1. 记两个拓扑分别为 $\mathcal{T}_L$, $\mathcal{T}_K$.

一方面, $[a,b)\in\mathcal{T}_L$ 但 $[a,b)\notin\mathcal{T}_K$.

这是因为若 $[a,b)\in\mathcal{T}_K$, 则 $\exists\,(c,d)$ 或 $(c,d)\setminus K$ s.t.

$a\in(c,d)\ \left(\text{or}\ (c,d)\setminus K\right)\subset[a,b)$, 显然不对.

另一方面. $(-1,1)\setminus K\in\mathcal{T}_K$ 但 $(-1,1)\setminus K\notin\mathcal{T}_L$

这是因为若 $(-1,1)\setminus K\in\mathcal{T}_L$, 则 $\exists\,[c,d)\in\mathcal{T}_L$ s.t.

$0\in[c,d)\subset(-1,1)\setminus K$, 依然不可能.

故 $\mathcal{T}_L$, $\mathcal{T}_K$ 互不包含.

2. $\pi_1: X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$

$X_1 \times X_2$ 上的开集（即赋予乘积拓扑中的开集）为

$\bigcup U_\alpha \times V_\beta$，其中 $U_\alpha \in \mathcal{T}_{X_1}$，$V_\beta \in \mathcal{T}_{X_2}$

$\pi_1(\bigcup U_\alpha \times V_\beta) = \bigcup U_\alpha \in \mathcal{T}_{X_1}$ 为 X_1 中开集

π_1 为开映射。π_2 类似.

3. (1) 欲证 $\mathcal{T}_{\tau_1'\times\tau_2'} \subset \mathcal{T}_{\tau_1\times\tau_2}$ ，只需证明

$\forall\ U_1'\times U_2' \in \tau_1'\times\tau_2'$ $\exists\ U_1\times U_2 \in \tau_1\times\tau_2$ s.t.

$\forall\ x\in U_1'\times U_2'$ 有 $x\in U_1\times U_2 \subset U_1'\times U_2'$.

而由于 $\tau_1'\subset\tau_1$, $\tau_2'\subset\tau_2$

总存在 $U_1\in\tau_1, U_2\in\tau_2$ 使上式成立.

(2) 逆命题也成立. 和(1)类似

$\mathcal{T}_{\tau_1'\times\tau_2'} \subset \mathcal{T}_{\tau_1\times\tau_2} \iff \forall\ U_1'\times U_2' \in \tau_1'\times\tau_2'$

$\exists\ U_1\times U_2 \in \tau_1\times\tau_2$ s.t.

$\forall\ x=(a,b)\in U_1'\times U_2'$ $x=(a,b)\in U_1\times U_2\subset U_1'\times U_2'$

这说明 $\forall\ U_1'\in\tau_1'$, $U_2'\in\tau_2'$

$\exists\ U_1\in\tau_1$, $U_2\in\tau_2$ s.t. $U_1\subset U_1'$ $U_2\subset U_2'$

从而 $\tau_1'\subset\tau_1$, $\tau_2'\subset\tau_2$

4. 由于 $C_1\times C_2\subset\mathcal{T}_{C_1}\times\mathcal{T}_{C_2}$，$\mathcal{T}_{C_1\times C_2}\subset\mathcal{T}_{\mathcal{T}_{C_1}\times\mathcal{T}_{C_2}}$ 显然

下证 $\mathcal{T}_{\mathcal{T}_{C_1}\times\mathcal{T}_{C_2}}\subset\mathcal{T}_{C_1\times C_2}$，只需说明，$\mathcal{T}_{C_1}\times\mathcal{T}_{C_2}\subset\mathcal{T}_{C_1\times C_2}$

取 C_1, C_2 的加细 $\widetilde{C_1},\widetilde{C_2}$，使 $\widetilde{C_1},\widetilde{C_2}$ 是 X_1, X_2 的拓扑基（这里我们需首先假定 C_1, C_2 是拓扑子基）

$$\mathcal{T}_{C_1}=\mathcal{T}_{\widetilde{C_1}}\qquad \mathcal{T}_{C_2}=\mathcal{T}_{\widetilde{C_2}}$$

