Se desea estimar la media de una variable con distribución N(μ,9) a partir del promedio de n realizaciones. Analizar las bondades de las que goza dicho estimador.

$\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$

$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

1. $B(\hat{\mu}) = \mathbb{E}[\overline{X} - \mu] = \mathbb{E}[\overline{X}] - \mu = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] - \mu$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{\mu} - \mu = \frac{1}{n} n\mu - \mu = 0$

$\Rightarrow \overline{X}$ es insesgado ✓

2. $ECM = Var(\overline{X}) + B(\hat{\mu})^2 = Var(\overline{X})$

$= \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\text{indep.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{Var(X_i)}_{9} = \frac{1}{n^2} n9 = \frac{9}{n}$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0$

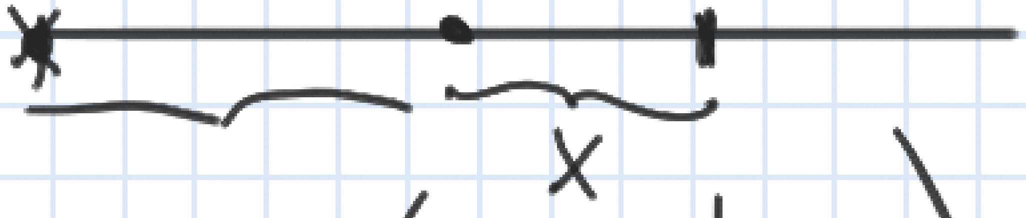
Consist. en media cuadrática.

$X \sim f_{\Theta}$

$$\boxed{X \mid \Theta = \theta} \sim f_{\theta}$$

$\Theta \mid \underline{X} = \underline{x}$

La posición del impacto en un tiro al blanco (en decímetros) respecto del cero sobre el eje x es una variable aleatoria X con distribución normal de media cero y varianza 1/θ, donde θ representa la precisión del tirador.
A priori, la precisión θ tiene una distribución Chi-cuadrado de 8 grados de libertad. Lucas tiro 10 veces al blanco y observó que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$. Hallar la distribución a posteriori de θ.
Hallar la estimación de Bayes de θ para la el riesgo cuadrático



$X \mid \Theta = \theta \sim N(0, 1/\theta)$

precisión

$\Theta \sim \chi^2_8$

$\Gamma(4, 1/2)$

Familia conjugada $\Rightarrow$

obs: $\sum x_i^2 = 17$

$\nu = \frac{k}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$\Theta \sim \Gamma(m, \lambda)$

$\Theta \mid \underline{X} = \underline{x} \sim \Gamma(\tilde{m}, \tilde{\lambda})$

$$\Theta \mid \underline{X}=\underline{x}\,(\theta) = \frac{f_{\underline{X}\mid\Theta=\theta}(\underline{x})\,\pi(\theta)}{\int \cdots \, d\theta} \propto f_{\underline{X}\mid\Theta=\theta}(\underline{x})\,\pi(\theta)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)}\lambda^{\nu} t^{\nu-1} e^{-\lambda t}\,1\!\!1\{t>0\}$$

$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \to$ cte

$$\propto \underbrace{f_{\underline{X}\mid\Theta=\theta}(\underline{x})}\,\pi(\theta) =$$

$$\prod_{i=1}^{10} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{10} \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_i-0)^2\theta}{2}} = \frac{(\sqrt{\theta})^{10}}{(\sqrt{2\pi})^{10}}\, e^{-\frac{\theta}{2}\sum x_i^2}$$

$(\sqrt{2\pi})^{10} \to$ cte $\to$ lo tira en el $\propto$

$$\propto \theta^{10/2}\, e^{-\frac{\theta}{2}\sum x_i^2}\, \frac{1}{3!}(1/2)^4\, \theta^3 e^{-\theta/2}\, 1\!\!1\{\theta>0\}$$

$$\propto \theta^{10/2}\, e^{-\frac{\theta}{2}\sum x_i^2}\, \theta^3 e^{-\theta/2}\, 1\!\!1\{\theta>0\} = \theta^{8}\, e^{-\theta\left(\frac{\sum x_i^2}{2}+1/2\right)}\, 1\!\!1\{\theta>0\}$$

$$\Theta \mid \underline{X}=\underline{x} \sim \Gamma\left(9,\ \frac{\overbrace{\sum x_i^2}^{17}}{2}+1/2\right) \qquad \Gamma(9,9)$$

→ Estimador Bayesiano (p/ pérdida cuadrática)

$$\mathbb{E}\left[\theta \mid \underline{X}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\theta \mid \underline{X} = \underline{x}\right] = \frac{9}{\frac{\sum x_i^2 + 1}{2}} = \frac{18}{\sum x_i^2 + 1} = \underline{1}$$

$\sum x_i^2$: 17

con los que observaste.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A) = \int_A \int f_{X \mid \Theta = \theta}(x)\, f_{\Theta \mid \underline{X} = \underline{x}}(\theta)\, dx$$

$\hookrightarrow \sim X$

La cantidad de accidentes semanales en una planta industrial tiene una distribución de Poisson de media μ. En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

A priori, μ tiene una distribución exponencial de media 2. Hallar la distribución a posteriori de μ.

