1) (4)中每个单项式在方阵$\boldsymbol{A}$的每行(每列)中仅取一个元素.

2) (4)中每个单项式中元素的行标取定标准排列顺序, 列标任意选取, 从而总共获得$n!$个单项式取和.

例 4 试证
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
这里, 主对角线一侧的空白表示该部分元素均为0, 通常, 我们称上式左边的行列式为**上三角(形)行列式**, 而称右边的行列式为**下三角(形)行列式**.

证明 我们先证明第一个等式成立. 依据定义1, 对于所讨论的行列式, (4)中参加求和的乘积项中, 最后一行元素不取a_{nn} 的项均为0, 故只需考虑第n 行元素仅取a_{nn} 的乘积项.由于在这样的乘积项中, 第$n-1$ 行的元素只能在前$n-1$ 个列中选取, 故仿上, 第$n-1$行的元素只需取$a_{n-1,n-1}$. 依次类推, 知第i 行元素只需取a_{ii} 即可($i=1,2,\cdots,n$). 从而
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
同理可证
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
□

诚然, 如果按(4)来计算一个n 阶的行列式, 则共需要$(n-1)n!$ 次乘法. 当n 足够大时, 计算实际上是无法实现的. 因此需要研究行列式的一些性质来简化计算. 为此目的, 我们先讨论(4) 的几种等价形式.

引理 1 设$s<t$为两个正整数, $n-$排列$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$和$j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$分别由$n-$排列$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$和$j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$经过对换第$s$个和第$t$个位置上的数所得, 则
$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}.$$

定理 4 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 是数域$\mathbb{P}$ 上的一个n 阶方阵. 则

1) $|\boldsymbol{A}| \xlongequal{\text{行的某一}n\text{-排列}i_1i_2\cdots i_n\text{选定}} \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$;

2) $|\boldsymbol{A}| \xlongequal{\text{列的自然序排列}} \sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$;

3) $|\boldsymbol{A}| \xlongequal{\text{列的某一}n\text{-排列}j_1j_2\cdots j_n\text{选定}} \sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$.

证明 1) 选定一个$n-$排列$i_1i_2\cdots i_n$, 显然, 标准排列$12\cdots n$可经由一系列的对换变为选定排列$i_1i_2\cdots i_n$. 记这一系列的对换过程为σ, 即

$$12\cdots n \xrightarrow{\sigma} i_1i_2\cdots i_n\ .$$

任取(4) 等号右端中的单项式$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n}$, 当其行标排成的自然排列经过互换过程$\sigma$变为$i_1i_2\cdots i_n$时, 其列标排成的排列$t_1t_2\cdots t_n$也变为了一个新排列$j_1j_2\cdots j_n$. 特别地, 因为互换过程一样, 当$t_1t_2\cdots t_n$取遍所有的$n-$排列时, 排列$j_1j_2\cdots j_n$也必然取遍所有的$n-$排列.

又由引理1, 我们有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= \sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(t_1t_2\cdots t_n)}a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n}\\ &= \sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(t_1t_2\cdots t_n)}a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n}\\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\ .\end{aligned}$$

1)得证.

2) 任意给定两个不同的$n-$排列$j_1j_2\cdots j_n$与$t_1t_2\cdots t_n$, 设分别经由一系列的对换σ_1, σ_2变为标准排列, 即

$$j_1j_2\cdots j_n \xrightarrow{\sigma_1} 12\cdots n,$$

$$t_1t_2\cdots t_n \xrightarrow{\sigma_2} 12\cdots n.$$

则必有

$$12\cdots n \xrightarrow{\sigma_1} i_1i_2\cdots i_n,$$

$$12\cdots n \xrightarrow{\sigma_2} s_1s_2\cdots s_n,$$

且排列$i_1i_2\cdots i_n$与$s_1s_2\cdots s_n$也互异. 事实上, 如果排列$i_1i_2\cdots i_n=s_1s_2\cdots s_n$, 则说明对换过程$\sigma_1$, σ_2的对换效果是一样的. 因此也必有$j_1j_2\cdots j_n=t_1t_2\cdots t_n$, 此为矛盾. 所以当$j_1j_2\cdots j_n$取遍所有的$n-$排列时, $i_1i_2\cdots i_n$也取遍所有的$n-$排列.

由引理1, 我们有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\,.\end{aligned}$$

2)得证.

