Ejercicio 1

$X|_{M=\mu} \sim Poi(\mu)$ Recuerdo que $\mathcal{E}(1/2) \equiv \Gamma(1, 1/2)$

$\pi(\mu) \sim \mathcal{E}(1/2)$ y entonces estamos trabajando con familias conjugadas

$\Rightarrow$ Sé que la a posteriori de M va a ser Gamma también

$$f_{M|\underline{X}=\underline{x}}(\mu) = \frac{f_{\underline{X}|M=\mu}(\underline{x})\,\pi(\mu)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}|M=\mu}(\underline{x})\,\pi(\mu)\,d\mu} \propto \prod_{i=1}^{100}\left(\frac{\mu^{x_i}}{x_i!}e^{-\mu}\right)\overbrace{\tfrac{1}{2}e^{-1/2}}^{\pi(\mu)}$$

$$= \frac{\mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i}}{\prod_{i=1}^{100}(x_i)!}e^{-n\mu}\,\tfrac{1}{2}e^{-1/2} \propto \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i}e^{-\mu(n+1/2)}$$

también va al proporcional

respecto de μ es una cte. $\Rightarrow$ lo meto en el proporcional

$$\Rightarrow M|\underline{X}=\underline{x} \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{100} x_i + 1,\ n+1/2\right)$$

con los datos: $\sum^{100} x_i = 212$, $n = 100$

$\Rightarrow M|\underline{X}=\underline{x} \sim \Gamma(213, 100.5)$

$$\mathbb{P}(X=0|\underline{X}=\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_\mu(X=0)\, f_{M|\underline{X}=\underline{x}}(\mu)\, d\mu$$

proba total

$$= \int_0^{\infty} \frac{\mu^0 e^{-\mu}}{0!}\,\frac{(n+1/2)^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{100} x_i+1\right)}e^{-\mu(n+1/2)}\,d\mu$$

$$\int_0^{\infty}\frac{(n+1/2)^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1}}{\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)!}e^{-\mu(n+1/2+1)}\,d\mu$$

lo de adentro de la integral tiene pinta de gamma pero de otros parámetros

completo para que integre 1

$$= \frac{(n+1/2)^{\sum x_i+1}}{(n+1/2+1)^{\sum x_i+1}}\int_0^{\infty}\frac{(n+1/2+1)^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1}}{(\sum x_i)!}e^{-\mu(n+1/2+1)}\,d\mu$$

$= 1$ (integro en todo el soporte una densidad $\Gamma(\sum x_i+1,\ n+3/2)$)

(sino lo pongo en Wolfram) $= \left(\frac{n+1/2}{n+3/2}\right)^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1} = 0.1213$

Ejercicio 3

Teoría $X|_{P=p} \sim Ber(p)$, $X = \begin{cases} 1 & \text{si está a favor} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$$P \sim \beta(a,b) \Rightarrow f(p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, p^{a-1}(1-p)^{b-1}$$

Recuerdo que otra vez estamos trabajando con familias conjugadas.

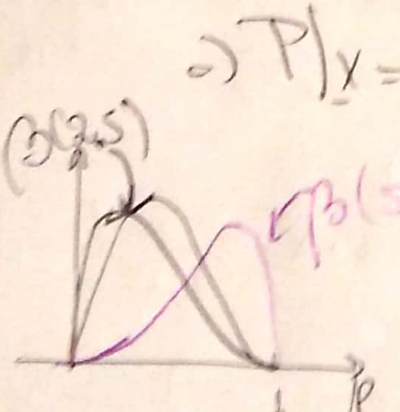
$$f_{P|\underline{X}=\underline{x}}(p) = \frac{\prod_{i=1}^{100}\left(p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\right) \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, p^{a-1}(1-p)^{b-1}\, 1\{0<p<1\}}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\underline{X}|P=p}(\underline{x})\, f_{P|\underline{X}=\underline{x}}(p)\, dp}$$

$$\propto p^{\sum x_i}(1-p)^{100-\sum x_i}\, p^{a-1}(1-p)^{b-1}\, 1\{0<p<1\} = p^{(\sum x_i + a - 1)}(1-p)^{100-\sum x_i+b-1}\, 1\{0<p<1\}$$

$$\Rightarrow P|\underline{X}=\underline{x} \sim \beta\left(\sum x_i + a,\ 100 - \sum x_i + b\right)$$

con los datos, $\sum x_i = 62$

$$\Rightarrow P|\underline{X}=\underline{x} \sim \beta\left(62+a,\ 38+b\right)$$



Obs: grafiquen cómo quedó la a posteriori en ambos casos.