第十七章　绕数与拓扑学

17.1　绕数

如前所知：给定连续曲线 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, 以及曲线外的点 c, 指定 $\gamma(a)-c$ 的一个辐角 θ_0, 存在唯一的连续的辐角函数 $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$, 满足

$$\theta(t)\in\operatorname{Arg}(\gamma(t)-c),\ \forall t\in[a,b];\ \theta(a)=\theta_0.$$

定义曲线 γ 关于 c 的辐角变化量 $\Delta(\gamma,c)$ 为

$$\Delta(\gamma,c)=\theta(b)-\theta(a).$$

辐角变化量衡量的是曲线 γ 关于曲线外一点 c 的辐角变化, 它满足如下基本性质：

- 辐角变化量与 θ_0 的选取无关；
- 如果 γ 是常值曲线 $\gamma(t)\equiv\gamma(a),\forall t\in[a,b]$, 则 $\Delta(\gamma,c)=0$；
- 辐角变化量满足可加性：任取区间 $[a,b]$ 的一个分划 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，记 $\gamma_k=\gamma|_{[t_k,t_{k+1}]}$, 则

$$\Delta(\gamma,c)=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta(\gamma_k,c).$$

如果曲线 γ 是闭曲线, 则 $\gamma(a)=\gamma(b)$, 此时 $\Delta(\gamma,c)$ 是 2π 的整数倍。定义

$$w(\gamma,c)=\frac{\Delta(\gamma,c)}{2\pi}\in\mathbb{Z},$$

称它为闭曲线 γ 关于 c 的绕数 (winding number)。它表示曲线 γ 关于 c 围绕的圈数。

这里的曲线应按映射理解，不能按像集合来理解。为说明这一点, 考虑曲线 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t)=e^{2\pi int}$, 其中 n 为整数。按照定义可得绕数 $w(\gamma,0)=n$。显然 γ 的像集 $\gamma([0,1])$ 为单位圆周 $\partial\mathbb{D}$，它关于原点的绕数为 ±1，不等于 $w(\gamma,0)$, 因为忽略了覆盖像集的次数。

绕数的一个重要的性质是同伦不变性。假设 $\gamma_0,\gamma_1:[a,b]\to\Omega$ 是平面区域 Ω 中两条闭曲线，$c\notin\gamma_0\cup\gamma_1$ (c 不必属于 Ω)。称 γ_0 与 γ_1 在 $\Omega\setminus\{c\}$ 中 (自由[1]) 同伦，如果存在连续映射 $H:[0,1]\times[a,b]\to\Omega\setminus\{c\}$, 满足

$$H(0,t)=\gamma_0(t), H(1,t)=\gamma_1(t),\ \forall t\in[a,b];$$

$$H(s,a)=H(s,b),\ \forall s\in[0,1].$$

此时, 我们记 $\gamma_0\sim_{\Omega\setminus\{c\}}\gamma_1$.

命题 17.1. 若区域 Ω 中两闭曲线 γ_0,γ_1 满足 $\gamma_0\sim_{\Omega\setminus\{c\}}\gamma_1$，则

$$w(\gamma_0,c)=w(\gamma_1,c).$$

证明： 不失一般性, 假设 $c=0$, 曲线参数区间 $[a,b]=[0,1]$. 记 $H:[0,1]\times[0,1]\to\Omega\setminus\{0\}$, 为 γ_0,γ_1 之间的自由同伦。紧集 $[0,1]\times[0,1]$ 在连续映射 H 下的像 E 是 $\Omega\setminus\{0\}$ 中的紧集。

记 $\rho=\min\{d(E,0),d(E,\partial\Omega)\}>0$。由 H 的一致连续性, 存在 $\delta>0$, 对任意 $(s_1,t_1),(s_2,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$,

$$|s_1-s_2|,|t_1-t_2|\le\delta\Longrightarrow|H(s_1,t_1)-H(s_2,t_2)|\le\rho/2<\rho.$$

取整数 $n\ge1$ 使 $1/n\le\delta$。将 $[0,1]\times[0,1]$ 等分为 n^2 个小正方形

$$\Delta_{jk}=\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]\times\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right],\ 0\le j,k\le n-1.$$

