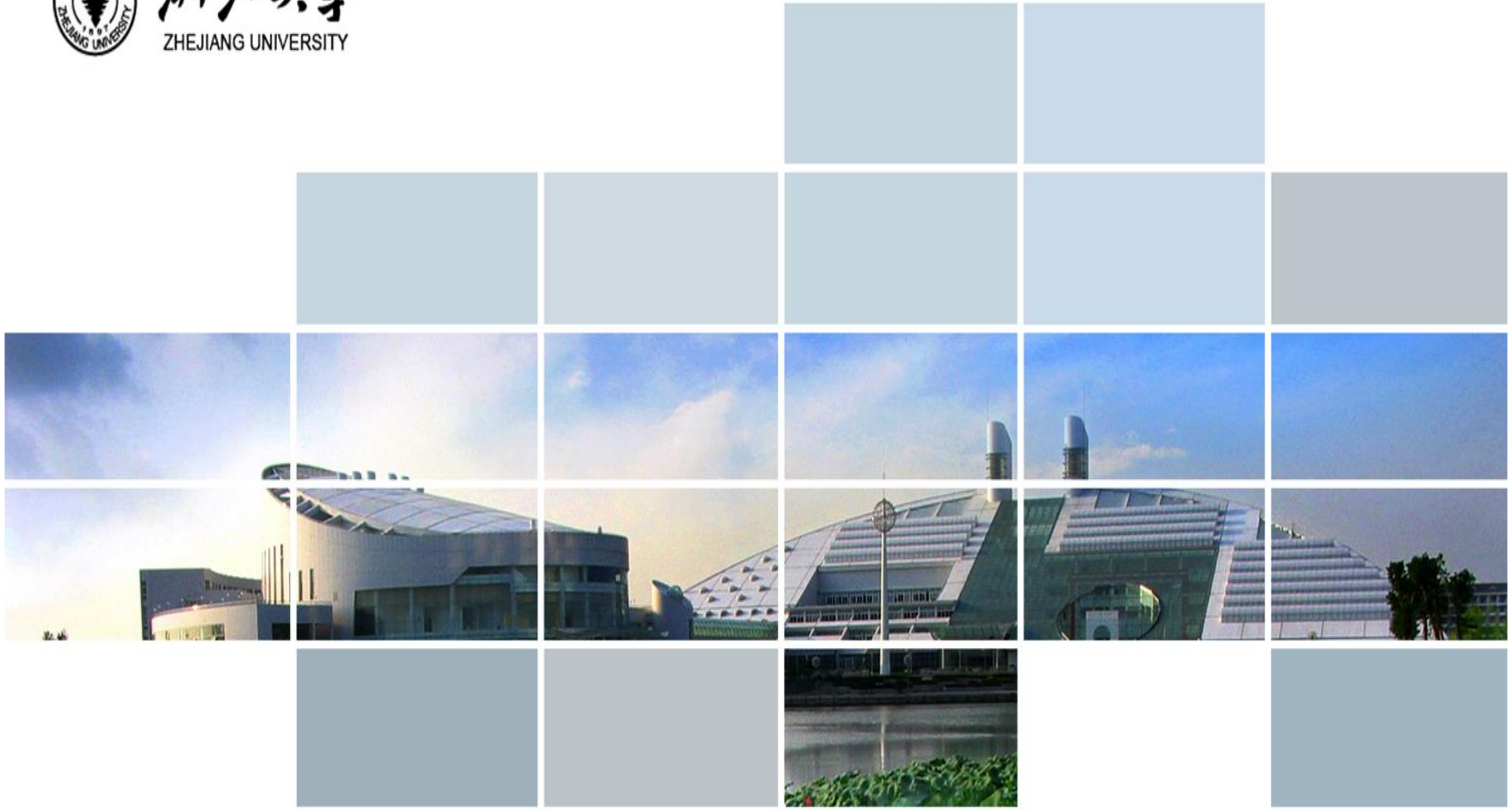


第二章：随机过程基本概念

§1 随机过程的定义和例子

随机过程是一族随机变量的集合，用于描述随时间变化的随机现象。

例：1. 人一生中身高的变化

2. 股票在一天中价格变化

3. 某食堂一天中吃饭人数的变化

4. 随机过程课程一学期听课人数的变化

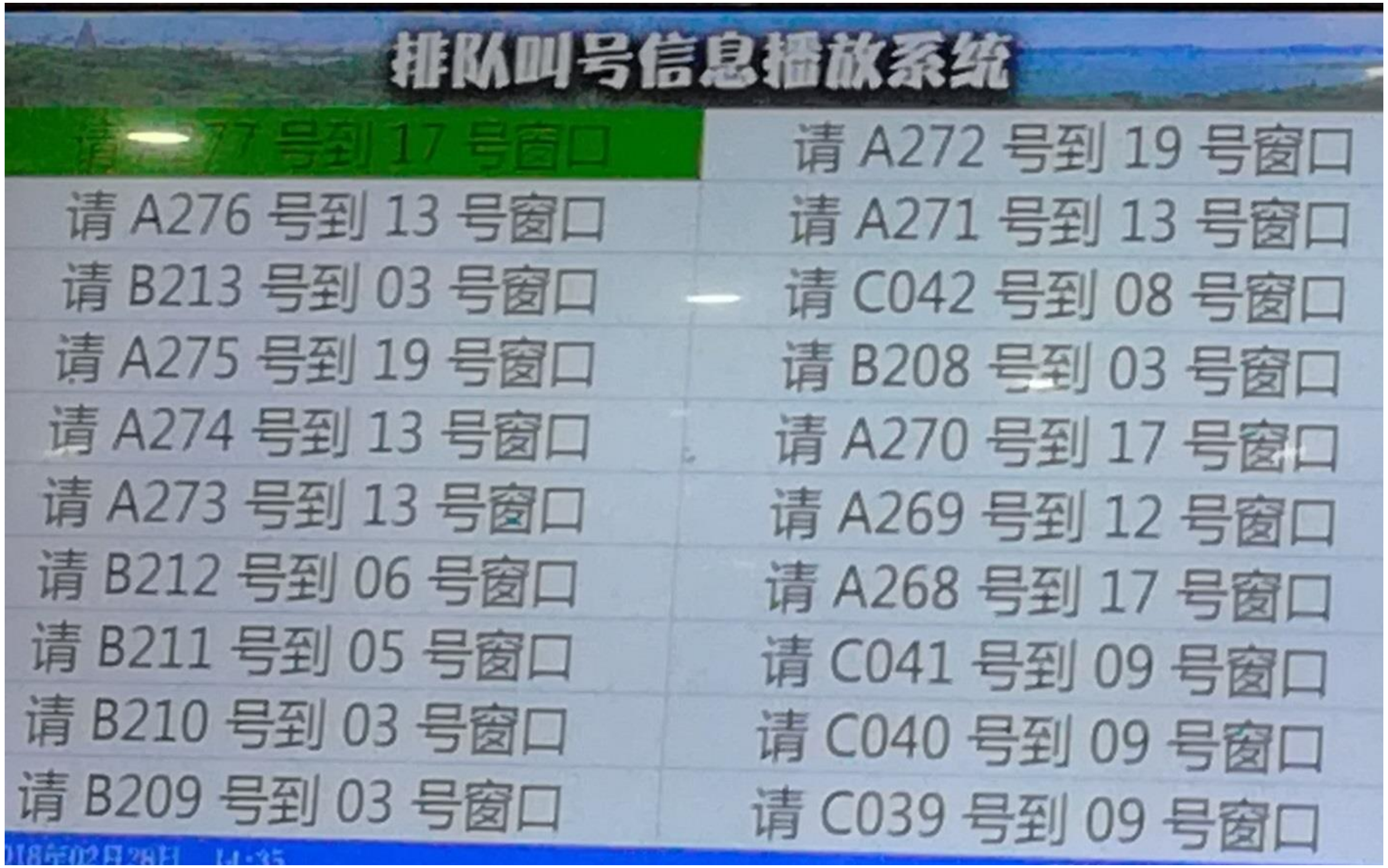
5. 某路段一天车流量变化

6. 杭州一年降雨量的变量

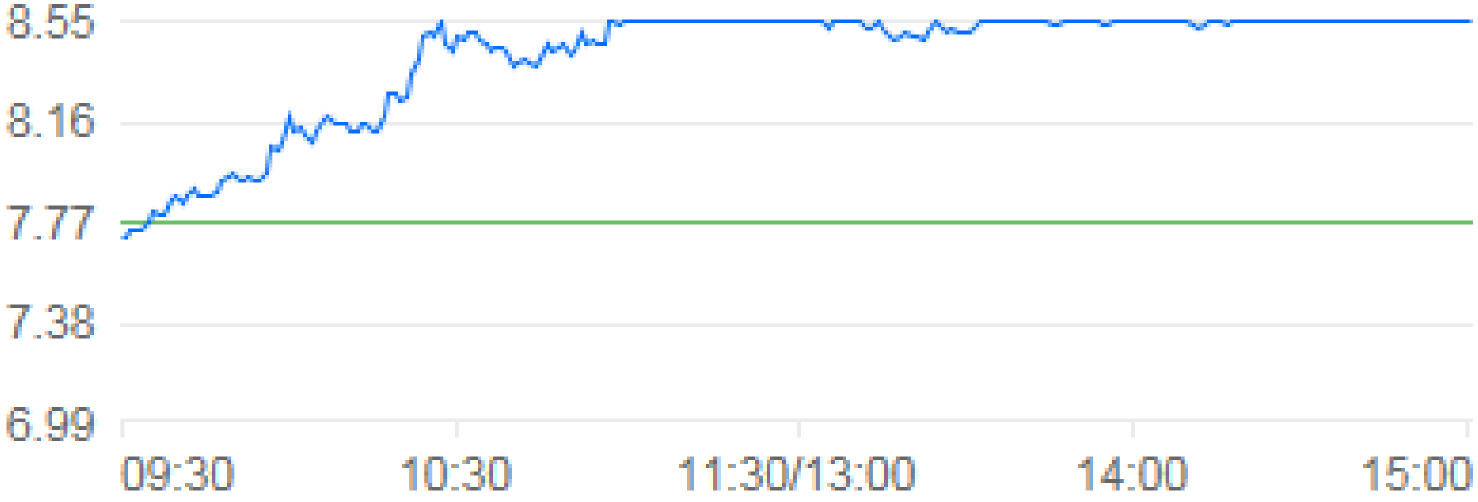
… …

某医院2018.2.27上午8:30检验科屏幕显示

某办事大厅2018.2.28下午2:30屏幕显示


排队叫号信息播放系统
请 A272 号到 19 号窗口
请 A276 号到 13 号窗口
请 A271 号到 13 号窗口
请 B213 号到 03 号窗口
请 C042 号到 08 号窗口
请 A275 号到 19 号窗口
请 B208 号到 03 号窗口
请 A274 号到 13 号窗口
请 A270 号到 17 号窗口
请 A273 号到 13 号窗口
请 A269 号到 12 号窗口
请 B212 号到 06 号窗口
请 A268 号到 17 号窗口
请 B211 号到 05 号窗口
请 C041 号到 09 号窗口
请 B210 号到 03 号窗口
请 C040 号到 09 号窗口
请 B209 号到 03 号窗口
请 C039 号到 09 号窗口

青岛啤酒股票2018. 2. 28价格



方大集团股票2018. 2. 28价格

定义2.1 设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$是概率空间，$(E,\mathcal{E})$是可测空间，$T$是指标集．如果对任何$t\in T$，$X_t$是$(\Omega,\mathcal{F})$到$(E,\mathcal{E})$上的可测映射，则称$X=\{X_t;t\in T\}$是$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上的以$(E,\mathcal{E})$为状态空间的**随机过程**．

用映射来表示:

$$X_t(\omega): T \times \Omega \to E,$$

即$X.(\cdot)$是定义在$T \times \Omega$上的二元单值函数.

固定t, $X_t(\cdot)$是随机变量;

固定ω, $X.(\omega)$是T的函数,称为随机过程的**样本函数**或**样本轨道**.

或样本曲线

对过程的一次具体观察结果就是一条样本轨道

随机过程的分类：

参数集T至多可列，则称为离散时间；如果T是一个实数区间，则称为连续时间.

