

Guía 2

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
 - (a) Demostrar que A es definida positiva.
 - (b) Sea $V = R^{2 \times 1}$, con el producto interno $\langle X, Y \rangle = Y^T A X$. Hallar una base ortonormal de V aplicando el proceso de Gram-Schmidt a la base canónica de R^2 .
2. Se llama transformación afín a una transformación lineal seguida de un desplazamiento, es decir $y = Ax + b$ para un $x \in R^n, y \in R^m$. Demostrar que una composición de dos transformaciones afines (e.g., la aplicación de una después de la otra) puede reducirse a una sola. *Obs.:* Esto explica la necesidad de una función no lineal a la salida de todas las capas (salvo la última) en una red neuronal.
3. Supongamos que el precio de casas en Boston se obtiene a partir del siguiente modelo:

$$p = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4,$$

donde p es el precio de la casa, x_1 es la cantidad de metros cuadrados, x_2 la cantidad de baños completos, x_3 la cantidad de medios baños y x_4 cantidad de habitaciones. Usando las columnas 'LotArea', 'FullBath', 'HalfBath', 'BedroomAbvGr', 'SalePrice' de archivos `houseprices.csv` estimar los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ del modelo.

4. Calcular los autovalores y autovectores de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles de ellas son diagonalizables?

5. Leonardo Fibonacci fue el primer matemático en estudiar la serie de números 1,1,2,3,5,8,... La secuencia de Fibonacci se puede expresar de forma recursiva como $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, $f_0 = 1, f_1 = 1$.

- (a) Sea $x^{(k)} = [f_{k+1}, f_k]^T$. Escribir la relación de las variables de forma matricial, es decir

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad x^{(0)} = [1, 1]^T$$

- (b) Calcular los autovalores y autovectores de A . ¿Es A diagonalizable?
- (c) Hallar una fórmula explícita para el k -ésimo elemento de la serie.
Sugerencia: usar los resultados del ítem anterior.

6. Calcular la SVD de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$