ODE笔记3：参数法、p—判别法

参数法：2阶ODE⟶1阶ODE

(1) $y''=f(x),\ y=\int(\int f(x)dx)dx+c_1x+c_2, y^{(n)}=f(x)$ 同理

(2) $y''=f(x,y')$，令 $p=y',p'=f(x,p)$ 一阶ODE

$y^{(n)}=f(x,y^{(n-1)})$，令 $p=y^{(n-1)},p'=f(x,p)$ 一阶ODE

(3) $y''=f(y,y')$，令 $p=y',\ y''=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{dp}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy}=p\frac{dp}{dy}$

$\Longrightarrow p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$ 一阶ODE $(p=p(y),\frac{dy}{dx}=p(y))$

例1：$(\frac{dy}{dx})^2-y\frac{d^2y}{dx^2}=0$

解：令 $p=\frac{dy}{dx},\ p^2-y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy}=0,\ p=0$ 或 $p-y\cdot\frac{dp}{dy}=0$

$\Longrightarrow y=c$ 或 $y=c_2\cdot e^{c_1x}$，以上为通解。

一阶完全非线性ODE：$F(x,y,y')=0$

(1) 令 $p=y',F(x,y,p)=0$ 为 R^3 中曲面，有两个独立变量 (s,t) 表示：
$x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, $p=p(s,t)$,

(2) $dy=pdx$, $dy(s,t)=p(s,t)dx(s,t)$

$$\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt=p(s,t)(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt)$$

由前面方法可解：$t=t(s)$

(3) 解：$\begin{cases}x=x(s,t)\\y=y(s,t)\end{cases}$

情形1：$y=f(x,y')$

(1) 令 $y'=p,\ y=f(x,p)$ 曲面，(x,p) 独立变量，曲面 $(x=x),y=f(x,p),(p=p)$

(2) $dy=pdx$，$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp=pdx \quad\Longrightarrow\quad p=p(x)$

(3) 解：$y=f(x,p(x))$

例2：$x(y')^2-2yy'+9x=0 \implies y=\frac{x(y')^2+9x}{2y'}$

解：（1）令$p=y',y=\frac{xp^2+9x}{2p}=\frac{x}{2}p+\frac{9x}{2p}$

（2）由于$dy=pdx$, 故

$$\frac{p}{2}dx+\frac{x}{2}dp+\frac{9}{2p}dx-\frac{9x}{2p^2}dp=pdx$$

$\implies (\frac{9-p^2}{2p})(dx-\frac{x}{p}dp)=0 \implies p=\pm3$或$p=c\cdot x$

（3）$y=\pm3x$ 或 $y=\frac{cx^2}{2}+\frac{9}{2c}$ （代入即得）

情形2：$x=f(y,y')$

（1）令$y'=p$, $x=f(y,p)$曲面，(y,p)独立变量，曲面$x=f(y,p),y=y,p=p$

（2）$dy=pdx$， $dy=p(\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp) \implies p=p(y)$

（3）$x=f(y,p(y))$

例3：$(y')^3-4xyy'+8y^2=0 \implies x=\frac{(y')^3+8y^2}{4yy'}$

（1）令$p=y'$, $x=\frac{p^3+8y^2}{4yp}=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p}$

（2）$dy=pdx$代入，$\frac{p^3-4y^2}{4yp}dy=\frac{p^3-4y^2}{2yp}dp \implies p^3-4y^2=0$ 或 $\frac{dy}{4y^2}=\frac{dp}{2yp}$ $(p\frac{dy}{2y}=dp \implies p=c\sqrt{y})$

（3）$x=\frac{4y^2+8y^2}{4y(4y^2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}y^{\frac{1}{3}}$ 或 $x=\frac{c^2}{4}+\frac{2}{c}\sqrt{y}$

例4：$y^2+(y')^2=1$

（1）令$y'=p$, $y^2+p^2=1$, 曲面$x=x,y=sint,p=cost$，(x,t)独立变量

（2）$dy=pdx$, $dsint=costdx \implies costdt=costdx \implies cost=0$或$dt=dx \implies t=k\pi+\frac{\pi}{2}$或$t=x+c$

（3）$y=\pm1$ 或 $y=sin(x+c)$

Clairaut方程：$y=xy'+f(y')$, $f''(p)\neq0$

解：（1）令$y'=p$, $y=xp+f(p)$.

