Probabilidad y Estadística

Clase 1

Cronograma

Clase 1	Repaso Distribuciones útiles.
Clase 2	Transf de v.a.
Clase 3	V.a. condicionadas Esperanza condicional ECM y estimadores de cuadrados mínimos
Clase 4	Estimación Bayesiana Estimador de máxima verosimilitud
Clase 5	Estimación no paramétrica Intervalos de confianza
Clase 6	Intervalos de confianza Test de hipótesis
Clase 7	Repaso
Clase 8	Examen

Repaso

Eventos

Espacios equiprobables

Si estamos en presencia de un espacio **equiprobable**, es decir donde todos los elementos tienen las mismas chances de ocurrir, las probabilidades pueden calcularse como la proporción entre la cantidad de casos donde ocurre el experimento y la cantidad de elementos que existen en el espacio muestral. A esto se lo conoce como regla de **Laplace**

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\text{"casos favorables"}}{\#\text{casos totales}}$$

Probabilidades condicionales y proba. total

Def: Se llama **probabilidad condicional** de A dado B ($\mathbb{P}(A|B)$) a la probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que B ha ocurrido, y está definida por

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Def: Diremos que los eventos $B_1, \ldots B_n$ forman una **partición** si $B_i \cap B_j = \emptyset \, \forall \, i, j$ y $\bigcup_{i=1}^{n} B_j = \Omega$.

Luego podemos describir al evento A como $A = (A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$ de forma que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

Fórmula de probabilidad total

Teorema de Bayes e independencia

Teorema de Bayes: Sean $B_1, \ldots B_n$ una partición de Ω , y A un evento con probabilidad positiva:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

Def: Diremos que dos eventos A y B son **independientes** si y sólo sí vale que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Variables aleatorias

Variables aleatorias

Una va. X es una función que mapea eventos a números.

Ejemplo: basto →1, Oro →2, espada →3, copa→4

X tiene asociada una función de distribución, definida como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

- $F_X(x) \geq 0$
- $F_X(x)$ Es no decreciente

- $lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Tipos de v.a.

- Discretas (v.a.d): toman valores en un conjunto discreto o enumerable de puntos. Si X es **v.a.d**, tendrá además función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

- Continuas (v.a.c): toman valores en un intervalo continuo. Si X es una **v.a.c**. tendrá asociada una función de densidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Tipos de v.a.

- Discretas (v.a.d): toman valores en un conjunto discreto o enumerable de puntos. Si X es **v.a.d**, tendrá además función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

- Continuas (v.a.c): toman valores en un intervalo continuo. Si X es una **v.a.c**. tendrá asociada una función de densidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

¿Qué propiedades debían cumplir cada una de estas funciones?

Vectores aleatorios

Distribución conjunta y marginales

Si tenemos dos variables X e Y se define su **función de distribución conjunta** como

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

En este caso, vale la regla del rectángulo

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$$

Caso continuo: $f_{X,Y}(x,y)$ es la función de densidad conjunta y se definen las funciones de densidad marginales como $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$ y $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$

Caso discreto: $p_{X,Y}(x,y)$ es función de probabilidad conjunta y se definen las funciones de probabilidad marginal como $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$ y $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$

Independencia de v.a.

Diremos que dos v.a. X e Y son independientes si vale que

$$F_{X.Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

Caso discreto:

$$p_{X.Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

Caso continuo:

$$f_{X.Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

Momentos

Momentos

Esperanza (o media):

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x) f_X(x) dx$$
$$= \sum g(x) p_X(x)$$

Varianza:

$$var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}(X)^2$$

Covarianza:

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Algunas distribuciones útiles

Variables discretas

- **Bernoulli(p)**: X = {0,1}. Asociada a la ocurrencia o no de un éxito

$Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_{10}$

- **Binomial(n, p)**: me cuenta la cantidad de éxitos en n ensayos.

$X \sim Bin(n,p) \qquad \left(X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \, , \quad Y_i \sim Ber(p) \right)$

- **Geométrica(p)**: cantidad de ensayos que debo realizar hasta observar el primer éxito

Se tira sucesivamente un dado

1. Probabilidad de necesitar menos de 3 tiros hasta ver el primer 2
2. Probabilidad de ver exactamente un 2 en 5 tiros

éxito → observo el 2.

1) No 2 2 Y = "# de tiros hasta ver el 1° 2"

2

$Y \sim \text{Geom}(1/6)$

$$P(Y<3) = P(Y \leq 2) = P(Y=1) + P(Y=2)$$

$$= p_Y(1) + p_Y(2) =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1} 1/6 + \left(\frac{5}{6}\right)^{2-1} 1/6 =$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

2) V = "# de 2 observados en 5 tiros" $2\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}$

$V \sim \text{Bin}(5, 1/6)$

$$P(V=1) = \binom{5}{1} 1/6 \left(5/6\right)^4 = 5 \cdot 1/6 \left(5/6\right)^4$$

Variables continuas

- **Uniforme:** todos los puntos son equiprobables.

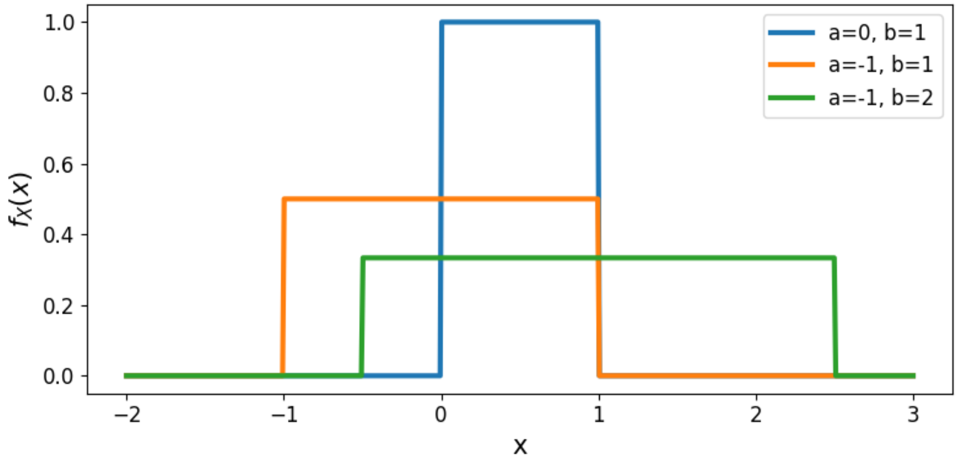
$$X \sim \mathcal{U}(a,b)$$

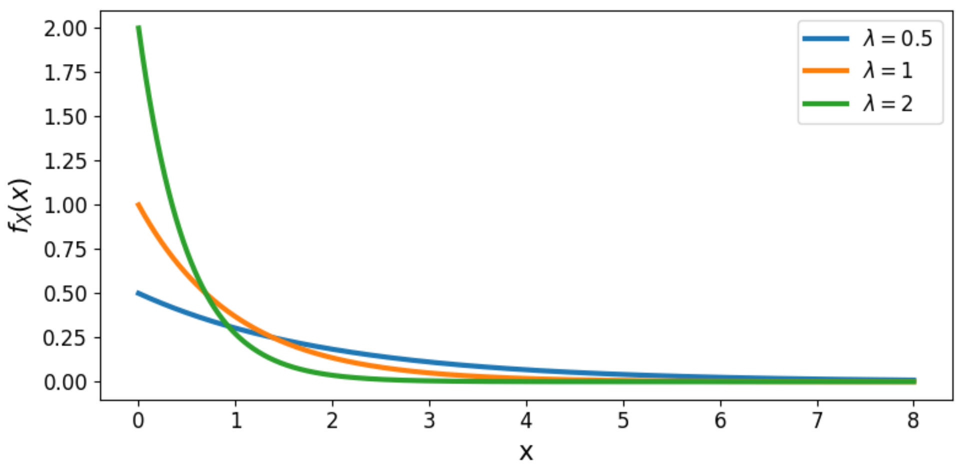
$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{I}\{a < x < b\}$$

- **Exponencial:** sirve para modelar tiempos hasta eventos que no tienen memoria.

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{I}\{x > 0\}$$

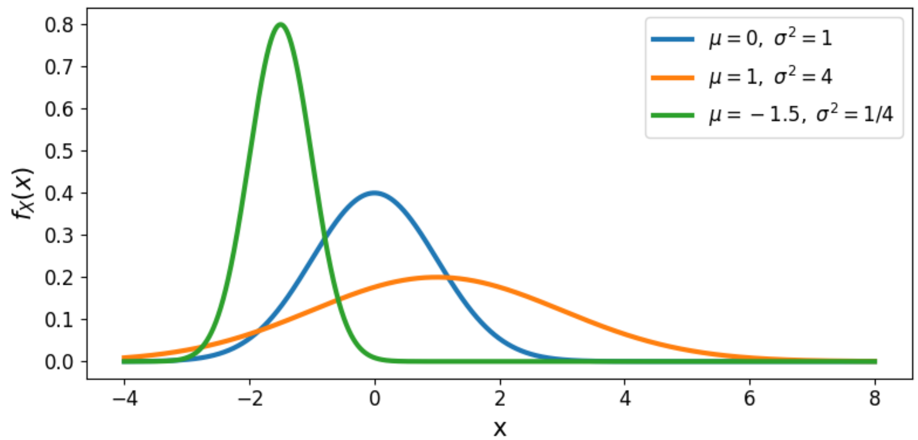




Variables continuas

- **Normal (gaussiana).** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$



Propiedades: Sean X, Y dos v.a. Independientes

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{(estandarización)}$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2),\ Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) \rightarrow aX + bY \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

