Estatística: Aplicação ao Sensoriamento Remoto

SER 204 - ANO 2024

Probabilidade

Camilo Daleles Rennó
camilo.renno@inpe.br
http://www.dpi.inpe.br/~camilo/estatistica/

Frequência Absoluta e Relativa

Experimento: jogar um dado 100 vezes, observando-se os valores obtidos

Sequência obtida: 1 5 6 3 4 1 1 2 3 6 3 2 1 2 5 5 4 6... 4

Suponha que o interesse nesse experimento seja avaliar o quanto este dado é honesto

Neste caso, a ordem dos valores não é importante e podemos reorganizar os resultados na forma de uma tabela

Frequência Absoluta e Relativa

Experimento: jogar um dado 100 vezes, observando-se os valores obtidos

Valor	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
1	15	0,15
2	19	0,19
3	16	0,16
4	14	0,14
5	19	0,19
6	17	0,17
Total	100	1

E se continuássemos sorteando novos valores?

Frequência Absoluta e Relativa

Experimento: jogar um dado 1000 vezes, observando-se os valores obtidos

Valor	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
1	158	0,158
2	168	0,168
3	166	0,166
4	146	0,146
5	178	0,178
6	184	0,184
Total	1000	1

Após 1000 sorteios...

E se o experimento fosse repetido infinitamente?

Frequência Absoluta e Relativa

Experimento: jogar um dado infinitas vezes, observando-se os valores obtidos

Valor	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
1		?
2		?
3		?
4		?
5		?
6		?
Total	∞	1

Se o dado fosse honesto, não haveria motivos para pensar que um valor ocorreria mais que outro

Freq. Rel. $\rightarrow$ Probabilidade

(ver pasta exemplo1 em revisao_probabilidade.xls)

Probabilidade

Experimento: jogar um dado e observar seu valor.

Valor	Probabilidade
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
Total	1

1	2
3	4
5	6

Ω

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

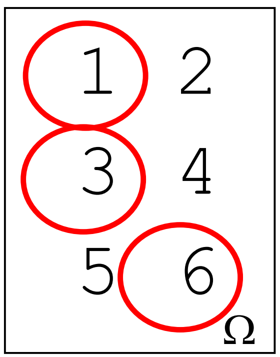
$$\mathrm{P}(evento) = \frac{\#eventos\ favoráveis}{\#eventos\ possíveis}$$

$$\boxed{0 \leq \mathrm{P}(evento) \leq 1}$$

$$\boxed{\sum_i P(evento\, i) = 1}$$

Probabilidade

Experimento: jogar um dado e observar seu valor.



$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P = \frac{\#eventos\ favoráveis}{\#eventos\ possíveis}$$

- Qual a probabilidade de obter um valor igual a 1?

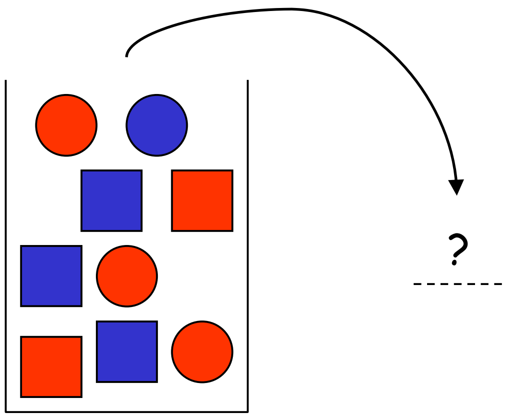
P(valor igual a 1) = $\frac{1}{6}$

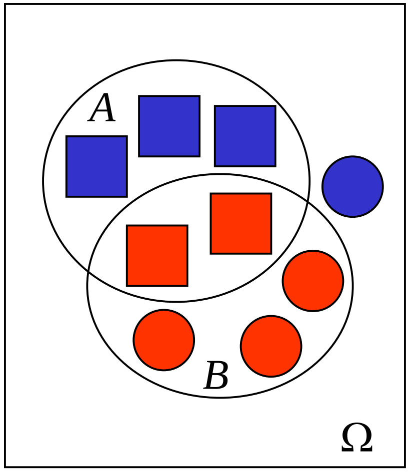
- Qual a probabilidade de obter um valor múltiplo 3?

P(valor múltiplo 3) = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$

Probabilidade

Experimento: retira-se um objeto a urna...