由 H 的一致连续性，

$$H(\Delta_{jk})\subset D(H(j/n,k/n),\rho):=\mathbb{D}_{jk}.$$

因为 $0\notin\mathbb{D}_{jk}$, 在 $\mathbb{D}_{jk}$ 上存在连续的辐角函数, 取其中之一为 $\arg_{jk}:\mathbb{D}_{jk}\to\mathbb{R}$。当 $s\in[j/n,(j+1)/n]$ 时, 有

$$w(\gamma_s,0)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\arg_{jk}\left(\gamma_s\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)-\arg_{jk}\left(\gamma_s\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right].$$

[1]指的是曲线在形变的过程中, 端点不必固定，因此是自由的。

因取定 $t_0 \in [0,1]$ 时, $\gamma_s(t_0) = H(s,t_0)$ 时关于 s 连续, 故上式右端关于 $s \in [j/n,(j+1)/n]$ 连续。另一方面，它取整数值，因此只能是常数。

注意到 $w(\gamma_s,0)$ 关于 s 在每段闭区间 $[j/n,(j+1)/n]$ 上都是常数, 因此 $w(\gamma_s,0)$ 在 $[0,1]$ 上取常数值。特别地，$w(\gamma_0,0) = w(\gamma_1,0)$. □

本章利用绕数的同伦不变性来证明拓扑学中的几个重要定理。

17.2 Brouwer 不动点定理

荷兰数学家 Brouwer 在 1912 年证明了如下定理。

定理 17.1. 任意连续映射 $f:\overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ 必有不动点。

证明: (反证法) 假设 f 没有不动点, 则映射 $g(z) = z - f(z), z \in \overline{\mathbb{D}}$ 连续且不取 0 值。考虑圆周 $\partial\mathbb{D}$ 在 g 下的像曲线 $\gamma = g(\partial\mathbb{D})$, 参数化为 $\gamma(t) = g(e^{it}) = e^{it} - f(e^{it}), t \in [0,2\pi]$。

下面将通过两种方式计算绕数 $w(\gamma,0)$ 来得到矛盾。

定义

$$H_1 : \begin{cases} [0,1]\times[0,2\pi] \to \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ (s,t) \mapsto g(se^{it}). \end{cases}$$

显然 H_1 是常值曲线 $\alpha = H_1(0,\cdot)$ 与 $\gamma = H_1(1,\cdot)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 中的同伦。由绕数的同伦不变性, 有 $w(\gamma,0) = w(\alpha,0) = 0$。

另一方面, 可定义

$$H_2 : \begin{cases} [0,1]\times[0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ (s,t) \mapsto e^{it} - sf(e^{it}). \end{cases}$$

显然 $H_2(1,\cdot)$ 不取零值, 而当 $s \in [0,1)$ 时, $H_2(s,\cdot)$ 亦不取零值。因此 H_2 是曲线 $\beta = H_2(0,\cdot)$ (易见 $\beta(t) = e^{it}, t \in [0,2\pi]$) 与 γ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 中的同伦。因此 $w(\gamma,0) = w(\beta,0) = 1$。

由此得矛盾。 □

17.3 Borsuk 定理

定理 17.2.(Borsuk) 任给连续映射 $f: S^2 \to \mathbb{C}$，存在 $p \in S^2$ 满足 $f(p) = f(-p)$.

证明： 假设结论不成立。定义函数 $h: \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 如下

$$h(z) = f(z, \sqrt{1-|z|^2}) - f(-z, -\sqrt{1-|z|^2}).$$

定义映射 $H: [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 为

$$H(s, z) = h(se^{it}).$$

显然 H 是常值曲线 α (参数化为 $\alpha(t) = h(0), t \in [0, 2\pi]$) 和曲线 $\gamma = h(\partial\mathbb{D})$ (参数化为 $\gamma(t) = h(e^{it}), t \in [0, 2\pi]$) 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中的同伦。利用绕数的同伦不变性得

$$w(\gamma, 0) = w(\alpha, 0) = 0.$$

另一方面, 当 $z \in \partial\mathbb{D}$ 时, $h(z) = -h(-z)$。上半圆周在 h 下的像曲线 $\gamma^+ = h(\{e^{it}; t \in [0, \pi]\})$ (参数化为 $\gamma^+(t) = h(e^{it}), t \in [0, 2\pi]$), 起点为 $h(1)$, 终点为 $h(-1) = -h(1)$。端点关于原点的对称性表明, 沿着曲线 γ^+ 的辐角变化量 $\Delta(\gamma^+, 0) \neq 0$。

