_i)E + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}(\frac{D}{\lambda_i})^m = M_i$，$\ln J = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_s \end{pmatrix}$

结果不唯一：$\ln c = P \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_s \end{pmatrix} P^{-1} + 2\pi ki \cdot E$

n阶LODE：

$$\frac{d^n X(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}X(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)X(t) = f(t)$$

令 $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \quad\vdots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases}$，$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则有 $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}\vec{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$

定理2.1：

$f(t), a_i(t) \in C(I), i = 1, \ldots, n$，则：

$$\begin{cases} Lx = f(t) \\ X(t_0) = x_{01}, X'(t_0) = x_{02}, \ldots, X^{(n-1)}(t_0) = x_{0n} \end{cases}$$

其中 $t_0 \in I$，在 I 上 $\exists!$ 解 $X(t)$.

齐次：$Lx = 0 \iff \vec{X}' = A\vec{X}$. 基本解组：$\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n$

定理2.2：

$Lx = 0$ 所有解构成的集合为 n 维线性空间，设 $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ 为 n 个线性无关解。则通解：

$$x(t) = c_1\phi_1(t) + \cdots + c_n\phi_n(t).$$

其中 $c_1,\ldots,c_n$ 为任意常数，称 $\phi_1(t),\ldots,\phi_n(t),t\in I$ 为**基本解组**。

$$\vec{X}_1=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_1'\\ \vdots\\ \phi_1^{(n-1)}\end{pmatrix},\cdots,\vec{X}_n=\begin{pmatrix}\phi_n\\ \phi_n'\\ \vdots\\ \phi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

定理2.3：

若 $Lx=0$ 有基本解组 $\phi_1(t),\ldots,\phi_n(t),t\in I$，则 $Lx=f(t)$ 的通解：

$$x(t)=c_1\phi_1(t)+\cdots+c_n\phi_n(t)+\phi^*(t)$$

其中 $c_1,\ldots,c_n$ 为任意常数。

朗斯基行列式：

$$W(t)=\begin{vmatrix}\phi_1 & \cdots & \phi_n\\ \phi_1' & \cdots & \phi_n'\\ \vdots & & \vdots\\ \phi_1^{(n-1)} & \cdots & \phi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

定理2.4：

若 $\phi_1(t),\ldots,\phi_n(t)$ 为 $Lx=0$ 在 I 上解，$\phi_1(t),\ldots,\phi_n(t)$ 在 I 上：

线性相关 $\quad\Longleftrightarrow\quad W(t)=0,\forall\, t\in I\quad\Longleftrightarrow\quad \exists\, t_0,st.\ W(t_0)=0$

线性无关 $\quad\Longleftrightarrow\quad W(t)\neq 0,\forall\, t\in I\quad\Longleftrightarrow\quad W(t_0)\neq 0,\forall\, t_0\in I$

特征方程：$y''+py'+qy=0\quad\Longleftrightarrow\quad\lambda^2+p\lambda+q=0$

解为 λ_1,λ_2，有以下结论：

$(1)\lambda_1\neq\lambda_2$，通解：$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$

$(2)\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，通解：$\quad y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$

$(3)\lambda=\alpha\pm i\beta,\alpha,\beta\in R,\beta\neq 0$，通解：$y=e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$

通法：$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$ 对应的特征方程：
$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$

特征值：$\lambda_1,\ldots\lambda_s,\alpha_1\pm i\beta_1,\ldots\alpha_l\pm i\beta_l$ 重数：$n_1,\ldots,n_s,m_1,\ldots,m_l$

那么该方程的 n 个线性无关解：

$$\underbrace{e^{\lambda_1t},te^{\lambda_1t},\cdots,t^{n_1-1}e^{\lambda_1t}}_{\text{对应特征值}\lambda_1},\cdots,\underbrace{e^{\alpha_1t}\cos\beta_1t,e^{\alpha_1t}\sin\beta_1t,\ldots,t^{m_1-1}e^{\alpha_1t}\cos\beta_1t,t^{m_1-1}e^{\alpha_1t}\sin\beta_1t,}_{\text{对应特征值}\alpha_1\pm i\beta_1}\cdots$$

考虑 $y''+py'+qy=f(t)\quad(*)$ 形式的问题：

解：齐次方程通解：$y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$

令 $y(t)=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)$.

$$\begin{cases}y'=\underbrace{u_1'y_1+u_2'y_2}_{=0}+u_1y_1'+u_2y_2'=u_1y_1'+u_2y_2'\\ y''=u_1'y_1'+u_2'y_2'+u_1y_1''+u_2y_2''\end{cases}\qquad\text{代入 }(*)\text{ 中}$$

$$\Longrightarrow \quad u_1'y_1' + u_2'y_2' + \underbrace{u_1y_1'' + pu_1y_1' + qu_1y_1}_{=0} + \underbrace{u_2y_2'' + pu_2y_2' + qu_2y_2}_{=0} = f$$

设 $y = u_1y_1 + u_2y_2$ 为 $(*)$ 解，其中 u_1', u_2' 使得：$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$

非齐次：$\vec{X} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \vec{X}' = A\vec{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$

$\vec{X}(t) = \Phi(t)\vec{c} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}Bds.$ 将 $\vec{X}(t) = \Phi(t)\vec{U}(t)$ 代入LODE

$$\Longrightarrow \quad \cancel{\Phi'U} + \Phi U' = \cancel{A\Phi U} + B \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

