Probabilidad y estadística

Clase 2

Transformaciones de variables

Método del Jacobiano

Sean X_1 y X_2 son v.a **continuas** con función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$. Sean también $h_1,\ h_2$ dos func. tales que para todo (x_1,x_2) en el soporte de (X_1,X_2), $y_1 = h_1(x_1,x_2)$ y $y_2 = h_2(x_1,x_2)$ son una transformación uno a uno con **inversa** $x_1 = h_1^{-1}(y_1,y_2)$ y $x_2 = h_2^{-1}(y_1,y_2)$. Si las inversas tienen **derivadas parciales continuas** respecto de y_1 e y_2 y jacobiano J, entonces la densidad conjunta de $Y_1,\ Y_2$ será:

$$f_{Y_1,Y_2} = f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\big|_{h_1^{-1}(u_1,u_2),h_2^{-1}(u_1,u_2)}\ |J|$$

Ejercicio 1

Sean $X_1, X_2 \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ y sean $U = X_1^2 + X_2^2$ y $V = X_2/X_1$. Hallar $f_{U,V}(u,v)$

Método del Jacobiano

Observación:

Si solamente me interesa una única función de las variables, por ejemplo $U_1 = h_1(Y_1, Y_2)$, puedo "inventarme" una $U_2 = h_2(Y_1, Y_2)$, y aplicar el método del Jacobiano para encontrar la función de densidad conjunta de ambas variables.

Finalmente, calculo la densidad marginal de la v.a. deseada U_1.

Método del jacobiano generalizado (BONUS)

Si $\underline{X}$ un vector aleatorio e $\underline{Y} = g(\underline{X})$ con g tal que $g|A_i = g_i : A_i \to B$ biyectiva, continua, con derivada continua, donde $A_1, \ldots, A_k$ es una partición del $sop(X)$, entonces

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_{\underline{X}}(\underline{x})\mathbf{1}\{\underline{x} \in A_i\}}{|J_{g_i}(\underline{x})|} |\underline{x} = g_i^{-1}(\underline{y})$$

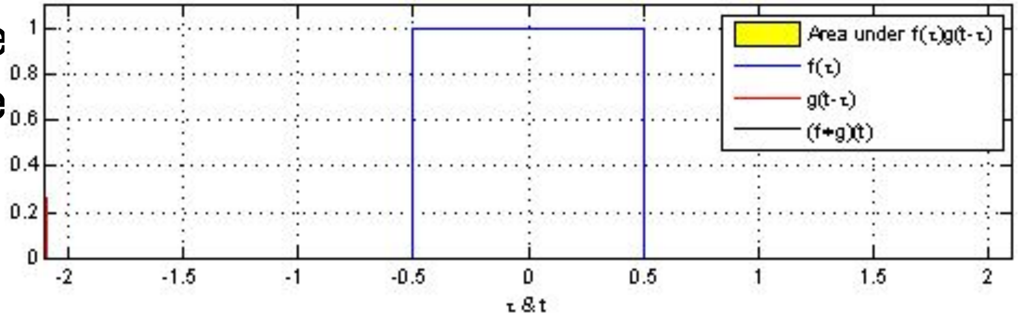
Ejercicio 2

Sea $X \sim U(-1,1)$ e $Y=X^2$. Hallar por el método del Jacobiano generalizado la función de densidad de Y.

Observación: Suma de v.a.

Sean X,Y dos v.a. con función de densidad $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, la variable W = X+Y tiene densidad:

$$f_W(w) = f_X(x) * f_X(y)$$



Donde $*$ representa la **función convolución** definida por:

$$(f * g)(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$ f,g continuas

$$(f * g)(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)$$ f,g discretas

Función generadora de momentos

Habíamos definido a la función generadora de momentos de X como

$$M_X = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Teorema: Sean M_X y M_Y dos funciones generadoras de momentos de las v.a. X e Y, respectivamente. Si

$$M_X(t) = M_Y(t)$$

Para todo t, entonces X e Y tienen la misma distribución.