随机过程包括：

1. 离散时间离散状态
2. 离散时间连续状态
3. 连续时间离散状态
4. 连续时间连续状态

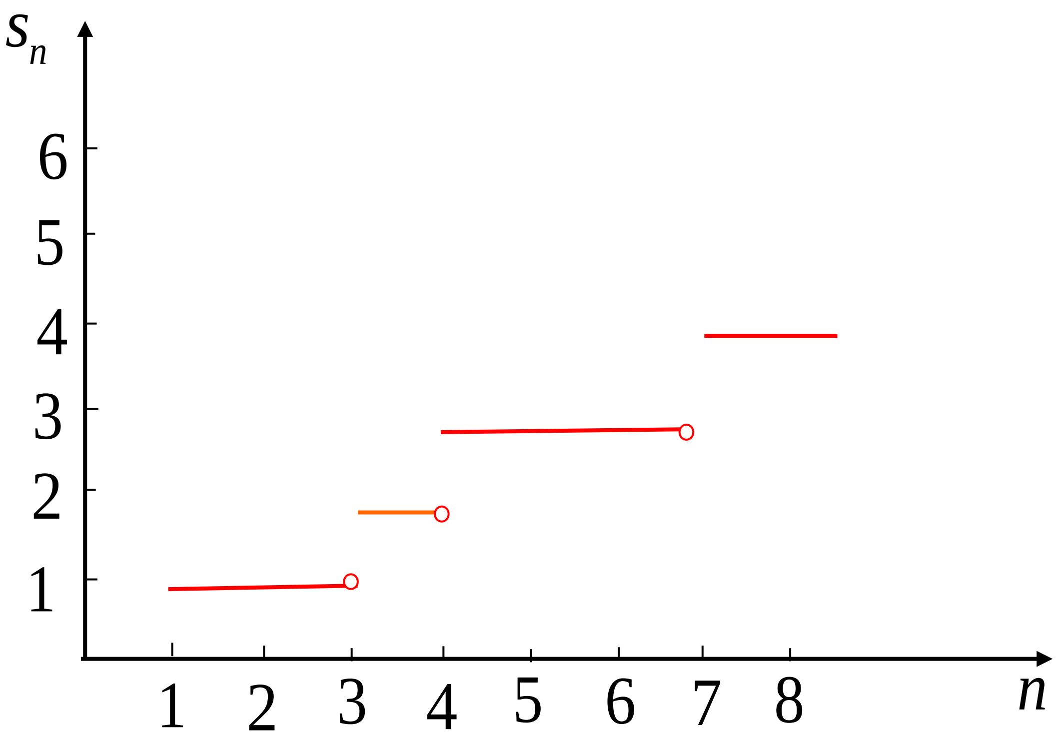
例1: （二项过程）

某人在打靶，每次的命中率为p,并且各次的结果相互独立。用S_n表示前n次命中的次数。

则$\{S_n;n=1,2,\cdots\}$是一个离散时间离散状态的随机过程。状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$.

所有样本函数为：

$$\left\{(s_1, s_2, s_{3,} \ldots): \quad s_1 = 0 \text{或} s_1 = 1, \quad s_{i+1} = s_i \text{或} s_{i+1} = s_i + 1\right\}$$



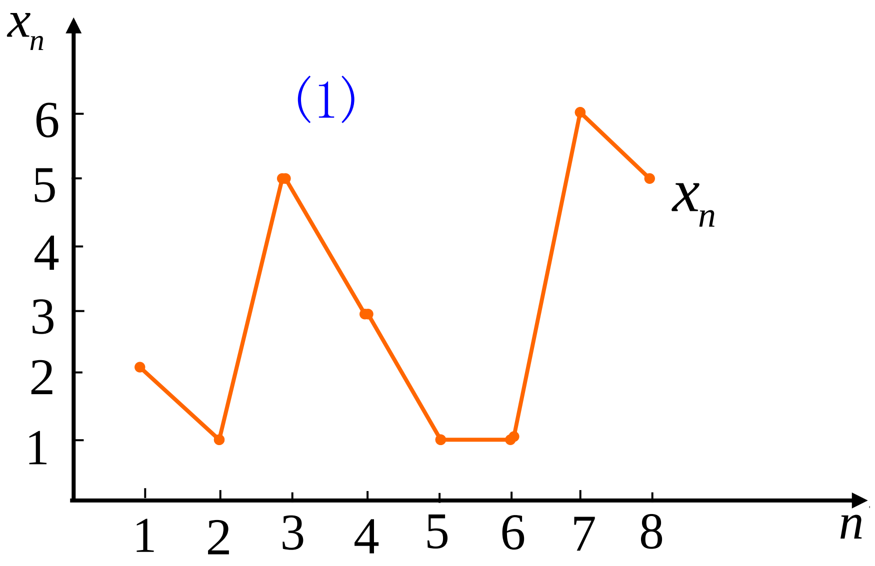
例2：考虑抛掷一颗骰子的试验：

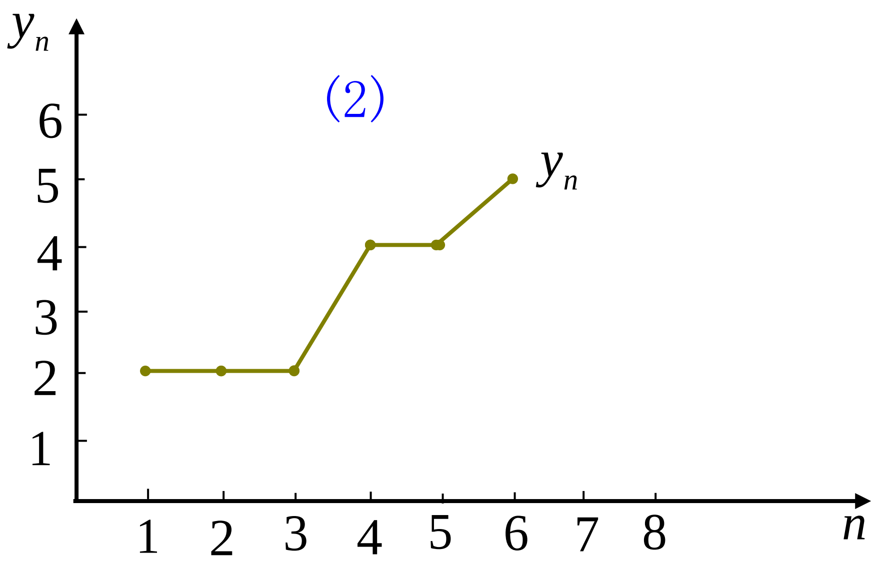
(1) 设X_n是第n次$(n\geq 1)$抛掷的点数，

$\{X_n, n\geq 1\}$的状态空间为$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) 设Y_n是前n次出现的最大点数，

