Probabilidad y estadística

Clase 6

IC para la media de una población desconocida

En general, dada una m.a $\underline{X}_n$ de una población desconocida, una buena forma de aproximarse a la media de dicha población es considerar el promedio de las muestras ($\bar{X}_n$).

$\rightarrow \bar{X}_n \overset{(a)}{\sim} N\left(\mathbb{E}[X], \frac{Var(X)}{n}\right)$

Por TCL, sabemos que $\bar{X}_n$ tiende en distribución a una v.a. normal. En particular,

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{var(X)/n}} \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Se puede probar que si se desconoce también la varianza de la población (que es lo más común) vale que

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]}{S / \sqrt{n}} \overset{(a)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Ejercicio

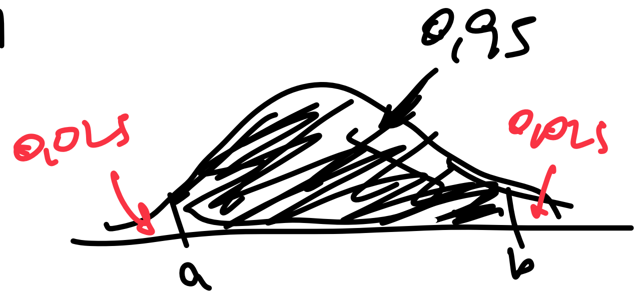
Se arroja 50 veces una moneda con probabilidad p de salir cara. Hallar un intervalo de confianza asintótico de nivel 0,95 para p basado en la observación x=30.

$p = \mathbb{P}(\text{"cara"})$ $\qquad \hat{p} = \frac{X}{50}$ $\qquad X = $ "# de caras en 50 tiros"

pivote: $Z = \dfrac{\frac{X}{50} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$ $\qquad \underbrace{\mathbb{P}(a < Z < b) = 0,95}$

$a = -b$

$b = z_{0,975} = 1,96$



$$-1{,}96 < Z < 1{,}96$$

$$-1{,}96 < \frac{\frac{X}{50} - p}{\sqrt{\frac{X}{50}\left(1-\frac{X}{50}\right)/50}} < 1{,}96$$

$$\boxed{-1{,}96\,\frac{\sqrt{\frac{X}{50}\left(1-\frac{X}{50}\right)}}{\sqrt{50}} + \frac{X}{50} < p < +1{,}96\,\frac{\sqrt{\frac{X}{50}\left(1-\frac{X}{50}\right)}}{\sqrt{50}} + \frac{X}{50}}$$

Con los valores observados: $\mu \in (0{,}464;\ 0{,}736)$

Ejercicio

De un experimento en los efectos de un medicamento para la ansiedad se midió el puntaje en un test de memoria antes y después de tomar el medicamento. A partir de los datos que se encuentran en el archivo Islander_data.csv hallar un IC para la media del tiempo de respuesta después de consumir el medicamento.

$\mu \rightarrow$ tiempo medio

X: " tiempo de respuesta luego de consumir el medicamento"

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$P(a < Z < b) = 0{,}95$$

$a = -b \quad b = 3_{0{,}975}$.

pivote: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$

aleatorio

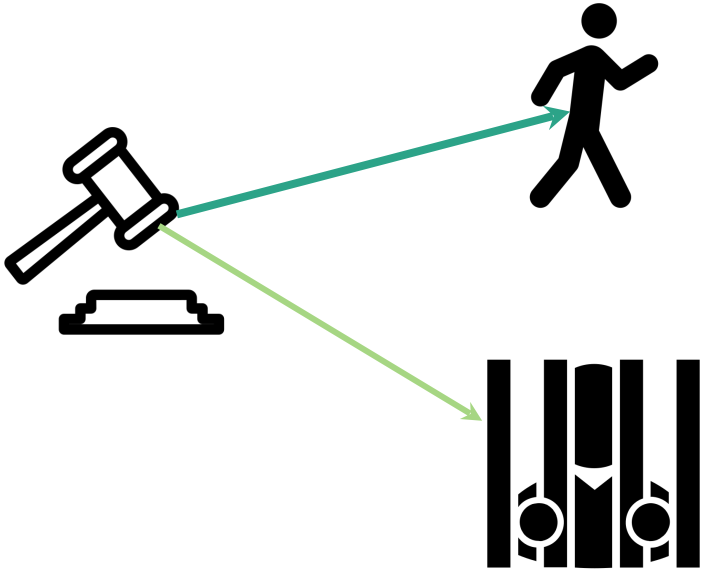
$$-3_{0{,}975} < \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < 3_{0{,}975}$$

$$\boxed{\mu = \overline{X} \pm 3_{0{,}975} \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Test de hipótesis

Motivación

Un test de hipótesis es una manera formal de elegir entre dos opciones, o hipótesis.



