Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar), Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

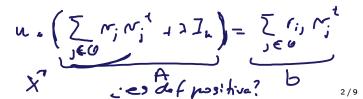
17/03/2023

Colab

El mundo del Data Science y las competencias de Machine Learning cobraron mucha relevancia con la competencia de Netflix, que prometía 1M USD a quien pudiera obtener una performance de un 10% por sobre su algoritmo de base para el problema de recomendación de películas.

En este contexto surgió una nueva variante de modelo en base a factorización de matrices.

¿Lo interesante? Con las dos clases de AM ya nos alcanza para entenderlo!



¿Por qué funciona la inversa? (1/2)

Demostremos que:

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, entonces es invertible:

Dem .: (por método del absurdo) Sun que A no es invertible,

Supongamos que el determinante de A es cero, y llegaremos a una solución, absurda.

Si det(A) = 0 y queremos resolver un sistema Ax = 0 significa que además de la solución trivial hay infinitas soluciones, es decir rango(A) < n,

entonces

$$\exists \tilde{x} \neq 0 : A\tilde{x} = 0 \Rightarrow \underline{\tilde{x}}^T A \tilde{x} = \tilde{x}^T 0 = 0$$

y entonces no se cumple que $\tilde{x}^T A \tilde{x} > \overline{0}$.

¿Por qué funciona la inversa? (2/2)

Demostremos que:

$$A = x \cdot x^T + \lambda I_k$$
 es definida positiva, es decir, $y^T A y > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^k - \{0\}$

Dem.: Sea
$$y \in \mathbb{R}^k - \{0\}$$

$$y^T(x \cdot x^T + \lambda I_k)y = y^T x x^T y + y^T \lambda I_k y$$

$$y^T(x \cdot x^T + \lambda I_k)y = y^T x x^T y + y^T \lambda I_k y$$
(recordemos que el p.i. es $< u, v >= u^T v$), prop. asociativa, $< y, y >= (1 \ y)^T x$

$$< y, x >< x, y > + \lambda < y, y >= < x, y >^2 + \lambda ||y||^2 > 0.$$

$$(x \cdot x)^T + \lambda I_k \text{ es definida positiva.}$$