$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$

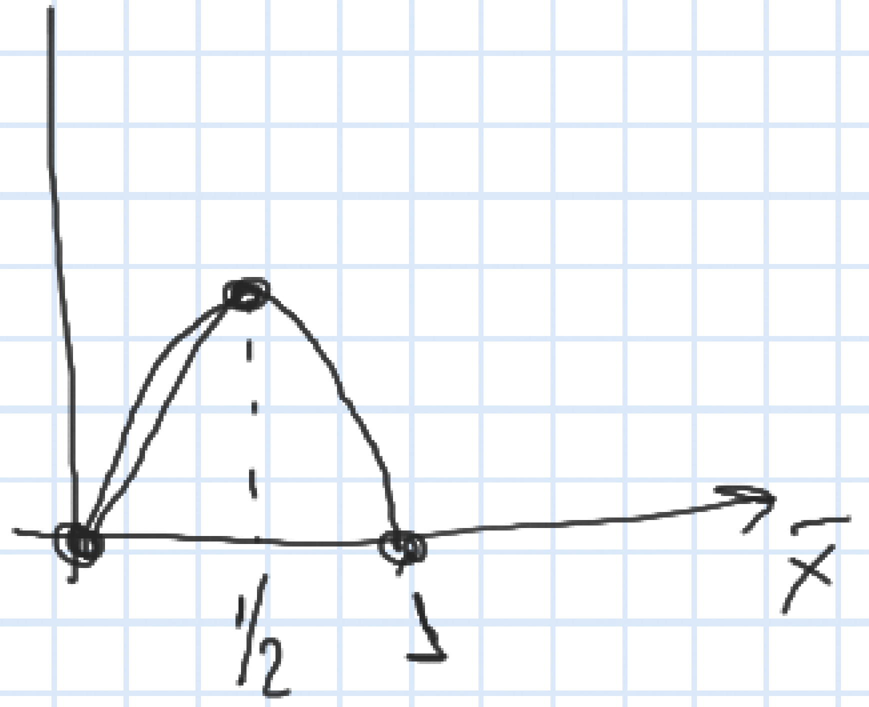
$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$

aleatorio

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$

è un n°, perché
lo osservo

$\bar{x} - \bar{x}^2$



$$\bar{x} \pm \underbrace{z_{0.975} \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}}}$$

$$z_{0.975} \frac{\sqrt{1/2(1-1/2)}}{\sqrt{n}} \leq 0.04$$

3. En un concurso con 10 participantes, cada participante prueba una muestra de 3 vasos de bebida. Dos de los 3 vasos contienen la misma bebida marca $a$, mientras que el vaso restante contiene la bebida marca $b$.

   (a) Queremos determinar si la gente realmente puede discriminar la bebida $b$ con un nivel de significancia de 5%.

   (b) ¿Cuál es la mínima cantidad de personas que deben identificar la bebida $b$ para concluir que, en general, la bebida $b$ es *claramente identificable* con respecto a la bebida $a$?

$H_0$: La gente elige al azar

$H_1$: La gente puede diferenciar

$$X = \begin{cases} 1 & \text{elige correctamente} \\ 0 & \text{no } '' \quad '' \end{cases}$$