$\{Y_n, n\geq 1\}$的状态空间是$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$





例3：（随机相位余弦波）$X(t)=\alpha\cos(\omega t+\Theta)$,

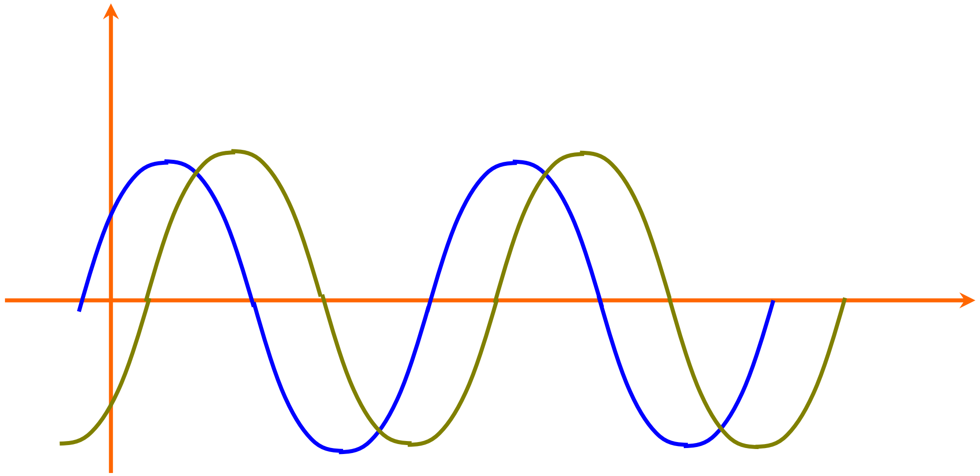
$t\in\left(-\infty,+\infty\right)$, α和ω是正常数, $\Theta\sim U(0,2\pi)$。

$\{X(t);t\in\left(-\infty,+\infty\right)\}$是连续时间连续状态的随机过程。

状态空间是$[-\alpha,\alpha]$.

在$(0,2\pi)$内任取一数θ, 相应的就得到一个样本函数 $x(t)=\alpha\cos(\omega t+\theta)$,

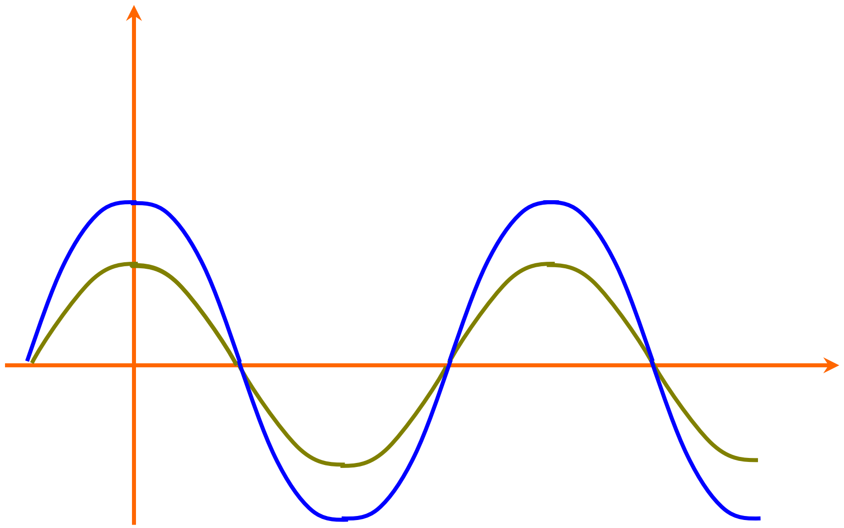
这族样本函数的差异在于相位θ的不同.



例4：设$X(t)=V\cos\omega t \quad t\in(-\infty,+\infty)$，$\omega$是正常数，$V\sim U[0,1]$。则$\{X(t)\}$是连续时间连续状态随机过程。

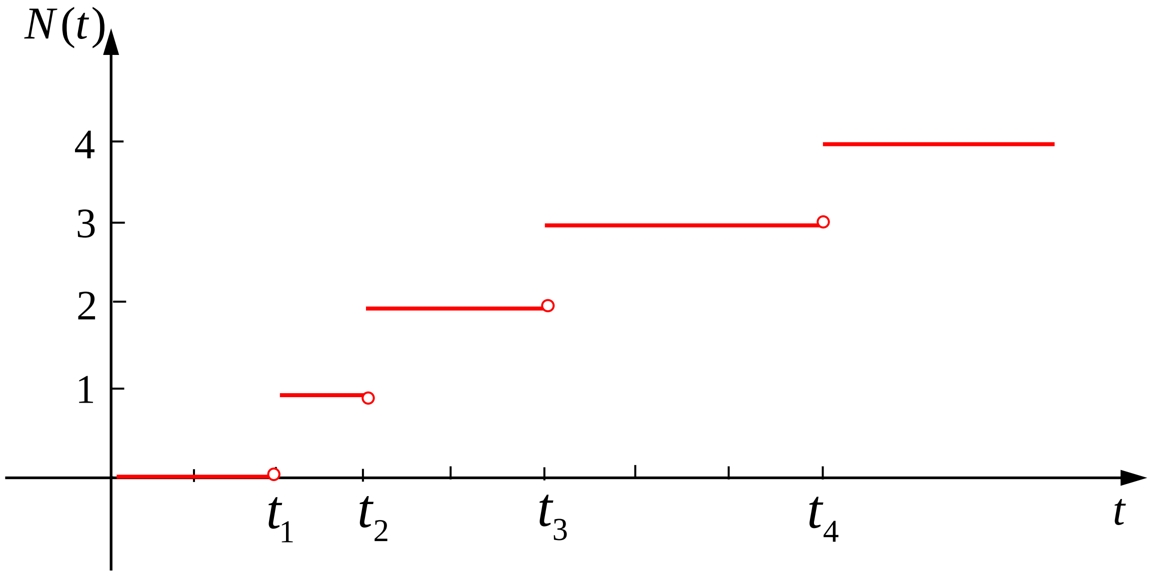
状态空间是$[-1, 1]$.

所有样本函数是：$\{x(t)=v\cos\omega t : \mathrm{v}\in[0, 1]\}$



例5：以$N(t)$表示$\left(0,t\right]$内到某保险公司理赔的人数。则$\left\{N(t),t\ge 0\right\}$是连续时间离散状态的随机过程, 状态空间是$\left\{0,1,2,\cdots\right\}$.

