1. 先证明，曲面是局部连通的（从而连通分支是开集）

任取 $x\in M$ 及 x 的任意邻域 U，由于存在 x 的邻域 V 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中开集 $\varphi(V)$，同胚映射记作 φ。由 $U\cap V$ 同胚于 $\varphi(U\cap V)$，$\varphi(U\cap V)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集，故存在包含 $\varphi(x)$ 的开球 $B\subset\varphi(U\cap V)$，再由于 φ 是同胚，B 连通，知 $\varphi^{-1}(B)\subset U\cap V\subset U$ 连通。

从而 M 局部连通。

任取连通分支 C。 $\forall\, x\in C\subset M$. 存在 x 的邻域 U 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中 $\varphi(U)$.

由 $U\cap C$ 是 M 中开集. $U\cap C$ 同胚于 $\varphi(U\cap C)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集.

于是，$\forall\, x\in C$. 存在 C 中开集 $U\cap C\ni x$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中开集.

故 C 为曲面.（Hausdorff 性质和 A_2 性质直接由子空间继承）.

2. $\forall x \in X$ 由 $f(x) \neq x$ 知 存在开集 $U \cap V = \phi$、$x \in U$、$f(x) \in V$.

再由 f 连续. 知存在 x 的邻域 S，$f(S) \subset V$.

取 $W = U \cap S$. 为 x 的开邻域. 则 $W \cap f(W) = \phi$.

(事实上，$W \cap f(W) \subset U \cap f(S) \subset U \cap V = \phi$).

3. 由 $f\circ f=\mathrm{id}$ 知 $\sim$: $x\sim y \Leftrightarrow y=f(x)$ 或 $x=y$ 确实为等价关系.

并且, f 既单又满且连续, 再由 X 为紧致Hausdorff空间知 $f: X\to X$ 为同胚

- $X/\sim$ 紧致: 由 X 紧致, $\pi: X\to X/\sim$ 连续可得.

- $X/\sim$ 为Hausdorff空间. 任取 $[x]\neq[y]\in X/\sim$

  由 $x,y\in X$, 问题2可知 $\exists$ x,y 的邻域 W_x, W_y s.t. $W_x\cap f(W_x)=\phi$, $W_y\cap f(W_y)=\phi$.

  对 $x\neq y$, 存在 $U_1\cap V_1=\phi$, $x\in U_1$, $y\in V_1$

  对 $x\neq f(y)$ 有, 存在 $U_2\cap V_2=\phi$. $x\in U_2$ $f(y)\in V_2$. 再由 f 连续知

  $\exists$ V_3、$y\in V_3$ $f(V_3)\subset V_2$.

  于是取 $S_x=W_x\cap U_1\cap U_2$, $S_y=W_y\cap V_1\cap V_3$ 为 x,y 的邻域.

  $[x]\in\pi(S_x)$. $[y]\in\pi(S_y)$ 且 $\pi(S_x)\cap\pi(S_y)=\phi$

- $X/\sim$ 局部欧式. $\forall$ $[x]\in X/\sim$, 由 $x\in X$. 存在 x 的邻域 U, $U\cap f(U)=\phi$.

  及 x 的邻域 V, V 同胚于 $\varphi(V)\subset\mathbb{R}^n$. 于是 $W:=U\cap V$ 为 x 的同胚于 $\varphi(W)\subset\mathbb{R}^n$ 的开集.

  且 $\varphi(W)\cap W=\phi$. 知 $[x]\in\pi(W)$, 且 $\pi(W)$ 同胚于 $\varphi(W)$.

  同胚映射就是 $\varphi\circ\pi^{-1}$

- $X/\sim$ 满足 A_2. 对 X 的一组基 $\{U_j\}$, $\{\pi(U_j)\}$ 为 $X/\sim$ 的一组基.