Clase 6

jueves, 24 de noviembre de 2022 18:47

Intervalos de confianza de nivel asintótico

Ejercicio 6

Se arroja 50 veces una moneda con probabilidad p de salir cara. Hallar un intervalo de confianza asintótico de nivel 0.95 para p basado en la observación X=50.

$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{50} X_i$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si sale cara} \\ 0 & \text{si sale ceca} \end{cases}$, $X_i \sim Be(p)$, $i = 1; 2; \dots; n$

↳ Parámetro a estimar

Estimador de p : $\bar{X} = \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{n}$ $\sum_{i=1}^{50} X_i \sim Bi(n; p)$

$\{X_1; X_2; \dots; X_{50}\}$ m.a. de tamaño 50

Si n es grande : $\frac{\bar{X} - E[\bar{X}]}{\sqrt{V(\bar{X})}} \overset{(a)}{\sim} N(0;1)$

Por T.C.L.

$U = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \sqrt{n} \overset{(a)}{\sim} N(0;1)$, $E[\bar{X}] = p \wedge Var(\bar{X}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$P(a < U < b) = 1 - \alpha \Rightarrow P\left(z_{0{,}025} < \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{0{,}975}\right) = 0{,}95$

$p \to \bar{X} = \hat{p}$

$I(\underline{X}) = \left(\bar{X} - \underbrace{z_{0{,}975}}_{=1{,}96} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} ; \bar{X} + \underbrace{z_{0{,}975}}_{=1{,}96} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$

Teorema de Slutsky

De la muestra se obtuvo: $\bar{x} = \frac{50}{50} = 1$

$I.C(\mu) = (1 ; 1)$

Ejercicio 7

De un experimento en los efectos de un medicamento para la ansiedad se midió el puntaje en un test de memoria antes y después de tomar el medicamento. A partir de los datos que se encuentran en el archivo Islander_data.csv hallar un IC para la media del tiempo de respuesta después de consumir el medicamento.

X_i: tiempo de respuesta de la persona i después de la medicación.

Estimador de μ : $\bar{X} \Rightarrow U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{(a)}{\sim} N(0;1)$

$\sigma \to$ S como estimador

$I(\bar{X}) = \left(\bar{X} - z_{0{,}975} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{0{,}975} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

Test de hipótesis

Ejercicio 1

Supongamos que en las especificaciones de procedimientos de una planta de energía nuclear se establece que la resistencia media de soldadura debe superar 100lb/plg. Supongamos que somos el director del equipo de inspección del ente regulador estatal que debe determinar si la planta cumple con las especificaciones. e planea seleccionar una muestra al azar de soldaduras y realizar pruebas en cada una de ellas.

X_i : resistencia de la soldadura i (lb/plg.) , $i=1,2,..,n$

1. ¿Cuáles son las hipótesis a testear?

$H_0: \mu \leq 100$ vs. $H_1: \mu > 100$

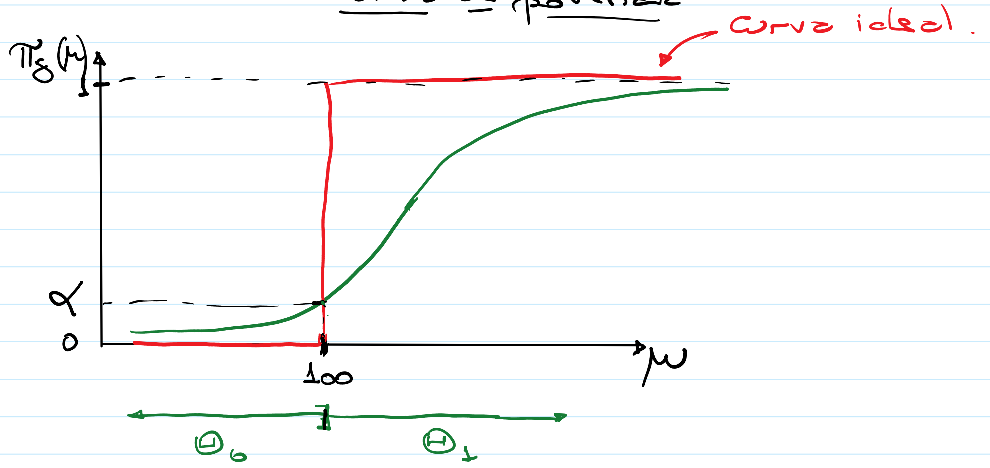
2. Explicar que significa en este contexto el error de tipo I y el de tipo II, y discutir cuáles son las consecuencias de cometer cada tipo de error

