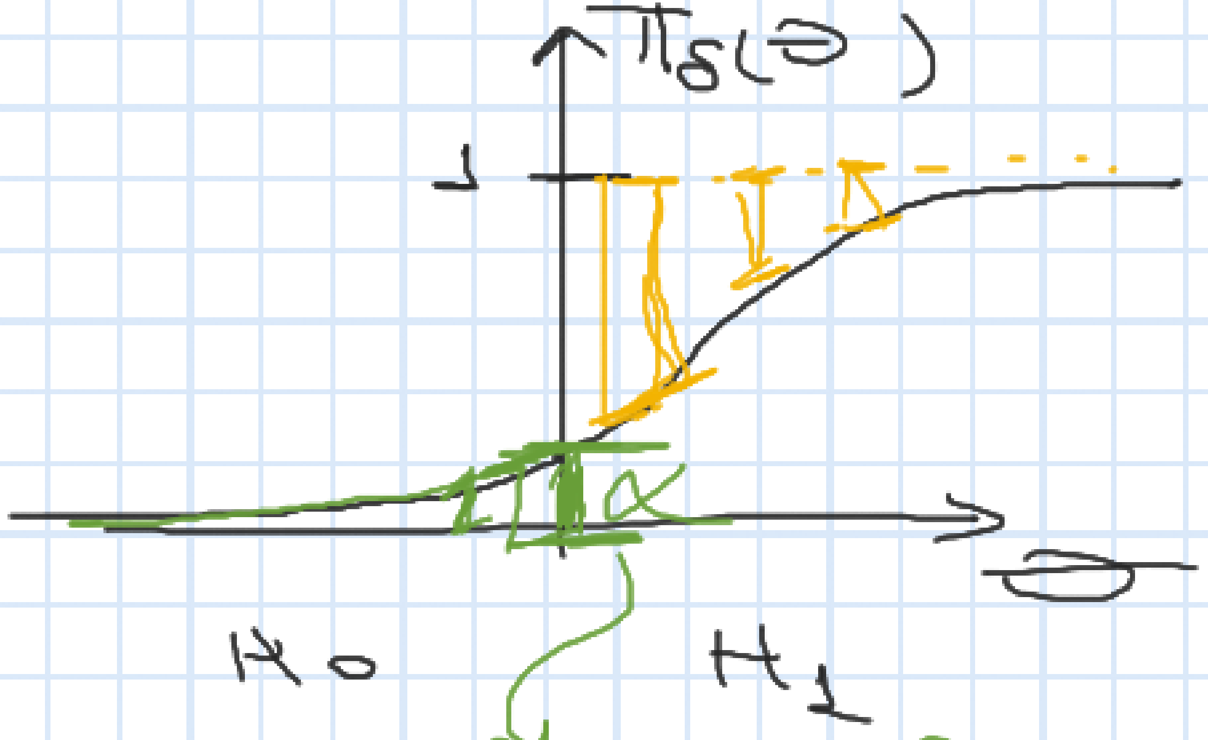
Para fabricar una placa, se necesitan resistencias de 1kOhm, de las cuales Ana compra 20. Se considera que la distribución del valor de resistencia de cada una es una variable aleatoria con distribución normal con desvío estándar 10.



nivel de significación

valores de

Región de rechazo (cuando $\delta(\underline{X}) = 1$)

$H_0: \mu = 1000$ $H_1: \mu \neq 1000$

$\bar{X}$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{10/\sqrt{20}} \sim N(0,1)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{10^2}{20}\right)$$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \left| \frac{\bar{X} - 1000}{10/\sqrt{20}} \right| \geq k_\alpha \right\}$$

$$b = k_\alpha = z_{1-\alpha/2}$$

Si construyo un test de nivel $\alpha = 0.05$.

para $H_0: \mu = 1000$ vs $H_1: \mu \neq 1000$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \left| \frac{\overline{X} - 1000}{10/\sqrt{20}} \right| > \underbrace{z_{0.975}}_{1.96} \right\}$$

