Para fabricar una placa, se necesitan resistencias de 1kOhm, de las cuales Ana compra 20. Se considera que la distribución del valor de resistencia de cada una es una variable aleatoria con distribución normal con desvío estándar 10. Hallar un IC de nivel 0.95 para μ

(Supongo que los X_i indep)

$n = 20$ ... $\underline{X} = (X_1, \dots, X_{20})$, X_i: "El valor de la resistencia i"

$X_i \sim N(\mu, 10^2)$

$\hat{\mu} = \overline{X}$

$\overline{X} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i \qquad \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{100}{20}\right)$

$\mathbb{E}[\overline{X}] = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \mathbb{E}(X_i) = \frac{20}{20}\mu = \mu$

$\operatorname{var}(\overline{X}) = \operatorname{var}\left(\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \frac{1}{20^2} \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right) \overset{\text{indep}}{=} \frac{1}{20^2} \sum_{i=1}^{20} \operatorname{var}(X_i)$

$= \frac{1}{20^2} 20 \operatorname{var}(X) = \frac{1}{20} \operatorname{var}(X) = \frac{100}{20}$

id $\Rightarrow$

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{100}{20}\right)$ $\quad \mathbb{P}(\mu \in S(\underline{X})) = 0.95$

nivel 0.95

$\underbrace{}_{1-\alpha}$

$\hookrightarrow 0.05$

$$\underbrace{Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{100/20}}}_{\text{estandarizo}} \sim N(0,1)$$

Es un pivote porque.

$$\mathbb{P}\Bigg(\underset{-b}{a} < \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{100/20}}}_{Z} < b\Bigg) = 0.95$$

$$\mathbb{P}\left(\mu \in S(\bar{X})\right) = 0.95$$

$b = \underbrace{z_{0.975}}_{1-\alpha/2}$

$$-1.96 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{100/20}} < 1.96$$

$1-\alpha$ $\quad f$ $\quad \sigma^2$

$$\longrightarrow \quad -1.96\sqrt{\frac{100}{20}} + \bar{X} < \mu < 1.96\sqrt{\frac{100}{20}} + \bar{X}$$

longitud

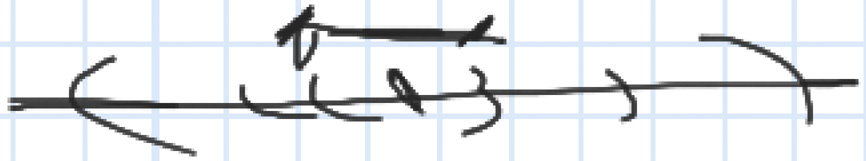
error

$\bar{x}$

Error

$$\Rightarrow S(X) = \left(\mu : -1.96\frac{10}{\sqrt{n}} + \bar{X} < \mu < 1.96\frac{10}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right)$$

est un IC de niveau 0.95 pour μ



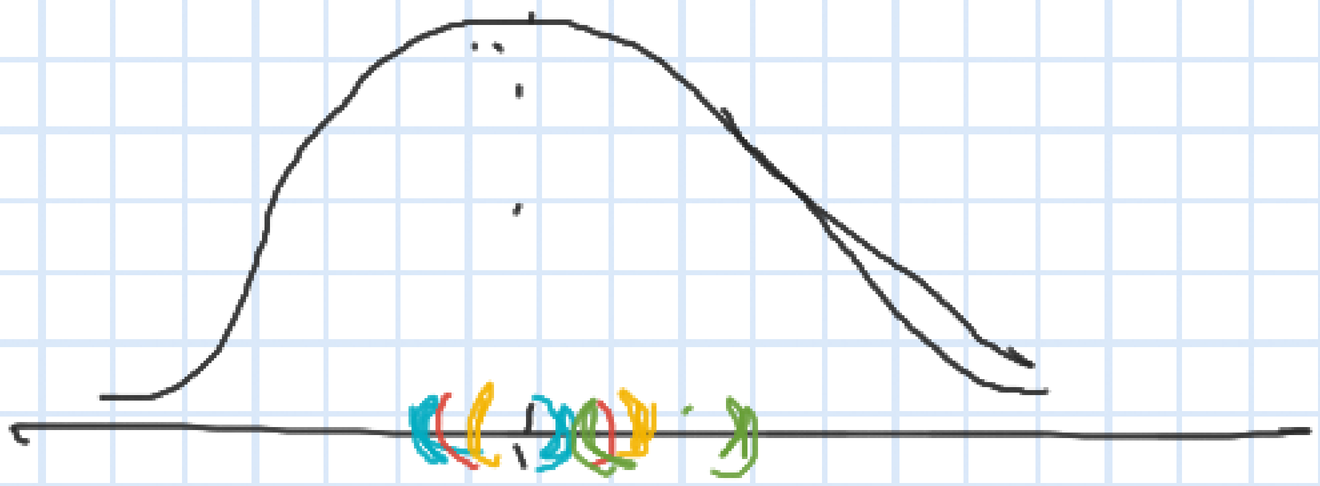
$$S(X) = \left(-1.96\frac{10}{\sqrt{20}}\,\bar{X},\ 1.96\frac{10}{\sqrt{20}}\,\bar{X}\right) = \bar{X} \pm \underbrace{1.96\frac{10}{\sqrt{20}}}$$