假设不会有两人或两人以上同时理赔，设第i人理赔的时间为t_i，则$0<t_1<t_2<t_3<\dots$，对应的样本函数为：



§2 随机过程的有限维分布

设随机过程$\{X(t), t\in T\}$,对每一固定的$t\in T$,

随机变量$X(t)$的分布函数与t有关,

记为$F_t(x)=P\{X(t)\le x\}$, $x\in R$,

称为$\{X(t), t\in T\}$的一维分布函数

$\{F_t(x),\ t\in T\}$称为一维分布函数族

对任意$n(n=2,3,\cdots)$个时刻，$t_1,t_2,\cdots t_n \in T$,

n维随机变量$\left(X(t_1),X(t_2),\cdots X(t_n)\right)$的分布函数记为：

$$F_{t_1,t_2,\cdots t_n}(x_1,x_2,\cdots x_n)=P\left\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots X(t_n)\le x_n\right\},$$

$$x_i \in R, i=1,2,\cdots n$$

称为$\left\{X(t),t\in T\right\}$的$n$维分布函数

$\left\{F_{t_1,t_2,\cdots t_n}(x_1,x_2,\cdots x_n)\ ;\ t_1,t_2,\cdots t_n \in T\right\}$称为$n$维分布函数族

$$\left\{F_{t_1,t_2,\cdots t_n}(x_1,x_2,\cdots x_n), n=1,2,\cdots\ ,\ t_i\in T\right\}$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的有限维分布函数族

它完全确定了随机过程的统计特性

有限维分布函数族满足：

(1).横向相容：对$(1,2,\ldots,n)$的任何置换τ,

$$F_{t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(n)}}(x_{\tau(1)},\ldots,x_{\tau(n)})=F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

(2).纵向相容：

$$\lim_{x_{n+1}\to\infty}F_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

定理:(kolmogorov)给定分布函数族

$\left\{F_{t_1,t_2,\cdots t_n}(x_1,x_2,\cdots x_n), n=1,2,\cdots\ ,\ t_i\in T\right\}$，即对任何

$t_1,t_2,\cdots t_n\in T$，$F_{t_1,t_2,\cdots t_n}(x_1,x_2,\cdots x_n)$都是$n$维分布函数，

如果这组分布函数族满足横向相容性和纵向相容性，

那么一定存在一个概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$以及其上的随

机变量$X(t), t\in T$使得对所有n，所有$t_1,\ldots t_n\in T$，

$$P(X(t_1)\le x_1,\ldots,X(t_n)\le x_n)=F_{t_1,t_2,\cdots t_n}(x_1,x_2,\cdots x_n)$$

注： 随机过程在不同的时间点的随机变量不一定独立，它们的联合分布要根据具体过程的性质加以计算，而不能直接把它们当成独立处理。

例1：有10把步枪，其中两把已校正，命中率为p_1;其余未校正, 命中率为p_2, 这里$p_1 > p_2$.
某人任取一把开始打靶，令X_n为第n次命中的次数, 即$X_n = \begin{cases} 1 & \text{第n次命中} \\ 0 & \text{第n次未命中} \end{cases}$

(1) 对$n \neq m$，求（X_n，X_m）的联合分布律

和边缘分布律。

(2) 以S_n表示前n次命中的次数，求S_n的分布律。

（3）若$p_1=1$，$p_2=0$，写出所有样本函数，

写出S_n的分布律. 此时对$n \neq m$，X_n和X_m独立吗？

分析:过程与此人拿到的枪是好枪还是坏枪有关。若令A="取到已校正的枪",则在计算过程的有限维分布时要按照A是否发生利用全概率公式计算。

解:令$A=$"取到已校正的枪",由全概率公式得:

$$(1)\,p_{11}=P(X_n=1,X_m=1)$$

$$=P(X_n=1,X_m=1|A)P(A)+P(X_n=1,X_m=1|\overline{A})P(\overline{A})$$

$$=0.2p_1^2+0.8p_2^2;$$

同理$p_{01}=p_{10}=0.2p_1(1-p_1)+0.8p_2(1-p_2);$

$$p_{00}=0.2(1-p_1)^2+0.8(1-p_2)^2$$

$$P(X_n=0)=0.2(1-p_1)+0.8(1-p_2)$$

$$P(X_n=1)=0.2p_1+0.8p_2$$

(2)同样利用全概率公式

$$P(S_n=k)$$

$$=P(S_n=k\mid A)P(A)+P(S_n=k\mid \bar{A})P(\bar{A})$$

$$=0.2C_n^k p_1^k(1-p_1)^{n-k}+0.8C_n^k p_2^k(1-p_2)^{n-k}$$

$$k=0,1,2,\dots,n$$

(3)若A发生，则百发百中；若A不发生，则永不命中。$\{S_n\}$只有两条样本函数

$\{1, 2, 3, 4, ...\}$和$\{0, 0, 0, ...\}$

$\{X_n\}$只有两条样本函数$\{1, 1, 1, ...\}$

和$\{0, 0, 0, ...\}$

$$P(S_n = 0) = P(\bar{A})=0.8, \quad P(S_n = n) = 0.2$$

X_n与X_m不独立，因为

$$P(X_n = 1 | X_m = 1) = 1 \neq 0.2 = P(X_n = 1)$$

事实上若$X_n=1$，则可判断A发生，从而所有的X_m为1；若$X_n=0$，则可判断A不发生，从而所有的X_m为0. 打一枪的结果决定了所有枪的结果，所以各枪命中结果不独立。

例2.设A,B独立同分布， $P(A=\pm 1)=0.5$,

写出并画出随机过程$X(t)=At+B$,

$t\in(-\infty,+\infty)$的所有样本函数,

计算(X_1,X_2)的联合分布律和边缘分布律.

解:过程由（A, B)的取值完全决定。

共有4条样本函数

$$x(t)=t+1; x(t)=t-1; x(t)=-t+1; x(t)=-t-1.$$

(A,B)	X(1)	X(2)
(1,1)	2	3
(1,-1)	0	1
(-1,1)	0	-1
(-1,-1)	-2	-3

$X_1 \backslash X_2$	3	1	-1	-3	$P(X_1=i)$
2	1/4	0	0	0	1/4
0	0	1/4	1/4	0	1/2
-2	0	0	0	1/4	1/4
$P(X_2=j)$	1/4	1/4	1/4	1/4	1

例3：设随机过程$X(t)=V\cos t, t\in(-\infty,+\infty)$，

V在[0,1]上均匀分布。

(1) 求在$t=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}$时$X(t)$的概率密度函数；

(2) 求$P[X(0)>0.5,\ \ X(\dfrac{\pi}{4})<0.5]$.

