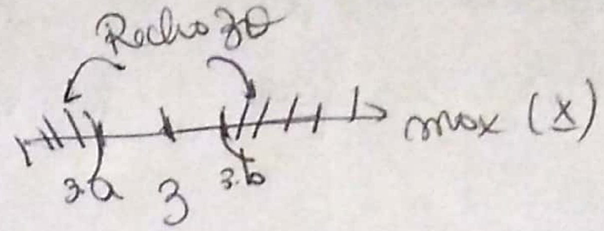
Ej 2

Del ejercicio de IC sabemos que $U = \frac{\max(\underline{X})}{\theta}$ es un pivote para θ, y además $F_U(u) = \begin{cases} 0 & u<0 \\ u^n & 0\le u<1 \\ 1 & u\geq 1. \end{cases}$

a) Queremos un test para

$H_0: \theta=3$ vs $H_1: \theta\neq 3$



$$\Rightarrow \delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\max(\underline{X})}{3} < a \text{ ó } \frac{\max(\underline{X})}{3} > b \right\}$$

como quiero $\alpha = 0.01$, $\mathbb{P}_{\theta=3}(\text{Rechazar } H_0) = 0.01$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left\{\frac{\max(\underline{X})}{3} < a\right\} \cup \left\{\frac{\max(\underline{X})}{3} > b\right\}\right) = 0.01$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} < a\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} > b\right) = 0.01.$$

$\Rightarrow$ busco $a / \mathbb{P}\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} < a\right) = 0.005$

$b / \mathbb{P}\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} > b\right) = 0.005 \Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\max(\underline{X})}{3} < b\right) = 0.995.$

$\Rightarrow b = \sqrt[n]{0.995}$ y $a = \sqrt[n]{0.005}$

$$\Rightarrow \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\max(\underline{X})}{3} < \sqrt[n]{0.005} \text{ ó } \frac{\max(\underline{X})}{3} > \sqrt[n]{0.995} \right\}.$$

b) Con los datos: $\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\max(\underline{X})}{3} < \underbrace{\sqrt[10]{0.005}}_{0.5887} \text{ ó } \frac{\max(\underline{X})}{3} > \underbrace{\sqrt[10]{0.995}}_{0.999} \right\}$

y $\frac{\max(\underline{x})}{3} = \frac{11}{12} = 0.916 \Rightarrow$ No tengo evidencia para rechazar H_0.

→)

Ej 3) Defino $X = \begin{cases} 1 & \text{identifica correctamente la marca b} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$X \sim Ber(p)$, p: "probabilidad de que una persona identifique correctamente la marca b"

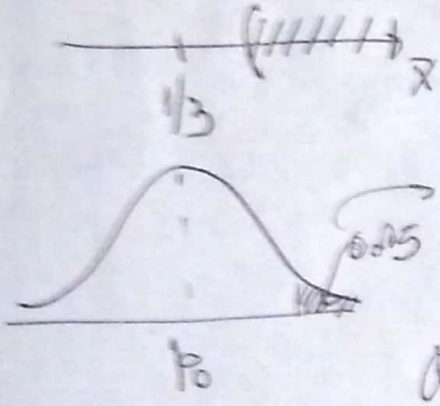
Si elige al azar, la persona tiene 1/3 de chances de acertar → Propongo las hipótesis

$H_0: p \leq 1/3$ vs $H_1: p > 1/3$

Dado que tengo 10 muestras de una población Bernoulli voy a usar un test aproximado:

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1), \text{ con } \overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$$

Rechazo



$$\delta(\underline{X}) = 1\left\{ \frac{\overline{X} - \overset{1/3}{p_0}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{10} > z_{0.95} \right\}$$

b) debo despejar el valor pedido del test. La cantidad mínima de personas que acierten debe ser tal que

$$\frac{\bar{x} - 1/3}{\sqrt{1/3\,(2/3)}}\sqrt{10} > z_{0.95} = 1.64 \quad y\ \bar{x} = \frac{m}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{m}{10} - 1/3\right)}{\sqrt{1/3\,2/3}}\sqrt{10} > 1.64 \Rightarrow m > 5.448$$

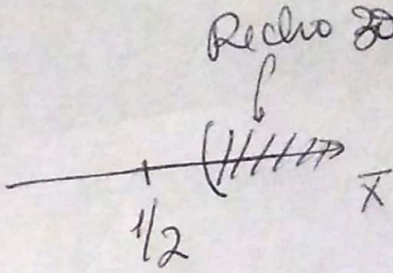
$$\Rightarrow \boxed{m = 6}$$

4) Definimos $X = \begin{cases} 1 & \text{la persona está a favor} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$X \sim Ber(p)$, p = "proporción de residentes a favor de construir la planta"

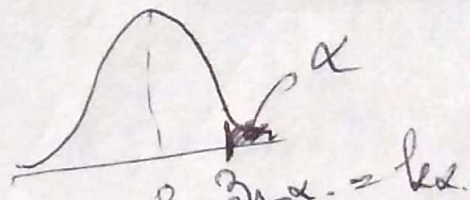
Hipótesis:

a) $H_0: p \leq 0.5$ vs $H_1: p > 0.5$.



Nuevamente $\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{n} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$

$\Rightarrow \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n} > k_\alpha \right\}$



Con un $\alpha = 0.01$ $k_\alpha = z_{0.99} = 2.326$
y $n = 100$

$\Rightarrow \delta(\underline{X}) = \mathbb{1}\left\{ \frac{\bar{X} - 1/2}{\sqrt{1/2(1-1/2)}} \sqrt{100} > 2.326 \right\}$

Con la muestra observada $\bar{x} = 0.62$

$\Rightarrow \frac{\bar{x} - 1/2}{1/2} \cdot 10 = 2.4 \Rightarrow$ Rechazo H_0 y acepto H_1 con 0.01 de significancia

b) $\boxed{p\text{-valor}} = \mathbb{P}_{p=1/2}\Bigg(\underbrace{\frac{\bar{X} - 1/2}{\sqrt{1/2(1-1/2)}} \sqrt{100}}_{Z \overset{(a)}{\sim} N(0,1)} > \underbrace{\boxed{\frac{0.62 - 1/2}{\sqrt{1/2(1-1/2)}} \sqrt{100}}}_{2.4} \Bigg) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2.4) = \boxed{0.008}$

bajo $p = 0.6$ esto

c) $\mathbb{P}_{p=0.6}\Bigg(\underbrace{\frac{\bar{X} - 1/2}{1/2} \sqrt{n} < 2.326}_{\text{equivocarme es no rechazar.}} \Bigg) = \mathbb{P}_{p=0.6}\left(\frac{\bar{X} - 0.6}{1/2} \sqrt{n} < 2.326 + \frac{1/2}{1/2}\sqrt{n} - \frac{0.6}{1/2}\sqrt{n} \right)$

con $p = 0.6$ $\frac{\bar{X} - 1/2}{1/2} \sqrt{n}$ ya no tiene dist. normal estándar $\Rightarrow$ Estandarizo

$= \mathbb{P}\left(Z < 2.326 + \frac{(1/2 - 0.6)}{1/2} \sqrt{n} \right) \leq 0.1$

$\Rightarrow 2.326 + \frac{(1/2 - 0.6)}{1/2} \sqrt{n} \leq z_{0.01} \Rightarrow$ despejo n.