第十六章　多值函数 2

16.1　多值函数沿曲线的连续分支

多值函数在一般区域上未必存在连续单值分支。但限制在曲线上，多值函数通常可以取到 (关于曲线参数) 连续的单值支。本节将证明这一事实，并由此给出支点的定义。

命题 16.1. 假设 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ 是一条连续曲线, c 为不在曲线 γ 上的一点，取定 $\gamma(a) - c$ 的一个辐角 θ_0。

- 存在唯一的连续函数 $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$, 满足 $\theta(a) = \theta_0$, 且
$$\theta(t) \in \mathrm{Arg}(\gamma(t) - c),\ \ t \in [a,b].$$
- 存在唯一的连续函数 $L : [a,b] \to \mathbb{R}$, 满足 $L(a) = \log|\gamma(a) - c| + i\theta_0$, 并且
$$L(t) \in \mathrm{Log}(\gamma(t) - c),\ \ t \in [a,b].$$

命题表明, 曲线关于曲线外一点总存在连续变化的辐角函数与对数函数。如果 $c = 0$, 称命题中的连续函数 (如 θ, L) 为多值函数 (如 $\mathrm{Arg}, \mathrm{Log}$) 的沿曲线 γ 的连续分支。

注意：这里的连续性指的是关于曲线参数的连续性，而非关于曲线作为集合的连续性。为区分，考虑曲线 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$，定义为 $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$。显然 γ 作为集合是单位圆周 $\partial\mathbb{D}$。关于参数连续的辐角函数可取为 $\theta(t) = 2\pi t$；但不存在连续的辐角函数 $\alpha : \gamma \to \mathbb{R}$，满足对任意 $z \in \gamma$, 成立 $\alpha(z) \in \mathrm{Arg}(z)$。

证明： 通过用 $\gamma - c$ 取代 γ, 不妨假设 $c = 0$。

记 $\rho = d(\gamma, 0) = \min_{z\in\gamma} |z| > 0$。由 γ 的连续性知, 它在 $[a, b]$ 上一致连续, 即存在 $\delta > 0$, 满足

$$\forall t_1, t_2 \in [a, b], |t_1 - t_2| \leq \delta \Longrightarrow |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq \rho/2.$$

取 $[a, b]$ 的一组分点：$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$, 使得 $|t_{k+1} - t_k| \leq \delta$. 记 $z_k = \gamma(t_k)$, 则 $|\gamma(t) - z_k| \leq \rho/2 < \rho$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$, 即 $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset D(z_k, \rho)$。

由 ρ 的定义知，$0 \notin D(z_0, \rho)$。因此在 $D(z_0, \rho)$ 上存在连续的辐角函数, 记为 $\arg_0 : D(z_k, \rho) \to \mathbb{R}$, 满足 $\arg_0(z_0) = \theta_0$。定义

$$\theta_0(t) = (\arg_0 \circ \gamma)(t) = \arg_0(\gamma(t)),\ t \in [t_0, t_1].$$

归纳地, 假设已定义连续函数 $\theta_k : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}, 0 \leq k < n$, 满足 $\theta_k(t_k) = \theta_{k-1}(t_k)$，下面构造 $\theta_n : [t_n, t_{n+1}] \to \mathbb{R}$。

由 $0 \notin D(z_n, \rho)$ 知, 在 $D(z_n, \rho)$ 上存在连续的辐角函数 $\arg_n : D(z_n, \rho) \to \mathbb{R}$, 满足 $\arg_n(z_n) = \theta_{n-1}(t_n)$。定义

$$\theta_n(t) = (\arg_n \circ \gamma)(t) = \arg_n(\gamma(t)),\ t \in [t_n, t_{n+1}].$$

有限步后, 可以构造出 θ_{m-1}, 这样就得到连续的辐角函数 $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$, 满足 $\theta(t) = \theta_k(t), t \in [t_k, t_{k+1}], 0 \leq k < m$。