$$+1.96\frac{10}{\sqrt{20}} + \bar{X} > \mu > -1.96\frac{10}{\sqrt{20}} + \bar{X}$$

observé $\bar{x} = 1000.4843$

$$S(x) = \left(\mu : -1.96\frac{10}{\sqrt{20}} + 1000.4843 < \mu < 1.96\frac{10}{\sqrt{20}} + 1000.4843\right)$$

$$= \left(\mu : 966.10 < \mu < 1004.86\right)$$



1000

Sea $\underline{X}$ una m.a. de una población con dist $\mathcal{U}(0,\theta)$ $\quad \underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$

$\theta>0 \rightarrow \Theta : \mathbb{R}_+$

$\hat{\theta}=\max(\underline{X})$

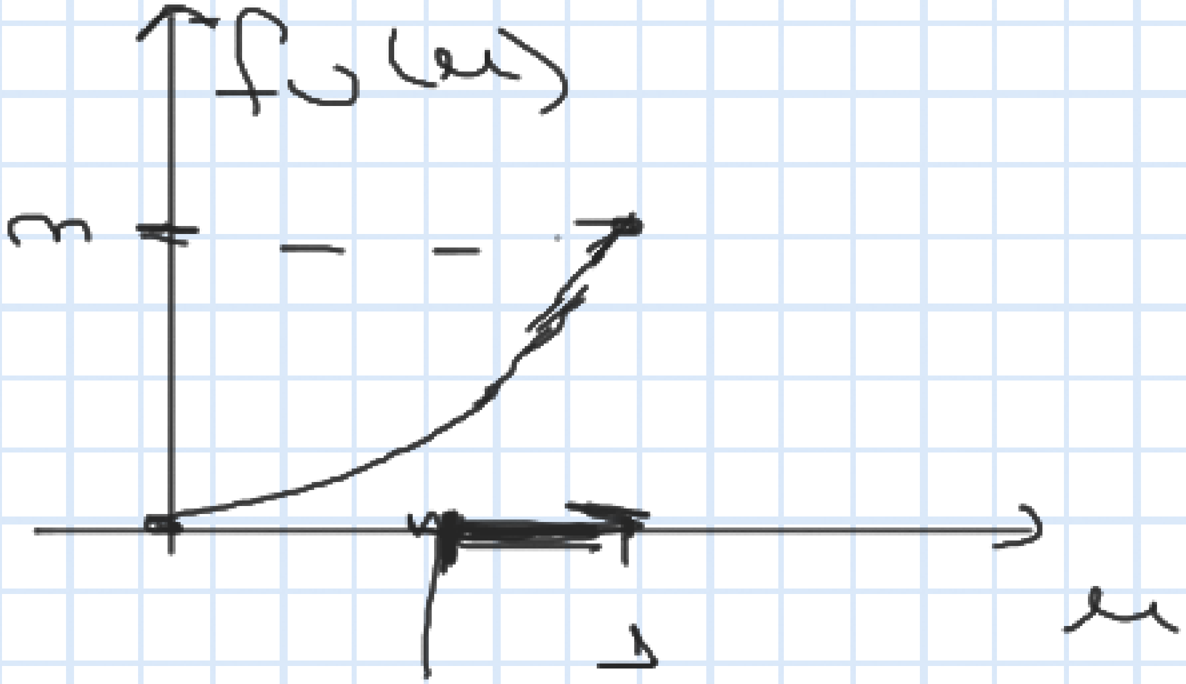
$F_{\hat{\theta}/\theta}(t)=\mathbb{P}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\le t\right)=\mathbb{P}\left(\frac{\max(\underline{X})}{\theta}\le t\right)=\begin{cases}0 & t<0\\ \left(\frac{t\cancel{\theta}}{\cancel{\theta}}\right)^n & 0<t\cancel{\theta}<\cancel{\theta}\\ 1 & \cancel{\theta}t\ge\cancel{\theta}\end{cases}$

