浙江大学 20 19 — 20 20 秋冬学期

《常微分方程》课程期末考试试卷

课程号: 061Q0056 , 开课学院: 数学科学学院

考试试卷: ✓A 卷、 B 卷 (请在选定项上打✓)

考试形式: ✓闭、开卷 (请在选定项上打✓), 允许带 无 进场

考试日期: 2020 年 01 月 09 日, 考试时间: 120 分钟

诚信考试, 沉着应考, 杜绝违纪

考生姓名: ________________ 学号: ________________ 所属院系: ________________

由 CC98 @*Serapay* 回忆整理, 请勿用于商业用途

一、 (32分) 求下列方程 (组) 的特解或通解

(1) $(y-2xy^2\ln x)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$;

(2) $x^2y''-x(2-x)y'+(2-x)y=x^4$;

(3) $x^2y''+xy'+y=6\ln x(x>0)$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}(0)=(0,1,0)^T$.

二、 (15分) 设方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+(1+y)^2, y(0)=0$ 的右行解的最大存在区间是 $[0,T)$. 利用方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+y)^2$ 的解是上述方程的一个右行下解这一性质来确定 T 的范围.

三、 (15分) 设连续函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内关于 y 单调不减, 证明初值问题 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), y(x_0)=y_0$ 的右行解唯一.

四、(18分)

(1) 判断方程组 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + x^3 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + ay + y^3 \end{cases}$ 零解的稳定性并说明理由; (**注:** 原方程记不太清了, 但是线性系统的系数应该没错)

(2) 试找出方程组 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 2y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 5y - 2x + x^3 \end{cases}$ 的所有奇点, 判断类型并画出相图的草图.

五、(15分) 若已知方程 $y''' + a_1(t)y'' + a_2(t)y' = q(t)$ 的一个解, 能否求出该方程的所有解? 给出你的结论并证明之.

六、(15分) 直接证明初值问题 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(xy), x(0) = 0$ 解的连续依赖性.

附加题 (10分): 给定线性非齐次方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$, 其中 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的高阶无穷小, 若已知其线性系统 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的零解是渐近稳定的, 求证非齐次方程的零解是稳定的.