Guía 3 - Autovalores y autovectores

1. Calcular los autovalores y autovectores de las matrices en $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Para aquellas matrices diagonalizables, hallar la diagonalización.

2. Aplicación: Relación de recurrencia.
   Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, por el año 1202 fue el primer matemático en estudiar la serie de números 1,1,2,3,5,8,... La secuencia de Fibonacci se puede expresar de forma recursiva como $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}, \quad f_0 = 1, f_1 = 1$.
   Dado que la relación de recurrencia es lineal, podemos dar una formulación matricial.

   a) Sea $x^{(k)} = [f_{k+1}, f_k]^T$. Escribir la relación de las variables de forma matricial, es decir

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ x^{(0)} = [1, 1]^T$$

   b) Calcular los autovalores y autovectores de A. ¿Es A diagonalizable?

   c) Hallar una fórmula explícita para el k-ésimo elemento de la serie. Sugerencia: usar los resultados del item anterior.

3. Calcular la SVD de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

   $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Comparar esta matriz E con el ejemplo de la teoría.