由 h 的对称性可知，下半圆周的像曲线 $\gamma^- = h(\{e^{it}; t \in [\pi, 2\pi]\})$ (参数化为 $\gamma^-(t) = h(e^{it}), t \in [\pi, 2\pi]$) 满足 $\gamma^-(t+\pi) = -\gamma^+(t)$, $t \in [0, \pi]$。利用辐角变化量的定义，得 $\Delta(\gamma^-, 0) = \Delta(\gamma^+, 0)$。因此

$$w(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}(\Delta(\gamma^+, 0) + \Delta(\gamma^-, 0)) = \frac{1}{\pi}\Delta(\gamma^+, 0) \neq 0.$$

这与上面矛盾。 □

17.4 舌尖上的数学

17.4.1 火腿三明治定理

1942 年, Stone-Tukey 证明了如下定理

定理 17.3.(火腿三明治定理) 假设 A, B, C 为 $\mathbb{R}^3$ 中有界连通开集，则存在一平面, 将三者体积同时等分。

此定理亦可推广到高维或离散的情形。

证明：任取 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)\in S^2$, $t\in\mathbb{R}$, 定义半空间

$$H(\boldsymbol{u},t)=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}<t\}.$$

对单位球 $\mathbb{B}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}$ 中的连通开集 $U\subset\mathbb{R}^3$, 定义函数 $\psi(t)=\nu(H(\boldsymbol{u},t)\cap U)$, 其中 $\nu(\cdot)$ 表可测集合的体积。容易验证 ψ 连续 (事实上, Lipschitz 连续：$|\psi(t_1)-\psi(t_2)|\leq\pi|t_1-t_2|$。为说明这一点，注意到两平面 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}=t_1$ 与 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}=t_2$ 之间的距离为 $|t_1-t_2|$, U 与法方向 $\boldsymbol{u}$ 垂直的截面面积不超过 π, 因此有 Lipschitz 估计), 满足 $\psi(-1)=0,\psi(1)=\nu(U)$。由连续函数的介值定理, 存在 $t_U(\boldsymbol{u})\in(-1,1)$ 满足 $\psi(t_U(\boldsymbol{u}))=\nu(U)/2$。利用当 $0<\psi(t)<\nu(U)$ 时 ψ 关于 t 的严格递增性，可知满足 $\psi(t_U(\boldsymbol{u}))=\nu(U)/2$ 的 $t_U(\boldsymbol{u})$ 是唯一的。

下面说明 $t_U:S^2\to\mathbb{R}$ 是连续的奇函数。事实上, 对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in S^2$, 以下两平面

$$P_{\boldsymbol{u}}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3;\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}=t_U(\boldsymbol{u})\};\ P_{\boldsymbol{v}}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3;\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}=t_U(\boldsymbol{v})\}$$

都等分 U 的体积。如果交集 $P_{\boldsymbol{u}}\cap P_{\boldsymbol{v}}$ 在 U 的外部，这显然不可能。因此 $P_{\boldsymbol{u}}\cap P_{\boldsymbol{v}}\cap U\neq\emptyset$。取 $\boldsymbol{x}_0\in P_{\boldsymbol{u}}\cap P_{\boldsymbol{v}}\cap U$。由 U 在单位球 $\mathbb{B}$ 中可知 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leq 1$。利用 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$|t_U(\boldsymbol{u})-t_U(\boldsymbol{v})|=|\boldsymbol{x}_0\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})|\leq\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|.$$

这说明 t_U 连续。容易验证 t_U 是奇函数: $t_U(-\boldsymbol{u})=-t_U(\boldsymbol{u})$。

最后, 利用 t_U 的上述性质, 给出定理的证明。不妨假设 A,B,C 都落在单位球 $\mathbb{B}$ 中。定义函数 $f:S^2\to\mathbb{R}^2$ 如下

$$f(\boldsymbol{u})=(t_A(\boldsymbol{u})-t_B(\boldsymbol{u}),\ t_A(\boldsymbol{u})-t_C(\boldsymbol{u})).$$

易见 f 是连续的奇函数。由 Borsuk 定理，存在 $\boldsymbol{u}\in S^2$ 满足 $f(\boldsymbol{u})=f(-\boldsymbol{u})$。由 f 是奇函数可知，$f(\boldsymbol{u})=0$。这说明 $t_A(\boldsymbol{u})=t_B(\boldsymbol{u})=t_C(\boldsymbol{u})$, 记此值为 t_0。则平面 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}=t_0$ 将 A,B,C 的体积同时等分。 □

17.4.2 奶酪披萨定理

问题 17.1. 一个圆形的奶酪披萨, 成分只有奶酪与面饼。能否从中心分为两个扇形切片，使两部分的奶酪和面饼同时等分?

为将问题转化为严谨的数学，需做一些合理的假设。

不妨假设披萨对应单位圆盘 $\mathbb{D}$, 它的面饼和奶酪面饼质量连续分布, 意即奶酪的密度函数 ρ_1 与面饼的密度函数 ρ_2 都是 $\mathbb{D}$ 上的连续非负函数。二者都有正质量

$$\int_{\mathbb{D}} \rho_k dxdy > 0, \ \ k = 1, 2.$$

在扇形区域 $S(t_1, t_2) = \{re^{it}; 0 < r < 1, t_1 < t < t_2\}$ 上，奶酪和面饼的质量分别为

$$\nu_j([t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \rho_j(re^{i\theta}) r dr d\theta, \ \ j \in \{1, 2\}.$$

任取 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$, 定义

$$t_k = 2\pi \sum_{j=1}^{k} x_j^2, \ \ k = 1, 2, 3.$$

显然 $0 := t_0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 = 2\pi$ 是 $[0, 2\pi]$ 的一个划分。

定义函数 $f = (f_1, f_2) : S^2 \to \mathbb{R}^2$ 如下

$$f_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{3} \operatorname{sgn}(x_k) \cdot \nu_j([t_{k-1}, t_k]),$$

这里约定 $\operatorname{sgn}(0) = 0$。

可以验证 f 连续 (细节留作习题), 满足 $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$。由 Borsuk 定理可知，存在 $\boldsymbol{x} \in S^2$, 满足 $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$。因此 $f(\boldsymbol{x}) = 0$。

对此 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，若每个分量非零，则必有两项同号 (若三项同号，导致求和不为零)。将符号相异的一项记为 x_k, 则扇形 $S(t_{k-1}, t_k)$ 中奶酪和面饼占各自总质量的一半; 如果某分量为零，比如 $x_2 = 0$, 此时 $t_2 = t_1$, 此时扇形 $S(t_0, t_1)$ 中奶酪和面饼分别占各自总质量的一半。

由此得如下的**奶酪披萨定理**:

一个圆形的奶酪披萨, 成分只有奶酪与面饼。可经中心分为两个扇形切片，使奶酪和面饼的质量同时等分。

此定理的一般形式为 Hobby-Rice 定理:

定理 17.4.(Hobby-Rice, 1965) 给定 $[0, 1]$ 区间上的 n 个连续实函数 $g_1, \cdots, g_n$, 存在区间的一个划分

$$0 \le t_1 \le t_2 \cdots \le t_n \le t_{n+1} = 1,$$

以及 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n+1} \in \{\pm 1\}$, 满足

$$\sum_{k=1}^{n+1} \epsilon_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_j(t)dt = 0, \ \forall j \in \{1, \cdots, n\}.$$

证明: 证明与奶酪披萨定理类似, 唯一区别是此处需用 Borsuk 定理的高维版本。细节如下:

任取 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n$, 定义

$$t_k = \sum_{j=1}^{k} x_j^2,$$

显然 $0 \le t_1 \le t_2 \cdots \le t_n \le t_{n+1} = 1$ 是 $[0,1]$ 的一个分划。

定义函数 $f = (f_1, \cdots, f_n) : S^n \to \mathbb{R}^n$, 如下

$$f_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{sgn}(x_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_j(t)dt,$$

这里规定 $\operatorname{sgn}(0) = 0$。显然 f 连续, 容易验证 $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$。由 Borsuk 定理可知，存在 $\boldsymbol{x} \in S^{n+1}$, 满足 $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$。因此 $f(\boldsymbol{x}) = 0$。最后, 取 $\epsilon_k = \operatorname{sgn}(x_k)$ (如果 $x_k \neq 0$), $\epsilon_k = 1$ (如果 $x_k = 0$)。证完。 □

17.5 Poincaré 定理

二维球面 S^2 上的一个切向量场 V 指映射 $V : S^2 \to \mathbb{R}^3$, 满足对任意 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in S^2$, 向量 $V(\boldsymbol{u})$ 与 $\boldsymbol{u}$ 正交: $V(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} = 0$.

1885 年，Poincaré 证明了如下的漂亮定理

定理 17.5.(Poincaré) 球面 S^2 上的连续切向量场必有零点。

证明: 记上半球面 $S_+^2 = \{\boldsymbol{u} \in S^2; u_3 \ge 0\}$, 下半球面 $S_-^2 = \{\boldsymbol{u} \in S^2; u_3 \le 0\}$。以下讨论中, 将复平面 $\mathbb{C}$ 上的点 $z = x + iy$ 与 $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ 中的点 $(x, y, 0)$ 视为等同。

定义映射

$$\pi_+ : \overline{\mathbb{D}} \to S_+^2, \ z \mapsto \left(\frac{2x}{1+|z|^2}, \frac{2y}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right),$$

$$\pi_- : \overline{\mathbb{D}} \to S_-^2, \ z \mapsto \left(\frac{2x}{1+|z|^2}, \frac{2y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right).$$

这两个映射都有直观的几何解释: $\pi_+(z)$ 为南极 $(0,0,-1)$ 与 z 连线与上半球面的交点，$\pi_-(z)$ 为北极 $(0,0,1)$ 与 z 的连线与下半球面的交点。容易验证 $\pi_\pm$ 都是同胚。

给定 S^2 上的连续切向量场 $V=(v_1,v_2,v_3):S^2\to\mathbb{R}^3$, 它在两个半球面的限制 $V|_{S^2_+},V|_{S^2_-}$ 可诱导两个连续映射 $\psi_+,\psi_-:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\psi_+(z)&=v_1(\pi_+(z))+iv_2(\pi_+(z))-v_3(\pi_+(z))z,\\ \psi_-(z)&=v_1(\pi_-(z))+iv_2(\pi_-(z))+v_3(\pi_-(z))z.\end{aligned}$$

现假设 V 无零点. 我们先说明 $\psi_\pm$ 都无零点。如不然，假设 $\psi_+(z)=0$, 结合 $\pi_+(z)\cdot V(\pi_+(z))=0$, 可得方程组

$$\begin{cases}v_1(\pi_+(z))-xv_3(\pi_+(z))=0,\\ v_2(\pi_+(z))-yv_3(\pi_+(z))=0,\\ xv_1(\pi_+(z))+yv_2(\pi_+(z))+(1-|z|^2)v_3(\pi_+(z))=0.\end{cases}$$

由此得 $V(\pi_+(z))=0$. 这与假设 V 无零点相矛盾。同理可证, ψ_- 亦无零点。这说明 ψ_+,ψ_- 均取值于 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

接下来证明, 限制在 $\partial\mathbb{D}$ 上，$\psi_\pm$ 满足如下等式

$$\psi_+(z)=z^2\overline{\psi_-(z)},\ \forall z\in\partial\mathbb{D}.$$

事实上，当 $z\in\partial\mathbb{D}$ 时，$\pi_+(z)=\pi_-(z)=(x,y,0)$。条件 $\pi_+(z)\cdot V(\pi_+(z))=0$ 即为 $v_1x+v_2y=0$, 等价于

$$iv_1(z+\overline{z})+v_2(z-\overline{z})=0\Longleftrightarrow v_1+iv_2=-z^2(v_1-iv_2).$$

