第二十三章　留数定理与积分计算

本讲先给出孤立奇点处留数的定义，由此引出留数定理，最后利用留数定理计算几类典型积分。

23.1　留数定理

假设 f 在 $D(z_0,\epsilon)\setminus\{z_0\}$ 上全纯, 有 Laurent 展式[1]

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-z_0)^n, a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta.$$

我们称

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}f(\zeta)d\zeta,\ r\in(0,\epsilon)$$

为 f 在 z_0 处的留数 (residue), 记为 $\mathrm{Res}(f,z_0)$。这里, 积分值不依赖于 $r\in(0,\epsilon)$ 的选取。

如果 ∞ 是孤立奇点, 即 f 在 $\{|z|>R\}$ 上全纯, 假设 f 在 ∞ 处的 Laurent 展式为 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^n$, 定义 f 在 ∞ 处的留数

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}f(\zeta)d\zeta=-a_{-1},\ \rho>R.$$

注意, ∞ 处留数的定义与有限点处留数的定义是统一的: 它们都是对 f 沿着围绕孤立奇点的圆周取正方向 (即沿此方向前进, 奇点在前进方向的左侧) 做积分。通过变量代换 $\zeta=1/w$,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}f(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1/\rho}-f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}dw$$

[1]本章讨论的沿圆周的积分都取逆时针方向

可将 f 在 ∞ 处的留数转化为函数 $g(z) = -\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ 在 0 处的留数 $\text{Res}(g, 0) = \text{Res}(f, \infty)$。

如果 z_0 是 f 的可去奇点, 则 $\text{Res}(f, z_0) = 0$。如果 z_0 是 f 的一阶极点, 则 $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$。如果 z_0 是 f 的 m 阶极点, 将 f 局部表示为

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

由此得,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\psi^{(m-1)}(z_0)}{(m - 1)!}.$$

例题 23.1. 求留数 $\text{Res}(f, 0)$, 其中

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1 - z}.$$

解: 利用指数函数的幂级数展式

$$e^z - 1 - z = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \frac{z^2}{2}\left(1 + \frac{z}{3} + \right).$$

$$\frac{1}{e^z - 1 - z} = \frac{2}{z^2}\left(1 - \frac{z}{3} + \right) = \frac{2}{z^2} - \frac{2}{3z} + \cdots.$$

由此得 $\text{Res}(f, 0) = -\frac{2}{3}$. □

定理 23.1.(留数定理, Cauchy 1826) 假设有界区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 的边界由有线条分段光滑的简单闭曲线组成, $z_1, \cdots, z_n \in \Omega$。假设函数 f 在 $\overline{\Omega} \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ 上全纯。则

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, z_k).$$

证明: 选取 $\epsilon > 0$ 使 $\overline{D(z_k, \epsilon)} \subset \Omega$, 且闭圆盘 $\overline{D(z_k, \epsilon)}, 1 \leq k \leq n$ 互不相交。令

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{D(z_k, \epsilon)}.$$

则 f 在 $\overline{\Omega_\epsilon}$ 上全纯。由 Cauchy-Goursat 积分定理得

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} f(z)dz = \int_{\partial\Omega} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D(z_k,\epsilon)} f(z)dz = 0.$$

由上式

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D(z_k,\epsilon)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

23.2 $\int_0^{2\pi} Q(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ 型积分

例题 23.2. 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}, \quad a > 1.$$

解: 令 $\zeta = e^{it}$, 则

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \; d\zeta = ie^{it}dt, \; dt = \frac{d\zeta}{i\zeta}.$$

积分可以转化为

$$I = -i \int_{|\zeta|=1} \frac{2}{\zeta^2 + 2a\zeta + 1} d\zeta.$$

被积函数 $f(\zeta) = 2/(\zeta^2 + 2a\zeta + 1)$ 有两个极点

$$\zeta_+ = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \; \zeta_- = -a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

这两个极点只有 ζ_+ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内。利用留数定理可知

$$I = -i \cdot 2\pi i \ \mathrm{Res}(f, \zeta_+) = 2\pi \ \mathrm{Res}(f, \zeta_+).$$

