第九章 Cauchy-Goursat 积分定理

为叙述 Cauchy 积分定理, 我们需要引入单连通区域的概念。我们称连续曲线 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ 为简单闭曲线, 如果 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 并且 γ 限制在 (a,b) 上是单射。Jordan 曲线定理告诉我们, 平面上一条简单闭曲线 γ 总是将平面分为两个区域, 一个是有界的, 称为 γ 的内部, 一个是无界的, 称为 γ 的外部。

称平面区域 Ω 是单连通的, 如果 Ω 中任意简单闭曲线的内部都在 Ω 中。单连通的一个等价定义为: Ω 的关于复球面的余集是连通的。此等价定义的优点是可推广到多连通区域：称平面 (或复球面) 区域 Ω 是n-连通的 ($n \geq 1$), 如果其关于复球面的余集 $\widehat{\mathbb{C}} - \Omega$ 有 n 个连通分支。显然 1-连通即单连通。

值得注意的是, 这里的余集指的是关于复球面的余集, 而不是关于复平面的余集。为区分二者的不同, 考虑区域

$$\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

显然, 区域 Ω 是单连通的，因其关于复球面的余集只有一个连通分支，但它关于复平面的余集有两个连通分支。

单位圆盘 $\mathbb{D}$ 是单连通的。穿孔单位圆盘 $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 和圆环区域 $A = \{r < |z| < R\}$ 都是 2-连通的。

9.1 Cauchy 定理 1825

1825 年, 法国数学家 Cauchy 证明了一条漂亮的定理, 为复变函数理论的研究奠定了基石。此定理用复坐标叙述如下：

假设 Ω 是平面单连通区域, f 在 Ω 上全纯, 且导数 f' 在 Ω

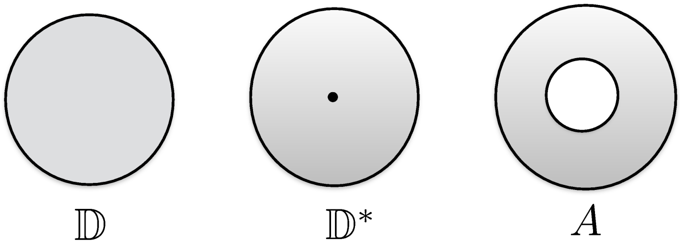

图 9.1: 单连通与 2-连通区域

上连续, 则对 Ω 中任何分段光滑的简单闭曲线 γ, 有

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

图 9.2: 法国数学家 Cauchy

这个定理的证明依赖于 Green 公式: 假设实值函数 p, q 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 对 Ω 中任何分段光滑的简单闭曲线 γ, 有

$$\int_\gamma pdx + qdy = \int_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy,$$

这里 D 是 γ 所围区域, γ 的方向为正向: 即沿着此方向前进, D 在 γ 的左侧。

下面用 Green 公式来证明 Cauchy 定理。记 $f = u + iv$, 由 f 全纯可知, Cauchy-Riemann 方程成立: $u_x = v_y, v_x = -u_y$。将

复积分表示为第二型曲线积分, 利用 Green 公式以及 Cauchy-Riemann 方程可得

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma (u+iv)(dx+idy)\\ &= \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy\\ &= \int_{D_\gamma} (-v_x - u_y)dxdy + i\int_{D_\gamma} (u_x - v_y)dxdy = 0.\end{aligned}$$

由此可见, Cauchy 于 1825 年证明的定理, 本质上是 Green 公式的特例。这个定理结论简洁优美, 然而美中不足的是, 条件要求导数 f' 在 Ω 上连续。这一条件并没有影响复变函数理论的建立与发展。几十年后，有一位数学家发现，这一条件实属多余。此人是 Goursat。

9.2 Goursat 定理：严格性的典范

Cauchy 与 Goursat 都是法国人，但其生活的年代却无交集。Cauchy 于 1857 年去世，第二年 Goursat 诞生。Goursat 是当时著名的分析学家，编著的《数学分析教程》是分析学的经典教材。Goursat 在 1884 的论文 Démonstration du théorèm de Cauchy 中给出了 Cauchy 定理在不假设 f' 连续性的证明。