我们有 $\mathcal{T}_{C_1}\times\mathcal{T}_{C_2}=\mathcal{T}_{\widetilde{C_1}}\times\mathcal{T}_{\widetilde{C_2}}\subset\mathcal{T}_{\widetilde{C_1}\times\widetilde{C_2}}=\mathcal{T}_{\widetilde{C_1\times C_2}}=\mathcal{T}_{C_1\times C_2}$

从而 $\mathcal{T}_{\mathcal{T}_{C_1}\times\mathcal{T}_{C_2}}\subset\mathcal{T}_{C_1\times C_2}$，即有 $\mathcal{T}_{\mathcal{T}_{C_1}\times\mathcal{T}_{C_2}}=\mathcal{T}_{C_1\times C_2}$

若 C_1, C_2 是 X_1, X_2 的拓扑基，则 $\forall\, x\times y\in X_1\times X_2$

$\exists\, c_1\subset C_1\quad x\in c_1\subset X_1$，$\exists\, c_2\subset C_2\quad y\in c_2\subset X_2$

$\Rightarrow\quad x\times y\in c_1\times c_2\subset X_1\times X_2$. 故 $C_1\times C_2$ 是 $X_1\times X_2$ 的拓扑基.

若 C_1, C_2 是 X_1, X_2 的拓扑子基，则

$$\mathcal{T}_{C_1}=\mathcal{T}_{X_1}\qquad \mathcal{T}_{C_2}=\mathcal{T}_{X_2}\quad (X_1, X_2\text{ 上的原有拓扑})$$

于是 $\mathcal{T}_{C_1\times C_2}=\mathcal{T}_{\mathcal{T}_{C_1}\times\mathcal{T}_{C_2}}=\mathcal{T}_{\mathcal{T}_{X_1}\times\mathcal{T}_{X_2}}=\mathcal{T}_{X_1\times X_2}$ 最后等号是乘积拓扑的定义.

而显然由 $\bigcup C_1=X_1\quad \bigcup C_2=X_2$

知 $\bigcup C_1\times C_2=X_1\times X_2$

故 $C_1\times C_2$ 是 $X_1\times X_2$ 的拓扑子基.

5. 充要条件是 $\mathcal{T}_1|_{X_1\cap X_2}=\mathcal{T}_2|_{X_1\cap X_2}$

首先，若存在 X 上的拓扑满足 $\mathcal{T}_{X_i}=\mathcal{T}_i$，$i=1,2$，则

$$\mathcal{T}_1|_{X_1\cap X_2}=\mathcal{T}|_{X_1\cap X_2}=\mathcal{T}_2|_{X_1\cap X_2}$$

反过来，令 $\mathcal{T}=\{U\subset X \mid U\cap X_1\in\mathcal{T}_1,\ U\cap X_2\in\mathcal{T}_2\}$

则 $\mathcal{T}$ 是拓扑： 易知 $\phi, X\in\mathcal{T}$.

若 $U_\alpha\in\mathcal{T}$，则由 $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha\right)\cap X_i=\bigcup\limits_{\alpha\in J}(U_\alpha\cap X_i)$ 知 $\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha\in\mathcal{T}$.

若 $U、V\in\mathcal{T}$ 由 $(U\cap V)\cap X_i=(U\cap X_i)\cap(V\cap X_i)$ 知 $U\cap V\in\mathcal{T}$.

下证 $\mathcal{T}|_{X_1}=\mathcal{T}_1$，同理可证 $\mathcal{T}|_{X_2}=\mathcal{T}_2$.

任取 $U\in\mathcal{T}$，由定义 $U\cap X_1\in\mathcal{T}_1$.

反过来，任取 $W\in\mathcal{T}_1$，需证明存在 $U\in\mathcal{T}$ 满足 $U\cap X_1=W$.

由 $W\cap X_2\in\mathcal{T}_1|_{X_1\cap X_2}=\mathcal{T}_2|_{X_1\cap X_2}$

知存在 $V\in\mathcal{T}_2$ 使得 $W\cap X_2=V\cap(X_1\cap X_2)=V\cap X_1$

令 $U=W\cup V$，则 $U\cap X_1=W$，$U\cap X_2=V$

从而 $U\in\mathcal{T}$.