Probabilidad y estadística

Clase 5

Intervalos de confianza

Motivación

Hasta ahora habíamos visto estimadores puntuales, que, dada un muestra, nos devuelven un único valor $\hat{\theta}$ que se aproxima al valor verdadero del parámetro deseado θ.

Una forma de obtener información sobre la precisión de la estimación, en el caso de que θ sea unidimensional, es proporcionar un intervalo $[a(X), b(X)]$ de manera que la probabilidad de que dicho intervalo contenga el verdadero valor θ sea alta, por ejemplo, 0.95.

Región de confianza

Def: Dada una m.a. $\underline{X}$ con distribución perteneciente a una familia $F_\theta(x)$, con $\theta \in \Theta$, una región de confianza $S(\underline{X})$ para θ con nivel de confianza $1-\alpha$ será un conjunto tal que

$$\mathbb{P}(\theta \in S(\underline{X})) = 1-\alpha. \text{ (*)}$$

Obs: θ **no** es aleatorio, lo aleatorio es (*) es $S(\underline{X})$.

Obs: Si $S(\underline{X}) = (a(\underline{X}), b(\underline{X}))$ diremos que es un intervalo de confianza.

Si $S(\underline{X}) = (\min(\Theta), b(\underline{X}))$ diremos que es una cota superior.

Si $S(\underline{X}) = (a(\underline{X}), \max(\Theta))$ diremos que es una cota inferior.

Método del pivote

Teorema: Sea $\underline{X}$ una muestra aleatoria con distribución perteneciente a una familia $F_\theta(x)$, con $\theta \in \Theta$, y sea $U = g(\underline{X}, \theta)$ una variable cuya distribución **no** depende de θ. Sean a y b tales que $\mathbb{P}(a \leq U \leq b) = 1 - \alpha$. Luego,

$$S(\underline{X}) = \{\theta : a < g(\underline{X}, \theta) \leq b\}$$

es una región de confianza para θ. A U se lo llama pivote.

Algunas distribuciones importantes

Teorema: Sea $\underline{X} = X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- $Z = \sqrt{n}\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $W = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
- V y W son independientes
- Si $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, U = \sqrt{n}\frac{(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$

Obs: en general vale que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $Y \sim \chi^2_n$, con X e Y independientes vale que $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n$

Algunos pivotes para variables normales

Dada $\underline{X}_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Definimos algunos pivotes:

- Para la media con σ^2 conocida: $U(\underline{X}, \mu) = \frac{X-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- Para la media con σ^2 desconocido: $U(\underline{X}, \mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$
- Para el desvío con media conocida $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma} \sim \chi^2_n.$
- Para el desvío con media desconocida $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma} \sim \chi^2_{n-1}.$

Dada también $\underline{Y}_m$ una m.a. de una distribución $\mathcal{N}(\lambda, \sigma^2)$

- Comparación de medias con varianzas conocida e iguales: $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu-\lambda)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}}$
- Comparación de medias con varianzas conocida e iguales: $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\Delta}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$, con

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{m+n-2}$$

Regiones de confianza asintóticas

Def: Sea $\underline{X}_n = X_1, \ldots, X_n$ una m.a de una población con distribución perteneciente a la flía. $F_\theta(x)$, con $\theta \in \Theta$. Se dice que $S_n(\underline{X}_n)$ es una sucesión de regiones de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ si:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_\theta(\theta \in S_n(\underline{X}_n)) = 1 - \alpha$$

Teorema: Sea $\underline{X}_n$ una m.a. de una población con distribución $F_\theta(x)$, con $\theta \in \Theta$. Supongamos que para cada n se tiene $U_n = g(\underline{X}_n, \theta)$ que converge en distribución a U, donde U es una v.a. cuya distribución no depende de θ. Entonces si a y b son tales que $\mathbb{P}(a < U < b) = 1 - \alpha$ se tiene que $S_n(\underline{X}_n) = \{\theta : a < U_n < b\}$ es una región de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para θ.

IC para la media de una población desconocida

En general, dada una m.a $\underline{X}_n$ de una población desconocida, una buena forma de aproximarse a la media de dicha población es considerar el promedio de las muestras ($\bar{X}_n$).

Por TCL, sabemos que $\bar{X}_n$ tiende en distribución a una v.a. normal. En particular,

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{var(X)/n}} \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Se puede probar que si se desconoce también la varianza de la población (que es lo más común) vale que

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]}{S^2/\sqrt{n}} \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Regiones de confianza basadas en el EMV

Una propiedad que quedó pendiente de los EMV:

Teorema: Sea $\hat{\theta}_n$ un EMV de θ consistente, y sea $q(\theta)$ derivable con $q'(\theta) \neq 0 \; \forall \, \theta$, entonces $q(\hat{\theta}_n)$ es asintóticamente normal para estimar .