计算知

$$\mathrm{Res}(f, \zeta_+) = \mathrm{Res}\left(\frac{2}{(\zeta - \zeta_+)(\zeta - \zeta_-)}, \zeta_+\right) = \frac{2}{\zeta_+ - \zeta_-} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

由此得

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

由此例可知, 形如

$$I = \int_0^{2\pi} Q(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$$

的积分, 可通过引入复变量 $z = e^{i\theta}$, 并做变换

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \; d\theta = \frac{dz}{iz},$$

$$f(z)=Q\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz},$$

将原积分变为复积分

$$I=\int_{|z|=1}f(z)dz.$$

假设 f 在 $\mathbb{D}$ 中的孤立奇点为 $a_1,\cdots,a_n$, 则

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_k).$$

23.3 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 型积分

命题 23.1. 记 $\mathbb{H}$ 是上半平面。f 在 $\overline{\mathbb{H}}$ 上除了有限个点 $a_1,\cdots,a_n$ 之外全纯。如果 $\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_k).$$

证明: 取充分大 $R>0$, 使得 $a_1,\cdots,a_n\in D(0,R)\cap\mathbb{H}$。记 $\Omega=D(0,R)\cap\mathbb{H}$, $\gamma_R=\{Re^{it};0\le t\le\pi\}$。由留数定理,

$$\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{\gamma_R}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_k). \tag{23.1}$$

利用积分基本不等式,

$$\left|\int_{\gamma_R}f(z)dz\right|\le\int_{\gamma_R}|f(z)||dz|\le\pi R\|f\|_{\gamma_R}=\pi\|zf(z)\|_{\gamma_R}\to 0\,(R\to\infty).$$

在 (23.1) 式中令 $R\to\infty$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_k).$$

在实际应用中, 常见的情形是 f 是一个有理函数

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)},\ \deg(q)\ge\deg(p)+2,$$

此时可以直接利用上面的公式来处理。

上述情况的区域取的是上半圆盘。当积分区间发生变化时, 我们也会考虑其他类型的区域, 比如扇形区域。

例题 23.3. 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n},$$

其中 $n\geq 2$ 是一个正整数。

解: 取扇形区域

$$S_R=\{re^{i\theta};0<r<R,0<\theta<2\pi/n\}.$$

其边界 $\partial S_R=[0,R]\cup\gamma_R\cup\beta_R^-$ (此处, 取 ∂S_R 的正定向), 其中

$$\gamma_R=\{Re^{it};0\leq t\leq e^{2\pi i/n}\},\beta_R=\{re^{2\pi i/n};0\leq r\leq R\}.$$

$f(z)=1/(1+z^n)$ 在 S_R 中有且只有一个极点 $\zeta_0=e^{i\pi/n}$.

在 S_R 上应用留数定理

$$\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}+\int_{\gamma_R}\frac{dz}{1+z^n}+\int_{\beta_R^-}\frac{dz}{1+z^n}=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,\zeta_0),$$

这里, 沿 β_R^- 的积分取从 $Re^{2\pi i/n}$ 到 $0e^{2\pi i/n}=0$ 的方向。

容易验证

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{dz}{1+z^n}\right|\leq\int_{\gamma_R}\frac{|dz|}{|1+z^n|}\leq\frac{2\pi R}{n(R^n-1)}\to 0(R\to\infty).$$

$$\int_{\beta_R^-}\frac{dz}{1+z^n}=-e^{2\pi i/n}\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}.$$

在积分等式里令 $R\to\infty$ 可得,

$$(1-e^{2\pi i/n})\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,\zeta_0)=\frac{2\pi i}{nz^{n-1}|_{z=\zeta_0}}=\frac{2\pi i}{n\zeta_0^{n-1}}.$$

由此可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}=\frac{2\pi i}{n(1-e^{2\pi i/n})e^{\pi i(n-1)/n}}=\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

23.4 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}f(x)dx$ 型积分

先看一例:

例题 23.4. 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解: 将积分表示为

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to+\infty,\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{R\to+\infty,\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix} dx \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{R\to+\infty,\epsilon\to 0+} \left(\int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \end{aligned}$$

