第二十二章　整函数与半纯函数

22.1　∞ 处的 Laurent 展式

如前所知, 如果 f 在 $A_{r,\infty}=\{r<|z|<\infty\}$ 上全纯, 则 ∞ 为 f 的孤立奇点。做自变量的坐标变换 $z=1/\zeta$, 则 $g(\zeta)=f(1/\zeta)$ 在环域 $A_{0,1/r}(0)=\{0<|\zeta|<1/r\}$ 上全纯。

称 ∞ 是 f 的可去奇点, m 阶极点 (零点) 或本性奇点, 如果 0 是 g 的可去奇点, m 阶极点 (零点) 或本性奇点。

记 g 在 $A_{0,1/r}(0)$ 上的 Laurent 展式主部为 $P(\zeta)$, 正则部分为 $R(\zeta)$, 很自然地，应将 f 在 ∞ 处的 Laurent 展式的主部和正则部分分别定义为 $P(1/z),R(1/z)$.

按此定义, 假设 f 在 $A_{r,\infty}$ 上的 Laurent 展式为 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^n$, 则其主部为 $\sum_{n\geq 1}a_nz^n$, 正则部分为 $\sum_{n\leq 0}a_nz^n$。

g 在原点处的奇点分类诱导了 f 在 ∞ 处的奇点分类:

- ∞ 是 f 的可去奇点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to\infty}f(z)=a\in\mathbb{C}\Longleftrightarrow f$ 在 ∞ 处 Laurent 展式主部消失。
- ∞ 是 f 的极点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to\infty}f(z)=\infty\Longleftrightarrow f$ 在 ∞ 处 Laurent 展式主部有且只有有限项 (最高项的次数就是 f 的极点的阶)。
- ∞ 是 f 的本性奇点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to\infty}f(z)$ 不存在 $\Longleftrightarrow f$ 在 ∞ 处 Laurent 展式主部有无限项。

注 1: 如果 ∞ 是整函数 f 的可去奇点, 利用 Liouville 定理知 f 是常值函数。

注 2: 如果 f 是整函数, 它在 0 处的幂级数展式也是 ∞ 处的 Laurent 展式 (利用 Laurent 展式的唯一性可以看出这一点)。(利用这一事实, 考察例子 e^z: 它在原点处的幂级数展式有无限项, 作为 ∞ 处的 Laurent 展式, 这说明 ∞ 是本性奇点。)

命题 22.1. 假设整函数 f 以 ∞ 为极点, 则 f 是多项式。

证明: 由极点定义知, 任给 $M > 0$, 存在 $R > 0$, 使当 $|z| \geq R$ 时, $|f(z)| \geq M$。由唯一性定理, f 在 $D(0, R)$ 上只有有限个零点，记为 $z_1, \cdots, z_n$，阶数分别为 $m_1, \cdots, m_n$。考虑函数

$$g(z) = \frac{(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}}{f(z)}.$$

显然, 它在 $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ 上全纯, 在 z_k 附近有界 (利用 f 在零点附近的局部表示可知), 且没有零点。由 Riemann 可去奇点定理知，g 在 $\mathbb{C}$ 上全纯。

另一方面, 由 f 在 ∞ 附近模长有下界知, 存在 $C > 0$, 使

$$|g(z)| \leq C(1 + |z|^d), \forall z \in \mathbb{C}.$$

这里, $d = m_1 + \cdots + m_n$。利用 Liouville 定理的推广形式得，g 是次数不超过 d 的多项式。由代数学基本定理以及 g 没有零点这一事实, 得 g 为常数。这说明 f 是多项式。 □

任给区域 $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$, 全纯自同构群定义为

$$\mathrm{Aut}(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega \text{ 双全纯}\}.$$

定理 22.1. 复平面的全纯自同构群为

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \Big\{f(z) = az + b; a \neq 0, b \in \mathbb{C}\Big\}.$$

