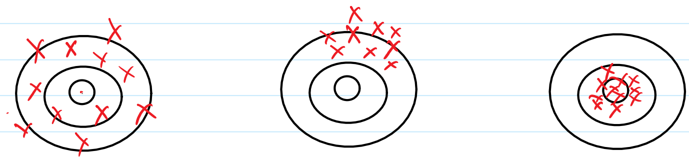
Clase 4 - 15/9

jueves, 15 de septiembre de 2022 18:39 Estimadores



Insesgado — Sesgado y preciso — Exacto: insesgado y preciso.

Para estimar σ^2 se utiliza $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$

Es n-1 porque $E(S^2) = \sigma^2 \Rightarrow S^2$ es un estimador insesgado

Si dividen por n, $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n} \Rightarrow E(\hat{\sigma}^2) = \dfrac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$ → Sesgo

Ejercicio 6

Se desea estimar la media de una variable con distribución N(μ,9) a partir del promedio de n realizaciones. Analizar las bondades de las que goza dicho estimador.

Muestra aleatoria: $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 9)$ → se busca estimar

Estimador de μ: $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

$$B = E[\overline{X}-\mu] = E[\overline{X}] - \mu = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] - \mu = \frac{1}{n}\cdot n\mu - \mu = 0$$

$$ECM(\overline{X}) = E[(\overline{X}-\mu)^2]$$

$$ECM(\overline{X}) = Var(\overline{X}) + B^2 = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) + 0 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cdot n\, Var(X_i) = \frac{9}{n}$$

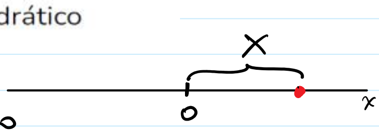
$$\lim_{n\to\infty} Var(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n} = 0$$ $\Rightarrow$ el estimador es consistente.

Ejercicio 1

La posición del impacto en un tiro al blanco (en decímetros) respecto del cero sobre el eje x es una variable aleatoria X con distribución normal de media cero y varianza 1/θ, donde θ representa la precisión del tirador.
A priori, la precisión θ tiene una distribución Chi-cuadrado de 8 grados de libertad. Lucas tiro 10 veces al blanco y observó que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$. Hallar la distribución a posteriori de θ.
Hallar la estimación de Bayes de θ para la el riesgo cuadrático

X_i: posición del impacto i con respecto al 0 (decímetros), $i=1,2,\dots,10$

$X_i \sim \mathcal{N}(0; \frac{1}{\theta})$



A priori: $\Theta \sim \chi^2_8$, $\Theta \sim \Gamma(4; \frac{1}{2})$

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{\prod_{i=1}^{10} f_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) \cdot \pi(\theta)}{\int_0^\infty f_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) \cdot \pi(\theta) d\theta} = \frac{\prod_{i=1}^{10} \frac{\sqrt{\theta}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \cdot e^{-\frac{\theta x_i^2}{2}} \cdot \cancel{\frac{(\frac{1}{2})^4}{\Gamma(4)}} \cdot \theta^3 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}}}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^{10} \frac{\sqrt{\theta}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \cdot e^{-\frac{\theta x_i^2}{2}} \cdot \cancel{\frac{(\frac{1}{2})^4}{\Gamma(4)}} \cdot \theta^3 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}} d\theta} =$$

$$= \frac{(\sqrt{\theta})^{10} \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{10} x_i^2} \cdot \theta^3 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}}}{\int_0^\infty (\sqrt{\theta})^{10} \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{10} x_i^2} \cdot \theta^3 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}} d\theta} = \frac{\theta^8 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 1\right)}}{\int_0^\infty \theta^8 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 1\right)} d\theta} =$$

$$= \frac{\theta^8 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 1\right)}}{\frac{\Gamma(9)}{\left(\frac{\sum x_i^2+1}{2}\right)^9} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sum x_i^2+1}{2}\right)^9}{\Gamma(9)} \cdot \theta^8 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 1\right)} d\theta}_{=1}} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 1}{2}\right)^9}{\Gamma(9)} \cdot \theta^8 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 1\right)}$$

Entonces: $\Theta|\underline{X}=\underline{x} \sim \Gamma\left(9, \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 1}{2}\right) \rightarrow$ A posteriori

Ejercicio 2

La cantidad de accidentes semanales en una planta industrial tiene una distribución de Poisson de media μ. En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

$\sum_{i=1}^{100} x_i + 1 = 212 + 1 = 213$

A priori, μ tiene una distribución exponencial de media 2. Hallar la distribución a posteriori de μ.

