2. La cantidad de accidentes semanales en una planta industrial tiene una distribución de Poisson de media μ. En una muestra de 100 semanas se observaron las
frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

A priori, μ tiene una distribución exponencial de media 2. En virtud de la información muestral:

1. Estimar la probabilidad de que en la semana del 18 de diciembre de 2021 no ocurra ningún accidente en la mencionada planta.

M = "Tasa de accidentes en la planta industrial"

N = "# de accidentes en una semana"

$N \mid M=\mu \sim Poi(\mu)$ m.a. $\underline{N} = (N_1, \dots, N_{100})$

$M \sim \mathcal{E}(1/2) \Rightarrow \pi(\mu) = \frac{1}{2} e^{-1/2\,\mu}$

$$p_{\underline{N}\mid M=\mu}(\underline{n}) = \prod_{i=1}^{100} p_{N_i\mid M=\mu}(n_i) = \prod_{i=1}^{100} \frac{\mu^{n_i}}{n_i!} e^{-\mu} \mathbb{I}\{n_i \geq 0\}$$

$$= \frac{e^{-100\mu}\,\mu^{\sum_{i=1}^{100} n_i}}{n_1! \cdots n_{100}!} \prod_{i=1}^{100} \mathbb{I}\{n_i \geq 0\}$$

$$f_{M\mid \underline{N}=\underline{n}}(\mu) = \frac{p_{\underline{N}\mid M=\mu}(\underline{n})\,\pi(\mu)}{\int p_{\underline{N}\mid M=\mu}(\underline{n})\,\pi(\mu)\,d\mu}$$

$$f_{M|\underline{N}=\underline{m}}(\mu) = \frac{p_{\underline{N}|M=\mu}(\underline{m})\ \pi(\mu)}{\int p_{\underline{N}|M=\mu}(\underline{m})\ \pi(\mu)\,d\mu} = \frac{\dfrac{e^{-100\mu}\mu^{\sum_{i=1}^{100} m_i}}{m_1!\cdots m_{100}!}\ \frac{1}{2}e^{-\mu/2}\ I\{\mu>0\}\prod_{i=1}^{100} I\{m_i \geq 0\}}{\int(\ \cdots\ )\,d\mu}$$

como $N|M=\mu \sim Poi(\mu)$ y $M \sim \Gamma(1, 1/2)$ $\Rightarrow$ flia conjugada

$$\propto e^{-100\mu}\mu^{\sum_{i=1}^{100} m_i} e^{-\mu/2}\ I\{\mu>0\} = e^{-100.5\mu}\mu^{\sum_{i=1}^{100} m_i}\ I\{\mu>0\}$$

$\hookrightarrow M|\underline{N}=\underline{m} \sim \Gamma(\nu, \lambda)$

$$M \sim \Gamma(\nu,\lambda) \Rightarrow \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}\mu^{\nu-1}e^{-\lambda\mu}\ I\{\mu>0\}$$

$$M|\underline{N}=\underline{m} \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{100} m_i + 1,\ 100.5\right)$$

con los datos obs.

$$\sum_{i=1}^{100} m_i = 0\cdot 10 + 1\cdot 29 + 2\cdot 25 + 3\cdot 17 + 4\cdot 13 + 5\cdot 6 = 212$$

$$M|\underline{N}=\underline{m} \sim \Gamma(213,\ 100.5)$$

$$\mathbb{P}(X\in A) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_A f_{X|\Theta=\theta}(x)\,dx}_{\mathbb{P}(X\in A|\Theta=\theta)}\; f_\Theta(\theta)\, d\theta = \int_A \int_{\mathbb{R}} f_{X|\Theta=\theta}(x)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta\, dx.$$

X disc
Θ cont $\rightarrow \; = \sum_{x\in A} \int_{\mathbb{R}} p_{X|\Theta=\theta}(x)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta.$

X cont
Θ disc. $\rightarrow \; \int_A \sum_{\theta} f_{X|\Theta=\theta}(x)\, p_\Theta(\theta)\, dx.$

X,Θ disc $\rightarrow \; \sum_{x\in A} \sum_{\theta} p_{X|\Theta=\theta}(x)\, p_\Theta(\theta)$

