23-24 运筹学 (数院) 期中课程练习

1、已知自变量 t 与因变量 y 之间的函数关系 f 为 n 次多项式 $f(t)=x_0+x_1t+...+x_nt^n$。通过试验获得 m 组数据 $(t_i,y_i), i=1,2,...,m$。现希望求出多项式，使拟合的 l_1 范数 $\sum_{i=1}^{m}|y_i-\sum_{j=0}^{n}x_jt_i^j|$ 或 l_∞ 范数 $\max_{1\le i\le m}|y_i-\sum_{j=0}^{n}x_jt_i^j|$ 最小。试分别写出求解这两个问题的线性规划。

2、设

$$P=\mathrm{conv}\left\{(1,0)^\top,(1,1)^\top,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^\top,(0,1)^\top\right\}+\ \mathrm{cone}\ \left\{\left(1,\frac{1}{2}\right)^\top,(1,1)^\top,\left(\frac{1}{2},1\right)^\top\right\}$$

（1）求 P 的极点和极方向；

（2）求 A,b，使得 $P=\{x\in R^2|Ax\le b\}$

3、线性规划成为自对偶（self-dual）的，若它的对偶规划即为其自身。

（1）试给出线性规划

$$\begin{aligned}\min\quad & \mathbf{cx}\\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{Ax}\ge\mathbf{b}\\ & \mathbf{x}\ge\mathbf{0}\end{aligned}$$

为自对偶规划时，A,b,x 需满足的条件；

（2）证明：自对偶规划有最优解当且仅当它有可行解。

（3）证明：对任意线性规划（LP），存在一个自对偶规划（SP），使得（SP）的最优解由（LP）和（LP）的对偶规划的最优解组成。

4、设有线性规划问题

$$(1)\quad \begin{aligned}\min\quad & \mathbf{c}^\top\mathbf{x}\\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{Ax}\ge\mathbf{b}\\ & \mathbf{x}\ge\mathbf{0}\end{aligned}\qquad\qquad (2)\quad \begin{aligned}\min\quad & \mu\mathbf{c}^\top\mathbf{x}\\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{Ax}\ge\lambda\mathbf{b}\\ & \mathbf{x}\ge\mathbf{0}\end{aligned}$$

其中 $\lambda,\mu\in R$. 试说明这两个问题最优解之间的关系。

5、设 $S\subseteq R^n, x\in conv(S)$，证明：存在 $T\subseteq S$ 且 $|T|\le n+1$，使得 $x\in conv(T)$.