Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

17/03/2023

Colab

El mundo del Data Science y las competencias de Machine Learning cobraron mucha relevancia con la competencia de Netflix, que prometía **1M USD** a quien pudiera obtener una performance de un 10% por sobre su algoritmo de base para el problema de recomendación de películas.

En este contexto surgió una nueva variante de modelo en base a factorización de matrices.

¿Lo interesante? Con las dos clases de AM ya nos alcanza para entenderlo!

$$\underbrace{u}_{x^t} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j \in G} v_j v_j^t + \lambda I_k\right)}_{A} = \underbrace{\sum_{j \in G} r_{ij} v_j^t}_{b}$$

¿es def positiva?

Demostremos que:

A simétrica $A = A^T$ y $x \neq 0$ $x^T A x > 0$

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, entonces es invertible:

Dem.: (por método del absurdo) Sup que A no es invertible,

Supongamos que el determinante de A es cero, y llegaremos a una solución absurda.

en un sist. homogé-neo el 0 es solución

Si $det(A) = 0$ y queremos resolver un sistema $Ax = 0$ significa que además de la solución trivial hay infinitas soluciones, es decir $rango(A) < n$, entonces

es sol.

$$\exists \tilde{x} \neq 0 : A\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x}^T A\tilde{x} = \tilde{x}^T 0 = 0$$

$n \times n$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} rg < 3$$

y entonces no se cumple que $\tilde{x}^T A\tilde{x} > 0$.

¿Por qué funciona la inversa? (2/2)

Demostremos que:

$A = x \cdot x^T + \lambda I_k$ **es definida positiva**, es decir, $y^T A y > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^k - \{0\}$

Dem.: Sea $y \in \mathbb{R}^k - \{0\}$

1xk kxk kx1

$$y^T \overbrace{(x \cdot x^T + \lambda I_k)}^{A} y = y^T x x^T y + y^T \lambda I_k y$$

$y^T I_k y = y^T y$

$\| \ \langle y, y \rangle$

(recordemos que el p.i. es $< u, v >= u^T v$), prop. asociativa,

$\langle y, y \rangle = \|y\|^2$ (def de norma)

$$\overbrace{< y, x >< x, y >}^{y^T x \quad x^T y} + \lambda < y, y >=< x, y >^2 + \lambda ||y||^2 > 0.$$

$\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ (en $\mathbb{R}$)

$\therefore x \cdot x^T + \lambda I_k$ es definida positiva.

$\lambda > 0$ parámetro