$\underline{\text{es:}}\ X_i | \Theta = \theta \sim N\left(0, 1/\theta\right) \qquad \Theta \sim \chi^2_8 = \Gamma(4, 1/2) \longrightarrow \Theta \mid \underline{X} = \underline{x} \sim \Gamma\left(4, \frac{\sum x_i^2 + 1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \hat{\Theta} = \mathbb{E}\left[\Theta \mid \underline{X}\right] = \varphi(\underline{X}) = \frac{8}{\sum X_i^2 + 1}$$

↳ funz. di reg.

$$\varphi(\underline{x}) = \mathbb{E}\left[\Theta \mid \underline{X} = \underline{x}\right] = \frac{4}{\frac{\sum x_i^2 + 1}{2}} = \frac{8}{\sum x_i^2 + 1} = \frac{8}{17+1} = \frac{8}{18} = \hat{\theta}$$

Dato: $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$

Ej2 $\quad N|_{M=\mu} \sim Poi(\mu) \qquad M \sim \Gamma(1, 1/2) \longrightarrow M|_{\underline{N}=\underline{n}} \sim \Gamma(\sum x_i + 1, 100.5)$

$$P(N=0) = \int P(N=0 \mid M=\mu) f_M(\mu)\, d\mu = \int_0^\infty \underbrace{\frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu}}_{P(N=0 \mid M=\mu)} \frac{100.5^{\sum x_i + 1}}{(\sum x_i)!} \mu^{\sum x_i} e^{-100.5\mu}\, d\mu$$

$\Gamma(\sum x_i + 1)$

$$= \int \underbrace{e^{-101.5\mu} \frac{100.5^{\sum x_i + 1}}{(\sum x_i)!} \mu^{\sum x_i}}_{\mathcal{L}\,\Gamma(\sum x_i + 1,\ 101.5)} d\mu \underset{\sum x_i = 212}{=} \int_0^\infty e^{-101.5\mu} \frac{100.5^{213}}{212!} \mu^{212}\, d\mu$$

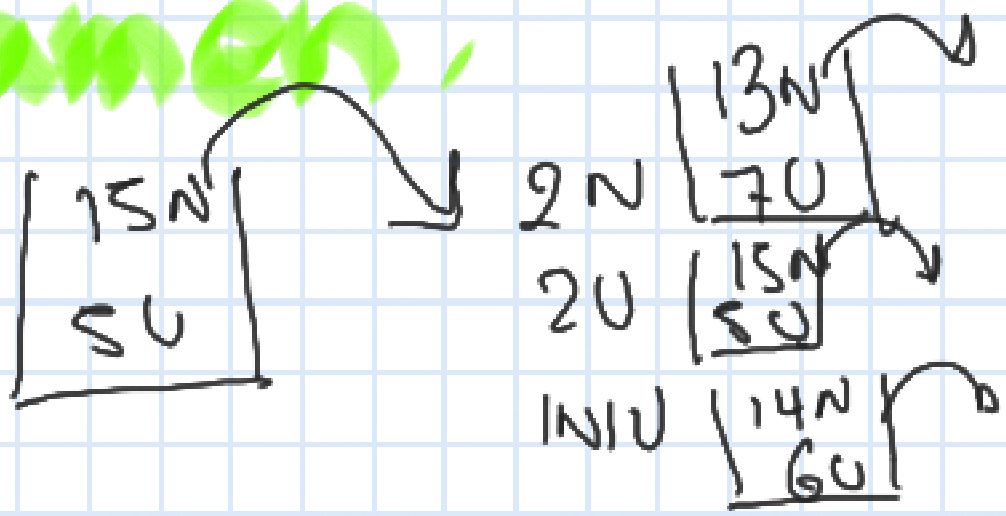
$$= \frac{100.5^{213}}{101.5^{213}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{101.5^{213}}{212!} \mu^{212} e^{-101.5\mu}\, d\mu}_{=1} = \left(\frac{100.5}{101.5}\right)^{213} = 0.12.$$

