第二十八章　正规族

假设 $\mathcal{F}$ 是区域 Ω 上的一个连续函数族, 如果它的任意函数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 都有一个内闭一致收敛的子序列 $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$, 称 $\mathcal{F}$ 为正规族 (normal family).

例子: $\mathcal{F} = \big\{f_n(z) = z^n; n \geq 1\big\}$. 它是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的正规族 (可验证: 函数列内闭一致收敛于常值函数 $g \equiv 0$); 但若将 $\mathcal{F}$ 视为 $\mathbb{C}$ 上的函数族, 并不正规. 这说明函数族的正规性不仅依赖于函数本身, 也依赖于定义域.

此例引出一个自然问题: 如何判定函数族 $\mathcal{F}$ 的正规性？直观上, 正规函数族应满足某些性质. 这些性质, 事后来看, 有两个: 一是内闭一致有界, 一是 (内闭) 等度连续. 下面分别给出定义.

内闭一致有界: 如果存在常数 M, 使得对任意 $f \in \mathcal{F}$, 有 $\|f\|_\Omega \leq M$, 称 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上一致有界. 如果对任意紧集 $K \subset \Omega$, 存在与 K 有关的常数 M_K, 使得对任意 $f \in \mathcal{F}$, 有 $\|f\|_K \leq M_K$, 则称 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上内闭一致有界.

等度连续: 如果对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对任意 $z_1, z_2 \in \Omega$, 任意 $f \in \mathcal{F}$,

$$|z_1 - z_2| \leq \delta \Longrightarrow |f(z_1) - f(z_2)| \leq \epsilon,$$

称 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上等度连续 (equi-continuous). 等度连续可以理解为: $\mathcal{F}$ 中的所有函数具有同等程度的一致连续性. 称 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上内闭等度连续, 如果 $\mathcal{F}$ 在 Ω 的任意紧子集上等度连续.

- 内闭一致有界，但非一致有界的例子:

$$\Omega = \mathbb{D},\ \mathcal{F}_1 = \left\{f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ f_n(z) = \frac{z^n}{1 - z^n}\right\},$$

- 等度连续的例子：

$$\Omega = \mathbb{C},\ \mathcal{F}_2 = \{f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_n(z) = z + n\},$$

- 非内闭等度连续的例子：

$$\Omega = \mathbb{C},\ \mathcal{F}_3 = \{f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_n(z) = nz\}.$$

- 内闭等度连续, 但非等度连续的例子：

$$\Omega = \mathbb{D},\ \mathcal{F}_4 = \{f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ f_n(z) = z^n\}.$$

28.1 Arzela-Ascoli 定理

定理 28.1.(Arzela-Ascoli, 1890s) 假设函数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 在紧集 K 上一致有界与等度连续，则 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 有一致收敛的子序列.

证明： 首先说明 K 存在可数的稠密子集 $\{p_\nu\}_{\nu\geq 1}$, 即对任意 $z \in K$, 任意 $\epsilon > 0$, 总存在某 $p_k \in D(z, \epsilon)$. 可数稠密子集可如此构造: 对任意自然数 $k \geq 1$, $\{D(z, 1/k); z \in K\}$ 是 K 的一个开覆盖. 由 K 的紧性, 它有有限子覆盖 $\{D(z_{k1}, 1/k), \cdots, D(z_{kl_k}, 1/k)\}$. 可验证, 集合 $\bigcup_{k\geq 1}\{z_{k1}, \cdots, z_{kl_k}\}$ 是 K 的可数稠密子集.

下面将利用对角线法则选取 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 的一致收敛的子序列.

由于序列 $\{f_n(p_1)\}_n$ 有界, 它有收敛的子列 $\{f_{n_{1\nu}}(p_1)\}_\nu$. 函数列 $\{f_{n_{1\nu}}\}$ 在 p_1 收敛的同时, 在 p_2 处有界, 因此可选取在 p_2 处收敛的子序列 $\{f_{n_{2\nu}}\}_\nu$. 归纳的将同样的过程进行到第 j 次时, 得函数子序列 $\{f_{n_{j\nu}}\}_\nu$, 它在 $p_1, \cdots, p_j$ 处收敛, 在 p_{j+1} 处有界, 因此可选取 $\{f_{n_{j\nu}}\}_\nu$ 在 p_{j+1} 处收敛的子列 $\{f_{n_{j+1,\nu}}\}_\nu$. 如此继续, 得序列图表