$\Rightarrow U=\dfrac{\max(\underline{X})}{\theta}$ es un pivote para θ.

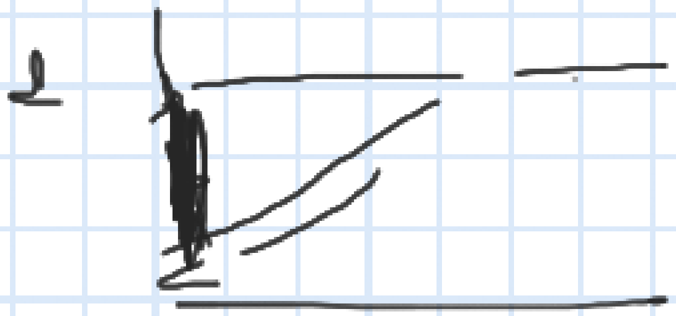
$\begin{cases}0 & t<0\\ t^n & 0\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$

Quiero encontrar un IC de nivel 0.95 para θ

$S(\underline{x})=\left\{\theta : a<\dfrac{\max(\underline{X})}{\theta}<b\right\}$ $\quad a,b \mid \mathbb{P}(a\le U\le b)=0.95$



$f_U(u) = m t^{m-1} I\{0<t<1\}$



a

↳ b

↳ $a \,/\, P(U > a) = 0.95$

$1 - P(U \leq a) = 1 - F_U(a) = 0.95.$

$\rightarrow F_U(a) = 0.05 \rightarrow$ a es el cuantil 0.05 de U

$a^m = 0.05$

$S(X) = \left\{\theta : \sqrt[m]{0.05} < \frac{\max(X)}{\theta} < 1\right\} \rightarrow a = \sqrt[m]{0.05} =$

$= \left\{\theta : \frac{\max(X)}{\sqrt[m]{0.05}} > \theta > \max(X)\right\}$ es un IC de nivel 0.95 p/θ

Luego de los cambios en las leyes de tránsito de cierta región, se desea estudiar la proporción de motoqueros que usan casco. Se tomó una muestra de 200 motoqueros, encontrando que 148 usaban casco. En base a esta información muestral, construir un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para la proporción de motoqueros que usan casco.

el valor de la medición

$$X = \begin{cases} 1 & \text{usa casco} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad X \sim Ber(p)$$

proporción que usan casco

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad n = 200$$

$\sum X_i = Y$ "# de motoqueros que usan casco en 200"