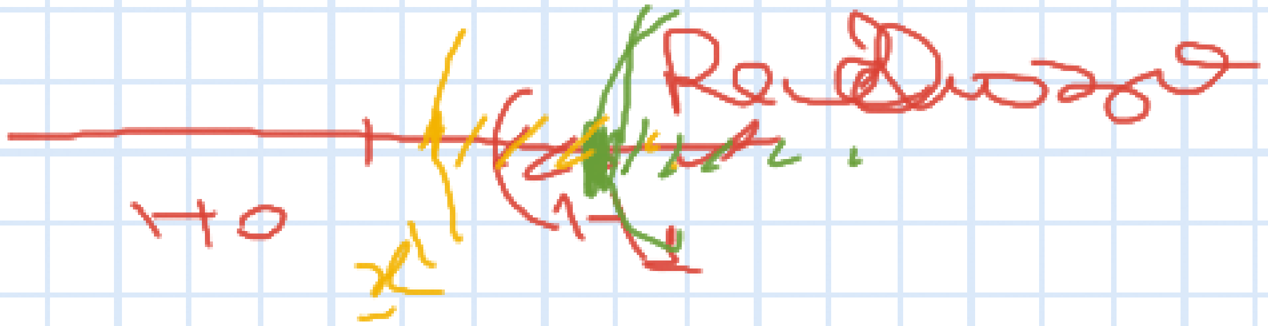
$|\bar{x}|$ (cuando es [illegible] [illegible]

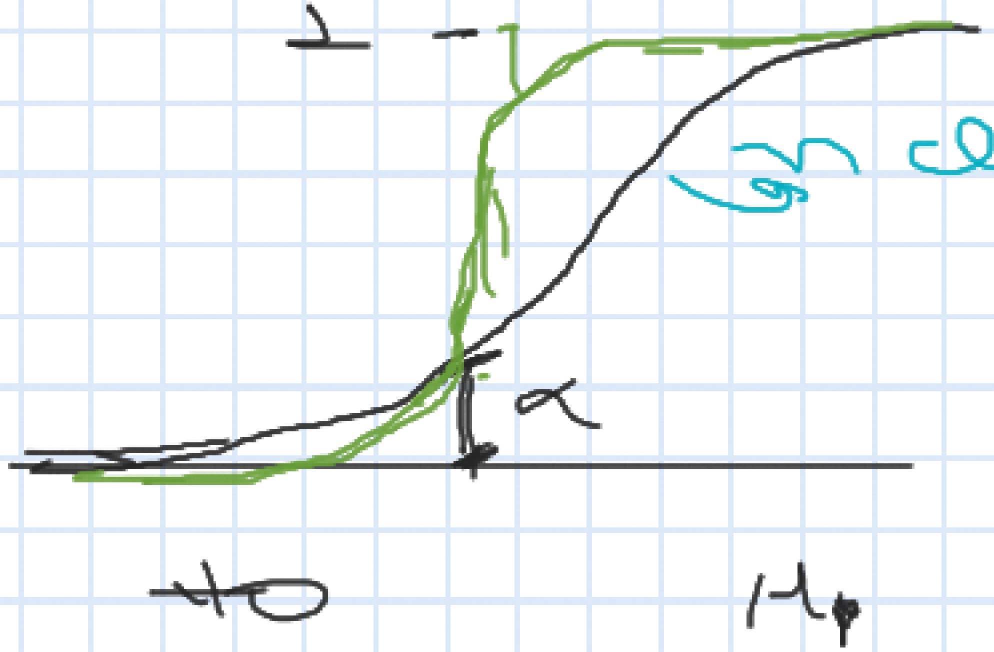
n grande

Observo $\bar{x} = 995.74$

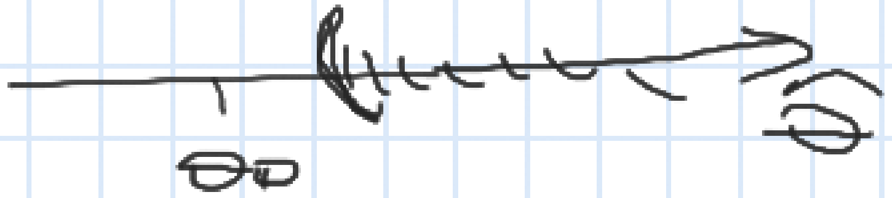
$$\Rightarrow \left| \frac{\bar{x} - 1000}{10/\sqrt{20}} \right| = 1.905$$

