

Probabilidad y Estadística

Clase 1

Cronograma

Clase 1	Repaso Distribuciones útiles.
Clase 2	Transf de v.a.
Clase 3	V.a. condicionadas Esperanza condicional ECM y estimadores de cuadrados mínimos
Clase 4	Estimación Bayesiana Estimador de máxima verosimilitud
Clase 5	Estimación no paramétrica Intervalos de confianza
Clase 6	Intervalos de confianza Test de hipótesis
Clase 7	Repaso
Clase 8	Examen

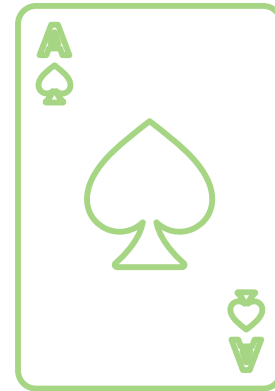
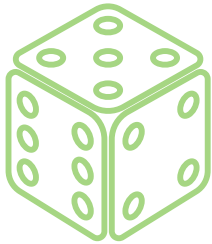
Eventos

Repaso

The background of the slide features a series of overlapping green geometric shapes, primarily triangles and quadrilaterals, in various shades of green, creating a modern, abstract design. A thin horizontal line is visible near the top of the slide.

**Por qué es importante
probabilidad para IA?**

Espacios equiprobables



Espacios equiprobables

Si estamos en presencia de un espacio **equiprobable**, es decir donde todos los elementos tienen las mismas chances de ocurrir, las probabilidades pueden calcularse como la proporción entre la cantidad de casos donde ocurre el experimento y la cantidad de elementos que existen en el espacio muestral. A esto se lo conoce como regla de **Laplace**

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\text{"casos favorables"}}{\#\text{casos totales}}$$

Probabilidades condicionales y proba. total

Def: Se llama **probabilidad condicional** de A dado B ($\mathbb{P}(A|B)$) a la probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que B ha ocurrido, y está definida por

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

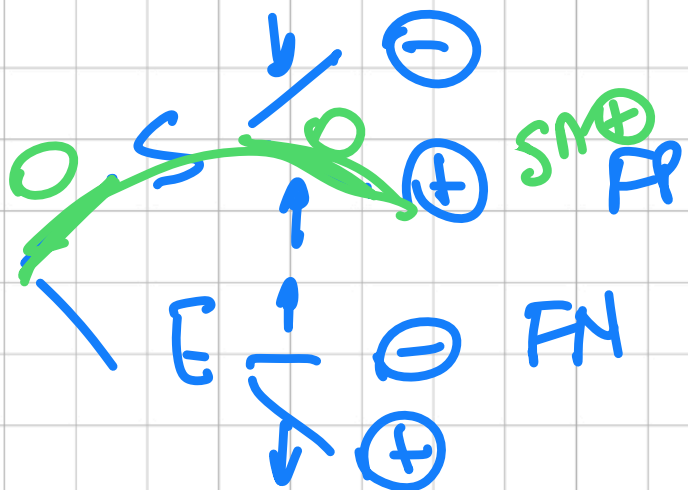
Def: Diremos que los eventos B_1, \dots, B_n forman una **partición** si $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i, j$

y $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.

Luego podemos describir al evento A como $A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$ de forma que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

Fórmula de probabilidad total



$$P(\oplus) = \underbrace{P(\oplus | S) P(S)}_{P(\oplus \wedge S)}$$

$$\underbrace{P(\oplus | E) P(E)}_{P(\oplus \wedge E)}$$



Teorema de Bayes e independencia

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)$$

Teorema de Bayes: Sean B_1, \dots, B_n una partición de Ω , y A un evento con probabilidad positiva:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)}$$

$$\mathbb{P}(S|\oplus) = \frac{\mathbb{P}(S \cap \oplus)}{\mathbb{P}(\oplus)} = \frac{\mathbb{P}(\oplus|S) \mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(\oplus)}$$

Def: Diremos que dos eventos A y B son **independientes** si y sólo si vale que

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(A|B)}_{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}(B)$$

Variables aleatorias

Variables aleatorias

Una va. X es una función que mapea eventos a números.

