第十二章　函数列与级数

12.1　复级数

假设 $z_1, z_2, \cdots$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一列复数, 我们称

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \cdots$$

为一个复数项级数。称其收敛, 如果部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ 构成的复数列 $\{S_n\}$ 收敛；否则称其发散。当它收敛时，记 $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, 称为级数的和, 记为

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

级数收敛的充要条件是 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列，这等价于对任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n \geq N$ 时, 对任意 $p \geq 1$，有

$$|S_{n+p} - S_n| = |z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \epsilon.$$

由此得到级数收敛的必要条件 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ 收敛，就称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 绝对收敛；由上面收敛的充要条件知，绝对收敛的级数一定收敛。反之不真，如级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ 收敛，但非绝对收敛。如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛但非绝对收敛，称其条件收敛。

条件收敛与绝对收敛的本质不同在于，重新排列后级数和会改变。这里, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 的重新排列 (简称重排), 指的是级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)}$, 其中 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个双射。

1857 年, Riemann 证明了实级数重排的一个奇妙的事实：

定理 12.1. (Riemann, 1857) 假设实级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛于 a。

1. 如果级数绝对收敛，则任意重排收敛于 a。
2. 如果级数条件收敛，则对任意实数 $b \in \mathbb{R}$, 存在级数重排收敛于 b。

证明: 1. 假设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对收敛。任给双射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 考虑重排级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$。对任意 $n \geq \sigma^{-1}(1)$, 存在 $k(n) \geq 1$, 使 $\{1, 2, \cdots, k(n)\} \subset \sigma(\{1, \cdots, n\})$。注意到 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是双射, 因此当 $n \to \infty$ 时, 有 $k(n) \to \infty$。

于是

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=k(n)+1}^{\infty} |x_k|, \ \forall n \geq \sigma^{-1}(1).$$

绝对收敛保证上式右端当 $n \to \infty$ 时趋于零。因此重排级数与原级数收敛于同一值。

2. 假设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 条件收敛。去掉所有 0 项，不妨设 x_k 都非零。记数列 $\{x_k\}$ 的正项部分依次为 $p_1, p_2, \cdots$, 负项部分依次为 $q_1, q_2, \cdots$。正项级数与负项级数分情况讨论：

- $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ 都收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对收敛, 矛盾。
- 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ 仅有一个收敛，利用前 n 项和可表达为正项级数的有限项加负项级数的有限项和可知, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 发散, 矛盾。

因此级数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ 都发散。

对任意 $b \in \mathbb{R}$, 不妨 $b > 0$。取最小 $n_1 \geq 1$ 使得 $\sum_{k=1}^{n_1} p_k > b$, 接下来取最小 $n_2 \geq 1$, 使得 $\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{n_2} q_k < b$, 再取最小的 $n_3 > n_1$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{n_2} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} p_k > b,$$

如此进行下去, 对应重排后的部分和子列

$$S_{n_1}, S_{n_1+n_2}, S_{n_2+n_3}, S_{n_3+n_4}, \cdots$$

分别在 b 的右侧与左侧波动。由 $n_1, n_2, \cdots$ 的取法可验证

$$S_{n_1} \in (b, b+p_{n_1}), S_{n_1+n_2} \in (b+q_{n_2}, b), S_{n_2+n_3} \in (b, b+p_{n_3}), \cdots$$

由此可得

$$|S_{n_k+n_{k+1}}-b|<\begin{cases}-q_{n_{k+1}}, & \text{如 } k\text{为奇数},\\ p_{n_{k+1}}, & \text{如 } k\text{为偶数}.\end{cases}$$

由 $\lim x_n=0$ 可知, 上式当 k 趋于 ∞ 时趋于零。当 $n_k+n_{k+1}\le m\le n_{k+1}+n_{k+2}$ 时,

$$|S_m-b|\le\max\{|S_{n_k+n_{k+1}}-b|,\ |S_{n_{k+1}+n_{k+2}}-b|\}.$$

因此重排后的部分和序列 $\{S_m\}$ 收敛于 b。 □

12.2 函数列的收敛性

假设 E 是 $\mathbb{C}$ 的子集, $f_n:E\to\mathbb{C}$ 是复值函数列。下面给出函数列点态收敛，一致收敛，内闭一致收敛的定义。

- 称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上点态收敛于复值函数 $f:E\to\mathbb{C}$，如果对任意 $z\in E$, 点列 $\{f_n(z)\}$ 收敛于 $f(z)$, 即

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z),\ \forall z\in E.$$

- 称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于复值函数 $f:E\to\mathbb{C}$，如果对任意 $\epsilon>0$, 存在正整数 N，当 $n\ge N$ 时，

$$|f_n(z)-f(z)|\le\epsilon,\ \forall z\in E.$$

- 假设 E 为开集。称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上内闭一致收敛于复值函数 $f:E\to\mathbb{C}$，如果对 E 的任意紧子集 K, 函数列 $\{f_n\}$ 在 K 上一致收敛于 f.

