Probabilidad y estadística

Clase 3

Variables aleatorias condicionadas

Variables discretas

Sean X, Y dos variables aleatorias, y sean $p_X(x) > 0$ y $p_{X,Y}(x, y)$ las función de probabilidad marginal de X y la función de probabilidad conjunta respectivamente. Se define la función de probabilidad condicionada de Y dado que $X = x$ como:

$$
\begin{aligned}
\boxed{p_{Y|X=x}(y)} &= \mathbb{P}\left[Y = y | X = x\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)} \\
&= \boxed{\frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}}
\end{aligned}
$$

Variables continuas

Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ y densidad marginal de X $f_X(x)$. Se define la función de densidad condicional de Y dado $X = x$ como

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Obs: Si $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$ X e Y son independientes.

Factorización

Sean X, Y dos variables aleatorias con función. de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$, la misma puede descomponerse de la forma

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X=x}(y)$$

Obs: Si $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ X e Y son independientes.

Mezcla de v.a.

Sea M una v.a. discreta a valores $1, \ldots, n$, con función de probabilidad $p_M(m)$, y sea X una v.a. tal que se conocen las distribuciones $X|M = m, \; m = 1, 2, \ldots, n$. Luego, la distribución de X resulta

$$F_X(x) = \sum_{m=1}^{n} F_{X|M=m}(x) p_M(m)$$

Obs:

Si X es v.a.d: $p_X(x) = \sum_{m=1}^{n} p_{X|M=m}(x) p_M(m)$

Si X es v.a.c $f_X(x) = \sum_{m=1}^{n} f_{X|M=m}(x) p_M(m)$

Bayes para mezclas

Sea M una v.a. discreta a valores $1, \ldots, n$, con función de probabilidad $p_M(m)$, y sea X una v.a. continua tal que se conocen las distribuciones $f_{X|M=m}(x),\ m = 1, 2, \ldots, n$, la función de probabilidad de M dado que $X = x$ será:

$$\boxed{p_{M|X=x}(m) = \frac{f_{X|M=m}(x) p_M(m)}{\sum_{m=1}^{n} f_{X|M=m}(x) p_M(m)}}$$

Esperanza condicional

Función de regresión

Def: Sean X, Y dos v.a. discretas, se llama función de regresión a

$$\varphi(x) = \mathbb{E}[Y|X = x] = \sum_{y \in R_y} y p_{Y|X=x}(y), \quad \forall x \in R_X$$

Def: Sean X, Y dos v.a. continuas, se llama función de regresión a

$$\varphi(x) = \mathbb{E}[Y|X = x] = \int_{y \in R_y} y f_{Y|X=x}(y), \quad \forall x \in R_X$$

Observar que es función de x

Esperanza condicional

Def: La variable aleatoria esperanza condicional de Y dada X se define como

$$\mathbb{E}[Y|X] = \varphi(X).$$

Además $\varphi(X)$ satisface que $\mathbb{E}[(Y - \varphi(X))\, t(X)] = 0$ para toda función medible $t : R_X \to \mathbb{R}$, tal que $\mathbb{E}[t(X)] < \infty$.

¿A qué nos recuerda esto?

$\mathbb{E}[Y|X]$ es el mejor predictor de Y basado en X (i.e. es la proyección ortogonal de Y en el espacio de funciones de X)

Propiedades

1. $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$

2. $\mathbb{E}[r(X)s(Y)|X] = r(X)\mathbb{E}[s(Y)|X]$, para r, s tal que $r(X)s(X)$, $r(X)$ y $s(Y)$ tienen esperanza finita

3. $\mathbb{E}[aY_1 + bY_2|X] = a\mathbb{E}[Y_1|X] + b\mathbb{E}[Y_2|X]$

4. $\mathbb{E}[Y|X \;\; = \mathbb{E}[Y]]$ si X y Y son independientes

Varianza condicional

Def: Dada $\tau(x) = var(Y|X=x)$, se define la varianza condicional como

$$\mathbb{V}(Y|X) = \tau(X) = \mathbb{E}[Y^2|X] - \mathbb{E}[Y|X]^2$$

Propiedad: (Pitágoras)

$$var(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)] + var(\mathbb{E}[Y|X])$$