Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

9/9/2022

Colab

El mundo del Data Science y las competencias de Machine Learning cobraron mucha relevancia con la competencia de Netflix, que prometía **1M USD** a quien pudiera obtener una performance de un 10% por sobre su algoritmo de base para el problema de recomendación de películas.

En este contexto surgió una nueva variante de modelo en base a factorización de matrices.

¿Lo interesante? Con las dos clases de AM ya nos alcanza para entenderlo!

$$v^* = \left(\sum_{i \in \varphi_j} u_i^T u_i + \lambda I_k\right)^{-1} \left(\sum_{i \in \varphi_j} u_i^T r_{ij}\right)$$

Llamo $A = \underbrace{\sum_{i \in \varphi_j} u_i^T u_i}_{} + \underbrace{\lambda I_k}_{\text{es simétrica}}$ ¿es simétrica?

$\begin{pmatrix} u_1^2 & u_2 u_1 & \\ u_1 u_2 & \ddots & \\ & & u_n^2 \end{pmatrix}$ simétrica.

Recordar

B es simétrica

$B = B^T$

$B = C + D$

$B^T = (C + D)^T =$

$= C^T + D^T$

¿Por qué funciona la inversa? (1/2)

A es def. positiva si es simétrica y $x^T A x > 0$, $\forall x \neq \vec{0}$

Demostremos que:

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, entonces es invertible:
Dem.: (por método del absurdo)

Supongamos que el determinante de A es cero, y llegaremos a una solución absurda.

Si $det(A) = 0$ y queremos resolver un sistema $Ax = 0$ significa que además de la solución trivial hay infinitas soluciones, es decir $rango(A) < n$, entonces

$$\exists \tilde{x} \neq 0 : A\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x}^T A \tilde{x} = \tilde{x}^T 0 = 0$$

y entonces no se cumple que $\tilde{x}^T A \tilde{x} > 0$.

Demostremos que:

$A = x \cdot x^T + \lambda I_k$ **es definida positiva**, es decir, $y^T A y > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^k - \{0\}$

ya vimos que es simétrica

Dem.: Sea $y \in \mathbb{R}^k - \{0\}$

escalar

$$y^T(\underbrace{x \cdot x^T + \lambda I_k}_{A})y = y^T x x^T y + y^T \lambda I_k y$$

(recordemos que el p.i. es $< u, v >= u^T v$), prop. asociativa,

> 0 por el modelo (penalización)

$$< y, x >< x, y > + \lambda < y, y > = \underbrace{< x, y >^2}_{\geq 0} + \lambda \underbrace{||y||^2}_{> 0} > 0.$$

prop conmut

$\therefore x \cdot x^T + \lambda I_k$ es definida positiva.

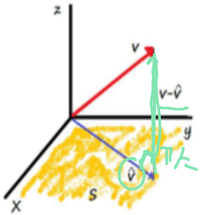
Proyección Ortogonal

Proyección

Sea $\mathbb{V}$ un EV y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV. Una transformación lineal $\Pi : \mathbb{V} \to S$ es una proyección si $\Pi^2 = \Pi \circ \Pi = \Pi$ idempotencia
Esto significa que la matriz de transformación asociada a la proyección cumple con la propiedad de idempotencia: $[\Pi]^2 = [\Pi]$.

Proyección Ortogonal

Dado $\mathbb{V}$ un EV con p.i. y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV, el objetivo es dado $v \in \mathbb{V}$ hallar $\tilde{v} \in S$ que sea "lo más parecido posible" a v.



$$\tilde{v} \in S : \tilde{v} = arg\ min_{s \in S} ||v - s||$$

Además vale que $\langle v - \tilde{v}, s \rangle = 0, \ \forall s \in S$

Obs: La ortogonalidad de la proyección tiene que ver con el p.i. que se use.

Teorema de proyección

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita con p.i. $\langle .,. \rangle$, S un SEV. Dado $v \in \mathbb{V}$ existe un único $\tilde{v} \in S$ tal que

$$||v - \tilde{v}|| \leq ||v - u||, \quad \forall u \in \mathbb{V}$$

¿Cómo hallar la proyección?

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión n con p.i. $\langle .,. \rangle$, y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV, $dim(S) = m \geq 1$, y sea $B = \{s_1, ..., s_m\}$ una BON de S. Buscamos encontrar la proyección de $\tilde{v} \in S$ de $v \in \mathbb{V}$ ($\tilde{v} = \Pi_S(v)$).

Como $\tilde{v} \in S$, $\tilde{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i \Rightarrow$ busco los coeficientes que minimizan $||v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i||$. El problema puede escribirse como:

matriz

$$\Pi_S(v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i = B\alpha, \quad B = [s_1, ..., s_m], \; \alpha = [\alpha_1, ..., \alpha_m]^T$$

vector s_1

¿Cómo hallar la proyección?

Como por definición $\langle v - \Pi_S(v), s\rangle = 0$, $\forall s \in S$, debo resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c}\langle v - \Pi_S(v), s_1\rangle = 0\\ \vdots\\ \langle v - \Pi_S(v), s_m\rangle = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} s_1^T(v - \overbrace{B\alpha}^{\Pi_S(v)}) = 0\\ \vdots\\ s_m^T(v - B\alpha) = 0\end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}-s_1^T-\\ \vdots\\ -s_m^T-\end{pmatrix} (v - B\alpha) = 0}_{\text{Forma Matricial}}$$

Lo que quiero encontrar

$$B^T(v - B\alpha) = 0 \Leftrightarrow B^Tv = B^TB\alpha \Leftrightarrow \alpha = (B^TB)^{-1}B^Tv$$

$\det(B) \neq 0$
$\Rightarrow \exists (B^TB)^{-1}$

$$P_{\Pi_S} = B\underbrace{(B^TB)^{-1}B^T}_{\alpha}$$

Observación: Si B es una BON entonces $P_{\Pi_S} = BB^T$.

Aplicación: Cuadrados Mínimos

Supongamos que tenemos un sistema sobredeterminado de la forma:

$$\overset{m\times n}{A}\,\overset{n\times 1}{b} = \overset{m\times 1}{y}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad y \in \mathbb{R}^{m}, \quad m > n.$$

b es la solución de cuadrados mínimos

Como $m > n$, puede que no exista b que satisfaga todas las m ecuaciones, entonces busco la solución que más se acerque (busco $Proy_{Col(A)}y$)

$$b = (A^T A)^{-1} A^T y \;\Rightarrow\; P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

dim C(A)

espacio columna

Colab

Ya vimos que el ajuste por cuadrados mínimos funciona en la teoría, ahora veámoslo funcionar en la práctica!