第十四章　幂级数与同伦

14.1　迭代的美好

定理 14.1. 假设 Ω 是平面有界区域, $f:\Omega\to\Omega$ 全纯, $z_0\in\Omega$ 为 f 的不动点. 证明

1. $|f'(z_0)|\le 1$;
2. 如果 $f'(z_0)=1$, 则 $f(z)\equiv z$.

此定理的第一条结论为 Schwarz 引理的一种推广；第二条结论为多复变的 Cartan 引理的一维情形。二者的共同点是，证明都用到了函数迭代的思想。

证明: 通过将 Ω 做平移 $\Omega-z_0:=\{z-z_0;z\in\Omega\}$, f 做平移共轭 $g(z)=f(z_0+z)-z_0$, 不妨假设 $z_0=0$。由 Ω 的有界性可知，存在 $R>\rho>0$, 使得 $\overline{D(0,\rho)}\subset\Omega\subset D(0,R)$.

1. 对任意自然数 $n\ge 1$, f 的 n 次复合 $g_n=f\circ\cdot\circ f$ (复合 n 次) 满足 $g_n:D(0,\rho)\to D(0,R)$ 全纯，且 $g_n(0)=0$. 利用导数的 Cauchy 不等式可知 $|g_n'(0)|\le R/\rho$. 由复合函数求导法则知 $g_n'(0)=(f'(0))^n$。因此成立 $|f'(0)|\le\sqrt[n]{R/\rho}$. 此式对任意正整数 $n\ge 1$ 都成立. 令 $n\to\infty$ 可得 $|f'(0)|\le 1$.

2. 利用全纯函数的唯一性定理，为证明 $f=\mathrm{id}$, 只需证明 $f|_{D(0,\rho)}=\mathrm{id}$。若不然, 利用幂级数展式的唯一性，$f$ 在 $D(0,\rho)$ 上的幂级数展式具有如下形式

$$f(z)=z+\sum_{k\ge m}a_kz^k,$$

其中 $m\ge 2$ 且 $a_m\ne 0$. 显然, 对任意 $n\ge 2$, $f^{\circ n}=f\circ\cdots\circ f:\Omega\to\Omega$ 全纯. 简单计算可知

$$f^{\circ n}(z)=z+na_mz^m+O(z^{m+1}).$$

另一方面, 对 $f^{\circ n}: D(z_0,\rho)\to\Omega$ 应用 Cauchy 不等式, 得

$$|(f^{\circ n})^{(m)}(0)| \le m!\frac{\|f^{\circ n}\|_\Omega}{\rho^m} \le m!\frac{R}{\rho^m} \Longleftrightarrow |a_m| \le \frac{R}{n\rho^m}.$$

上式对任意 $n\ge 1$ 都成立, 故 $a_m=0$. 矛盾. □

14.2　指数函数

指数函数由幂级数定义：

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

它是实指数函数 e^x 的自然延拓。易验证，幂级数的收敛半径 $R=\infty$, 因此 e^z 是整函数. 同时, $|e^z|\le\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n/n!=e^{|z|}$. 这说明，级数在任意点处都绝对收敛，限制在平面紧集上一致收敛.

特别地，令 $z=i\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos\theta+i\sin\theta. \end{aligned}$$

此式为欧拉公式. 此外

$$\begin{aligned} e^z\cdot e^w &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^s}{s!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{w^t}{t!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s+t=n}\frac{z^s}{s!}\frac{w^t}{t!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{s!(n-s)!}z^s w^{n-s}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n=e^{z+w}. \end{aligned}$$

指数函数有如下性质：

- 指数函数的导函数为自身：

$$(e^z)'=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{z^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z.$$

- $|e^z|=|e^{x+iy}|=e^x\neq 0$. 说明指数函数在平面上共形.

- $e^z = e^w \Longleftrightarrow z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$. 这说明 e^z 是以 $2\pi i$ 为周期.

- $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ 作为映射，值域为 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. 它将水平带域 $\{\alpha < \mathrm{Im} z < \beta\} = \mathbb{R}\times(\alpha,\beta)$ (其中 $\beta-\alpha \le 2\pi$) 映到角形区域 $\{w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}; \arg w \in (\alpha,\beta)\}$; 将垂直带域 $\{a < \mathrm{Re} z < b\} = (a,b)\times\mathbb{R}$ 映到圆环域 $\{e^a < |w| < e^b\}$.