（2）由$dy=pdx$, $pdx+(x+f'(p))dp=pdx \implies x+f'(p)=0$ 或 $dp=0,p=c$

（3）$\begin{cases}x=-f'(p)\\y=xp+f(p)\end{cases}$ （单参数曲线）或 $y=cx+f(c)$，通解

$f''(p) \neq 0$, $x = -f'(p)$ 有反函数：$p = W(x)$

奇解：

设 $y = \phi(x)$ 在某区间 I 上有定义，为一阶ODE：

$$F(x, y, y') = 0 \;\; (*)$$

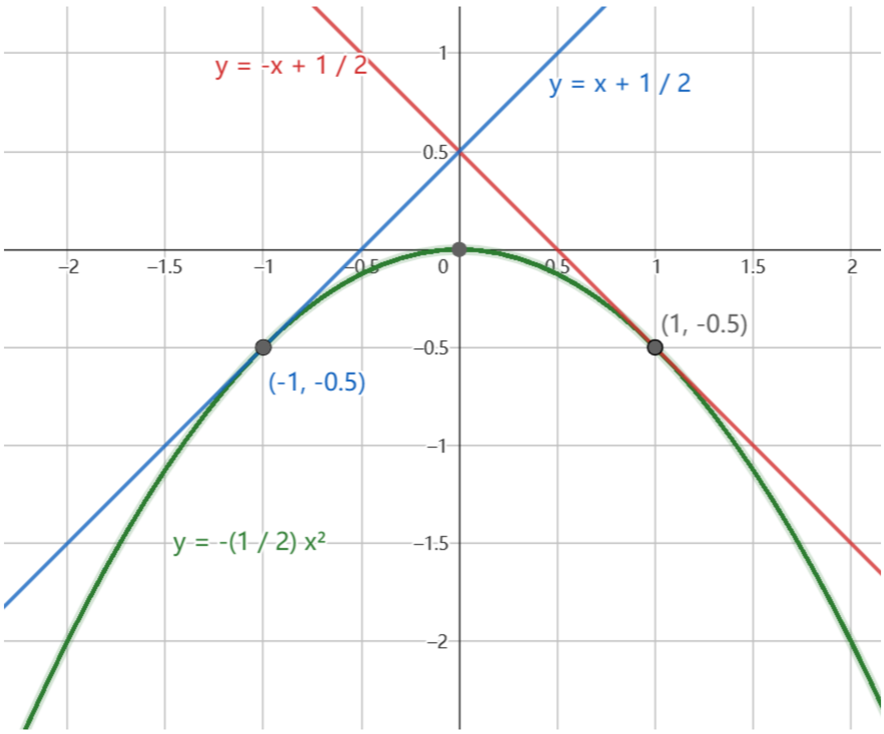
在区间 I 上的解。其曲线积分（解曲线）：$\gamma = \{(x, y), x \in I, y = \phi(x)\}$.

若 $\forall M \in \gamma$, 在 M 的任意一个领域中，方程 $(*)$ 有另一个不同于特解 $\phi(x)$ 的解，在 M 点与 γ 相切，则称 $y = \phi(x)$ 为 $(*)$ 的一个**奇解**