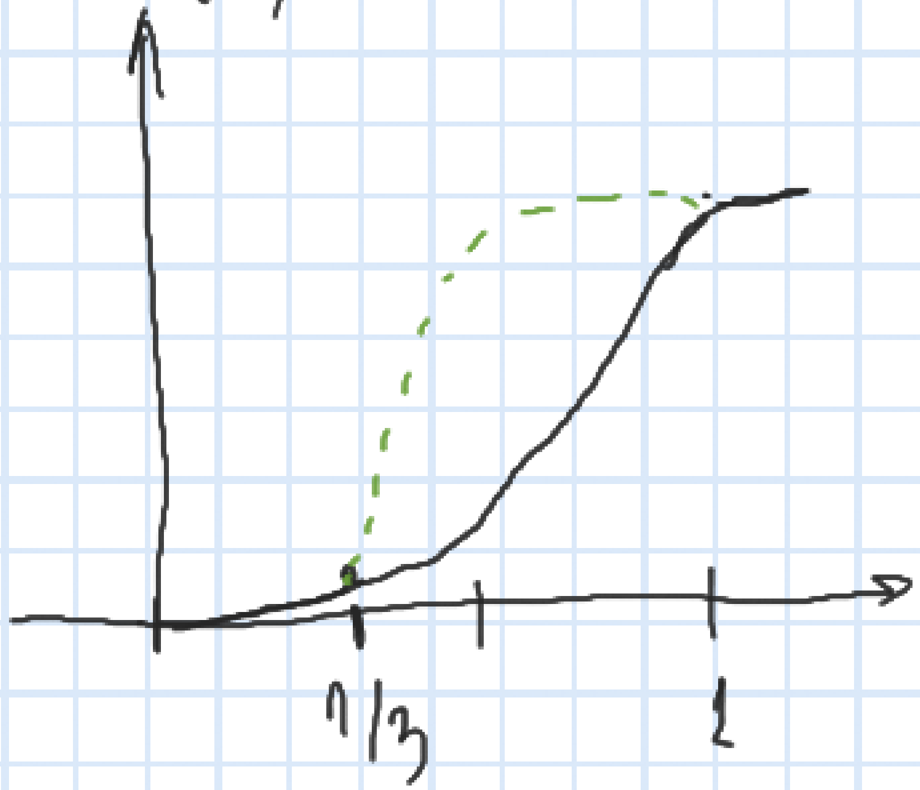
$X \sim Ber(p)$

$H_0: p = 1/3$

$H_1: p > 1/3$

$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\bar{X} - 1/3}{\sqrt{1/3 \cdot 2/3}}\sqrt{n} > k_\alpha \right\}$$

$z_{0.95}$



4. Sea $X$ una variable aleatoria cuya función de densidad es de la forma

$$f_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} \boldsymbol{I}\{0 < x < \theta\}, \quad \theta > 0.$$

Hallar una cota superior de confianza de nivel 0.95 pata $\theta$ basada en la muestra aleatoria: 2.85, 2.44, 3.93, 3.83. **Sugerencia:** encararlo similar al ejemplo de la v.a. uniforme visto en clase.

$$h(\underline{x}) \quad g(T(\underline{x}), \theta)$$

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{4} \frac{3x_i^2}{\theta^3} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\}, \quad \theta > 0$$

$$= \frac{3^4}{\theta^{4\cdot 3}} \underbrace{\prod_{i=1}^{4} x_i^2}_{h(\underline{x})} \prod_{i=1}^{4} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\}$$

$$g(T(\underline{x}), \theta) = \frac{3^4}{\theta^{12}} \underbrace{\prod_{i=1}^{4} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\}}_{\mathbb{1}\{\max(\underline{x}) < \theta\}}$$

$\Rightarrow U = \max(\underline{X})$ es un est. sufi para $\theta$ $\quad T(\underline{x})$

$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \le u) = \mathbb{P}(\max(\underline{X}) \le u) = \mathbb{P}(X_1 \le u, \dots, X_n \le u) \underset{iid}{=} \mathbb{P}(X_1 \le u)^n = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \left(\frac{u}{\theta}\right)^{3n} & 0 \le u < \theta \\ 1 & u \ge \theta \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{\max(\underline{X})}{\theta}$ es pivote