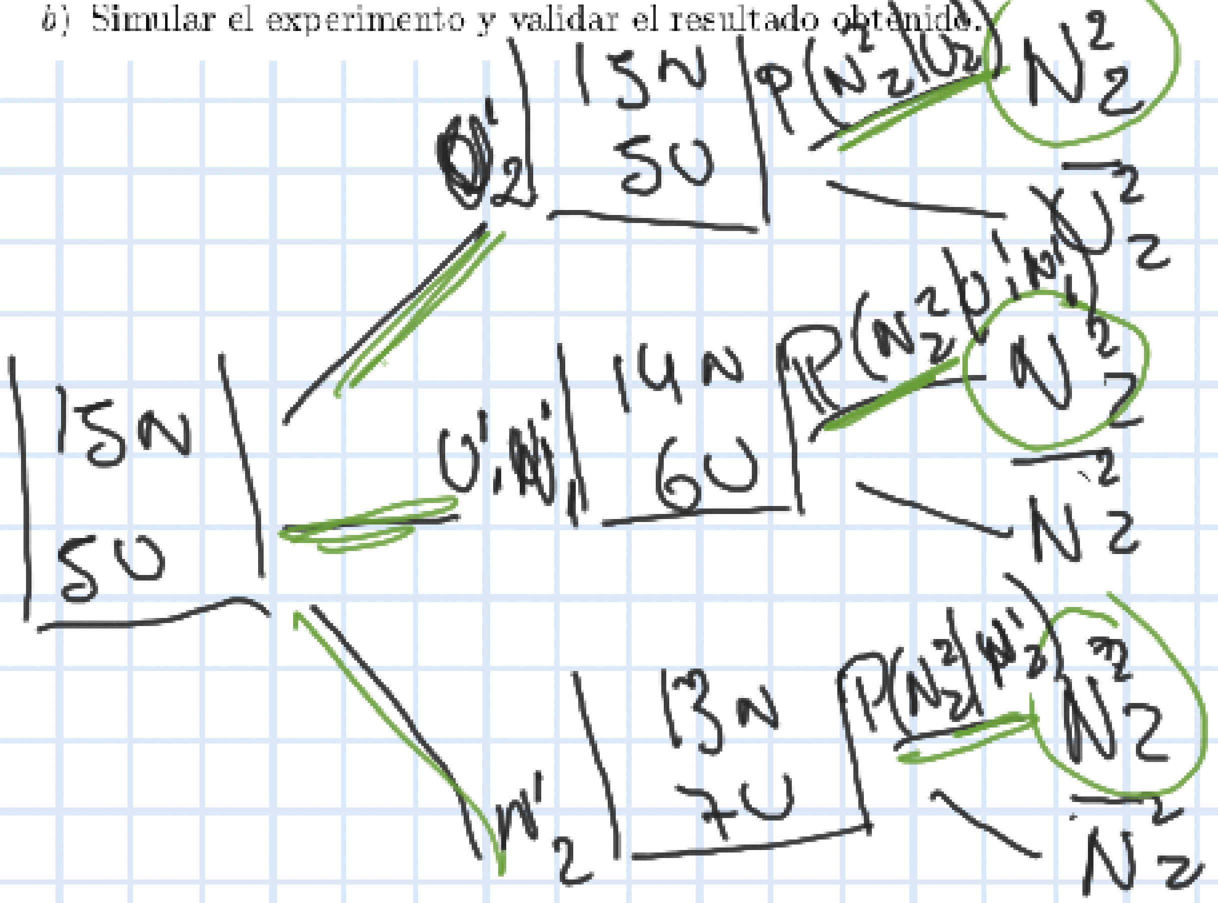
Repaso para el examen.

1. En una caja hay 20 pelotas de tenis, de las cuales 15 son nuevas y 5 usadas. Para un partido se extraen al azar dos pelotas y al finalizar se vuelven a colocar en la caja. Si para el siguiente partido se extraen al azar dos pelotas.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo partido se lleve a cabo con ambas pelotas nuevas?

   b) Simular el experimento y validar el resultado obtenido.