显然，e^z 并不是平面的单射，事实上利用周期性可知，任意 $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的逆像都有无穷多个. 如果区域 Ω 满足 $e^z|_\Omega$ 是单射，我们称 Ω 是 e^z 的一个单叶性区域. 可以验证，Ω 是 e^z 的一个单叶性区域的充要条件是不存在 $z,w\in\Omega$ 满足 $z-w\in 2\pi i\mathbb{Z}$. 宽度不超过 2π 的水平带域是 e^z 的一个单叶性区域.

一般而言，假设 f 是区域 Ω 上的全纯函数, 如果 D 是 Ω 的一个子区域，且 $f|_D$ 是单射，则称 D 是 f 的一个单叶性区域。“单叶”的概念源自复分析, 指全纯单射.

14.3 曲线同伦

未来得及整理，参考笔记, 或 Stein and Shakachi, Complex anaysis, page 93 (学在浙大/复变函数/课件/几本参考书).

14.4　习题

1. (单射的充分条件) 假设 $f : D(0,r) \to \mathbb{C}$ 全纯且非常值，幂级数展式 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 满足

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \leq |a_1|.$$

证明 f 是单射。

2. (导数与像集直径) 1907 年，芬兰数学家 Poukka 发现了全纯函数的导数与像区域直径的一个有趣的联系：假设 f 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数，像集 $\Omega = f(\mathbb{D})$，则成立不等式

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(\Omega).$$

进一步，对任意 $n \geq 1$, 有

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2}\mathrm{diam}(\Omega).$$

通过对 $g(z) = f(z) - f(e^{\pi i/n}z)$ 应用 Cauchy 不等式，给出证明。

3. (系数估计) 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 对于 $r \in (0,R)$, 定义 $A(r) = \max_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)$。证明对任意 $n \geq 1$, 成立

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\mathrm{Re} f(re^{i\theta})]e^{-in\theta}d\theta; \quad |a_n|r^n \leq 2A(r) - 2\mathrm{Re} f(0).$$

4. (指数函数不等式) 假设 a, b 都在左半平面，证明不等式

$$|e^a - e^b| \leq |a - b|.$$

附加题 (不做要求)

5. (同伦的改造, 选做题) 在证明全纯函数沿两条同伦的分段光滑曲线积分相等时，需要说明同伦形变的每条曲线都分段可微, 即曲线导数 $\gamma_s'(t)$ 分段连续 (不要求在每一段都非零，比分段光滑稍弱)。不难由积分的定义看出，分段可微即可保证积分 $\int_{\gamma_s} f(z)dz$ 有意义。本题将手把手教你证明：两条分段光滑曲线之间的任意同伦，总可以改造成一个“好”同伦：在形变的每一参数处，对应的曲线都分段可微。

如果 $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ 分段光滑，$\gamma_k(0) = a, \gamma_k(1) = b$, $k = 0, 1$.

(a). 证明对任意 $s \in [0,1]$, $\gamma_s(t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$ 是分段可微曲线.

(b). 假设 $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ 是 γ_0, γ_1 之间的同伦. 记 $\gamma_s(t) = h(s,t), t \in [0,1]$. 假设 N 是自然数，定义

$$\Delta_{j,k}^N = \Big\{(s,t); \frac{j-1}{N} \le s \le \frac{j}{N}, \frac{k-1}{N} \le t \le \frac{k}{N}\Big\},\ 1 \le j,k \le N.$$

证明当 N 很大时，对任意 $j,k \in \{1,\cdots,N\}$, 存在开圆盘 $\mathbb{D}_{jk}$ 使

$$h(\Delta_{j,k}^N) \subset \mathbb{D}_{j,k} \subset \Omega.$$

(c). 在 $\Delta_{j,k}^N$ 上，将 h 改造成 H，如下：在四个顶点处 $H(s,t) = h(s,t)$；如果在顶边是 γ_0 的一段，或底边是 γ_1 的一段，则在该边处定义 $H(s,t) = h(s,t)$；在其他的顶边或底边处，定义 H 为连接两端点的线性函数；在 $\Delta_{j,k}^N$ 内部，则线性插值如下

$$H\Big((1-\tau)\frac{j-1}{N} + \tau\frac{j}{N}, t\Big) = (1-\tau)H\Big(\frac{j-1}{N}, t\Big) + \tau H\Big(\frac{j}{N}, t\Big).$$

证明 H 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数，取值于 Ω, 并且 H 是连接 γ_0, γ_1 的同伦。

(d). 对任意 $s \in [0,1]$, 证明 $\widetilde{\gamma}_s = H(s,\cdot)$ 是分段可微曲线。