$$Y \sim Bin(200, p)$$

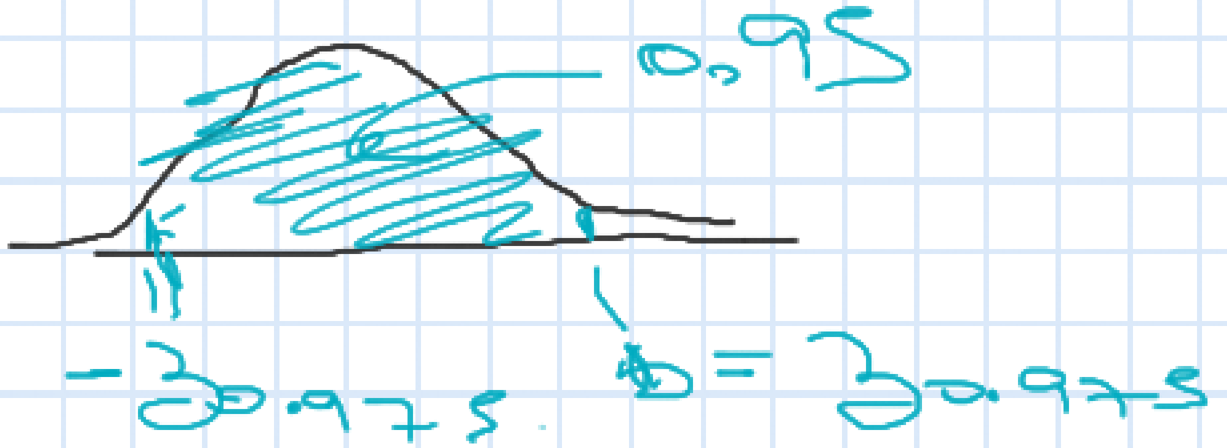
$$p_Y(y) = \binom{200}{y} p^y (1-p)^{200-y}$$

$$U_n = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\sqrt{n} \xrightarrow{(d)} N(0,1)$$

TCL

desvío (X)

$$P\left(a < \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\sqrt{n} < b\right) = 0{,}95$$



$$S(\underline{X}) = \left\{ p : -1.96 < \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \sqrt{n} < 1.96 \right\}$$

$$\hat{p} \approx \bar{X}$$

$$\left\{ p : -1.96 \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} + \bar{X} < p < 1.96 \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} + \bar{X} \right\}$$

es un IC de nivel 0.95 para p.

asintótico

Con el dato $\bar{x} = \frac{148}{200}$ $\qquad \hat{p} = \bar{x}$

$$S(\underline{x}) = \left\{ p : -1.96 \frac{\sqrt{\frac{148}{200}\left(1 - \frac{148}{200}\right)}}{\sqrt{200}} + \frac{148}{200} < p < \right.$$

$$\left. + 1.96 \sqrt{148/200(1 - 148/200)} \,/\, \sqrt{200} + \frac{148}{200} \right\}.$$

Un estimador p/ la media de una población es $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (LGN)

Un estimador p/ el desvío de una población es $S = \sqrt{S^2}$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

(TCL) $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$

Ejemplo: Una m.a. $\underline{X}$ de una pob. $\mathcal{E}(\lambda)$ ¿?

IC de 0.95 para λ

EMV λ: $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{Y \{ \sum_{i=1}^{n} X_i} = \dfrac{1}{\bar{X}}$ $\qquad f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$n\lambda \bar{X} = \lambda Y$, $Y \sim \Gamma(n, 1)$

$\sim \Gamma(n, 1)$ es un pivote exacto

$\sqrt{n I(\lambda)} \left(\dfrac{1}{\bar{X}} - \lambda \right) \xrightarrow{(d)} N(0,1)$

$I(\lambda) = -\mathbb{E}\left[\dfrac{\partial^2 \ln f_\lambda(x)}{\partial \lambda^2} \right]$ $\qquad \ln f_\lambda(x) = \ln(\lambda) - \lambda x$

$\dfrac{\partial}{\partial \lambda} (\ln f_\lambda(x)) = \dfrac{1}{\lambda} - x \Rightarrow \dfrac{\partial^2 \ln(f_\lambda)}{\partial \lambda^2} = -1/\lambda^2$

$\Rightarrow I(\lambda) = 1/\lambda^2$

$$\sqrt{n\, 1/\hat{x}^2}\left(\frac{1}{x}-\lambda\right) \sim N(0,1)$$

$$S(x) = \left\{ \lambda : -z_{0.975} < \sqrt{n^2/x^2}\left(\frac{1}{x}-\lambda\right) < z_{0.975} \right.$$

comparar - IC exato ⟵

- IC assintótico con $\sqrt{n/x^2}\left(\frac{1}{x}-\lambda\right)$

- IC assintótico con $\sqrt{n/x^2}\left(\frac{1}{x}-\lambda\right)$