第一章 复数

1.1 复数域

我们从熟悉的实数集 $\mathbb{R}$ 讨论。熟知 $\mathbb{R}$ 上有一个加法 $+$, 乘法 $\cdot$ 使之成为一个域。现考虑

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}.$$

它是一个二维实向量空间, 基为 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$。任一向量 $\boldsymbol{u} = (x, y) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ 的长度定义为 $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$。两个向量 $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1), \boldsymbol{v} = (x_2, y_2)$ 之和与差为

$$\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v} = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2).$$

一个自然而基本的问题是：$\mathbb{R}^2$ 是否可赋予一个乘法运算，使之成为一个域？

这个问题的回答是肯定的。我们将在假设乘法满足一些自然的要求后, 将它构造出来。同时可见, 在将 $\mathbb{R}$ 等同于 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $\widehat{\mathbb{R}} = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ 后，这个乘法是实数乘法的一个自然的延拓! 这种方法具有启发性，它出自 Richmond 的一篇论文[1]。

我们将要找的乘法记为 $\cdot$, 先对它施加一些自然的要求。为保证 $\widehat{\mathbb{R}}$ 等同于 $\mathbb{R}$, 乘法需以 $\boldsymbol{e}_1$ 为单位元, 即对任意 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$, 成立

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

此外, 有一虽不明显却也自然的要求, 即关于向量长度的可乘性：

$$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|,\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2.$$

以下定理表明, 这两个条件足以确定唯一的乘法。它满足交换性, 且使 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ 具有域结构。

---

[1] Richmond, D. E. Complex numbers and vector algebra. Amer. Math. Monthly 58 (1951), 622–628.

定理 1.1. 向量空间 $\mathbb{R}^2$ 上存在唯一的乘法 $\cdot$, 满足

- (单位元) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u},\ \forall\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2$;
- (长度可乘性) $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|,\ \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$.

此乘法满足交换律, 且使 $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ 成为域。

证明： 对任意向量

$$\boldsymbol{u}=(a,b)=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2,\ \ \boldsymbol{v}=(c,d)=c\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_2,$$

利用乘法 $\cdot$ 的第一条性质知

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=ac\boldsymbol{e}_1+(ad+bc)\boldsymbol{e}_2+bd\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2.$$

由此可见 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$。因此乘法满足交换律。同时可知, 要定义乘法, 关键是定义 $\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2$ 的值。

记 $\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=(x,y)$。由长度可乘性知 $x^2+y^2=1$。另一方面

$$(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=(1-x,y).$$

由 $|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{2}$ 以及长度可乘性可得

$$4=|(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)|^2=(1-x)^2+y^2.$$

由此求出 $x=-1,\ y=0$。这说明

$$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1.$$

由此得乘法定义 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(ac-bd)\boldsymbol{e}_1+(ad+bc)\boldsymbol{e}_2$, 即

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

可验证, 此乘法以 $\boldsymbol{e}_1$ 为单位元。等式

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

表明乘法满足长度可乘性。上述证明亦表明乘法唯一。

$\mathbb{R}^2$ 上两个运算 $+,\cdot$ 满足如下性质:

- 运算 $*\in\{+,\cdot\}$ 满足交换律 $\boldsymbol{u}*\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}*\boldsymbol{u}$, 结合律 $(\boldsymbol{u}*\boldsymbol{v})*\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}*(\boldsymbol{v}*\boldsymbol{w})$;

- 加法有单位元 $\mathbf{0} = (0, 0)$, 乘法有单位元 $\boldsymbol{e}_1$;
- $\boldsymbol{u} = (a, b)$ 关于加法有逆元 $(-a, -b)$; 当 $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ 时, 关于乘法有逆元
$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$
- 分配律 $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_2$ 成立.

这说明 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ 是一个域. $\square$

称 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ 为复数域，简记为 $\mathbb{C}$.

