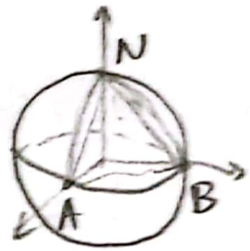
1. 球面三角形 $\tilde{\Delta}NAB$ 到平面三角形 ΔNAB 的同胚映射 f:



$$f: \quad \tilde{\Delta}NAB \longrightarrow \Delta NAB$$

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right), \quad x^2+y^2+z^2=1,\ x, y, z \geq 0$$

其逆 f^{-1}:

$$\Delta NAB \longrightarrow \tilde{\Delta}NAB$$

$$(a, b, c) \longmapsto \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right), \quad a+b+c=1,\ a, b, c \geq 0$$

2. 当J是可数集时，已证 $(\mathbb{R}^{\omega}$，箱拓扑) 不可度量化.

当J不可数时，类似. 取 $A=\{(x_\alpha) \mid x_\alpha>0\}$，则 $\vec{0}\in\bar{A}$：

因为对任意包含 $\vec{0}$ 的基元素 $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha=U$，有 $0\in U_\alpha$，故 $U\cap A\neq\phi$

现取J的一个可数子集I，任取A中序列 (x_α)，

令 $U=\prod_{\alpha\in I}(-x^i_{\alpha_i}, x^i_{\alpha_i})\prod_{\alpha\in J\setminus I}\mathbb{R}$，则U包含 $\vec{0}$，

但对每个 α_i，$i\in I$，$x^i_{\alpha_i}\notin(-x^i_{\alpha_i}, x^i_{\alpha_i})$，即 $(x_{\alpha_i})_{i\in I}\not\subset U$.

由I为可数无限集，知 $(x_\alpha)\not\to 0$.

扫描全能王 创建

3. • 在积拓扑中，$\overline{\mathbb{R}^\infty}=\mathbb{R}^\omega$.

任取 $x\in\mathbb{R}^\omega$，x 的任意邻域形式为 ~~$U=\prod U_n \prod$~~

$$U=\prod_{n=1}^{N}U_n\prod_{n>N}\mathbb{R}$$

取 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$ s.t. $y_n=x_n\in U_n$，$n\leq N$，$y_n=0$，$n>N$

则 $y\in U\cap\mathbb{R}^\infty$，即 $U\cap\mathbb{R}^\infty\neq\phi$. $\mathbb{R}^\omega\subset\overline{\mathbb{R}^\infty}$. 从而 $\overline{\mathbb{R}^\infty}=\mathbb{R}^\omega$.

• 在一致拓扑中，$\overline{\mathbb{R}^\infty}=X$，这里 X 为 $\mathbb{R}^\omega$ 中收敛到 0 的序列，即

$X=\{(x_n)_{n=1}^\infty \mid \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0\ \text{s.t.}\ |x_n|<\varepsilon\ \forall n>N \text{ 成立}\}$.

易知 $\mathbb{R}^\infty\subseteq X\subseteq\mathbb{R}^\omega$，现设 $y\in\mathbb{R}^\omega\setminus X$，则 $\exists\varepsilon_0>0$. s.t.

$\forall N_i>0$，$\exists n_i>N_i$ s.t. $|y_{n_i}|\geq\varepsilon_0$ 且 n_i 为单增序列，记所有 n_i 的集合为 K.

对任意 $z\in B_\rho(y,\frac{\varepsilon_0}{2})$，有 $|z_{n_i}|\geq|y_{n_i}|-\frac{\varepsilon_0}{2}\geq\frac{\varepsilon_0}{2}$，$\forall n_i\in K$. 即 $z\notin X$.

有 $B_\rho(y,\frac{\varepsilon_0}{2})\subset\mathbb{R}^\omega\setminus X$. 从而 $\mathbb{R}^\omega\setminus X$ 为开集. X 为闭集，从而 $\overline{\mathbb{R}^\infty}\subseteq X$.

欲证 $\overline{\mathbb{R}^\infty}=X$. 只需注意到，$\forall x\in X$ 及 x 的任意邻域 $U_x=B_\rho(x,\varepsilon)$，$\varepsilon>0$.

有 $(x_1,x_2,\cdots,x_N,0,0,\cdots)\in U_x\cap\mathbb{R}^\infty$，

因为 $|0-x_n|<\varepsilon$，$\forall n>N$ 成立. 即 $U_x\cap\mathbb{R}^\infty\neq\phi$. $\overline{\mathbb{R}^\infty}=X$.

• 在箱拓扑中，$\overline{\mathbb{R}^\infty}=\mathbb{R}^\infty$

事实上，任取 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots)\in\mathbb{R}^\omega\setminus\mathbb{R}^\infty$，知 $\forall k>0$，$\exists n_k>0$ s.t.

$x_{n_k}\neq0$. n_k 为单增序列，记作 K，$\forall n_k\in K$，$\exists$ x_{n_k} 的邻域 U_{n_k}，$0\notin U_{n_k}$.

令 $U=\prod_{n\in K}U_n\prod_{n\notin K}\mathbb{R}$，则 $x\in U$，但 $\vec{0}\notin U$

即 $U\cap\mathbb{R}^\infty=\phi$，故 $\mathbb{R}^\omega\setminus\mathbb{R}^\infty$ 为开集. $\mathbb{R}^\infty$ 为闭集.

$\overline{\mathbb{R}^\infty}=\mathbb{R}^\infty$.