证明: 显然仿射变换 $f(z) = az + b$ 是平面到自身的全纯自同构。反之, 对任意 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, 我们考察 ∞ 处的奇点性态。

易见 f 的逆映射 $g = f^{-1}$ 也是整函数, 满足 $f \circ g = \mathrm{id}$。对任意 $R > 0$, 显然 $f(g(D(0, R))) = D(0, R)$。因此只要 $|w| > \|g\|_{D(0,R)}$，就有 $|f(w)| \geq R$。这说明 $\lim_{w \to \infty} f(w) = \infty$。因此 ∞ 是 f 的极点。这说明 f 是非常值多项式。如果其次数 $m > 1$, 则有 $m > 1$ 个零点, 因此 f 不可能是单射。因此必然有 $m = 1$。此时, f 具有表达式: $f(z) = az + b$, $a \neq 0$。 □

22.2 复球面上的半纯函数

回忆半纯函数的定义: 称 f 是区域 $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 上的半纯函数 (meromorphic function, 也称亚纯) 函数, 如果 f 在 Ω 上除了孤立奇点之外全纯, 并且每一个孤立奇点都是极点。

半纯函数有很多。任给区域 Ω 上的两个全纯函数 f, g, 如果 g 不恒为 0, 则 $h = f/g$ 定义了 Ω 上的一个半纯函数。反之, 可以验证, 任何半纯函数局部总可以表示成两个全纯函数的商。

如果将半纯函数的值域看作 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的子集，区域 Ω 上的半纯函数 f 可视为从 Ω 到 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的全纯映射 $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$。

平面上的半纯函数的例子: 整函数, $\frac{e^z}{z-1}, \frac{1}{z}$ 等。如果进一步要求 ∞ 是可去奇点或极点, 则这样的半纯函数可以视作 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的半纯函数, 也可视为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 到自身的全纯映射。

有理函数给出了 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的一类半纯函数

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0},$$

其中 p, q 是没有公共零点的多项式, 次数分别为 $m, n \geq 0$, 且 $a_m, b_n \neq 0$。易见, p 的零点对应于 f 的零点, q 的零点对应于 f 的极点。在 ∞ 处情形颇为微妙, 可以验证当 $|z|$ 很大时, 有 $f(z) = z^{m-n}(a_m/b_n + o(1)))$, 分三类情况讨论

$$f(\infty) = \begin{cases} a_m/b_m \neq 0, & m = n, \text{ 此时在 } \infty \text{ 处全纯, 非零点} \\ 0, & m < n, \text{ 此时 } \infty \text{ 为 } n-m \text{ 阶零点} \\ \infty, & m > n, \text{ 此时 } \infty \text{ 为 } m-n \text{ 阶极点} \end{cases}$$

由此可见, 在计重数意义下, f 的零点数为 $\max\{m, n\}$, 极点数为 $\max\{m, n\}$。称正整数 $\max\{m, n\}$ 为 f 的映射度 (degree), 记为

$$\deg(f) = \max\{m, n\} = \max\{\deg(p), \deg(q)\}.$$

注: 可以验证, 对任意 $\zeta \in \widehat{\mathbb{C}}$, 方程

$$f(z) = \zeta$$

解的个数, 在计重数意义下恰为 $\deg(f)$。这给出了映射度的直观解释, 即 (计重数意义的) 逆像个数。

定理 22.2. 复球面到自身的全纯映射都是有理函数。

证明: 假设 $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 全纯, 则 ∞ 为极点或者可去奇点。此时, 取 $R>0$ 使 f 在 $A_{R,\infty}=\{R<|z|<\infty\}$ 上全纯。记 f_∞ 为 f 在 ∞ 的去心邻域 $A_{R,\infty}$ 上的 Laurent 展式的主部。如果 ∞ 为极点, 记其阶为 $m\geq 1$, 则 f_∞ 为 m 次多项式; 如果 ∞ 是可去奇点, 则 $f_\infty=0$。

