第五章　分式线性变换

5.1　分式线性变换

本节的主要目的是介绍从复球面到自身的一类双全纯映射：分式线性变换。

形如

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0$$

的函数称为分式线性变换, 或者 Möbius 变换。如果 $ad-bc=0$, 容易验证, f 退化为常值映射。

易知: 如果 $c \neq 0$, 则 f 在 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ 上全纯, 且满足

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

因此, f 在 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ 上处处共形。同时对任意 $w \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, $f(z) = w$ 有唯一解

$$z = g(w) = \frac{b-dw}{cw-a}.$$

此处 g 可视为 f 的逆映射, 它也是分式线性变换。这说明 $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ 为双全纯映射。此时, 利用球面拓扑以及连续性, 可合理定义 $f(-d/c) = \infty, f(\infty) = a/c$, 使得 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为同胚。

如果 $c = 0$, $f(z) = (az+b)/d$ 为整线性变换。此时, 可定义 $f(\infty) = \infty$ 使 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为同胚。

假设 $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 为区域 (连通开集), 对于映射 $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$, 我们给出 f 全纯的定义。分四种情况讨论:

- $\Omega \subset \mathbb{C}, f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. 此时 f 全纯指通常意义的全纯；

- $\infty \in \Omega, f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. 此时称 f 在 ∞ 的邻域内全纯, 如果 $g(z) = f(1/z)$ 在 0 的邻域内全纯;
- $\Omega \subset \mathbb{C}, f(z_0) = \infty$. 此时称 f 在 z_0 的邻域内全纯, 如果 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在 z_0 的邻域内全纯;
- $\infty \in \Omega, f(\infty) = \infty$. 此时称 f 在 ∞ 的邻域内全纯, 如果 $g(z) = 1/f(1/z)$ 在 0 的邻域内全纯。

此定义的本质在于：利用坐标变换 $z \mapsto 1/z$，将定义域或值域的 ∞ 处的局部性质转化为 0 处的局部性质，从而可合理谈论定义于或取值于 ∞ 处的全纯性。

由此定义，可以验证：分式线性变换可以视为从复球面到自身的双全纯映射。

所有分式线性变换全体记为 $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$:

$$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

它在映射的复合运算下构成一个群, 称为分式线性变换群。单位元素为恒等映射, f 的逆元为其逆映射。

现在考虑矩阵集合

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 在矩阵的乘法下构成一个群, 称为特殊线性群 (special linear group)。定义映射 $\Phi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ 如下

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

显然 Φ 是满射。给定两个分式线性变换

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ g(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\omega},$$

容易验证

$$f \circ g(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\omega)}{(c\alpha + b\gamma)z + (c\beta + b\omega)}.$$

这说明复合映射的系数矩阵对应于两个映射系数矩阵的乘积。即 Φ 是保运算的

$$\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B).$$

因此 Φ 是一个群同态。容易验证 $\Phi^{-1}(\Phi(A)) = \pm A$, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{\pm I\}$。由群同构定理知

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\} \cong \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}).$$

我们称 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$ 为射影特殊线性群 (projective special linear group), 记为 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$。

5.2　几何性质

我们将复平面上的圆周, 或直线并 $\{\infty\}$, 统称为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的圆周。

给定平面上两点 p, q, 称 p, q 关于直线 ℓ 对称, 如果 ℓ 恰好是线段 $[p, q]$ 的垂直平分线；称 p, q 关于圆周 $C = \{|z - z_0| = r\}$ 对称, 如果 p, q 位于从 z_0 出发的同一射线上, 且满足 $|p-z_0||q-z_0| = r^2$. 这样的位置关系可用一个方程表示

$$(p - z_0)\overline{(q - z_0)} = r^2.$$

给定圆周 C 的一对对称点 p, q, 对圆周上任意一点 $z \in C$, 等式 $|p - z_0||q - z_0| = r^2$ 等价于

$$\frac{|p - z_0|}{|z - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{|q - z_0|}.$$