三种收敛的强弱关系为: 一致收敛强于内闭一致收敛, 内闭一致收敛强于点态收敛。

例题 12.1. 记 $\mathbb{D}_r=\{|z|<r\}$。给定 $\mathbb{D}_r$ 上的函数列 $\{f_n\}$ 以及函数 f, 分别定义为 $f_n(z)=z^n$, $f(z)=0$。容易验证：

$\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}_{1/2}$ 上一致收敛于 f;

$\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}=\mathbb{D}_1$ 上内闭一致收敛于 f, 不是一致收敛;

$\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}_2$ 非点态收敛于 f。

证明： 先证内闭一致收敛性。任给 $\mathbb{D}$ 的紧子集 K, 总存在 $\rho = \rho(K) \in (0,1)$, 使得 $K \subset \{|z| \le \rho\}$. 于是

$$\|f_n - f\|_K \le \max_{|z|\le\rho} |z^n - 0| = \rho^n.$$

由此可知，任给 $\epsilon > 0$, 总存在 N(只需满足 $\rho^N \le \epsilon$), 当 $n \ge N$ 时，$\|f_n - f\|_K \le \epsilon$。这说明 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上内闭一致收敛于 f。

下说明 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上不一致收敛于 f。事实上，$|f_n(1-1/n)| = (1-1/n)^n \to 1/e$ (当 $n \to \infty$ 时)。这说明, 当 n 很大时, $\|f_n - f\|_{\mathbb{D}} \ge |f_n(1-1/n) - f(1-1/n)| > 1/(2e)$。因此一致收敛不成立。

下面说明一个基本事实: 连续函数列一致收敛的极限必为连续函数。假设连续函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f。任给 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n \ge N$ 时，$\|f_n - f\|_E \le \epsilon/3$。固定某个 $n \ge N$。任取 $z \in E$, 由 f_n 的连续性知, 存在 $\delta > 0$, 当 $|w-z| < \delta$ 时, $|f_n(z) - f_n(w)| \le \epsilon/3$, 因此

$$\begin{aligned}|f(z)-f(w)| &\le |f_n(z)-f(z)| + |f_n(w)-f(w)| + |f_n(z)-f_n(w)| \\ &\le \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.\end{aligned}$$

定理 12.2. (Weierstrass, 1841) 假设 $\{f_n\}$ 是平面区域 Ω 上的全纯函数列，内闭一致收敛于 f。则
(1). f 是区域 Ω 上的全纯函数；
(2). 对任意 $k \ge 1$, $\{f_n^{(k)}\}$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 $f^{(k)}$。

证明： 任取 $p \in \Omega$, 以及 $r > 0$ 满足 $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$。因全纯是局部性质，我们只需说明 f 在 $D(p,r)$ 上全纯。利用 f_n 的全纯性可知，对任意 $z \in D(p,r)$, 成立 Cauchy 积分公式

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{12.1}$$

这里 $\gamma = \partial D(p,r)$。利用积分基本不等式，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \\ \le\ & \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left|\frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z}\right| |d\zeta| \\ \le\ & \frac{1}{2\pi}\frac{\ell(\gamma)}{d(z,\gamma)}\|f_n - f\|_\gamma \to 0 \text{ 当 } n \to \infty.\end{aligned}$$

对任意取定的 $z \in D(p,r)$, 在12.1中, 两边令 $n \to \infty$ 可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,\ \forall z \in D(p,r).$$

由 Cauchy 型积分的性质知，f 在 $D(p,r)$ 上全纯。

利用导数公式可知, 对任意 $z \in D(p,r/2)$，

$$\begin{aligned}
|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| &= \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta\right| \\
&\leq \frac{k!}{2\pi}\frac{\ell(\gamma)}{d(z,\gamma)^{k+1}}\|f_n - f\|_\gamma \\
&\leq k!2^{k+1}r^{-k}\|f_n - f\|_\gamma.
\end{aligned}$$

此式表明, $\{f_n^{(k)}\}$ 在 $D(p,r/2)$ 上一致收敛于 $f^{(k)}$。

对 Ω 的任意紧子集 K, 对任意 $p \in K$, 总存在 $r_p > 0$, 使得 $\overline{D(p,r_p)} \subset \Omega$ 并且 $\{f_n^{(k)}\}$ 在 $D(p,r_p/2)$ 上一致收敛于 $f^{(k)}$。显然，$\{D(p,r_p/2); p \in K\}$ 构成 K 的一个开覆盖，由 K 的紧性知，它有有限子覆盖 $\{D_j = D(p_j,r_j/2); 1 \leq j \leq n\}$。由

