1 第九次作业

问题 1. *(a)* $\mathbb{R}^\omega$*(关于积拓扑)的连通分支和道路连通分支是什么?*

(b) 考虑具有一致拓扑的$\mathbb{R}^\omega$*,证明:*x*和*y*属于*$\mathbb{R}^\omega$*的同一连通分支当且仅当序列*

$$x-y=(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots)$$

是有界的.

(c) 赋予$\mathbb{R}^\omega$*箱拓扑. 证明:*x*和*y*属于*$\mathbb{R}^\omega$*的同一连通分支当且仅当序列*$x-y$ *"终于零"(即有限项之后为0)*

问题 2. *若对于*$x\in X$*的每一个邻域*U*,存在*X*的一个连通子空间包含于*U*,并且这个连通子空间包含着*x*的某一个邻域,则称空间*X*在*x*处弱局部连通。证明:若*X*在它的每一点处都是弱局部连通的,则*X*是局部连通的。*

问题 3. *将*y*轴上的点*$(0,1),(0,\frac{1}{2}),...,(0,\frac{1}{n}),...,(0,0)$*均与*$(1,0)$*连起来得到一把"扫帚",再将一列扫帚按照图中方式形成一个"无穷扫帚",记为*X*,赋予*X*平面的子拓扑。证明:*X*在点*p*不是局部连通的,但在点*p*是弱局部连通的。*

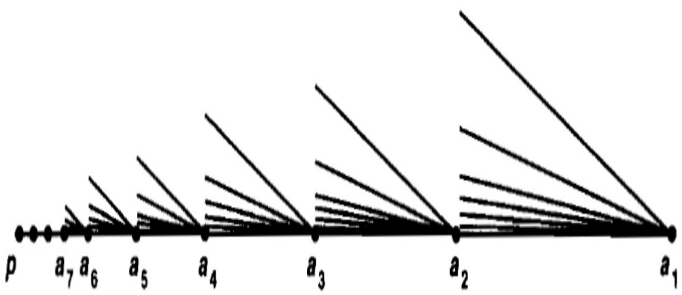

图 1: 无穷扫帚

问题 4. *设*X*是一个空间,若不存在*X*的由无交开集*A*和*B*所组成的分割*$X=A\cup B$*使得*$x\in A$*和*$y\in B$*,我们就规定*$x\sim y$.

(a) 证明这是一个等价关系,其等价类我们称为X*的拟分支;*

(b) 证明X*的每一个连通分支包含在*X*的一个拟分支之中,若*X*是局部连通的,则*X*的连通分支与拟分支相同。*

(c) 令K*表示集合*$\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$*,*$-K$*表示集合*$\{-\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$*. 试确定*$\mathbb{R}^2$*的下列子空间的连通分支,道路连通分支以及拟分支:*

$A=(K\times[0,1])\cup\{0\times 0\}\cup\{0\times 1\}.$

$B=A\cup([0,1]\times\{0\}).$

$C=(K\times[0,1])\cup(-K\times[-1,0])\cup([0,1]\times -K)\cup([-1,0]\times K).$