下说明唯一性。如果 $\tilde{\theta}$ 也满足条件, 则 $\theta - \tilde{\theta}$ 是连续函数。由 $\theta(t), \tilde{\theta}(t) \in \mathrm{Arg}(\gamma(t) - c)$ 可知, $\theta(t) - \tilde{\theta}(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$, 这说明 $\theta - \tilde{\theta}$ 取值离散，因此必为常值函数。由 $\theta(a) = \tilde{\theta}(a) = \theta_0$ 可知, $\theta \equiv \tilde{\theta}$。

定义 $L(t) = \log|\gamma(t) - c| + i\theta(t), t \in [a, b]$, 得 L 的存在性。唯一性同上。

注: 如果 $0 \in \gamma$, 命题16.1成立与否变得微妙。

有例子使命题不成立。比如 $\gamma(t) = t,\ t \in [-1, 1]$, 为包含原点的闭线段, 在原点左右两侧, 辐角差别至少为 π。因此不可能存在连续的辐角函数。

亦有例子使命题成立。如 $\gamma(t) = t^3 + it^2, t \in [-1, 1]$。此时适当选取辐角并定义 $\theta(0)$，可取到沿曲线连续变化的辐角函数, 如 $\theta : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ 满足 $\theta(-1) = 3\pi/4, \theta(0) = \pi/2, \theta(1) = \pi/4$。

命题说明: 给定连续曲线 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ 和曲线外一点 c，可将 $\gamma(t) - c$ 参数化为

$$\gamma(t) - c = \rho(t)e^{i\theta(t)},\ t \in [a, b],$$

这里, θ 是一个连续的辐角函数。连续的辐角函数对计算一些积分很有帮助，我们将在后面计算绕数时看到这一点。

16.2 多值函数的支点

下面引入多值函数的支点 (branched point)。

定义 16.1. 称 $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是多值函数的一个支点，如果多值函数沿着在 z_0 的充分小邻域中围绕 z_0 的简单闭曲线 γ 的连续分支，在曲线的起点和终点取值不同。

定义可以这样理解：假设 M 是多值函数，$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ 是 z_0 的充分小邻中的一条围绕 z_0 的简单闭曲线 (通常取为小圆周)，M 沿着 γ 可以取到连续分支 $m : [a, b] \in \mathbb{C}$, 它满足

$$m(t) \in M(\gamma(t)), \forall t \in [a, b].$$

如果 $m(a) \neq m(b)$, 则称 z_0 是多值函数的支点。

注意到 Arg 可看作 Log 的虚部, 因此对数函数和辐角函数有相同的支点。

例题 16.1. 求多值函数 $\mathrm{Log}(z)$, $\mathrm{Log}\big(z/(z-2)\big)$ 的支点.

解： 对 $\mathrm{Log}(z)$ 而言，我们说明 0 和 ∞ 是支点。

z 沿着围绕 0 的圆周逆时针走一圈时，连续变化的辐角函数取值改变 2π, 因此对数函数的连续分支取值改变 $2\pi i$. 同样，z 沿着围绕 ∞ 的圆周 $\{|z| = R\}$ 逆时针走一圈，辐角的连续分支取值增加 2π, 对数函数的连续分支取值增加 $2\pi i$. 如果 z 沿着围绕 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的小圆周逆时针走一圈，辐角的连续分支取值不变，因此对数函数的连续分支取值不变, 说明 z_0 不是支点。

对 $\mathrm{Log}\big(z/(z-2)\big)$ 而言，0 和 2 是支点，但 ∞ 不是支点。事实上，做变换 $w = z/(z-2)$。当 z 沿着围绕 0 的简单闭曲线走一圈时, w 沿着围绕 0 的简单闭曲线走一圈, $\mathrm{Log}(w)$ 的连续分支取值改变 $2\pi i$, 因此 0 是支点。当 z 沿着围绕 2 的简单闭曲线走一圈时, w 沿着围绕 ∞ 的简单闭曲线走一圈，$\mathrm{Log}(w)$ 的连续分支取值改变 $2\pi i$, 因此 $z = 2$ 也是支点。当 z 沿着围绕 ∞ 的简单闭曲线走一圈时, w 沿着围绕 1 附近的简单闭曲线走一圈，$\mathrm{Log}(w)$ 的连续分支取值不变, 因此 ∞ 不是支点。类似可知，其它点也不是支点。

例题 16.2. 求多值函数

$$w = \sqrt[3]{z(z-1)(z-2)}$$

的支点。进一步，在什么样的区域上，这个多值函数有单值的全纯分支?