在 $\overline{D(0,R)}$ 上, 利用极点的孤立性, f 有至多有限个极点, 记为 $p_1,\cdots,p_n$。假设 p_j 是 m_j 阶极点, 在 p_j 的去心邻域 $D(p_j,\epsilon_j)\setminus\{p_j\}$ 上, f 的 Laurent 展式的主部具有如下形式:

$$f_j(z)=\sum_{k=1}^{m_j}\frac{a_k^{(j)}}{(z-p_j)^k}.$$

一个重要的事实是: 此主部虽定义在去心邻域 $D(p_j,\epsilon_j)\setminus\{p_j\}$ 上, 但却可视为 $\mathbb{C}\setminus\{p_j\}$ 上的全纯函数。由此, 可定义 $\mathbb{C}-\{p_1,\cdots,p_n\}$ 上的全纯函数

$$F(z)=f(z)-f_\infty(z)-f_1(z)-\cdots-f_n(z).$$

显然，此函数在 f 的极点处 Laurent 展式主部消失, 因此 f 的极点都是 F 的可去奇点。特别地, F 在 f 极点的邻域 $N=\{|z|>R\}\cup D(p_1,\epsilon_1)\cup\cdots\cup D(p_n,\epsilon_n)$ 上全纯有界, 在此邻域之外 $\mathbb{C}-N$, 也全纯有界。因此 F 是 $\mathbb{C}$ 上的有界全纯函数。由 Liouville 定理知, $F\equiv C$。由此得,

$$f(z)=C+f_\infty(z)+f_1(z)+\cdots+f_n(z),$$

它是有理函数。

总结上述证明, 其关键之处是局部去心邻域的 Laurent 展式主部可视为整体的半纯函数。

以上证明也表明：任何有理函数总能分解为部分分式之和。

证明 2: 假设 f 在 $\mathbb{C}$ 上极点全体为 $p_1,\cdots,p_n$, 阶为 $k_1,\cdots,k_n$。考虑函数

$$g(z)=(z-p_1)^{k_1}\cdots(z-p_n)^{k_n}f(z).$$

利用 f 在极点处的局部表示可知, g 在 $\mathbb{C}$ 上全纯, 不取零值。现考察 g 在 ∞ 处的性质。对 f 而言, ∞ 是可去奇点或极点, 因此在 ∞ 的去心邻域中局部表示为 $f(z)=z^m(c+o(1))$, 其中 $m\in\mathbb{Z}$,

c 是非零复数, $o(1)$ 表示当 $|z| \to +\infty$ 时, 趋于零的一个小量。因此, 当 $|z| \to +\infty$ 时,

$$g(z) = z^{d+m}(c + o(1))$$

其中 $d = k_1 + \cdots + k_n$。上式说明 ∞ 是 g 的可去奇点或极点。如是前者，g 在 ∞ 邻域有界，此时由 Liouville 定理知, g 为常数; 如是后者, 由推广的 Liouville 定理知 g 为多项式。不管那种情况, $f(z) = g(z)/((z-p_1)^{k_1} \cdots (z-p_n)^{k_n})$ 都是有理函数。 □

定理22.2有一个自然推论:

定理 22.3. 复球面的全纯自同构群

$$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d}; ad - bc \neq 0 \right\}.$$

证明: 显然 $\supset$ 成立。任取 $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, 它是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 到自身的全纯映射, 由定理22.2 知, f 为有理函数 $p(z)/q(z)$。如果 p, q 之一次数大于 1, 则会导致 f 的零点或极点个数大于 1，矛盾于 f 双全纯。因此, p, q 的次数都不超过 1, 这蕴含 f 为分式线性变换。 □

例题 22.1. 证明满足当 $|z| = 1$ 时, $|f(z)| = 1$ 的有理函数总可以表示为如下形式

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{d} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}, \ a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}.$$