假设 F 是一个域, 我们称之为有序域, 如果 F 上有一个二元关系 $<$ 满足如下性质

1. (三分性) 对任意 $a, b \in F$, 三种关系 $a < b, a = b, b < a$ 之一成立;
2. (传递性) $a < b, b < c \Longrightarrow a < c$;
3. (平移不变性) $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$, $\forall c \in F$;
4. (保向性) $a < b, 0 < c \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

易见, 任给有序集 Y, 在 $Y \times Y$ 有一个自然的字典序
$$(a, b) < (c, d) \Longleftrightarrow a < c \quad \text{或 } a = c, b < d.$$

复数域上的字典序满足除了保向性之外的三个性质。那么是否存在一个顺序使复数域成为有序域呢？答案是否定的。

定理 1.2. 复数域 $\mathbb{C}$ 不是有序域。

证明： (反证法) 假设 $\mathbb{C}$ 是有序域。先证明: 对任意 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}$, 成立 $\mathbf{0} < \boldsymbol{u}^2$。如果 $\mathbf{0} < \boldsymbol{u}$, 利用保向性得 $\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{u} < \boldsymbol{u}^2$。如果 $\boldsymbol{u} < \mathbf{0}$, 利用平移不变性得 $\mathbf{0} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} < \mathbf{0} - \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$。仍由保向性得 $\mathbf{0} < (-\boldsymbol{u}) \cdot (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^2$。

下面考虑 $\boldsymbol{e}_2$。由上述讨论 $\mathbf{0} < \boldsymbol{e}_2^2 = -\boldsymbol{e}_1$, 因此 $\boldsymbol{e}_1 < \mathbf{0}$。但这矛盾于 $\mathbf{0} < \boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_1$。

1.2 复数的表示

在定理1.1赋予的乘法下, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ 成为复数域 $\mathbb{C}$，且 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $\widehat{\mathbb{R}} = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ 与实数域同构，同构映射由 $(x, 0) \mapsto x$ 给出。因此，可将 $(a, 0)$ 合理简记为 a, 同时记 $\boldsymbol{e}_2$ 为 i。利用

$\boldsymbol{e}_2^2=-\boldsymbol{e}_1$, 可知 $i^2=-1$ (可按记号理解)。在此记号约定下, (a,b) 即为 $a+bi$。称 $z=a+bi$ 为一个复数。这样, 复数域可记为 $\mathbb{C}=\{a+bi;a,b\in\mathbb{R}\}$。每一个复数 $a+bi$ 以自然的方式对应于平面 $\mathbb{R}^2$ 上的点，其坐标为 (a,b)。

两复数 $z=a+bi$ 与 $w=c+di$ 的加法与乘法：

$$z+w=(a+c)+(b+d)i.$$

$$zw=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

给定复数 $z=x+iy$, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$。称 x 为 z 的实部 (real part)，y 为 z 的虚部 (imaginary part), 分别记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z).$$

如果 z 的实部为 0, 称 z 为纯虚数。复数 z 的模长为 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$。从几何直观看，模长表示原点到点 (x,y) 的距离。复数 $z=x+iy$ 的共轭复数为 $\bar{z}=x-iy$.

容易验证

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\ \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

$$|\mathrm{Re}(z)|\le|z|,\quad|\mathrm{Im}(z)|\le|z|,$$

$$\overline{zw}=\bar{z}\bar{w},\quad|z|^2=z\bar{z}.$$

模长满足三角不等式

$$|z+w|\le|z|+|w|.$$

为证明此不等式，将两边平方

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w})+|w|^2\\&\le|z|^2+2|z\bar{w}|+|w|^2=(|z|+|w|)^2.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $z\bar{w}$ 为非负实数。此时，要么 z,w 之一为 0, 要么都非零且 (由等式 $(z\bar{w})w=z|w|^2$ 可见) z,w 位于从原点出发的同一条射线上。

非零复数 $z=x+iy$ 也可写成极坐标形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 其中 $r=|z|$, $\theta\in\mathbb{R}$ 为连接原点与 z 的有向线段与 x 轴正方向的夹角 (在相差 2π 的整数倍的意义下唯一)。称 θ 为复数 z 的辐角 (argument)。

给定数学对象 A(比如实数，复数，矩阵，微分算子等)，抽象的记号 e^A 可按如下幂级数定义

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}.$$

按此定义，如果 $A=i\theta$，则

$$\begin{aligned}e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

上式右端实部虚部分别为 $\cos(\theta)$ 和 $\sin(\theta)$ 的幂级数展式。由此得著名的 Euler 等式

$$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta).$$

在上式中令 $\theta=\pi$, 得恒等式

$$e^{i\pi}=-1.$$

利用复数的乘法，可以验证

$$\begin{aligned}e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} &= (\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))\cdot(\cos(\beta)+i\sin(\beta))\\ &= (\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta))+i(\cos(\alpha)\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta))\\ &= \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=e^{i(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

