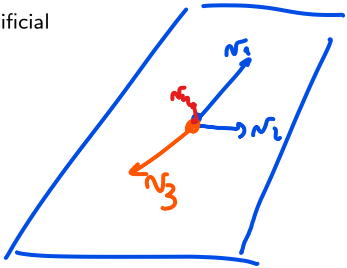
$S \subset \mathbb{V} \qquad \mathbb{V}: (\mathbb{V}, \underbrace{+, \mathbb{K}, \cdot})$

Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

Clase 2



$f(\alpha x+\beta y, z) = \alpha f(x,z) + \beta f(y,z)$

Sea $\mathbb{V}-\mathbb{K}$ e.v., donde $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, un producto interno sobre $\mathbb{V}$ es una función $\Phi : \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$) que satisface:

$z = a + ib$

1. Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$), $u, v, w\in\mathbb{V}$.
    - $\Phi(u+v, w) = \Phi(u, w) + \Phi(v, w)$
    - $\Phi(\alpha\bullet u, v) = \alpha\bullet\Phi(u, v)$

   Φ es lineal

   $\bar{z} = a + i(-b)$
2. $\Phi(u, v) = \overline{\Phi(v, u)}$ $\rightarrow$ @ $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $\Phi(u,v) = \Phi(v,u)$
3. $\Phi(v, v)\geq 0$, y $\Phi(v, v) = 0$ sii $v = 0$

   si $v = 0_V \Leftrightarrow \Phi(v,v) = 0$

   si $v \neq 0_V \Leftrightarrow \Phi(v,v) > 0$

Notación: $\Phi(u, v) = \langle u, v\rangle$

$<u,v>$

Definición: A un espacio vectorial real (complejo) provisto de un producto interno se lo llama espacio euclídeo (espacio unitario).

Obs: El p.i. es una generalización del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

si $v, w\in\mathbb{R}^n$ $\quad v\cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i\cdot w_i$

$(1,2,3)\cdot(3,4,5) = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5$

Sea $\mathcal{V}$ el espacio de las funciones continuas de valor real (o complejo) en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ (se nota $\mathcal{C}([-1,1])$) con p.i.

$\|z\|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$

$z = a + bi$ $\quad = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

1) a) $<f+g, h> = \int_{-1}^{1} (f(x)+g(x)) \cdot \overline{h(x)}\, dx = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \overline{h(x)}\, dx + \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}\, dx = <f,h> + <g,h>$ ✓

b) $<\alpha \cdot f, g> = \int_{-1}^{1} \alpha \cdot f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx = \alpha \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx = \alpha <f,g>$ ✓

Verificar que cumple:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f, g, h \in \mathcal{C}([-1,1])$.
   - $\Phi(f+g, h) = \Phi(f,h) + \Phi(g,h)$ ✓
   - $\Phi(\alpha \bullet f, g) = \alpha \bullet \Phi(f,g)$ ✓
2. $\Phi(f,g) = \overline{\Phi(g,f)}$
3. $\Phi(f,f) \geq 0$, y $\Phi(f,f) = 0$ sii $f(x) = 0, \forall x$

2) $<f,g> = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx = \overline{\overline{\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx}} = \overline{\int_{-1}^{1} \overline{f(x) \cdot \overline{g(x)}}\, dx} = \overline{\int_{-1}^{1} \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx} = \overline{\int_{-1}^{1} g(x) \cdot \overline{f(x)}\, dx} = \overline{<g,f>}$ ✓

3) $<f,f> = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \overline{f(x)}\, dx = \int_{-1}^{1} \|f(x)\|^2 dx \geq 0 \ \forall f$ y $= 0 \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 = 0 \ \forall x \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x$

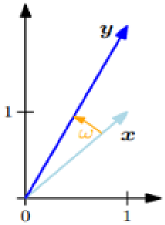
Sea $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un e.v. real (complejo) con p.i.. Sea $v \in \mathbb{V}$, se define la norma de v asociada a $\langle ., . \rangle$.

Notación: $||v|| = \langle v, v \rangle^{1/2}$

Es la generalización de la longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

Def: A partir de un p.i. se puede se puede definir el ángulo w entre dos vectores x, y

$$\cos(\omega) = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \; ||y||} = \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}}$$



$$\langle x, y \rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \underbrace{\cos(\omega)}_{\in [-1;1]}$$

Propiedades de la Norma

1. $\forall v \in \mathbb{V},\ ||v|| \geq 0$, y $||v|| = 0$ sii $v = 0$.
2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$, $v \in \mathbb{V}$, $||\alpha \bullet v|| = |\alpha|\ ||v||$.
3. Desigualdad de Cauchy Schwartz: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

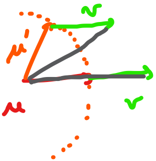
$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||\ ||v|| \cdot 1$$

$$\langle u, v\rangle = \overbrace{||u||\,||v||}\cos(\omega)$$

$$\in [-1;1]$$

4. Desigualdad Triangular: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$



Def: $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i. dos vectores $u, v \in \mathbb{V}$ se dicen ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras: Si $u, v \in \mathbb{V}$ son ortogonales entonces $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Def: $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i.. Se dice que $\{v_1, ..., v_r\} \subset \mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$. Si $||v_i|| = 1, \ \forall i$ se dice que es un conjunto ortonormal.

