1 第一次作业

问题 1. 由集合X的子集构成的集合称为X上的子集族，若子集族$\mathcal{F}$满足:

- $\forall A \in \mathcal{F}, A \neq \emptyset$
- $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \neq B$, 则$A \bigcap B = \emptyset$
- $\forall x \in X, \exists A \in \mathcal{F}$, $s.t.$ $x \in A$

则称$\mathcal{F}$为X的划分。任给X的划分$\mathcal{F}$，求证：存在X上等价关系$\sim$使得$X/\sim = \mathcal{F}$.

问题 2. 给定映射$m : X \times X \to X$, 则存在映射$\bar{m} : (X/\sim) \times (X/\sim) \to X/\sim$满足$\bar{m}(\pi(a), \pi(b) = \pi(m(a,b)), \forall a, b \in X$当且仅当若$a \sim a', b \sim b'$, 则$m(a,b) \sim m(a',b')$.

同课程中将实数集$\mathbb{R}$定义为$K/\sim$. K上可定义加减法和乘法如下：

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \oplus \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \ominus \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.1}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \otimes \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.2}$$

这些运算诱导了$\mathbb{R}$上的加减法和乘法，记为$+, -, \cdot$. 对$q \in \mathbb{Q}$, 将常值序列$\{a_n = q\}_{n=1}^{\infty}$的等价类仍记为$q$. 特别地，我们用0表示0序列所在的等价类。在这些记号下，完成问题2，3，4. （为了正确地解决每个问题你都要首先搞明白其中的"0"指的是0序列的还是0序列的等价类。）

问题 3. 对$r \in \mathbb{R}$, 如果存在$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in r$（$r$是等价类）满足$a_n \geq 0$，则称$r \geq 0$. 若$r \geq 0$且$r \neq 0$，则称$r > 0$. 求证: $r > 0$当且仅当存在有理数$q > 0$，使得$r - q \geq 0$.

问题 4. 对实数$a, b \in \mathbb{R}$，若$a - b \geq 0$，则称$a \geq b$. 若$a \geq b$且$a \neq b$则称$a > b$. 求证：对任意两个实数a, b，$a > b$, $b > a$,$b = a$三者恰有一个成立。

问题 5. *1)* 举例说明存在$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$满足$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \otimes \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$为*0*, 而$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$均不为*0*.
2) 对实数$a, b \in \mathbb{R}$，若$a \cdot b = 0$, 则a, b之一为0. （如果你知道一些抽象代数的概念，可以尝试证明收敛到*0*的$Cauchy$序列构成的子集是K的极大理想）

在下一个问题中可以使用实数的通常性质。

问题 6. 记$\mathcal{F} = \{U | U$是实数的开子集$\}$, 求证:

- $\emptyset, \mathbb{R}$均在$\mathcal{F}$中,
- 若$U, V \in \mathcal{F}$，则$U \bigcap V \in \mathcal{F}$,
- 若$U_\alpha (\alpha \in J)$均在$\mathcal{F}$中，则$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{F}$.