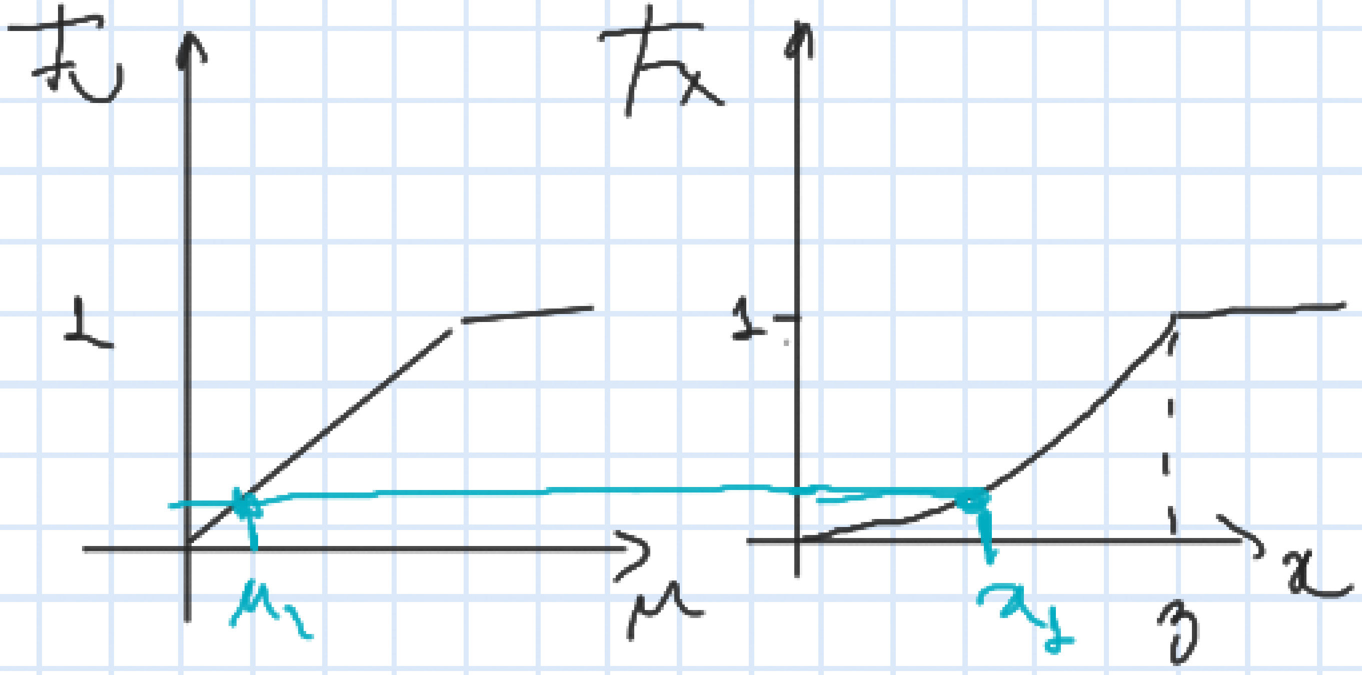
Ej 1

a) $\int_0^3 kx\,dx = 1 \rightsquigarrow k \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = 1 \rightsquigarrow k = 2/9$

$f_X(x) = \frac{2}{9} x \, 1\!\!1\{0 < x < 3\}$

b) $\mathbb{P}(X \leq x_1) = 0.1 \rightarrow x_1$ es el cuantil $0.1$

$F_X(x_1) = 0.1 \rightsquigarrow \frac{\cancel{2}}{9} \frac{x_1^2}{\cancel{2}} = 0.1 \rightsquigarrow x_1^2 = 0.9 \rightsquigarrow x_1 = 0{,}95$