由此可得, 当 $z\in\partial\mathbb{D}$ 时

$$\begin{aligned}\psi_+(z)&=-z^2[v_1(\pi_+(z))-iv_2(\pi_+(z))]-v_3(\pi_+(z))z\\ &=-z^2[v_1(\pi_+(z))-iv_2(\pi_+(z))+v_3(\pi_+(z))\overline{z}]\\ &=-z^2\overline{\psi_-(z)}.\end{aligned}$$

定义 $g=\psi_+/\overline{\psi_-}:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$. 它在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上连续且不取零值, 因此 $w(g(\partial\mathbb{D}),0)=0$. 另一方面，上述推导表明，当 $z\in\partial\mathbb{D}$ 时, $g(z)=-z^2$, 因此 $w(g(\partial\mathbb{D}),0)=2$, 这是一个矛盾。

17.6 习题

“这，就是数学: 她提醒你灵魂有不可见的形态, 她赋予自己的发现以生命, 她唤醒悟性、澄清思维，她照亮了我们内心的思想, 她涤尽了我们有生以来的蒙昧与无知。”

—古希腊哲学家普罗克洛斯

1. (绕数的性质) 给定闭曲线 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ 以及 $c\notin\gamma$。证明: 绕数作为 c 的函数: $c\mapsto w(\gamma,c)$ 是定义在 $\mathbb{C}-\gamma$ 上的分片常值函数，即在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 的每个连通分支上取整常数值。

2. (绕数的性质) 给定闭曲线 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$。

(1). 若 γ 作为集合满足 n-重旋转对称性：$\gamma=e^{2\pi i/n}\gamma$。这里 $n\geq 2$ 为整数, $aE:=\{az;z\in E\}$。举例说明绕数 $w(\gamma,0)$ 可能为 0。

(2). 如果 γ 的参数化满足 n-重旋转对称性：

$$e^{2\pi i/n}\gamma(t)=\begin{cases}\gamma(t+1/n), & t\in[0,1-1/n],\\ \gamma(t+1/n-1), & t\in[1-1/n,1].\end{cases}$$

证明 $w(\gamma,0)\neq 0$。

3. (Borsuk 定理的应用) 三个闭集 E_1,E_2,E_3 是球面

$$S^2:=\{(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3;u_1^2+u_2^2+u_3^2=1\}$$

的一个覆盖, 即 $S^2=E_1\cup E_2\cup E_3$。

(1). 证明映射 $f:S^2\to\mathbb{R}^2$, 定义为 $f(\boldsymbol{u})=(d(\boldsymbol{u},E_1),d(\boldsymbol{u},E_2))$, 连续, 这里 $d(\boldsymbol{u},E_k)=\min_{\boldsymbol{v}\in E_k}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$ (欧氏距离)。

(2). 利用 Borsuk 定理以及“$\boldsymbol{u}\in E_k$ 当且仅当 $d(\boldsymbol{u},E_k)=0$”这一事实，证明存在 $\boldsymbol{u}\in S^2$, 以及 $k\in\{1,2,3\}$, 使得 $\boldsymbol{u},-\boldsymbol{u}\in E_k$。

4. (Brouwer 不动点定理的应用) 记 $\mathbb{R}^3$ 中第一卦限

$$E=\Big\{(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3;u_1\geq 0,u_2\geq 0,u_3\geq 0\Big\}.$$

利用 Brouwer 定理证明，如果 $F:E\to E$ 连续，则存在单位向量 $\boldsymbol{u}\in E$, 实数 $\lambda\geq 0$, 满足 $F(\boldsymbol{u})=\lambda\boldsymbol{u}$.

5. (火腿三明治定理之 2 维情形) 假设 E_1,E_2 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上的有界开集，证明：存在一条直线 ℓ 将 E_1,E_2 的面积同时等分.

(提示：任取 $\boldsymbol{u}=(u_0,u_1,u_2)\in S^2$, 定义半平面

$$h(\boldsymbol{u})=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;u_1x+u_2y\leq u_0\}.$$

定义映射 $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ 为 $f(\boldsymbol{u}) = (f_1(\boldsymbol{u}), f_2(\boldsymbol{u}))$, 其中 $f_k(\boldsymbol{u}) = \mathrm{area}(h(\boldsymbol{u}) \cap E_k)$, area 为面积.)