3) 由2), 类似于1)的方法可证. □

§2.2 行列式的性质

将n 阶方阵$\boldsymbol{A}$ 绕主对角线旋转180°(即将$\boldsymbol{A}$ 的行与列互换)形成了一个新的矩阵, 通常, 我们称该矩阵为$\boldsymbol{A}$ 的一个**转置矩阵**, 记作$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$或者$\boldsymbol{A}'$.

性质 1 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$(或者$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}'|$).

证明 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (b_{ij})_{n\times n}$, 则$b_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1,2,\cdots,n$. 于是依(5),

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| &= |b_{ij}|_n = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}\\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}\\ &= |\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

成立. □

性质1可解释为**行列式的转置不改变其值**. 它也说明在行列式的计算中, 行与列是对称的, 即关于行成立的性质, 关于列也同时成立. 基于此, 在本节行列式性质的证明中, 我们仅证明行相关的性质.

性质 2 交换行列式的两个行(列)对应元素的位置, 行列式变号.

证明 设将$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$交换其第$l$ 行, 第k 行对应元素位置后所得的矩阵记为$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$. 不妨设$l < k$, 则

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i\neq l,\quad i\neq k,\\ a_{lj}, & i = k,\\ a_{kj}, & i = l,\end{cases}\qquad\qquad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

$$c_1D=\begin{vmatrix} a_{11}c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}c_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}c_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第$2,3,\cdots,n$ 列分别乘以$c_2,c_3,\cdots,c_n$ 后都加到第1 列, 得

$$c_1D=\begin{vmatrix} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据(14),

$$c_1D=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1.$$

因$D\neq 0$, 所以$c_1=\dfrac{D_1}{D}$. 同理可证, $c_2=\dfrac{D_2}{D}$, $\cdots$, $c_n=\dfrac{D_n}{D}$. 这样, 我们证明(11) 的任一个解实际上都是(12), 即(11) 的解是唯一的. □

二、行列式按多行(列)展开

$|\boldsymbol{A}|$ 的一个k **阶子式**是指取出n 阶行列式$|\boldsymbol{A}|$ 的$k(k\leq n)$ 个行及k 个列交叉位置上的元素, 保持它们相对位置关系不变所形成的k 阶行列式. 若所选的行和列分别是第$i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行及第$j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列, 其中$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n, 1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n$. 则相应的$k$ 阶子式记作$D\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix}$.

划去第$i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行, 第$j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列后, $|\boldsymbol{A}|$ 余下的部分保持元素间的相对位置关系不变将形成一个$n-k$ 阶的行列式, 通常, 我们称之为$D\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix}$ 的**余子式**, 记作$M\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix}$. 我们称

$$A\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix}=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix}$$

为 $D\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix}$ 的**代数余子式**.

例如, $D\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$是$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$的一个二阶子式. $M\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ 及$A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3+2+4}M\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 分别是$D\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 的余子式及代数余子式.

若k 个行已选定, 则基于该k 个行所能构成的k 阶子式共有C_n^k 个. 不难知, 子式的余子式及代数余子式概念是元素的余子式及代数余子式的推广.

进一步, 我们有

定理 6 (Laplace 定理) 设$|\boldsymbol{A}|$ 是一个n 阶行列式, k 为整数$(1 \le k \le n)$.

(1) 取定$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 则

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} D\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix}, \tag{15}$$

(按第$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k$行展开)

(2) 取定$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, 则

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} D\begin{pmatrix} j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \\ i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \\ i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \end{pmatrix}, \tag{16}$$

(按第$j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k$列展开)

证明 我们下面分两种情况给出式(15)的证明.

情形1: $i_1 = 1,\ i_2 = 2,\ \cdots,\ i_k = k$.

按定理3,

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

对给定的$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, 令

$$K_{j_1 j_2 \cdots j_k} = \{p_1 p_2 \cdots p_k:\ 其中 p_i \in \{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k\}, i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ 且互异\},$$

$$\bar{K}_{j_1 j_2 \cdots j_k} = \{p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_n:\ 其中 p_i \in < n > \setminus \{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k\}, i = k+1,\ k+2,\ \cdots,\ n,\ 且互异\}.$$

进而可得

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} \sum_{p_1 p_2 \cdots p_k \in K_{j_1 j_2 \cdots j_k}} \sum_{p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_n \in \bar{K}_{j_1 j_2 \cdots j_k}} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_k p_{k+1} \cdots p_n)} \cdot a_{1p_1} \cdots a_{kp_k} a_{k+1\, p_{k+1}} \cdots a_{np_n}.$$

下面我们插入一个引理.