证明: 如果 f 在 $\mathbb{D}$ 内既无零点也无极点, 对 f 和 $1/f$ 在 $\mathbb{D}$ 上应用最大模原理得, $|f(z)| \leq 1, |1/f(z)| \leq 1, z \in \mathbb{D}$. 于是 $|f(z)| \equiv 1$。利用开映射定理 (或最大模原理) 可知, $f \equiv e^{i\theta}$。

如果 f 在 $\mathbb{D}$ 内有零点或极点, 记零点为 $z_1, \cdots, z_n$, 阶分别为 $k_1, \cdots, k_n$; 极点为 $p_1, \cdots, p_m$, 阶分别为 $l_1, \cdots, l_m$。这里 $m, n \geq 0, m + n \geq 1$。定义

$$B_1(z) = \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{z - z_s}{1 - \overline{z_s} z} \right)^{k_s}, \ B_2(z) = \prod_{t=1}^{m} \left(\frac{z - p_t}{1 - \overline{p_t} z} \right)^{l_t}.$$

容易验证 B_1, B_2 都在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, 满足当 $|z| = 1$ 时, $|B_1(z)| = |B_2(z)| = 1$。定义有理函数 $g = fB_2/B_1$, 显然 g 在 $\mathbb{D} \backslash \{z_1, \cdots, z_n, p_1, \cdots, p_m\}$ 上全纯, 且当 $|z| = 1$ 时, $|g(z)| = 1$。利用 f 在零点与极点处的局部表示 (即 $f(z) = (z-a)^k \psi(z)$) 可知, g 在 z_s, p_t 处连续, 在 $\mathbb{D}$ 内无零点和极点。由 Riemann 可去奇点定

理, g 在 $\mathbb{D}$ 上全纯。由上一种情形的讨论得, $g \equiv e^{i\theta}$。因此, $f(z) = e^{i\theta}B_1(z)/B_2(z), z \in \mathbb{D}$。由唯一性定理, 此式对 $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ 也成立。最后, 注意到此式可表示为要证的形式。 □

22.3 例子

当 f 是 ∞ 邻域的全纯函数时, 应将 ∞ 与平面中的点的地位等同起来。这一观点不仅可提升对定义于复球面区域上的全纯函数的理解 (此时定义域包含 ∞), 也对研究一般的 Riemann 曲面上的全纯函数大有帮助。

下面的例子有助于理解这种 '等同性'。

例题 22.2. 记 $f(z) = z^d + \cdots + a_1 z + a_0$ 是 d 次首一多项式。

(1). 证明 $|f(z)| \leq |z|^d \|f\|_{\partial\mathbb{D}}$, $|z| > 1$。

(2). 证明 $\|f\|_{\partial\mathbb{D}} \geq 1$, 等号成立的充要条件是 $f(z) = z^d$。

证明: 定义函数
$$g(z) = \frac{f(z)}{z^d}$$
易见, $g(\infty) = 1$, 说明 ∞ 是可去奇点。因此 g 是 $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}$ 上的全纯函数。在 Ω 上应用最大模原理,

$$|g(z)| \leq \|g\|_\Omega = \|g\|_{\partial\Omega} = \|g\|_{\partial\mathbb{D}} = \|f\|_{\partial\mathbb{D}}, \ |z| > 1$$

即得 (1)。特别地,

$$1 = |g(\infty)| \leq \|g\|_{\partial\Omega} = \|f\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

由最大模原理，上式等号成立当且仅当 $g \equiv g(\infty) = 1$。 □

例题 22.3. 假设 f 是 d (≥ 1) 次首一多项式。记 $A = f^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$, 证明 $\|f'\|_{\partial A} \geq d$, 等号成立的充要条件是 $f(z) = (z-a)^d$。

证明: 由 f 的连续性, A 是平面的闭集。又由 $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ 可知, A 有界。因此 A 是平面紧集。考虑 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的区域 $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} - A$ 上的全纯函数
$$h(z) = \frac{f'(z)^d}{f(z)^{d-1}} : \Omega \to \mathbb{C}.$$
显然, $h(\infty) = d^d$. 同时容易验证 $\partial\Omega \subset \partial A$. 因 f 是开映射, 我们有 $\partial A \subset f^{-1}(\partial\mathbb{D})$.