例5：$f(p) = \frac{1}{2}p^2$

解：$f'(p) = p$，故 $p = -x$，$y = xW(x) + f(W(x))$，特解

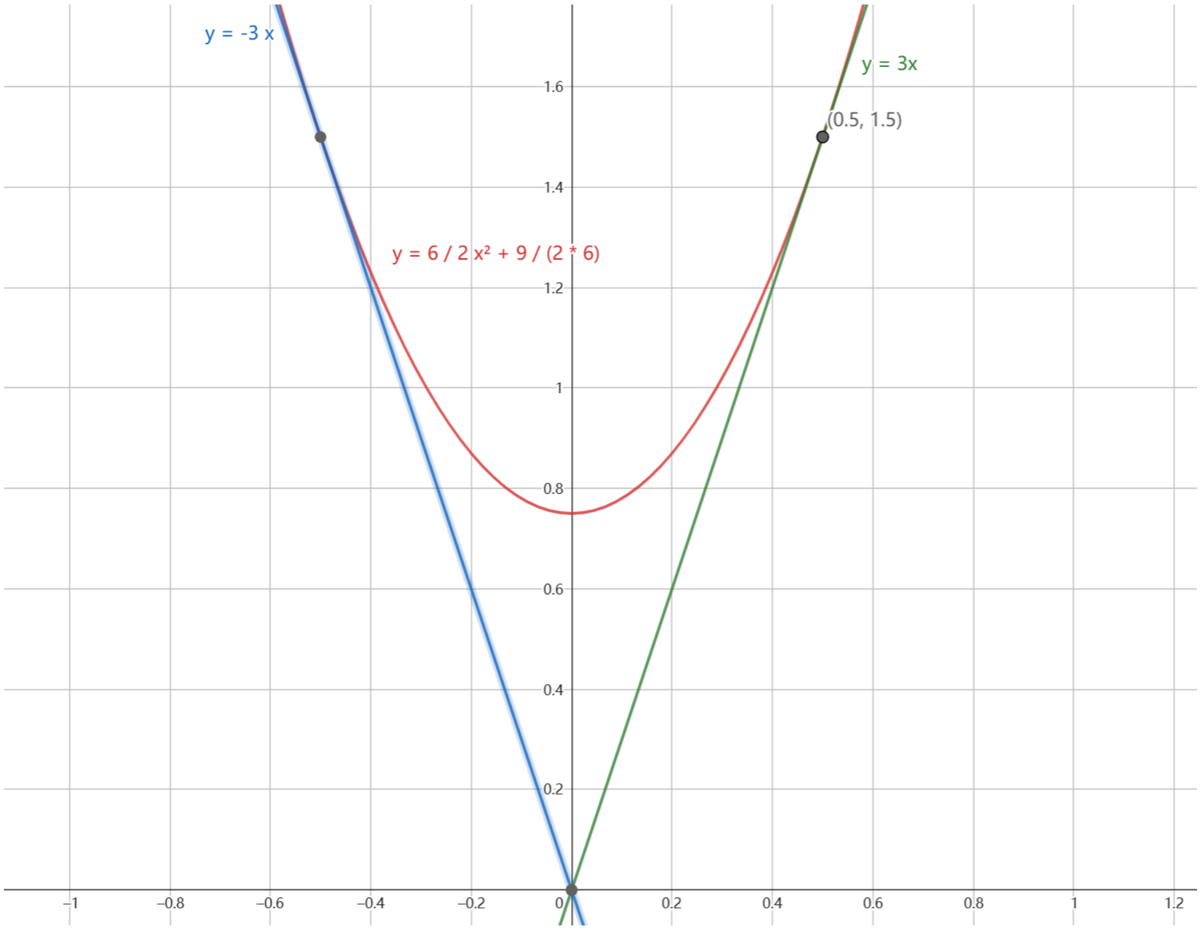
$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2$，$y = cx + \frac{1}{2}c^2$



$$\Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ 是奇解，} x \in (-\infty, \infty)$$

