第四章 全纯函数

4.1 全纯函数的定义

假设 Ω 是平面区域，$f:\Omega\to\mathbb{C}$ 是复值函数, $z_0\in\Omega$。称 f 在 z_0 复可微，如果极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

存在。注意, 此处 h 取非零复数使 $z_0+h\in\Omega$。极限存在时, 我们记之为 $f'(z_0)$, 称为 f 在 z_0 的导数。

如果 f 在 Ω 上任一点都复可微，称 f 在 Ω 上全纯。复平面上的全纯函数被称为整函数。

显然 f 在 z_0 复可微意味 f 在 z_0 点连续，这由下式可见

$$f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h=o(|h|),$$

这里 $o(|h|)$ 表示一个关于 h 的函数, 满足当 $h\to 0$ 时, $o(|h|)/|h|\to 0$。

先看两例：$f(z)=a_0+a_1z+\cdots a_dz^d, a_d\neq 0$。简单计算知

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=a_1+2a_2z+\cdots+da_{d-1}z^{d-1}+O(h).$$

当 $h\to 0$ 时, 上式极限存在。因此 f 全纯, 且 $f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+da_{d-1}z^{d-1}$。

又如 $g(z)=\overline{z}$。显然

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{h}=\frac{\overline{h}}{h}.$$

h 沿着实轴与虚轴的方向趋于零, 上式右端分别趋向 1 和 -1，因而极限不存在。

下面说明复可微是一个非常强的性质, 它蕴含了函数的实部与虚部的可微性, 且满足一种特别的关系。

先回忆实函数的可微性。实函数 $g:\Omega\to\mathbb{R}$ 在 z_0 可微，指存在实数 a,b, 满足当复数 h 模长很小时,

$$g(z_0+h)-g(z_0)=ah_1+bh_2+o(|h|),\ \ h=h_1+ih_2,$$

这里 h_1,h_2 分别为 h 的实部与虚部, a,b 分别被定义为 g 关于 x,y 的偏导数 $g_x(z_0),g_y(z_0)$.

现假设 f 在 z_0 复可微, 记 $f'(z_0)=a+bi$。由定义

$$f(z_0+h)-f(z_0)-(a+ib)(h_1+ih_2)=o(|h|).$$

上式等价于 $f=u+iv$ 的实部, 虚部分别满足

$$u(z_0+h)-u(z_0)-(ah_1-bh_2)=o(|h|),$$
$$v(z_0+h)-v(z_0)-(bh_1+ah_2)=o(|h|).$$

这说明 u,v 在 z_0 点可微，且偏导数满足

$$u_x(z_0)=a=v_y(z_0),\ \ u_y(z_0)=-b=-v_x(z_0).$$

定理 4.1. 假设 $f=u+iv:\Omega\to\mathbb{C}$ 为复值函数。

1. (局部版本) f 在 $z_0\in\Omega$ 处复可微的充要条件是 u,v 在 $z_0\in\Omega$ 处可微, 且满足

$$u_x(z_0)=v_y(z_0),\ \ u_y(z_0)=-v_x(z_0).$$

2. (整体版本) f 在 Ω 上全纯的充要条件是 u,v 在 Ω 上可微, 且满足方程

$$u_x=v_y,\ \ u_y=-v_x.$$ [a]

[a] 这里的方程称为 Cauchy-Riemann 方程。

全纯函数满足如下性质

1. 假设 f,g 都是区域 Ω 上的全纯函数, 则 $f\pm g$, fg, f/g(在 g 不取零值的点处定义) 都是 Ω 上的全纯函数, 满足

$$(f\pm g)'(z)=f'(z)\pm g'(z),\ \ z\in\Omega,$$

$$(fg)'(z)=f'(z)g(z)+f(z)g'(z),\ \ z\in\Omega,$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z)=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g(z)^2},\ \ z\in\Omega\setminus g^{-1}(0).$$