U_2^i = "Salieron 2 bolas usadas en el part. i"

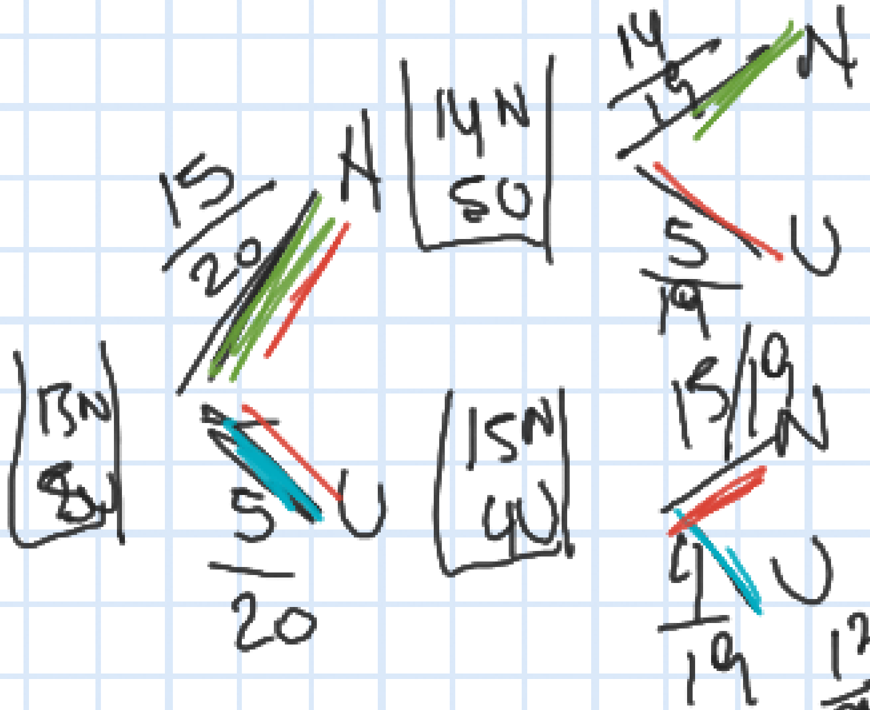
N_2^i = " " " " nuevas " " " i"

$U_1^i N_1^i$ = "Salió uno nuevo y uno usado en el part. i"

$$P(N_2^2) = \underbrace{P(N_2^2|U_2^1)}_{\frac{15}{20}\frac{14}{19}}\underbrace{P(U_2^1)}_{\frac{15}{20}\frac{14}{19}} + \underbrace{P(N_2^2|U_1^1N_1^1)}_{\frac{14}{20}\frac{13}{19}}\underbrace{P(U_1^1N_1^1)}_{\frac{15}{20}\frac{5}{19}\cdot 2} + \underbrace{P(N_2^2|N_2^1)}_{\frac{13}{20}\frac{12}{19}}\underbrace{P(N_2^1)}_{\frac{5}{20}\frac{4}{20}}$$

