第二十五章　调和函数

25.1　调和函数

假设 Ω 是平面区域, 用 $C^2(\Omega)$ 表示 Ω 上 2 阶连续可微的复值函数全体. 给定 $u \in C^2(\Omega)$. 如果对任意 $z \in \Omega$, 有

$$\Delta u(z) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0,$$

则称 u 在 Ω 上调和. 如果 u 取实值, 称 u 为调和函数; 如果 u 取复值, 称 u 为调和映射. 这里 Δ 是 Laplace 算子, 其复形式为

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

由此知

$$u \text{ 调和} \iff \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial z} \text{ 全纯.}$$

调和函数的例子有很多. 如果 $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ 全纯, 则 u, v 满足 Cauchy-Riemann 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 由此,

$$\Delta u = u_{xx}+u_{yy} = v_{yx}-v_{xy} = 0,\ \Delta v = v_{xx}+v_{yy} = -u_{yx}+u_{xy} = 0.$$

这说明 f 的实部 u 和虚部 v 都是 Ω 上的调和函数. 此时, 称 v 是 u 的共轭调和函数. 由 $-if = v - iu$ 知, $-u$ 是 v 的共轭调和函数. 共轭调和函数不唯一, 任意两个差一常数.

一个自然的问题是: 给定 Ω 上的调和函数 u, 它是否有共轭调和函数? 此问题等价于:u 是否可表示为 Ω 上某全纯函数的实部? 下面的命题表明, 这与全纯函数原函数的存在性等价.

命题 25.1. 假设 u 是平面区域 Ω 上的调和函数, 则以下等价

1. u 可以表示为 Ω 上某个全纯函数的实部;
2. $\frac{\partial u}{\partial z}$ 在 Ω 上存在原函数.

特别地, 单连通域上的调和函数总是某全纯函数的实部.

证明: 如果 u 是全纯函数 $f=u+iv$ 的实部, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{\partial u}{\partial \bar z}+i\frac{\partial v}{\partial \bar z}=0 \Longleftrightarrow \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right)}=i\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial \bar z}\right)} \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial z}=i\frac{\partial v}{\partial z}.$$

由此得

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial v}{\partial z}=2\frac{\partial u}{\partial z}.$$

这说明 f 是 $2\frac{\partial u}{\partial z}$ 的原函数.

如果 $2\frac{\partial u}{\partial z}$ 在 Ω 上有原函数 $g=g_1+ig_2$, 其中 g_1,g_2 分别为 g 的实部和虚部. 由上面讨论知 $g'(z)=2\frac{\partial g_1}{\partial z}=2\frac{\partial u}{\partial z}$, 于是

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z} \Longleftrightarrow (g_1-u)_x=(g_1-u)_y=0.$$

这说明 $u=g_1+C$, C 是一个实数. 因此 u 是 $g+C$ 的实部. □

例题 25.1. 考虑区域 $\Omega_1=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\Omega_2=\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$, 容易验证 $u(z)=\log|z|$ 在两个区域上调和. 证明:

1. u 在 Ω_1 上不是某个全纯函数的实部.
2. u 在 Ω_2 上是某个全纯函数的实部.

证明: 事实上, 考虑函数

$$g(z)=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2z}.$$

在单位圆周 $\partial\mathbb{D}\subset\Omega_1$ 上,

$$\int_{|z|=1} g(z)dz=\pi i\neq 0,$$

因此, g 在 Ω_1 上不存在原函数, 由命题25.1, u 在 Ω_1 上不是某个全纯函数的实部. 另一方面, Ω_2 是不含原点的单连通区域, $\mathrm{Log}(z)$ 存在单值全纯分支, 记其中之一为 $\log_{\Omega_2}(z)=\log|z|+i\arg_{\Omega_2}(z)$, 这里 $\arg_{\Omega_2}(z)$ 是 Ω_2 上的一个连续辐角函数. 这说明 u 是全纯函数 $\log_{\Omega_2}(z)$ 的实部, 它的一个共轭调和函数是 $\arg_{\Omega_2}(z)$. □

25.2 极值原理

命题 25.2. 假设 u 是区域 Ω 上的调和函数, $\overline{D(z_0,r)}\subset\Omega$, 则 u 满足平均值公式

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

证明: 在包含 $\overline{D(z_0,r)}$ 的圆盘 $D \subset \Omega$ 上, 由命题25.1, u 可表示为某全纯函数 f 的实部. 对 f 应用 Cauchy 积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

上式两边取实部可得

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

定理 25.1. (极值原理) 非常值调和函数不可能在区域内部取到最大值或最小值.