2. 假设 $f:\Omega\to D\subset\mathbb{C}$ 全纯, $g:D\to\mathbb{C}$ 全纯, 其中 Ω, D 为平面区域，则 $g\circ f:\Omega\to\mathbb{C}$ 全纯, 满足

$$(g\circ f)'(z)=g'(f(z))f'(z).$$

4.2　复值函数的偏导数

本节将在比复可微函数更广的函数类 —实可微复值函数 –上定义微分算子。

称复值函数 $f=u+iv:\Omega\to\mathbb{C}$ 在 $z_0\in\Omega$ 处 (在 Ω 上) 实可微，如果 u,v 都在 z_0 点处 (在 Ω 上) 可微。

对在 z_0 处实可微的函数 f, 易见极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x},\ \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z_0+i\Delta y)-f(z_0)}{\Delta y}$$

存在，分别记为 $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$。容易验证

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

函数值沿 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 方向的变化量可表示为

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Delta y+o(|\Delta z|).$$

将等式

$$\Delta x=\frac{1}{2}(\Delta z+\overline{\Delta z}),\ \Delta y=\frac{1}{2i}(\Delta z-\overline{\Delta z})$$

代入上式可得

$$\begin{aligned} f(z_0+\Delta z)-f(z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\Delta z \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|). \end{aligned}$$

受上式启发，引入微分算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

这样, 函数值的变化量满足等式：

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f_z(z_0)\Delta z+f_{\overline{z}}(z_0)\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|).$$

下面解释微分算子定义的合理性。事实上, 可以将 f 看成实变量 x,y 的函数 $f=f(x,y)$. 利用 $x=(z+\overline{z})/2, y=-i(z-\overline{z})/2$,

得到 $f=f((z+\overline{z})/2,-i(z-\overline{z})/2)$。在求偏导数时, 如果将 $z,\overline{z}$ 看成独立变量, 利用链式法则得等式

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

恰好与上面定义的微分算子相统一。

一个自然的疑问是：为什么能将 $z,\bar{z}$ 看做独立变量？为回答这个问题, 不妨假设 x,y 都是复数, 同时将 $\bar{z}$ 换成 w, 考虑线性变换 $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$：

$$x=\frac{z+w}{2},\ y=\frac{z-w}{2i},$$

此处 z,w 为独立变量。函数 f 可诱导 $\mathbb{C}^2$ 的区域

$$Q:=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2;\mathrm{Re}(x)+i\mathrm{Re}(y)\in\Omega\}$$

上的复值函数：

$$F(x,y)=f(\mathrm{Re}(x),\mathrm{Re}(y)):Q\to\mathbb{C}.$$

作为二元复变量的函数 F, 其偏导数 F_x,F_y 可以在另一个复变量固定时，类似定义。在变换 T 之下，可将 F 视为 z,w 的函数。利用求偏导的链式法则, 可得

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-i\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial w}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

最后，我们将 x,y 都限制成实数，此时 $F(x,y)=f(x,y)$, 并且 $w=x-iy=\bar{z}$。于是上面等式成为

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

这个等式, 说明在求偏导时, 可将 $z,\bar{z}$ 视为独立变量。

由上式又可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=i\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right).$$

利用复值函数偏导记号，返回讨论复可微。

如果进一步假设 f 在 z_0 处复可微, 由导数的定义

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h},$$

可令 h 沿实轴或虚轴方向趋于 0, 沿这两个不同方向得到的极限都是 $f'(z_0)$. 对应于取 $h=\Delta x$ 或 $i\Delta y$, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z_0+i\Delta y)-f(z_0)}{i\Delta y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).\end{aligned}$$

于是成立

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

由微分算子的定义可以看出,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)=f'(z_0),\ \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$$

这样定理4.1 可叙述为如下形式:

定理 4.2. 假设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 为复值函数。

1. (局部版本) f 在 $z_0\in\Omega$ 复可微的充要条件是 f 在 z_0 实可微, 且满足 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$。此时, 导数 $f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$。

2. (整体版本) $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 全纯充要条件是 f 实可微且满足 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$。[a] 此时, $\frac{\partial f}{\partial z}(z)=f'(z),\forall z\in\Omega$。

[a] 方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ 称为 Cauchy-Riemann 方程的复形式。

此处, 为更好理解 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, 将其表示为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)+i\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\Big)+i\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big).\end{aligned}$$

由此可见

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

上式右端为 Cauchy-Riemann 方程。因此方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ 也被称为 Cauchy-Riemann 方程的复形式。

总结本节讨论, 对于实可微函数 f,

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f_z(z)\Delta z+f_{\overline{z}}(z)\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|).$$

特别地, 对全纯函数 f,

$$f(z+\Delta z)-f(z)=A\Delta z+o(|\Delta z|),\ \text{这里}A=f'(z)=f_z(z).$$

全纯函数即为满足 Cauchy-Riemann 方程的实可微复值函数。

4.3 映射性质

一个实可微复值函数 $f=u+iv$, 可以视为映射

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y)),$$

其 Jacobi 矩阵

$$J_f(z)=\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}.$$

命题 4.1. 如果 $f=u+iv$ 实可微，则其 Jacobi 行列式

$$\det(J_f(z))=|f_z(z)|^2-|f_{\overline{z}}(z)|^2.$$

特别地，如果 f 全纯, $\det(J_f(z))=|f'(z)|^2$。

证明: 将 $f_z,f_{\overline{z}}$ 表示为实形式:

$$\begin{aligned} f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y) &= \frac{1}{2}(u_x+iv_x-i(u_y+iv_y)) \\ &= \frac{1}{2}((u_x+v_y)+i(v_x-u_y)), \\ f_{\overline{z}}=\frac{1}{2}(f_x+if_y) &= \frac{1}{2}(u_x+iv_x+i(u_y+iv_y)) \\ &= \frac{1}{2}((u_x-v_y)+i(v_x+u_y)). \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} & |f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2 \\ = & \frac{1}{4}((u_x+v_y)^2+(v_x-u_y)^2-(u_x-v_y)^2-(v_x+u_y)^2) \\ = & u_xv_y-v_xu_y=\det(J_f). \end{aligned}$$

4.4 习题

1. (复可微性) 定义函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=x^3y^2+ix^2y^3$。求使 f 复可微的所有点的集合。

2. (全纯性) 设 f 在平面区域 Ω 全纯，证明 $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ 在区域 $\Omega^*=\{\overline{z};z\in\Omega\}$ 上全纯。

3. (复可微性) 研究如下函数的复可微性

(1). $f(z)=\mathrm{Re}(z)$;

(2). $f(z)=|z|^3$;

(3). $f(z)=z(z-1)\mathrm{Re}(z)$;

哪些点导数存在？哪些点导数不存在？证明你的结论。

4. (复可微性) 是否存在复平面上的实可微函数，使其复可微点的集合恰好是实轴？

5. (偏导数的计算) 令 $f(z)=az^2+|z|^2$, 求 $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$。

6. (微分算子的性质) 利用微分算子的定义证明

$$\frac{\partial z}{\partial z}=\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}}=1,\ \frac{\partial z}{\partial \overline{z}}=0.$$

7. (微分算子的性质) 设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 实可微，证明如下等式

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}},\quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

(利用微分算子的定义，证明实部虚部相等)

8. (复合函数偏导) 设 $f:D\to\Omega$, $g:\Omega\to\mathbb{C}$ 都是实可微函数，证明

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}=\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

9. (全纯函数常值性的判别) 假设 $f=u+iv:\Omega\to\mathbb{C}$ 全纯, 满足以下条件之一:

(1). u 是常数;

(2). $|f|$ 是常数;

(3). $u=v^2$;

证明 f 是常数。