ODE笔记4：Peano定理、Picard存在唯一定理等...

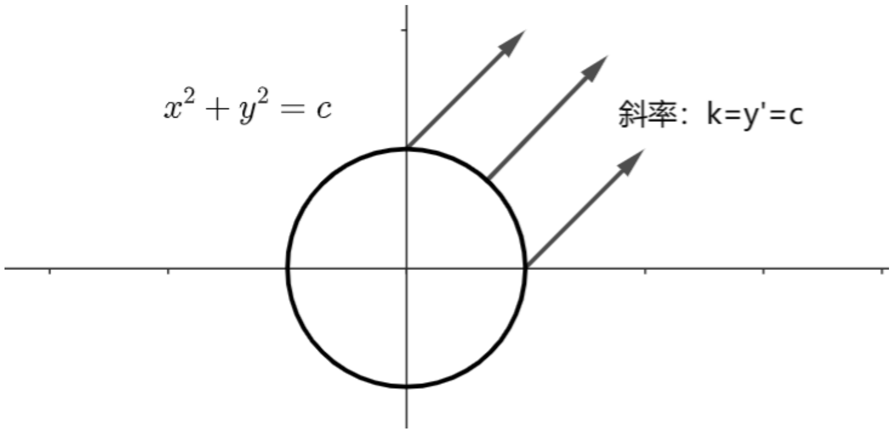
方向场：

f 定，$\forall(x,y)\in G\subset R^2,\forall p\in G$，$p(x,y)$ 斜率为 $f(x,y)$，以 $f(x,y)$ 为斜率的小直线段 $l(p)$，形成 G 上**方向场**，称区域 G 和 G 上方向场为**ODE**：$y'=f(x,y)$ **的方向场。**

找解：找曲线 γ，$\forall p\in\gamma$，γ 在 p 点与方向场相切，称 γ 为**积分曲线/解曲线。**

例1：$y'=x^2+y^2$

等势线：$x^2+y^2=c$，方向场大致的样子如下：



逼近解：Euler折线：

将 $[x_0,x_0+\alpha]$ 分成 n 小段，$h=\frac{\alpha}{n}$，$x_k=x_0+kh$，$k=1,2,\dots,n$

$$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1},y_{k-1})\cdot h$$

在介绍**Ascoli-Arzela定理**之前，先介绍以下两个概念：

等度连续：

$\forall\,\epsilon,\exists\,\delta,\forall\,x,y\in I$ 且 $|x-y|<\delta$, 有 $\underline{|\phi_n(x)-\phi_n(y)|<\epsilon}$

Lipschitz条件：

若 $f\in C(G)$, $\exists\,L>0,\ s.t.\ \forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in G$，有 $\underline{|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le L|y_1-y_2|}$. 则称 f 在 G 上关于 y 满足**Lip条件**

（1）$\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ $(*)$ 解 $y=\phi(x)\in C^1(I),\phi'(x)=f(x,\phi(x)),\forall x\in I$（Euler折线逼近，$n\to+\infty(h\to0),\phi_n(x)\to\phi(x)$）

（2）$y(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y(t))dt$ $(**)$

解：$y=\phi(x)\in I$，且 $\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y(t))dt$，$\forall x\in I$

若 $\phi(x)$ 是 $(*)$ 的解：$\phi'(x)=f(x,\phi(x))$，$\phi(x_0)=y_0$. 在 $[x_0,x]$ 作积分：

$$\phi(x)-\phi(x_0)=\int_{x_0}^x f(t,\phi(t))dt$$

是 $(**)$ 的解！ ✓

若$\phi(x)$ 是 $(**)$ 的解：
$f(t,\phi(x))\in C(I) \implies \int_{x_0}^x f(t,\phi(t))dt\in C^1(I) \implies \phi(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,\phi(t))dt\in C^1(I)$

求导：$\phi'(x)=f(x,\phi(x)),\phi(x_0)=y_0$，是 $(*)$ 的解。

$\phi_k(x)=y_k+f(x_k,y_k)(x-x_k)=y_0+f(x_0,y_0)h+f(x_1,y_1)h+\ldots+f(x_{k-1},y_{k-1})h+f(x_k,y_k)(x-x_k)$

Ascoli-Arzela定理：

有限闭区间 I 上的**一致有界、等度连续**的 $\{f_n(x)\}$ 至少存在一个在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，其中 $f(x)$ 在 I 上连续。

证明：令 $A=\{有理数\in I\}=\{x_1,x_2,\ldots\}$.