解：此过程由V的取值决定。

若$\cos t \neq 0$, 记$a = \cos t$,

则$X(t) = aV$的密度函数为：

$$f_{X(t)}(x) = f_V\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|} = \begin{cases} \dfrac{1}{|a|} & 0 < \dfrac{x}{a} < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

即若$\cos t > 0$, 则$X(t) \sim U[0, \cos t]$;

若$\cos t < 0$, 则$X(t) \sim U[\cos t, 0]$;

若$\cos t = 0$, 则$P(X(t) = 0) = 1$.

$$\therefore f_{X(\frac{\pi}{4})}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & 0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_{X(\frac{2\pi}{3})}(x)=\begin{cases}2, & -\dfrac{1}{2}<x<0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$(2)\,P[X(0)>0.5,\quad X(\frac{\pi}{4})<0.5]$$

$$=P[V>0.5,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}V<0.5]$$

$$=P[0.5<V<\frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

例5.(简单 随机游动, 醉汉行走)

甲乙两人游戏,第i次甲赢的钱数为X_i元,

设$X_1,\ldots,X_n,\ldots$独立同分布,

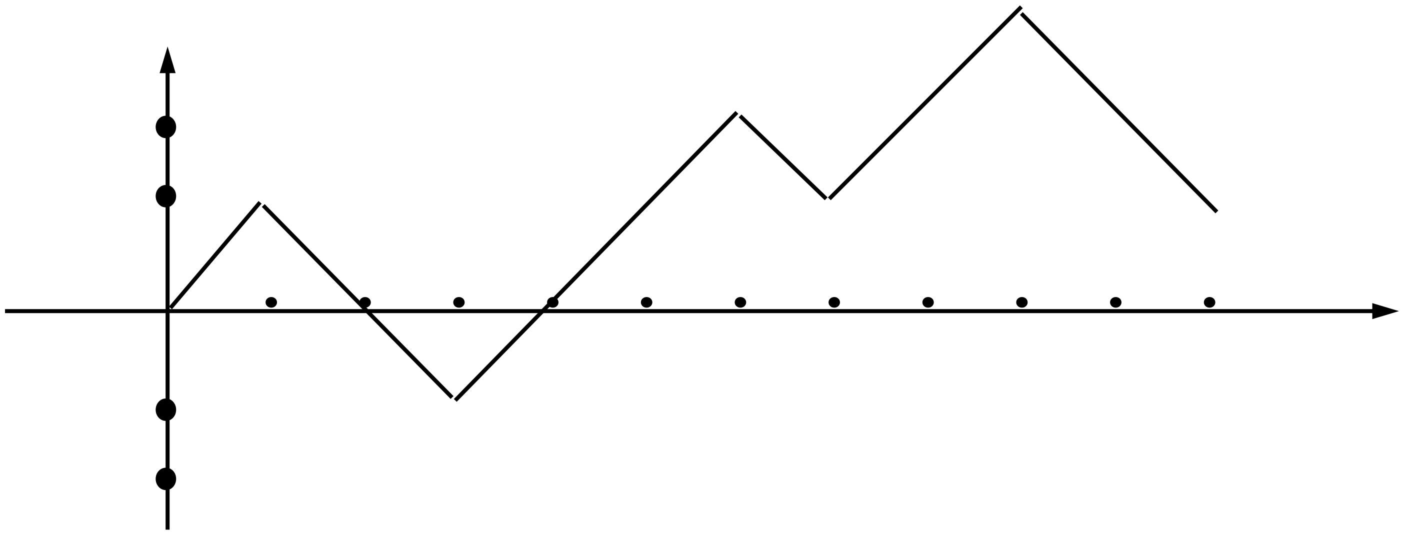
$$P(X_i=1)=p,\ \ P(X_i=-1)=q=1-p.$$

设前n次甲赢的总钱数为S_n,计算

(1)S_n的分布律;

(2)$P\{S_1=1, S_3=1, S_8=4\}$;

（3）若$p=0.36$，游戏一直到甲恰好赢50次为止，问游戏需进行100次以上的概率约为多少？



解:(1)S_n的取值由前n次甲赢的次数决定

用V_n表示前n次甲赢的总次数，则$V_n \sim B(n,p)$,

且$S_n = V_n - (n - V_n) = 2V_n - n$.

$$\therefore P(S_n = k) = P(V_n = \frac{k+n}{2}) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} p^{\frac{k+n}{2}} q^{\frac{n-k}{2}},$$

k与n奇偶性相同,且$-n \le k \le n$

$$(2)P\{S_1=1,S_3=1,S_8=4\}$$

$$=P\{S_1=1,S_3-S_1=0,S_8-S_3=3\}$$

$$=P\{S_1=1\}P\{S_3-S_1=0\}P\{S_8-S_3=3\}$$

$$=p(2pq)(C_5^4p^4q)=10p^6q^2$$

(3)用W_{50}表示甲恰好赢50次时游戏进行的次数. 则$\{W_{50} > 100\} = \{V_{100} < 50\}$.

由中心极限定理，V_{100}近似服从$N(100p, 100pq)$.

$$\therefore P(W_{50} > 100) = P(V_{100} < 50) = P(V_{100} \le 49)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{49 - 100p}{10\sqrt{pq}}\right) = \Phi(2.71) = 0.9966.$$

$$B(n, p) \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$$

§3 均值函数和协方差函数

给定随机过程$\{X(t), t \in T\}$，记

$\mu_X(t) = E[X(t)]$ ------均值函数

$\psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$ ------均方值函数

$\sigma_X^2(t) = D_X(t) = D[X(t)]$ ------方差函数

$\sigma_X(t) = \sqrt{\sigma_X^2(t)}$ ------标准差函数

又设任意$t_1,t_2 \in T$

$$r_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] ------ (\text{自})\text{相关函数}$$

$$C_X(t_1,t_2) = Cov[X(t_1),X(t_2)]$$

$$= E\left\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][X(t_2)-\mu_X(t_2)]\right\}$$

$$------ (\text{自})\text{协方差函数}$$

各数字特征之间的关系如下：

$$\psi_X^2(t) = r_X(t,t)$$

$$C_X(t_1,t_2) = r_X(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

$$\sigma_X^2(t) = C_X(t\ ,t\ ) = r_X(t,t) - \mu_X^2(t)$$

定义：

随机过程$\{X(t), t\in T\}$，如果对每一$t\in T$，

$E[X^2(t)]$都存在，则称$X(t)$是二阶矩过程.