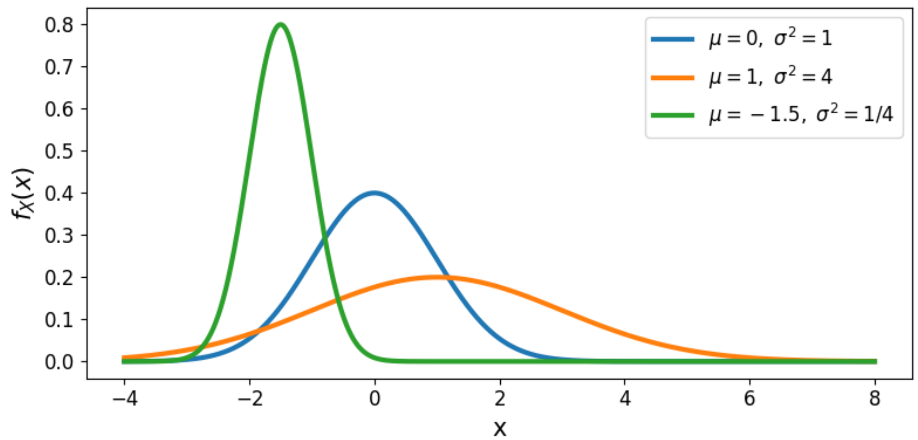
(combinación lineal de normales es normal)

Variables continuas

- **Normal (gaussiana).** $$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

μ es la media
$\boldsymbol{\sigma}^2$ es la
varianza

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\ }} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$



Propiedades: Sean X, Y dos v.a. Independientes

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$ (estandarización)

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2),\ Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) \rightarrow aX + bY \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

(combinación lineal de normales es normal)

Ejercicio 1

Sea X una v.a con distribución normal estándar. Hallar la probabilidad de que

1. X>1
2. X<-1
3. |X| <2
4. Hallar los cuantiles 0.1 y 0.9

$X \sim N(0,1)$

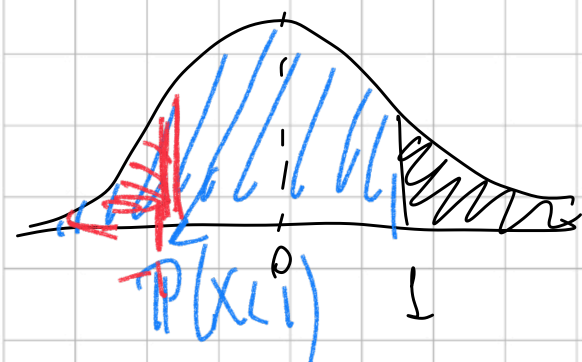
Sea además Y ~ N(2,9)

1. Hallar P(2X+Y <5)

$$X \sim N(0,1) \quad P(X>1) = 1 - \underbrace{P(X<1)}_{F_X(1)} = 1 - F_X(1)$$

$$F_X(1) = 0,1587$$

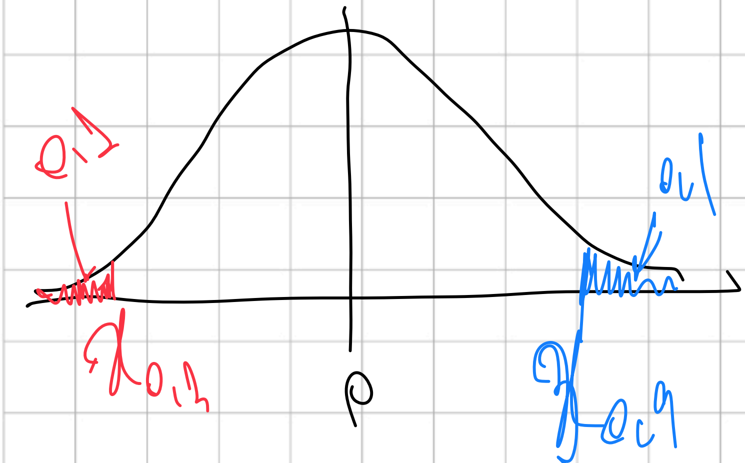
cdf



$$P(X<-1) = P(X>1) = 0,1587$$

$$P(|X|<2) = P(X<2) - P(X<-2)$$

$$= 1 - 2P(X<-2) = 0,9545$$



$x_{0,1}: P(X \le x_{0,1}) = 0.1 = -1,28$

$x_{0,9} = -x_{0,1} = 1,28$

$Y \sim N(2, 9)$

$W \sim N\left(\underbrace{2\cdot 0 + 1\cdot 2}_{2}, \overbrace{2^2\cdot 1 + 1^2\cdot 9}^{13}\right)$

