3. 由 $p\circ f=\mathrm{id}_Y$，p 有右逆，从而为满射.

下证：$U\subset Y$ 开 $\Leftrightarrow$ $p^{-1}(U)\subset X$ 开.

$(\Rightarrow)$. 由 p 连续得到.

$(\Leftarrow)$ 现 $p^{-1}(U)\subset X$ 为开集. 由 $f: Y\to X$ 连续知

$$f^{-1}(p^{-1}(U))=(p\circ f)^{-1}(U)=U$$ 为 Y 中开集.

从而 p 为商映射.

2. $\mathbb{R}^2$上定义等价关系：$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$.

则 $\mathbb{R}^2/\sim \;\cong\; \mathbb{R}^1_+$

事实上，构造 $g:\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^1_+$ $\quad (x,y)\longmapsto x^2+y^2$.

则 g 为满射，且 g 连续（对 $0\le x^2+y^2<a$ 或 $a<x^2+y^2<b$，(x,y)全体为$\mathbb{R}^2$中开集）

于是 g 诱导了一一的连续映射 f ：$\mathbb{R}^2/\sim\ \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ （见书上推论22.3）

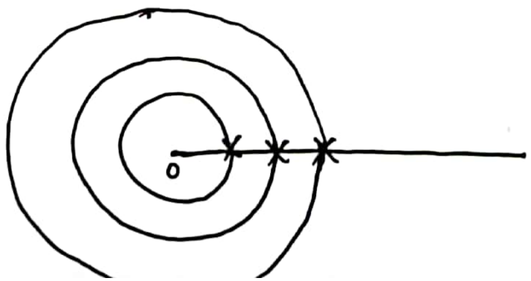
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^1_+ \\
\mathbb{R}^2/\sim \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

并且，g 是商映射，从而 f 是同胚.

（g是商映射是由于 $g\circ h = id_{\mathbb{R}_+}$，这里 $h:\ \mathbb{R}^1_+\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $\quad z\longmapsto(\sqrt{z},0)$

是连续的，由作业题3知 g 为商映射） ▨

直观来说，该等价关系是将一系列圆周粘为一串点，所有点组成一射线.



4. 取实数域 $\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^*$ 是将 $\mathbb{R}$ 的子集 $\mathbb{Z}_+$ 黏合成一点形成的商空间，

商映射记作 $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$.

则 $p \times id: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ 是商映射.（由 R 为局部紧 Hausdorff 空间）

但对于饱和子集 $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$p \times id : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{Q}$$ 不是商映射.

1. 构造 $g: \quad X \longrightarrow S^2$

$$(r,\theta) \longmapsto (\sin\pi r\cos\theta,\ \sin\pi r\sin\theta,\ \cos\pi r)$$

即 g 将圆盘上 (r,θ) 点映成 S^2 上经度 θ，纬度 πr 的点.

这里 $0 \leq r \leq 1$ ，$0 \leq \theta \leq 2\pi$.

g 将 $\{r=1\}$（即圆盘边界）映为 S^2 上一点 $(0,0,-1)$.

由 g 连续且为满射，g 诱导了一一的连续映射 $f: X/\sim \to S^2$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \\ X/\sim \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

注意到 $X/\sim$ 紧致（X 紧致，其在连续映射 π 下的象也是紧致）

S^2 为 Hausdorff 空间.

故 f 为同胚. 即有 $X/\sim \cong S^2$