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_K \leq \max_{1\leq j\leq n}\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{D_j}$$

可知，$\{f_n^{(k)}\}$ 在 K 上一致收敛到 f。

12.3　函数项级数

现将复级数的概念稍作推广, 引入函数项级数。

假设 E 是 $\mathbb{C}$ 的子集，$f_n : E \to \mathbb{C}$ 是复值函数列。形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

的级数称为函数项级数，其部分和函数为 $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$。

如果对任意 $z \in E$, 上面的级数收敛，称函数项级数收敛。其和函数为 $f(z)$, 并记

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(z) = f(z).$$

由定义可知，函数项级数收敛等价于部分和的函数列 $\{S_n\}$ 在 E 上点态收敛于 f。

我们称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 如果部分和函数列 $\{S_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f。

下面考虑积分与求和的可交换性。假设 γ 是分段光滑曲线，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛于 $f(z)$,

$$\begin{aligned}&\left|\int_\gamma f(z)dz-\sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k(z)dz\right|=\left|\int_\gamma (S_n(z)-f(z))dz\right|\\ \le &\int_\gamma |S_n(z)-f(z)||dz|\le \ell(\gamma)\|S_n-f\|_\gamma\to 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

上式表明, 如函数项级数一致收敛，则积分与求和可交换次序：

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz.$$

最后给出判断函数项级数一致收敛的一个常用条件: 如果 $\|f_n\|_E\le a_n$, 并且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛。简言之

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_E \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ 在}E \text{ 上一致收敛.}$$

12.4 幂级数 (power series)

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$$

的级数称为以 c 为中心的幂级数, 这里系数 $a_n\in\mathbb{C}$。

以下讨论不妨假设 $c=0$，即幂级数以原点为中心。一个自然的问题是, 什么样的 z 可保证级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛？一个基本的观察是，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_0 处收敛，则有 $\lim a_n z_0^n=0$, 这说明

$$C:=\sup_n |a_n z_0^n|<+\infty.$$

因此, 对所有的 z 满足 $|z|<|z_0|$,

$$|a_n z^n|=|a_n z_0^n||z/z_0|^n\le C|z/z_0|^n.$$

由级数 $\sum_n |z/z_0|^n$ 的收敛性可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 绝对收敛。这表明，如果找到一个使幂级数收敛的点 z_0，则在开圆盘 $D(0,|z_0|)$ 上，幂级数绝对收敛。我们下面将证明，总是存在一个最大的开圆盘 (可以为空集)，使幂级数绝对收敛。

定理 12.3. (Cauchy 1821, Abel 1826) 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 存在 $R \in [0, +\infty]$, 满足

(1). 如果 $|z| < R$, 级数绝对收敛;

(2). 如果 $|z| > R$, 级数发散。

这里, 则 R 由如下的 Hadamard 公式给出

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} \quad \Big(\text{约定 } \frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\Big).$$

证明 假设 $R \in (0, +\infty)$, 并记 $L = 1/R$。注: 极端情况 $R = 0$ 或 $R = +\infty$ 亦蕴含在如下证明中。

如果 $|z| < R$, 则存在 $\epsilon > 0$, 满足 $(L + \epsilon)|z| = r < 1$。由 $L = \limsup |a_n|^{1/n}$ 可知，当 n 很大时, $|a_n|^{1/n} \leq L + \epsilon$, 因此 $|a_n| \leq (L+\epsilon)^n$。由此得 $|a_n z^n| \leq ((L+\epsilon)|z|)^n = r^n$。由 $\sum r^n$ 的收敛性可知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 绝对收敛。

如果 $|z| > R$, 则存在 $\epsilon > 0$, 满足 $(L - \epsilon)|z| = \rho > 1$。由 $L = \limsup |a_n|^{1/n}$ 可知，存在子列 $\{n_k\}$, 满足 $L = \lim |a_{n_k}|^{1/n_k}$。特别地，当 k 很大时，$|a_{n_k}|^{1/n_k} \geq L - \epsilon$, 因此 $|a_{n_k}| \geq (L - \epsilon)^{n_k}$。由此得 $|a_{n_k} z^{n_k}| \geq ((L - \epsilon)|z|)^{n_k} = \rho^{n_k}$。由 $\rho^{n_k} \to \infty$ 可知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散。 □