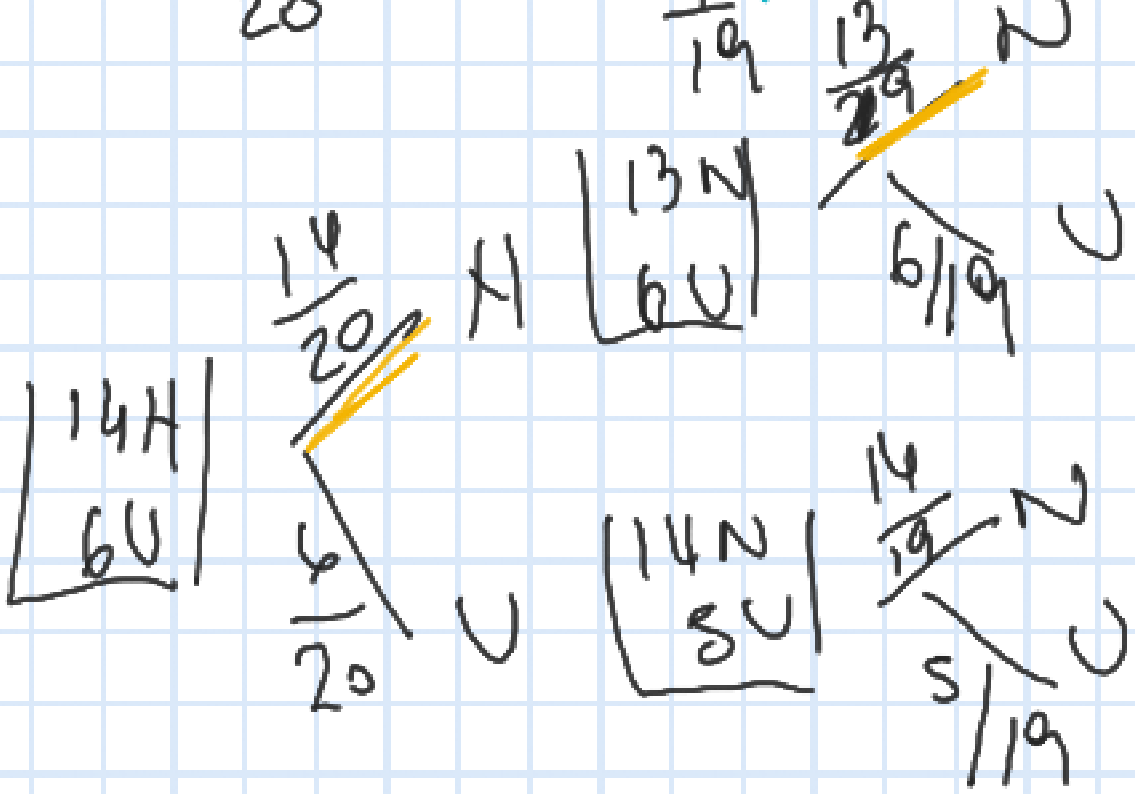
Prob total

$= \boxed{}$

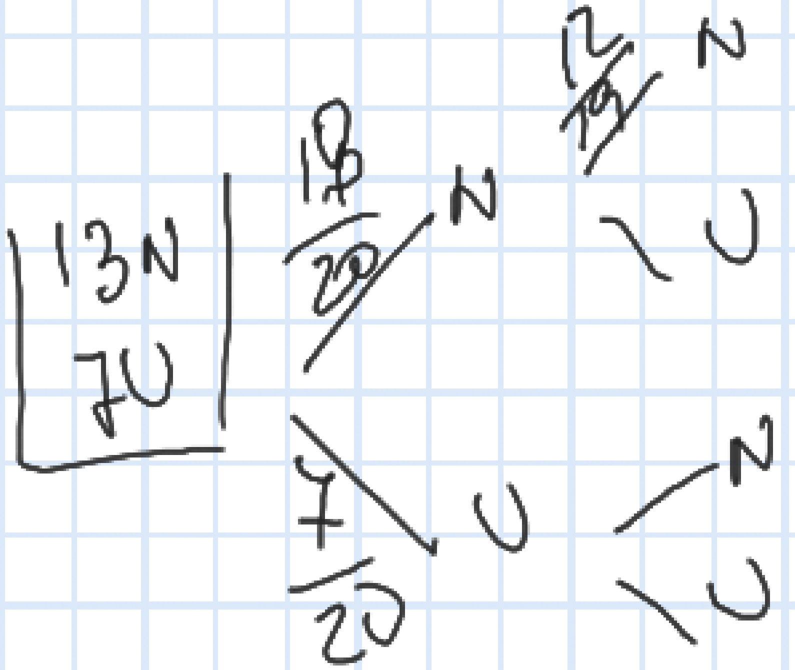


$$\mathbb{P}(N_2^1) = \frac{15}{20}\frac{14}{19} \qquad \mathbb{P}(U_2^1) = \frac{5}{20}\frac{4}{19}$$

$$\mathbb{P}(U_1^1 N_1^1) = \frac{15}{20}\frac{5}{19} + \frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}$$



$$\mathbb{P}(N_2^2 \mid U_1^1 N_1^1) = \frac{14}{20}\frac{13}{19}$$



$$\mathbb{P}(N_2^2 \mid N_2^1) = \frac{13}{20}\frac{12}{19}$$

2. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-x/2y}}{4y} 1\{0 < x, 1 \leq y \leq 3\}.$$

a) Hallar $\mathbb{E}[X|Y]$.