Goursat 的证明是分析中的精彩之作，堪称典范：先处理曲线 γ 是三角形边界的情形，然后采用逼近的方法处理一般曲线，证明中本质地利用了全纯函数的定义。

定理 9.1. (Goursat, 1884) 假设 f 在平面单连通区域 Ω 上全纯, 则对任何闭包包含在 Ω 中的三角形区域 T, 成立

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

证明: 取 ∂T 为正定向。将三角形区域 T 记为 $T^{(0)}$。将其三边中点依次连线, 可将其四等分, 分别记为 $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}, T_4^{(1)}$。由积分性质得,

$$\int_{\partial T^{(0)}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial T_k^{(1)}} f(z)dz.$$

由此知, 总存在 $j \in \{1,2,3,4\}$, 满足

$$\left|\int_{\partial T^{(0)}} f(z)dz\right| \le 4\left|\int_{\partial T_j^{(1)}} f(z)dz\right|.$$

将 $T_j^{(1)}$ 记为 $T^{(1)}$。接下来, 将 $T^{(1)}$ 沿三边中点做四等分, 按上述过程, 可得到一列三角形

$$T^{(0)} \supset T^{(1)} \supset T^{(2)} \supset \cdots,$$

满足性质

$$\left|\int_{\partial T^{(0)}} f(z)dz\right| \le 4^n\left|\int_{\partial T^{(n)}} f(z)dz\right|.$$

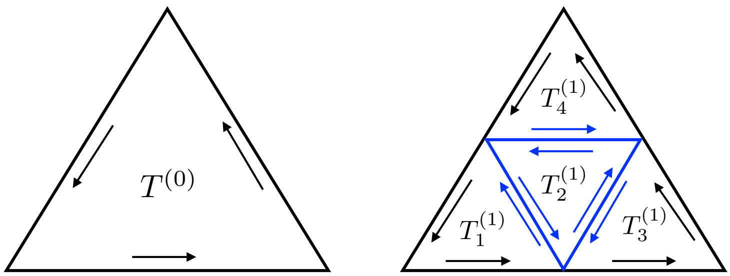

图 9.3: 三角形的划分

我们记 $T^{(n)}$ 的周长为 L_n, 直径为 d_n, 则有 $L_n = L_0/2^n \to 0, d_n = d_0/2^n \to 0$。这说明 $\overline{T^{(n)}}$ 是一列递减的紧集, 直径趋于零。因此 $\bigcap \overline{T^{(n)}}$ 是一个单点集, 记为 $\{z_0\}$。

利用 f 在 z_0 点的全纯性知, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $z \in D(z_0,\delta)$,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \psi(z)(z-z_0),$$

其中, ψ 满足当 $z \to z_0$ 时, $\psi(z) \to 0$。

取 n 足够大, 使得 $T^{(n)} \subset D(z_0,\delta)$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\partial T^{(n)}} f(z)dz &= \int_{\partial T^{(n)}} f(z_0)dz + \int_{\partial T^{(n)}} f'(z_0)(z-z_0)dz \\ &\quad + \int_{\partial T^{(n)}} \psi(z)(z-z_0)dz \\ &= \int_{\partial T^{(n)}} \psi(z)(z-z_0)dz.\end{aligned}$$

上式利用了 1 和 $z-z_0$ 在 Ω 上原函数的存在性 (分别为 z 和 $(z-z_0)^2/2$), 因此前两项积分为 0。

利用积分的基本不等式,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial T^{(0)}} f(z)dz\right| &\le 4^n\left|\int_{\partial T^{(n)}} \psi(z)(z-z_0)dz\right| \\ &\le 4^n \max_{z\in\partial T^{(n)}} |\psi(z)| d_n L_n \\ &= \max_{z\in\partial T^{(n)}} |\psi(z)| d_0 L_0.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时, $\max_{z\in\partial T^{(n)}}|\psi(z)|\to 0$。因此 $\int_{\partial T^{(0)}} f(z)dz = 0$. 这样就完成了 Goursat 定理的证明。 □