引理 2 在上式中,

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_k\in K_{j_1j_2\cdots j_k}}\ \sum_{p_{k+1}p_{k+2}\cdots p_n\in \bar{K}_{j_1j_2\cdots j_k}} (-1)^{\tau(p_1\cdots p_kp_{k+1}\cdots p_n)}\cdot a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}a_{k+1p_{k+1}}\cdots a_{np_n}$$

$$= D\begin{pmatrix} 1\,2\,\cdots\,k \\ j_1\,j_2\,\cdots\,j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 1\,2\,\cdots\,k \\ j_1\,j_2\,\cdots\,j_k \end{pmatrix}$$

证明 等号左边$=|\boldsymbol{B}|$, 其中

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{kj_1} & \cdots & a_{kj_k} & \cdots & 0 \\ a_{k+1\,1} & \cdots & a_{k+1\,j_1} & \cdots & a_{k+1\,j_k} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_k} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(j_1-1)+(j_2-2)+\cdots+(j_k-k)} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \boldsymbol{O} & \\ a_{kj_1} & \cdots & a_{kj_k} & & & \\ & & & a_{k+1\,1} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ & * & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_k-\frac{k(k+1)}{2}} D\begin{pmatrix} 1\,2\,\cdots\,k \\ j_1\,j_2\,\cdots\,j_k \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} 1\,2\,\cdots\,k \\ j_1\,j_2\,\cdots\,j_k \end{pmatrix}$$

$$= D\begin{pmatrix} 1\,2\,\cdots\,k \\ j_1\,j_2\,\cdots\,j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 1\,2\,\cdots\,k \\ j_1\,j_2\,\cdots\,j_k \end{pmatrix}.$$

故引理成立. □

由上面引理可知,

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} D\begin{pmatrix} i_1\,i_2\,\cdots\,i_k \\ j_1\,j_2\,\cdots\,j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1\,i_2\,\cdots\,i_k \\ j_1\,j_2\,\cdots\,j_k \end{pmatrix},$$

即此时式(15)成立.

情形2：$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$.

对于一般情形, $\boldsymbol{A}$可通过一系列的相邻行互换把第i_1, i_2, $\cdots$, i_k行依次换成新矩阵$\tilde{\boldsymbol{A}}$的第1, 2, $\cdots$, k行, 此时

$$\boldsymbol{A}\text{中的}D\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{A}}\text{中的}\tilde{D}\begin{pmatrix} 1\, 2\, \cdots\, k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\text{中的}M\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{A}}\text{中的}\tilde{M}\begin{pmatrix} 1\, 2\, \cdots\, k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix},$$

所以由情形1可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)}|\tilde{\boldsymbol{A}}| \\
&= (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k-\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} \tilde{D}\begin{pmatrix} 1\, 2\, \cdots\, k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} \tilde{A}\begin{pmatrix} 1\, 2\, \cdots\, k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k-\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} \tilde{D}\begin{pmatrix} 1\, 2\, \cdots\, k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} \cdot (-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_k-\frac{k(k+1)}{2}} \tilde{M}\begin{pmatrix} 1\, 2\, \cdots\, k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} D\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} \cdot (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} M\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} D\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \cdots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \cdots\, j_k \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

即此时式(15)成立. □

例 12 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{r\times r} & \boldsymbol{O}_{r\times s} \\ \boldsymbol{C}_{s\times r} & \boldsymbol{B}_{s\times s} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

证明 在由前r 个行的元素保持原来位置关系不变的r 阶子式中, 非零仅可能是$|\boldsymbol{A}|$. 依Laplace 定理, 等式左端按前r 行展开得:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{r\times r} & \boldsymbol{O}_{r\times s} \\ \boldsymbol{C}_{s\times r} & \boldsymbol{B}_{s\times s} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|(-1)^{1+\cdots+r+1+\cdots+r}|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{r\times s} & \boldsymbol{A}_{r\times r} \\ \boldsymbol{B}_{s\times s} & \boldsymbol{O}_{s\times r} \end{vmatrix} = (-1)^{rs}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

习 题

1. 计算以下排列的逆序数, 从而确定它们的奇偶性.

   (1) 135786492. (2) 76254813. (3) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$. (4) $147\cdots(3n-2)258\cdots(3n-1)$.

2. 选择i 与j 使

   (1) $52i4167j9$ 成奇排列. (2) $217i86j54$ 成偶排列.

3. 如果排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为k, 排列$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?

4. 写出把排列12345 变成54321 的所有对换.