

Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

Clase 1

TODO el material excepto las grabaciones de las clases están disponibles en [nuestro repositorio de github](#).

Forma de evaluación:

- ① Entrega 1 (individual): ejercicio de la guía 1
- ② Entrega 2 (individual): ejercicio de la guía 2
- ③ Trabajo Final (grupos de 3 integrantes)
 - Componente de programación
 - Componente de interpretación de código
 - Componente de matemática

La nota final es un promedio ponderado de las notas individuales de cada entrega. Las dos entregas individuales tienen un límite de entrega *soft*.

Los trabajos se entregan en la carpeta de drive individual compartida a cada alumno posterior a la primera clase.

viernes 1/9

$$\begin{array}{r} 8/9 \leftarrow E^2 \\ 15/9 \leftarrow E^2 \\ 16/9 \leftarrow 0.9 \\ 22/9 \leftarrow 0.9 \\ 23/9 \leftarrow 0.9^2 \\ 29/9 \leftarrow 0.9^2 \end{array}$$

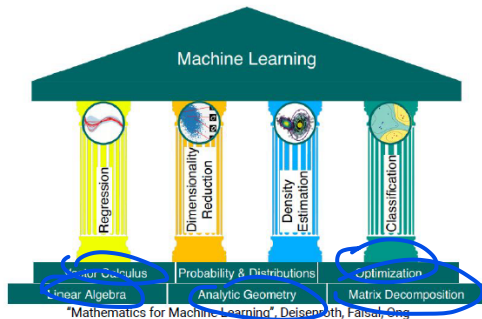
Presentación de la Materia

¿Por qué estudiar Análisis Matemático?

A medida que Machine Learning se vuelve más común, y los paquetes de software se vuelven más simples de usar, uno se abstrae cada vez más de los detalles técnicos que hay detrás.

Modelo de caja negra.

Esto trae el **peligro** de desconocer las decisiones de diseño y las limitaciones de cada algoritmo.



Bibliografía Recomendada: Mathematics for Machine Learning

Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong.

Published by Cambridge University Press (2020).

Está disponible gratis en <http://mml-book.github.io/>

Operaciones vectorizadas y GPUs: Early colab!

Motivación (II)

- Regresión logística asume superposición entre clases
- K-Means asume clusters esféricos
- Árboles de decisión tienen fronteras de decisión en forma de hiperplanos
- ¿Por qué las Redes Neuronales se entrenan más rápido usando GPUs?
- ¿Por qué en las redes neuronales importa la escala y en los árboles de decisión no?
- En kNN ¿Es lo mismo maximizar producto interno que minimizar distancia euclídea?

Clase 1: Espacios Vectoriales

Empecemos considerando los vectores $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ y $v = (2, -1)$,
¿podemos sumar los vectores?

$$\left. \begin{aligned} u+v' &= (1+2, \frac{1}{2}+1, \frac{1}{3}+0) \\ u+v'' &= (1+0, \frac{1}{2}+2, \frac{1}{3}+1) \end{aligned} \right\} \times$$

¿qué ocurre si tomamos $\tilde{v} = (-2, 1)$?

$$\tilde{v} = (-1) \odot v \in \mathbb{R}^2$$

∴ Para definir correctamente $u \oplus v$ deben estar en el mismo conjunto, y es posible cambiar el sentido y tamaño del vector. Es decir, que si el espacio vectorial es \mathbb{R}^n podemos realizar estas operaciones:

- 1 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow x + y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \rightarrow kx \in \mathbb{R}^n$

Algunas definiciones...

Sea $\mathbb{V} \neq \emptyset$, se define una **operación (o suma)** a una función $+$: $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$.

Esta operación se espera que cumpla con las siguientes propiedades:

- 1 **Asociativa:** $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{V}$.
- 2 **Elemento Neutro:** $\forall x \in \mathbb{V}, \exists e \in \mathbb{V}$ tal que $x + e = e + x = x$.
- 3 **Opuesto:** $\forall x \in \mathbb{V}, \exists \tilde{x} \in \mathbb{V}$ tal que $x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e$.
- 4 **Conmutativa:** $\forall x, y \in \mathbb{V}, x + y = y + x$.

Sean $\mathbb{V} \neq \emptyset, \mathbb{K} \neq \emptyset$, se define una **operación (o producto escalar)** a una función \bullet : $\mathbb{K} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$. Este conjunto \mathbb{K} es generalmente \mathbb{R} o \mathbb{C} es un cuerpo de escalares.

*Comentario: Un cuerpo es un conjunto con algunas operaciones sobre los elementos de éste, que se comportan como la adición, sustracción, multiplicación y división que cumplen con las propiedades que conocemos. Para no especificar el cuerpo se usa la palabra **escalar**.*

¿Estudiar espacios vectoriales sólo sirve para vectores?

