Guía de ejercicios

Transformaciones de variables

Para todos los ejercicios, simular las transformaciones y verificar los resultados obtenidos.

1. Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Hallar la función de densidad de $Y = X^2$. Identificar a que variable corresponde (nos va a ser de mucha utilidad en algunas clases!).
2. Sean $X_1, \ldots X_n$ variables aleatorias i.i.d (independientes e idénticamente distribuidas) con distribución exponencial de parámetro λ. Hallar la distribución de $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$. *Sugerencia: usar el método de sucesos equivalentes y pensar qué significa que* $\min(X_1, \ldots X_n) > y$.
3. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro λ. Hallar la función de densidad conjunta de $V = X + Y$ y $W = X/Y$. ¿Qué puede decir al respecto?
4. (Extra) Sean X e Y dos variables independientes, cada una con distribución uniforme en el intervalo (0,1). Hallar la función de densidad conjunta de $U = \min(X,Y)$ y $V = \max(X,Y)$. *Sugerencia: este ejercicio se puede encarar por el método de sucesos equivalentes o por el método del Jacobiano generalizado.
5. (Extra) Sean $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ dos variables aleatorias independientes con distribución de Poisson. Probar utilizando la función generadora de momentos que $W = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Variables condicionadas

1. En un cierto día, una fábrica produjo 100 televisores, cada uno de los cuales está fallado con una probabilidad de 0.1. Antes de salir al mercado, cada televisor es sometido a ciertas pruebas, de forma tal que si estaba fallado, la falla se detecta con probabilidad 0.8. Sean X la cantidad de televisores fallados e Y la cantidad de televisores con fallas detectadas. Hallar la función de probabilidad de $Y|X = x$.
2. Sean $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ dos variables independientes. Hallar la distribución de $X|(X+Y) = m$. *Sugerencia: usar el resultado del ejercicio 5. de Transformaciones de variables.*
3. Sean X e Y dos variables con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = \frac{5}{8\pi} e^{-\frac{25}{32}(x^2 - \frac{6}{5}xy + y^2)}$. Hallar la función de densidad condicional de Y dada $X = x$. *Sugerencia: Qué distribución son X e Y?*
4. La velocidad del viento (X) y el promedio de ozono en la atmósfera (Y), son dos variables aleatorias con función de densidad conjunta
   $f_{X,Y}(x,y) = \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu x} y^{-(1+\mu)} I\{x > 0, y > e^{-x}\}$
5. (Mezcla) En un sistema electrónico se debe determinar si se ha enviado señal o no. Se transmite señal ($S = 1$) con probabilidad 0.6. Además, por fabricación, el medio introduce un ruido (N) con distribución normal de media nula y varianza 0.8, independiente de lo que se , de forma tal que se recibe $X = S + N$, con $S = \{0,1\}$. Hallar la probabilidad de haber enviado una señal sabiendo que se recibió $X = 0.7532$.