Esto significa que

$$\sqrt{n}(q(\hat{\theta}) - q(\theta)) \sim \mathcal{N}(0, \frac{|q'(\theta)|^2}{I(\theta)}),$$

Donde $I(\theta)$ es el número de información de Fisher y se calcula como

$$I(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ln p_\theta(X)}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p_\theta(X)}{\partial \theta^2}\right]$$

Regiones de confianza basadas en el EMV

Propiedad: Si $\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta} - \theta) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, y θ es un estimador consistente para θ vale que

$$\sqrt{nI(\hat{\theta})}(\hat{\theta} - \theta) \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Luego, un intervalo de confianza de nivel asintótico de nivel $1 - \alpha$ para θ estará dado por a, b tales que

$$\mathbb{P}\left(a < \sqrt{nI(\hat{\theta})}(\hat{\theta} - \theta) < b\right) = 1 - \alpha$$

Test de hipótesis

Motivación

Un test de hipótesis es una manera formal de elegir entre dos opciones, o hipótesis.

Un ejemplo de la vida cotidiana: un juicio. Se cuenta con dos hipótesis: la persona es inocente o es culpable. Para decidir que es culpable (y enviarlo a la cárcel) el juez a tener que tener evidencia suficiente para tomar esa decisión.

La presuposición de inocencia ("inocente hasta que se demuestre lo contrario") es lo que se conoce como hipótesis nula. La otra es la que se conoce como hipótesis alternativa.

Formalicemos esta idea

Sea una m.a. $\underline{X} = X_1, \ldots, X_n$ de una población con distribución perteneciente a una familia $F_\theta(x)$ con $\theta \in \Theta$. Sean Θ_0 y Θ_1 tales que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \emptyset$ y $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$. Un test para este problema será una regla basada en $\underline{X}$ para decidir entre las dos hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Definición: Se llama test a una función $\delta(\underline{X})$ que puede tomar valores 0 o 1.

Formalicemos esta idea

En un test de hipótesis se plantean dos hipótesis:

H_1: es la hipótesis del investigador (lo que se desea probar). Se la conoce como hipótesis alternativa

H_0: se formula con el objetivo de ser rechazada. Se la conoce como hipótesis nula.

Diremos que rechazamos la hipótesis nula cuando $\delta(\underline{X}) = 1$, en caso contrario decimos que no hay evidencia suficiente para rechazar H_0.

Tipos de error

Error de tipo I: Es el error que se comete al rechazar una hipótesis nula que era verdadera. Buscamos que esto tenga muy baja probabilidad.

$$\mathbb{P}(EI) = \mathbb{P}_{\theta \in \Theta_0}(\delta(\underline{X}) = 1)$$

Error de tipo II: Es el error que se comete al no rechazar una hipótesis nula que era falsa.

$$\mathbb{P}(EII) = \mathbb{P}_{\theta \in \Theta_1}(\delta(\underline{X}) = 0)$$

Potencia del test

Def: Se llama potencia del test a la probabilidad de rechazar una hipótesis nula en función del parámetro desconocido sobre el que se plantea la hipótesis.

$$\pi_\delta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\delta(\underline{X}) = 1).$$

Luego podemos reescribir

$$\mathbb{P}(EI) = \pi_\delta(\theta),\ \theta \in \theta_0 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(EII) = 1 - \pi_\delta(\theta),\ \theta \in \Theta_1$$

Nivel de significación y p-valor

Def: Se llama nivel de significación del test a la máxima probabilidad de cometer un error de tipo I:

$$\alpha = \sup_{\theta \in \theta_0} \pi_\delta(\theta)$$

Def: Se llama p-valor de un test al menor nivel de significación para el cual se rechaza H_0 para una observación dada

Sobre la construcción de reglas de decisión

En la práctica, las reglas de decisión se construyen basándose en una estadística de la m.a. $\underline{X}$, es decir que son de la forma $\delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{T(\underline{X}) \in \mathcal{R}\}$. A $\mathcal{R}$ la conoce como región crítica o de rechazo .

Resulta intuitivo que el estadístico $T(\underline{X})$ se corresponda con el estadístico suficiente (o una transformación del mismo)

En particular, podemos utilizar el método del pivote visto para intervalos de confianza para construir el test.

Tipos de hipótesis

En general, tenemos 3 tipos de hipótesis que deseamos testear:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \theta \geq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta < \theta_0 \\ H_0 : \theta \leq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta > \theta_0 \end{array}\right\} \text{Hipótesis unilaterales}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta \neq \theta_0 \rightarrow \text{Hipótesis bilaterales}$$

Si el pivote es creciente en θ, un test para

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta > \theta_0 \text{ será } \delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} > k_\alpha\}$$

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta < \theta_0 \text{ será } \delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} < k_\alpha\}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta \neq \theta_0 \text{ será } \delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{k_{\alpha/2} < U_{\theta_0} < k_{1-\alpha/2}\}$$

Test con nivel de significación asintótico

Def: Sea $\underline{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ una m.a. de duna población con distribución $F_\theta(x),\ \theta \in \Theta$. Se desea testear

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Se dirá que una sucesión de test tiene nivel de significación asintótico α si

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\theta \in \Theta_0} \pi_\delta(\theta) = \alpha$$

Nuevamente, podemos basar el test en la distribución asintótica de EMV, o bien usando TCL.

Bibliografía

Bibliografía

- Notas de estadística. Graciela Boente y Víctor Yohai
- "All of Statistics : A Concise Course in Statistical Inference", Larry Wasserman, Springer-Verlag New York Inc.
- "Mathematical statistics with applications", Mendenhall, W., Scheaffer, R. L., & Wackerly, D. D. Boston: Duxbury Press.