Sean $p(x) : 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$ y $q(x) : 2 - x$, ¿valen 1 y 2? (1, 1/2, 3/4) ∈ P₂ (2, -1, 0) ∈ P₂ (3, -1/2, 3/4)

① $p(x) + q(x) = (p + q)(x) = (1+2) + (\frac{1}{2}-1)x + (\frac{3}{4}+0)x^2 \in P_2$

② $k \cdot p(x) = (kp)(x) = (k \cdot 1) + (k \cdot \frac{1}{2})x + (k \cdot \frac{3}{4})x^2 \in P_2$

Repasemos el producto de polinomios: $p(x) \cdot q(x) =$

$$(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2)(2 - x) = 2 - x + x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

↳ NO es cerrado ∉ P₂

P_2 ~~no~~
biyección
con \mathbb{R}^3

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ¿valen 1 y 2?

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & \dots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$k \in \mathbb{R}$

↳ ~~no~~ ~~no~~ también
el prod. es cerrado!

Definición de Espacio Vectorial

Diremos que $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ es un espacio vectorial si \mathbb{K} y \mathbb{V} son conjuntos no vacíos y la operación $+$ en \mathbb{V} , y la acción \bullet de \mathbb{K} en \mathbb{V} cumplen:

- ① $+$ es asociativa $\forall v, w, u \in \mathbb{V} \quad (u+v)+w = u+(v+w)$
- ② $+$ tiene elemento neutro $\exists e \in \mathbb{V} / \forall x \in \mathbb{V} \quad x+e = e+x = x$
- ③ $+$ tiene elemento inverso $\forall x \in \mathbb{V} \quad \exists \tilde{x} \in \mathbb{V} / x+\tilde{x} = \tilde{x}+x = e$
- ④ $+$ es conmutativa $\forall v, w \in \mathbb{V} \quad v+w = w+v$
- ⑤ $\alpha \bullet (v+w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in \mathbb{V}$ *distib. del \bullet wrt la $+$ de \mathbb{V}*
- ⑥ $(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$ *distib. del \bullet wrt la $+$ de \mathbb{K}*
- ⑦ \bullet tiene elemento neutro: $1 \bullet v = v, \forall v \in \mathbb{V}$
- ⑧ \bullet es asociativa:

$$\alpha \bullet (\beta \bullet v) = (\alpha\beta) \bullet v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$$

⊕ grupo
②

" commutative

Subespacios Vectoriales: definición

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ se dice que es un subespacio de \mathbb{V} si la suma y el producto por escalares de \mathbb{V} son una operación y una acción en S que lo convierten en un \mathbb{K} -espacio vectorial.

$(S, +, \mathbb{K}, \bullet)$ هو فضاء!

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

S es un subespacio en un \mathbb{K} -espacio vectorial sii:

- 1 $S \neq \emptyset$ ($0 \in S$)
- 2 $v, w \in S \rightarrow v + w \in S$
- 3 $\alpha \in \mathbb{K}, v \in S \rightarrow \alpha \bullet v \in S$

Subespacios triviales

- $\{0\} \subseteq \mathbb{V}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$

$0 \in S ? \checkmark$
 $0 + 0 = 0 \in S \checkmark$
 $k \cdot 0 = 0 \in S \checkmark$

Ejemplos de subespacios propios

$$v = (a, b, c) \text{ fijar}$$

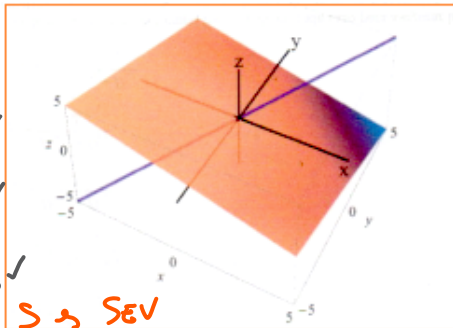
Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \bullet)$, sea

$$S = \{\alpha \bullet (a, b, c), \alpha \in \mathbb{R}\},$$

¿es un subespacio vectorial?

- 1) si $\alpha=0$, $\alpha \bullet (a, b, c) = (0, 0, 0) \in S$ ✓
- 2) $\alpha_1 \bullet (a, b, c) + \alpha_2 \bullet (a, b, c) = (\alpha_1 + \alpha_2) \bullet (a, b, c) \in S \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ✓
- 3) $k \cdot \alpha \bullet (a, b, c) = (k \cdot \alpha) \bullet (a, b, c) \in S \forall k \in \mathbb{R}$ ✓

→ S es SEV



Algunos ejemplos más ...