V.A Gaussianas: Proyección

Sea $\underline{X} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$ de dimensión n. Y sea $w \in \mathbb{R}^n$.
Definamos $Z = w^T X$ la proyección de $\underline{X}$ en w

$$Z \sim \mathcal{N}(w^T \underline{\mu}, w^T \Sigma w)$$

Variables aleatorias condicionadas

Variables discretas

Sean X, Y dos variables aleatorias, y sean $p_X(x) > 0$ y $p_{X,Y}(x,y)$ las función de probabilidad marginal de X y la función de probabilidad conjunta respectivamente. Se define la función de probabilidad condicionada de Y dado que $X = x$ como:

$$\begin{aligned} p_{Y|X=x}(y) &= \mathbb{P}\left[Y = y | X = x\right] \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)} \\ &= \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} \end{aligned}$$

Variables continuas

Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ y densidad marginal de X $f_X(x)$. Se define la función de densidad condicional de Y dado $X = x$ como

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Obs: Si $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$ X e Y son independientes.

Ejercicio 3

1. La probabilidad de acertar a un blanco es ⅕. Se realizan 10 tiros independientes y se cuenta la cantidad de aciertos. Sean X la cantidad de aciertos en los 10 tiros, e Y la cantidad de aciertos en el primer tiro. Hallar la distribución de $X|Y=y$ y $Y|X=x$.

2. Sean X,Y dos v.a. conjuntamente uniformes en el triángulo de vértices (0,0), (2,2), (0,2). Hallar la función de densidad de $Y|X=x$.

Factorización

Sean X, Y dos variables aleatorias con función. de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$, la misma puede descomponerse de la forma

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X=x}(y)$$

Obs: Si $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ X e Y son independientes.

Ejercicio 4

Sean X, Y dos v.a. con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-x/2y}}{4y}\mathbf{1}\{0 < x, 1 < y < 3\}$$

Hallar la función de densidad de X|Y=y

Normal multivariada: dist. condicionales

$$\text{Sea } \boldsymbol{X} = [X_1, X_2]^T \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

$$X_1|X_2 = x_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \frac{cov(X_1, X_2)}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2), (1 - \frac{cov(X_1, X_2)^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2})\sigma_1^2\right)$$

$$X_2|X_1 = x_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \frac{cov(X_1, X_2)}{\sigma_1^2}(x_1 - \mu_1), (1 - \frac{cov(X_1, X_2)^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2})\sigma_2^2\right)$$

Mezcla de v.a.

Sea M una v.a. discreta a valores $1, \ldots, n$, con función de probabilidad $p_M(m)$, y sea X una v.a. tal que se conocen las distribuciones $X|M = m, \; m = 1, 2, \ldots, n$. Luego, la distribución de X resulta

$$F_X(x) = \sum_{m=1}^{n} F_{X|M=m}(x) p_M(m)$$

Obs:

Si X es v.a.d: $p_X(x) = \sum_{m=1}^{n} p_{X|M=m}(x) p_M(m)$

Si X es v.a.c $f_X(x) = \sum_{m=1}^{n} f_{X|M=m}(x) p_M(m)$

Ejercicio 5

Para ir al trabajo Juan puede tomar el subte, o el tren, eligiendo viajar en tren el 60% de las veces. Si viaja en subte, el tiempo de viaje (en horas) es una v.a. con distribución U(0.75,1), mientras que si viaja en tren distribuye de manera uniforme en el intervalo (0.8, 1.25).

1. Calcular la función de densidad del tiempo viaje
2. Hallar la probabilidad de que haya viajado en tren si se sabe que tardó más de 0.9hs en llegar al trabajo.
3. Hallar la probabilidad de que haya viajado en tren si se sabe que tardó exactamente 0.9hs en llegar al trabajo.

Bayes para mezclas

Sea M una v.a. discreta a valores $1, \ldots, n$, con función de probabilidad $p_M(m)$, y sea X una v.a. continua tal que se conocen las distribuciones $f_{X|M=m}(x), \ m = 1, 2, \ldots, n$, la función de probabilidad de M dado que $X = x$ será:

$$\boxed{p_{M|X=x}(m) = \frac{f_{X|M=m}(x) p_M(m)}{\sum_{m=1}^{n} f_{X|M=m}(x) p_M(m)}}$$