记 $\gamma_R = \{Re^{it}; 0 \le t \le \pi\}, \gamma_\epsilon = \{\epsilon e^{it}; 0 \le t \le \pi\}$, $C_{R,\epsilon} = [\epsilon, R] \cup \gamma_R \cup [-R, -\epsilon] \cup \gamma_\epsilon^-$. 则

$$I = \frac{1}{2i} \lim_{R\to+\infty,\epsilon\to 0+} \left(\int_{C_{R,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right).$$

下面估计上式右端三项。由 Cauchy-Goursat 积分定理, 第一项

$$\int_{C_{R,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

第二项

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z} \left(1 + iz - \frac{z^2}{2} + o(z^2) \right) dz = \int_{\gamma_\epsilon} \left(\frac{1}{z} + h(z) \right) dz.$$

计算可知

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z} dz = i\pi, \quad \left| \int_{\gamma_\epsilon} h(z) dz \right| \le \pi\epsilon \|h\|_{\gamma_\epsilon} \to 0 (\epsilon \to 0).$$

最后估计第三项, 做变量代换 $z = Re^{i\theta}$,

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} i d\theta \right| \le \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta.$$

当 $\theta \in [0, \pi/2]$ 时, 利用基本不等式 $\frac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta \le \theta$, 可得

$$2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) \to 0 (R \to +\infty).$$

最后由上面的估计, 可得 $I = \pi/2$。 □

将此例中的方法抽象总结, 可处理下面一类积分:

命题 23.2. 假设 f 在 $\overline{\mathbb{H}}$ 上除了有限个点 $a_1,\cdots,a_n$ 之外全纯。如果 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$, 则对任意 $\alpha>0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(e^{i\alpha z}f,a_k).$$

证明: 取充分大的 $R>0$, 使 $a_1,\cdots,a_n\in\Omega_R:=D(0,R)\cap\mathbb{H}$。记 $\gamma_R=\{Re^{it};0\le t\le\pi\}$。在 Ω_R 上应用留数定理,

$$\int_{-R}^{R} e^{i\alpha x}f(x)dx+\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(e^{i\alpha z}f(z),a_k).$$

由假设条件知, 当 $R\to+\infty$ 时, $\|f\|_{\gamma_R}\to 0$。于是

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z}f(z)dz\right| &\le \int_0^{\pi}|e^{i\alpha(R\cos\theta+iR\sin\theta)}|\|f\|_{\gamma_R}Rd\theta\\
&= \|f\|_{\gamma_R}R\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta\\
&= 2\|f\|_{\gamma_R}R\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta\\
&\le 2\|f\|_{\gamma_R}R\int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R\theta/\pi}d\theta\\
&= \frac{\pi}{\alpha}\|f\|_{\gamma_R}(1-e^{-\alpha R})\\
&\to 0\ (R\to+\infty).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z}f(z)dz=0.$$

上式也称为 Jordan 圆弧引理。

最后, 在积分公式中令 $R\to+\infty$, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(e^{i\alpha z}f,a_k).$$

注: 如果 f 为实函数, 则形如

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\alpha x)f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{\infty}\sin(\alpha x)f(x)dx$$

的积分, 分别为积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}f(x)dx$ 的实部和虚部，于是可转化为上面的方法处理。

23.5 $\int_0^\infty f(x)dx$ 型积分

通过一类典型积分的计算，说明此类积分与多值函数有关。

命题 23.3. 有理函数 f 满足当 z 很大时 $|f(z)| = O(|z|^{-2})$，且所有极点 $p_1, \cdots, p_n$ 都不在非负实轴 $[0, +\infty)$ 上, 则

$$\int_0^\infty f(x)dx = -\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(f(z)\log(z), p_k),$$

其中 $\log(z)$ 是 $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ 上满足 $\log(-1) = \pi i$ 的单值全纯分支。

证明: 因 f 只有有限个极点，故可选取 $\theta \in (0, 2\pi)$, 使 f 在射线 $\ell_\theta = \{re^{i\theta}; r \geq 0\}$ 上无极点。取 $\epsilon > 0$ 很小，$R > 0$ 很大，使 f 的所有极点都在环域 $A_{\epsilon,R} = \{\epsilon < |z| < R\}$ 中。此环域可剖分成两个单连通区域

$$\Omega^1_{\epsilon,R} = \{re^{it}; r \in (\epsilon, R), t \in (0, \theta)\},$$
$$\Omega^2_{\epsilon,R} = \{re^{it}; r \in (\epsilon, R), t \in (\theta, 2\pi)\}.$$

