Guía 1

1. Sea el conjunto $X = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^T = A^{-1}\}$,
   (a) Determinar si X con la operación suma de matrices en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ define un grupo.
   (b) ¿Qué ocurre si reemplazamos la operación $+$ por el producto interno de matrices? ¿Podría definir un espacio vectorial con esta operación?

2. Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y S el conjunto de matrices 2×2 de traza nula. Probar que $S \subseteq V$ es un subespacio.

3. Mostrar que la unión de subespacios no genera un subespacio.

4. (i) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$?
   (a) $A = \{(\lambda^2, -\lambda^2, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (b) $B = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 | \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{Z}$ es el conjunto de número enteros, positivos y negativos, y el cero)
   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = z, x - y = \frac{1}{2}z\}$

   (ii) En caso de ser subespacio, hallar la base y dimensión del mismo.

5. Mostrar que $\langle x, y\rangle := x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2$ define un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

6. Mostrar que $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ define un producto interno en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, los polinomios de grado dos con coeficientes reales.

7. Sea $\mathbb{R}^n$ con cuerpo en $\mathbb{R}$. Mostrar que para cada $p \in \mathbb{N}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

   $\|x\|_p$ define una norma en $\mathbb{R}^n$.

8. Mostrar que

$$\langle A, B\rangle = Tr(A^H B)$$

   define un producto interno en $(C)^{n\times m}$. A este p.i. se lo conoce como producto interno de Frobenius. (La operación A^H representa A transpuesta y conjugada).