Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

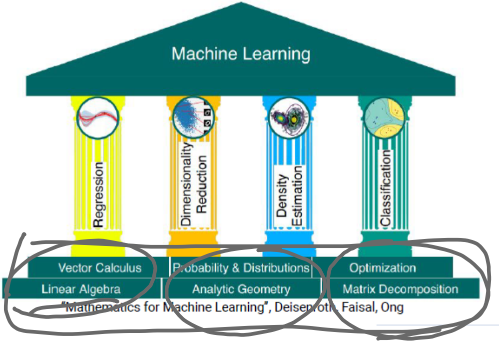
4/3/2022

Presentación de la Materia

¿Por qué estudiar Análisis Matemático?

A medida que Machine Learning se vuelve más común, y los paquetes de software se vuelven más simples de usar, uno se abstrae cada vez más de los detalles técnicos que hay detrás. **Modelo de caja negra.**

Esto trae el **peligro** de desconocer las decisiones de diseño y las limitaciones de cada algoritmo.



Bibliografía Recomendada: **Mathematics for Machine Learning**
Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong.
Published by Cambridge University Press (2020).
Está disponible gratis en `http://mml-book.github.io/`

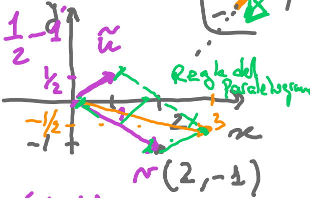
Clase 1: Espacios Vectoriales

Empecemos considerando los vectores $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ y $v = (2, -1)$, ¿podemos sumar los vectores?

¿$u + v$? $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) + (2, -1, ?) = (1+2, \frac{1}{2} - 1$

NO, necesito igual dimensión

$\tilde{u} = (1, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2 \ (= \mathbb{R} \times \mathbb{R})$



¿qué ocurre si tomamos $\tilde{v} = (-2, 1)$?

$\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{u} + (-1) \cdot v$

$-(-1) \cdot v = (-1)(2, -1) = (-2, 1)$

cambio el sentido

$3v = (6, -3)$

$\tilde{u} + v = (1, \frac{1}{2}) + (2, -1) =$
$= (1+2, \frac{1}{2} - 1) = (3, -\frac{1}{2})$

$\therefore$ Para definir correctamente $u + v$ deben estar en el mismo conjunto, y es posible cambiar el sentido y tamaño del vector. Es decir, que si el espacio vectorial es $\mathbb{R}^n$ podemos realizar estas operaciones:

1. $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow x + y \in \mathbb{R}^n$ es cerrado para la +
2. $x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \rightarrow kx \in \mathbb{R}^n$ es cerrado para el prod. por un escalar

¿Estudiar espacios vectoriales sólo sirve para vectores?

gr(p(x))

$+0x^2$ completo el polinomio

gr(q(x))

Sean $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$ y $q(x) = 2 - x$, ¿valen 1 y 2?

1. $p(x) + q(x) = (p+q)(x) =$ $3x^0 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$

$gr(p+q) \leq gr(p(x)) + gr(q(x))$
$= \max(gr(p), gr(q))$

$(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + (2, -1, 0)$

2. $k \cdot p(x) = (kp)(x) =$

$3p(x) = 3 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^2$

$P_2[x] \approx \mathbb{R}^3$ → biyección

→ polinomios de grado 2

Repasemos el producto de polinomios: $p(x) \cdot q(x) =$

$(1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^2)(2 - x) =$ → prop. distrib.

$2x^0 - \cancel{x} + \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 = (p \cdot q)(x)$ con $gr(p \cdot q) = 3$

Matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $k \in \mathbb{R}$

$A + B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $\quad kA \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$\mathbb{R}^{n \times m} \approx \mathbb{R}^{(n \times m)}$

Algunas definiciones...

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to [2\ 3\ 1\ 0\ -1\ 1]$

Sea $\mathbb{V} \neq \emptyset$, se define una operación (o suma) a una función $+ : \underbrace{\mathbb{V} \times \mathbb{V}}_{(u,\, v)} \to \underbrace{\mathbb{V}}_{u+v}$.

Esta operación se espera que cumpla con las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.
2. Elemento Neutro: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists e \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + e = e + x = x$.
3. Inverso
   Opuesto: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e$. $\tilde{x} = -x$
4. Conmutativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x + y = y + x$.

Ej $\mathbb{R}^3$ Ej $\mathbb{R}$

Sean $\mathbb{V} \neq \emptyset$, $\mathbb{K} \neq \emptyset$, se define una operación (o producto escalar) a una función $\bullet : \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{V}}_{(k,\, v)} \to \underbrace{\mathbb{V}}_{kv}$. Este conjunto $\mathbb{K}$ es generalmente $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ es un cuerpo de escalares.