H_0

Inocente hasta que se demuestre lo contrario

H_1

Formalicemos esta idea

Sea una m.a. $\underline{X} = X_1, \ldots, X_n$ de una población con distribución perteneciente a una familia $F_\theta(x)$ con $\theta \in \Theta$. Sean Θ_0 y Θ_1 tales que $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ y $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$. Un test para este problema será una regla basada en $\underline{X}$ para decidir entre las dos hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Inocente Culpable

Definición: Se llama test a una función $\delta(\underline{X})$ que puede tomar valores 0 o 1.

Formalicemos esta idea

En un test de hipótesis se plantean dos hipótesis:

H_1: es la hipótesis del investigador (lo que se desea probar). Se la conoce como hipótesis alternativa

H_0: se formula con el objetivo de ser rechazada. Se la conoce como hipótesis nula.

Diremos que rechazamos la hipótesis nula cuando $\delta(\underline{X}) = 1$, en caso contrario decimos que no hay evidencia suficiente para rechazar H_0.

Las hipótesis se formulan sobre parámetros de la **población**, y no de la muestra

Tipos de error

Error de tipo I: Es el error que se comete al rechazar una hipótesis nula que era verdadera. Buscamos que esto tenga muy baja probabilidad.

Encarcelar a una persona inocente

$$\mathbb{P}(EI) = \mathbb{P}_{\theta \in \Theta_0}(\delta(\underline{X}) = 1)$$

Error de tipo II: Es el error que se comete al no rechazar una hipótesis nula que era falsa.

Dejar libre a una persona culpable

$$\mathbb{P}(EII) = \mathbb{P}_{\theta \in \Theta_1}(\delta(\underline{X}) = 0)$$

Potencia del test

Def: Se llama potencia del test a la probabilidad de rechazar una hipótesis nula en función del parámetro desconocido sobre el que se plantea la hipótesis.

$$\pi_\delta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\delta(\underline{X}) = 1).$$

Luego podemos reescribir

$$\mathbb{P}(EI) = \pi_\delta(\theta),\ \theta \in \theta_0 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(EII) = 1 - \pi_\delta(\theta),\ \theta \in \Theta_1$$

Ejercicio 1

Supongamos que en las especificaciones de procedimientos de una planta de energía nuclear se establece que la resistencia media de soldadura debe superar 100lb/plg. Supongamos que somos el director del equipo de inspección del ente regulador estatal que debe determinar si la planta cumple con las especificaciones. Se planea seleccionar una muestra al azar de soldaduras y realizar pruebas en cada una de ellas.

1. ¿Cuáles son las hipótesis a testear? $H_0: \mu < 100$ $H_1: \mu > 100$
2. Explicar que significa en este contexto el error de tipo I y el de tipo II, y discutir cuáles son las consecuencias de cometer cada tipo de error

Nivel de significación

Def: Se llama nivel de significación del test a la máxima probabilidad de cometer un error de tipo I:

$$\alpha = \sup_{\theta \in \theta_0} \pi_\delta(\theta)$$

Nivel de significación y p-valor

Def: Se llama p-valor de un test al menor nivel de significación para el cual se rechaza H_0 para una observación dada

Otra forma: probabilidad de ver una muestra tanto o más extrema que la que se ha observado

En este video hay una explicación simpática e intuitiva de lo que representa el p-valor!

Sobre la construcción de reglas de decisión

En la práctica, las reglas de decisión se construyen basándose en una estadística de la m.a. $\underline{X}$, es decir que son de la forma $\delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{T(\underline{X}) \in \mathcal{R}\}$. A $\mathcal{R}$ la conoce como región crítica o de rechazo .

Podemos usar el método de pivote que vimos para intervalos de confianza o el EMV

Ejercicio 2

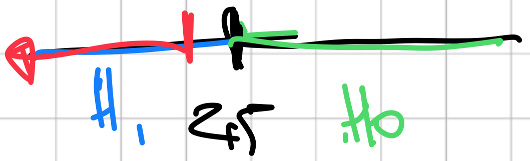
Se tiene una m.a. de tamaño n de una población uniforme en el intervalo (0,θ).