由此得三角形 $\Delta p z_0 z$ 与 $\Delta z z_0 q$ 相似, 这样有

$$\frac{|z - p|}{|z - q|} = \frac{|z - z_0|}{|q - z_0|} = \frac{r}{|p - z_0|}.$$

这说明, z 到两定点 p, q 距离之比为定值。

熟知：到两定点距离相等的点的轨迹是直线。古希腊数学家 Apollonius 发现, 同样的观点也可以用来描述圆周。

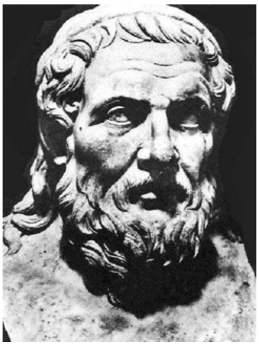
定理 5.1. (Apollonius, 公元前 3-2 世纪) 到两定点 p, q 距离之比为常数 $\lambda \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 的点 z 的轨迹

$$\left|\frac{z - p}{z - q}\right| = \lambda$$

为圆周, 且 p, q 关于此圆周对称。

证明: 方程 $|z - p|^2 = \lambda^2|z - q|^2$ 等价于

$$(1 - \lambda^2)|z|^2 - (p - \lambda^2 q)\overline{z} - (\overline{p} - \lambda^2\overline{q})z + (|p|^2 - \lambda^2|q|^2) = 0.$$



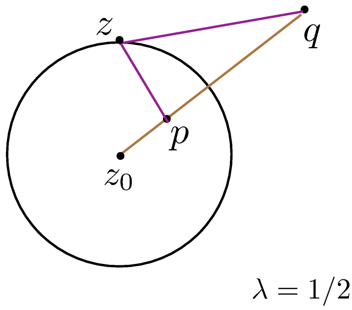


图 5.1: Apollonius

此方程等价于

$$\left|z-\frac{p-\lambda^2 q}{1-\lambda^2}\right|^2=\left|\frac{p-\lambda^2 q}{1-\lambda^2}\right|^2-\frac{|p|^2-\lambda^2|q|^2}{1-\lambda^2}=\left[\frac{\lambda|p-q|}{1-\lambda^2}\right]^2.$$

由此得到圆心和半径

$$z_0=\frac{p-\lambda^2 q}{1-\lambda^2},\ r=\frac{\lambda|p-q|}{|1-\lambda^2|}.$$

容易验证 $(p-z_0)\overline{(q-z_0)}=r^2$, 说明 p,q 关于圆周对称。 $\square$

定理 5.2. (几何性质) 分式线性变换 f 将 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中的圆周映为圆周, 将关于圆周对称的两点映为关于像圆周对称的两点。

证明: 先考虑三类简单的分式线性变换: 平移变换, 相似变换, 对合变换[1]:

$$z\mapsto z+b,\ b\neq 0;\quad z\mapsto az,\ a\neq 0;\quad z\mapsto 1/z.$$

任何复球面上的圆周, 可以用如下方程表示

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right|=\lambda.$$

它在平移 $\zeta=z+b$, 相似 $\xi=az$, 对合 $\eta=1/z$ 下的像分别为

$$\left|\frac{\zeta-(p+b)}{\zeta-(q+b)}\right|=\lambda;\quad \left|\frac{\xi-ap}{\xi-aq}\right|=\lambda;\quad \left|\frac{\eta-1/p}{\eta-1/q}\right|=\lambda\left|\frac{q}{p}\right|.$$

[1]对合变换 $h(z)=1/z$ 满足 $h\circ h=\mathrm{id}$, 它有两个不动点 ±1, 在不动点处的导数 $h'(\pm1)=-1$。这说明此变换保持两点不动，沿着不动点旋转 180 度。直观上，将地球仪沿过南北极的轴旋转 180 度即实现此变换。

注意：同一圆周的方程可以用不同的对称点来表达，可以通过改变圆周的一组对称点，不妨假设 p, q 不是 $0, \infty$。这说明在三类基本变换下, 圆周的像为圆周, 对称点的像关于像圆周对称。

对一般的分式线性变换

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)/c^2}{z+d/c}$$

它可以分解为四个简单映射的复合

$$z_1 = z + \frac{d}{c},\ z_2 = \frac{1}{z_1},\ z_3 = \frac{bc-ad}{c^2} z_2,\ z_4 = z_3 + \frac{a}{c}.$$

