1、令 x_i 为每年~~的~~第 i 季度的商品数量
y_i 为每年第 i 季度购买的商品数量
z_i 表示每年第 i 季度销售的数量.

假设每个季度先买进再卖出

有以下约束条件: $x_{i+1} = x_i + y_i - z_i \ , \ i=1,2,3$

$$z_i \le x_i + y_i \ , \ i=1,2,3,4$$

$$x_i \le C \ , \ i=0,1,2,3,4$$

其中 x_0 表示每年初仓库存放的商品数量.

因此目标函数为 $\max \sum_{i=1}^{4} p_i z_i - \sum_{i=1}^{4} p_i y_i - \sum_{i=1}^{4} s\,(x_{i-1} + y_i)$

从而有标准型的线性规划模型:

$$\max \sum_{i=1}^{4} \left(p_i z_i - p_i y_i - s\,(x_{i-1} + y_i)\right)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & x_{i+1} = x_i + y_i - z_i \ , \ i=1,2,3 \\ & z_i \le x_i + y_i \ , \ i=1,2,3,4 \\ & x_i \le C \ , \ i=0,1,2,3,4 \\ & x_i, y_i, z_i, p_i \ge 0. \end{aligned}$$

2、考虑差分形式：取 $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}$ 满足 $y_j \geq 0$，$j=1,2,\cdots,n+1$.

满足 $x_j = y_{j+1} - y_j$，$j=1,2,\cdots,n$

原式可转化为：
$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j (y_{j+1} - y_j)$$
$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (y_{j+1} - y_j) = b_i, \quad i=1,\cdots,m$$

$$\Rightarrow \min \sum_{j=1}^{n+1} C_j y_j$$
$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n+1} A_{ij} y_j = b_i, \quad i=1,2,\cdots,m$$

. 其中 $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1} \geq 0$

其中
$$C_j = \begin{cases} -c_1, & j=1 \\ c_{j-1} - c_j, & j=2,3,\cdots,n \\ c_n, & j=n+1 \end{cases} \qquad A_{ij} = \begin{cases} -a_{i1}, & j=1 \\ a_{i(j-1)} - a_{ij}, & j=2,3,\cdots,n \\ a_{in}, & j=n+1 \end{cases}$$

3 (1) 反例：

$$\min \ |x_1| - |x_2|$$

$$\text{s.t.} \ x_1 + x_2 = 1$$

有最小值 -1

转化后：

$$\min \ x_1^+ + x_1^- - (x_2^+ + x_2^-)$$

$$\text{s.t.} \ x_1^+ - x_1^- + (x_2^+ - x_2^-) = 1$$

即求解 $\min \ 2x_1^+ - 2x_2^- - 1$ ，无下界！

(2) 可以，在此约束条件下，考虑的只有 $|x_j|$ 的取值，在转化后也仅含 $(x_j^+ + x_j^-)$ 的项，所得到的最优解与原问题的最优解必然等价，即满足 $x_j^+ + x_j^- = |x_j|$.

4.（1）令 $z = x+y$，原问题化为：

$$\max z$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 8z-5y &\le 24 \\ 5z+2y &\le 35 \\ -z+2y &\le 4 \\ -y &\le 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} 41z \le 223 \\ 11z \le 68 \\ 5z \le 39 \\ -z \le 8 \end{cases}$$

解得 $\max z = \dfrac{223}{41}$

（2）修改后：原问题转化为：

$$\max z$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 8z-5y &\le 24 \\ 5z+2y &\le 35 \\ -z+2y &\le -7 \\ -y &\le 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} 41z \le 223 \\ 11z \le 13 \\ 5z \le 39 \\ -z \le -3 \end{cases}$$

$z \ge 3$ 与 $z \le \dfrac{13}{11}$ 矛盾！

故该线性规划无可行解！

$-y \leq 2$

5. (1) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 \leq -1 \\ -x_1 + x_3 \leq 1 \end{cases}$ 从而 $x_1 - x_3 = -1$.

$\Rightarrow \begin{cases} -x_2 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0$ 解为 $\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

取 $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (1, 0, 1, 1)$，有 $\pi_1(-x_1 + 2x_2 + x_3) + \pi_3(x_1 - x_2 - x_3) + \pi_4(-x_2) \leq \pi_1 - \pi_3$

化简后为：$0 \leq 0$

(2) 一般情形：考虑 $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \le b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \le b_m \end{cases}$ 由条件知 $\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\pi_i a_{ij}x_j}_{=0} \le \underbrace{\sum_{s=1}^{m}\pi_s b_s}_{=0}$

$\Rightarrow \underbrace{\sum_{\pi_t>0}\sum_{j=1}^{n}\pi_t a_{tj}x_j}_{=0} \le \underbrace{\sum_{\pi_t>0}\pi_t b_t}_{=0}$. 说明 $\forall \pi_t>0$，有 $\sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j = b_t$.

所有不等式均取等号

因此将 $\pi_i>0$ 对应的不等式改为等式，解集仍不变.

若 $\underbrace{\sum_{\pi_t>0}\sum_{j=1}^{n}\pi_t a_{tj}x_j}_{=0} \le \underbrace{\sum_{\pi_t>0}\pi_t b_t}_{=d}$ 或将 $\pi_i=0$ 对应的不等式改为等式，不等式组

解集会发生改变. 反例①: $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3\le 1 \\ x_1-x_2-x_3\le 0 \\ \quad -x_2\le 0 \end{cases}$ 有 $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{pmatrix} -x_1+2x_2+x_3 \\ x_1-x_2-x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} \le \pi_1$

取 $\pi_1=\pi_2=\pi_3=1$，有 $0\le 1$. 将 $\pi_i>0$ 对应的不等式改为等式，有：

$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ \quad -x_2=0 \end{cases}$ 无可行解！与上一个不等式组的解集不同！

反例②: $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3\le 1 \\ x_1-x_2-x_3\le 0 \\ x_1-x_2-x_3\le -1 \\ \quad -x_2\le 0 \end{cases}$ 取 $(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)=(1,0,1,1)$，能得到 $0\le 0$.

将 $\pi_2=0$ 对应的不等式改为等式：$x_1-x_2-x_3=0$，与 $x_1-x_2-x_3\le -1$ 矛盾！

故改变后的不等式组解集与原来的不等式组解集不同！