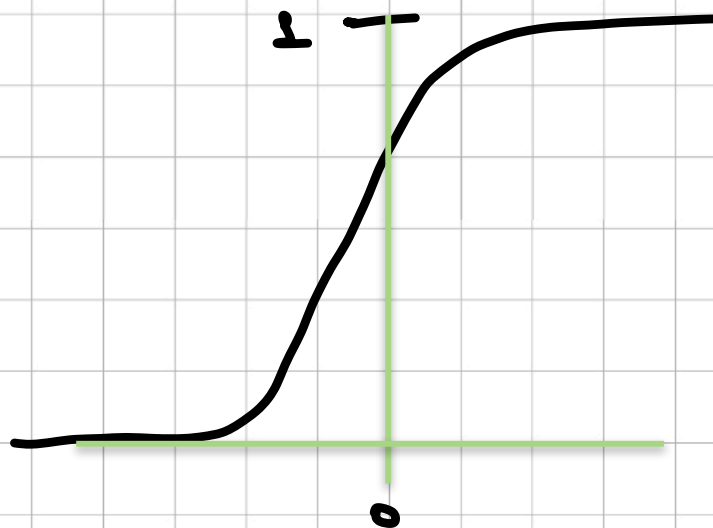
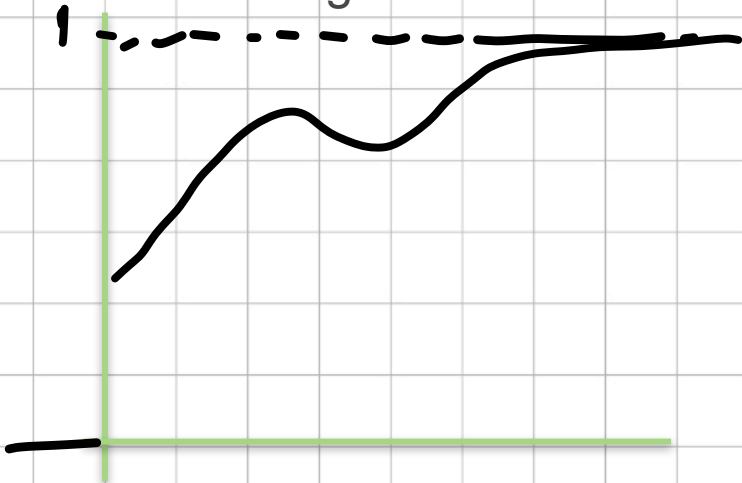
Ejemplo: basto $\rightarrow 1$, Oro $\rightarrow 2$, espada $\rightarrow 3$, copa $\rightarrow 4$

X tiene asociada una función de distribución, definida como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

- $F_X(x) \geq 0$
- $F_X(x)$ Es no decreciente
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

Cuáles de las siguientes son funciones de distribución?



Tipos de v.a.

- Discretas (v.a.d): toman valores en un conjunto discreto o enumerable de puntos. Si X es **v.a.d**, tendrá además función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$



- Continuas (v.a.c): toman valores en un intervalo continuo. Si X es una **v.a.c**, tendrá asociada una función de densidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

¿Qué propiedades debían cumplir cada una de estas funciones?

Vectores aleatorios

Distribución conjunta y marginales

Si tenemos dos variables X e Y se define su **función de distribución conjunta** como

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

En este caso, vale la regla del rectángulo

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) + F_{X,Y}(a, c)$$

Caso continuo: $f_{X,Y}(x, y)$ es la **función de densidad conjunta** y se definen las **funciones de densidad marginales** como $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy$ y $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx$

Caso discreto: $p_{X,Y}(x, y)$ es **función de probabilidad conjunta** y se definen las **funciones de probabilidad marginal** como $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$ y $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$

Independencia de v.a.

Diremos que dos v.a. X e Y son **independientes** si vale que

$$F_{X.Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Caso **discreto**:

$$p_{X.Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Caso **continuo**:

$$f_{X.Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$



Momentos

Momentos

Esperanza (o media):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X)] &= \int g(x) f_X(x) dx \\ &= \sum g(x) p_X(x)\end{aligned}$$

Varianza:

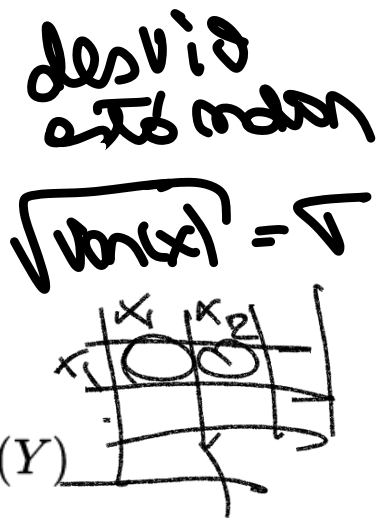
$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}(X)^2$$

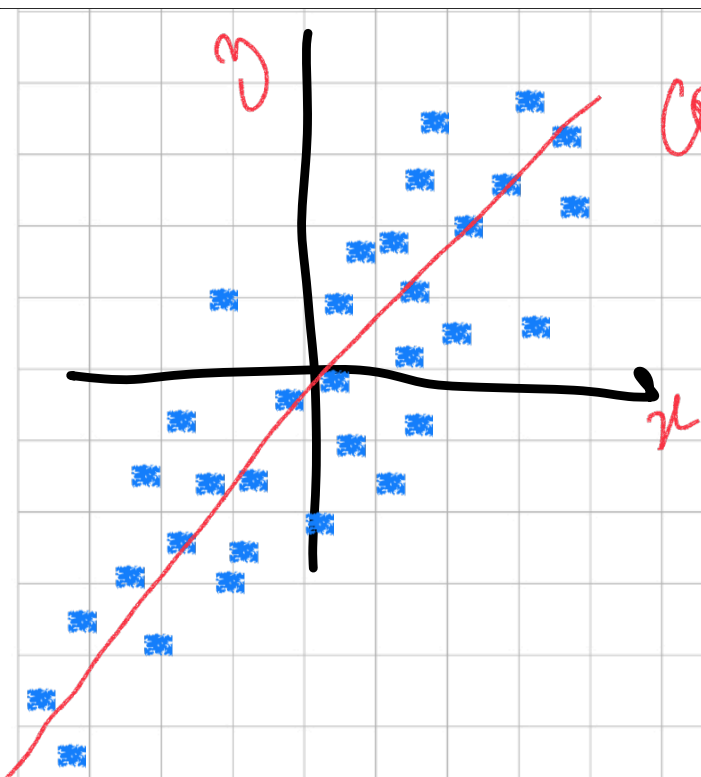
Covarianza:

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

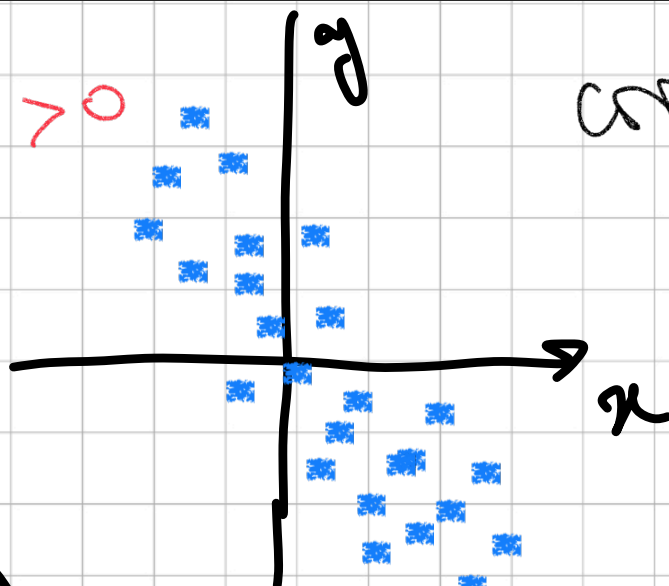
$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \text{var}(Y)}}$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

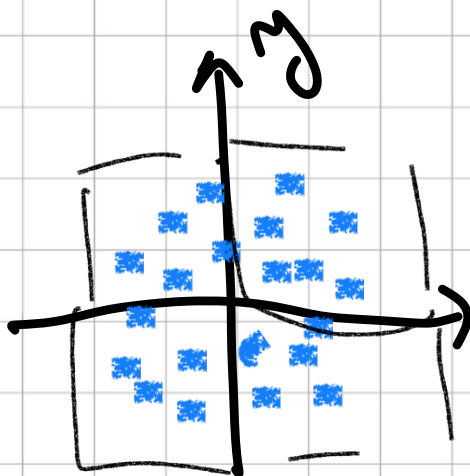




$$\text{cov}(x, y) > 0$$



$$\text{cov}(x, y) < 0$$



$$\text{cov}(x, y) = 0$$

Algunas distribuciones útiles

Variables discretas

- **Bernoulli(p)**: $X = \{0, 1\}$. Asociada a la ocurrencia o no de un éxito

- **Binomial(n, p)**: me cuenta la cantidad de éxitos en n ensayos. $P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
 $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, $X_i \sim \text{Ber}(p)$
- **Geométrica(p)**: cantidad de ensayos que debo realizar hasta observar el primer éxito $P_X(x) = p^1 (1-p)^{x-1}$

- **Categorico** (p_1, p_2, \dots, p_K) (K clases)

Se tira sucesivamente un dado

1. Probabilidad de necesitar menos de 3 tiros hasta ver el primer 2 ←
2. Probabilidad de ver exactamente un 2 en 5 tiros

1) $X =$ # de tiros hasta el 1º 2 "

$$P(X < 3) = P(\underbrace{X=1}_{\text{2}}) + P(\underbrace{X=2}_{\text{2}}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

2) $Y =$ # de 2 en 5 tiros "

$$P(Y = 1) = 5 \frac{5^4}{6^5} \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{c} 2 \quad \bar{2} \quad \bar{2} \quad \bar{2} \quad \bar{2} \\ \bar{2} \quad 2 \quad \bar{2} \quad \bar{2} \quad \bar{2} \end{array} \leftarrow \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6}$$

Variables continuas

- **Uniforme:** todos los puntos son equiprobables.

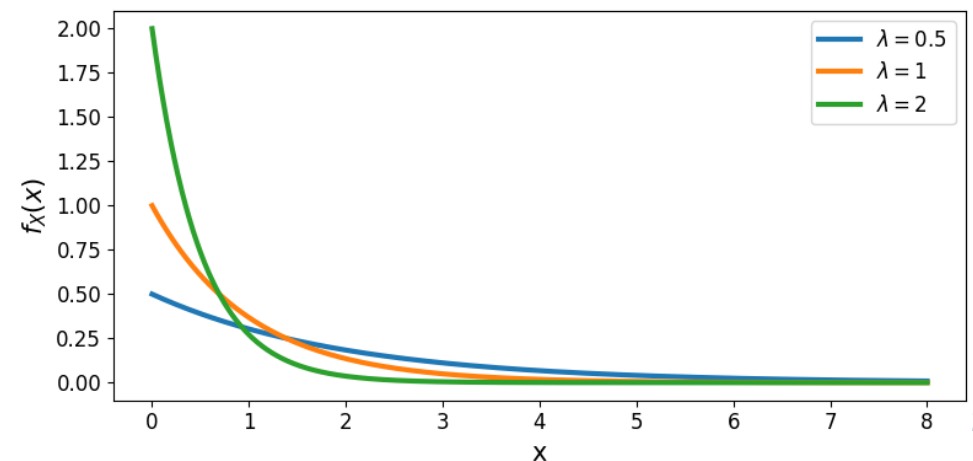
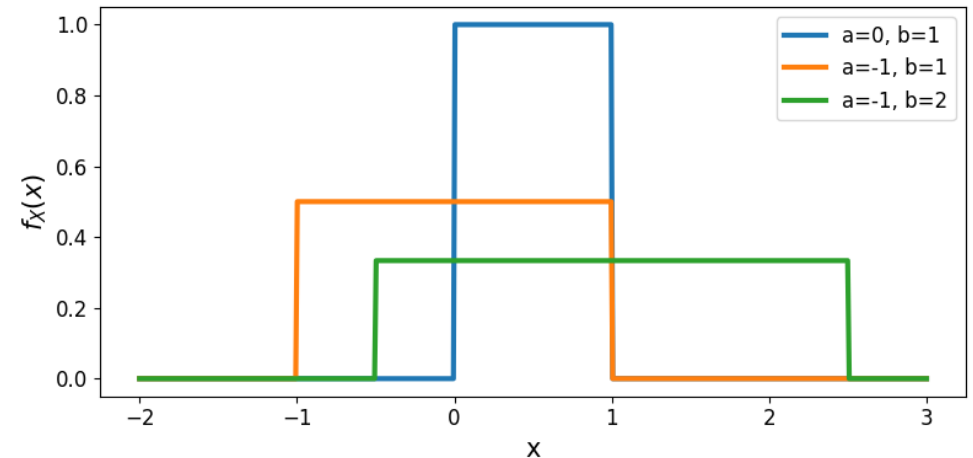
$$X \sim \mathcal{U}(a, b)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{I}\{a < x < b\}$$

- **Exponencial:** sirve para modelar tiempos hasta eventos que no tienen memoria.

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{I}\{x > 0\}$$



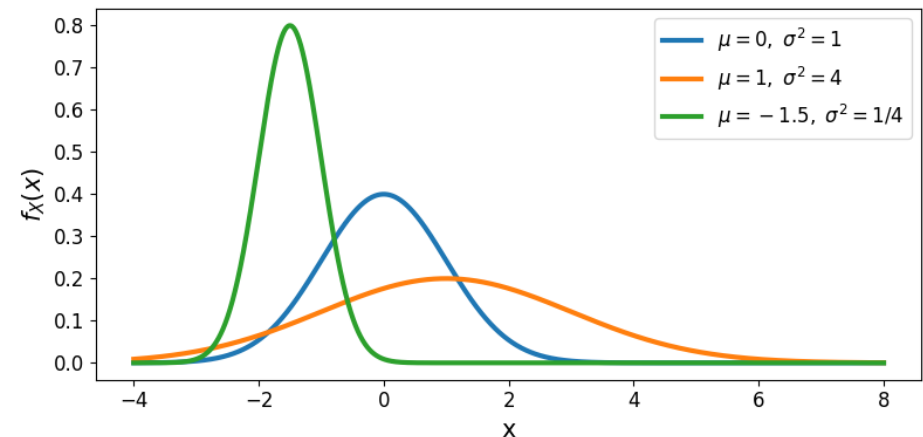
Variables continuas

- **Normal (gaussiana).** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

μ es la media
 σ^2 es la
varianza

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Propiedades: Sean X, Y dos v.a. Independientes



$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (\text{estandarización})$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) \rightarrow aX + bY \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

(combinación lineal de normales es normal)

Ejercicio 1

Sea X una v.a con distribución normal estándar. Hallar la probabilidad de que

1. $X > 1$
2. $X < -1$
3. $|X| < 1$
4. Hallar los cuantiles 0.1 y 0.9

Sea además $Y \sim N(2, 9)$

1. Hallar $P(2X + Y < 5)$

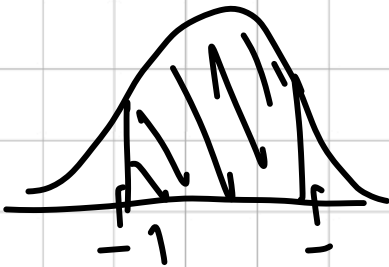
$$P(X > 1) = 1 - \underbrace{P(X \leq 1)}_{F_X(1)} = 0,15$$



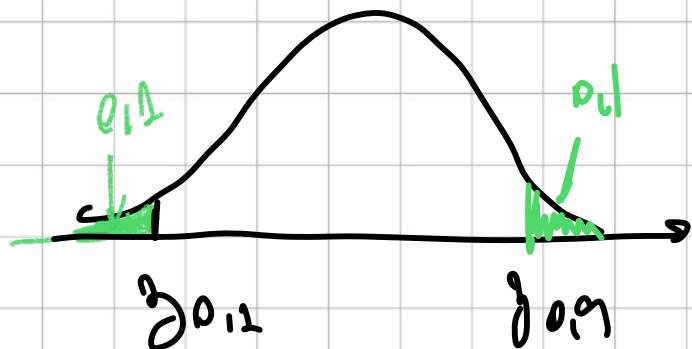
$$P(X < -1) = 0,15.$$



$$P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1) = 1 - 2 \cdot 0,15 \approx 0,7$$



Quantil $0,1$



$$z_{0,1}: z / P(X < z) = 0,1.$$

$$z_{0,1} = -1,28$$

Quantil $0,9$

$$z_{0,9} = 1,28$$

$$P(2x + y > 5) =$$

$$y \sim N(2, 9)$$

$$x \sim N(0, 1)$$

$$2x + y \sim N\left(\underbrace{2 \cdot 0 + 2}_2, \underbrace{2^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 9}_{13}\right)$$

$$Z = \frac{(2x + y) - 2}{\sqrt{13}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(Z > \frac{5-2}{\sqrt{13}}\right)$$

Ejercicio 2

El tiempo (en minutos) entre llamadas a un call center tiene una distribución exponencial de parámetro $1/5$.

1. Calcular la probabilidad de que la primer llamada llegue después de 2 minutos
2. Calcular la probabilidad de que la primer llamada llegue después de los 5 minutos, si se sabe que en los primeros 3 minutos no se recibieron llamados

Distribución normal multivariada

Función de densidad conjunta

Sea $\underline{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$ un vector aleatorio continuo, diremos que X tiene distribución normal multivariada, si su función de densidad conjunta es de la forma

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})^T \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})}$$

media

matriz de covarianza .

$$\underline{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \dots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \dots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Notación: $\underline{X} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$

Distribuciones marginales

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \Rightarrow X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$$

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \dots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \dots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

Sean X,Y dos v.a. Con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi 0.6} e^{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

1. Calcular $E[X]$, $E[Y]$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$, y $\text{cov}(X,Y)$
2. Hallar las densidades marginales de X e Y
3. Calcular $P(X < 2, Y < -1)$

Bibliografía

Bibliografía

“Mathematical Statistics with Applications”, Dennis D. Wackerly,
William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer.