2. Supongamos que en las especificaciones de procedimientos de una planta de energía nuclear se establece que la resistencia media de soldadura debe superar 100 lb/plg .Suponga que usted es el director del equipo de inspección del ente regulador estatal que debe determinar si la planta cumple con las especificaciones. Usted plantea seleccionar una muestra al azar de soldaduras y realizar pruebas en cada soldadura de la muestra.

a) ¿Cuáles son las hipótesis a testear?

b) Explicar que significan en este contexto el error de tipo I y el de tipo II y discutir cuales son las consecuencias de cometer cada tipo de error.

μ: Resistencia media de una soldadura

$H_0: \mu \leq 100$ vs. $H_1: \mu > 100$

$\Theta = \mathbb{R}_+$

$\Theta_0 = (0, 100]$

$\Theta_1 : (100, +\infty)$

E I: Rechazo H_0 cuando era cierta

E II: No Rechazo H_0 " " falsa

$\pi(\theta)$: Proba de Rechazar H_0

$EI: \pi(\mu) I\{\mu \leq 100\}$
$\mu \in \Theta_0$

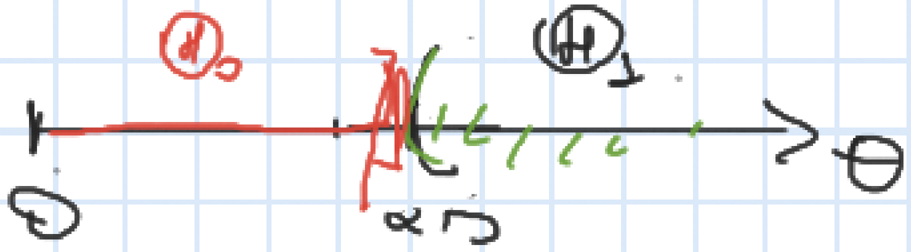
$EII: [1-\pi(\mu)] I\{\mu > 100\}$
$\mu \in \Theta_1$

Se tiene una m.a. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de una población y distribución $U(0,\theta)$. Diseñar un test de hip para decidir si θ es mayor a $2,5$. con un nivel de significación de 0.05

$H_0: \theta \leq 2.5 \qquad H_1: \theta > 2.5 \qquad \alpha = 0.05$

$\underbrace{2.5}_{\theta_0}$

$$\delta(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & U_{\theta_0} < k_\alpha \\ 0 & U_{\theta_0} \geq k_\alpha \end{cases} = I\left\{\frac{\max(\underline{X})}{2,5} > k_\alpha\right\}$$



$\Theta = \mathbb{R}_+$

$$U = \frac{\max(\underline{X})}{\theta}$$

$$\alpha = \max_{\theta \in \Theta_0} P(\text{Rechazar } H_0) = \max_{\theta \in \Theta_0} P(\delta(\underline{X}) = 1) = P_{\theta=2,5}(\delta(\underline{X}) = 1)$$

$$= P_{\theta=2,5}\left(\frac{\max(\underline{X})}{2,5} > k_\alpha\right) = P_{\theta=2,5}\left(\frac{\max(\underline{X})}{2,5} > k_\alpha\right) = 1 - \left(\frac{2,5\,k_\alpha}{2,5}\right)^n = 0,05 \Rightarrow k_\alpha = \sqrt[n]{0.95}$$

$$P(\max(\underline{X}) \leq u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ (u/\theta)^n & 0 \leq u < \theta \\ 1 & u \geq \theta \end{cases}$$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{I}\left\{\frac{\max(\underline{X})}{2{,}5} > \sqrt[n]{0{,}95}\right\}$$

$\theta_{obs} = 1{,}07 \Rightarrow$ con esta muestra

$k_\alpha = 0{,}99$

$\delta(\underline{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ no rechazo

H_0

$$\mathbb{P}_{\theta=2{,}5}\left(\frac{\max(\underline{X})}{2{,}5} > 1{,}07\right) = \mathbb{P}_{\theta=2{,}5}\left(\max(\underline{X}) > \underbrace{2{,}5 \cdot 1{,}07}_{2{,}675}\right)$$