对函数 $f(z)\log(z)$(其中 $\log(z)$ 是按命题取定的全纯分支) 在区域 $\Omega^1_{\epsilon,R}$ 和 $\Omega^2_{\epsilon,R}$ 上分别应用留数定理,

$$\int_{\partial\Omega^1_{\epsilon,R}} f(z)\log(z)dz = 2\pi i \sum_{p\in\Omega^1_{\epsilon,R}, f(p)=\infty} \mathrm{Res}(f(z)\log(z), p),$$

$$\int_{\partial\Omega^2_{\epsilon,R}} f(z)\log(z)dz = 2\pi i \sum_{p\in\Omega^2_{\epsilon,R}, f(p)=\infty} \mathrm{Res}(f(z)\log(z), p).$$

上式两端分别相加得

$$\int_{\partial\Omega^1_{\epsilon,R}\cup\partial\Omega^2_{\epsilon,R}} f(z)\log(z)dz = 2\pi i \sum_{f(p)=\infty} \mathrm{Res}(f(z)\log(z), p). \tag{23.2}$$

上式左端积分颇为微妙。线段 $[-R, -\epsilon]$ 是 $\Omega^1_{\epsilon,R}$ 和 $\Omega^2_{\epsilon,R}$ 的共同边界，由各自边界诱导的正向相反，因此积分抵消; 线段 $[\epsilon, R]$ 也是 $\Omega^1_{\epsilon,R}$ 和 $\Omega^2_{\epsilon,R}$ 的共同边界, 由各自边界诱导的正向相反, 但此时积分不能相抵, 原因是 $\log(z)$ 在此线段上取值不同 (相差 $2\pi i$)。

将线段 $[\epsilon, R]$ 视作 $\Omega^1_{\epsilon,R}$ 的边界, 有 $\log(z) = \log(x)$, 其中 $z = x + iy$。此时沿正向的积分

$$\int_{[\epsilon,R]} f(z)\log(z)dz = \int_\epsilon^R f(x)\log(x)dx.$$

将线段 $[\epsilon, R]$ 视作 $\Omega^2_{\epsilon,R}$ 的边界, 有 $\log(z) = \log(x) + 2\pi i$, 此时沿正向积分

$$\int_{[R,\epsilon]} f(z)\log(z)dz = -\int_{\epsilon}^{R} f(x)(\log(x) + 2\pi i)dx.$$

因此等式 (23.2) 左端为

$$\int_{|z|=R} f(z)\log(z)dz - \int_{|z|=\epsilon} f(z)\log(z)dz - 2\pi i\int_{\epsilon}^{R} f(x)\log(x)dx.$$

下面估计积分

$$\left|\int_{|z|=R} f(z)\log(z)dz\right| \leq \frac{C}{R}(\log(R) + 2\pi) \to 0\ (R \to \infty).$$

$$\left|\int_{|z|=\epsilon} f(z)\log(z)dz\right| \leq C\epsilon(\log(1/\epsilon) + 2\pi) \to 0\ (\epsilon \to 0).$$

令 $R \to +\infty, \epsilon \to 0^+$, 便得

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = -\sum_{f(p)=\infty} \mathrm{Res}(f(z)\log(z), p).$$

即命题中的积分等式。 □

注：积分曲线也可换成任意不过极点的射线, 或不过极点延伸至无穷的曲线。

23.6 涉及多值函数的积分

上例涉及多值函数积分的处理, 具有启发性。再举一例

例题 23.5. 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)x^{\alpha}}dx,\ 0 < \alpha < 1.$$

解: 将 x 换成 z 可知, 被积函数包含一个多值函数 z^{α}。我们将利用多值函数的特点来把积分求出来。

多值函数 $z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Log}(z)}$ 在区域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ 上, 可以取到一个单值全纯分支

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log_{\Omega}(z)} = e^{\alpha(\log|z| + i\arg_{\Omega}(z))},\ i^{\alpha} = e^{\frac{\pi\alpha i}{2}}.$$

由此可见, 对任意 $x>0$, 当 z 从上半平面趋于 x 时, $z^\alpha \to x^\alpha$; 当 z 从下半平面趋于 x 时, $z^\alpha \to e^{2\pi\alpha i}x^\alpha$.

