Probabilidad y estadística

Clase 1

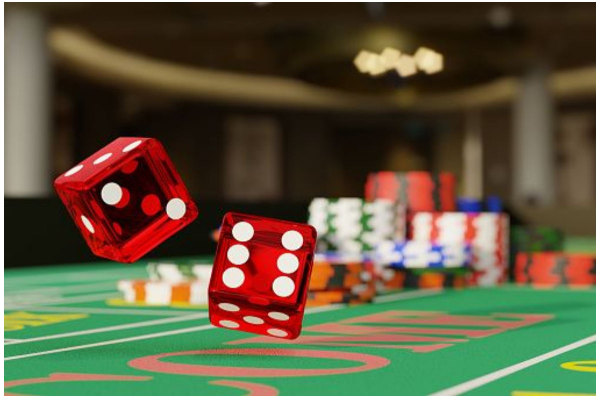
Cronograma

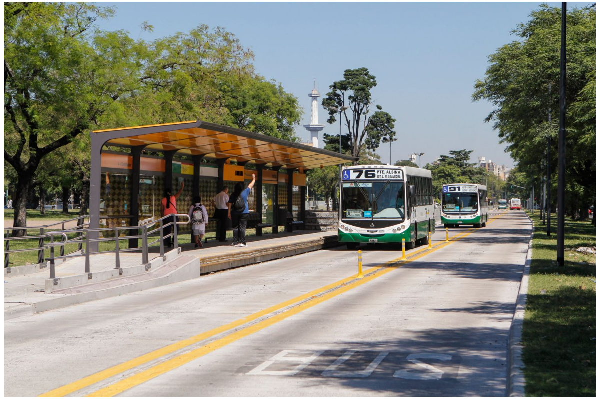
Clase 1	Repaso de probabilidad y v.a.
Clase 2	Transformación de variables aleatorias
Clase 3	Variables condicionadas
Clase 4	Estimadores puntuales
Clase 5	Estimación por intervalo y test de hipótesis
Clase 6	Enfoque bayesiano
Clase 7	Repaso + procesos estocásticos (opcional)
Clase 8	Examen

Repaso de algunos conceptos

¿Qué es la probabilidad?

El término **probabilidad** se refiere al estudio del azar y la incertidumbre en cualquier situación en la que varios escenarios pueden ocurrir.





Algunos elemento de la probabilidad

Un **experimento aleatorio:** acciones o procesos en los cuales conocemos todos los resultados posibles pero no sabemos con certeza cuál va a ocurrir.

Llamamos **espacio muestral** (Ω) al conjunto de resultados posibles de mi experimento aleatorio.

Un **evento o suceso** es cualquier subconjunto de resultados en el espacio muestral

Una primera aproximación a las probabilidades

La **probabilidad** de un evento A es un número positivo (o nulo) que se le asigna a cada suceso o evento del espacio muestral que nos habla de la certeza que se tiene sobre ese evento.

Supongamos que realizamos un experimento n veces, y estamos interesados en un evento particular A. Luego podemos definir:

- **Frecuencia absoluta:** Cantidad de veces que ocurre A en mis n experimentos
- **Frecuencia relativa (f_A):** la proporción de veces que ocurrió A entre mis n experimentos.

Si la cantidad de ensayos es lo suficientemente grande, esperamos que $f_A \approx \mathbb{P}(A)$

Más rigurosamente, $f_A \overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{P}(A)$

Álgebra de eventos

Dado un Ω, definimos al **álgebra de eventos** ($\mathcal{A}$) como una familia de subconjuntos de Ω que satisface:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c \in \mathcal{A}$
3. $B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$

El álgebra representa los resultados "medibles" del experimento.

Corolario:

- $\mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Def: una **probabilidad** es una función $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ que satisface:

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \; \forall A \in \mathcal{A}$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $A \cap B = \emptyset, \; \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

El conjunto $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ define lo que se conoce como **espacio de probabilidad**

Espacios equiprobables

Si es estamos en presencia de un espacio **equiprobable**, es decir donde todos los elementos tienen las mismas chances de ocurrir, las probabilidades pueden calcularse como la proporción entre la cantidad de casos donde ocurre el experimento y la cantidad de elementos que existen en el espacio muestra. A esto se lo conoce como regla de **Laplace**

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\text{"casos favorables"}}{\#\text{casos totales}}$$

Algunas nociones de conteo

Probabilidades condicionales y proba. total

Def: Se llama **probabilidad condicional** de A dado B ($\mathbb{P}(A|B)$) a la probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que B ha ocurrido, y está definida por

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cup B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Def: Diremos que los eventos $B_1, \ldots B_n$ forman una **partición** si $B_i \cap B_j = \emptyset \, \forall \, i, j$ y $\bigcup_{i=1}^{n} B_j = \Omega$.

Luego podemos describir al evento A como $A = (A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$ de forma que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

Fórmula de probabilidad total

Teorema de Bayes e independencia

Teorema de Bayes: Sean $B_1, \ldots B_n$ una partición de Ω, y A un evento con probabilidad positiva:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i) mathbbP(B_i)}$$

Def: Diremos que dos eventos A y B son **independientes** si y sólo sí vale que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Variables aleatorias

Variables aleatorias

Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función que mapea cada elemento ω del espacio muestral Ω a los números reales a un número real $X(\omega)$

Def: Dado un espacio muestral $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diremos que X es una variable aleatoria si $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

Def: Dado un $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y X una v.a., se define su **función de distribución** como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \; \forall a \leq b$$

Propiedades de la función de distribución

Sea $F_X(x)$ una función de distribución asociada a la v.a. X.