解：先将多值函数改写如下

$$
\begin{aligned}
w &= e^{(\mathrm{Log}(z)+\mathrm{Log}(z-1)+\mathrm{Log}(z-2))/3} \\
&= e^{\frac{1}{3}\log|z(z-1)(z-2)|+i(\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(z-1)+\mathrm{Arg}(z-2))/3} \\
&= |z(z-1)(z-2)|^{1/3}e^{i(\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(z-1)+\mathrm{Arg}(z-2))/3}
\end{aligned}
$$

由前述讨论，辐角函数 $\mathrm{Arg}(z)$ 的支点为 $0,\infty$。通过平移可知, 上面多值函数的所有可能支点为 $0,1,2,\infty$。下面分别讨论。

容易验证，z 沿着围绕 0 的小圆周逆时针走一圈时，$\mathrm{Arg}(z)$ 的连续分支取值增加 2π, $\mathrm{Arg}(z-1)$ 与 $\mathrm{Arg}(z-2)$ 的连续分支取值不变，因此, 多值函数 w 的值变为原来的 $e^{2\pi i/3}$ 倍。这说明, $z=0$ 是多值函数的支点。

同理可知 $z=1,2$ 都是多值函数的支点。

最后，令 z 沿着半径很大的圆周 $\{|z|=R\}$ 逆时针走一圈, 此时 $\mathrm{Arg}(z)$, $\mathrm{Arg}(z-1)$, $\mathrm{Arg}(z-2)$ 的沿曲线的连续分支取值都增加 2π。因此多值函数的值变为原来的 $e^{i(2\pi+2\pi+2\pi)/3}=1$ 倍，即不发生改变。这说明 ∞ 不是函数的支点。

因此, 多值函数的支点为 $0,1,2$。

显然在不包含支点 $0,1,2$ 的单连通区域（比如 $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$）上，辐角函数 $\mathrm{Arg}(z)$, $\mathrm{Arg}(z-1)$, $\mathrm{Arg}(z-2)$ 都可以取到单值的连续分支, 因此多值函数有单值全纯分支。

事实上，也可以取区域 $\Omega=\mathbb{C}\setminus[0,2]$。在此区域上，多值函数也可以取到单值全纯分支。

16.3　三角函数

为引入三角函数，先介绍 Joukowsky 变换。考虑问题

“求一个双全纯映射，将线段 $[-1,1]$ 的外部 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]$ 映为单位圆盘 $\mathbb{D}$。”

求解分为以下几步：

(1). 取双全纯映射 $f:\widehat{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]\to\widehat{\mathbb{C}}\setminus[-\infty,0]$:

$$f(z)=\frac{z+1}{z-1}.$$

(2). 取双全纯映射 $g:\widehat{\mathbb{C}}\setminus[-\infty,0]\to\mathbb{H}_r=\{\Re(z)>0\}$:

$$g(\xi)=\sqrt{\xi},\quad \text{取单值支满足}\sqrt{1}=1.$$

(3). 取双全纯映射 $h:\mathbb{H}_r\to\mathbb{D}$:

$$w=h(\zeta)=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}.$$

由此可见 $w=\psi(z):=h\circ g\circ f(z)$ 为满足要求的双全纯映射。由 $f(z)=(h^{-1}(w))^2$ 可知

$$\frac{z+1}{z-1}=\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2\Longleftrightarrow z=\frac{1}{2}\Big(w+\frac{1}{w}\Big).$$

