Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

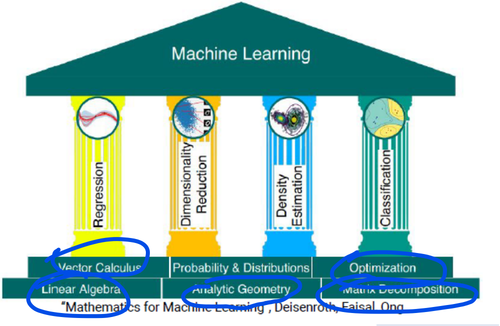
28/4/2023

Presentación de la Materia

¿Por qué estudiar Análisis Matemático?

A medida que Machine Learning se vuelve más común, y los paquetes de software se vuelven más simples de usar, uno se abstrae cada vez más de los detalles técnicos que hay detrás. **Modelo de caja negra.**

Esto trae el **peligro** de desconocer las decisiones de diseño y las limitaciones de cada algoritmo.



Bibliografía Recomendada: **Mathematics for Machine Learning**
Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong.
Published by Cambridge University Press (2020).
Está disponible gratis en `http://mml-book.github.io/`

Motivación (I)

Operaciones vectorizadas y GPUs: Early colab!

Motivación (II)

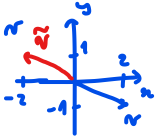
- Regresión logística asume superposición entre clases
- K-Means asume clusters esféricos
- Árboles de decisión tienen fronteras de decisión en forma de hiperplanos
- ¿Por qué las Redes Neuronales se entrenan más rápido usando GPUs?
- ¿Por qué en las redes neuronales importa la escala y en los árboles de decisión no?
- En kNN ¿Es lo mismo maximizar producto interno que minimizar distancia euclidea?

Empecemos considerando los vectores $\underbrace{u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})}_{\mathbb{R}^3}$ y $\underbrace{v = (2, -1)}_{\mathbb{R}^2}$, ¿podemos sumar los vectores?

$u + v' = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) + (2, -1, 0) =$

$u + v'' = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) + (0, 2, -1) =$

? $\times$ $\underbrace{u' = (1, \frac{1}{2})}_{\mathbb{R}^2}$ $\exists\ u' + v$



¿qué ocurre si tomamos $\tilde{v} = (-2, 1)$?

$\tilde{v} = \underbrace{(-1)}_{\mathbb{R}} \cdot \underbrace{(2, -1)}_{\mathbb{R}^2} = (-1) \cdot v$

escalar

puedo sumar $\tilde{v}$ $\Leftrightarrow$ puedo sumar v

prod. x escalar en conjunto $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$

$\therefore$ Para definir correctamente $u + v$ deben estar en el mismo conjunto, y es posible cambiar el sentido y tamaño del vector. Es decir, que si el espacio vectorial es $\mathbb{R}^n$ podemos realizar estas operaciones:

1. $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \to x + y \in \mathbb{R}^n$
2. $x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \to kx \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{V} \quad \mathbb{V} \quad \mathbb{V}$

Sea $\mathbb{V} \neq \emptyset$, se define una operación (o suma) a una función $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. $+(x, y) = z$

Esta operación se espera que cumpla con las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{V}$.
2. Elemento Neutro: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists e \in \mathbb{V}$ tal que $x + e = e + x = x$.
3. Opuesto: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists \tilde{x} \in \mathbb{V}$ tal que $x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e$.
4. Conmutativa: $\forall x, y \in \mathbb{V}, x + y = y + x$.

Sean $\mathbb{V} \neq \emptyset, \mathbb{K} \neq \emptyset$, se define una operación (o producto escalar) a una función $\bullet : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. Este conjunto $\mathbb{K}$ es generalmente $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ es un cuerpo de escalares.

Comentario*: Un cuerpo es un conjunto con algunas operaciones sobre los elementos de éste, que se comportan como la adición, sustracción, multiplicación y división que cumplen con las propiedades que conocemos. Para no especificar el cuerpo se usa la palabra* ***escalar****.*

¿Estudiar espacios vectoriales sólo sirve para vectores?

$(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ $(2,-1,0)$

Sean $p(x) : 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$ y $q(x) : 2 - x$, ¿valen 1 y 2?

1. $p(x) + q(x) = (p+q)(x) = (1+2) + (\frac{1}{2}-1)x + (\frac{3}{4}+0)x^2 = 3 + (-\frac{1}{2})x + \frac{3}{4}x^2$

   $(3, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \in \mathcal{P}_2[x]$

2. $k \cdot p(x) = (kp)(x) = k + \frac{k}{2}x + \frac{3}{4}k\,x^2$ $\quad k(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \in \mathcal{P}_2[x]$

Hay una biyección e/ $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_2$

Repasemos el producto de polinomios: $p(x) \cdot q(x) =$

$(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x^2)(2-x) = 2 - x + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$!!