例6：$x(y')^2 - 2yy' + 9x = 0$

解：$y = \pm 3x$ 或 $y = \frac{c}{2}x^2 + \frac{9}{2c}$

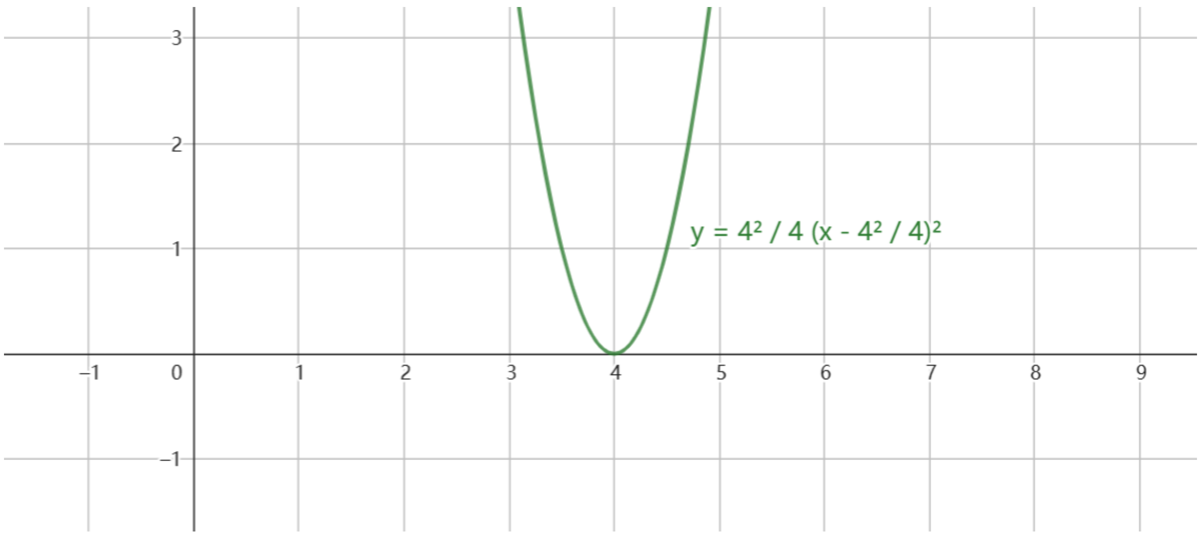


容易看出$y=\pm 3x$ 与 $y=\frac{c}{2}x^2+\frac{9}{2c}$ 在点$\left(\frac{3}{c},\frac{9}{c}\right)$相切。（上图中取$c=6$，得到以上图像）

$\implies\quad y=\pm 3x$ 是奇解，$x\in(-\infty,0)$ 或 $x\in(0,\infty)$

例7：$(y')^3-4xyy'+8y^2=0$

解：$F=p^3-4xyp+8p^2, F_p=3p^2-4xy.$　特解：$y=\frac{4}{27}x^3$　通解：$y=\frac{c^2}{4}(x-\frac{c^2}{4})^2.$