Qual a probabilidade do objeto selecionado ser quadrado ou ser vermelho?

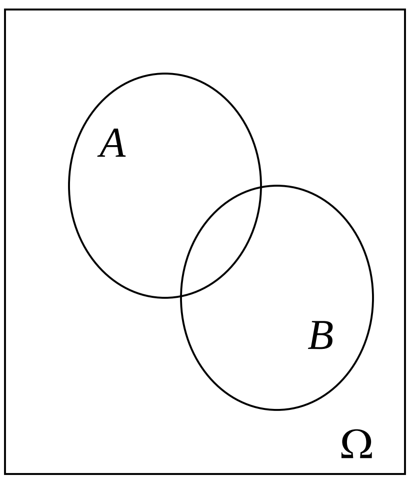
A = objeto quadrado
B = objeto vermelho

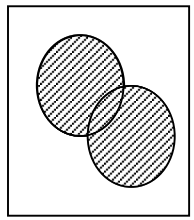
$$P(A \cup B) = ?$$

Probabilidade

Diagrama de Venn

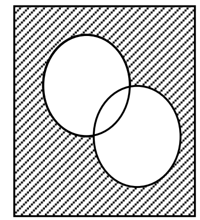
O elemento escolhido...





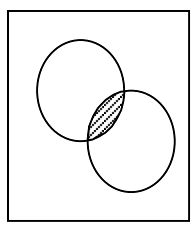
é *A* ou é *B*

$A \cup B$



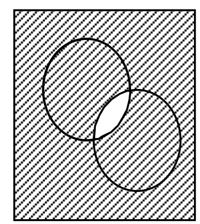
não é nem *A* nem *B*

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$



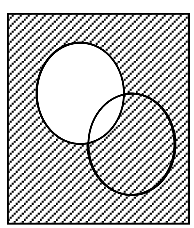
é *A* e *B* simultaneamente

$A \cap B$



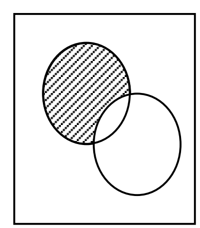
não é *A* e *B* simultaneamente

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$



não é *A*

$\bar{A}$



é somente *A*

$A \cap \bar{B}$

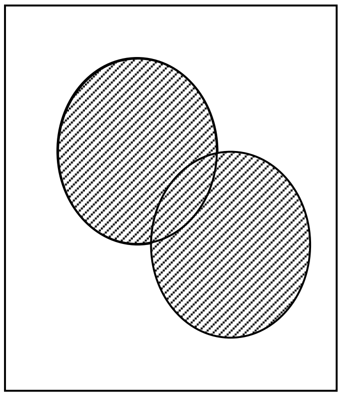
Probabilidade

$$P(A \cup B) = ?$$

$$P(A \cap B) = ?$$

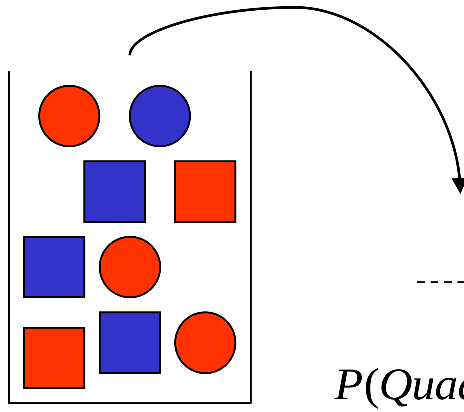
$$P(\overline{A}) = ?$$

Probabilidade



$$A \cup B$$

Exemplo:



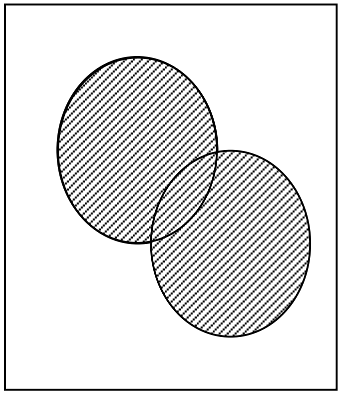
Qual a probabilidade do objeto selecionado ser quadrado ou ser vermelho?

$$P(Quadrado \cup Vermelho) = \frac{8}{9}$$

$$P(Quadrado \cup Vermelho) = P(Quadrado) + P(Vermelho)$$

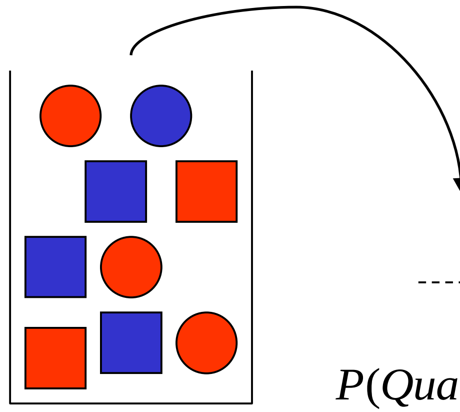
$$\cancel{= \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{10}{9} > 1?}$$

Probabilidade



$$A \cup B$$

Exemplo:



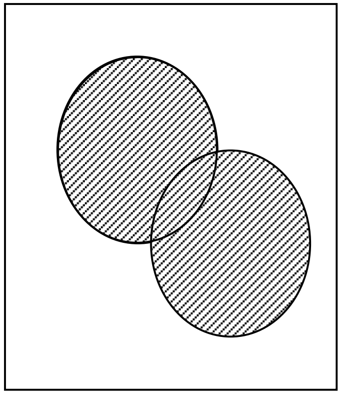
Qual a probabilidade do objeto selecionado ser quadrado ou ser vermelho?

$$P(Quadrado \cup Vermelho) = \frac{8}{9}$$

$$P(Quadrado \cup Vermelho) = P(Quadrado) + P(Vermelho) - P(Quadrado \cap Vermelho)$$

$$= \frac{5}{9} + \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

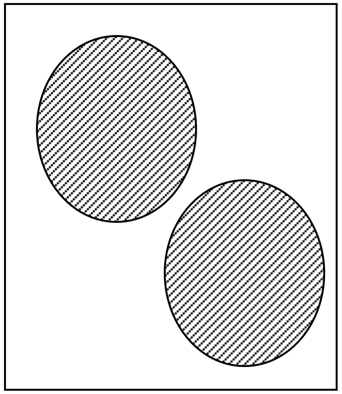
Probabilidade



$$A \cup B \equiv (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

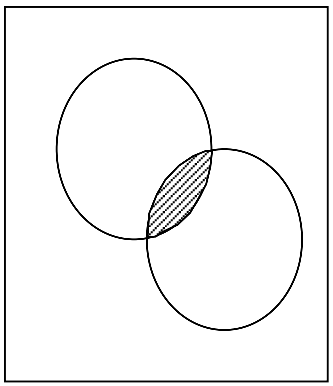
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$



$$P(A \cap B) = 0 \quad \therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

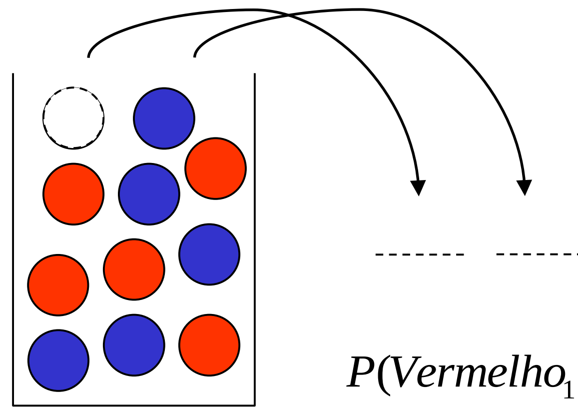
(eventos mutuamente exclusivos)

Probabilidade



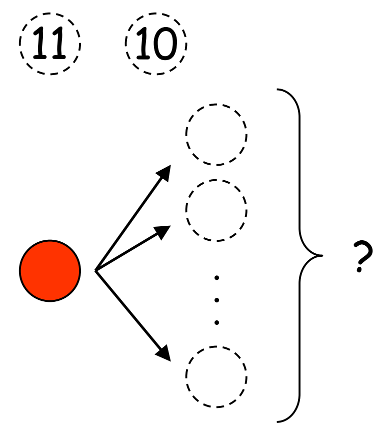
$$A \cap B$$

Exemplo:

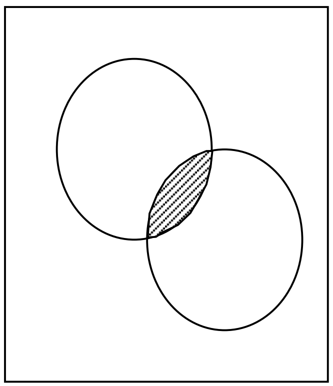


Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos?

