Transformación de variables

1. Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Hallar la función de densidad de $Y = X^2$. Identificar a que variable corresponde (nos va a ser de mucha utilidad en algunas clases!).

Por definición de la función de distribución,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P(|X| \leq \sqrt{y}) & \text{si } y > 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Por otro lado si $y > 0$ tenemos que

$$P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}). \tag{2}$$

Definiendo las variables auxiliares $u = \sqrt{y}$, $v = -\sqrt{y}$ y usando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}P(|X| \leq \sqrt{y}) &= \frac{d}{dy}F_X(\sqrt{y}) - \frac{d}{dy}F_X(-\sqrt{y}) \\ &= \frac{d}{du}F_X(u)\Big|_{u=\sqrt{y}}\frac{du}{dy} - \frac{d}{dv}F_X(v)\Big|_{v=-\sqrt{y}}\frac{dv}{dy} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})],\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtiene por aplicación del Teorema Fundamental del Análisis Matemático o equivalentemente por definición de la densidad. Además, por la simetría de la normal con media nula, $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo $x \in \mathrm{R}$ y entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}P(|X| \leq \sqrt{y}) &= \frac{1}{\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}.\end{aligned} \tag{3}$$

Por definición de la función de densidad y considerando (1),

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{d}{dy}P(|X| \leq \sqrt{y}) & \text{si } y > 0 \end{cases}, \tag{4}$$

usando (3) en (4), encontramos que

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2} & \text{si } y > 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}\mathbf{1}\{y > 0\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Lo que se corresponde con la densidad de una variable χ^2_1.