$$\begin{array}{ccccc}
f_{n_{11}}(z), & f_{n_{12}}(z), & \cdots & f_{n_{1j}}(z), & \cdots \\
f_{n_{21}}(z), & f_{n_{22}}(z), & \cdots & f_{n_{2j}}(z), & \cdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\
f_{n_{j1}}(z), & f_{n_{j2}}(z), & \cdots & f_{n_{jj}}(z), & \cdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots
\end{array}$$

其中第 1 行序列在 p_1 处收敛, 第 2 行序列在 p_1, p_2 处收敛, 第 j 行序列是第 $j-1$ 行序列的子序列, 在 $p_1, \cdots, p_j$ 处收敛. 因此, 对角线序列 $\{f_{n_{jj}}\}_j$ 在稠密点列 $\{p_\nu\}_\nu$ 的每一点处都收敛.

以上子列的选取只用到 $\{f_n\}_n$ 的有界性. 下面将利用等度连续性证明函数列 $\{f_{n_{jj}}\}_j$ 在 K 上一致收敛.

由等度连续可知, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意 $z_1, z_2 \in K$, 任意 $f \in \{f_{n_{jj}}\}_j$, 只要 $|z_1 - z_2| \leq \delta$ 就有 $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \epsilon$.

对于给定的 ϵ,δ, 对任意 $p_\mu\in\{p_\nu\}_\nu$, 只要 $z\in D(p_\mu,\delta)$, 就有 $|f(z)-f(p_\mu)|\le\epsilon$. 因 $\{f_{n_{jj}}\}_j$ 在 p_μ 处收敛, 故有正数 $N(p_\mu)$, 使

$$|f_{n_{jj}}(p_\mu)-f_{n_{ii}}(p_\mu)|\le\epsilon,\ \forall n_{ii},n_{jj}\ge N(p_\mu).$$

于是, 对任意 $z\in D(p_\mu,\delta)$, 当 $n_{ii},n_{jj}\ge N(p_\mu)$ 时, 有

$$\begin{aligned}|f_{n_{jj}}(z)-f_{n_{ii}}(z)| &\le |f_{n_{jj}}(z)-f_{n_{jj}}(p_\mu)|+|f_{n_{jj}}(p_\mu)-f_{n_{ii}}(p_\mu)|\\ &+ |f_{n_{ii}}(z)-f_{n_{ii}}(p_\mu)|\\ &\le \epsilon+\epsilon+\epsilon=3\epsilon.\end{aligned}$$

由 $\{p_\nu\}_\nu$ 在 K 中的稠密性知, $\{D(p_\nu,\delta)\}_\nu$ 是 K 的一个开覆盖. 由 K 的紧性, 它有有限子覆盖 $\{D(p_1,\delta),\cdots,D(p_m,\delta)\}$. 令 $N=\max\{N(p_1),\cdots,N(p_m)\}$, 只要 $n_{ii},n_{jj}\ge N$, 就成立

$$\|f_{n_{jj}}-f_{n_{ii}}\|_K\le 3\epsilon.$$

这说明 $\{f_{n_{jj}}\}_j$ 在 K 上一致收敛. □

定理 28.2.(Arzela-Ascoli, 1890s) 假设 $\mathcal{F}=\{f_n\}_n$ 为区域 Ω 上的函数列. 如果 $\mathcal{F}$ 在 Ω 的任意紧集上一致有界与等度连续, 则 $\mathcal{F}$ 有内闭一致收敛的子序列.

证明: 取 Ω 的一列紧子集 $K_1\subset K_2\subset\cdots$, 满足 $K_j\subset K_{j+1}$, 且 $\bigcup K_j=\Omega$. 紧集可如是选取

$$K_j=\left\{z\in\Omega;d(z,\partial\Omega)\ge\frac{1}{j}\right\}\cap\overline{D(0,j)},\ j\ge1.$$

易验证, 紧集列 $\{K_j\}_j$ 满足上述性质.