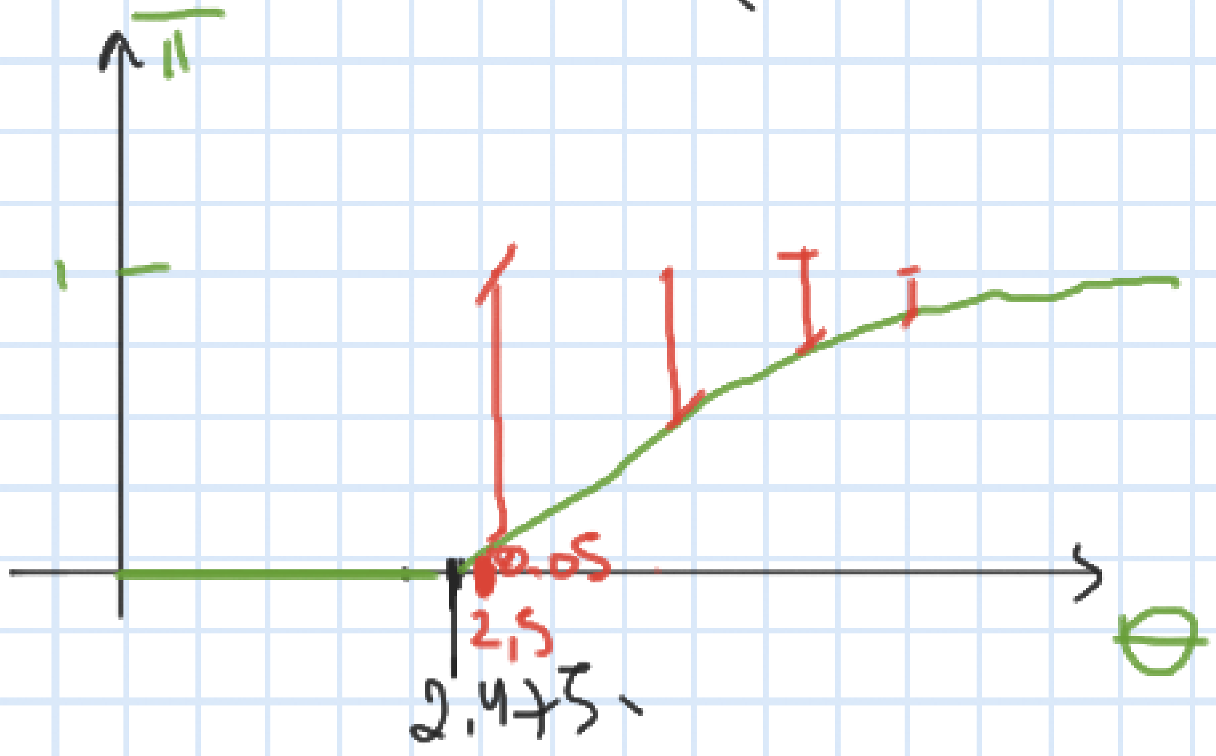
$$= \mathbb{P}_{\theta=2{,}5}\left(\max(\underline{X}) > 2{,}675\right) = 0 \quad \Rightarrow \text{p-valor} = 0$$

Simulación 2: $\frac{\max(\underline{x})}{2{,}5} = 0{,}79$

$$\mathbb{P}_{\theta=2{,}5}\left(\frac{\max(\underline{X})}{2{,}5} > 0{,}79\right) = \mathbb{P}_{\theta=2{,}5}\left(\max(\underline{X}) > 1{,}95\right) = 1 - \left(\frac{1{,}95}{2{,}5}\right)^{25} = 0{,}9972$$

$$\pi = \mathbb{P}_\theta(\text{Rech } H_0) = \mathbb{P}\left(\frac{\max(\underline{x})}{2.5} > 0{,}99\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\max(\underline{x}) > 2{,}475\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \theta < 2{,}475 \\ 1 - \left(\dfrac{2{,}475}{\theta}\right)^{25} & \theta > 2{,}475. \end{cases}$$



2. Se realiza un estudio para estimar la proporción de residentes en una ciudad y en sus suburbios que están a favor de la construcción de una planta de energía nuclear. En una muestra de 100 personas, se observó que la proporción de individuos que se encuentran a favor fue de 0.62.

   1. ¿Puede decirse con un nivel de significación de 0.01 que la mayor de la población está a favor de la construcción de la planta nuclear?

   2. Hallar el p-valor del test.

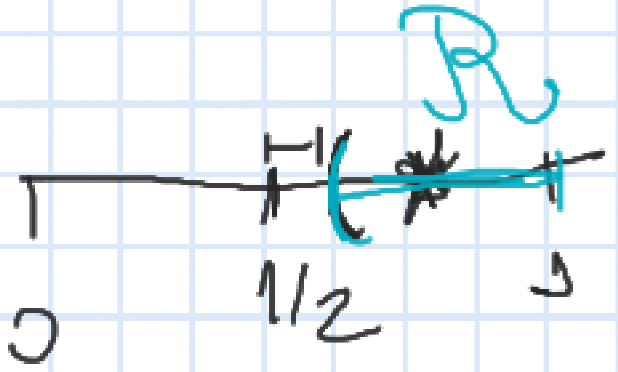
$n = 100 \qquad \underline{X} = (X_1, \dots, X_{100})$

$H_0: p \leq 0.5 \qquad H_1: p > 0.5.$

p: proba de que una pers esté a favor de construir la planta.