二阶矩过程的均值函数和自相关函数总是存在的.

例2：求随机相位余弦波$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$

$-\infty<t<+\infty,\left(\Theta\sim \mathrm{U}(0,2\pi)\right)$的均值函数、

方差函数和自相关函数。

解：$\mu_X(t)=E[X(t)]$

$$=\int_0^{2\pi}a\cos\left(\omega t+\theta\right)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

$$r_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=E[a^2 cos(\omega t_1+\Theta)cos(\omega t_2+\Theta)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi} cos(\omega t_1+\theta)cos(\omega t_2+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}cos\omega(t_2-t_1)$$

例3：设$X(t)=\dfrac{1}{U^t}$，$t\ge 0$，这里$U\sim U(0,1)$.

问：$\{X(t);\ t\ge 0\}$是否是二阶矩过程？

解：对$t\ge 0$，$E(X^2(t))=\int_0^1 \dfrac{1}{u^{2t}}du$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-2t}, & t<\dfrac{1}{2}\\ +\infty, & t\ge \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore \{X(t);\ t\ge 0\}$不是二阶矩过程.

两个随机过程之间的关系：

设$\{X_t; t \in T_1\}$ 和$\{Y_s; s \in T_2\}$都是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的随机过程。如果对任何$m, n \geq 1$, $t_1, \cdots, t_m \in T_1$和$s_1, \cdots, s_n \in T_2$有,

$(X_{t_1}, \cdots, X_{t_m})$和$(Y_{s_1}, \cdots, Y_{s_n})$相互独立，则称$\{X_t; t \in T_1\}$ 和

$\{Y_s; s \in T_2\}$ 相互独立.

$\{X(t), t\in T_1\}$与$\{Y(s), s\in T_2\}$的互相关函数:

$$r_{XY}(t,s)=E[X(t)Y(s)] \quad t\in T_1, s\in T_2$$

互协方差函数:

$$C_{XY}(t,s)=Cov(X_t, Y_s)$$
$$=r_{XY}(t,s)-\mu_X(t)\mu_Y(s) \quad t\in T_1, s\in T_2$$

如果对任意的$t\in T_1, s\in T_2$,恒有$C_{XY}(t,s)=0$,

则称随机过程$\{X(t)\}$和$\{Y(s)\}$是不相关的。

例6：某保险公司的收入由老人寿险收入和儿童平安保险收入组成。设到时刻t为止，老人寿险收入为$X(t)$,儿童平安保险收入为$Y(t)$,总收入为$Z(t)$。已知$\mu_X(t),\mu_Y(t),C_X(t_1,t_2),C_Y(t_1,t_2)$,并知过程$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$不相关。求$\mu_Z(t),C_Z(t_1,t_2)$.

解：$Z(t)=X(t)+Y(t)\quad \therefore \mu_Z(t)=\mu_X(t)+\mu_Y(t)$

$$C_Z(t_1,t_2)=Cov(X(t_1)+Y(t_1),X(t_2)+Y(t_2))$$
$$=C_X(t_1,t_2)+C_Y(t_1,t_2)$$

§4. 一些随机过程的分类

定义：设随机过程$X=\{X(t);t\in T\}$的均值函数为$\mu_X(t)=0$, 对$s\neq t$，$C_X(s,t)=0$, 则称X为白噪声.

定义.(I) 如果对任何n, 任何$t_1, \cdots, t_n \in T$,

$(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$服从正态分布, 则称$X$是**正态过程**(**或高斯过程**).

注意:

(1) 正态过程是二阶矩过程, 它的有限维分布完全由它的

均值函数和自协方差函数确定.

定理: 随机过程$\{X(t);t\in T\}$是正态过程当且仅当对任何$n\geq 1,t_1,t_2,\ldots t_n\in T$,以及实数$a_1,a_2,\ldots a_n$有:

$\sum_{i=1}^{n}a_iX(t_i)$服从正态分布.

例1. 设$\{X(t);t\geq 0\}$是正态过程，$\mu_X(t)=t$, $C_X(t,s)=ts+1$, 求$X(1), X(2), X(1)+X(2)$的分布。

解：$D_X(t)=C_X(t,t)=t^2+1$,

$\therefore X(t)\sim N(t,t^2+1)$

特别地，$X(1)\sim N(1,2)$, $X(2)\sim N(2,5)$.

$\because \{X(t);t\geq 0\}$是正态过程， $\therefore (X(1),X(2))$

服从正态分布，$\therefore X(1)+X(2)$服从正态分布。

又$E(X(1)+X(2))=1+2=3,$

$D(X(1)+X(2))=DX(1)+DX(2)+2C_X(1,2)=13,$

$\therefore X(1)+X(2)\sim N(3,13).$

定义 (II)如果X是二阶矩过程, 且对任意$t \in T$, $\mu_X(t)$为常数, $C_X(t,s)$只是时间差$s-t$的函数, 则称X是**宽平稳过程**.

(III)如果X满足(1)所有的X_t同分布;

(2)对任何$n \geq 2$, 任何$t_1, \cdots, t_n \in T$, $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$的分布只与时间差$t_2-t_1, \cdots, t_n-t_{n-1}$有关, 而与时间的起点$t_1$无关, 则称$X$是**严平稳过程**.

注意：

(2)严平稳是指有限维分布具有平移不变性, 也就是任意$n \geq 1$,

任何$t_1, \cdots, t_n \in T$, 任意h,

$(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$与$(X_{t_1+h}, \cdots, X_{t_n+h})$同分布。

(3) 二阶矩的严平稳过程一定是宽平稳过程. 而反之则不一定.

但是宽平稳的正态过 程一定是严平稳过程.