Error tipo I : aprobar la planta que no cumple con el requerimiento de resistencia media

Error tipo II : cerrar la planta que cumple con el requerimiento de resistencia media.

Potencia del test: $P(\text{rechazar } H_0) = \pi_\delta(\theta) = P(\delta(\underline{X})=1)$

Curva de potencia



Ejercicio 2

Se tiene una m.a. de tamaño n de una población uniforme en el intervalo $(0,\theta)$.

1. Diseñar un test de hipótesis para decidir si θ es mayor a 2.5 con un α nivel de significación de 0.05.
2. Suponer θ=3, n=20, simular la m.a. y decidir en base a ella.
3. Hallar el p-valor.

→ parámetro que se

2. Suponer θ=3, n=20, simular la m.a. y decidir en base a ella.
3. Hallar el p-valor.

$\underline{X} = \{X_1, X_2, \dots ; X_n\} \quad X_i \sim U(0;\theta)$ parámetro que se pone a prueba.

$H_0: \theta \leqslant 2{,}5 \quad \text{vs.} \quad H_1: \theta > 2{,}5$

Estimador de máx. verosimilitud de θ : $\text{máx}\{X_i\}_{i=1}^{n} = U$

$$F_U(u) = P(U \leqslant u) = P(X_1 \leqslant u, X_2 \leqslant u; \dots ; X_n \leqslant u) =$$
$$= \left(\frac{u}{\theta}\right)^n \mathbb{1}\{0 \leqslant u \leqslant \theta\} + \mathbb{1}\{u \geqslant \theta\} \quad X \sim U(a;b) \Rightarrow F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}\mathbb{1}\{a \leqslant x < b\} + \mathbb{1}\{x \geqslant b\}$$

Propongo un estadístico de prueba: $T = \dfrac{U}{\theta}$

$$F_T(t) = P(T \leqslant t) = P\left(\frac{U}{\theta} \leqslant t\right) = P(U \leqslant t \cdot \theta) =$$
$$= F_U(t \cdot \theta) = \left(\frac{t\cancel{\theta}}{\cancel{\theta}}\right)^n = t^n \mathbb{1}\{0 \leqslant t < \theta\} + \mathbb{1}\{t \geqslant \theta\}$$

$$\underbrace{\delta(\underline{X})}_{\text{Regla de decisión}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\max\{X_i\}_{i=1}^{n}}{2{,}5} > k_\alpha \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(bajo H0 verdadera

$$\alpha = \max_{\theta \in \Theta_0} P(\delta(\underline{X}) = 1), \quad \alpha = P_{\theta=2{,}5}\Bigg(\overbrace{\frac{\max\{X_i\}_{i=1}^{n}}{2{,}5}}^{T} > k_{0{,}05}\Bigg) = 0{,}05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P_{\theta=2{,}5}(T \leqslant k_{0{,}05}) = 0{,}05 \Rightarrow 1 - (k_{0{,}05})^n = 0{,}05 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k_{0{,}05} = \sqrt[n]{0{,}95}$$

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\max\{X_i\}_{i=1}^{n}}{2{,}5} > \sqrt[n]{0{,}95} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