~~b) Simular el ejercicio y verificar el resultado. (Tip: guiarse con el ejercicio 1 de Esperanza condicional (Guía3))~~

c) Calcular $\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y] > 1)$.

$$\varphi(y) = \mathbb{E}[X|Y=y]$$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \varphi(Y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-x/2y}}{4y} I\{0<x, 1\leq y \leq 3\}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y=y}(x)\, f_Y(y)$$

forma 1 → Calculo $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dx$ → $f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

forma 2 → Miro fijo y factorizo

$$f_{X,Y}(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2y} e^{-x/2y} I\{x>0\}}_{f_{X|Y=y}(x)} \; \underbrace{\frac{1}{2} I\{1 \leq y \leq 3\}}_{Y \sim U(1,3)}$$

$$X|Y=y \sim \mathcal{E}(1/2y)$$

$$\lambda e^{-\lambda x}$$

Par la formule 1 :

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x/2y}}{4y} I\{1 \le y \le 3\}\, dx = \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{e^{-x/2y}}{2y}\, dx}_{=1}\ \frac{1}{2} I\{1 \le y \le 3\}$$

$$= \frac{1}{2} I\{1 \le y \le 3\}.$$

$$f_{X|Y=y} = \frac{\dfrac{e^{-x/2y}}{2\cancel{4}y} I\{x>0\} I\{1 \le y \le 3\}}{\cancel{1/2}\, I\{1 \le y \le 3\}}.$$

$$= \frac{e^{-x/2y}}{2y} I\{x>0\}, \text{ si } y \in [1,3].$$

$$\to X|Y=y \sim \mathcal{E}(1/2y)$$

como $X | Y=y \sim \mathcal{E}(1/2y) \Rightarrow \varphi(y) = \mathbb{E}[X | Y=y] = 2y$.

$\rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X|Y] = \varphi(Y) = 2Y}$ ✓

$\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y] > 1) = \mathbb{P}(2Y > 1) = \mathbb{P}(Y > 1/2) = 1$

$Y \sim \mathcal{U}(1,3)$

3. En un juego de ruleta que cuenta con los números del 0 al 36, un jugador siempre apuesta a tercera docena, es decir que sólo lo benefician los números del 25 al 36 inclusive. El casino sospecha que un crupier intenta favorecer al jugador, y está dispuesto a despedirlo si encuentra evidencia suficiente de que lo favorece. Luego de 100 bolas tiradas por el crupier, salió la tercer docena 40 veces.

a) Hallar un test de hipótesis de nivel asintótico 0.05 α adecuado a este problema y basándose en él decidir si el casino debe despedir al crupier.

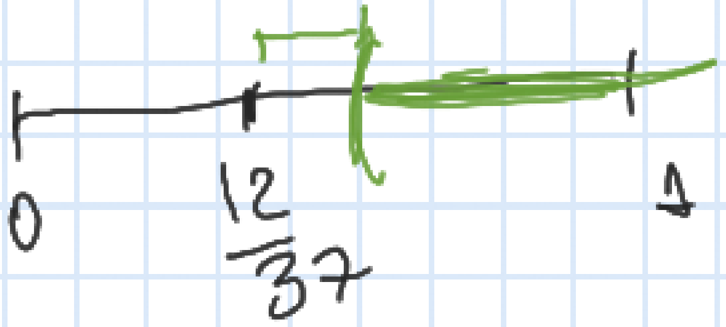
b) Calcular el p-valor aproximado.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si sale } 3^\circ \text{ docena} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \qquad X \sim Ber(p)$$

$S =$ "# de veces en 100 tiradas que sale 3° docena" $\qquad S = \sum_{i=1}^{100} X_i \qquad S \sim Bin(100, p)$

$$H_0: p = \frac{12}{37} \qquad H_1: p > \frac{12}{37} \qquad \delta(\underline{X}) = I\{\bar{X} > k_\alpha\}$$

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \rightarrow \text{estadístico}$$