由假设条件, $\mathcal{F}$ 在 K_j 上一致有界与等度连续. 利用紧集的 Arzela-Ascoli 定理28.1: $\{f_n\}_n$ 有子序列 $\{f_{1n}\}_n$ 在 K_1 上一致收敛, $\{f_{1n}\}_n$ 有子序列 $\{f_{2n}\}_n$ 在 K_2 上一致收敛, $\cdots$, $\{f_{j-1,n}\}_n$ 有子序列 $\{f_{jn}\}_n$ 在 K_j 上一致收敛.

取对角线序列 $\{f_{nn}\}_n$, 它在每个紧集 K_j 上一致收敛. 任给 Ω 的紧集 K, 注意到 $d(K,\partial\Omega)>0$[1]. 选取很大的自然数 j, 使得 $1/j<d(K,\partial\Omega)$ 且 $K\subset\overline{D(0,j)}$, 于是有 $K\subset K_j$. 由 $\{f_{nn}\}_n$ 在 K_j 上一致收敛知, $\{f_{nn}\}_n$ 在 K 上一致收敛. □

[1]此处用到结论: 如果 E 是紧集, F 是闭集, 且 $E\cap F=\emptyset$, 则 $d(E,F)>0$, 其中 $d(E,F)=\inf\{|z-w|;z\in E,w\in F\}$. 参见: 史济怀，刘太顺《复变函数》定理 1.5.6.

28.2 Montel 定理

定理 28.3.(Montel, 1907) 假设 $\mathcal{F}$ 为区域 Ω 上的全纯函数族, 则 $\mathcal{F}$ 是正规族的充要条件是 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上内闭一致有界.

证明: (充分性) 假设 $\mathcal{F}$ 内闭一致有界, 下证 $\mathcal{F}$ 是正规族. 由 Arzela-Ascoli 定理知, 只需证明 $\mathcal{F}$ 在 Ω 的任一紧集上等度连续.

假设 $K \subset \Omega$ 是紧子集, 取 $0 < r < d(K, \partial\Omega)$, 则

$$K_r = \left\{z \in \Omega; d(z, K) \leq r\right\}$$

是 Ω 中包含 K 的紧子集. 由 $\mathcal{F}$ 内闭一致有界的假设, 存在 $M > 0$, 对任意 $f \in \mathcal{F}$, 有 $\|f\|_{K_r} \leq M$.

对任意 $a \in K$, 有 $\overline{D(a, r)} \subset K_r$. 由 Cauchy 积分公式

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \ z \in D(a, r).$$

当 $z \in \overline{D(a, r/2)}$ 时,

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{(r/2)^2} 2\pi r = \frac{4M}{r}.$$

当 $z_1, z_2 \in K$ 且 $|z_1 - z_2| \leq r/2$ 时, $[z_1, z_2] \in \overline{D(z_1, r/2)}$, 于是有

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{[z_1, z_2]} |f'(\zeta)||d\zeta| \leq \frac{4M}{r} |z_1 - z_2|.$$

这说明 $\mathcal{F}$ 在 K 上等度连续.

(必要性) 假设 $\mathcal{F}$ 正规. 如果 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上非内闭一致有界, 则存在紧集 $K \subset \Omega$, 函数列 $\{f_n\}_n \subset \mathcal{F}$, 满足 $\|f_n\|_K \to \infty$. 于是存在点列 $\{z_n\}_n \subset K$ 使得 $|f_n(z_n)| \to +\infty$. 通过取 $\{z_n\}_n$ 之子列, 不妨假设 $z_n \to a \in K$. 因 $\mathcal{F}$ 正规, 通过取 $\{f_n\}_n$ 之子列, 不妨假设 f_n 在 Ω 上内闭一致收敛于全纯函数 g. 选取 $r > 0$ 使 $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$. 则 f_n 在 $\overline{D(a, r)}$ 上一致收敛于 g. 由 g 在 $\overline{D(a, r)}$ 上的有界性可得, 存在常数 $C > 0$ 使

$$\|f_n\|_{\overline{D(a, r)}} \leq C, \ \forall n \geq 1.$$

特别地, 当 n 足够大时, $z_n \in \overline{D(a, r)}$, 因此 $|f_n(z_n)| \leq C$. 这矛盾于 $|f_n(z_n)| \to +\infty$.

