第十四章　幂级数与同伦

14.1　迭代的美好

定理 14.1. 假设 Ω 是平面有界区域, $f:\Omega\to\Omega$ 全纯, $z_0\in\Omega$ 为 f 的不动点。证明

1. $|f'(z_0)|\le 1$;
2. 如果 $f'(z_0)=1$, 则 $f(z)\equiv z$。

此定理的第一条结论为 Schwarz 引理的一种推广；第二条结论为多复变的 Cartan 引理的一维情形。二者的共同点是，证明都用到了函数迭代的思想。

证明: 通过将 Ω 做平移 $\Omega-z_0:=\{z-z_0;z\in\Omega\}$, f 做平移共轭 $g(z)=f(z_0+z)-z_0$, 不妨假设 $z_0=0$。由 Ω 的有界性可知，存在 $R>\rho>0$, 使得 $\overline{D(0,\rho)}\subset\Omega\subset D(0,R)$。

1. 对任意自然数 $n\ge 1$, f 的 n 次复合 $g_n=f\circ\cdot\circ f$ (n 次) 满足 $g_n:D(0,\rho)\to D(0,R)$ 全纯，且 $g_n(0)=0$。利用导数的 Cauchy 不等式知 $|g_n'(0)|\le R/\rho$。由复合函数求导法则知 $g_n'(0)=(f'(0))^n$。因此成立 $|f'(0)|\le\sqrt[n]{R/\rho}$。此式对任意正整数 $n\ge 1$ 都成立。令 $n\to\infty$ 可得 $|f'(0)|\le 1$。

2. 利用全纯函数的唯一性定理，为证明 $f=\mathrm{id}$, 只需证明 $f|_{D(0,\rho)}=\mathrm{id}$。若不然, 利用幂级数展式的唯一性，$f$ 在 $D(0,\rho)$ 上的幂级数展式具有如下形式

$$f(z)=z+\sum_{k\ge m}a_kz^k,$$

其中 $m\ge 2$ 且 $a_m\ne 0$。显然, 对任意 $n\ge 2$, $f^{\circ n}=f\circ\cdots\circ f:\Omega\to\Omega$ 全纯。计算可知

$$f^{\circ n}(z)=z+na_mz^m+O(z^{m+1}).$$

另一方面, 对 $f^{\circ n}: D(z_0,\rho)\to\Omega$ 应用 Cauchy 不等式, 得

$$|(f^{\circ n})^{(m)}(0)| \le m!\frac{\|f^{\circ n}\|_\Omega}{\rho^m} \le m!\frac{R}{\rho^m} \Longleftrightarrow |a_m| \le \frac{R}{n\rho^m}.$$

上式对任意 $n\ge 1$ 都成立, 故 $a_m=0$。矛盾。 □

14.2 指数函数

指数函数由幂级数定义:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

它是实指数函数 e^x 的自然延拓。易验证，幂级数的收敛半径 $R=\infty$, 因此 e^z 是整函数。同时, $|e^z|\le\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n/n! = e^{|z|}$。这说明，级数在任意点处都绝对收敛，限制在平面紧集上一致收敛。

特别地，令 $z=i\theta,\ \theta\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \cos\theta+i\sin\theta.
\end{aligned}$$

此式为欧拉公式。此外

$$\begin{aligned}
e^z\cdot e^w &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^s}{s!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{w^t}{t!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s+t=n}\frac{z^s}{s!}\frac{w^t}{t!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{s!(n-s)!}z^s w^{n-s}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w}.
\end{aligned}$$

指数函数有如下性质:

- 指数函数的导函数为自身:

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty}n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = e^z.$$

- $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x \ne 0$。说明指数函数在平面上共形。

- $e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$。这说明 e^z 是以 $2\pi i$ 为周期。
- $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ 作为映射，值域为 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$。它将水平带域 $\{\alpha < \mathrm{Im} z < \beta\} = \mathbb{R} \times (\alpha, \beta)$ (其中 $\beta - \alpha \leq 2\pi$) 映到角形区域 $\{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \arg w \in (\alpha, \beta)\}$; 将垂直带域 $\{a < \mathrm{Re} z < b\} = (a, b) \times \mathbb{R}$ 映到圆环域 $\{e^a < |w| < e^b\}$。