Comentario: *Un cuerpo es un conjunto con algunas operaciones sobre los elementos de éste, que se comportan como la adición, sustracción, multiplicación y división que cumplen con las propiedades que conocemos. Para no especificar el cuerpo se usa la palabra* ***escalar***.

Definición de **Espacio Vectorial**

Diremos que $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ es un espacio vectorial si $\mathbb{K}$ y $\mathbb{V}$ son conjuntos no vacíos y la operación $+$ en $\mathbb{V}$, y la acción $\bullet$ de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{V}$ cumplen:

Grupo

1. $+$ es asociativa
2. $+$ tiene elemento neutro
3. $+$ tiene elemento inverso
4. $+$ es conmutativa

Grupo Conmutativo ($\mathbb{Z}$, enteros)

5. $\alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in \mathbb{V}$ Distributiva de $\mathbb{K}$ en la suma
6. $(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$ Distrib. de la suma de escalares en $\mathbb{V}$
7. $\bullet$ tiene elemento neutro: $1 \bullet v = v, \forall v \in \mathbb{V}$
8. $\bullet$ es conmutativa:

multiplico en $\mathbb{K}$

$$\alpha \bullet (\beta \bullet v) = (\alpha\beta) \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$$

$$\underbrace{2 \bullet (\underbrace{3 \bullet v})}_{\in \mathbb{V}} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 2 \cdot 3 \in \mathbb{K}}}{6} \bullet v$$

$$\bullet : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$

Subespacios Vectoriales: definición

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ se dice que es un subespacio de $\mathbb{V}$ si la suma y el producto por escalares de $\mathbb{V}$ son una operación y una acción en S que lo convierten en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

S es un subespacio en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial sii:

1. $S \neq \emptyset$ $(0 \in S)$.
2. $v, w \in S \to v + w \in S$ cerrado p/ la +
3. $\alpha \in \mathbb{K}, v \in S \to \alpha \bullet v \in S$ " p/ el •

$\alpha \in K, v, w \in S \to \alpha \cdot v + w \in S$

$u \in \mathbb{V}$ ¿existe el opuesto para la +? ¿$-u$?

u y $(-1) \in \mathbb{K}$

por ③ $(-1) \cdot u \in S$

$-u \in S$

y ahora $u + (-u) = \underline{0}$

Subespacios triviales

- $S = \{0\} \subseteq \mathbb{V}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$

Ejemplos de subespacios propios (no triviales)

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \bullet)$, sea
$S = \{\alpha \bullet (a, b, c), \alpha \in \mathbb{R}\}$,
¿es un subespacio vectorial?

$\cdot\ \alpha = 0 \quad S \neq \emptyset$

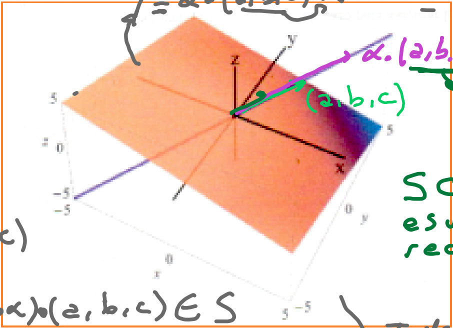
$\alpha \cdot (a,b,c) = (\alpha . a, \alpha b, \alpha c)$

$u = \alpha_1 (a,b,c) \quad v = \alpha_2 (a,b,c)$

$u + v \in S$? ✓

$\beta \in K \quad \beta \cdot (\alpha \cdot (a,b,c)) = (\beta\alpha) \cdot (a,b,c) \in S$

$T = \alpha \cdot (a,b,c)$. vector normal



$\alpha . (a,b,c)$ vector director

(a,b,c)

$S \subset \mathbb{R}^3$ es una recta

Todas las rectas y planos de $\mathbb{R}^3$ son subesp propios si pasan por el origen

Algunos ejemplos más ...

Sean S, T subespacios de $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$,

1. $S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \wedge v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$ también es un subespacio.
2. $S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$ también es un subespacio.
3. $S \cup T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \vee v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$ ¿también es un subespacio?

Demostremos 1

$S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \wedge v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$ Tarea

Demostremos 2

S+T=$\{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$ Tarea

Sistemas generadores

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G = \{v_1, ..., v_r\} \subseteq \mathbb{V}$. Una combinación lineal de G es un elemento $v \in \mathbb{V}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \bullet v_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, ..., r$.

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G \subseteq \mathbb{V}$. Se dice que G es un sistema de generadores de $\mathcal{V}$ si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de G.
Notación: $\langle G \rangle = \mathbb{V}$.