$P(\underbrace{2X+Y}_{W} < 5) = 0,7973$

$= P\left(\frac{W-2}{\sqrt{13}} < \frac{5-2}{\sqrt{13}}\right)$

Ejercicio 2

El tiempo (en minutos) entre llamadas a un call center tiene una distribución exponencial de parámetro 1/5.

1. Calcular la probabilidad de que la primer llamada llegue después de 2 minutos
2. Calcular la probabilidad de que la primer llamada llegue después de los 5 minutos, si se sabe que en los primeros 3 minutos no se recibieron llamados

$X \sim$ "Tiempo hasta la 1ª llamada" $X \sim \mathcal{E}(1/5)$

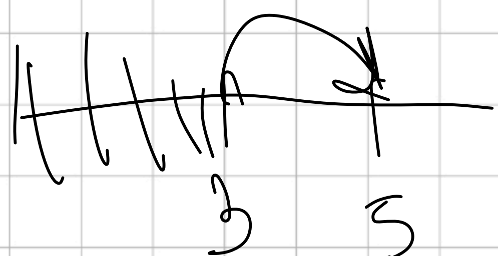
$$\mathbb{P}(X > 2) = \int_2^{\infty} 1/5\, e^{-1/5 x}\, dx = 0{,}6703$$

$$= e^{-2/5}$$

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$$

$$S_X(x) = e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$$

$$\mathbb{P}(X>5 \mid X>3) = \frac{\mathbb{P}(X>5,\ X>3)}{\mathbb{P}(X>3)} = \frac{\mathbb{P}(X>5)}{\mathbb{P}(X>3)}$$



$$= \frac{e^{-5/5}}{e^{-3/5}} = e^{-2/5}$$

$$= \mathbb{P}(X>2)$$

Distribución normal multivariada

Función de densidad conjunta

Sea $\underline{X} = [X_1, \ldots, X_n]^T$ un vector aleatorio continuo, diremos que X tiene distribución normal multivariada, si su función de densidad conjunta es de la forma

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T \Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})}$$

donde $\underline{\mu}$ se corresponde con la media de la v.a. y Σ Es la matriz de covarianza .

Notación: $\underline{X} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$

Distribuciones marginales

$$\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \Rightarrow X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$$

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \ldots, \mu_n]^T$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \ldots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \ldots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

$\begin{pmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \end{pmatrix}$

Sean X,Y dos v.a. Con función de densidad conjunta

$\mathrm{Var}(X)$ $\mathrm{cov}(X,Y)$

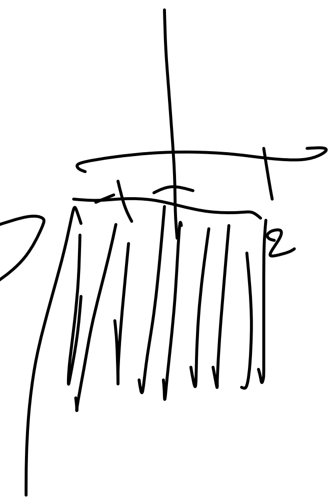
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi 0.6} e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

$\mathrm{Var}(Y)$

1. Calcular E[X], E[Y], var(X), var(Y), y cov(X,Y)
2. Hallar las densidades marginales de X e Y
3. Calcular P(X<2, Y<-1) $= 0{,}13778$

$E[X] = 0$

$E(Y) = 0$



$X \sim N(0,1)$ $Y \sim N(0,1)$

Que pasa $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{2}} \,(\det \Sigma)^{1/2}\, e^{-\frac{1}{2}\underbrace{(\underline{x}-\underline{\mu})^T \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix} (\underline{x}-\underline{\mu})}}$$

$$e^{-1/2 [x_1 \, 1/\sigma_1^2 \, x_1 + x_2 \, 1/\sigma_2 \, x_2}$$

Bibliografía

Bibliografía

"Mathematical Statistics with Applications", Dennis D. Wackerly, William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer.