《抽象代数》期中考试

2022 年 11 月 5 日 9:00-12:00

答题要求：所有题目均需要写出详细的解题过程。

题 1 (20 分). 判断以下命题是否正确。若正确则证明之，否则请举一个反例。

(1) 设 a, b 是群 G 内的元素，满足 $ab = ba$, $\mathrm{ord}(a) = m$, $\mathrm{ord}(b) = n$, 则 $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{lcm}(m, n)$. 这里 lcm 表示最小公倍数。

(2) S_n 内的奇数阶置换必是偶置换。

(3) 设 G 是群且 $G/Z(G)$ 是循环群，则 G 是 Abel 群。

(4) 设 G 是群，$a \in G$，$H \leqslant G$，$[G : H] = n$, 则 $a^n \in H$.

题 2 (15 分). 设 $\sigma = (1234567)$ 是 S_7 内的一个 7-循环，$H = \langle \sigma \rangle$ 是其生成的 S_7 的子群。

(1) 求 σ 的中心化子 $Z(\sigma)$. 说明你的理由。

(2) 求 H 的正规化子 $N(H)$ 的阶。说明你的理由。

(3) 证明：S_7 有 21 阶子群。

题 3 (20 分). 设 G 是 28 阶非 Abel 群且 G 有 4 阶循环子群 $H = \langle a \rangle$.

(1) 证明：$N_G(H) = H$.

(2) 设 b 是 G 的任一 7 阶元，证明：$aba^{-1} = b^{-1}$.

(3) 证明：G 有唯一 14 阶子群 K 且 $K \cong C_{14}$.

(4) 求 G 中 $2, 4, 7, 14$ 阶元的个数。说明你的理由。

题 4 (10 分). 设 G 是有限群，$p \mid |G|$，H 是 G 的一 p-子群。证明 Sylow 定理的如下推广：G 的含 H 的 Sylow p-子群的个数模 p 余 1. 注：本题允许使用 *Sylow* 定理的结论。

题 5 (15 分). 设 G 是 p^3 阶非 Abel 群，p 是素数。

(1) 求 $|Z(G)|$. 说明你的理由。

(2) 对任意 $a \notin Z(G)$，求 $|Z_G(a)|$. 说明你的理由。

(3) 求 G 的类方程。说明你的理由。

(4) 求 G 的 p^2 阶子群的个数。说明你的理由。

题 6 (10 分). 设 G_1, G_2 是有限群且 $|G_1|$ 与 $|G_2|$ 互素，证明：

$$\mathrm{Aut}(G_1 \times G_2) \cong \mathrm{Aut}(G_1) \times \mathrm{Aut}(G_2)$$

并举例说明当 $|G_1|, |G_2|$ 不互素时，结论不一定成立。

题 7 (10 分). 设 G 是有限群，$N \lhd G$.

(1) 证明：若 P 是 G 的一 Sylow p-子群，则 PN/N 是 G/N 的一 Sylow p-子群。

(2) 证明：对 G/N 的任一 Sylow p-子群 $\hat{P}$，存在 G 的 Sylow p-子群 P 使 $\hat{P} = PN/N$.

本题默认：如果 p 不是 $|G|$ 的素因子，那么 G 的 *Sylow* p-子群是 1.