Probabilidad y estadística

Clase 7

Procesos estocásticos

(pantallazo)

¿Qué es un proceso estocástico?

Así como las variables aleatorias mapean los posibles resultados de un experimento aleatorio a un número (real), los procesos estocásticos mapean los resultados de un experimento aleatorio a un conjunto de funciones en el tiempo.

Ejemplos: el valor de una acción a lo largo del tiempo, tiempos entre arribos del colectivo, resultados de arrojar sucesivamente un dado.

Procesos de Markov de tiempo discreto

Procesos de Markov

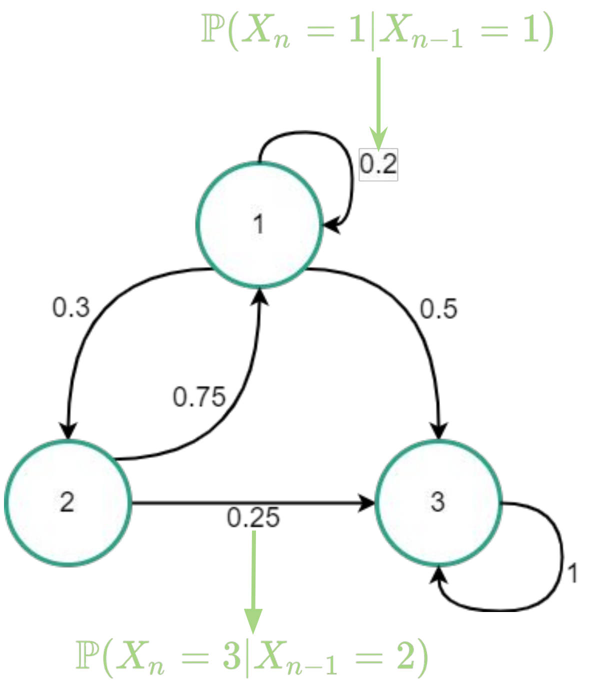
Los procesos de Markov son procesos estocásticos que se caracterizan por tener memoria. Esto quiere decir que las probabilidades futuras dependen valor actual que toma el proceso.

Proceso de Markov de tiempo discreto

Las transiciones ocurren en instantes de tiempo discretos, indexados por $n \in \mathbb{N}_0$. En cada instante n, el proceso de Markov tiene un estado X_n. Cada estado puede tomar valores en un conjunto finito (o a lo sumo enumerable) $\mathcal{S}$, llamado espacio de estados.

La propiedad de Markov se puede describir a través de las probabilidades de transición:

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) \\ = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$$



Proceso de Markov de tiempo discreto

El proceso se puede definir en función de las probabilidades de transición $p_{i,j}(n+1,n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), i, j \in \mathcal{S}$.

El objetivo es poder conocer en cada instante de tiempo $p_j(n) = \mathbb{P}(X_n = j)$. Por el teorema de probabilidad total, tenemos que

$$
\begin{aligned}
p_j(n) = \mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{k \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = k) \mathbb{P}(X_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{i,k}(n, n-1) p_k(n-1)
\end{aligned}
$$

Proceso de Markov de tiempo discreto

Definiendo la matriz de transición de estados como

$$\mathbf{P}(n,m) := [p_{i,j}(n,m)] = \begin{bmatrix} p_{1,1}(n,m) & \dots & p_{1,k}(n,m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1}(n,m) & \dots & p_{k,k}(n,m) \end{bmatrix}$$

y $\boldsymbol{p}(n) = \begin{bmatrix} p_1(n) & \dots & p_k(n) \end{bmatrix}^T$ podemos escribir

$$\boldsymbol{p}(n) = \mathbf{P}(n, n-1)\boldsymbol{p}(n-1).$$

Procesos de Markov de tiempo discreto homogéneos

Proceso de Markov homogéneo

Si las probabilidades de transición son independientes del instante en que ocurren dichas transiciones, es decir $\mathbf{P}(n, n-1) = \mathbf{P}(m, m-1) = \mathbf{P}(1) \; \forall \; n, m$, el proceso se dice homogéneo y la matriz de transición de estados es estacionaria.

Luego, $\boldsymbol{p}(n) = \mathbf{P}(1)\boldsymbol{p}(n-1)$ y podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(1) &= \mathbf{P}(1)\boldsymbol{p}(0) \\
\boldsymbol{p}(2) &= \mathbf{P}(1)\boldsymbol{p}(1) = \mathbf{P}(1)^2\boldsymbol{p}(0) = \mathbf{P}(2)\boldsymbol{p}(0) \\
&\;\;\vdots \\
\boldsymbol{p}(n) &= \mathbf{P}(1)^n\boldsymbol{p}(0) = \mathbf{P}(n)\boldsymbol{p}(0),
\end{aligned}
\qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{P}(n) := \mathbf{P}(1)^n
$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Ecuación de Chapman-Kolmogorov: para un proceso de Markov homogéneo de tiempo discreto, y $n_1 < n_2 < n_3$ vale que

$$p_{i,j}(n_3 - n1) = \sum_k p_{i,k}(n_2 - n_1)p_{k,j}(n_3 - n_2)$$

Escrito de forma matricial: $\mathbf{P}(n3 - n_1) = \mathbf{P}(n_2 - n_1)\mathbf{P}(n_3 - n_3)$.

En particular, si $n_3 = 1,\ n_2 = n - 1, n_1 = 0$ tenemos que
$p_{i,j}(n) = \sum_k p_{i,k}(n-1)p_{k,j}(1)$ o equivalentemente
$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n-1)\mathbf{P}(1)$

Comportamiento asintótico

Se definen las probabilidades de estado estacionario como

$$\mathbf{P} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(n) = \lim_{n-1\to\infty} \mathbf{P}(n-1),$$

de forma que $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(n) = \left(\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(n)\right) \boldsymbol{p}(0) = \mathbf{P}\boldsymbol{p}(0) := \pi$.

A π se la conoce como probabilidades del estado límite.

Además podemos reescribir la expresión anterior como

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(n)\boldsymbol{p}(0) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(1)\mathbf{P}(n-1)\boldsymbol{p}(0) = \mathbf{P}(1)\pi.$$

Observamos que, si existen, las probabilidades del estado estacionario son justamente el autovector de $\mathbf{P}(1)$ asociado al autovalor 1. Tomaremos aquel que satisfaga que $\sum_i \pi_i = 1$

Proceso Gaussiano

Proceso Gaussiano

Un proceso estocástico $X(t)$ se dice Gaussiano si todas las funciones de densidad de orden n son Gaussianas n-dimensionales. Es decir, si llamamos $X(t_i) = X_i$, luego $X = [X_1, \ldots, X_n]^T$ tiene densidad

$$f_X(x) = (2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)},$$

donde $\mu = [\mu(t_1), \mu(t_2), \ldots, \mu(t_n)]^T$ y $\Sigma = \begin{bmatrix} C(t_1, t_1) & \ldots & C(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t_n, t_1) & \ldots & C(t_n, t_n) \end{bmatrix}$,

$C(t_i, t_k) = cov(X(t_i), X(t_k)) = R(t_i, t_k) - \mu(t_i)\mu(t_k)$, y

$R(t_i, t_k) = \mathbb{E}[X(t_i)X(t_k)]$.

Proceso Gaussiano ESA

Diremos que además el proceso es estacionario en sentido amplio (ESA) si su media es constante en el tiempo y la autocorrelación depende sólo de la diferencia de tiempos:

$\mu(t_i) = \mu(t_j) = \mu \;\forall\; i, j$, y $C(t_i, t_j) = C(t_j - t_i)$ o equivalentemente $C(t_i, t_i + \tau) = C(\tau) = R(\tau) - \mu^2$.

Dado que las variables normales están unívocamente determinadas por su media y matriz de covarianza, entonces si el proceso Gaussiano es ESA, las funciones de densidad son invariantes a traslaciones en el tiempo:

$$f_X([x(t_1), \ldots, x(t_n)^T] = f_X([x(t_1 + \tau), \ldots, x(t_n + \tau)]^T)$$

A este tipo de procesos se los conoce como estacionarios en sentido estricto.

Proceso Gaussiano Blanco

Si el proceso gaussiano es ESA con $\mu = 0$ y se cumple que Σ es un matriz diagonal, entonces estamos frente a un proceso blanco. Esto implica que

$R(\tau) = k\delta(\tau)$, donde $\delta(\tau) = \mathbf{I}\{\tau = 0\}$ es la delta de Dirac, y k una constante.

Los procesos blancos gaussianos suelen usarse para modelar el ruido de distintos sistemas, un buen ejemplo es el ruido térmico. En estos casos se dice que estamos en presencia de ruido blanco o descorrelacionado.

Bibliografía

Bibliografía

- "Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis", K. Sam Shanmugan, Arthur M. Breipohl, by John Wiley & Sons, 1988
- MIT - Lecture Notes Course 6.041-6.431, Fall 2000
- "Random Signals and Systems", Bernard Picinbono, by Prentice Hall, 1993