证明: 假设 u 在 Ω 上调和. 如果存在 $a \in \Omega$ 满足 $u(a) = \sup_{w\in\Omega} u(w)$, 下证 u 为常值函数. 为此, 定义集合 $E = \{z \in \Omega; u(z) = u(a)\}$. 首先, 由 $a \in E$ 知, $E \neq \emptyset$. 利用 u 的连续性知, E 是 Ω 的闭子集. 下面证明 E 是 Ω 的开子集.

任取 $z_0 \in E$, 存在 $r > 0$ 使得 $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$, 对任意 $\rho \in (0,r)$, 利用平均值公式知

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

由 $z_0 \in E$ 知, 对任意 θ, 成立 $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) \le u(z_0)$. 如果存在 θ_0 使 $u(z_0 + \rho e^{i\theta_0}) < u(z_0)$, 则存在 $\delta > 0$ 使当 $\theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ 时, $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) < u(z_0)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta &\le \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} u(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta + (2\pi - 2\delta)u(z_0) \\ &< 2\delta u(z_0) + (2\pi - 2\delta)u(z_0) = 2\pi u(z_0).\end{aligned}$$

这与平均值公式矛盾. 这说明, 对任意 $\rho \in (0,r)$, $\theta \in [0,2\pi)$, 都成立 $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) = u(z_0)$, 等价于 $D(z_0,r) \subset E$. 因此 E 是开集.

如此便证明了 E 是 Ω 的即开又闭的非空子集. 由 Ω 的连通性知, $E = \Omega$. 这说明 $u \equiv u(z_0)$. □

25.3 唯一性定理

命题 25.3. (唯一性定理) 假设 u 是圆盘 $D(a,\rho)$ 上的有界调和函数, 在边界上除了有限个点 $\zeta_1,\cdots,\zeta_m$ 外, 极限

$$\lim_{z\to\zeta} u(z) = 0$$

处处成立, 则必然有 $u\equiv 0$.

证明: 给定 $\epsilon>0$, 构造函数

$$v(z)=\epsilon\sum_{k=1}^m \log\frac{2\rho}{|z-\zeta_k|}=\epsilon\sum_{k=1}^m(\log 2\rho-\log|z-\zeta_k|).$$

显然 $\log|z-\zeta_k|$ 调和 (直接用定义验证, 或利用它是 $\mathrm{Log}(z-\zeta_k)$ 的一个单值全纯分支 $\log(z-\zeta_k)$ 的实部), 因此 v 在 $D(a,\rho)$ 上调和. 它满足如下性质,

$$\lim_{z\to\zeta} v(z)\geq 0,\ \forall\zeta\in\partial D(a,\rho)\setminus\{\zeta_1,\cdots,\zeta_m\};\quad \lim_{z\to\zeta_k} v(z)=+\infty.$$

对 $\delta>0$, 定义

$$D_\delta = D(a,\rho)\setminus\bigcup_{k=1}^m\overline{D(\zeta_k,\delta)}.$$

由 u 的有界性可知, 取 $\delta(\epsilon)>0$ 足够小, 可使对任意 $\delta\in(0,\delta(\epsilon))$, 有 $v(z)-u(z)\geq 0,\forall z\in D(a,\rho)\cap\partial D(\zeta_k,\delta)$. 这样, 对任意 $\zeta\in\partial D_\delta$, 有 $\lim_{z\to\zeta}(v(z)-u(z))\geq 0$. 由极值原理可知, 在 D_δ 上, $v\geq u$. 令 $\delta\to 0^+$ 可知, 在 $D(a,\rho)$ 上 $v\geq u$.

对 $-u$ 类似讨论可知, 在 $D(a,\rho)$ 上 $u\geq -v$. 因此

$$-v(z)\leq u(z)\leq v(z),\ \forall z\in D(a,\rho).$$

注意到, 当 $\epsilon\to 0^+$ 时 $v\to 0$. 令 $\epsilon\to 0^+$, 可得 $u=0$. □

25.4 积分公式

定理 25.2. 假设 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, 实部为 u, 则成立

1. Poisson 积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}d\theta,\ z\in\mathbb{D}.$$

2. Schwarz 积分公式

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\overline{f(0)},\ z\in\mathbb{D}.$$

证明: 两个积分公式本质上是 Cauchy 积分公式的推论.

由 Cauchy 积分公式知:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}d\theta. \tag{25.1}$$

注意到当 $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 时, 它关于圆周的对称点 $1/\bar{z}\notin\overline{\mathbb{D}}$. 对 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的全纯函数 $g(\zeta)=f(\zeta)/(\zeta-1/\bar{z})$ 应用 Cauchy 积分定理得

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-1/\bar{z}}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-1/\bar{z}}d\theta. \tag{25.2}$$

注意到

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}-\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-1/\bar{z}}=\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}+\frac{\bar{z}}{e^{-i\theta}-\bar{z}}=\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}.$$

公式(25.1),(25.2)左右两端分别相减, 得

$$f(z)\ =\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}d\theta.$$

上式即 Poisson 积分公式.

在公式(25.2)两边取共轭, 得到

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(e^{i\theta})}\left(\frac{e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}-1/z}\right)d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(e^{i\theta})}\left(\frac{z}{z-e^{i\theta}}\right)d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(e^{i\theta})}\left(1+\frac{e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}}\right)d\theta\\
&= \overline{f(0)}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{f(e^{i\theta})}e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}}d\theta.
\end{aligned}$$

公式(25.1)与上式左右两端分别相减, 得 Schwarz 积分公式

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}d\theta-\overline{f(0)}=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\overline{f(0)}.$$

25.5 习题

“我一生想解决的问题很多, 但其中有很多就像悬崖峭壁一样, 没有明显的路径可以攀登。我正研究那些较为可及的问题。

我希望积累更多的技巧, 工具和洞见. 之后之后再回到那些我真正想解决的问题, 看看是否有所改观."

—-陶哲轩

1. (调和 vs 全纯) 区域 $\Omega = \mathbb{C} - [0,1]$ 上的调和函数

$$u(z) = \log|z| + c\log|z-1|, c \in \mathbb{R}$$

当 c 取何值时, 为 Ω 上某全纯函数的实部?

2. (平均值性质) 利用调和函数的均值性质证明

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2r\cos t + r^2)dt = 0, 0 < r < 1.$$

3. (另一种形式的唯一性定理) u 在区域 D 上调和, 且在 D 的子区域 G 上恒等于 0, 证明 u 在 D 上恒为零. 若将 G 改为一列收敛于 $z_0 \in D$ 的点列, 结论是否成立?

4. (复合函数) 假设 $f: \Omega \to D$ 全纯, $w = f(z)$, $u \in C^2(D)$. 证明 Laplace 算子满足

$$\Delta_z(u \circ f) = |f'(z)|^2 (\Delta_w u) \circ f.$$

(这说明,u 在 D 上调和 $\Longrightarrow$ $u \circ f$ 在 Ω 上调和. 注 $\Delta_\zeta = 4\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}$)

5. (调和映射) 假设 $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ 是调和映射. 如果 Ω 单连通, 证明 f 有如下分解

$$f = g + \overline{h}$$

其中 g, h 都是 Ω 上的全纯函数. 此分解在差一常数的意义下唯一.

6. (唯一性定理的补充) 是否存在圆盘 $\mathbb{D}$ 上的无界调和函数, 在边界上除了有限个点 $\zeta_1, \cdots, \zeta_m$ 外, 极限

$$\lim_{z\to\zeta} u(z) = 0$$

对 $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \{\zeta_1, \cdots, \zeta_m\}$ 处处成立?

7. (世上最差的函数, 选做题) 圆盘 $\mathbb{D}$ 上有这样的调和函数 u, 其性质貌似极好: 对任意 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, 满足 $\lim_{r\to 1^-} u(r\zeta) = 0$, 但却不恒为 0. 这样的函数被戏称为"世上最差的函数". 请举例.