1. 对 $x\in R_l$，x 处一组可数邻域基为 $[x, x+\frac{1}{n})$，$n\in N_+$

对 $(a,b)\in I_0^2=[0,1]\times[0,1]$，$(a,b)$ 处的可数基可以为

$$\left((a, b-\tfrac{1}{n}b), (a, b+\tfrac{1}{n}(1-b)) \right) \quad n\in N_+ \quad 0<b<1$$

$$\left((a-\tfrac{1}{n}a, 1-\tfrac{1}{n}), (a, \tfrac{1}{n}) \right) \quad n\in N_+ \quad b=0$$

$$\left((a, 1-\tfrac{1}{n}), (a+\tfrac{1}{n}(1-a), \tfrac{1}{n}) \right) \quad n\in N_+ \quad b=1$$

扫描全能王 创建

2. 取 $X=\mathbb{R}$. $C_1=\{(-2n,2n), n\in N_+\}$, $C_2=\{(-n,n), n\in N_+\}$. $\mathcal{T}_i=\mathcal{T}_{C_i}$

$\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ 均是 $\mathbb{R}$ 上拓扑, 且 $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$, 因为 $(-1,1)\notin \mathcal{T}_2$

定义 $f: (\mathbb{R},\mathcal{T}_1)\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$

$$x\longmapsto \frac{1}{2}x$$

$f((-2n,2n))=(-n,n)$ 且 $f^{-1}((-n,n))=(-2n,2n)$ 均是连续.

故 f 为同胚. $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ 同胚于 $(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$.

3. X、Y 为全序集, 由 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. 知 $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

(事实上, 若 $f(x_1)<f(x_2)$, 可说明 $x_1>x_2$, $x_1=x_2$ 均不可能).

$\forall\ x_1<x<x_2$, 知 $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$. f 为开映射. f^{-1} 连续.

另一方面. 任取 $y_1<f(x)<y_2$. 由 f 为双射知 $\exists!\ x_1, x_2$, $y_1=f(x_1)$ $y_2=f(x_2)$.

从而 $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$, $x_1<x<x_2$.

即 $f^{-1}((y_1,y_2))=(x_1,x_2)$. f^{-1} 为开映射. f 连续

从而 f 为同胚.

扫描全能王 创建

4. 由 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ 可知

$$f(B_{d_X}(x,r)) = B_{d_Y}(f(x),r) \cap f(X)$$

即 $z \in B_{d_X}(x,r) \Leftrightarrow f(z) \in B_{d_Y}(f(x),r) \cap f(X)$

故 f. f^{-1} 均连续(关于 X、$(f(X)$, 子拓扑$)$).

而 f 单射, 因为若 $f(x_1)=f(x_2)$. 由 $d_X(x_1,x_2) = d_Y(f(x_1).f(x_2))=0$ 知 $x_1=x_2$.

从而 f 为嵌入.

5. 先证明. Y 是 Hausdorff 空间 $\Leftrightarrow \Delta = \{(x,x) \mid x \in Y\}$ 是 $Y \times Y$ 中闭集.(即 $Y\times Y \setminus \Delta$ 是开集)

$(\Rightarrow)$. 任取 $(x_1,x_2) \in Y\times Y \setminus \Delta$. 由 $x_1, x_2 \in Y$. 且 $x_1 \neq x_2$.

知存在开集 U、V. $x_1 \in U$, $x_2 \in V$, $U \cap V = \phi$.

$\Rightarrow (x_1,x_2) \in U \times V \subset Y \times Y \setminus \Delta$. 故 $Y\times Y\setminus\Delta$ 是开集.

$(\Leftarrow)$ 先取 $x_1, x_2 \in Y$. $x_1 \neq x_2$. 由 $(x_1,x_2) \in Y\times Y\setminus\Delta$

知 $\exists U,V$. $(x_1,x_2) \in U\times V \subset Y\times Y\setminus\Delta$

$\Rightarrow x_1 \in U$, $x_2 \in V$ 且 $U \cap V = \phi$. 即 Y 是 Hausdorff.

回到原题. 定义 $B = \{x \in \bar{A} : g_1(x) = g_2(x)\}$, 知 $A \subset B \subset \bar{A}$

欲证 $B = \bar{A}$ 只需证明 B 是闭集.

注意到 $B = G^{-1}(\Delta)$, 这里 $G(x) = (g_1(x), g_2(x))$, $x \in \bar{A}$

由于 $\pi_i \circ G = g_i$ 连续. $i=1,2$. 知 G 连续, 再由 Δ 是闭集.

故 $B = G^{-1}(\Delta)$ 为闭集. 我们有 $g_1 = g_2$, 在 $\bar{A}$ 上.

扫描全能王 创建

6. 任取 $x\in X$，由题知存在开邻域 U_x，及有限多个 A_α. s.t.

$$U_x \subset \bigcup_{\alpha=1}^{m} A_\alpha.$$

由黏结引理. $f|_{A_\alpha}$ 连续知、A_α，$\alpha=1,2\cdots m$ 为闭集

知 $f|_{\bigcup_{\alpha=1}^{m} A_\alpha}$ 连续. 故 $f|_{U_x}$ 连续.

再由 $X=\bigcup_{x\in X} U_x$ 知 f 在 X 上连续.

扫描全能王 创建

7. 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上赋予度量 $d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\begin{cases}1, & x_1\neq y_1\\ \min\{|x_2-y_2|,1\}, & x_1=y_1\end{cases}$

首先证明其是度量，仅证三角不等式：$d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z)$.

当 $x_1\neq y_1$ 或 $y_1\neq z_1$ 时，上式显然。现设 $x_1=y_1=z_1$

欲证 $\min\{|x_2-y_2|,1\}+\min\{|y_2-z_2|,1\}\geqslant\min\{|x_2-z_2|,1\}$

当 $|x_2-y_2|\geqslant 1$ 或 $|y_2-z_2|\geqslant 1$ 时显然，设 $|x_2-y_2|,|y_2-z_2|\leq 1$.

上式左边 $=|x_2-y_2|+|y_2-z_2|\geqslant|x_2-z_2|\geqslant$ 右边 得证.

再证明，d 诱导出度量拓扑与 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上字典序拓扑等价（分别记作 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$）.

任取 $\mathcal{T}_1$ 中基元素 $B_d(x,\varepsilon)$，可设 $\varepsilon<1$. 不然 $B_d(x,\varepsilon)=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

此时 $B_d(x,\varepsilon)=\{x_1\}\times(x_2-\varepsilon,x_2+\varepsilon)$ 为 $\mathcal{T}_2$ 中开集，$\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$

任取 $\mathcal{T}_2$ 中开集 U，$\forall x\in U$. 总存在 $0<\delta<1$. s.t.

$x\in\{x_1\}\times(x_2-\delta,x_2+\delta)\subset U$

而 $\{x_1\}\times(x_2-\delta,x_2+\delta)=B_d(x,\delta)$，即 $x\in B_d(x,\delta)\subset U\Rightarrow\mathcal{T}_2\subset\mathcal{T}_1$

从而 $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$.

扫描全能王 创建