Demostremos que $\langle G\rangle$ es un subespacio de $\mathcal{V}$

Sea $G=\{v_1,\dots,v_r\}$, probemos:

1. $0\in\langle G\rangle$ $(\langle G\rangle\neq\emptyset)$ ya que $0\cdot v_1+\dots+0\cdot v_r=0\Rightarrow 0\in\langle G\rangle$

2. $u,v\in\langle G\rangle \overset{?}{\Rightarrow} u+v\in\langle G\rangle$

usando las propiedades

$$\left.\begin{array}{l} u\in\langle G\rangle,\ u=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_r v_r \\ v\in\langle G\rangle,\ v=\beta_1 v_1+\dots+\beta_r v_r \end{array}\right\}\Rightarrow u+v=\underbrace{(\alpha_1+\beta_1)}_{=\gamma_1\in K}\cdot v_1+\dots+\underbrace{(\alpha_r+\beta_r)}_{=\gamma_r}\cdot v_r$$

$\therefore\ u+v\in\langle G\rangle$

3. $u\in\langle G\rangle,\ \beta\in K \overset{?}{\Rightarrow}\beta\cdot u\in\langle G\rangle$

$$\beta\cdot u=\beta\cdot(\alpha_1\cdot v_1+\dots+\alpha_r\cdot v_r)\underset{\text{prop}}{=}\underbrace{(\beta\alpha_1)}_{\in K}\cdot v_1+\dots+\underbrace{(\beta\alpha_r)}_{\in K}\cdot v_r$$

$\therefore\ \langle G\rangle\leq V$ es un subespacio.

Ejemplo

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} \right\}$ dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$,

¿podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores de G?

Es decir, ¿$\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in K$? tales que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{v \in \langle G \rangle} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + 2\beta + 4\gamma\\ \alpha + \beta + 3\gamma \\ \alpha + 2\gamma\end{pmatrix}$$ resolvemos el

sistema $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = x & (1) \\ \alpha + \beta + 3\gamma = y & (2) \\ \alpha + 2\gamma = z \longrightarrow \alpha = z - 2\gamma \end{cases}$ reemplazamos en (2)

$\beta = y - 3\gamma - (z - 2\gamma) = y - z - \gamma$, reemplazando en (1)

así $\underbrace{x = 2y - z}_{\text{ec. del plano que pasa por }(0,0,0)}$

$$\langle G \rangle = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2y - z \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}2y-z\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle$$

$\therefore \langle G \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subesp. propio

el plano no es todo $\mathbb{R}^3$

Dentro de los conjuntos generadores, nos interesan aquellos que son mínimos (menor cantidad de elementos).

Sea $S \subseteq \mathcal{V}$ un subespacio vectorial, y sea:

- $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n \rangle \subseteq S$ sii $v_i \in S$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
- $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n, v_{n+1} \rangle = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ sii $v_{n+1} \in \langle v_1, ..., v_n, \cancel{v_{n+1}} \rangle$

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores en $\mathbb{V}$; se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es linealmente independiente (l.i.) sii

$$\sum_{\alpha \in I} k_\alpha \bullet v_\alpha = 0 \rightarrow k_\alpha = 0, \ \forall \alpha \in I$$

Observar:

- $\{0\}$ es linealmente dependiente (l.d.)
- si $v \neq 0$, $\{v\}$ es l.i.
- si $v_1 \propto v_2$ (colineales), $\{v_1, v_2\}$ es l.d.
- si v_1, v_2 no nulos, ni proporcionales, $\{v_1, v_2\}$ es l.i.

$0 = \alpha \cdot 0$, $\alpha \neq 0$

$0 = \alpha \cdot v$ entonces $\alpha = 0$

$v_1 = c\, v_2$

$0 = \alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha + c\beta) \cdot v_2$

si $\alpha = -c\beta$ sol. no triv

$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$ sii $\alpha = \beta = 0$

Bases y dimensión

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, un conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se llama base de V si $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ que satisface $\langle v_\alpha\rangle_\alpha = \mathbb{V}$

Definición: Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Diremos que n es la dimensión de V, donde $n < \infty$.

Comentario: Tener en cuenta que existen espacios vectoriales con dimensión infinita.

base canónica

Por ejemplo $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$ $\quad B_c = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$v\in\mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ siendo $\alpha = x \wedge \beta = y$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ genera ¿es l. i? $\quad \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore B_c$ es una base de $\mathbb{R}^2$ $\quad \boxed{\dim(\mathbb{R}^2) = 2}$ $\quad$ sii $\alpha = \beta = 0$

Ejemplo de Esp. Vectorial con dimensión infinita $\quad \mathbb{V} = C([0,1])$

funciones continuas en $[0,1]$ Base posible $= \{1, \cos(nx\pi), \operatorname{sen}(n\pi x)\}$

$n\in\mathbb{Z}$ $\quad$ (infinita)

Variedad lineal

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, M es una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{V}$ es un conjunto de la forma $M = \{s + v,\ \textit{donde}\ s \in S\}$, siendo S subespacio de $\mathcal{V}$, y $v \in \mathbb{V}$.