显然，e^z 并不是平面的单射，事实上利用周期性可知，任意 $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的逆像都有无穷多个。如果区域 Ω 满足 $e^z|_\Omega$ 是单射，我们称 Ω 是 e^z 的一个单叶性区域。可以验证，Ω 是 e^z 的一个单叶性区域的充要条件是不存在 $z, w \in \Omega$ 满足 $z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$。宽度不超过 2π 的水平带域是 e^z 的一个单叶性区域。

一般而言，假设 f 是区域 Ω 上的全纯函数, 如果 D 是 Ω 的一个子区域，且 $f|_D$ 是单射，则称 D 是 f 的一个单叶性区域。“单叶”的概念源自复分析, 指全纯单射。

14.3 曲线同伦

给定平面区域 Ω 中两条曲线 $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega$, 起点终点分别相同：$\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \alpha$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \beta$。称 γ_0, γ_1 在 Ω 中同伦，如果存在连续映射 $h : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega \setminus \{c\}$, 满足

$$h(0, t) = \gamma_0(t), h(1, t) = \gamma_1(t), \ \forall t \in [a, b],$$

$$h(s, a) = \gamma_0(a), h(s, b) = \gamma_0(b), \forall s \in [0, 1].$$

注：如果 γ_0, γ_1 分段光滑，且在 Ω 中同伦，则可以将同伦改造成一个“好”的同伦：$H : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega$, 使得对任意 $s \in [0, 1]$, 曲线 $\gamma_s = H(s, \cdot)$ 分段可微 (详见习题)。

定理 14.2. 假设 f 在区域 Ω 中全纯，γ_0, γ_1 是 Ω 中同伦的两条分段光滑曲线，则

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

证明：假设 $h : [0, 1] \times [0, 1] \to \Omega \setminus \{c\}$ 是 γ_0, γ_1 之间的“好”的同伦。h 的像集 K 是 Ω 中的紧集。取 $0 < \epsilon < d(K, \partial\Omega)/3$。由 h 的一致连续性，存在 $\delta > 0$, 使得

$$|s_1 - s_2| < \delta, |t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow |h(s_1, t_1) - h(s_2, t_2)| < \epsilon.$$

取正整数 n 足够大，满足 $1/n < \delta$, 取 s_1, s_2 满足 $|s_1 - s_2| < \delta$。定义

$$z_k = \gamma_{s_1}(k/n), w_k = \gamma_{s_2}(k/n),\ 0 \le k \le n,$$

以及 $D_k = D(z_k, 2\epsilon), 1 \le k \le n$。由 h 的一致连续性以及三角不等式可以验证 $h([s_1, s_2], [0,1]) \subset \bigcup_{1\le k\le n} D_k$，

$$z_{k-1}, z_k, w_{k-1}, w_k \in D_k,\ \gamma_{s_i}([(k-1)/n, k/n]) \subset D_k,\ 1 \le k \le n.$$

记 f 在 D_k 上的原函数为 F_k。则在公共区域 $D_k \cap D_{k+1}$ 上，F_k, F_{k-1} 都是 f 的原函数, 因此 $F_k - F_{k+1}$ 为常数。特别地

$$F_k(z_k) - F_{k+1}(z_k) = F_k(w_k) - F_{k+1}(w_k),$$

上式等价于

$$F_k(z_k) - F_k(w_k) = F_{k+1}(z_k) - F_{k+1}(w_k).$$

于是有

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz \\
= & \sum_{k=1}^{n}(F_k(z_k) - F_k(z_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n}(F_k(w_k) - F_k(w_{k-1})) \\
= & \sum_{k=1}^{n}(F_k(z_k) - F_k(w_k)) - \sum_{k=1}^{n}(F_k(z_{k-1}) - F_k(w_{k-1})) \\
= & (F_n(z_n) - F_n(w_n)) - (F_1(z_0) - F_1(w_0)) = 0.
\end{aligned}$$

这说明积分关于 s 局部常值。将 $[0,1]$ 划分为有限个长度小于 δ 的区间，得证。 □

14.4　同伦与单连通域

平面区域 Ω 单连通的另一个等价定义为：Ω 中任意两条端点分别相同的曲线同伦。利用这个定义，可以证明

定理 14.3. 单连通区域上任何全纯函数总是存在原函数。

证明：假设 f 是单连通区域 Ω 上的全纯函数。取定 $z_0 \in \Omega$。对任意 $z \in \Omega$, 定义

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta,$$

其中 γ_z 是连接 z_0 与 z 的分段光滑曲线。先说明 F 良定义。事实上，任取另一条连接 z_0 和 z 的分段光滑曲线 α_z，由 Ω 的单连通性可知，γ_z 与 α_z 同伦。由定理14.2, 可知

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta = \int_{\alpha_z} f(\zeta)d\zeta.$$

因此 F 的定义与 γ_z 选取无关。

下说明 F 是 f 的原函数。任取 $z \in \Omega$, 取 $\epsilon > 0$ 使得 $D(z,\epsilon) \subset \Omega$。对任意 $w \in D(z,\epsilon)$,

$$F(w) - F(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta)d\zeta.$$

由导数的定义可以验证 $F'(z) = f(z)$。 □

推论 14.1. [Cauchy-Goursat 定理的一般形式] 假设 f 是单连通区域 Ω 上的全纯函数，$\gamma \subset \Omega$ 是分段光滑闭曲线，则

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

证明：由原函数的存在性以及 Newton-Leibniz 公式可得。

14.5 习题

1. (单射的充分条件) 假设 $f: D(0,r) \to \mathbb{C}$ 全纯且非常值，幂级数展式 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 满足

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \le |a_1|.$$

证明 f 是单射。

2. (导数与像集直径) 1907 年，芬兰数学家 Poukka 发现了全纯函数的导数与像区域直径的一个有趣的联系：假设 f 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数，像集 $\Omega = f(\mathbb{D})$，则成立不等式

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(\Omega).$$

进一步，对任意 $n \geq 1$, 有

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2}\mathrm{diam}(\Omega).$$

通过对 $g(z) = f(z) - f(e^{\pi i/n}z)$ 应用 Cauchy 不等式，给出证明。

3. (系数估计) 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 对于 $r \in (0, R)$, 定义 $A(r) = \max_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)$。证明对任意 $n \geq 1$, 成立

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\mathrm{Re} f(re^{i\theta})] e^{-in\theta} d\theta; \quad |a_n| r^n \leq 2A(r) - 2\mathrm{Re} f(0).$$

4. (指数函数不等式) 假设 a, b 都在左半平面，证明不等式

$$|e^a - e^b| \leq |a - b|.$$

附加题 (不做要求)

5. (同伦的改造, 选做题) 在证明全纯函数沿两条同伦的分段光滑曲线积分相等时，需要说明同伦形变的每条曲线都分段可微, 即曲线导数 $\gamma_s'(t)$ 分段连续 (不要求在每一段都非零，比分段光滑稍弱)。不难由积分的定义看出，分段可微即可保证积分 $\int_{\gamma_s} f(z)dz$ 有意义。本题将手把手教你证明：两条分段光滑曲线之间的任意同伦，总可以改造成一个“好”同伦：在形变的每一参数处，对应的曲线都分段可微。

如果 $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ 分段光滑，$\gamma_k(0) = a, \gamma_k(1) = b$, $k = 0, 1$.

(a). 证明对任意 $s \in [0,1]$, $\gamma_s(t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$ 是分段可微曲线。

(b). 假设 $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ 是 γ_0, γ_1 之间的同伦。记 $\gamma_s(t) = h(s,t), t \in [0,1]$。假设 N 是自然数，定义

$$\Delta_{j,k}^N = \left\{(s,t); \frac{j-1}{N} \leq s \leq \frac{j}{N}, \frac{k-1}{N} \leq t \leq \frac{k}{N}\right\}, \ 1 \leq j, k \leq N.$$

证明当 N 很大时，对任意 $j,k\in\{1,\cdots,N\}$, 存在开圆盘 $\mathbb{D}_{jk}$ 使

$$h(\Delta_{j,k}^N)\subset\mathbb{D}_{j,k}\subset\Omega.$$

(c). 在 $\Delta_{j,k}^N$ 上，将 h 改造成 H, 如下：在四个顶点处 $H(s,t)=h(s,t)$；如果在顶边是 γ_0 的一段，或底边是 γ_1 的一段，则在该边处定义 $H(s,t)=h(s,t)$；在其他的顶边或底边处，定义 H 为连接两端点的线性函数；在 $\Delta_{j,k}^N$ 内部，则线性插值如下

$$H\Big((1-\tau)\frac{j-1}{N}+\tau\frac{j}{N},t\Big)=(1-\tau)H\Big(\frac{j-1}{N},t\Big)+\tau H\Big(\frac{j}{N},t\Big).$$

证明 H 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数，取值于 Ω, 并且 H 是连接 γ_0,γ_1 的同伦。

(d). 对任意 $s\in[0,1]$, 证明 $\widetilde{\gamma}_s=H(s,\cdot)$ 是分段可微曲线。