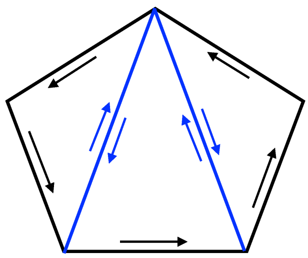

图 9.4: 多边形区域

利用 Goursat 定理以及多边形总可剖分为有限个三角形这一基本事实, 如果 γ 是一条简单闭折线 (即某多边形 (不必为凸) 区域的边界), 则有

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

9.3 Cauchy-Goursat 积分定理

利用折线逼近一般的简单闭曲线的方法, 我们将证明复变函数理论的奠基性定理：Cauchy-Goursat 积分定理。

> **定理 9.2.** (Cauchy-Goursat) 假设 Ω 是平面单连通区域, f 在 Ω 上全纯, 则对 Ω 中任何分段光滑简单闭曲线 γ, 有
>
> $$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

证明的关键在于如下事实:

引理 9.1. (折线逼近) 假设 Ω 是任意平面区域, 给定连续的复值函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 及分段光滑曲线 $\gamma:[a,b]\to\Omega$。对任意 $\epsilon>0$, 总存在一条折线 $\Gamma\subset\Omega$, 满足

- Γ 的顶点 (即折点) 都在 γ 上, 并且
- $\left|\int_\gamma f(z)dz-\int_\Gamma f(z)dz\right|\le\epsilon.$

注：进一步，若 γ 是简单闭曲线, Γ 可取为简单闭折线 (思考题)。

承认此引理, Cauchy-Goursat 定理证明如下：由简单闭折线的 Goursat 定理可知, $\int_\Gamma f(z)dz=0$。这说明积分 $\int_\gamma f(z)dz$ 之模长可任意小, 因此必然为 0。

引理的证明: 证明用到的关键事实为：紧集上的连续函数必然一致连续。值得注意的是, Ω 未必单连通，也未必有界。Ω 是否单连通并无影响，但若无界，则需在其紧子集上考虑问题。

曲线 γ 作为闭区间 $[a,b]$ 在连续映射下的像, 是 Ω 的紧集。因此可选取 Ω 的子区域 D, 使 $\gamma\subset D$ 且 $\overline{D}$ 是 Ω 的紧子集。由 γ 的紧性可知 $d=\operatorname{dist}(\gamma,\partial D):=\min_{z\in\gamma,w\in\partial D}|z-w|>0$。

记 L 为曲线 γ 的长度。由 f 在 $\overline{D}$ 上连续可知, 它必然在 $\overline{D}$ 上一致连续。这意味着, 对于 $\epsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 满足

$$\forall z_1,z_2\in\overline{D},|z_1-z_2|\le\delta\Longrightarrow|f(z_1)-f(z_2)|\le\epsilon/(2L).$$

记 $\delta_0=\min\{\delta,d\}$。在 γ 上取分点 $z_0=\gamma(a),z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=\gamma(b)$, 使 γ 在相邻分点 z_{k-1},z_k 间的弧段 γ_k 的长度 $\le\delta_0$。

考虑折线段 $\Gamma=[z_0,z_1]\cup[z_1,z_2]\cup\cdots\cup[z_{n-1},z_n]$。记 $\Gamma_k=[z_{k-1},z_k]$。显然, $\gamma_k\cup\Gamma_k\subset\overline{D(z_k,\delta_0)}\subset\overline{D}$, 这说明 $\Gamma\subset\overline{D}\subset\Omega$。由一致连续性, 对任意 $z\in\gamma_k\cup\Gamma_k$, 成立 $|f(z)-f(z_k)|\le\frac{\epsilon}{2L}$。于