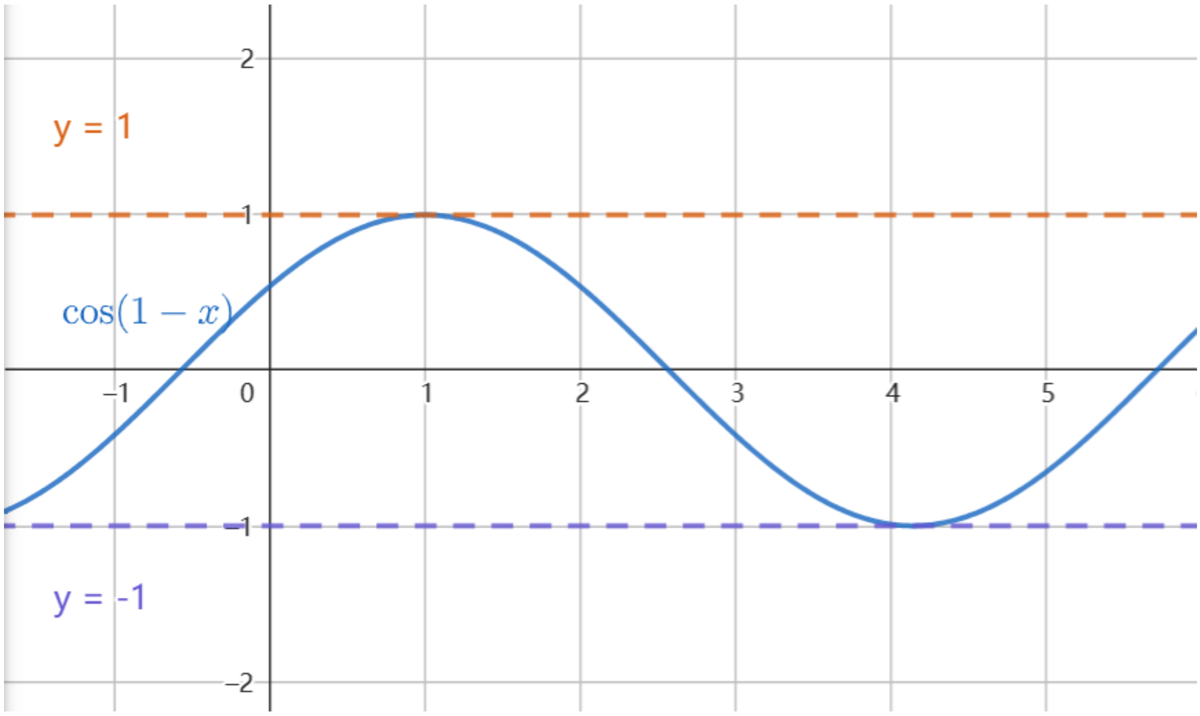


上图中取$c=4$，得到奇解为：$y\equiv 0$ 或 $y=\frac{4}{27}x^3$

例8：$y^2+(y')^2=1$

解：$F=y^2+p^2-1$. 考虑 $y=\pm1, p=0,\quad\rightarrow\quad \begin{cases}F(x,y,p)=0 & \checkmark\\ F_p=2p=0 & \checkmark\end{cases}$

特解：$y=\pm1$　　通解：$y=cos(c-x)$



（上图取 $c=1$,容易验证结果）　奇解：$y=\pm1$

P—判别法　$F(x,y,y')=0$

定理：若 $F(x,y,p)$ 在 G 中连续，$F_y,F_p\in C(G)$. 若 $y=\phi(x), x\in I$, 是 $F(x,y,p)=0$ 的一个奇解，且

$(x,\phi(x),\phi'(x))\in G, \forall x\in I$. 则 $y=\phi(x)$ 满足

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0 & (\text{p—判别式})\\ F_p(x,y,p)=0 & (\text{p—判别曲线})\end{cases}$$

其中 $x\in I$，$p=\phi'(x)$.　　（P—判别曲线不一定是奇解！！）

（1）不是解：

$(y')^2+2y-3x=0$，$F=p^2+2y-3x$

$\begin{cases}F=0\\ F_p=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}p^2+2y-3x=0\\ 2p=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad y=\frac{3}{2}x$，不是解！

（2）是解，但不是奇解：

$(y')^2-4y^2=0$，$F=p^2-4y^2$

$\begin{cases}F=0\\F_p=0\end{cases}\implies\begin{cases}p^2-4y^2=0\\2p=0\end{cases}\implies y\equiv0$，是解，不是奇解。（通解：$y'=\pm2y,\ \Rightarrow\ y=c\cdot e^{2x}$ 或 $y=c\cdot e^{-2x}$）

定理：$F(x,y,p)\in C^2(G)$，设 $\begin{cases}F(x,y,p)=0\\F_p(x,y,p)=0\end{cases}$ 得到p—判别式。$y=\phi(x),x\in I.$ 若：

$$\begin{cases}F(x,\phi(x),\phi'(x))=0\\F_p(x,\phi(x),\phi'(x))=0\\F_y(x,\phi(x),\phi'(x))\neq0\\F_pp(x,\phi(x),\phi'(x))\neq0\end{cases}$$

则 $y=\phi(x),x\in I$ 是方程$F(x,y,p)=0$ 的一个奇解。

例9：$y=2x+y'-\frac{1}{3}(y')^3$

解：$F(x,y,p)=2x+p-\frac{1}{3}p^3-y$

P—判别式：$\begin{cases}2x+p-\frac{1}{3}p^3-y=0\\1-p^2=0,\ \ p=\pm1\end{cases}\implies y=2x\pm\frac{2}{3},\ y'=2$

将 $y'=2$ 代入 F,F_p，矛盾。故无法判断！

例10：$(y-1)^2(y')^2=\frac{4}{9}y$

解：$F(x,y,p)=(y-1)^2p^2-\frac{4}{9}y$

（1）P—判别式：$\begin{cases}(y-1)^2p^2-\frac{4}{9}y\\2(y-1)^2p=0,\ \ p=0 \text{ 或 } y=1\end{cases}\implies p=0,\ y=0$

（2）代入：$\begin{cases}F=0\\F_p=0\\F_y=2(y-1)p^2-\frac{4}{9}\neq0\\F_{pp}=2(y-1)^2=2\neq0\end{cases}\implies y\equiv0$ 是一个奇解！