Sean S, T subespacios de $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$. Probar si también los son:

- 1 $S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \wedge v \in T\} \subseteq \mathbb{V}.$
- 2 $S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}.$
- 3 $S \cup T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \vee v \in T\} \subseteq \mathbb{V}.$

Demostremos el caso 2

$$S + T = \{v \in V : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq V$$

$$1) 0_V \in S+T?$$

$$\text{Como } S, T \text{ son } S \subseteq V, 0_V \in S, T \\ \Rightarrow \underbrace{0_V}_s + \underbrace{0_V}_t = \underbrace{0_V}_{s+t} \in S+T \quad \checkmark$$

$$2) \forall r_1, r_2 \in S+T \\ r_1 + r_2 \in S+T?$$

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & s_1 + t_1 \\ r_2 & = & s_2 + t_2 \\ + & & \\ \hline r_1 + r_2 & = & s_1 + s_2 + t_1 + t_2 \in S+T \quad \checkmark \end{array}$$

$\underbrace{s_1 + s_2}_{\in S} \quad \underbrace{t_1 + t_2}_{\in T} \Rightarrow S \subseteq V$

$$3) \forall r \in S+T \\ k \cdot r \in S+T?$$

$$k \cdot r = k \cdot (s + t) = \underbrace{k \cdot s}_{\in S} + \underbrace{k \cdot t}_{\in T} \in S+T \quad \checkmark$$

de 1, 2 y 3 $\Rightarrow S+T$ es $S \subseteq V$ de V

Sistemas generadores

$$\mathbb{R}^2: \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

Definición: Sea \mathcal{V} un espacio vectorial, y $G = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq \mathbb{V}$. Una **combinación lineal** de G es un elemento $v \in \mathbb{V}$ tal que $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i \bullet v_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, \dots, r$.

Definición: Sea \mathcal{V} un espacio vectorial, y $G \subseteq \mathbb{V}$. Se dice que G es un **sistema de generadores** de \mathcal{V} si todo elemento de \mathbb{V} es una combinación lineal de G .

Notación: $\langle G \rangle = \mathbb{V}$.

Ejemplo

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$,

¿podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores de G ?

$$\exists a, b, c / a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = x & \textcircled{1} \\ a + b + 3c = y & \textcircled{2} \\ a + 2c = z & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\text{de } \textcircled{3} \quad a = x - 2c \quad \text{en } \textcircled{2} \quad x - 2c + b + 3c = y$$

$$b = y - x + c$$

$$\text{en } \textcircled{1} \quad x - 2c + 2y - 2z - 2c + 4c = x$$

$$2y - 2z = 0 \Rightarrow !!!$$

NO genera \mathbb{R}^3

Independencia Lineal

Dentro de los conjuntos generadores, nos interesan aquellos que son mínimos (menor cantidad de elementos).

Sea $S \subseteq \mathcal{V}$ un subespacio vectorial, y sea:

- $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq S$ sii $v_i \in S, \forall 1 \leq i \leq n$.
- $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ sii $v_{n+1} \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Definición: Sea \mathcal{V} un espacio vectorial, y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores en \mathbb{V} ; se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es **linealmente independiente** (l.i.) sii

$$\sum_{\alpha \in I} k_\alpha \bullet v_\alpha = 0 \rightarrow k_\alpha = 0, \forall \alpha \in I$$

Observar:

- $\{0\}$ es linealmente dependiente (l.d.)
- si $v \neq 0$, $\{v\}$ es l.i.
- si $v_1 \propto v_2$ (colineales), $\{v_1, v_2\}$ es l.d.
- si v_1, v_2 no nulos, ni proporcionales, $\{v_1, v_2\}$ es l.i.

Bases y dimensión

Definición: Sea \mathcal{V} un espacio vectorial, un conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se llama **base de \mathcal{V}** si $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un conjunto linealmente independiente de \mathcal{V} que satisface $\langle v_\alpha \rangle_{\alpha \in I} = \mathcal{V}$. *no falta nada* *no sobra nada*

Definición: Sean \mathcal{V} un espacio vectorial, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de \mathcal{V} . Diremos que n es la **dimensión de \mathcal{V}** , donde $n < \infty$.

Comentario: Tener en cuenta que existen espacios vectoriales con dimensión infinita.

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base canónica} \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ BOB}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ BOG} \quad B'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base}$$

Variedad lineal

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial, M es una **variedad lineal** $M \subseteq \mathbb{V}$ es un conjunto de la forma $M = \{s + v, \text{ donde } s \in S\}$, siendo S subespacio de \mathcal{V} , y $v \in \mathbb{V}$.