1. Diseñar un test de hipótesis para decidir si θ es menor ~~mayor~~ a 2.5 con un nivel de significación de 0.05.
2. Suponer θ=3, n=20, simular la m.a. y decidir en base a ella.
3. Hallar el p-valor.

$H_0: \theta \geq 2{,}5$ $\quad$ $H_1: \theta < 2{,}5$ $\quad$ $\alpha = 0{,}05.$

$X \sim U(0,\theta)$ $\quad H_0: \theta \geq 2,5 \quad H_1: \theta < 2,5 \quad \alpha = 0,05$

$$T(\underline{X}) = \max(\underline{X})$$



$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\{T(\underline{X}) < k_\alpha\}$$

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rechazo } H_0 \text{ cuando } \theta = 2,5)$$

$$= \mathbb{P}_{\theta=2,5}(\max(\underline{X}) < k_\alpha) = \mathbb{P}_{\theta=2,5}(X_1<k_\alpha, X_2<k_\alpha, \dots, X_n<k_\alpha)$$

$$\overset{\text{ind}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\theta=2,5}(X_i \le k_\alpha) = \mathbb{P}_{\theta=2,5}(X_1 \le k_\alpha)^n = \left(\frac{k_\alpha}{2,5}\right)^n = 0,05$$

$$\Rightarrow k_\alpha = \sqrt[n]{0,05}\cdot 2,5$$

$$p\text{-valur} = \mathbb{P}_{\theta=2,5}\left(\max(X) < 2.056 \right) = \left(\frac{2.056}{2,5}\right)^{20} =$$

Observé :

$\max(\underline{x}) = 2,056$

Tipos de hipótesis

En general, tenemos 3 tipos de hipótesis que deseamos testear:

$H_0 : \theta \geq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta < \theta_0$

$H_0 : \theta \leq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta > \theta_0$

Hipótesis unilaterales

$H_0 : \theta = \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta \neq \theta_0$ → Hipótesis bilaterales

$\bar{\theta}$ $\bar{x}$

$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Si el pivote es decreciente en θ, un test para

$H_0 : \theta \leq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta > \theta_0$ será $\delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} > k_\alpha\}$

$H_0 : \theta \geq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta < \theta_0$ será $\delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} < k_\alpha\}$

$H_0 : \theta = \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta \neq \theta_0$ será $\delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} < k_{\alpha/2}\} + \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} > k_{1-\alpha/2}\}$

Ejercicio 3

La longitud de ciertas barras de acero sigue una distribución normal de varianza desconocida. El proveedor de las barras asegura que la media de las mismas es de 4m.
Si en una muestra de 15 barras el promedio de las longitudes fue de 3.88 m, ¿qué puede decir respecto de la afirmación del proveedor?

$s = 0,07$

Esto se lo conoce como test t

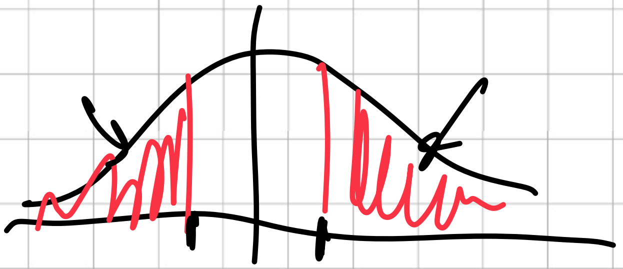
$H_0: \mu = 4$ $\qquad$ $H_1: \mu \neq 4$ (hip. bilateral)

X: "long. de una barra de acero"

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad$ $n = 15$ $\quad$ $\bar{x} = 3{,}86$