28.3 压缩映射与不动点

本节利用 Montel 定理讨论一个有趣问题: 压缩映射不动点的存在性.

命题 28.1.(Ritt, 1920-21) 假设 Ω 是平面区域, f 在 Ω 上全纯, $\overline{f(\Omega)}$ 是 Ω 的紧子集, 则

1. f 在 Ω 中有且只有一个不动点 a.
2. 迭代序列 $\{f^n\}_n$[a]在 Ω 上一致收敛于常值函数 $g \equiv a$.

[a] $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$ 为 f 的 n 次复合.

证明: 不妨假设 f 非常值, 否则结论总成立. 记 $\Omega_0 = \Omega$. 对 $n \geq 1$, 记 $\Omega_n = f^n(\Omega)$. 由 f 的开映射性质及 Ω_1 的有界性知, Ω_n 为有界开集. 由 $\Omega_1 \subset \Omega_0$ 知, 对任意 $n \geq 1$, 成立 $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$. 下用归纳法证明更强的包含关系

$$\overline{\Omega_{n+1}} \subset \Omega_n, \ \forall n \geq 0. \tag{28.1}$$

显然 $\overline{\Omega_1} = \overline{f(\Omega)} \subset \Omega$. 现假设 $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n-1}$. 下证 $\overline{\Omega_{n+1}} \subset \Omega_n$. 若不然, 则 $\partial\Omega_{n+1} \cap \partial\Omega_n \neq \emptyset$. 取 $\zeta \in \partial\Omega_{n+1} \cap \partial\Omega_n$, 则有点列 $\{z_k\} \subset \Omega_n$, 满足 $f(z_k) \to \zeta$. 通过选 $\{z_k\}$ 的子列, 不妨假设 $z_k \to q \in \overline{\Omega_n}$. 由 f 的连续性知 $f(q) = \zeta$.

由归纳假设 $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n-1}$ 可知, q 为 Ω_{n-1} 的内点, 因此 $\zeta = f(q) \in f(\Omega_{n-1}) = \Omega_n$. 这与 $\zeta \in \partial\Omega_n$ 矛盾. (28.1)式得证.

定义 $K = \bigcap_{n\geq 1} \Omega_n$. 由 (28.1) 式, $\overline{\Omega_{n+1}} \subset \Omega_n \subset \overline{\Omega_n}$, 因此

$$\bigcap_{n\geq 2} \overline{\Omega_n} \subset K \subset \bigcap_{n\geq 1} \overline{\Omega_n}.$$

因 $\{\overline{\Omega_n}\}$ 为递减紧集序列, 故上式两端表示同一集合. 因此 $K = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\Omega_n}$, 这说明 K 为紧集.

显然 $\{f^n\}$ 一致有界, 由 Montel 定理知其为正规族. 任取内闭一致收敛的子列 $\{f^{n_k}\}$, 记极限为 g.

先说明 $g(\Omega) \subset K$. 任取 $z \in \Omega$, 有 $g(z) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(z)$. 对任意 $l \geq 1$, 由(28.1)式可知, 当 $k \geq l$ 时, $f^{n_k}(z) \in \overline{\Omega_{n_l}}$. 因此 $g(z) \in \overline{\Omega_{n_l}}$. 这说明 $g(z) \in \bigcap_l \overline{\Omega_{n_l}} = K$. 这就证明了 $g(\Omega) \subset K$.

再说明 $K \subset g(\Omega)$. 任取 $w \in K$, 由 $w \in \Omega_{n+1} = f^n(\Omega_1), \forall n \geq 1$ 可知, 存在 $w_n \in \Omega_1$ 使 $f^n(w_n) = w$. 考虑点列 $\{w_{n_k}\}$, 通过选取子列, 不妨假设 $w_{n_k} \to b \in \overline{\Omega_1}$. 由内闭一致收敛的全纯函数列

的等度连续性[2], 存在常数 $C>0$, 满足

$$|w-f^{n_k}(b)|=|f^{n_k}(w_{n_k})-f^{n_k}(b)|\le C|w_{n_k}-b|,\ \forall k\ge 1.$$

在上式中令 $k\to\infty$, 并注意到 $f^{n_k}(b)\to g(b)$, $w_{n_k}\to b$, 可得 $w=g(b)\in g(\Omega)$. 由 $w\in K$ 的任意性得 $K\subset g(\Omega)$.