Propiedades:

- $F_X(x) \in [0,1] \; \forall \, x \in \mathbb{R}$
- $F_X(x)$ es monótona no decreciente
- $F_X(x)$ es continua a derecha
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Variables aleatorias discretas

Si X es una variable aleatoria **discreta**, entonces su función de distribución $F_X(x)$ es monótona no decreciente de a saltos (es escalonada). Llamamos **átomos** (A) al conjunto de puntos donde la función de distribución tiene saltos

Además tiene asociada una **función (de masa) de probabilidad**

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

Propiedades:

- $p_X(x) > 0$
- $\sum_{x \in A} p_X(x) = 1$
- $\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B} p_X(x)$

Algunas distribuciones conocidas

- Bernoulli: diremos que $X \sim Ber(p)$ si X toma valores 1 (*éxito*) o 0 (*fracaso*) y

$$p_X(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1 - p & x = 0 \end{cases}$$

- Binomial: cuenta la cantidad de éxitos en n ensayos independientes. Diremos que $X \sim Bin(n, p)$ y

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n$$

- Geométrica: cuenta la cantidad de ensayos hasta el primer éxito. Diremos que $X \sim \mathcal{G}(p)$ y

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p, x = 1, 2, \ldots$$

Variables aleatorias continuas

Si X es una variable aleatoria continua, entonces su función de distribución $F_X(x)$ es monótona estrictamente creciente (no presenta saltos).

Además tiene asociada una función de densidad $f_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Propiedades:

- $f_X(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)) = 1$
- $\mathbb{P}(X \in A) = \int_{x \in A} f_X(x) dx$

Algunas variables importantes

- Uniforme: todos los puntos son equiprobables. $X \sim \mathcal{U}(a,b)$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{I}\{a < x < b\}$$

- Exponencial: sirve para modelar tiempos hasta eventos que no tienen memoria. Por ejemplo fallas casuales. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{I}\{x > 0\}$$

- Normal (gaussiana). $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Propiedades: $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2),\ Y \sim \mathcal{N}\mu_Y, \sigma_Y^2) \rightarrow X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (estandarización)

Distribución conjunta y marginales

Si tenemos dos variables X e Y se define su **función de distribución conjunta** como

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

En este caso, vale la regla del rectángulo

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$$

Caso continuo: $f_{X,Y}(x,y)$ es la función de densidad conjunta y se definen las funciones de densidad marginales como $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$ y

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Caso discreto: $p_{X,Y}(x,y)$ es función de probabilidad conjunta y se definen las funciones de probabilidad marginal como $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$

$$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

Independencia de v.a.

Diremos que dos v.a. X e Y son independientes si vale que

$$F_{X.Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Caso discreto:

$$p_{X.Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Caso continuo:

$$f_{X.Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Distribuciones condicionales

Al igual que como definimos probabilidades condicionales para eventos podemos definir distribuciones condicionales para variables aleatorias.

Caso discreto:

$$p_{Y|X=x}(y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$$

Caso continuo:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Qué ocurre si X e Y son independientes?

Momentos

Esperanza

La esperanza o media es el valor esperado de la variable aleatoria. Es un promedio ponderado de los valores que puede tomar la variable.

Caso discreto: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in A} x \, p_X(x)$

Caso continuo: $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x) \, dx$

Propiedades:

- $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$ (linealididad)
- Si X,Y son independientes $\mathbb{E}[X\,Y] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- Si $Y = g(X)$ vale que $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in A} g(x) p_X(x)$ (si X es v.a.c)

  $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) \, df$ (si X es continua)

Varianza

La varianza de una v.a. X mide su dispersión respecto de la media, y se define como

$$var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Propiedades:

- $var(aX + b) = a^2 var(X)$
- Si X, Y son **independientes**, $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$

Se define también el desvío estándar como

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)}$$

Vectores aleatorios:

Para el caso del vector aleatorio (X,Y) definimos la esperanza como

$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_{x,y} g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$ (caso discreto)

$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy$ (caso continuo)

Definimos la covarianza entre dos v.a. X, Y como:

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

La covarianza mide la relación **lineal** entre las variables.

El coeficiente de correlación entre ambas variables se define como

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}$$

Covarianza

Propiedades de la covarianza:

- $cov(aX + bY, cZ) = ac\, cov(X, Z) + bz\, cov(Y, Z)$
- $cov(X, X) = var(X)$
- $var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y)$
- Si $cov(X, Y) = 0$ diremos que las variables están descorrelacionadas
- Si X,Y son independientes, entonces $cov(X, Y) = 0$ (Cuidado! No vale para el otro lado)

Momentos

En general, definimos el ***n*-ésimo momento** de la v.a. X como $\mathbb{E}[X^n]$

Se define la **función generadora de momentos** como

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Si que $\mathbb{E}[e^{tX}]$ existe (es finita) para algún intervalo que contiene al cero, se puede calcular el n-ésimo momento de X como la derivada n-ésima de $M_X(t)$ evaluada en 0:

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{d}{dt} M_X(t)|_{t=0}$$