我们称

$$J(w)=\frac{1}{2}\Big(w+\frac{1}{w}\Big)$$

为 Joukowsky 变换。它将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 双全纯映到 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]$。

$$\begin{aligned}J(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\Big(re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(r+\frac{1}{r}\Big)\cos\theta+\frac{i}{2}\Big(r-\frac{1}{r}\Big)\sin\theta\\ &= J(r)\cos\theta+J(ir)\sin\theta.\end{aligned}$$

由此可见, 它将圆周 $\{|w|=r\},r\neq 1$ 映为 uv-平面方程为

$$\frac{u^2}{J(r)^2}+\frac{v^2}{|J(ir)|^2}=1$$

的椭圆。

将三角函数

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

的自变量复化，可以得到复正余弦函数

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

基本性质如下：

- $\cos z,\sin z$ 都是整函数, 满足 $\sin^2 z+\cos^2 z=1$;
- $\cos z,\sin z$ 都是周期为 2π 的周期函数;

- $\cos z = 0 \iff z = (k+1/2)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin z = 0 \iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$。

例题 16.3. 求半带域 $B = \{z : 0 < \Re(z) < 2\pi, \Im(z) > 0\}$ 在余弦变换 $f(z) = \cos z$ 下的像.

解: 将余弦变换 $f(z) = \cos z$ 分解为如下变换的复合

$$z_1 = iz, z_2 = e^{z_1}, z_3 = J(z_2) = \frac{1}{2}\Big(z_2 + \frac{1}{z_2}\Big)$$

然后依次求出在每个变换下的像。可以验证 B 在三个变换下依次变为

$$\{z : 0 < \Im(z) < 2\pi, \Re(z) < 0\},\ \mathbb{D} \setminus [0,1),\ \mathbb{C} \setminus [-1,+\infty).$$

16.4 习题

1. (连续的辐角函数) 平面中两条曲线定义为

$$C_1 = \{\theta e^{i\theta}; \theta \geq 0\},\ C_2 = \{e^{\theta + i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}.$$

定义区域 $\Omega_1 = \mathbb{C} - C_1$, $\Omega_2 = \mathbb{C} - C_2$。记 Ω_1 中满足 $\psi_1(1) = 2\pi$ 的连续辐角函数为 ψ_1, 记 Ω_2 中满足 $\psi_2(1/2) = 2\pi$ 的连续辐角函数为 ψ_2。求 ψ_1, ψ_2 的值域。

2. (支点与单值支) 求多值函数

$$w = \sqrt[3]{z^2(z-2)}$$

的支点。在区域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0,2]$ 上，多值函数能取到单值全纯分支吗?

3. (双全纯映射) 求双全纯映射 f, 将角域 $\{z \in \mathbb{C}; 0 < \arg z < 3\pi/4\}$ 映到单位圆 $\mathbb{D}$, 满足

$$f(e^{3\pi i/8}) = 0,\ \arg f'(e^{3\pi i/8}) = 0.$$

4. ($\sqrt[n]{\cdot}$ 单值支的存在性) 假设 f 在 0 的邻域 U 内全纯, 并且 0 是 f 的 $n \geq 1$ 阶零点。证明存在 0 的邻域 $V \subset U$ 上的全纯函数 g, 满足

$$f(z) = g(z)^n,\ z \in V.$$

由此，如果两条以原点为起点的的射线 ℓ_1, ℓ_2 夹角为 $\theta \in (0, 2\pi/n)$, 求出像曲线 $f(\ell_1), f(\ell_2)$ 在 0 处的夹角。

5. (附加题，不做要求) 假设 f 在 $\Omega = \{z; \mathrm{Im}(z) > R\}$ 上全纯，满足 $f(z+1) = f(z)$, 其中 R 为一个正数. 如果 f 满足

$$\left| f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right| \leq \frac{C}{|z|^2},\ \forall z \in \Omega$$

证明 $a_1 = 0$。(注：不等式右边指数 2 可以换成 $1+\nu, \nu > 0$)