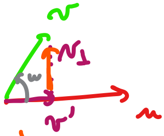
La proyección ortogonal del vector v sobre el vector u es otro vector que notamos como $P_u(v)$, y se define:

$v = v' + v_\perp$

$||v'|| = ||v|| \cos(w)$

$= \cancel{||v||} \cdot \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cancel{||v||}}$

$$P_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\underbrace{||u||}_{||v'||}} \overbrace{\frac{u}{||u||}}^{\check{u}} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$



$\cos(\measuredangle(v', u)) = 1$

$\langle v_\perp, u \rangle = 0$

Proceso de Ortogonalización de Gram Schmidt

Def: Una base ortonormal (BON) de un E.V. es una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ que satisface:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$$
$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \ \forall i$$

Obs: Si sólo se cumple que $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$ se dice que es una base ortogonal.

Para transformar una base en una base ortonormal usamos el proceso de Gram-Schmidt:

$$k_1 = v_1$$
$$k_2 = v_2 - Proy_{k_1}(v_2) \quad = v_2 - v_2'{}_{(k_1)} = v_{2\perp}$$
$$\vdots$$
$$k_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} Proy_{k_i}(v_n)$$

Y así, $\tilde{B} = \{k_1, ..., k_n\}$ pidiendo que $||k_i|| = 1$ resulta una BON.

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión $n < \infty$ y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV de dimensión $m \leq n$. El complemento ortogonal $(S^{\perp})$ es un SEV de de dimensión $n - m$ que satisface:

$$S \cup S^{\perp} = \mathbb{V} \quad \wedge \quad S \cap S^{\perp} = \emptyset$$

Ejemplo: $S = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v} \right\rangle$ con .

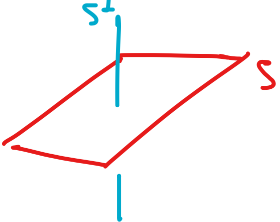
$\dim(\underbrace{\mathbb{V}}_{\mathbb{R}^3}) = 3$

$\dim(S) = 2 \Rightarrow \dim(S^{\perp}) = 1$

$S^{\perp}$:

$$w = u \times v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = (-2, 1, 1) \Rightarrow S^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$x \perp y \quad \forall x \in S, \; y \in S^{\perp}$

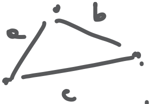


$$\|v\|^2 = \sum v_i^2 \Leftrightarrow \langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = v \cdot u$$

Sea $\mathbb{V}$-$\mathbb{K}$, ($\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) EV con p.i. $\langle ., . \rangle$ se define la distancia $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbf{K}$ como $d(u, v) = ||u - v||$.

Propiedades:

1. $d(u, v) \geq 0, \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
2. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u), \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
4. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \ \forall u, v, w \in \mathbb{V}$



$c \leq a + b$

Observación: Existen distancias que no están asociadas a ninguna norma.

$l_\infty \quad d_\infty(x, y) = \text{máx}(|x_i - y_i|)$

Matrices definidas positivas

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice definida positiva si es simétrica y vale que:

$$x^T A x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Si vale que $x^T A x \geq 0$ se la llama semi definida positiva.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = A$ ✓ es simétrica

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\underbrace{(x \ \ y)}_{1\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2\times 1} = (2x+3y, 3x+9y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 3xy + 3xy + 9y^2$$

$$= 2x^2 + 6xy + 9y^2 = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x+3y)^2}_{\geq 0} > 0 \quad \forall \bar{x} \neq 0_v$$

$= 0 \iff x, y = 0$

$(x+3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita, y B una base de $\mathbb{V}$, vale que es un p.i. sii existe una matriz definida positiva tal que:

$$\langle x, y \rangle = \tilde{x}^T A \tilde{y}$$

donde $\tilde{x}, \ \tilde{y}$, son las representaciones de $x, \ y$ en la base B.

Transformaciones

Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación, donde $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ son dos conjuntos arbitrarios. Se dice que T es:

$\forall x, y \in V \;\; x \neq y \Rightarrow T(x) \neq T(y)$

- Inyectiva: si $\forall x,\ y \in \mathbb{V} : T(x) = T(y) \to x = y$
- Suryectiva: si $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$ $\quad T(V) = \{T(v) \ \forall v \in V\}$
- Biyectiva: si es inyectiva y suryectiva.