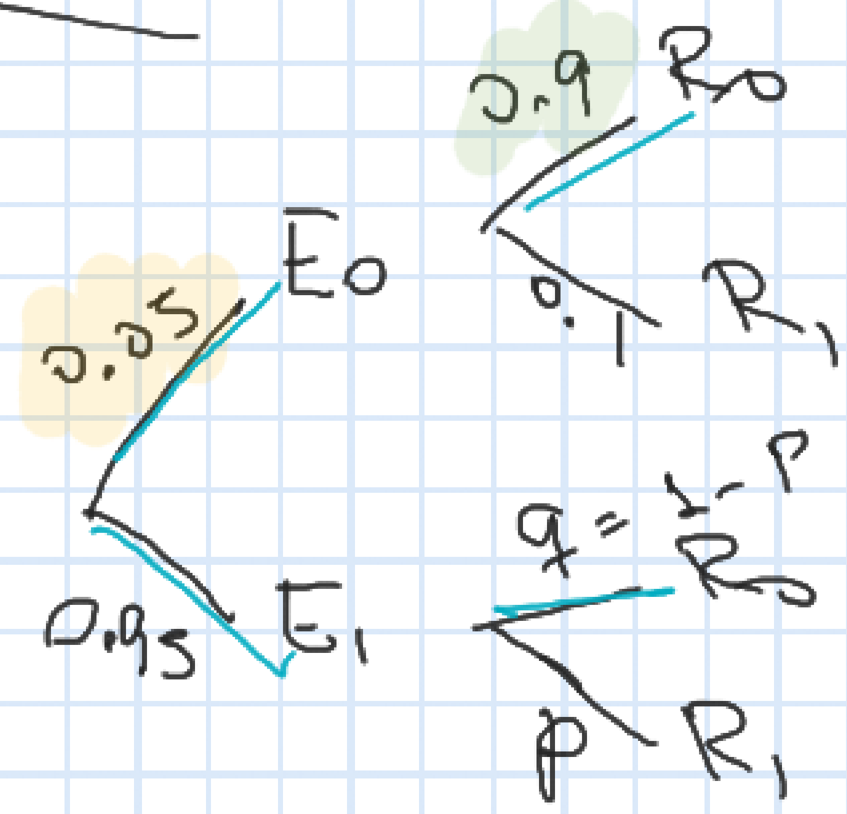



$\frac{\cancel{2}}{9} \frac{x^2}{\cancel{2}} = u$

$x = \sqrt{9u} = 3\sqrt{u}$

Ej 2

$$0.9 = \mathbb{P}(R_0 | E_0)$$




2. El 5 % de los bits transmitidos por un canal de comunicación binario es 0. El programa receptor indica que hay un 0 en el mensaje cuando efectivamente el 0 ha sido emitido, con probabilidad 0.9.

   1. ¿Cuál debe ser la probabilidad de que el receptor indique que hay un 1 cuando efectivamente el 1 ha sido emitido, para que la probabilidad de que haya sido emitido un 0 cuando el receptor indica que hay un 0 sea 0.99?

   2. [**Bonus**] Simular el experimento y obtener la probabilidad de haber enviado un 1 si se recibió un 0. Comparar con el resultado teórico.

$$(p = \mathbb{P}(R_1 | E_1)$$

$$0.99 = \mathbb{P}(E_0 | R_0) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(R_0 | E_0)\,\mathbb{P}(E_0)}{\mathbb{P}(R_0)} =$$

$$\mathbb{P}(R_0) = \mathbb{P}(R_0 | E_0)\,\mathbb{P}(E_0) + \underbrace{\mathbb{P}(R_0 | E_1)}_{q}\,\mathbb{P}(E_1)$$

$$0.99 = \frac{0.9 \times 0.05}{0.9 \times 0.05 + q\, 0.95} \leadsto q = \left[\left(\frac{0.9 \times 0.05}{0.99}\right) - 0.9 \times 0.05\right] \frac{1}{0.95}$$

$$= 0.0005 = 1-p$$

$$p = 0.9995$$

3. En un estudio se midió el tiempo de reposo (en díaas) luego de una fractura de cadera. En una muestra de 36 pacientes se obtuvo un tiempo promedio de 33 días, con una desviación estándar muestral de 8.5 díaas. Hallar un intervalo de confianza de nivel 0.95 para el tiempo medio de reposo de una persona que sufrió una fractura de cadera. Interpretar el resultado.

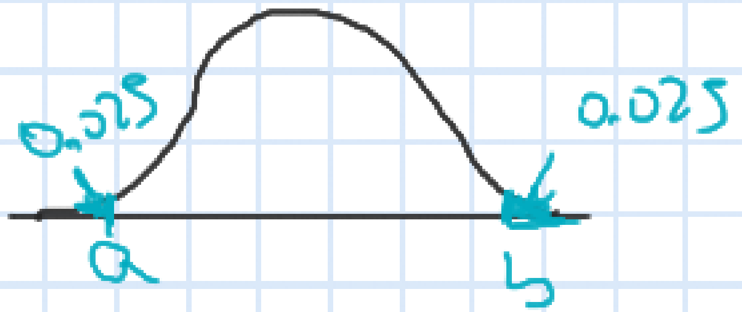
X: "tiempo de reposo"

$s = 8.5 \quad \bar{x} = 33$

No conozco la dist.

Busco IC para $\mu$.

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$




$b = -a = z_{0.975} = 1.96$

$$a, b \;/\; \mathbb{P}(a < U < b) = 0.95$$

$$-z_{0.975} < \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} < z_{0.975}$$

con los obs

$$\boxed{IC(\underline{X}) = \bar{X} \pm z_{0.975}\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$IC(\underline{x}) = (30.22 \,;\, 35.78)$

4. Un conocido fármaco para dormir asegura que las horas de sueño garantizadas corresponden a una variable con distribución normal de media 8 y varianza 4. Se saca al mercado una nueva versión del fármaco asegurando que aumenta el tiempo medio de sueño. En un hospital se quiere probar dicha afirmación, por lo que se experimenta con 81 pacientes, obteniendo un tiempo promedio de 9 horas de sueño. Con un nivel de significación de 0.05, ¿puede afirmarse a partir de la muestra observada que el nuevo fármaco produce más horas de sueño que la versión anterior? Hallar el p-valor del test.

