

# 22-2023春夏ode回忆卷

无日或忘

一、请计算所有解：(30')

1.  $y' = \cos^2(x - y - 2023)$ ;
2.  $(xy + \sqrt{1 - x^2y^2})dx + x^2dy = 0$ ;
3. /
4. Ricatti方程 (未给出非平凡解)
5. 欧拉方程, 有非齐次项。

二、(32')

1. 求出下列方程的特解:

$$\begin{cases} x_1'' + 3x_1' + x_1 + x_2 - x_2' = 0 \\ x_1' + x_1 - x_2 - x_2' = 0 \\ x_1''(0) = a, x_1'(0) = b, x_2'(0) = c \end{cases}$$

(这里面abc忘记了)

2. 求解  $\frac{dX}{dt} = AX + B$ , 其中  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$ ,  $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ;
3.  $\frac{dy}{dx} = \sin \frac{y}{x}$ ,  $\phi(x; x_0, y_0)$  是对应的解, 当  $x_0 = 1, y_0 = 1$  时, 求  $\frac{\partial \phi}{\partial x_0}, \frac{\partial \phi}{\partial y_0}$  的表达式;
4. 边值问题  $y'' + \lambda y = 0$ , (给了一些初始条件, 类似于  $y'(0) = y'(1)$  这样的), 求其特征值与特征函数。

三、设  $\frac{dy}{dx} = 2x + \sqrt{\max(0, y)}$  (具体是不是这样忘了), 则: (10')

- (1) 写出对应的积分方程;
- (2) 写出Picard迭代序列;
- (3) 判断上述微分方程解的存在唯一性: 如果不唯一, 说明其不满足Picard存在唯一性定理的哪一部分;
- (4) (好像是取相反数, 再判断它的存在唯一性? 欢迎补充)。

四、 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(xy)}{1+x^2}$ , 则 (8'):

- (1) 证明其解的存在区间为  $(-\infty, +\infty)$ ;
- (2) 证明其解在存在区间内有界。

五、判断以下系统的Lyapunov稳定性:

- (1)  $\begin{cases} x' = -y^3 - x^7 \\ y' = x^3 - y^7 \end{cases}$ ;
- (2)  $\begin{cases} x' = \sin x + y - z \\ y' = -x + \ln(x + z + 1) \\ z' = -13x - y - e^{5(y+z)} + 5 \end{cases}$  (可能数据有误)

六、对于  $\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 - \delta y \end{cases}$  系统

- (1) 求上述系统的奇点;
- (2) 将对应奇点的方程进行线性近似, 判断奇点类型、对应系统的Lyapunov稳定性并画出对应相图。