综上可知 $K=g(\Omega)$, 这说明 $g(\Omega)$ 为 Ω 的紧子集. 由开映射定理知, K 为单点集 $\{a\}$, g 为常值映射 $g\equiv a$.

以上证明也蕴含 $\{f^n\}$ 的任意内闭一致收敛的子列极限都是常值映射 $g\equiv a$. 再由 $\{f^n\}$ 的正规性知, 它在 Ω 上内闭一致收敛[3]. 因 $\overline{\Omega_1}=\overline{f(\Omega)}\subset\Omega$, 故 $\{f^n\}$ 在 Ω 上一致收敛.

28.4 习题

设 f 是 $d\ge 2$ 次首一多项式, 研究其迭代序列生成的函数族

$$\mathcal{F}=\Big\{f^n:=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次复合}},n\ge 1\Big\}$$

的正规性是一个有趣的问题. 由习题 5 知, $\mathcal{F}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上不正规. 但如果限制在 $\mathbb{C}$ 的一些开子集上可能正规.

如果 $\mathcal{F}$ 作为点 $z\in\mathbb{C}$ 的某个邻域 U_z 上的函数族是正规族, 称 z 是一个正规点. 定义集合

$$F(f)=\Big\{z\in\mathbb{C}:z\ \text{为正规点}\Big\}\bigcup\Big\{z\in\mathbb{C};f^n(z)\to\infty\text{当}n\to+\infty\Big\}.$$

$F(f)$ 称为 f 的 Fatou 集, 其余集 $J(f)=\mathbb{C}\setminus F(f)$ 称为 f 的 Julia 集. Julia 集是复平面的一个紧集, 通常呈现复杂的分形结构.

---

[2]因 $f_k=f^{n_k}$ 在区域 Ω 上内闭一致收敛于 g, 由 Weierstrass 定理, f_k' 在 Ω 上内闭一致收敛于 g'.

选取 $r>0$ 使 $\overline{D(b,r)}\subset\Omega$. 因 f_k' 在 $\overline{D(b,r)}$ 上一致收敛于 g', 存在 $C>0$ 使

$$|f_k'(z)|\le C,\ \forall z\in\overline{D(b,r)},\ \forall k\ge 1.$$

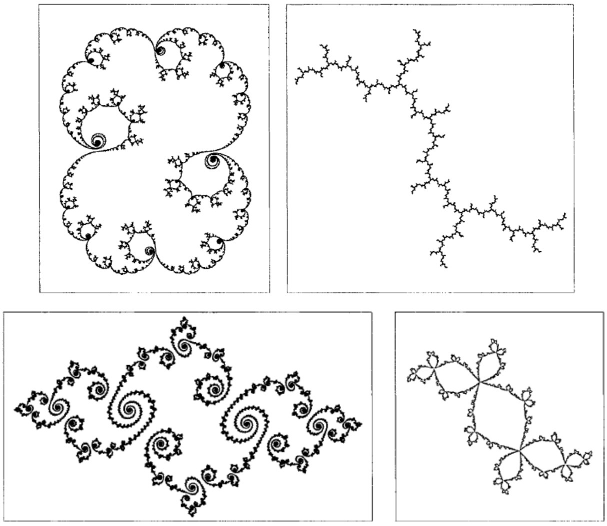
于是, 对任意 $z\in\overline{D(b,r)}$, 有 $[b,z]\in\overline{D(b,r)}$ 且

$$|f_k(z)-f_k(b)|=\left|\int_{[b,z]}f_k'(\zeta)d\zeta\right|\le C|z-b|,\ \forall k\ge 1.\tag{28.2}$$

特别地, 当 k 足够大时, $w_{n_k}\in\overline{D(b,r)}$, 代入(28.2)式得

$$|f_k(w_{n_k})-f_k(b)|\le C|w_{n_k}-b|,\ \forall k\ge 1.$$

[3]如果函数列正规, 且任意内闭一致收敛子列的极限都相同, 则函数列本身内闭一致收敛. 请读者自证.