. De $n = 20 \rightarrow \max\{X_i\}_{i=1}^{20} = 2{,}7102 \Rightarrow \dfrac{\max\{X_i\}}{2{,}5} = 1{,}0841$, $k_{0{,}05} = \sqrt[20]{0{,}95} = 0{,}9974$

Conclusión: como $\max\{X_i\}_{i=1}^{20} > k_{0{,}05} = 0{,}9974$ hay evidencia para rechazar Ho, con $\alpha = 0{,}05$

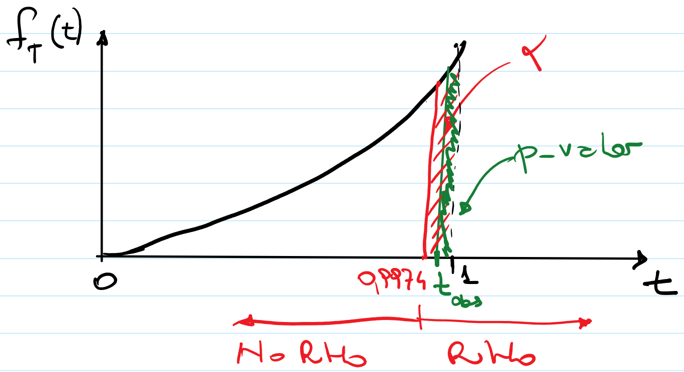
$$\text{p-valor} = P_{\theta=2{,}5}\left(\frac{\max\{X_i\}_{i=1}^{n}}{2{,}5} > 1{,}0841\right) = 0$$

$$\alpha = P\left(\frac{\max\{X_i\}_{i=1}^{20}}{2{,}5} > 0{,}9974\right) = 0{,}05$$

$f_T(t)$

$\gamma - \alpha$

$2,5$



Otro ejemplo: $n=20 \rightarrow \frac{\max\{x_i\}}{2,5} = 0,9998$

$$p\text{-valor} = P_{\theta=2,5}\left(\frac{\max\{X_i\}}{2,5} > 0,9998 \right) = 1 - 0,9998^{20} = 0,004$$

Ejercicio 3

Se realiza un estudio para estimar la proporción de residentes en una ciudad que están a favor de la construcción de una planta de energía nuclear. En una muestra de 100 personas se observó que la proporción de individuos que se encuentran a favor fue de 0.62

1. ¿Puede decirse con un nivel de significación de 0.01 que la mayor parte de la población está a favor de la construcción de la planta nuclear?
2. Hallar el p-valor.

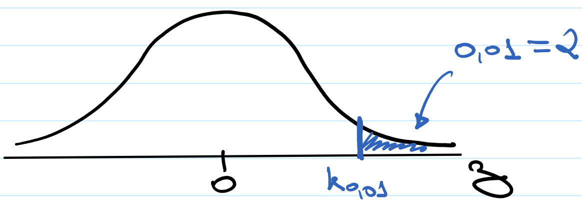
$$X_i = \begin{cases} \text{la persona } i \text{ está a favor de la planta} \\ \text{'' \quad '' \quad '' no está a favor de la planta} \end{cases} \qquad X_i \sim Be(p)$$

$$H_0: p \leq 0,5 \quad \text{vs} \quad H_1: p > 0,5$$

Estimador de p: $\hat{p} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\quad \overline{X} \overset{(a)}{\sim} N\left(p\,;\, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

Por T.C.L.: $Z = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \sqrt{n} \overset{(a)}{\sim} N(0;1)$

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\overline{X} - 0,5}{\sqrt{0,5\cdot(1-0,5)}} \cdot \sqrt{100} > k_{0,01} = 2,33 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



No R H_0 | R H_0

. De la muestra $n=100 \rightarrow \bar{x} = 0,62 \Rightarrow \dfrac{0,62-0,5}{\sqrt{0,5 \cdot 0,5}} \cdot \sqrt{100} = 2,4 > 2,33$

$\Rightarrow$ rechazamos H_0.

p-valor $= P_{p=0,5}\left(Z > 2,4\right) = 0,082$