由此得 $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$, $1/e^{i\theta}=e^{-i\theta}$. 这样得两个复数 $z=re^{i\theta}$ 与 $w=\rho e^{i\alpha}$ 的乘积公式与求商公式

$$zw=r\rho e^{i(\theta+\alpha)},\quad \frac{z}{w}=\frac{r}{\rho}e^{i(\theta-\alpha)}(w\neq 0).$$

例题 1.1. 求三角和 (其中 $\theta\in\mathbb{R}$)

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta),\ \sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta).$$

解答: 考虑复形式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)+i\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)=\sum_{k=1}^{n}(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta))=\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}.$$

如果 $e^{i\theta}=1(\Longleftrightarrow \theta\in 2\pi\mathbb{Z})$, 则上式和为 n, 此时 $\sum_{k=1}^n\cos(k\theta)=n$, $\sum_{k=1}^n\sin(k\theta)=0$。如果 $e^{i\theta}\neq 1$, 则

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}=\frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta}e^{in\theta/2}(e^{-in\theta/2}-e^{in\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})}=\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}e^{in\theta/2}.$$

比较两端实部与虚部，可得

$$\sum_{k=1}^n\cos(k\theta)=\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\cos(n\theta/2),$$

$$\sum_{k=1}^n\cos(k\theta)=\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\sin(n\theta/2).$$

□

1.3 Lagrange 恒等式

定理 1.3.(Lagrange) 给定 $2n$ 个复数 $z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_n$, 成立

$$\Big|\sum_{j=1}^n z_jw_j\Big|^2=\Big(\sum_{j=1}^n|z_j|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n|w_j|^2\Big)-\sum_{1\le j<k\le n}|z_j\bar{w}_k-z_k\bar{w}_j|^2.$$

证明: 利用等式

$$\Big|\sum_{j=1}^n a_j\Big|^2=\sum_{j=1}^n|a_j|^2+\sum_{1\le j\neq k\le n}a_j\bar{a}_k$$

可得

$$\Big|\sum_{j=1}^n z_jw_j\Big|^2=\sum_{j=1}^n|z_j|^2|w_j|^2+\sum_{1\le j\neq k\le n}z_jw_j\bar{z}_k\bar{w}_k.$$

计算另一项

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le j<k\le n}|z_j\bar{w}_k-z_k\bar{w}_j|^2\\
=&\sum_{1\le j<k\le n}(z_j\bar{w}_k-z_k\bar{w}_j)(\bar{z}_jw_k-\bar{z}_kw_j)\\
=&\sum_{1\le j<k\le n}(|z_j|^2|w_k|^2-z_jw_j\bar{z}_k\bar{w}_k-\bar{z}_j\bar{w}_jz_kw_k+|z_k|^2|w_j|^2)\\
=&\sum_{1\le j\neq k\le n}|z_j|^2|w_k|^2-\sum_{1\le j\neq k\le n}z_jw_j\bar{z}_k\bar{w}_k.
\end{aligned}$$

由以上两式得

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big|^2 + \sum_{1\le j<k\le n} |z_j\bar{w}_k - z_k\bar{w}_j|^2\\ =& \sum_{1\le j,k\le n} |z_j|^2|w_k|^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\Big).\end{aligned}$$

Lagrange 恒等式有一个有趣的特例：取所有 $w_k = 1$ 得

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j\Big|^2 = n\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 - \sum_{1\le j<k\le n}|z_j - z_k|^2.$$

此式的几何理解如下：假设 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的每个顶点 P_j 的复坐标为 z_j, n 边形的重心记为 Q, 其复坐标为 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j$. 原点记为 O, 则多边形所有顶点间距离的平方和满足等式

$$\sum_{1\le j<k\le n} P_jP_k^2 = n\sum_{j=1}^{n} OP_j^2 - n^2OQ^2.$$

由此得一有趣事实：如果 n 边形的所有顶点都在单位圆周上, 则所有顶点间距离的平方和不超过 n^2. 达到 n^2 时当且仅当 n 边形的重心即为坐标原点.