例11：$(y')^4-(y')^3-y^2y'+y^2=0$

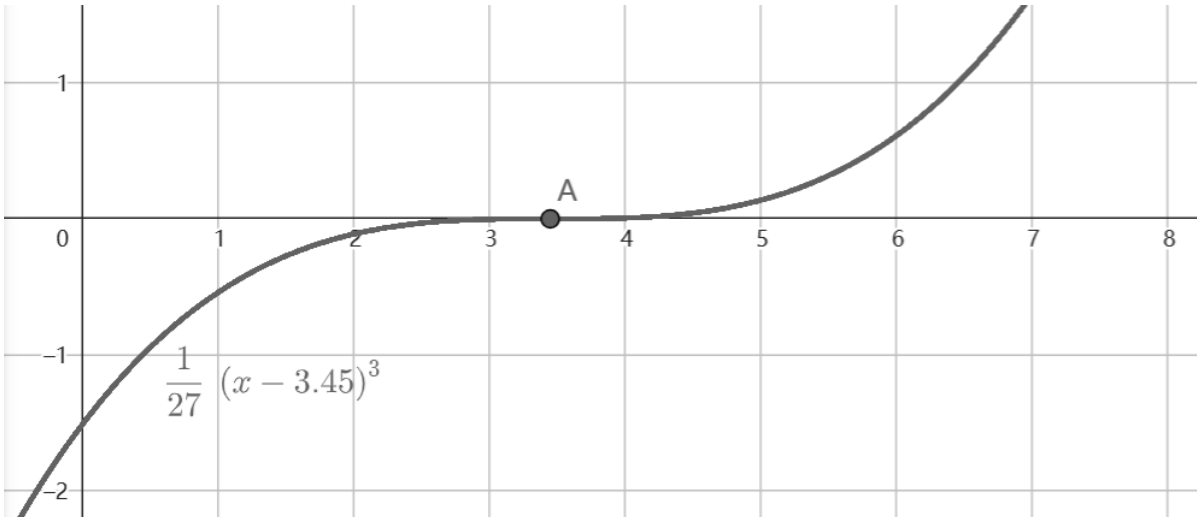
$F(x,y,p)=p^4-p^3-y^2p+y^2$

P—判别式：$\begin{cases}p^4-p^3-y^2p+y^2=0\\4p^3-3p^2-y^2=0\end{cases}\implies p=0 \text{ 或 } p=1,\ y=0 \text{ 或 } y=\pm1$

$y=0,\ F=0,F_p=0,F_y=-2yp+2y=0\quad\times$

$y=\pm1,\ F=1\neq0\quad\times\quad\implies$ 无法判断

解：$[y-\frac{1}{27}(x-c)^3][y-x+c]=0$



上面取了 $c=3.45$ ，容易得到 $y\equiv 0$ 是奇解。

定理：$y=\phi(x)$ 是奇解 $\implies \begin{cases}F(x,y,p)=0\\F_p(x,y,p)=0\end{cases},\forall x\in I,\ p=\phi'(x_0)$

反证：设存在 $x_0\in I,\ F_p(x_0,y_0,p_0)\neq 0,\ y_0=\phi(x_0),\ p_0=\phi'(x_0)$

由**隐函数定理**：$\because F(x_0,y_0,p_0)=0,\ F_p(x_0,y_0,p_0)\neq 0$

$\therefore \exists[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$ 中存在唯一隐函数 $p=f(x,y)$，s.t.
$F(x,y,f(x,y))=0,\ f_y=\frac{-F_y}{F_p}$ 连续。

当 (x_0,y_0,p_0) 的小领域内，$0=f(x,y,p)\iff p=f(x,y)\ \ (*)$

$F(x,y,y')=0$ 的解满足$\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}\quad(**)$

奇解：存在两个不同解 $y=\phi(x),\ y=\psi(x)$ 在 (x_0,y_0) 处相切，即
$\phi(x_0)=y_0,\ \psi(x_0)=y_0,\ \phi'(x_0)=\psi'(x_0)=p_0$

$\begin{cases}F(x_0,\phi(x_0),\phi'(x_0))=0\\F_p(x_0,\phi(x_0),\phi'(x_0))=0\end{cases}\xrightarrow{由(*)}\phi(x)$ 是 $(**)$ 解。同理，$\psi(x)$ 也是 $(**)$ 的解。

另一方面，由Picard存在唯一性定理（后面的内容）$\implies (**)$ 存在唯一解。矛盾！