

1. 设 $S_{n,M,N}$ 服从参数为 M, N 和 n 的超几何分布, 即

$$P(S_{n,M,N} = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k = 0, 1, \dots, n,$$

其中 $n \leq M \leq N$. 假设 $\frac{M}{N} \rightarrow p$, $0 < p < 1$; $n \rightarrow \infty$. 证明

$$\frac{S_{n,M,N}}{n} \xrightarrow{P} p.$$

2. 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}) dx_1 \cdots dx_n.$$

3. 设 $\{\xi_n; n \geq 1\}$ 是一列独立的标准正态变量. 证明

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{n} \log n} \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$