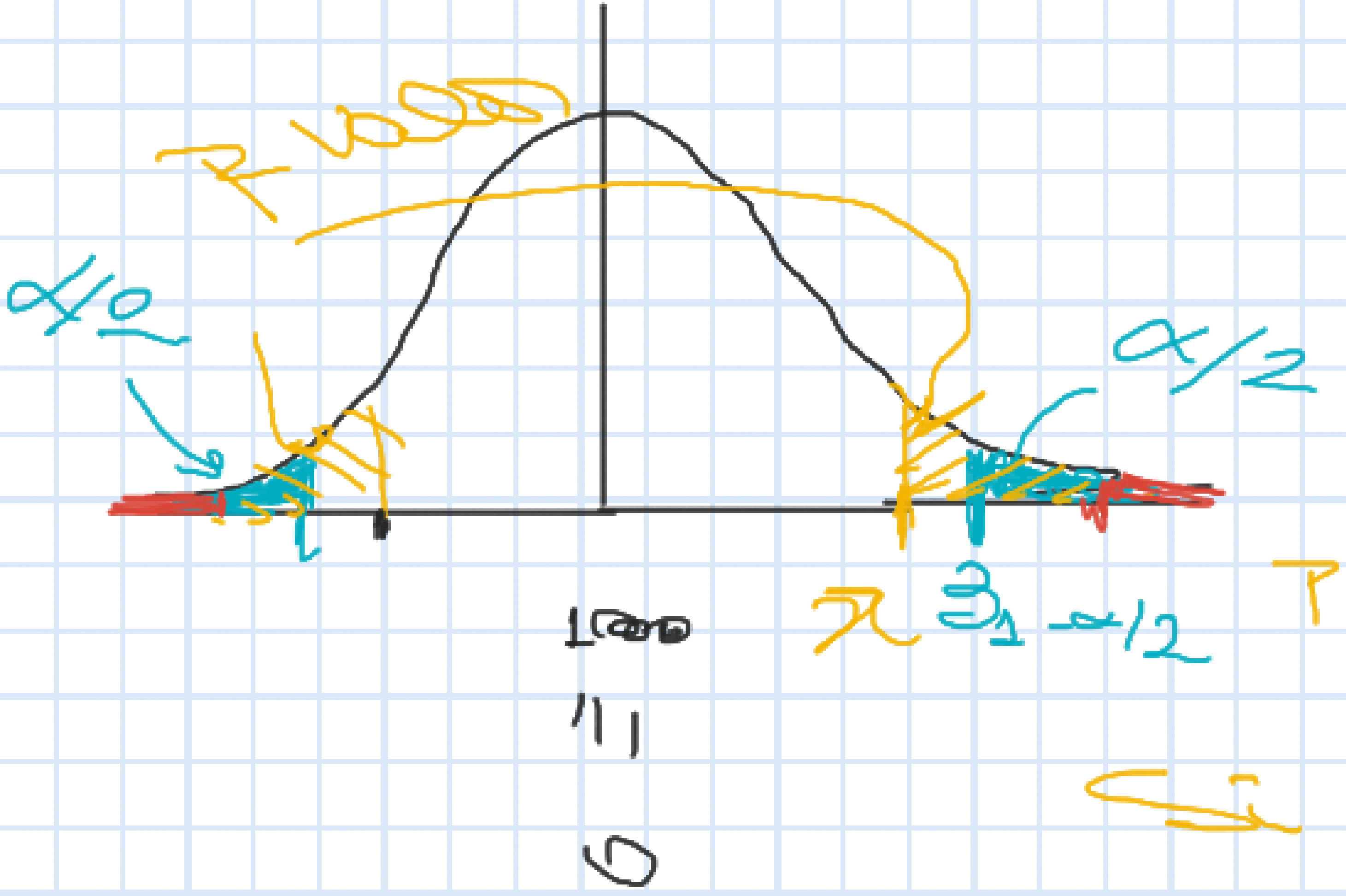
$\Rightarrow$ No rechazo H_0.





$\rightarrow H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$





$$\delta(X) = 1\!\!1\left\{\left|\frac{\bar{X}-1000}{10/\sqrt{20}}\right| > z_{1-\alpha/2}\right\}$$

$$\text{p-value} = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}-1000}{10/\sqrt{20}}\right| > \left(\frac{\bar{x}-1000}{10/\sqrt{20}}\right)\right)$$

Si p-value $> \alpha \Rightarrow$ Ho Rech

p-value $\leq \alpha \Rightarrow$ Rechazo

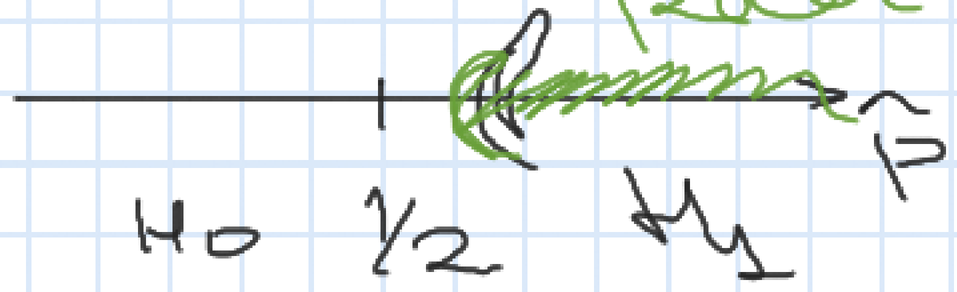
$$\text{p-value} = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}-1000}{10/\sqrt{20}}\right| > 1.905\right) = 2\,\mathbb{P}(Z \leq -1.905)$$

Luego de los cambios en las leyes de tránsito de cierta región, se desea estudiar la proporción de motoqueros que usan casco. Se tomó una muestra de 200 motoqueros, encontrando que 148 usaban casco. En base a esta información muestral, ~~construir un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para la proporción de motoqueros que usan casco.~~ construir un test de hip. de nivel 0.05 para decidir entre

$H_0: p \leq 1/2$, $H_1: p > 1/2$.