Transformaciones Lineales

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos EV, $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in \mathbb{V}$$

- Isomorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal y biyectiva.
- Endomorfismo: si $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal.
- Automorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal y biyectiva.

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, dos espacios vectoriales de dimensión finita son un isomorfismo sii $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$.

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV, $dim(\mathbb{V}) = n < \infty$ tiene un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Si consideramos la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$, todo $v \in \mathbb{V}$ puede escribirse como $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Luego las coordenadas de v en la base B resulta:

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{P}_2[x]$

$\downarrow$

$B_{\mathcal{P}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$1 \quad x \quad x^2$

$dim(\mathcal{P}_2) = 3 = \# B \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$v = 3x^2 - 5x + 10$

$[v]_B = \underbrace{(10, -5, 3)}_{\to \text{ la img del isomorfismo}} \in \mathbb{R}^3$

$\underset{\mathbb{R}^3}{(a, b, c)} \xrightarrow[B]{} \underset{\mathcal{P}_2}{a + b \cdot x + c \cdot x^2}$

Núcleo e Imagen de una transformación

Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, se define:

- Núcleo (o Kernel) $Nu(L) = \{v \in \mathbb{V} : L(v) = 0_W\}$,
- Imagen $Im(L) = L(\mathbb{V}) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V},\ w = L(v)\}$

Teorema: **Toda transformación lineal se puede representar de forma matricial.**

- Espacio Nulo de A: es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las soluciones del sistema lineal homogéneo $Av = 0$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m / L(v) = A \cdot v$

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Av = 0\}$$

- Espacio columna de A: es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los n vectores columna de A:

$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \Rightarrow EC(A) = \left\langle \begin{pmatrix} | \\ A_1 \\ | \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} | \\ A_n \\ | \end{pmatrix} \right\rangle$

$$EC(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{m1})^T + ... + \alpha_m(a_{1n}, ..., a_{mn})^T, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$ $\subset \mathbb{R}^m$

- Espacio fila de A: e el subespacio de R^n generado por los m vectores fila de A:

$A = \begin{pmatrix} - A_1^T - \\ \vdots \\ - A_m - \end{pmatrix} \Rightarrow EF(A) = \left\langle \begin{pmatrix} | \\ A_1 \\ | \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} | \\ A_m \\ | \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^n$

$$EF(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{1n}) + ... + \alpha_m(a_{m1}, ..., a_{mn}), \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Veamos un ejemplo...

$L: \underbrace{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2} / L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ ¿es TL? $L\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 + \beta x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_1 - \alpha y_1 + \beta x_2 - \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_1) + \beta(x_2+y_2) \\ \alpha(x_1-y_1) + \beta(x_2-y_2) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \end{pmatrix}$

$= \alpha L\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta L\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ✓ $\overbrace{\text{es TL}}$

- $Nu(L) = \{ v \in \mathbb{R}^2 / L(v) = 0 \}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \to x=y$, $2x = 0 \to x = 0$, $y = 0$ $\Rightarrow Nu(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim(Nu(L)) = 0$ $\to$ L es inyectiva

- $Im(L) = \{ L(v) \; \forall v \in \mathbb{R}^2 \}$ $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\exists \alpha, \beta / v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Downarrow$
$L(v) = \alpha L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$Im(L) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2 \to$ suryectiva $\to$ L es biyectiva

$\dim(Im(L)) = 2$

+ es TL $\to$ L es automorfismo

Seguimos con el ejemplo...

A: L es TL $\Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, L(v) = A\cdot v$

$$L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \checkmark$$

- $N(A) = \left\{ v \,/\, Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow \dim(N(A)) = 0$

- $EC(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2 \rightarrow \dim(EC(A)) \underbrace{=}_{!} \dim(EF(A)) = 2$

- $EF(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\overbrace{dim(EC(A))}^{\subset \mathbb{R}^m} = \overbrace{dim(EF(A))}^{\subset \mathbb{R}^n} = r(A)$. Donde $r(A)$ se denomina rango de la matriz.

Definición: Se denomina nulidad de una matriz A a la dimensión de su espacio nulo $N(A)$, $n(A) = dim(N(A))$, siendo $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^n, Av = 0\}$

Teorema de Rango-Nulidad: Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se verifica:

$$\underbrace{r(A)}_{\#dim \text{ "mapeados"}} + \underbrace{n(A)}_{\#dim \text{ "perdidos"}} = \underbrace{n}_{\#dim \text{ entrada}}$$

(si L e TL $L: V \to W$

$$dim(V) = dim(Im(L)) + dim(Nu(L))$$