

2020-2021秋冬《数值代数》

2021-1-24

1. $x = (-1, 2, -3, 4)^T$, 求 $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$. (6分)

2. 对 $A \in R^{n \times n}$, 定义 $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$, 证明: $\|\cdot\|$ 是一个矩阵范数,

并举例说明不满足矩阵范数的相容性。 (14分)

3. 给一个4阶对称正定阵 A 和 4维向量 b , 用改进的平方根法求解 $Ax = b$. (20分)

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 用共轭梯度法求解 $Ax = b$. (20分)

5. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{11}a_{22} \neq 0$, 证明: 求解 $Ax = b$ 的 *Jacobi* 迭代和 *Gauss - seidel* 迭代

同时收敛或同时发散。 (15分)

6. 应用幂法于矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ ($\lambda > 0$), 求特征值和特征向量。 (15分)

7. $A \in R^{m \times n}, m > n$, 证明: $\|A(A^T A)^{-1} A^T\|_2 = 1$. (10分)