

Guía de ejercicios para el curso nivelatorio

1 Clase 1

- Sean 2 eventos A y B , escribir las expresiones en términos de uniones, intersecciones y complementos para los siguientes casos:
 - Ocurren ambos eventos
 - Ocurre alguno
 - No ocurre ninguno
 - Ocurre exactamente uno de los dos.
- En un pueblo, la cantidad de personas separadas según color de pelo y ojos se encuentra en la siguiente tabla:

ojos/pelo	rubio	pelirrojo	marron	oscuro	negro
verdes	10	5	4	3	1
azules	6	1	4	2	3
castaños	6	2	6	7	5
oscuros	2	1	6	3	3

Se elige una persona del pueblo al azar. Calcular la probabilidad de que:

- tenga ojos azules y sea pelirroja
 - tenga ojos azules
 - sea pelirroja
 - tenga ojos azules o sea pelirroja
- En una materia optativa, el 35% de los asistentes estudia ingeniería, el 67 % prefiere Netflix y el 56% toma café, el 27% estudia ingeniería y prefiere Netflix, el 29% prefiere Netflix y toma café, el 22% estudia ingeniería y toma café. El 5% no estudia Ingeniería ni prefiere Netflix ni toma café.

Se elige un asistente al azar. Calcular la probabilidad de que

- no tome café y prefiera Netflix
- sólo tome café
- sólo estudie Ingeniería
- estudie ingeniería o prefiera Netflix

- (e) posea las tres características mencionadas
4. Se arrojan dos dados equilibrados y se anotan los números observados en la cara superior.
 - (a) Definir el espacio muestral
 - (b) Hallar la probabilidad de que salga un 1 en ambas tiradas
 - (c) Hallar la probabilidad que de en el primer tiro salga un número par, y en el segundo uno impar
 - (d) Hallar la probabilidad de que se observe un número par y uno impar.
 - (e) Si sabe que en el primer dado se observó un múltiplo de 3, calcular la probabilidad de que en el segundo dado salga un 3.
 5. De un experimento en los efectos de un medicamento para la ansiedad, se midió la dosis del medicamento, que puede ser 1, 2 o 3, y la diferencia (en segundos) entre el puntaje de un test de memoria antes y después de tomar el medicamento. De los que obtuvieron la dosis 1, el 50% tuvo una diferencia negativa, de los que obtuvieron la dosis 2 el 40%, y los que obtuvieron la dosis 3 el 30%. La probabilidad que a una persona le hayan dado cualquiera de las tres dosis es la misma. Se pide:
 - (a) Calcular la probabilidad de que una persona seleccionada al azar obtenga una diferencia negativa
 - (b) Si una persona elegida al azar obtuvo una diferencia negativa, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido la dosis 1?
 6. **Bonus** Tito va al casino a jugar a la ruleta. En cada jugada, apuesta \$100 al rojo, si gana el casino duplica la apuesta. Si inicialmente tiene \$200, ¿cuál es la probabilidad de que se quede sin dinero luego de la 3er apuesta? Para simular: ¿Cuál es la probabilidad de que pueda jugar más de 4 veces antes de quedarse sin capital?
 7. **Bonus** En una competencia se tienen 3 puertas de las cuales se debe elegir una. Dos puertas tienen la foto de un chanco y la tercera tiene la foto de un automóvil. Si el participante acierta la puerta del automóvil, lo gana. En caso contrario, no gana nada. Una vez que el participante elige una puerta, aún con todas las puertas cerradas, el organizador de la competencia - que sabe en qué puerta se encuentra la foto del automóvil - abre una de las tres puertas que tiene la foto de un chanco. ¿Qué le conviene hacer al participante, cambiar su elección o no? Justificar usando probabilidad a priori y probabilidad condicional.

2 Clase 2

1. Sea arroja una moneda 10 veces y se observa la cantidad de cecas observadas
 - (a) Definir la v.a. asociada al experimento
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 cecas si la moneda es balanceada?
 - (c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 3 cecas cuando la moneda está cargada de forma que la probabilidad de ceca es 0.4?
 - (d) Con la moneda cargada del inciso anterior, ¿cuál es la probabilidad de observar al menos 5 caras?

- (e) Hallar la función de probabilidad de la v.a. definida en el inciso a).
 - (f) Hallar la esperanza y varianza de la v.a.
 - (g) Simular los items anteriores en Octave usando: i) una distribución uniforme con la función `np.rand` para simular el proceso Bernoulli; ii) las funciones `stats.binom.pmf`, `stats.binom.cdf` para calcular la probabilidad binomial (stats pertenece a la librería `scipy` de Python).
2. Sea X una v.a. con función de distribución $F_X(x) = (1 - e^{-t^2/2}) \mathbf{1}\{x > 0\}$
- (a) Calcular la probabilidad de que X sea mayor a 4
 - (b) Calcular la probabilidad de que X se encuentre en el intervalo $(1,2)$
 - (c) Si se sabe que X es mayor a 4, hallar la probabilidad de que X sea menor a 5
 - (d) Obtener la función de densidad de X
 - (e) Hallar la esperanza y varianza de X
3. Sean X, Y dos v.a. i.i.d. $U[0, 1]$. Encontrar la expresión de la función de densidad de probabilidad conjunta.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que $X > 0.7$ y $Y < 0.4$ simultáneamente?
 - (b) ¿Cuál es el percentil 40 de X , i.e. $x_{0.4}$?
 - (c) Simular en Octave escribiendo la pdf conjunta o usando funciones de Octave `rand`, `unifpdf`, `unifcdf`
 - (d) Graficar la cdf en función de x, y
4. En una reunión con amigos, Agus prepara Fernet en una jarra de 1 litro. La cantidad (en litros) de Fernet y Coca que coloca en la jarra son variables aleatorias X e Y respectivamente, con densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y) = 96x \mathbf{1}\{0.25 < x < 0.5, 0.5 < y < 1 - x\}$.
- (a) Calcular $\mathbb{P}(X > 1/2Y)$
 - (b) Hallar las densidades marginales de X y de Y
 - (c) ¿ X e Y son variables aleatorias independientes?
 - (d) Hallar la esperanza de (X, Y) y la covarianza entre ambas variables.
5. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad conjunta:

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{x^2 y}{36} \mathbf{1}\{x \in \{-1, 1, 2\}, y \in \{1, 2, 3\}\}$$

- (a) Hallar las funciones de probabilidad marginales de X e Y
- (b) Sean $U = \min(X, Y)$ y $V = \max(X, Y)$. Calcular $\mathbb{P}(U = 1 | V = 2)$.
- (c) Calcular la covarianza entre X e Y .