$X_1, X_2, \dots, X_{100} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{P}o(\mu)$, A priori: $\mu \sim \mathcal{E}xp(\frac{1}{2})$

$$f_{\mu|\underline{X}=\underline{x}}(\mu) = \frac{\prod_{i=1}^{100} \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^{x_i}}{\cancel{x_i!}} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\mu}{2}}}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^{100} \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^{x_i}}{\cancel{x_i!}} \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu}{2}} d\mu} = \frac{e^{-100\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\mu}{2}}}{\int_0^\infty e^{-100\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu}{2}} d\mu} =$$

$$= \frac{e^{-100{,}5\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i}}{\int_0^\infty e^{-100{,}5\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i} d\mu} = \frac{e^{-100{,}5\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i}}{\frac{\Gamma(\sum x_i+1)}{100{,}5^{\sum x_i+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{100{,}5^{\sum x_i+1}}{\Gamma(\sum x_i+1)} \cdot e^{-100{,}5\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i} d\mu}_{=1}} =$$

$$= \frac{100{,}5^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{100} x_i+1\right)} \cdot e^{-100{,}5\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i} \Rightarrow \mu \sim \underbrace{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{100} x_i + 1, 100{,}5\right)}_{\text{Función de densidad a posteriori.}}$$

Ejercicio 3

Para el ejercicio 1, hallar la estimación de Bayes de θ para la el riesgo cuadrático.

$$\Theta | \underline{X}=\underline{x} \sim \Gamma\left(9, \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2+1}{2}\right) \to \text{A posteriori}$$

Estimador de Bayes: $E[\Theta|\underline{X}=\underline{x}]$

A partir de la muestra se obtuvo: $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$

$$E[\Theta|\underline{X}=\underline{x}] = \frac{9}{\frac{17+1}{2}} = 1$$

Ejercicio 4

Para el ejercicio 2, estimar la probabilidad de que en la semana del 18 de diciembre de 2021 no ocurra ningún accidente en la mencionada planta.

$$P(X=0) = \int_0^\infty P_{X|\mu=\mu}(x) \cdot f_{\mu|\underline{X}=\underline{x}}(\mu)\, d\mu = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu}\cdot \mu^0}{0!} \cdot \frac{100{,}5^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{100} x_i+1\right)} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i} \cdot e^{-100{,}5\mu}\, d\mu =$$

$$= \int_0^\infty \frac{100{,}5^{\sum x_i+1}}{\Gamma(\sum x_i+1)} \cdot \mu^{\sum x_i} \cdot e^{-101{,}5\mu}\, d\mu =$$

$$= \frac{100{,}5^{\sum x_i+1}}{101{,}5^{\sum x_i+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{101{,}5^{\sum x_i+1}}{\Gamma(\sum x_i+1)} \cdot \mu^{\sum x_i} \cdot e^{-101{,}5\mu}\, d\mu}_{=1} =$$

$$= \frac{100{,}5^{213}}{101{,}5^{213}} = 0{,}121$$

Ejercicio 5

1. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución exponencial

$$X_1,\dots,X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{E}xp(\lambda)$$

$$f_\lambda(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i}\, \mathbb{1}\{x_i>0\} = \underbrace{\lambda^n \cdot e^{-\lambda \overbrace{\sum_{i=1}^n x_i}^{r(\underline{x})}}}_{g(r(\underline{x});\lambda)} \underbrace{\mathbb{1}\{x_1>0, x_2>0, \dots, x_n>0\}}_{h(\underline{x})}$$

Entonces $r(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$ es un estadístico suficiente.

2. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución de Bernoulli

$$X_1,\dots,X_n \sim Be(p), \quad X_1 = \begin{cases} 1 \to P(X_1=1)=p \\ 0 \to P(X_1=0)=1-p \end{cases}$$

$X_1, \dots, X_n \sim Be(p)$, $X_1 = \{ 0 \to P(X_1 = 0) = 1-p$

$$P_p(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} \mathbb{1}\{x_i \in \{0,1\}\} =$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \in \{0,1\}\}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{p}{(1-p)}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^n}_{g(r(\underline{x}),p)} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i \in \{0,1\}\}}_{h(\underline{x})}$$

Por lo tanto $r(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ es un estadístico suficiente del parámetro.

Método de Máxima Verosimilitud

Se tienen 2 monedas

① → $p_1 = \frac{1}{2}$ ② → $p_2 = \frac{3}{4}$, $p_i = P(\text{cara})$

$$X_i = \begin{cases} 1 \to \text{si sale cara} \\ 0 \to \text{si sale ceca} \end{cases}$$

$X_i \sim Be(p)$

Elijo una de las monedas y la arrojo 2 veces, y obtengo:

$x_1 = 1$ y $x_2 = 1$

M_1: $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

M_2: $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ → probabilidad mayor, me quedo con $p = \frac{3}{4}$

Ejercicio 7

La probabilidad de acertar a un blanco es p. Se realizan 10 tiros independientes, en los cuales se observaron 4 aciertos. A partir este valor observado estimar el valor de p por MV.

$X_1, X_2, \dots, X_{10} \overset{iid}{\sim} Be(p)$, $p = P(\text{acertar al blanco})$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{10} p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{10} x_i} \cdot (1-p)^{10-\sum_{i=1}^{10} x_i}$$

$$\ln(L(p)) = \sum_{i=1}^{10} x_i \cdot \ln p + \left(10 - \sum_{i=1}^{10} x_i\right) \ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln(L(p))}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{p} - \frac{10 - \sum_{i=1}^{10} x_i}{1-p} = 0$$

$$\frac{\ldots}{2p} = \frac{\ldots}{p} - \frac{\ldots}{1-p} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{p} = \frac{10 - \sum_{i=1}^{10} x_i}{1-p}$$

$$(1-p)\sum_{i=1}^{10} x_i = p\left(10 - \sum_{i=1}^{10} x_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i - \cancel{p\sum_{i=1}^{10} x_i} = 10p - \cancel{p\sum_{i=1}^{10} x_i}$$

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$$

El EMV es $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$

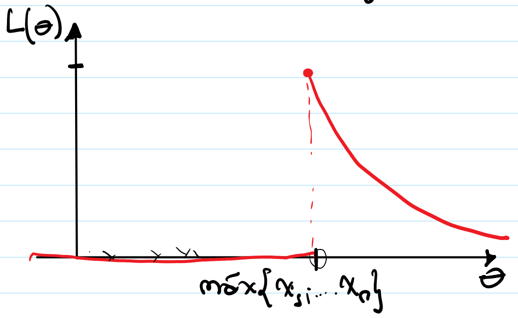
A partir de la muestra: $\hat{p}_{MV} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

Ejercicio 8

1. Sea X~U(0, θ). Hallar el EMV para θ basado en una muestra de tamaño n.
2. Si en una muestra de tamaño 3 se observaron los valores (0.756, 1.1, 3,11), hallar el valor estimado de θ.

$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0,\theta)$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{0 < x_i \leq \theta\}$$



$\hat{\theta}_{MV} = \text{máx}\{\underline{X}\}$

2. $\hat{\theta}_{MV} = \text{máx}\{0{,}756;\ 1{,}1;\ 3{,}11\} = 3{,}11$

Ejercicio 9

Siguiendo el ejercicio 7, estimar la probabilidad de que se necesiten al menos 2 tiros para observar el primer acierto.

X: cant. de tiros hasta el primer acierto

$X \sim Ge(p)$

$$\widehat{P(X \geq 2)} = 1 - \widehat{P(X=1)} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}4 = 0.6$$

$$\underbrace{P(X \geq 2)}_{\text{Por el principio de invarianza.}} = 1 - P(X=1) = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$