例2： 设$X(t)=A\cos t+B\sin t, t\in(-\infty,+\infty)$,

A,B独立， $EA=EB=0, DA=DB=1.$

(1)计算均值函数和自相关函数，是宽平稳过程吗？

(2)如$P(A=\pm 1)=P(B=\pm 1)=0.5$, 求

$X(0), X(\frac{\pi}{4})$ 的分布律。是严平稳过程吗？

(3)如A,B都服从$N(0,1)$， 求

$X(0), X(\frac{\pi}{4}), X(0)+X(\frac{\pi}{4})$的分布。是严平稳过程吗？

解:(1)因为$E(A)=E(B)=E(AB)=0$,

$E(A^2)=E(B^2)=1$,

故$\mu_X(t)=E\{A\cos t+B\sin t\}$

$=E(A)\cos t+E(B)\sin t=0$是常数

$r_X(t_1,t_2)$

$=E[(A\cos t_1+B\sin t_1)(A\cos t_2+B\sin t_2)]$

$=\cos t_1\cos t_2+\sin t_1\sin t_2=\cos(t_2-t_1)$只与$t_2-t_1$有关

$\therefore\{X(t)\}$是宽平稳过程

$$(2)\ \because X(0)=A,\ X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(A+B)\ ,$$

$$\therefore P(X(0)=\pm1)=0.5;$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2})=P(A=1,\ \ B=1)=\frac{1}{4},$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2})=P(A=-1,\ \ B=-1)=\frac{1}{4},$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=0)$$

$$=P(A=1,\ \ B=-1)\ +P(A=-1,\ \ B=1)\ =\frac{1}{2}.$$

$\therefore \{X(t)\}$是宽平稳但不是严平稳过程

(3)因为A, B是相互独立的正态变量，

故(A, B)是二维正态变量，

对任意一组实数$t_1, t_2, \cdots t_n \in T$,

$\because X_{t_i} = A\cos t_i + B\sin t_i$是$(A, B)$的线性组合,

由正态分布的线性变换不变性,

$\left(X(t_1), X(t_2), \cdots X(t_n)\right)$服从$n$维正态分布

所以$\{X(t)\}$是正态过程

所以$\{X(t)\}$是宽平稳也是严平稳过程

$$\therefore X(0) \sim N(0,1), X(\frac{\pi}{4}) \sim N(0,1),$$

$$D(X(0)+X(\frac{\pi}{4})) = 2+2\cos\frac{\pi}{4} = 2+\sqrt{2},$$

$$\therefore X(0)+X(\frac{\pi}{4}) \sim N(0, 2+\sqrt{2}).$$

或$X(0)+X(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}+1)\ A + \frac{\sqrt{2}}{2}B$

$$\sim N(0, 2+\sqrt{2}).$$

设$X_1,\ldots,X_n,\ldots$独立同分布，

$P(X_i=1)=p=1-P(X_i=0), 0<p<1.$

令$S_n=X_1+\cdots+X_n$表示n次贝努利试验后1出现的次数，

则$\{S_n;n=0,1,2,\cdots\}$称为参数为p的**二项过程**

(1)(平稳增量) 对任何$n>m\geq 0$, 增量$S_n-S_m\sim B(n-m,p)$,

分布仅与时间差$n-m$有关；

(2)(独立增量) 对任何$k\geq 3$, 任何$n_1<n_2<\cdots<n_k$

有$S_{n_2}-S_{n_1}, S_{n_3}-S_{n_2},\cdots,S_{n_k}-S_{n_{k-1}}$相互独立；

(3)(Markov性)对任何$n \ge 1$, 任何状态$i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, i, j$有,

$$P(S_{n+1} = j | S_1 = i_1, \cdots, S_{n-1} = i_{n-1}, S_n = i)$$

$$= P(X_{n+1} = j - i | S_1 = i_1, \cdots, S_{n-1} = i_{n-1}, S_n = i)$$

$$= P(X_{n+1} = j - i)$$

$$= P(X_{n+1} = j - i | S_n = i)$$

$$= P(S_{n+1} = j | S_n = i).$$

定义 设$X=\{X_t;t\in T\}$是随机过程。T为R的子集.

对$t>s$, 称X_t-X_s为此过程在时间区 间$(s,t]$上的增量。

(I)如果对任何$t>s$,X_t-X_s的分布仅与时间差$t-s$有关,

则称X是**平稳增量过程**。

(II) 如果对任何$n\geq 3$, 任何$t_1<t_2<\cdots<t_n$,

$X_{t_2}-X_{t_1},\cdots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$相互独立,

则称X是**独立增量过程**。

(III)如果X既是平稳增量过程，又是独立增量过程,

则称X是**平稳独立增量过程**。

独立增量过程的性质：

设$\{X(t);t\geq 0\}$独立增量过程， $X(0)=0$

1. 有限维分布由所有增量$X(t)-X(s)$分布确定
2. $C_X(s,t)=D_X\left(min(s,t)\right)$

例3：设$X_1,\ldots,X_n,\ldots$独立同分布，$S_0=0.$

对$n\geq 1, S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i.$

(1)证明$\{S_n;n=0,1,\ldots\}$是平稳独立增量过程.

(2)若$EX_1=\mu, DX_1=\sigma^2$. 计算$\{S_n\}$的均值函数和自相关函数.

(1)证明: 对任意$n > m \geq 0, S_n - S_m = \sum_{i=m+1}^{n} X_i$

$\because X_1, X_2, ..., X_n$独立同分布,

$\therefore (X_{m+1}, X_2, ..., X_n)$与$(X_1, X_2, ..., X_{n-m})$同分布

$\therefore X_{m+1} + X_2 + ... + X_n$与$X_1 + X_2 + ... + X_{n-m}$同分布

这说明$S_n - S_m$与S_{n-m}同分布

因此$\{S_n\}$是平稳增量过程.

任意$n \ge 3, 0 \le m_1 < m_2 < \ldots < m_n$,

$\because X_1, X_2, \ldots, X_{m_n}$独立,

$\therefore \sum_{i=m_1+1}^{m_2} X_i, \sum_{i=m_2+1}^{m_3} X_i, \ldots, \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} X_i$独立

这说明$S_{m_2} - S_{m_1}, \ldots, S_{m_n} - S_{m_{n-1}}$独立

因此$\{S_n\}$是独立增量过程.

综上所述得到$\{S_n\}$是平稳独立增量过程.

$$(2)\mu_S(n) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} EX_i = n\mu$$

对$0 \le m \le n$,

$$Cov(S_m, S_n) = Cov(S_m, S_m) + Cov(S_m, S_n - S_m)$$

$$= D(S_m) = D(\sum_{i=1}^{m} X_i) = m\sigma^2$$

$$E(S_m S_n) = Cov(S_m, S_n) + E(S_m)E(S_n)$$

$$= m\sigma^2 + mn\mu^2$$

$\therefore$ 对$m \ge 0, n \ge 0$,

$$r_S(m,n) = mn\mu^2 + \min(m,n)\sigma^2$$