Lagrange 恒等式的一个直接推论是 Cauchy-Schwarz 不等式：

定理 1.4. 给定 $2n$ 个复数 $z_1,\cdots,z_n,\ w_1,\cdots,w_n$, 成立不等式

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big|^2 \le \Big(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\Big).$$

等号成立当且仅当存在复数 $\lambda\in\mathbb{C}$, 满足要么 $z_j = \lambda\bar{w}_j, 1\le j\le n$，要么 $w_j = \lambda\bar{z}_j, 1\le j\le n$.

下面给出一个直接证明.

证明: 如果 $\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2 = 0$, 则所有 $w_j = 0$, 不等式显然成立。不妨假设 $\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2 > 0$. 显然对任意复数 $\lambda\in\mathbb{C}$, 成立

$$\sum_{j=1}^{n}|z_j - \lambda\bar{w}_j|^2 = \sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 + |\lambda|^2\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2 - 2\mathrm{Re}\Big(\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big) \ge 0.$$

在上式中取

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} z_j w_j \Big/ \sum_{j=1}^{n}|w_j|^2$$

可得

$$\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 \geq \Big|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big|^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n}|w_j|^2.$$

即为 Cauchy-Schwarz 不等式。等号成立条件如命题所言。

1.4 习题

“你们的事业的成长，应像一棵树的成长一样。应该是顺其自然的，无间断的和全面的。我希望你们的根能够在这个学院的沃土下面尽量深入，以使你们的树干长的既粗且壮。这样，将来无论树叶多么茂盛丰满，也永远不会有水分供应不暇的毛病。在上空将不时有狂风大雨，亦会有行雷闪电。所以切勿长得太快太高。”

—罗伦士奥利维亚, 英国演员，1947

1. (Euler 等式) 利用复数的性质证明欧拉的一个等式

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

2. (三角不等式的推广) 证明不等式

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|,$$

并给出不等式中等号成立的条件.

3. (常用不等式) 给定复数 a, z 满足 $|a| < 1, |z| < 1$. 证明：

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leq \left|\frac{z - a}{1 - a\bar{z}}\right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|} < 1.$$

4. (单位圆周上的正三角形) 给定三个点 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 证明 z_1, z_2, z_3 是正三角形的三个顶点的充要条件是

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

5. (恒等式) 给定两个复数 z_1, z_2, 证明恒等式

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

并说明等式的几何意义.

6. (复数的几何性质) 单位圆周上 $2n+1$ 个复数 $z_1, \cdots, z_{2n+1}$ 在直径一侧，证明 $|z_1 + \cdots + z_{2n+1}| \geq 1$.

***(以下为附加题，不做要求)

7. (复数的几何性质) 给定 $n \geq 1$ 个复数 $z_1, \cdots, z_n$, 模长都不超过 1，证明存在 $\epsilon_k \in \{\pm 1\}$, 满足

$$|\epsilon_1 z_1 + \cdots + \epsilon_n z_n| \leq \sqrt{2}.$$

8. (复数的代数性质) 如果 a, b, c 三个复数满足 $|a| = |b| = |c| = r$, 证明

$$\left|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right| = r.$$

推广这个结论.

9. (Fibonacci 数列) 记 Fibonacci 数列为 $\{F_n\}$,

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3.$$

证明

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right).$$

10. ($\mathbb{R}^3$ 没有域结构) 向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基为

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1).$$

证明 $\mathbb{R}^3$ 没有乘法同时满足以下性质：

- (单位元) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u},\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$;
- (交换性) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u},\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$;
- (长度可乘性) $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|,\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

按照如下思路给出详细过程：反证，假设乘法存在，则

(1). 通过计算 $(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \cdot (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)$, $(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) \cdot (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3)$, 证明

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_1.$$

(2). 证明 $(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \cdot (\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) = 0$, 由此得矛盾。

11. (复数性质的应用) 单位圆周上有一个正 n 边形，其顶点分别为 $P_1, \cdots, P_n$, Q 为单位圆周上一点，记 QP_k 为线段长度。证明

$$\max_Q \prod_{k=1}^{n} QP_k = 2.$$

$$\max_Q \sum_{k=1}^{n} QP_k = \frac{2}{\sin(\pi/(2n))}.$$