利用最大模原理,

$$d^d = |h(\infty)| \le \|h\|_{\partial\Omega} \le \|h\|_{\partial A} = \|f'\|_{\partial A}^d \Longrightarrow \|f'\|_{\partial A} \ge d.$$

等号成立的充要条件是

$$f'(z)^d = d^d f(z)^{d-1}.$$

如果 $d=1$, 上式显然成立. 如果 $d \ge 2$, 由上式知, f', f 有相同的零点. 此时, 如果 z_0 是 f 的 m 阶零点, 则必然 $m \ge 2$. 比较两边在 z_0 的阶可得 $(m-1)d = m(d-1)$, 由此可得 $m = d \ge 2$. 因此, f 可以写成 $(z-z_0)^d$ 的形式. □

22.4 习题

"当你和每个人在一起，却没有与我同在，你就没有和任何人在一起。

当你不和任何人在一起，而只与我同在，你就和每个人在一起。

不要和每一个人关系密切，而要成为每一个人。

当你变成那么多人，你就什么也不是。"

—鲁米

1. (Laurent 主部与有理函数) 假设有理函数 f 的极点为 $0, 2, \infty$, 对应 Laurent 展式的主部分别为

$$\frac{1}{z^2},\ \frac{1}{z-2},\ z+z^2.$$

如果 $f(1)=1$, 求 f 的表达式。

2. (部分分式展开) 将函数 $z^3/(z^2+1)$ 展成部分分式之和。

3. (有理函数的原函数) 假设 f 是非常值有理函数, 在 $\mathbb{C}$ 上的极点集为 P。在什么条件下存在有理函数 F, 使得

$$F'(z) = f(z), z \in \mathbb{C} \setminus P?$$

4. (有理函数的映射度) 假设 $f = p/q$ 是非常值有理函数, 其中 p, q 是无公因子的多项式，定义 f 的映射度

$$\deg(f) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}.$$

证明对任意 $\zeta \in \widehat{\mathbb{C}}$, 方程 $f(z) = \zeta$ 解的个数 (计重数) 恰为 $\deg(f)$。

注：本题给出了映射度的直观解释, 即 (计重数意义的) 逆像个数。思路如下：首先说明 f 的零点与极点个数都是 $\deg(f)$。对任意 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 通过复合分式线性变换 γ(即将 f 换成 $f \circ \gamma$)，不妨假设 $f(\infty) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0, \zeta\}$。利用辐角原理，当 R 很大时, 在圆盘 $D_R = D(0, R)$ 上,

$$Z(f-\zeta, D_R) - P(f-\zeta, D_R) = w(f(\partial D_R), \zeta) = 0.$$

由此，给出证明。

5. (多项式的性质) 假设 f 是 $d \geq 1$ 次首一多项式。定义函数

$$\psi(r) = \|f\|_r / r^d, r \in (0, +\infty),$$

其中, $\|f\|_\rho = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$。证明 ψ 要么严格单调递减, 要么 $\psi \equiv 1$。$\psi \equiv 1$ 的充要条件是什么?

6. (一个优美的结论: 圆盘逆像决定一个多项式) 假设 f, g 都是 d 次首一多项式。如果 $f^{-1}(\mathbb{D}) \subset g^{-1}(\mathbb{D})$, 证明 $f = g$。

(注：本题表明 $f^{-1}(\mathbb{D}) = g^{-1}(\mathbb{D}) \iff f = g$, 即 d 次首一多项式与圆盘逆像之间一一对应。)

7. (不等式) 假设 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, p 是首一多项式, 证明

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})| d\theta.$$