$H_0: \mu = 8 \qquad H_1: \mu > 8$

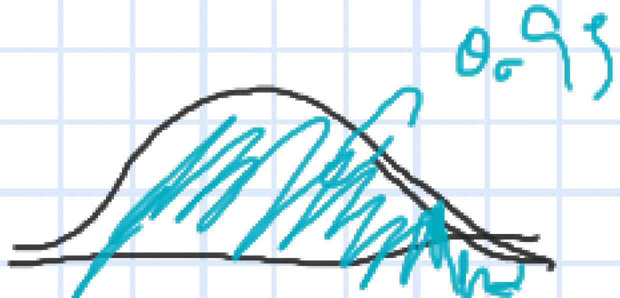
X: "horas de sueño con el nuevo fármaco"

$X \sim N(\mu, 4)$ $\qquad \bar{x} = 9$

$U = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\cancel{2}\,\sigma}\sqrt{n}$ $\qquad \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \dfrac{\bar{X} - 8}{2}\sqrt{81} > k_\alpha \right\}$

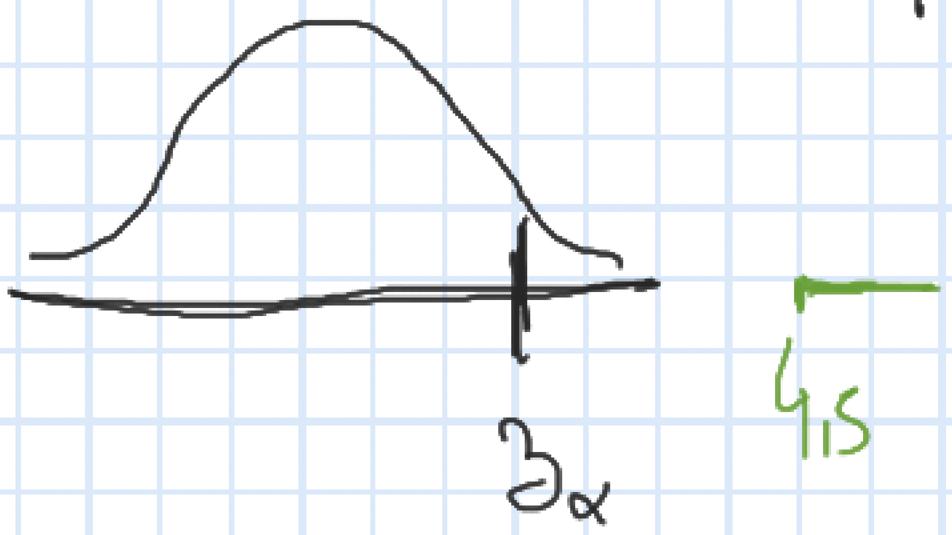
$$\alpha = 0.05 = P_{\mu=8}\left(\delta(\underline{X}) = 1\right) = 1 - \overbrace{P_{\mu=8}\left( \underbrace{\frac{\bar{X} - 8}{2}\, 9}_{\sim N(0,1)} \le k_\alpha \right)}^{0.95}$$

$\Rightarrow k_\alpha = z_{0.95} = 1.644$ $\qquad \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \dfrac{\bar{X} - 8}{2} \cdot 9 > 1.644 \right\}.$




Con $\bar{x} = 9$ $\qquad \dfrac{\bar{x} - 8}{2} \cdot 9 = 4,5 \Rightarrow$ Rechazo $H_0$

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}_{\mu=8}\Big( \underbrace{\frac{\bar{X}-8}{2}\, 9}_{N(0,1)} > \underset{\downarrow\, z_\alpha}{4,5} \Big) \doteq 3,4\, e^{-6}$$