是

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\gamma_k} f(z)dz - \int_{\Gamma_k} f(z)dz\right| \\
\le\ &\left|\int_{\gamma_k} f(z)dz - f(z_k)(z_k - z_{k-1})\right| \\
&+\left|\int_{\Gamma_k} f(z)dz - f(z_k)(z_k - z_{k-1})\right| \\
=\ &\left|\int_{\gamma_k} (f(z) - f(z_k))dz\right| + \left|\int_{\Gamma_k} (f(z) - f(z_k))dz\right| \\
\le\ &\int_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)||dz| + \int_{\Gamma_k} |f(z) - f(z_k)||dz| \\
\le\ &\frac{\epsilon}{2L}\Big(L(\gamma_k) + L(\Gamma_k)\Big) \le \frac{\epsilon}{L} L(\gamma_k).
\end{aligned}
$$

最后, 我们有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\Gamma} f(z)dz\right| &\le \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\gamma_k} f(z)dz - \int_{\Gamma_k} f(z)dz\right| \\
&\le \frac{\epsilon}{L}\sum_{k=1}^{n} L(\gamma_k) = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Cauchy-Goursat 定理可以推广到多连通区域。

假设 Ω 为平面区域, 称 f 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯, 如果 f 在包含 $\overline{\Omega}$ 的更大的平面区域上全纯。

推论 9.1. 假设 Ω 是平面多连通区域, 边界为 n 条分段光滑的简单闭曲线, f 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯, 则成立

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0.$$

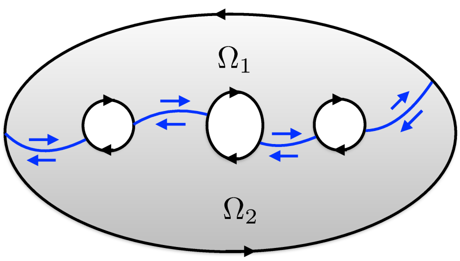

图 9.5: 多连通区域的剖分

证明: 通过增加 n 条分段光滑曲线, 可以将 Ω 的 n 条边界曲线连起来。按照图中给出的连接方式 (容易看出, 还有其他的连接方式, 但非本质), Ω 去掉这 n 条曲线, 可得到两个单连通子区域 Ω_1, Ω_2, 每个子区域的边界都是分段光滑的简单闭曲线。对 $\partial\Omega_k$ 应用 Cauchy-Goursat 定理, 并注意到在辅助曲线上的积分沿正反方向正好抵消, 可得

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \int_{\partial\Omega_1} f(z)dz + \int_{\partial\Omega_2} f(z)dz = 0.$$

9.4 习题

"在实数域中, 连接两个真理的最短的路径是通过复数域。"

—Jacques Hadamard

1. (Goursat 定理的另一种形式) 假设 f 在平面单连通区域 Ω 上全纯, 则对任何闭包包含在 Ω 中的矩形区域 R, 成立

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

(请用 Goursat 定理的思路，而非结论，给出证明)

2. (利用复积分计算实积分) 假设 n 为正整数, 通过计算积分

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$$

证明

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

3. (积分定理的应用) 假设 f 在区域 $\{z \in \mathbb{C}; |z| > r\}$ 上全纯, 满足 $\lim_{z\to\infty} zf(z) = A$. 证明对 $R > r$，成立

$$\int_{|z|=R} f(z)dz = 2\pi i A.$$

4. (周期函数的一个奇妙性质) 假设 f 在复平面上全纯，满足 $f(z+1) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}$。证明积分

$$\int_{[w,w+1]} f(\zeta)d\zeta$$

的取值与 w 无关。

5. (Green 公式的应用) 假设 D 是平面有界区域, 边界 ∂D 为一条分段光滑的简单闭曲线,

(1). 证明面积公式

$$\int_{\partial D} \overline{z} dz = 2i \cdot \operatorname{area}(D).$$

(2). 如果 f 在 $\overline{D}$ 上全纯, 证明

$$\max_{z \in \partial D} |\overline{z} - f(z)| \geq 2 \frac{\operatorname{area}(D)}{\ell(\partial D)},$$

其中 $\ell(\partial D)$ 为边界 ∂D 的长度。