Probabilidad y estadística

Clase 2

Transformaciones de variables

Función de variable aleatoria

Método de la transformada inversa

El objetivo es poder generar una variable aleatoria con una cierta distribución deseada a partir de una que “tengo a mano”.

Es decir, si tengo una función de distribución F, y quiero construir una variable aleatoria cuya función de distribución coincida con F.

Método de la transformada inversa

Sea $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función de distribución, existe una variable aleatoria

$$X / F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Definimos la inversa generalizada como:

$$F_X^{-1}(u) = \min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\},\ u \in (0,1)$$

Teorema: Si F es una función que cumple que

- Es no decreciente
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
- Es continua a derecha

Entonces, si defino $X = F^{-1}(U),\ \text{con}\ U \sim \mathcal{U}(0,1)$, X es una v.a. con función de distribución F

Ejercicio 4

Sea X el resultado de arrojar un dado equilibrado. A partir de 1000 realizaciones de una v.a. uniforme en el intervalo (0,1), simular 1000 realizaciones de X.

Ejercicio 5

A partir de 1000 observaciones de una v.a. uniforme en el intervalo (0,1), simular 1000 valores de la variable definida en el ejercicio 2.

Función de variable aleatoria

Motivación y usos

En este caso, lo que conocemos es la relación entre variables aleatorias (transformación), pero sólo conocemos la distribución de una ellas.

Usos: en ML, se suele usar la transformación de variables para mejorar los resultados de ajustes y predicciones.
Algunas transformaciones más comunes son

- Log
- Exp
- Sqrt
- Inversa
- Binning

Definición

Sea X una v.a. con función de distribución $F_x(x)$, y sea $Y=g(X)$ una función de la variable aleatoria X. El objetivo es hallar la función de Y.

Esto puede hacerse considerando que $F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y)$, y desarrollando la probabilidad en términos de la v.a. X. A este camino se lo llama **método de sucesos equivalentes.**

Ejercicio 6

Sea $X \sim U(-1,1)$, y sea $Y=X^2$. Hallar la función de densidad de Y

Ejercicio 7

Sean X e Y dos v.a. con distribución de Poisson de parámetros μ y λ respectivamente. Hallar la función de probabilidad de W = X + Y.

$$X \sim \mathcal{P}oi(\mu) \to p_X(x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu},\ x \in \mathbb{N}_0$$

Ejercicio 8

Sean $X,Y \sim U(0,1)$ e independientes. Hallar la función de densidad de $W = X+Y$

Método de transformaciones

- Sea X una v.a.c. con función de densidad $f_X(x)$,
- Sea Y=g(X).
- g(x) es una función 1 a 1 (existe $g^{-1}(y)$)

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{d\,y} \right|$$

Método del Jacobiano

Sean X_1 y X_2 son v.a **continuas** con función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$. Sean también $h_1,\ h_2$ dos func. tales que para todo (x_1,x_2) en el soporte de (X_1,X_2), $y_1 = h_1(x_1,x_2)$ y $y_2 = h_2(x_1,x_2)$ son una transformación uno a uno con **inversa** $x_1 = h_1^{-1}(y_1,y_2)$ y $x_2 = h_2^{-1}(y_1,y_2)$. Si las inversas tienen **derivadas parciales continuas** respecto de y_1 e y_2 y jacobiano J, entonces la densidad conjunta de $Y_1,\ Y_2$ será:

$$f_{Y_1,Y_2} = f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\big|_{h_1^{-1}(u_1,u_2),h_2^{-1}(u_1,u_2)}\ |J|$$

Ejercicio 1

Sean $X_1, X_2 \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ y sean $U = X_1 + X_2$ y $V = \frac{X_1}{X_1+X_2}$. Hallar $f_{U,V}(u,v)$ ¿Qué puede decir al respecto?