$$X|_{M=\mu} \sim Poi(\mu)$$

$$M \sim \mathcal{E}(1/2) \qquad n = 100$$

$$\mathcal{E}(1/2) \equiv \Gamma(1, 1/2)$$

$\Downarrow$ Familias conj.

$$f_{M|\underline{X}=\underline{x}}(\mu) = \frac{p_{\underline{X}|M=\mu}(\underline{x})\,\pi(\mu)}{\int \quad d\mu}$$

$$p_{\underline{X}|M=\mu}(x) = \prod_{i=1}^{100} p_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{100} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum x_i} e^{-100\lambda}}{\prod_{i=1}^{100} x_i!}$$

$$\pi(\mu) = 1/2\, e^{-1/2\mu}\, \mathbb{1}\{\mu > 0\}$$

$$f_{M|\underline{X}=\underline{x}}(\mu) = \frac{\dfrac{\lambda^{\sum x_i} e^{-m\lambda}}{\prod^{100} x_i} \cdot \dfrac{1}{2} e^{-1/2\,\mu}\, \mathbb{1}\{\mu>0\}}{\int \ldots \, d\mu} \propto \mu^{\sum x_i} e^{-\mu\left(m+\frac{1}{2}\right)} \mathbb{1}\{\mu>0\}$$

$\nu - 1$ λ

$$M \mid \underline{X}=\underline{x} \sim \Gamma\left(\sum x_i + 1,\ m + \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum x_i = 212$$

con mis observaciones $M \mid \underline{X}=\underline{x} \sim \Gamma(213, 100{,}5)$

Ej: 4

$$\mathbb{P}(X=0) = \int_0^\infty \frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu} \frac{1}{212!} (100{,}5)^{213} \mu^{212} e^{-100{,}5\,\mu}\, d\mu$$

$$e^{-101{,}5\,\mu} \quad \propto \Gamma(213, 101{,}5)$$

$$= \frac{(100{,}5)^{213}}{(101{,}5)^{213}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{212!} (101{,}5)^{213} \mu^{212} e^{-101{,}5\,\mu}\, d\mu}_{=1} = 0{,}1214$$

1. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución exponencial
2. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución de Bernoulli
3. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución Uniforme en el intervalo (0,θ)

tengo muestra de tamaño n.

1. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad f_X(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{f_\lambda(x_i)}_{1/\lambda \, e^{-\lambda x_i} \mathbb{1}\{x_i>0\}} = \underbrace{\frac{1}{\lambda^n} e^{-\lambda \sum x_i}}_{g(T(\underline{x}),\lambda)} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{x_i>0\}}_{h(\underline{x})}$

$f_\lambda(\underline{x}) = g(T(\underline{x}),\lambda)\, h(\underline{x}) \Rightarrow T(\underline{X}) = T(\underline{X}) = \sum X_i$

$g(T(\underline{x}),\lambda) = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\lambda \sum x_i}$

1. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución exponencial
2. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución de Bernoulli
3. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución Uniforme en el intervalo (0,θ)

3. $X \sim U(0,\theta) \to f_X(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x < \theta\}$

$$f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{\cancel{0} < x_i < \theta\}$$

$\mathbb{1}\{\min(x_i) > 0\} \cdot \mathbb{1}\{\max(\underline{x}) < \theta\}$

$$= \underbrace{\frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{\underbrace{\max(\underline{x})}_{} < \theta\}}_{g(r(\underline{x}),\theta)} \underbrace{\mathbb{1}\{\min(\underline{x}) > 0\}}_{h(\underline{x})}$$

$\max(\underline{x}) = T$

La probabilidad de acertar a un blanco es p. Se realizan 10 tiros independientes, en los cuales se observaron 4 aciertos. A partir este valor observado estimar el valor de p por MV.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si acierto} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$X \sim Ben(p) \quad p \in (0,1)$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 4$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{10} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\overset{4}{\sum x_i}} (1-p)^{10-\overset{4}{\sum x_i}}$$

$$\log L(p) = \log\left(p^{\sum x_i} (1-p)^{10-\sum x_i}\right) = \sum x_i \log(p) + (10-\sum x_i)\log(1-p)$$

$$\frac{\partial \log L(p)}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{10-\sum x_i}{1-p} = 0$$

$$(1-p)\sum x_i = (10-\sum x_i)p$$

$$\sum x_i - \cancel{p\sum x_i} = 10p - \cancel{\sum x_i\, p} \rightarrow \hat{p} = \frac{\sum X_i}{10} = \bar{X}$$

$$\hat{p} = \frac{4}{10}$$

Siguiendo el ejercicio 7, estimar la probabilidad de que se necesiten al menos 2 tiros para observar el primer acierto.

$Y =$ "# de tiro hasta el 1º acierto"

$Y \sim geom(p)$

$$\widehat{\mathbb{P}_p(Y \geq 2)} = \mathbb{P}_{\underset{4/10}{\hat{p}}}(Y \geq 2) = 1 - \mathbb{P}_{\hat{p}}(Y = 1)$$

$$= 1 - \hat{p} = 1 - 4/10 = 6/10$$