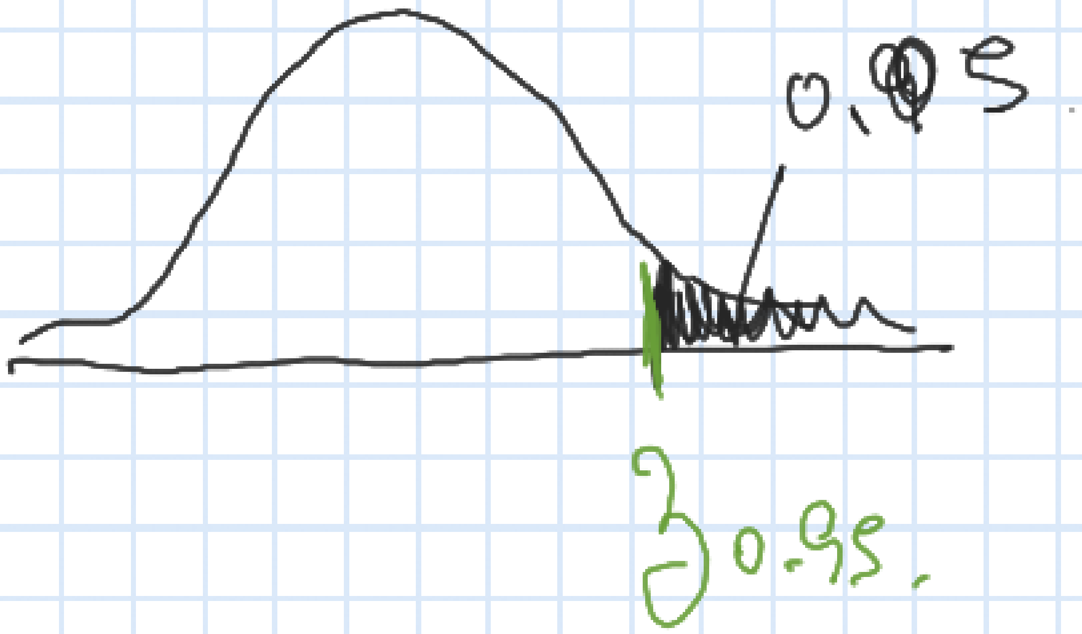


$\alpha =$ max proba de cometer error de tipo 1

$$\alpha = \mathbb{P}_{p=12/37}(\text{Rech } H_0) = \mathbb{P}_{p=12/37}(\bar{X} > k_\alpha) = \mathbb{P}_{p=\frac{12}{37}}\left(\frac{\bar{X} - 12/37}{\sqrt{12/37(1-12/37)}}\sqrt{100} > \frac{k_\alpha - 12/37}{\sqrt{12/37(1-12/37)}}\sqrt{100}\right) = 0.05$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 0.05 \underset{TCL}{\approx} 1-\Phi\left(\frac{k_\alpha - 12/37}{\sqrt{12/37\,(1-12/37)}}\sqrt{100}\right) \qquad \Phi(z) = P(Z \leq z),\ Z \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\underbrace{\frac{k_\alpha - 12/37}{\sqrt{12/37\,(1-12/37)}}\sqrt{100}}_{z_{0.95} = 1.64.}\right) \approx 0.95$$



$$\frac{k_\alpha - 12/37}{\sqrt{12/37\,(1-12/37)}} \cdot 10 = 1,64 \rightsquigarrow k_\alpha = 0,401 \qquad 12/37 = 0,324$$

$$\Rightarrow \delta(\underline{X}) = I\{\bar{X} > 0.401\}.$$

Con los datos $\to \bar{x} = 0.4 \Rightarrow$ no rechazo.

$$p\text{-valor} = \underset{p=12/37}{\mathbb{P}}\left(\bar{X} > 0.4\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 12/37}{\sqrt{12/37\,(1-12/37)}} \cdot 10 > \frac{0.4 - 12/37}{\sqrt{12/37\,(1-12/37)}} \cdot 10\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0.4 - 12/37}{\sqrt{12/37\,(1-12/37)}} \cdot 10\right) = 0{,}1053$$

Si $p\text{-valor} < \alpha \rightarrow$ Rechazo H_0 (y acepto H_1)

$p\text{-valor} > \alpha \rightarrow$ No rechazo H_0.