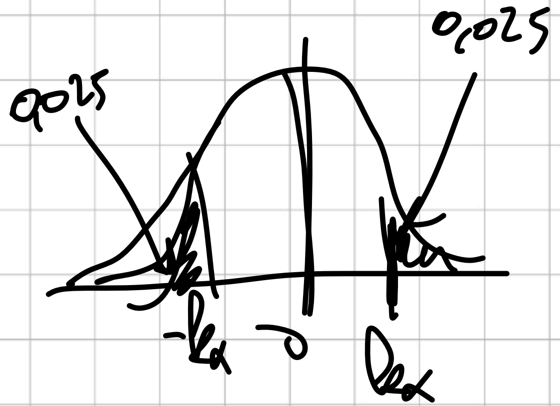
Supongamos $\alpha = 0{,}05$

pivote $\quad T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{14}$



$\delta(X) = \mathbb{1}\{|T| > k_\alpha\}$

$$\alpha = 0,05 = \mathbb{P}_{\mu=4}\left(|T| > k_\alpha\right)$$



$$T = \frac{\bar{X} - 4}{S/\sqrt{n}} \qquad \Rightarrow k_\alpha = t_{14;\,0,975} = 2,14$$

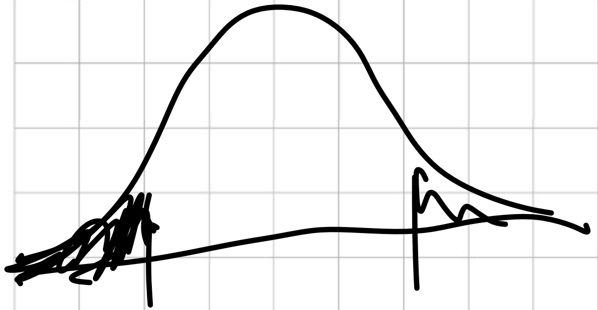
$$\delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{\left|\frac{\bar{X} - 4}{S/\sqrt{15}}\right| > 2,14\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = 3,88 \\ s = 0,87 \end{array}\right\} t = -0,53 \longrightarrow |t| = 0,53 \Rightarrow \text{No rechazo}$$

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}_{\mu=4}\left(\left| \frac{\bar{X}-4}{S/\sqrt{15}} \right| > |-0{,}531| \right) =$$

$$= 2\,\mathbb{P}_{\mu=4}\left(\frac{\bar{X}-4}{S/\sqrt{15}} < -0{,}53 \right) = 0{,}602$$

$$\gg \alpha$$



$\Rightarrow$ No Rechazo

Test con nivel de significación asintótico

Def: Sea $\underline{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ una m.a. de una población con distribución $F_\theta(x),\ \theta \in \Theta$. Se desea testear

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Se dirá que una sucesión de test tiene nivel de significación asintótico α si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\Theta_0} \pi_\delta(\theta) = \alpha$$

Nuevamente, podemos basar el test en la distribución asintótica de EMV, o bien usando TCL.

Ejercicio 3

Se realiza un estudio para estimar la proporción de residentes en una ciudad que están a favor de la construcción de una planta de energía nuclear. En una muestra de 100 personas se observó que la proporción de individuos que se encuentran a favor fue de 0.62

1. ¿Puede decirse con un nivel de significación de 0.01 que la mayor parte de la población está a favor de la construcción de la planta nuclear?
2. Hallar el p-valor.

$H_0: p \leq 1/2$ $\quad$ $H_1: p > 1/2$ $\quad$ $X =$ "# de personas a favor en 100 encuestados"

$=$

bajo H_0 $\quad Z = \dfrac{\frac{X}{100} - 1/2}{\sqrt{1/2(1-1/2)/100}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$ $\quad$ Observamos: $\dfrac{x}{100} = 0{,}62$

$\Rightarrow z = 2{,}4)$

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}_{p=1/2}\left(\frac{\frac{X}{100} - 1/2}{\sqrt{0{,}25/100}} > 2{,}4\right) = 0{,}0082 < \alpha \; (0{,}01)$$

$\Rightarrow$ Rechazo H_0

Ejercicio 4

A

B

$$n_X = 80$$
$$x = 22$$

$$n_Y = 20$$
$$y = 8$$

Tasa de conversión

$p_B > p_A$?

- Diseñar el test de hipótesis
- Para la muestra dada, ¿qué concluye?
- Calcular el p-valor

Ejercicio 4

De un experimento en los efectos de un medicamento para la ansiedad se midió el puntaje de un test de memoria antes y después de tomar el medicamento.

1. A partir de los datos que se encuentran en el archivo Islander_data.csv, diseñar un test de hipótesis de nivel de significación 0.01 para decidir si el tiempo medio de respuesta después de tomar el medicamento es menor que antes de tomarlo.
2. Hallar el p-valor