ODE笔记1：基本概念、定义

微分方程

微分方程：函数F给出自变量、未知函数以及未知函数导数关系式，称

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

是**微分方程**（DE）。

自变量为x，$\Longleftrightarrow$ **常微分方程（ODE）**

自变量为$x_1, x_2, \ldots, x_n$，$\Longleftrightarrow$ **偏微分方程（PDE）**

DE的阶数 = 出现的最高阶导数的阶数

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{*}$$

若函数$y = \phi(x)$在区间I上连续，且关于x有n阶连续导数，代入得

$$F(x, \phi(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in I$$

则称$y = \phi(x)$是n阶ODE(*)在区间I上的解。

通解

通解定义：$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$含有n个独立的任意常数$c_1, c_2, \ldots, c_n$的解：

$$y = \phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

称为n阶ODE(*)的**通解**。不含任意常数的解，称为**特解**。

各个常数相互**独立**：

$$\frac{\partial(\phi, \phi', \ldots, \phi^{(n-1)})}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial c_1} & \ldots & \frac{\partial \phi}{\partial c_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \ldots & \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

n阶ODE**一般形式**：$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$

n阶ODE**标准形式**：$y^n(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$

线性ODE（LODE）

线性ODE：F关于未知函数及其导数$y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$是一次有理式。例如：

1阶齐次LODE：$y' = p(x)y$　通解：$y(x) = c \cdot e^{\int p(x)dx}$

特解：$\begin{cases} y' = p(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Longrightarrow \quad y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$

非齐次方程：$y' = p(x)y + q(x)$　通解：$y(x) = e^{\int p(x)dx}(c + \int q e^{-\int p(x)dx} dx)$

特解：$\begin{cases} y' = p(x)y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Longrightarrow \quad y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt)$

例1： $2\int_0^x (x+1-t)f'(t)dt = x^2-1+f(x)$**，求**$f(x)$**.**

解：已知$\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)dt = g(x)$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x g(t,x)dt = g(x,x)+\int_0^x \frac{\partial g(t,x)}{\partial x}dt$$

两边对x求导：$2(f(x)-f(0)+2xf'(x)+2(1-x)f'(x) = 2x+f'(x)$

$x\to 0$，得到$f(0)=1$.

所以$\begin{cases} f'(x)+2f(x)=2x+2 \\ f(0)=1 \end{cases} \implies f(x)=\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}e^{-2x}$.

例2： $y' = \frac{y}{2x-y^2}$**，求解**

解：$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{y}x-y,\ x(y) = e^{\int \frac{2}{y}dy}(c+\int -ye^{-\int \frac{2}{y}dy}dy) = y^2(c+\int -yy^{-2}dy) = y^2(c-ln|y|)$,或$y\equiv 0$

两种题型：

1、$h(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$

其中$h(y), f(x)$分别有原函数$H(y), F(x)$.若$y(x)$是解，$x\in I$.

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = H'(y(x))\frac{dy(x)}{dx} = h(y(x))\frac{dy(x)}{dx} = f(x),\ x\in I \implies H(y(x)) = F(x)+C, \int h(y)dy = \int f(x)dx + C$$

$$\begin{cases} h(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \iff \int_{y_0}^{y} h(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

2、$y' = f(x)g(y)$

（1）$g(y^*) = 0, y = y^*$是解

（2）$g(y)\neq 0, \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \implies \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$

通解：$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C$

例3： $\begin{cases} yy'+(1+y^2)sinx = 0 \\ y(0)=1 \end{cases}$

解：$y' = -\frac{1}{y}(1+y^2)sinx,\ \frac{y}{1+y^2}dy = -sinxdx \implies \frac{\frac{1}{2}dy^2}{1+y^2} = -sinxdx \implies \frac{1}{2}ln(1+y^2) = cosx + C$

代入 $y(0)=1$, 得到$\frac{1}{2}ln2 = 1+C, C = \frac{1}{2}ln2-1$

$$ln(1+y^2) = 2cosx + ln2 - 2$$

$$ln(\frac{1+y^2}{2}) = 2(cosx-1) = -4sin^2\frac{x}{2}$$

$$\implies y = \pm\sqrt{2e^{-4sin^2\frac{x}{2}}-1},\quad |x| < 2arcsin\frac{\sqrt{ln2}}{2}.$$