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

$$\Rightarrow \delta(\underline{x}) = I\left\{\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} > k_\alpha\right\}$$

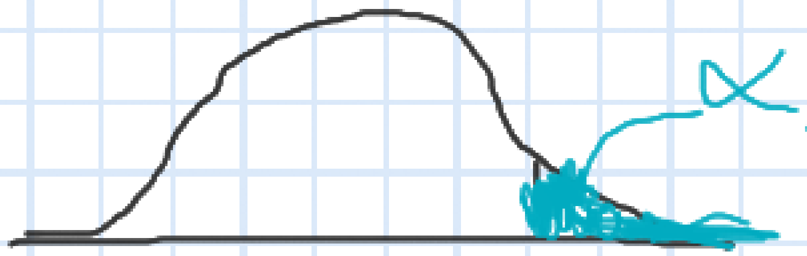


$p = 1/2$

$$\alpha = \max_{\substack{p \in H_0 \\ p \leq 1/2}} P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} > k_\alpha\right) = 0.05.$$

el máx $\Rightarrow$ ocurre justo en $p = 1/2$

$$\alpha = P_{p=1/2}\left(\underbrace{\frac{\hat{p} - 1/2}{\sqrt{1/2(1-1/2)}}\sqrt{n}}_{\approx N(0,1)} > k_\alpha\right) = P(Z > k_\alpha) = 0.05$$



$\alpha \rightarrow k_\alpha = z_{0.95} = 1.64$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\bar{X} - 1/2}{\sqrt{1/2(1-1/2)}} \sqrt{n} > 1.64 \right\}$$

Con los datos del ej

$$\frac{\bar{x} - 1/2}{1/2} \sqrt{200} = 6.78 \Rightarrow \text{Rechazo.}$$

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}_{p=1/2}\Big(\underbrace{\frac{\bar{X} - 1/2}{1/2} \sqrt{200}}_{Z \overset{a}{\sim} N(0,1)} > 6.78 \Big) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 6.78)$$

Bayes $P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{P(B)}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|H_i)\,P(A_i)$$

Robotstop

La posición del impacto en un tiro al blanco (en decímetros) respecto del cero sobre el eje x es una variable aleatoria X con distribución normal de media cero y varianza $1/\theta$, donde θ representa la precisión del tirador. A priori, la precisión θ tiene una distribución Chi-cuadrado de 8 grados de libertad. Lucas tiro 10 veces al blanco y observó que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$. Hallar la estimación de Bayes de θ para la el riesgo cuadrático

X : posición de impacto

$X|\Theta=\theta \sim N(0, 1/\theta)$

$\Theta \sim \chi^2_8 \qquad n=10 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$

$\chi^2_8 = \Gamma(4, 1/2)$

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\,\pi(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\,\pi(\theta)\,d\theta}$$

$$f_{\Theta \mid \underline{X}=\underline{x}}(\theta) \propto \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1/\theta)}} e^{-\frac{(x_i)^2}{2/\theta}} \cdot \frac{1}{2^4\Gamma(4)} \theta^3 e^{-\theta/2} I_{\{\theta>0\}}$$

$$\propto \underbrace{\left(\sqrt{\theta}\right)^{10}}_{\theta^5} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2}\cdot\theta} \theta^3 e^{-\theta/2} I_{\{\theta>0\}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\theta}}}$$

$$\propto \theta^{7} e^{-\theta\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sum x_i^2}{2}\right)}_{\lambda}} I_{\{\theta>0\}}$$

$$\nu-1 \Rightarrow \nu=8$$

$$\Gamma(\nu,\lambda)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)}\lambda^{\nu} t^{\nu-1} e^{-\lambda t}$$

$$7!$$

$$\Rightarrow \Theta \mid \underline{X}=\underline{x} \sim \Gamma\left(8, \frac{1}{2}+\frac{\sum x_i^2}{2}\right)$$

$$\mathbb{E}\left[\Theta \mid \underline{X}=\underline{x}\right] = \frac{8}{\frac{1}{2}+\frac{\sum x_i^2}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}+\frac{17}{2}} = 8/9$$