4. $X = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}_+} [0, \frac{1}{n}]$ $\quad x = (x_n).\ y = (y_n).$ $\quad d(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$d(x,y) \geqslant 0$, $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\quad d(x,y) = d(y,x)$ 显然.

而 $\quad d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(z,x)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-z_i)^2} \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2 + (y_i-z_i)^2 + 2(x_i-y_i)(y_i-z_i)}$$

两边平方再利用 Cauchy 不等式即得.(note $x, y \in X$ 保证了收敛性).

故 d 是 X 上度量.

下证 X 上四种拓扑关系为

积拓扑 = 一致拓扑 = d 度量拓扑 $\subsetneq$ 箱拓扑

- 箱拓扑比度量拓扑严格细:

$\prod\limits_{n \in \mathbb{N}_+} [0, \frac{1}{n+1}) = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}_+} (-1, \frac{1}{n+1}) \cap X$ 为箱拓扑(继承 $\mathbb{R}^\omega$ 箱拓扑的子拓扑)

中含0的开集, 但不是度量拓扑中开集: $\forall \varepsilon > 0.\ B_d(0, \varepsilon) \not\subset \prod\limits_{n \in \mathbb{N}_+} [0, \frac{1}{n+1})$

而反之. 对任意度量拓扑中开集 $B_d(x, \varepsilon)$, 存在箱拓扑中开集

$$\prod_{n \in \mathbb{N}_+} \left(x_n - \frac{\varepsilon}{100n}, x_n + \frac{\varepsilon}{100n}\right) \cap [0, \frac{1}{n}] \subset B_d(x, \varepsilon)$$

扫描全能王 创建

• X上书外三种拓扑相同.

我们已经知道、积拓扑 $\subset$ 一致拓扑 $\subset d$ 度量拓扑.

事实上，积拓扑 $\subset$ 一致拓扑上课已证.

在X上，一致拓扑由度量 $\rho(x,y)=\sup_{i\in\mathbb{N}_+}|x_i-y_i|$ 诱导，且 $\rho(x,y)\le d(x,y)$.

故任意一致拓扑开集 $B_\rho(x,r)$，有 $B_d(x,r)\subset B_\rho(x,r)$.

故 一致拓扑 $\subset d$ 度量拓扑

我们证明：积拓扑 $\supset d$ 度量拓扑.（在X上）

事实上. 任取 d 度量拓扑中开集 $B_d(x,\varepsilon)$.

可取积拓扑中开集 $\widetilde{B}=\prod_{i\le n}(x_i-\frac{\varepsilon}{100i},x_i+\frac{\varepsilon}{100i})\cap[0,\frac{1}{i}]\ \prod_{i>n}[0,\frac{1}{i}]$

这里 n 充分大 s.t. $\sum_{i>n}\frac{1}{i^2}<\frac{\varepsilon^2}{100}$

我们有 $\widetilde{B}\subset B_d(x,\varepsilon)$,

因为 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon^2}{100^2i^2}+\sum_{i>n}\frac{1}{i^2}<\frac{\varepsilon^2}{100}+\frac{\varepsilon^2}{100}<\varepsilon^2$

从而我们知X上积拓扑 $\supset d$ 度量拓扑.

三个拓扑是相等的.

5. · $d_p(r_1,r_2)=p^{-v_p(r_1-r_2)}\geqslant 0$，$d_p(r_1,r_2)=0 \Leftrightarrow v_p(r_1-r_2)=\infty \Leftrightarrow r_1-r_2=0$.

· $d_p(r_1,r_2)=p^{-v_p(r_1-r_2)}$ $\quad d_p(r_2,r_1)=p^{-v_p(r_2-r_1)}$

而对 $r_1-r_2=p^k\frac{a}{b}$ 有 $r_2-r_1=p^k\frac{-a}{b}$，$(a,p)=(b,p)=(a,b)=1$

故 $v_p(r_1-r_2)=v_p(r_2-r_1)=k$. $\quad d_p(r_1,r_2)=d_p(r_2,r_1)$

· 现证 $d_p(r_1,r_2)+d_p(r_2,r_3)\geqslant d_p(r_3,r_1)$. 即 $p^{-v_p(r_1-r_2)}+p^{-v_p(r_2-r_3)}\geqslant p^{-v_p(r_3-r_1)}$

设 $r_1-r_2=p^{k_1}\frac{a_1}{b_1}$ $\quad r_2-r_3=p^{k_2}\frac{a_2}{b_2}$，$r_3-r_1=p^{k_3}\frac{a_3}{b_3}$，

即证 $p^{-k_1}+p^{-k_2}\geqslant p^{-k_3}$. 即 $p^{k_3-k_1}+p^{k_3-k_2}\geqslant 1$.

当 $p^{k_1}\frac{a_1}{b_1}+p^{k_2}\frac{a_2}{b_2}=p^{k_3}\frac{a_3}{b_3}$ 时.

① 若 $k_3-k_1\geqslant 0$ 或 $k_3-k_2\geqslant 0$，上式显然

② 若 $k_1,k_2>k_3$

由 $p^{k_1}\frac{a_1}{b_1}+p^{k_2}\frac{a_2}{b_2}=p^{k_3}\frac{a_3}{b_3}$，有 $p^{k_1}a_1b_2b_3+p^{k_2}a_2b_3b_1=p^{k_3}a_3b_1b_2$

$p^{k_1-k_3}a_1b_2b_3+p^{k_2-k_3}a_2b_3b_1=a_3b_1b_2$

两边模 p 知矛盾.