Relación IC / test

$IC(\underline{X}) = [a(\underline{X}), b(\underline{X})]$

confianza del 0,95

$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$

$\alpha = 0{,}05$

$\delta(\underline{X}) = 1\{U < k_{\alpha/2}\} + 1\{U > k_{1-\alpha/2}\}$

$\mu_0 = 1$ $\quad Ic(\underline{x}) = \underbrace{[-1; 0{,}79]}$

$\left\{ \frac{\overline{X} - \mu_0}{2} \sqrt{n} > 1.64 \right\}$

$\mu_0 : \frac{\overline{X} - \mu_0}{2} \sqrt{n} < 1.64$

$\mu_0 > -\frac{1.64 \cdot 2}{\sqrt{n}} + \overline{X}$

es una cota inferior p/ $\mu_0$ de nivel 0,95

2. Sea $\underline{X}$ una muestra aleatoria de tamaño $n$ de una población con distribución uniforme sobre el intervalo $(0, \theta)$.

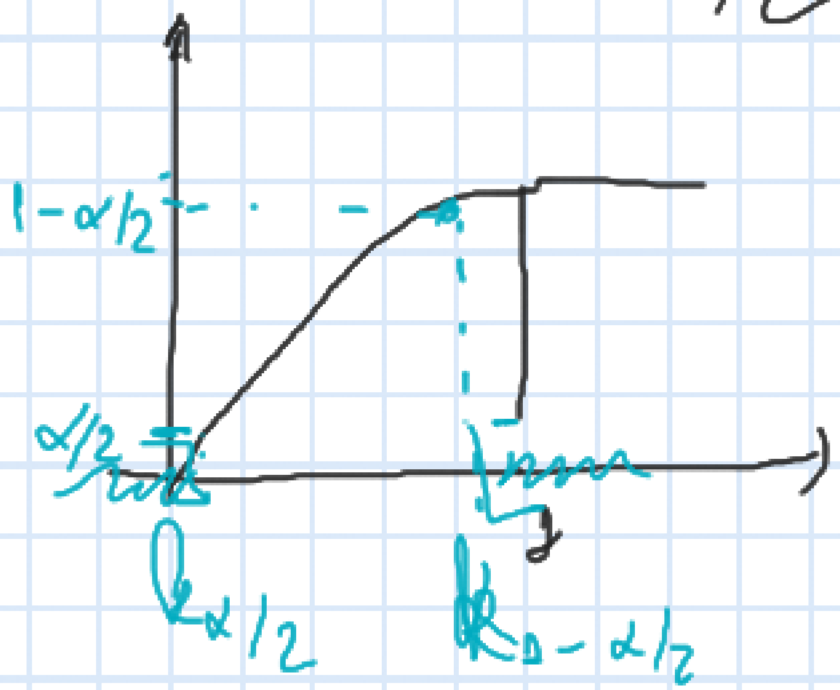
(a) Diseñar un test de hipótesis de nivel 0.01 para decidir entre las hipótesis $H_0 : \theta = 3$ vs. $H_1 : \theta \neq 3$.

(b) Si en una observación de tamaño $n = 10$ se observó que $\max(x_1, \ldots, x_n) = 2.75$, ¿qué concluye?

$$\delta(\underline{X}) = 1\{ \quad \} + 1\{ \quad \}$$

$$\underbrace{P_{\theta=3}\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} < k_{\alpha/2}\right)}_{\alpha/2} + \underbrace{P_{\theta=3}\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} > k_{1-\alpha/2}\right)}_{\alpha/2}$$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u^n & 0 \le u < 1 \\ 1 & u \geq 1 \end{cases}$$




$\alpha/2 = 0.005$

$1-\alpha/2 = 0.995$

$$\alpha/2 = P\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} > k_{1-\alpha/2}\right)$$

$$1-\alpha/2 = 1 - P\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} > k_{1-\alpha/2}\right) = P\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} \le k_{1-\alpha/2}\right)$$

$$\alpha/2 = 1 - \mathbb{P}\left( \frac{\max(\underline{x})}{\theta} \leq k_{1-\alpha/2} \right)$$

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}\left( \frac{\max(\underline{x})}{\theta} \leq k_{1-\alpha/2} \right)$$

$\hookrightarrow$ quantil $1-\alpha/2$.

$$k_{1-\alpha/2}^{n} = 1 - \alpha/2$$

$$\hookrightarrow k_{1-\alpha/2} = \sqrt[n]{1-\alpha/2}$$

$$\frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}\left(\underbrace{Y - \mathbb{E}[Y]}\right) + \mathbb{E}(X)$$