对固定的 $x=x_1$，$\{\phi_n(x_1)\}_{n=1}^{+\infty}$ 有界数列 $\implies$ 有收敛子列。记 $\{\phi_n^{(1)}\}\subset\{\phi_n\}$，其中 $\{\phi_n^{(1)}(x_1)\}\ \to y_1$.

对固定的 $x=x_2$，$\{\phi_n^{(1)}(x_2)\}$ 有界数列 $\implies$ 有收敛子列。记 $\{\phi_n^{(2)}\}\subset\{\phi_n^{(1)}\}$，其中 $\{\phi_n^{(2)}(x_2)\}\ \to y_2.(n\to+\infty)\ldots\ldots$

类似操作：$\{\phi_n^{(k)}(x_1)\}\ \to y_1$，$\{\phi_n^{(k)}(x_2)\}\ \to y_2,\ldots$，$\{\phi_n^{(k)}(x_k)\}\ \to y_k$

取子列：$\widetilde{\phi_n}(x)=\phi_n^{(n)}(x)$. 下面验证 $\widetilde{\phi_n}(x)\rightrightarrows\phi(x),\ n\to+\infty$

$\because I\subset\bigcup\limits_{x_i\in A}\left(x_i-\frac{\delta}{4},x_i+\frac{\delta}{4}\right),I=[a,b]$ 有界闭区域。由有限覆盖定理，

$I\subset\bigcup\limits_{i=1}^{B}\left(x_i-\frac{\delta}{4},x_i+\frac{\delta}{4}\right)$，$\widetilde{\phi_n}(x_i)\to y_i,\ i=1,2,\ldots,B$

$\therefore\forall\epsilon>0,\exists N,\ \forall n,m>N,\ |\widetilde{\phi_n}(x_i)-\widetilde{\phi_m}(x_i)|<\epsilon,\ i=1,2,\ldots,B.$

$\forall\epsilon>0,\exists N,\ \forall n,m>N,$

$$|\widetilde{\phi_n}(x)-\widetilde{\phi_m}(x)|\le|\widetilde{\phi_n}(x)-\widetilde{\phi_n}(x_i)|+|\widetilde{\phi_n}(x_i)-\widetilde{\phi_m}(x_i)|+|\widetilde{\phi_m}(x_i)-\widetilde{\phi_m}(x)|<\epsilon+\epsilon+\epsilon=3\epsilon$$

故 $\{\phi_n(x_1)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 I 上是一致收敛的Cauchy列，极限记为 $f(x)$. $f_n(x)\in C(I)$，且 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，则 $f(x)\in C(I)$. $\quad\square$

Peano定理：

$G\triangleq[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b],f\in C(G)$，则 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ 在 $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ 上存在一个解 $y=\phi(x)$，其中

$$\alpha=min\{a,\frac{b}{M}\}\qquad M=\max_{(x,y)\in G}|f(x,y)|$$

证明：（1）构造Euler曲线 $\phi_n(x),\ x\in[x_0,x_0+\alpha]=I,\ \phi_n(x),x\in I$ 一致有界、等度连续。

（2）逼近：$\phi_n(x)\rightrightarrows\phi(x),\ n\to+\infty.(h\to0)$

（2）✓ 验证为方程的解。 $x\in[x_k,x_{k+1}]$,

$$\begin{aligned}\phi_n(x)&=y_0+f(x_0,y_0)h+\ldots+f(x_{k-1},y_{k-1})h+f(x_k,y_k)(x-x_0)\\&=y_0+\int_{x_0}^{x_1}f(x_0,y_0)dt+\ldots+\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_{k-1},y_{k-1})dt+\int_{x_k}^{x}f(x_k,y_k)dt\\&\triangleq y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi_n(t))dt+\delta_n(x)\end{aligned}$$

其中
$\delta_n(x)=\underline{\int_{x_0}^{x_1}[f(x_0,y_0)-f(t,\phi_n(t))]dt+\ldots+\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x_{k-1},y_{k-1})-f(t,\phi_n(t))]dt+\int_{x_k}^{x}[f(x_k,y_k)-f(t,\phi_n(t))]dt}$