记 $\gamma_R=\{Re^{i\theta};0\le\theta\le 2\pi\},\gamma_\epsilon=\{\epsilon e^{i\theta};0\le\theta\le 2\pi\}$, $\ell_1=[\epsilon,R]$ 为 Ω 的边界的上沿的一段闭线段, $\ell_2=[R,\epsilon]$ 为 Ω 的边界的下沿的一段闭线段。考虑围线

$$C_{\epsilon,R}=\gamma_R\cup\ell_2\cup\gamma_\epsilon^-\cup\ell_1.$$

在 $C_{\epsilon,R}$ 所围的区域上对已取单值分支的全纯函数 $f(z)=\frac{1}{(1+z)z^\alpha}$ 应用留数定理, 得

$$\int_{C_{\epsilon,R}} f(z)dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,-1)=2\pi i e^{-\alpha\pi i}.$$

另一方面,

$$\int_{C_{\epsilon,R}} f(z)dz=\left(\int_{\gamma_R}+\int_{\ell_2}-\int_{\gamma_\epsilon}+\int_{\ell_1}\right)f(z)dz.$$

下面分别估计上式右端的四项积分:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right|\le\int_{\gamma_R}\frac{|dz|}{|1+z||z|^\alpha}\le\frac{2\pi R^{1-\alpha}}{R-1}\to 0\ (R\to\infty),$$

$$\left|\int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz\right|\le\int_{\gamma_\epsilon}\frac{|dz|}{|1+z||z|^\alpha}\le\frac{2\pi \epsilon^{1-\alpha}}{1-\epsilon}\to 0\ (\epsilon\to 0),$$

$$\int_{\ell_1} f(z)dz=\int_\epsilon^R\frac{1}{(1+x)x^\alpha}dx,$$

$$\int_{\ell_2} f(z)dz=e^{-2\pi\alpha i}\int_R^\epsilon\frac{1}{(1+x)x^\alpha}dx=-e^{-2\pi\alpha i}\int_\epsilon^R\frac{1}{(1+x)x^\alpha}dx.$$

综合上面的估计, 令 $\epsilon\to 0,R\to+\infty$,

$$\lim_{\epsilon\to 0,R\to+\infty}\int_{C_{\epsilon,R}} f(z)dz=(1-e^{-2\pi\alpha i})\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)x^\alpha}dx.$$

最后得

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)x^\alpha}dx=\frac{2\pi i e^{-\alpha\pi i}}{1-e^{-2\pi\alpha i}}=\frac{2\pi i}{2i\sin(\alpha\pi)}=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

23.7 习题

“我得到了一个重要教训：乐趣在于要有新想法，发现一些从未被别人考虑过的东西，以自己的方式得到新结果。我无法接

受别人提供的数学建议，因为它不能刺激我。唯有我自己独有的观点能使我血液奔涌。我也阅读其他人的工作，欣赏它，并从中受到启示，但只有在我得到自己的观点以后才能取得实质性的进展。这一直是我最大的力量，也是我最大的极限。”

—威廉. 布劳德，数学家

1. (留数计算) 计算留数

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+4}, 2i\right],\ \mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^5}, 0\right],\ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)^2}, i\right].$$

2. (留数定理的应用) 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}dz;\quad \int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2}dz,\ \text{其中}\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

3. (留数等式) 假设函数 f 在 $\mathbb{C}\setminus\{p_1,\cdots,p_n\}$ 上全纯, 证明

$$\mathrm{Res}(f,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,p_k)=0.$$

4. (留数) 函数 $f(z)=1/(e^z-1)$.

(1). 求留数 $\mathrm{Res}(f,0)$.

(2). 能否定义 f 在 ∞ 的留数？说明理由.

5. (留数定理的应用) 选取适当区域, 利用留数定理计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\ (a,b>0).$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

6. (涉及多值函数的积分，选做题) 假设 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, 取 $\mathrm{Log}(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ 上的单值全纯分支 $\log(z)$, 满足 $\log(-1)=i\pi$. 证明

$$\int_{\partial\mathbb{D}\setminus\{1\}} f(z)\log(z)dz=2\pi i\int_0^1 f(x)dx.$$