这说明, 幂级数定义了收敛圆盘上的一个全纯函数。

称 R 为幂级数的收敛半径，$D(0, R)$ 为幂级数的收敛圆盘。

以上证明蕴含, 如果 $R > 0$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在收敛圆盘 $D(0, R)$ 上内闭一致收敛于某个全纯函数 $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$。等价于部分和函数 $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 在 $D(0, R)$ 上内闭一致收敛于 f。由 Weierstrass 定理可知，$S_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$ 在 $D(0, R)$ 上内闭一致收敛于 f'。因此成立等式

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, z \in D(0, R).$$

这表明，在幂级数的收敛圆盘上，求和与求导可交换次序：

$$\frac{d}{dz} \sum = \sum \frac{d}{dz}.$$

更一般的，$S_n^{(m)}$ 在 $D(0, R)$ 上内闭一致收敛到 $f^{(m)}$。因此,

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1) a_k z^{k-m}, z \in D(0, R).$$

容易验证，任意阶导函数对应的幂级数收敛半径也为 R。

下例表明，幂级数在收敛圆盘的边界上, 敛散性质可以多样。

例题 12.2. 求下面幂级数的收敛半径，并考察其在收敛圆盘边界的收敛性。

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

解： 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 而言，$a_n = 1$, $\limsup |a_n|^{1/n} = 1$, 因此其收敛半径 $R = 1$。收敛圆盘即单位圆盘 $\mathbb{D}$。在圆盘边界上, $|z^n| = 1$, 因此级数发散。

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 而言，$a_n = 1/n^2$。易知, 当 $n \to \infty$ 时，

$$\log |a_n|^{1/n} = -\frac{2\log n}{n} \to 0.$$

因此, $\limsup |a_n|^{1/n} = 1$。由此得收敛半径 $R = 1$。收敛圆盘为单位圆盘 $\mathbb{D}$。在圆盘边界上, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|z^n/n^2\right| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < +\infty$。因此级数绝对收敛。

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ 而言，类似可求收敛半径 $R = 1$。此时在单位圆盘的边界上，情形非常微妙。显然，当 $z = 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 发散。下面将证明，对任意 $z = e^{i\theta}, \theta \in (0, 2\pi)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}/n$ 收敛。

记 $A_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$。计算得

$$|A_n| = \left|\frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}.$$

这说明 $\{A_n\}$ 有界。级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}/n$ 的部分和序列为 $\{S_n\}$, 则对任意 $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{A_k - A_{k-1}}{k} \\ &= -\frac{A_n}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{A_k}{k(k+1)} + \frac{A_{n+p}}{n+p}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\left|S_{n+p}-S_n\right| &\le \frac{|A_n|}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\frac{|A_k|}{k(k+1)}+\frac{|A_{n+p}|}{n+p}\\ &\le \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}\left(\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{n+p}\right)\\ &= \frac{4}{(n+1)|1-e^{i\theta}|}.\end{aligned}$$

这说明 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列，因此级数收敛。

总结本节讨论: 幂级数定义了收敛圆盘上的一个全纯函数。一个自然的问题是：圆盘上所有的全纯函数是否都可以由幂级数来定义？下章分解。

12.5 习题

1883 年，一个叫 Pringsheim 的数学家证明了一条奇妙的定理: 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}/k$ 的一个重新排列 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{\sigma(k)}$ 收敛的充要条件是 $\lim_{n\to\infty}r_n/n=\alpha\in(0,1)$, 其中 r_n 是重排后前 n 项中正项个数。此时，

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{\sigma(k)}=\log 2+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right).$$

1. 举例说明函数列的点态收敛和内闭一致收敛不同。

2. 证明复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 收敛, 当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}(z_n),\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}(z_n)$$

收敛。

3. 假设 $\mathrm{Re}(z_n)\ge 0$, $\forall n\ge 1$。证明如果 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}z_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2$ 也收敛。

4. 求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n}$$

的收敛半径 R。讨论级数在圆周 $\{|z|=R\}$ 上的敛散性, 并给出严格证明。

5. 求出下面级数的收敛半径

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3+(-1)^n)^n z^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+a^n)z^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{3^n}.$$

6. 求出下面函数项级数的收敛范围

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n^2}+\frac{1}{2^n z^n}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}.$$

7. 给定分段光滑闭曲线 γ 上的连续函数列 f_n, 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收

(a). f 在 γ 上连续。

(b). 证明积分与求和可以交换:

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma} f_n(z)dz.$$

8. 假设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的系数满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty,\ \sum_{n=0}^{\infty}n|a_n|=+\infty,$$

证明幂级数的收敛半径 $R=1$。

9. 假设复数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\to 0$ 并且

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|<+\infty.$$

证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 对所有 $z\in\partial\mathbb{D}-\{1\}$ 都收敛。

附加题 (不做要求)

证明 Pringsheim 的定理。