上图为二次多项式的 Julia 集 $J(f)$, 其中左上: $f(z)=z^2+(0.99+0.14i)z$, $J(f)$ 为简单闭曲线; 右上: $f(z)=z^2+i$, $J(f)$ 为树突 (dendrite); 左下: $f(z)=z^2-0.765+0.12i$, $J(f)$ 为 Cantor 集 (完全不连通的紧集); 右下: $f(z)=z^2-0.122+0.745i$, $J(f)$ 像一只兔子 (Douady rabbit).

全纯函数的迭代理论由法国数学家 Pierre Fatou 与 Gaston Julia 于 1920 年左右创立, 后发展为独立的研究方向：复动力系统.

1. (等度连续性) 单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的函数族

$$\mathcal{F}=\{f_n(z)=z^n; n\geq 1\}$$

, 是否等度连续？是否内闭等度连续？说明理由.

2. (Arzela-Ascoli 定理：把值域视为复球面的子集) 假设 D 为平面上的区域, (Y,d_Y) 是一个度量空间, $C(D,Y)$ 是所有连续函数 $f:D\to Y$ 的全体. 回顾 Arzela-Ascoli 定理: 给定函数族 $\mathcal{F}\subseteq C(D,\mathbb{C})$, 如果 $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭一致有界与内闭等度连续, 则 $\mathcal{F}$ 是 D 上的正规族. 注意此时 $Y=\mathbb{C}$, d_Y 为欧氏度量.

现将 $\mathcal{F}$ 视为 $C(D,\widehat{\mathbb{C}})$ 的子函数族 (此时 $Y=\widehat{\mathbb{C}}$, d_Y 为球面度量), 给出 $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭等度连续, 函数列内闭一致收敛的定义, 证明此时如果 $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭等度连续, 则 $\mathcal{F}$ 是正规族.

(此题说明, 同样的函数族, 值域放在不同的目标空间中看, 正规性的要求可以不同. 证明类似经典的 Arzela-Ascoli 定理的证明, 需要换一下度量)

3. (正规性的微妙差异) 接上题，考虑函数族

$$\mathcal{F}=\{f_n(z)=z+n; n\geq 1\}.$$

(a). 视 $\mathcal{F}$ 为 $C(\mathbb{C},\mathbb{C})$ 的子函数族, 证明 $\mathcal{F}$ 不是正规族.

(b). 视 $\mathcal{F}$ 为 $C(\mathbb{C},\widehat{\mathbb{C}})$ 的子函数族, 证明 $\mathcal{F}$ 是正规族.

(此题说明, 同样的函数族, 取值从不同的目标空间中看, 正规性可以不同)

4. (正规性的判别) 给定平面区域 Ω 以及右半平面 $\mathbb{H}_R=\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Re}(z)>0\}$, 取定 $z_0\in\Omega$, 定义函数族

$$\mathcal{F}=\Big\{f:\Omega\to\mathbb{H}_R \text{ 全纯}\Big\},\ \mathcal{F}_1=\Big\{f\in\mathcal{F}; f(z_0)=1\Big\}.$$

研究 $\mathcal{F},\mathcal{F}_1$ 的正规性, 说明理由或给出证明.

5. (迭代函数列的正规性) 假设 p 是 $d\geq 1$ 次多项式, 考虑函数迭代序列生成的函数族

$$\mathcal{F}=\Big\{f_n=\underbrace{p\circ\cdots\circ p}_{n\text{次复合}}, n\geq 1\Big\}.$$

(1). 如果 $d=1$, 给出 $\mathcal{F}$ 在复平面上正规的充要条件.

(2). 如果 $d\geq 2$, 证明 $\mathcal{F}$ 不是复平面上的正规族.

6. (Montel 定理的应用) 下面函数族是正规族吗？给出证明.

$$\mathcal{F}=\Big\{f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}\text{全纯}, f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n, |a_n|\leq n, \forall n\geq 1\Big\}.$$

7. (Vitali-Porter 定理 1903/1904) 假设区域 Ω 上的全纯函数列 $\mathcal{F}=\{f_n\}_{n\geq 1}$ 内闭一致有界. 如果存在点列 $\{z_j; j\geq 1\}$ 在 Ω 中有聚点, 并且对任意 j, 点列 $\{f_n(z_j)\}_{n\geq 1}$ 收敛, 则 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 内闭一致收敛到 Ω 上的全纯函数 f.