推广到 n 阶：$Ly = f(t).$ $\quad Ly = 0$ 通解：$y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$

设 $Ly = f(t)$ 解：$y = u_1y_1 + \cdots + u_ny_n.$ 其中 $u_1', \cdots, u_n'$ 满足：$\Phi(t)\begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$

接下来介绍几种特殊的题型：

(1) $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t} = (a_mt^m + \cdots + a_0)e^{\alpha t}$

猜测：$y = Q(t)e^{\alpha t} = \left(b_kt^k + \cdots + b_0\right)e^{\alpha t}.$ 代入：
$e^{\alpha t}\left(Q'' + 2\alpha Q' + \alpha^2Q + PQ' + P\alpha Q + qQ\right) = e^{\alpha t}\cdot P_m(t)$

$$\text{左边}\begin{cases} k\text{次多项式，当}\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0 \quad (\alpha\text{不是特征值}) \\ k-1\text{次多项式，当}\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \begin{cases} 1.\ \alpha\text{是单根} \\ 2.\ \alpha\text{是二重根} \end{cases} \quad (\alpha = -\frac{p}{2}) \end{cases}$$

当 α 非特征值：设 $y^*(t) = Q_m(t)e^{\alpha t}$

α 单根：$y^*(t) = tQ_m(t)e^{\alpha t} \quad \Longrightarrow$ 通解：$y(t) = c_1y_1 + c_2e^{\alpha t} + tQ_m(t)e^{\alpha t}$

α 二重根：$y^*(t) = t^2Q_m(t)e^{\alpha t} \quad \Longrightarrow$ 通解：$y(t) = c_1e^{\alpha t} + c_2te^{\alpha t} + t^2Q_m(t)e^{\alpha t}$

注：对于 $Lx = P_m(t)e^{\alpha t}, \alpha$ 为 k 重根。设 $y^*(t) = t^kQ_m(t)e^{\alpha t}$, $Q_m(t) = b_mt^m + \ldots + b_0, b_i$ 待定，代入方程求出 $b_0, \ldots, b_m$.

(2) $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t = \mathrm{Re}(P_m(t)e^{(\alpha+i\beta)t})$

解：$Ly = P_m(t)e^{(\alpha+i\beta)t}, \alpha + i\beta$ 为 k 重根。 $y^* = t^kQ_m(t)e^{(\alpha+i\beta)t},\ Ly^* = P_m(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$

$Ly = f(t)$ 特解：$y^* = Re\left(t^kQ_m(t)e^{(\alpha+i)}\right) = t^ke^{\alpha t}\left(\cos\beta tR_m(t) + \sin\beta tQ_m(t)\right).$

$\Longrightarrow L^*\,\mathrm{Re}\,y^* = \mathrm{Re}\,Ly^* = f(t)$

定理5.3：

$Ly = P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ 或 $P_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$ 或 $e^{\alpha t}(P_m(t)\cos\beta t + \tilde{P}_m(t)\sin\beta t)$. 若 $\alpha + i\beta$ 为重根，则LODE可取特解：

$$y^*(t) = t^ke^{\alpha t}\left(\left(b_m't^m + \cdots + b_0'\right)\cos\beta t + \left(b_m''t^m + b_0''\right)\sin\beta t\right)$$

其中系数 $b_0', \cdots, b_m', b_0'', \cdots, b_m''$ 待定。（$2m + 2$ 个等式）

例1： $y''-3y'+2y=3e^t-10\cos 3t$

解：特征方程：$\lambda^2-3\lambda+2=0, \lambda_1=1, \lambda_2=2$，故齐次方程通解为：$y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}$

（1）$y''-3y'+2y=3e^t$ $\quad \because 1$ 为单根，设 $y_1^*=tAe^t$，代入计算得 $y_1^*=-3te^{3t}$

（2）$y''-3y'+2y=-10\cos 3t$ $\quad \because 3i$ 不是特征值，设 $y_2^*=A\cos 3t+B\sin 3t$，代入计算得 $y_2^*=\frac{7}{13}\cos 3t+\frac{9}{13}\sin 3t$

$\Longrightarrow \quad y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}-3te^{3t}+\frac{7}{13}\cos 3t+\frac{9}{13}\sin 3t$

例2： $\begin{cases} 2x'+y'+y-t=0 & (1) \\ x'+y'-x-y-2t=0 & (2) \end{cases}$

解：$(1)-(2): x'+x+2y+t=0 \quad \Longrightarrow \quad y=-\frac{1}{2}(x'+x+t) \quad (3)$

(3) 代入 (1) 中：$2x'-\frac{1}{2}(x''+x'+1)-\frac{1}{2}(x'+x+t)-t=0 \quad \Longrightarrow \quad x''-2x'+x=(-1-3t)e^{0t}$

特征方程：$\lambda^2-2\lambda+1=0, \lambda_1=\lambda_2=1$，齐次方程通解：$y(t)=c_1e^t+c_2te^t$

设 $x^*=At+B$，代入得 $x^*=-3t-7 \quad \Longrightarrow \quad$ 通解为 $x=c_1e^t+c_2e^{2t}-3t-7$

代入 (3)，得：$y=e^t(-c_1-\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{2}c_2t)+5+t$