上式取 $\widetilde{\phi_n}(x)$，令 $n\to+\infty$：

$$\phi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi_n(t))dt+\lim_{n\to+\infty}\overline{\delta_n}(x)\qquad(这里\lim_{n\to+\infty}\overline{\delta_n}(x)=0)$$

（$f\in C(G)$，则 f 在 G 上一致连续。
$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta,\ |x_1-x_2|<\delta,\ |y_1-y_2|<\delta,\ |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\epsilon$

取 $h<\delta,\ Mh<\delta,\ \delta_n(x)<\epsilon\cdot\alpha.\qquad \forall\epsilon>0,\exists N=\frac{\alpha}{\delta},\forall n>N,\ |\delta_N(x)|<\epsilon\cdot\alpha$

Picard存在唯一性定理：

对于Cauchy问题：$\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ 考虑 $(x,y)\in G\triangleq[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b],\ f\in C(G),f$ 对 y 满足lip条件，则该Cauchy问题在 $[x_0-a,x_0+a]$ 上存在唯一解。（连续 $\implies$ 存在性；lip条件 $\implies$ 唯一性）

证明：**唯一性**：反证，令 $y_1\neq y_2$

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_1(t))dt$$
$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_2(t))dt$$

两者相减：

$$|y_1(x)-y_2(x)|\le\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))|dt\le\int_{x_0}^{x}L|y_1(t)-y_2(t)|dt,\ x\in I\implies |y_1-y_2|=0,\ \forall x\in I$$

由此产生矛盾！

rmk1：Euler折线并不能收敛到所有解。举例如下：

$\begin{cases}y'=y^{\frac{1}{3}}\\y(0)=0\end{cases}$ 有无穷多解！

rmk2：Cauchy问题有唯一解 $\implies$ $\{\phi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 全序列收敛。

反证：若Euler折线 $\{\phi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 x_1 点不收敛，那么 $\exists a,b$ 满足 $a<b$，$\forall j,k$，有：

$$\phi_{n_j}(x_1)<a<b<\phi_{n_k}(x_1)\qquad (*)$$

$\{\phi_{n_j}\}_{n=1}^{+\infty}$ 一致有界、等度连续 $\implies$ $\widetilde{\phi_{n_j}}(x)\rightrightarrows\phi_1(x),\ \phi_1(x)$ 为解

$\{\phi_{n_k}\}_{n=1}^{+\infty}$ 一致有界、等度连续 $\implies$ $\widetilde{\phi_{n_k}}(x)\rightrightarrows\phi_2(x),\ \phi_2(x)$ 为解

这与前置条件“Cauchy问题有唯一解”矛盾！

Picard迭代序列方法：

对于 $x\in I=[x_0-a,x_0+a]$，作以下迭代：

$y_0(x)=y_0$

$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_0(t))dt$

……

$y_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_k(t))dt$

其中 $|y_k(t)-y_0|\le b,\ y_k(t)\in C(I)$．数学归纳法：$k=0$ 时，成立。假设对 k 成立。考虑 $k+1$：

$$|y_{k+1}-y_0|\le\int_{x_0}^{x}|f|dt\le M|x-x_0|\le M\cdot\alpha\le b$$

这里 $y_{k+1}\in C(I)$。

逼近解：Picard序列 $\{y_k(x)\}_{n=1}^{+\infty}$，$|y_k(t)-y_0|\le b,\ y_k(x)\in C(I)$

$$|y_k(x)-y_{k-1}(x)|\le \frac{ML^{k-1}}{k!}|x-x_k|^k,\ k=1,2,\dots \quad \Longrightarrow \quad \text{Cauchy列}$$

数归：$|y_1(x)-y_0(x)|=|\int_{x_0}^x f(t,y_0)dt|\le M|x-x_0|$ 　假设对于 k 成立，则

$$|y_{k+1}(x)-y_k(x)|=|y_0+\int_{x_0}^x f(t,y_k(t))dt-y_0-\int_{x_0}^x f(t,y_{k-1}(t))dt|$$

$$\le\int_{x_0}^x L|y_k(t)-y_{k-1}(t)|dt\ \le\int_{x_0}^x L\frac{ML^{k-1}}{k!}(t-x_0)^k dt=\frac{ML^{k-1}}{k!}\cdot\frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$$

$\forall\epsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N,\ \sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}<\epsilon$

$\forall\epsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>m>N,\ |y_n(x)-y_m(x)|<\epsilon,\ \forall x\in I$

$$|y_n(x)-y_m(x)|\le\sum_{k=m}^{n-1}|y_{k+1}(x)-y_k(x)|\le\frac{M}{L}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}<\frac{M}{L}\cdot\epsilon$$

由Picard序列定义，$y_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y_k(t))dt$

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_{k+1}(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x f(t,y_k(t))dt=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y_k(t))dt=y_0+\int_{x_0}^x f(t,\lim_{k\to\infty}y_k(t))dt$$

而这里 $\lim\limits_{k\to\infty}y_k(t)=y(t)$，从而 $y(x)$ 为积分方程的解。

例2：$\begin{cases}y'=2y+x\\ y(0)=1\end{cases}$

Euler折线：$h=\frac{1}{n},\ x_k=kh,\ k=1,2,\dots\ \ y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1},y_{k-1})h$

$$y_1=1+2h=1+\frac{2}{n}$$

$$y_2=y_1+(x_1+2y_1)h=1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}$$

$$y_k=\frac{5}{4}(1+\frac{2}{n})^k-(\frac{k}{2n}+\frac{1}{4}),\ k=3,4,\dots$$

$$=\frac{5}{4}(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}\cdot\frac{2k}{n}}-(\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n}+\frac{1}{4})\quad\Longrightarrow\quad y=\frac{5}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

Picard序列：$y_0(x)=1$

$y_1(x)=1+\int_0^x(2+t)dt=1+2x+\frac{x^2}{2}\ ,\dots$

$y_{k+1}(x)=1+\frac{x^2}{2}+2x+2x^2+\frac{5}{4}(\frac{(2x)^3}{3!}+\dots+\frac{(2x)^{k+2}}{(k+2)!})-\frac{(2x)^{k+2}}{(k+2)!}$ 　令 $k\longrightarrow+\infty$，得到：

$$y=\frac{5}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

关于Picard迭代序列解的**唯一性**：

反证：设 $y_1(x),y_2(x)$ 为不同解，$y_1,y_2\in C(I)$.

$$\begin{cases}y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y_1(t))dt\\ y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y_2(t))dt\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad|y_1(x)-y_2(x)|\le\int_{x_0}^x L|(y_1-y_2)(t)|dt$$

$$\therefore|y_1(x)-y_2(x)|\le\int_{x_0}^x LNdt=LN(x-x_0)\ ,\ |y_1(x)-y_2(x)|\le\int_{x_0}^x L\cdot LN(t-x_0)dt=L^2N\frac{(x-x_0)^2}{2}\dots$$

由 k 的任意性，$|y_1(x)-y_2(x)|=0$

Grouwall不等式：

$\forall x \in [x_0, x_1],\ 0 \le u(x) \le c + \int_{x_0}^{x}(\alpha(s)u(s)+K)ds$

$$\implies u(x) \le e^{\int_{x_0}^{x}\alpha(t)dt}(c+\int_{x_0}^{x}Ke^{-\int_{x_0}^{t}\alpha(s)ds}dt)$$

Osgood条件：

$f \in C(G), \forall(x,y_1),(x,y_2) \in G, |f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le F(|y_1-y_2|), F(r)>0, r>0$ 连续，有

$$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)} = +\infty$$

则称 f 在 G 内满足**Osgood条件。**

例3： $f(x,y) = \begin{cases} 0, y=0 \\ 2x, y<0 \\ -2x, y \ge x^2 \\ 2x-\frac{4y}{x}, 0 \le y < x^2 \end{cases}$

解：$y_0 = 0$

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x f(t, y_0(t))dt = 0 + \int_0^x 2tdt = x^2$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x f(t, y_1(t))dt = 0 + \int_0^x -2tdt = -x^2$$

容易得到$\begin{cases} y_{2k-1} = x^2 \\ y_{2k} = -x^2 \end{cases}$ 不收敛，因为 f 不满足lip条件！

对于$0 \le y < x^2$，$y' = 2x - \frac{4y}{x}$

$$y = e^{-\int_0^x \frac{4}{t}dt}(0+\int_0^x 2te^{\int_0^t \frac{4}{s}ds}dt) = \frac{1}{3}x^2$$

$f(x,y)$ 关于 y 单减 $\implies$ 唯一性

如果不满足lip条件，Picard序列可能不收敛！