

偏微分方程课程内容

参考教材：《偏微分方程》，周蜀林，北京大学出版社

需要掌握的内容：

1、梯度，散度，Laplace 算子，散度定理(Gauss-Green 公式)

2、波动方程初值问题：

波动方程初值问题的 Duhamel 原理，一维初值问题的达朗贝尔公式，

特征线法解一阶线性常系数偏微分方程，一维半无界问题的求解

三维、两维初值问题的求解

影响区域，依赖区间，决定区域

3、调和函数与位势方程

调和函数的平均值性质

调和函数的性质：Harnack 不等式，导数估计，Liouville 定理，解析性

Laplace 方程的基本解，利用基本解表示全空间位势方程的解

Green 函数的定义和性质，特殊区域 Green 函数的求解，利用 Green 函数表示解

调和函数的强极值原理

4、Fourier 变换与热方程初值问题

Fourier 变换的定义及基本性质，计算函数的 Fourier 变换(记住常用函数的 Fourier 变换)

Fourier 变换求解一维及高维热方程初值问题，Poisson 核，解的表示公式，热方程的基本解以及性质

Fourier 变换求解波动方程

5、分离变量法/特征函数展开法

一维初边值问题的求解：分离变量法/特征函数法

特征函数展开法求解热方程初边值问题、波动方程初边值问题，共振产生的数学机制

特征函数展开法对不同边界条件的处理

6、能量模不等式

Friedrichs 不等式，位势方程第一、第三边值问题的能量模估计

热方程的能量模估计，反向问题解的唯一性

波动方程初值问题的能量不等式

波动方程初边值问题的能量不等式

7、极值原理与最大模估计

椭圆型方程的弱极值原理、比较原理，Hopf 引理，强极值原理，第一、第三边值问题的最大模估计

热方程的极值原理和比较原理，热方程不同初边值问题、初值问题的最大模估计

8、广义函数

基本空间定义及其性质: 紧支集光滑函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$, 光滑函数空间 $\mathcal{E}(\Omega)$, 速降函数空间 $\mathcal{S}(\Omega)$;
广义函数空间 $\mathcal{D}'(\Omega)$, 紧支集广义函数空间 $\mathcal{E}'(\Omega)$, 缓增广义函数空间 $\mathcal{S}'(\Omega)$ 定义及其性质;
广义函数的运算: 广义导数, 广义函数与光滑函数的乘积, 卷积; 广义函数的支集;
缓增广义函数空间 $\mathcal{S}'(\Omega)$ 上的 Fourier 变换定义及其性质;
拟微分算子及基本解的定义;
Sobolev 空间的定义