由上可知 f 将圆周映为圆周, 将圆周对称点映为圆周对称点。 □

计算可知，像圆周方程由下式给出

$$\left|\frac{w-f(p)}{w-f(q)}\right| = \lambda \left|\frac{q-f^{-1}(\infty)}{p-f^{-1}(\infty)}\right|.$$

5.3 交比 (Cross ratio)

分式线性变换

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

的系数可同乘一个非零常数，从而满足规范化条件：$ad - bc = 1$。这说明系数有三个自由度, 一般可由三个方程确定。下面的结论说明，任意指定三个不同点的取值, 由此得到的三个方程，可唯一确定分式线性变换。

定理 5.3. 任给 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上两个三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}, \{w_1, w_2, w_3\}$, 每组内部的三点互不相同, 存在唯一的分式线性变换 f, 满足

$$f(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, 3.$$

特别地, 保持三点不动的分式线性变换为恒等映射 id。

证明: (存在性) 先考虑 $(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$ 的情况。此时, 易知满足 $h(z_1) = 0, h(z_3) = \infty$ 的变换为 $h(z) = \lambda \cdot (z - z_1)/(z - z_3)$。由规范化条件 $h(z_2) = 1$ 得 $\lambda = (z_2 - z_3)/(z_2 - z_1)$, 于是

$$h(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

对一般位置的 (w_1, w_2, w_3), 可取分式线性变换 H 将 w_1, w_2, w_3 分别映为 $0, 1, \infty$:

$$H(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}.$$

于是 $f = H^{-1} \circ h$ 就是满足要求的映射。

(唯一性) 只需证明, 如果 g 也是满足 $g(z_k) = w_k$, 则 $g \equiv f$。这等价于证明 $S = f \circ g^{-1} = \mathrm{id}$。易见，$S$ 保持三点 z_1, z_2, z_3 不动。为此，只需证明如果 $S \neq \mathrm{id}$, 则 S 在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中至多有两个不动点。为说明这一点, 解方程

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z.$$

如果 $c = 0$, 则 $S(\infty) = \infty$, 说明 ∞ 是一个不动点。此时通过解一次方程可知, 在 $\mathbb{C}$ 中 S 至多有一个不动点。如果 $c \neq 0$, 则 $S(\infty) = a/c \neq \infty$, 说明 ∞ 不是不动点。此时，通过解二次方程可知，在 $\mathbb{C}$ 中 S 有两个不动点 (可能重合)。 $\square$

在上面证明中, 分式线性变换

$$h(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

将 z_1, z_2, z_3 分别映为 $0, 1, \infty$。这个变换的形式, 引出交比的概念。

定义 5.1. 给定 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的有序四点 z_0, z_1, z_2, z_3, 我们称复数值

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

为四点 z_0, z_1, z_2, z_3 的交比 (cross ratio)。

注意, 交比依赖于四点的次序。不同的次序会导致不同的交比值 (见习题)。交比的几何意义由下式给出

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{\ell_0 \ell_2}{\ell_1 \ell_3} e^{i(\alpha + \beta)}.$$

这里 $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3$ 分别是线段 $[z_0, z_1], [z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_0]$ 的长度, α, β 分别是角度 $\angle z_0 z_1 z_2$, $\angle z_2 z_3 z_0$。

定理 5.4. (分式线性变换保持交比) 交比在分式线性变换 f 下保持不变, 即

$$(f(z_0), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = (z_0, z_1, z_2, z_3).$$

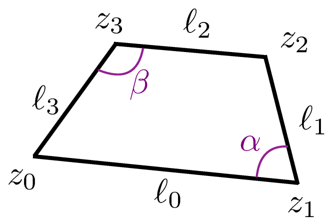


图 5.2: 交比的几何意义

证明: 我们将交比的第一个位置视为变量, 记

$$S(z) = (z, z_1, z_2, z_3),\ T(w) = (w, f(z_1), f(z_2), f(z_3)).$$

显然 $S, T, T \circ f$ 都是分式线性变换。映射 S, $T \circ f$ 都将 z_1, z_2, z_3 分别映为 $0, 1, \infty$。由定理5.3, 得 $T \circ f = S$, 特别地 $T(f(z_0)) = S(z_0)$。

5.4 例题

例题 5.1.复球面上相异四点 z_0, z_1, z_2, z_3 共圆的充要条件是

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}.$$

证明：记 $f(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$。我们知道 f 是一个分式线性变换，将 z_1, z_2, z_3 分别映为 $0, 1, \infty$。

利用分式线性变换的几何性质可知，f 将过 z_1, z_2, z_3 的圆周 C 映为过 $0, 1, \infty$ 的圆周, 即 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$。$f$ 的逆映射 f^{-1} 将 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 映为圆周 C。

这说明，如果 z_0, z_1, z_2, z_3 四点共圆，即 $z_0 \in C$, 则 $f(z_0) \in \mathbb{R}$。反之亦然。 □

例题 5.2. 求角形区域 $D = \{z; \mathrm{Re}(z) > 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 关于分式线性变换 $w = 1/z$ 的像。

解：易见, 变换将 $[1, +\infty]$ 映为 $[1, 0]$, 利用保角性和映射性质(将圆周映为圆周)，可知像为以 $[0, 1]$ 为直径的下半单位圆。 □

例题 5.3. 求分式线性变换 f，将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映为自身。

解： 因 f 是同胚, 有 $f(\partial\mathbb{D})=\partial f(\mathbb{D})=\partial\mathbb{D}$。$f$ 将 $\mathbb{D}$ 内一点 a 映为 0。根据分式线性变换的几何性质，它将 a 关于圆周 $\partial\mathbb{D}$ 的对称点 $1/\overline{a}$ 映为 0 关于圆周 $\partial\mathbb{D}$ 的对称点 ∞。同时,f 将圆周上一点 b 映为 1。由分式线性变换保交比的性质可知

$$(z,a,b,1/\overline{a})=(f(z),f(a),f(b),f(1/\overline{a}))=(f(z),0,1,\infty)=f(z).$$

由此可得

$$f(z)=\frac{z-a}{z-1/\overline{a}}\cdot\frac{b-1/\overline{a}}{b-a}=\frac{1-\overline{a}b}{b-a}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

由下式

$$\left|\frac{1-\overline{a}b}{b-a}\right|=\left|\frac{b(\overline{b}-\overline{a})}{b-a}\right|=1$$

可知，我们可以将系数 $\frac{1-\overline{a}b}{b-a}$ 写成 $e^{i\theta}$ 的形式，其中 $\theta\in\mathbb{R}$。这样满足条件的变换可以写成

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

的形式。每一对参数 $(a,e^{i\theta})\in\mathbb{D}\times\partial\mathbb{D}$ 将决定唯一的 f。

最后，我们说明 f 在圆周上的保方向性。单位圆周的正向指的是它的逆时针方向。记 $z=e^{it}$, 并且 $e^{i\psi(t)}=f(e^{it})$。两边对 t 求导得

$$\begin{aligned}i\psi'(t)e^{i\psi(t)}&=\frac{ie^{i\theta}e^{it}(1-|a|^2)}{(1-\overline{a}e^{it})^2}\\ \Longrightarrow\psi'(t)&=\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}e^{it}|^2}>0.\end{aligned}$$

此式说明，f 保持圆周的方向, 即将正向圆周映为正向圆周。

与之对比，可以看出 $g(z)=\overline{z}$ 将正向圆周映为反向圆周。

5.5 习题

图 5.3: Who?

1. (特殊的分式线性变换) 证明分式线性变换 f 将上半平面映为上半平面的充要条件是 f 可以表示为如下形式

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 且 $ad-bc=1$。

2. (象圆周的方程) 假设 p,q 为复球面的两个不同点, 实数 $\lambda>0$。证明分式线性变换 f 把圆周

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right|=\lambda$$

映为圆周

$$\left|\frac{w-f(p)}{w-f(q)}\right|=\lambda\left|\frac{q-f^{-1}(\infty)}{p-f^{-1}(\infty)}\right|.$$

3. (分式线性变换: Thurston 的观点) 假设 f 是一个分式线性变换, 满足 $f(0)\neq\infty$, 证明恒等式

$$f(z)=\frac{(2f'(0)^2-f(0)f''(0))z+2f(0)f'(0)}{-f''(0)z+2f'(0)}.$$

这说明一个分式线性变换可以由某点 (此处 $z_0=0$) 的值, 导数, 二阶导数三个量唯一确定。

4. (圆周对称点) 证明 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ 关于圆周 $a|z|^2+\bar{b}z+b\bar{z}+d=0$ $(a\neq 0)$ 对称的充要条件是

$$az_1\overline{z_2}+\bar{b}z_1+b\overline{z_2}+d=0.$$

5. (典型四点的交比) 在如下条件下求 A, B, C, D 四点的交比 (A, B, C, D):

(1). $ABCD$ 为正方形；

(2). $ABCD$ 为矩形, 边长 $AB = a, BC = b$；

(3). ABC 是正三角形, D 是其中心。

6. (交比的所有可能性) 给定复球面上的 4 个不同点 z_0, z_1, z_2, z_3, 通过四点之间做置换, 可以得到很多不同的交比值. 记 $\lambda = (z_0, z_1, z_2, z_3)$, 假设 $\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$。证明:

(a). 保持四点交比不变的置换只有四个。

(b). 通过置换得到的交比所有可能的取值为

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{1}{1-\lambda},\ 1-\frac{1}{\lambda}.$$

7. (对称形式) 如果分式线性变换 f 有两个不动点 $p, q \in \mathbb{C}$。

(1). 证明 f 可以表示为对称形式

$$\frac{f(z)-p}{f(z)-q} = \lambda \frac{z-p}{z-q},$$

其中 λ 为非零复数；

(2). 如果 $f(a) = \infty$, $f(\infty) = b$, 证明 $a + b = p + q$；

(3). 在 (2) 的记号下，证明

$$f(z) = \frac{bz - pq}{z - a}.$$

8. (函数方程) 假设 $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 是一个已知函数 (假设定义于或取值于 ∞ 都有意义)，利用函数方程求出 f:

$$f\Big(\frac{1}{1-z}\Big) + f\Big(\frac{z-1}{z}\Big) = g(z).$$

9. (球极投影) 记 $\Phi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为球极投影映射. 任意给定球面 S^2 上位于圆周上的四个点 a, b, c, d, 证明

$$(a, b, c, d) = (\Phi(a), \Phi(b), \Phi(c), \Phi(d)).$$

10. (四点共圆) 凸四边形 $ABCD$ 中, 三角形 $\Delta ABC, \Delta BCD$, ΔCDA, ΔDAB 的重心分别为 X, Y, X, W, 证明

$$(D, A, B, C) = (X, Y, Z, W).$$

这说明 $ABCD$ 四点共圆的充要条件是 $XYZW$ 四点共圆。

11. (标准形式) 称两个分式线性变换 f, g 共轭, 如果存在一个分式线性变换 h 满足：$g \circ h = h \circ f$.

(a). 证明任何一个分式线性变换总是共轭于以下两种标准形式之一

$$z \mapsto z+1;\ z \mapsto \lambda z, \lambda \neq 0.$$

(b). 证明任何一个实系数变换

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1$$

总是共轭于以下三种标准形式之一

$$z \mapsto z+1;\ z \mapsto \lambda z, \lambda > 0;\ z \mapsto \frac{\sin\theta + z\cos\theta}{\cos\theta - z\sin\theta}, \theta \in \mathbb{R}.$$

12. (分式线性变换的迭代) 记 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为分式线性变换，考虑复球面上任意一点 z_0 在 f 迭代下的轨道

$$z_0 \mapsto f(z_0) \mapsto f^2(z_0) := f(f(z_0)) \mapsto \cdots.$$

根据第 4(a) 题中标准形式的分类，描述该轨道的渐进性质。

13. (不动点与可交换映射) 记 $\mathrm{Fix}(f)$ 为分式线性变换的不动点集, 如果 $f \neq \mathrm{id}$, 我们知道这个集合至多包含两个点. 如果两个非恒等变换 f, g 满足 $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$, 证明

$$f \circ g = g \circ f.$$

反之成立吗？说明理由。

附加题 (不做要求)

问题 5.1. (等距变换) 求所有等距的分式线性变换 f, 等距指

$$d(f(z), f(w)) = d(z,w),\ \forall z, w \in \widehat{\mathbb{C}},$$

其中

$$d(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}.$$