Prod. e/elementos NO es cerrado

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ¿valen 1 y 2?

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \checkmark$$

$$A \cdot B = (\longrightarrow)(\downarrow) \cdots \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

es cerrado ! ✓

$$kA = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k\cdot a_{n1} & \cdots & k\cdot a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \checkmark$$

Definición de **Espacio Vectorial**

Diremos que $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ es un espacio vectorial si $\mathbb{K}$ y $\mathbb{V}$ son conjuntos no vacíos y la operación $+$ en $\mathbb{V}$, y la acción $\bullet$ de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{V}$ cumplen:

1. $+$ es asociativa
2. $+$ tiene elemento neutro
3. $+$ tiene elemento inverso
4. $+$ es conmutativa
5. $\alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in \mathbb{V}$
6. $(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$
7. $\bullet$ tiene elemento neutro: $1 \bullet v = v, \forall v \in \mathbb{V}$
8. $\bullet$ es asociativa:

$$\alpha \bullet (\beta \bullet v) = (\alpha\beta) \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$$

Subespacios Vectoriales: definición

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ se dice que es un subespacio de $\mathbb{V}$ si la suma y el producto por escalares de $\mathbb{V}$ son una operación y una acción en S que lo convierten en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

S es un subespacio en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial sii:

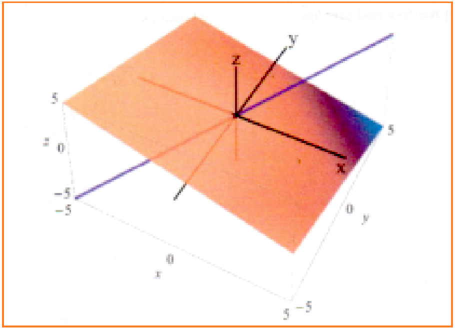
1. $S \neq \emptyset \quad (0 \in S)$
2. $v, w \in S \to v + w \in S$
3. $\alpha \in \mathbb{K}, v \in S \to \alpha \bullet v \in S$

Subespacios triviales

- $\{0\} \subseteq \mathbb{V}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$

Ejemplos de subespacios propios

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \bullet)$, sea $S = \{\alpha \bullet (a, b, c), \alpha \in \mathbb{R}\}$, ¿es un subespacio vectorial?



Algunos ejemplos más ...

Sean S, T subespacios de $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$. Probar si también los son:

1. $S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \wedge v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
2. $S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
3. $S \cup T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \vee v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.

Demostremos 2 y 3

$S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$

Sistemas generadores

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G = \{v_1, ..., v_r\} \subseteq \mathbb{V}$. Una combinación lineal de G es un elemento $v \in \mathbb{V}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \bullet v_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, ..., r$.

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G \subseteq \mathbb{V}$. Se dice que G es un sistema de generadores de $\mathcal{V}$ si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de G.
Notación: $\langle G \rangle = \mathbb{V}$.

Ejemplo

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$, ¿podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores de G?

Independencia Lineal

Dentro de los conjuntos generadores, nos interesan aquellos que son mínimos (menor cantidad de elementos).

Sea $S \subseteq \mathcal{V}$ un subespacio vectorial, y sea:

- $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n \rangle \subseteq S$ sii $v_i \in S, \ \forall 1 \leq i \leq n$.
- $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n, v_{n+1} \rangle = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ sii $v_{n+1} \in \langle v_1, ..., v_n, \rangle$

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores en $\mathbb{V}$; se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es linealmente independiente (l.i.) sii

$$\sum_{\alpha \in I} k_\alpha \bullet v_\alpha = 0 \rightarrow k_\alpha = 0, \ \forall \alpha \in I$$

Observar:

- $\{0\}$ es linealmente dependiente (l.d.)
- si $v \neq 0$, $\{v\}$ es l.i.
- si $v_1 \propto v_2$ (colineales), $\{v_1, v_2\}$ es l.d.
- si v_1, v_2 no nulos, ni proporcionales, $\{v_1, v_2\}$ es l.i.

Bases y dimensión

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, un conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se llama base de $\mathcal{V}$ si $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ que satisface $\langle v_\alpha\rangle_{\alpha\in I} = \mathbb{V}$.

Definición: Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Diremos que n es la dimensión de $\mathcal{V}$, donde $n < \infty$.
Comentario: Tener en cuenta que existen espacios vectoriales con dimensión infinita.

Variedad lineal

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, M es una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{V}$ es un conjunto de la forma $M = \{s + v, \ \textit{donde} \ s \in S\}$, siendo S subespacio de $\mathcal{V}$, y $v \in \mathbb{V}$.