$X_i \sim Ber(p) \to E[X_i] = p$, $var(X_i) = p(1-p)$

$$\hat{p} = \frac{\sum X_i}{100} \underset{TCL}{\sim} \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{1/2 \cdot 1/2}}\sqrt{n} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$



$$\delta(\underline{X}) = I\{\hat{p} > k_\alpha\}$$

$$\alpha = P_{p=1/2}(\hat{p} > k_\alpha) = P_{p=1/2}\left(\frac{\hat{p} - 1/2}{\sqrt{1/2 \cdot 1/2}}\sqrt{n} > \frac{k_\alpha - 1/2}{\sqrt{1/2 \cdot 1/2}}\sqrt{n}\right) = 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{k_\alpha - 1/2}{1/2}\sqrt{n} = z_{0.99} = 2.33$$

Opc 1 $\quad \delta(\underline{X}) = I\left\{ \hat{p} > \frac{2.33 \cdot 1/2}{10} + \frac{1}{2} \right\}$ — son equivalentes

<u>Opc 2</u>: $\quad \delta(\underline{X}) = I\left\{ \left(\frac{\hat{p} - 1/2}{1/2}\right) 10 > 2.33 \right\}$

$$\frac{\sum x_i}{100} = 0.62$$

$$\hookrightarrow \frac{\hat{p} - 1/2}{1/2} \, 10 = 2.4 > 2{,}33$$

$$\Downarrow$$

con la muestra observada
vas a rechazar H_0
(y aceptar H_1)

$$\mathbb{P}_{p=1/2}\left(\left(\frac{\hat{p} - 1/2}{1/2}\right) \cdot 10 > 2.4\right) \approx \mathbb{P}(Z > 2{,}4) = \underline{0{,}008} < \alpha$$

$$Z \sim N(0,1)$$

3. De un experimento en los efectos de un medicamento ara la ansiedad se midió el puntaje de un test de memoria antes y después de tomar el medicamento.

   1. A partir de los datos que se encuentran en el archivo Islander_data.csv, diseñar un test de hipótesis para decidir el tiempo medio de respuesta es diferente antes y después de tomar el medicamento. $\alpha = 0.01$

   2. Hallar el p-valor.

$H_0: \mu = 0 \qquad H_1: \mu \neq 0$

μ: diferencia media de respuesta

$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$

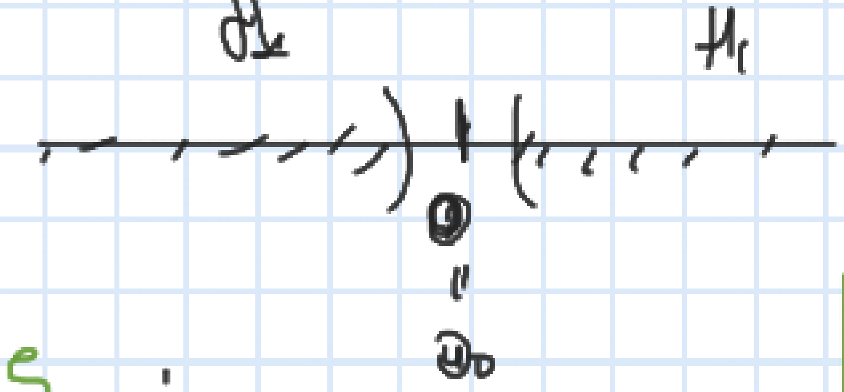
X_i: "diferencia en tiempo del paciente i"

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

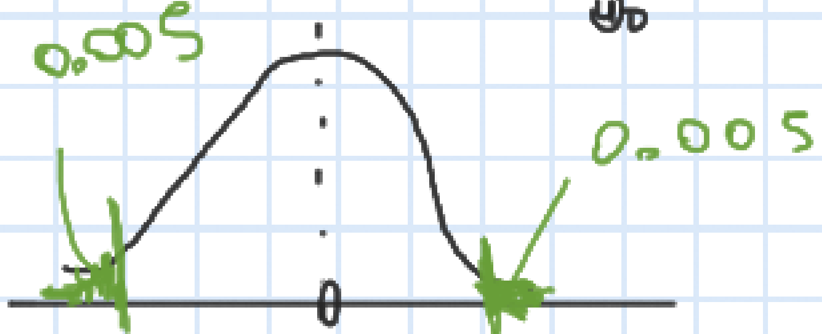
$$\frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad S = \sqrt{S^2}$$

$$\delta(\underline{X}) = I\left\{\left|\frac{\bar{X} - 0}{S}\sqrt{n}\right| > k_\alpha\right\}$$



$$\alpha = P_{\mu=0}(\delta(\underline{X}) = 1) = P_{\mu=0}\Big(\Big|\underbrace{\frac{\bar{X}}{S}\sqrt{n}}_{Z \sim N(0,1)}\Big| > k_\alpha\Big) = 0.01$$



$k_\alpha = z_{0.995} = 2.58$

$$f(\underline{X}) = I\left\{\left|\frac{\bar{X}}{S}\sqrt{n}\right| > 2.58\right\}$$

con los datos muestrales: $T = \frac{\bar{x}}{s}\sqrt{n} = 3,87 > 2.58$

$\Rightarrow$ Rechazo H_0 y confirmo que hay diferencias antes y después de tomar el medicamento

IC: $\mu \in [a(\underline{x}), b(\underline{x})]$ con prob $1-\alpha = 0.95$

$\hookrightarrow$ Si

Análisis bayesiano

$A_1, \dots A_n$ era una partición

Regla de Bayes: $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \stackrel{\uparrow}{=} \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{\overbrace{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})}^{p_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})}\,\pi(\theta)}{\int \underbrace{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})}_{p_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})}\,\pi(\theta)\,d\theta}$$

(X cont Θ cont)

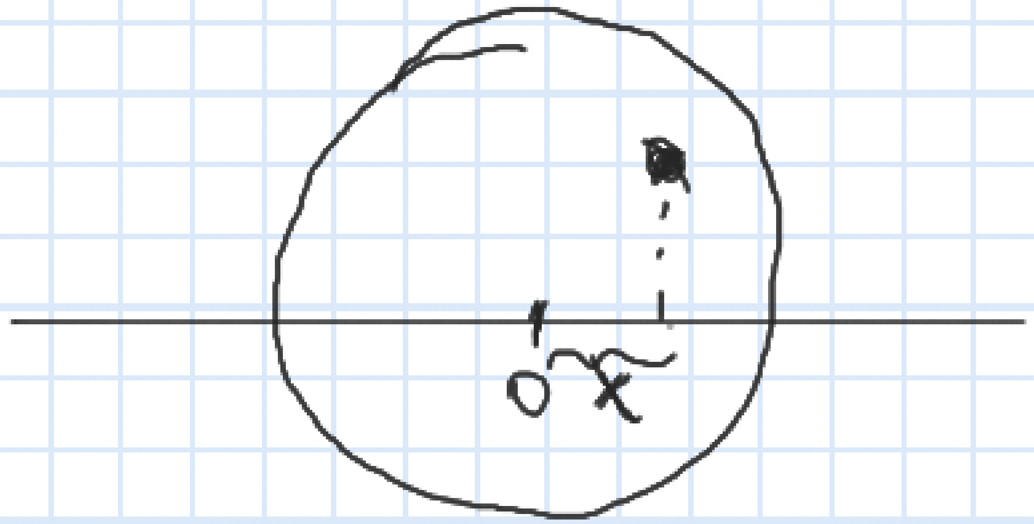
X disc

$$p_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{\overbrace{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})}^{p_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})}\,\pi(\theta)}{\sum_{\theta} \underbrace{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})}_{p_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})}\,\pi(\theta)}$$

(X cont Θ dis)

X disc

1. La posición del impacto en un tiro al blanco (en decímetros) respecto del cero sobre el eje x es una variable aleatoria X con distribución normal de media cero y varianza $1/\theta$, donde θ representa la precisión del tirador. A priori, la precisión θ tiene una distribución Chi-cuadrado de 8 grados de libertad. Lucas tiro 10 veces al blanco y observó que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$. Hallar la estimación de Bayes de θ para la el riesgo cuadrático



$X \sim N(0, 1/\theta)$

$\Theta \sim \chi^2_8 = \Theta \sim \Gamma(8/2, 1/2)$ $\quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{\prod_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}\theta}\right) \frac{1}{2^{8/2}\Gamma(8/2)} \theta^{\frac{8}{2}-1} e^{-\theta/2} 1\{\theta>0\}}{\int \prod_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}\theta}\right) \frac{1}{2^4\Gamma(4)} \theta^3 e^{-\theta/2} \, d\theta} \quad \text{cte}$$

$$\frac{\sum x_i^2 + 1}{2}$$

$$\propto e^{-\frac{\sum x_i^2}{2}\theta} \theta^3 e^{-\theta/2} 1\{\theta>0\} = \theta^3 e^{-\theta\left(\frac{\sum x_i^2}{2}+1/2\right)} 1\{\theta>0\}$$

$$T \sim \Gamma(\nu,\lambda) \Rightarrow f_T(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\lambda^\nu t^{\nu-1} e^{-\lambda t} \quad \text{cte}$$

$$\Rightarrow \Theta | \underline{X}=\underline{x} \sim \Gamma\left(4, \frac{\sum x_i^2+1}{2}\right)$$