$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{?}{?}$$

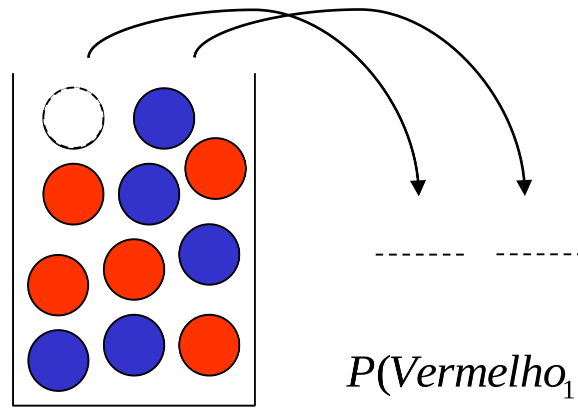


Probabilidade



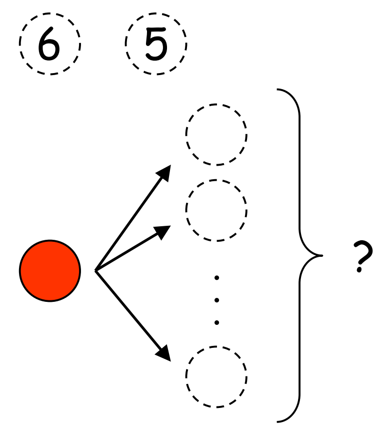
$A \cap B$

Exemplo:

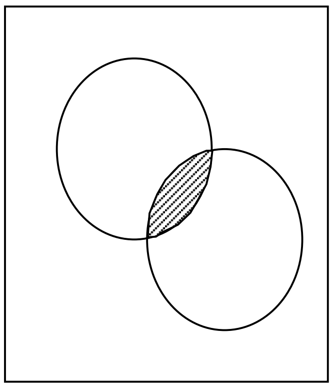


Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos?

$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{?}{110}$$

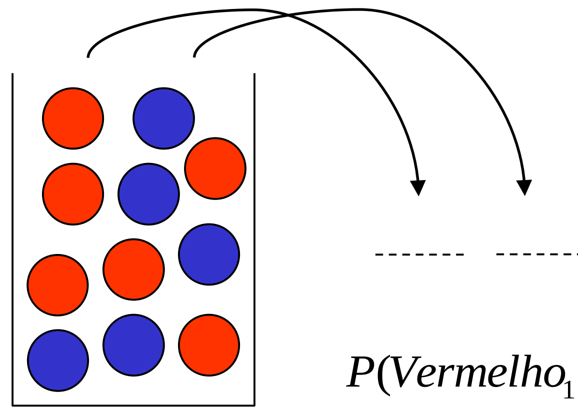


Probabilidade



$$A \cap B$$

Exemplo:



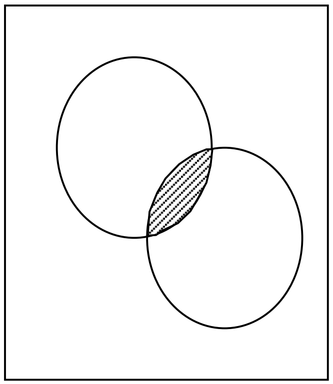
Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos?

$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{30}{110}$$

$$\frac{6}{11}\frac{5}{10} = \frac{6.5}{11.10}$$

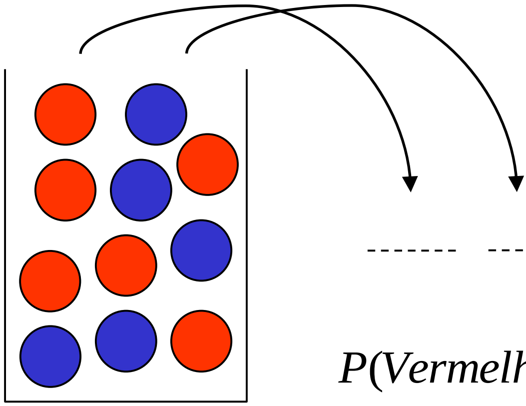
$$P(Vermelho_1)$$

Probabilidade



$$A \cap B$$

Exemplo:



Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos?

------- -------

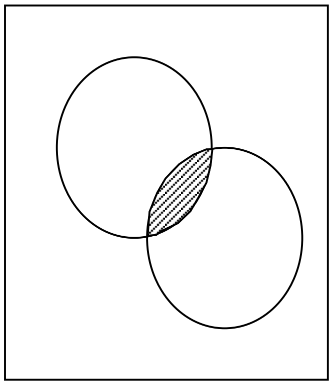
$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{30}{110}$$

$$\frac{6}{11}\frac{5}{10} = \frac{6.5}{11.10}$$

$$P(Vermelho_2 \; sabendo \; que \; Vermelho_1)$$

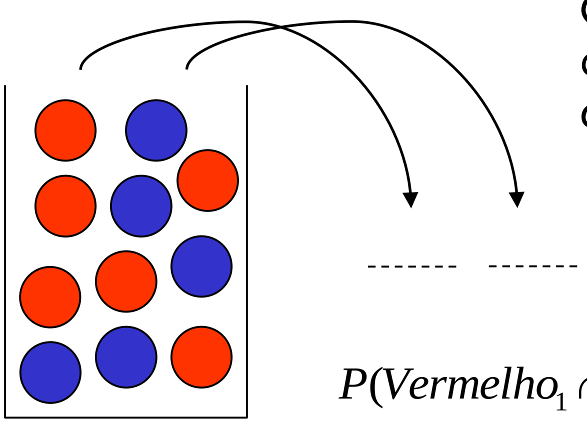
$$P(Vermelho_2 / Vermelho_1)$$

Probabilidade



$$A \cap B$$

Exemplo:



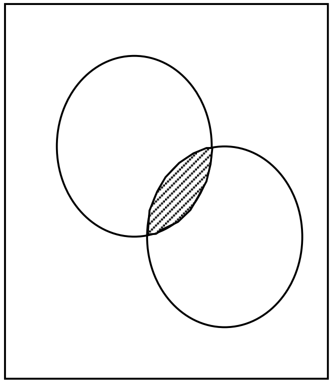
Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos?

$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{30}{110}$$

$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = P(Vermelho_1).P(Vermelho_2 / Vermelho_1)$$

$$= \frac{6}{11}.\frac{5}{10} = \frac{30}{110}$$

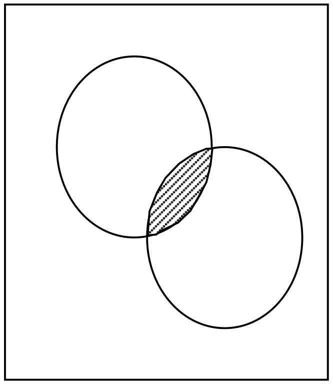
Probabilidade



$$A \cap B$$

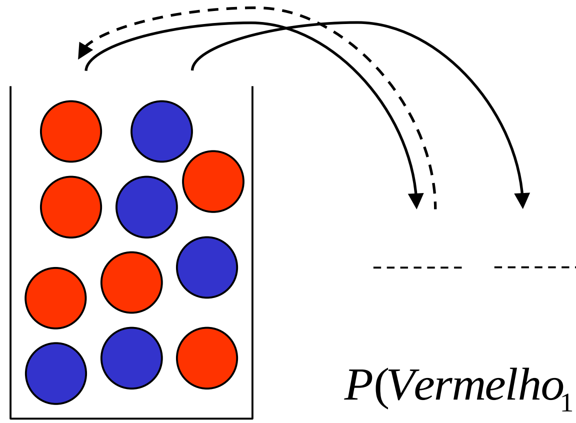
$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$
$$= P(B).P(A/B)$$

Probabilidade



$$A \cap B$$

Exemplo:



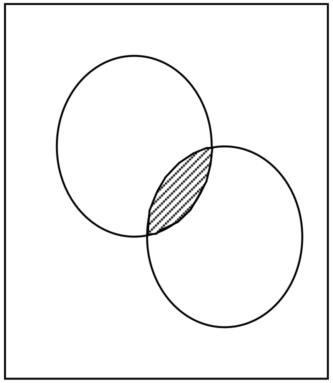
Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos?

$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{?}{?}$$

$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{6}{11} . \frac{6}{11}$$ (eventos independentes)

$$= P(Vermelho_1) . P(Vermelho_2)$$

Probabilidade



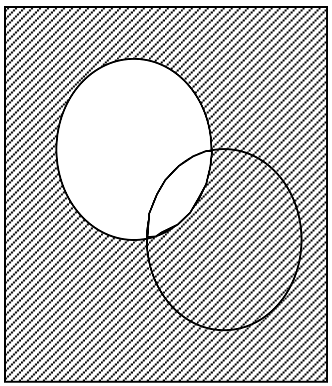
$$A \cap B$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$
$$= P(B).P(A/B)$$

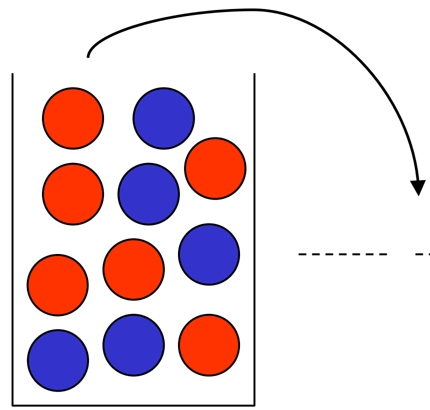
Se A e B são eventos independentes:

$$P(A/B) = P(A) \text{ e } P(B/A) = P(B) \quad \therefore \quad P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Probabilidade



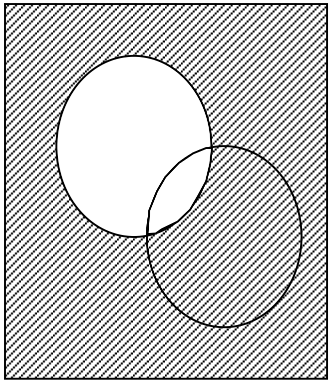
$\bar{A}$



Qual a probabilidade de escolher pelo menos 1 objeto vermelho?

$$P(\,pelo\ \ menos\ 1\,Vermelho) = P(1\,Vermelho) + P(2\ Vermelhos) + P(3\ Vermelhos) + $$
$$+ P(4\ Vermelhos) + P(5\ Vermelhos)$$
$$= P(1\,Vermelho \cap 4\,Azuis) + P(2\ Vermelhos \cap 3\,Azuis) +$$
$$+ \ldots + P(5\ Vermelhos)$$
$$= 1 - P(5\ \ Azuis)$$
$$= 1 - \frac{5}{11}.\frac{4}{10}.\frac{3}{9}.\frac{2}{8}.\frac{1}{7} \quad \cong 0{,}9978$$

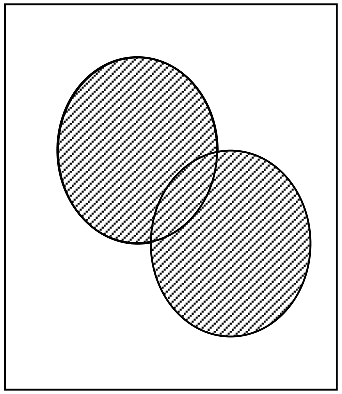
Probabilidade



$\bar{A}$

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Probabilidade

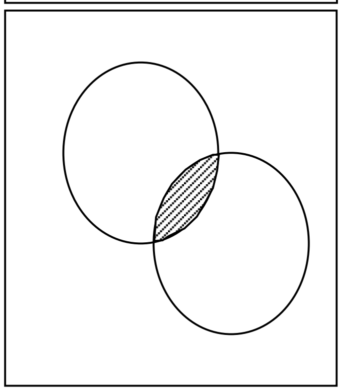


$$A \cup B$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

eventos mutuamente exclusivos

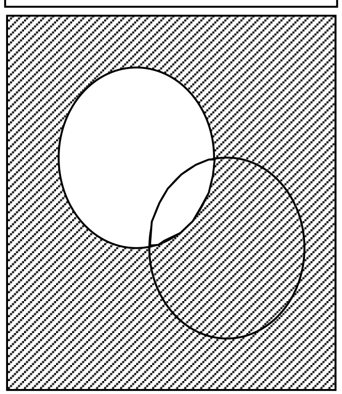


$$A \cap B$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

eventos independentes



$$\bar{A}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Probabilidade

Exercícios

1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A, B, C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A, 200 de B e 300 de C. Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:
   a) seja da classe A;
   b) corresponda a uma queimada, sabendo que o ponto é da classe A;
   c) corresponda a uma queimada; e
   d) seja da classe A, sabendo que o ponto corresponde a uma queimada.

Probabilidade

Exercícios

1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A, B, C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A, 200 de B e 300 de C. Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:

   a) seja da classe A;

   $$P(A) = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

   b) corresponda a uma queimada, sabendo que o ponto é da classe A;

   $$P(Q/A) = \frac{10}{100}$$

Probabilidade

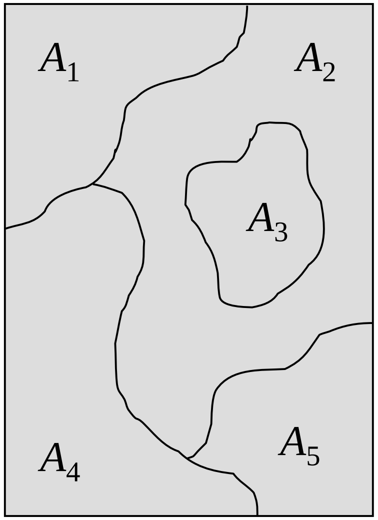
Exercícios

1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A, B, C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A, 200 de B e 300 de C. Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:
   c) corresponda a uma queimada;

$$P(Q) = \frac{10+10+3}{600} = \frac{23}{600}$$

Probabilidade Total

Probabilidade Total



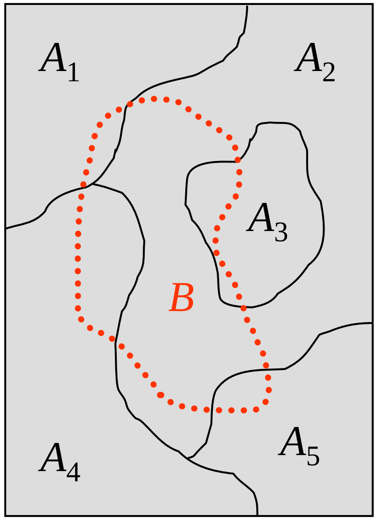
$$\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega \qquad A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i, j \quad i \neq j}$$

conjuntos disjuntos
eventos mutuamente exclusivos

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 1$$

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \qquad \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1}$$

Probabilidade Total



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_5 \cap B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i \cap B) \;= \sum_{i=1}^{5} P(A_i).P(B / A_i)$$

Probabilidade

Exercícios

1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A, B, C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A, 200 de B e 300 de C. Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:

   c) corresponda a uma queimada;

$$Q = (A \cap Q) \cup (B \cap Q) \cup (C \cap Q)$$

$$P(Q) = P(A \cap Q) + P(B \cap Q) + P(C \cap Q)$$

$$P(Q) = P(A).P(Q/A) + P(B).P(Q/B) + P(C).P(Q/C)$$

$$P(Q) = \frac{1}{6}\frac{10}{100} + \frac{2}{6}\frac{5}{100} + \frac{3}{6}\frac{1}{100} = \frac{10+10+3}{600} = \frac{23}{600}$$

Probabilidade

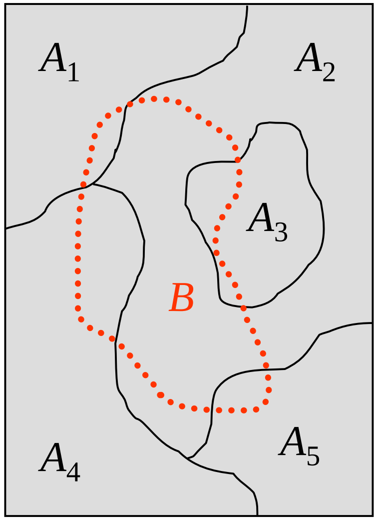
Exercícios

1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A, B, C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A, 200 de B e 300 de C. Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:
   d) seja da classe A, sabendo que o ponto corresponde a uma queimada.

$$P(A/Q) = \frac{10}{23}$$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes



$$P(A_i \cap B) = P(A_i).P(B/A_i) = P(B).P(A_i/B)$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{5} P(A_j).P(B/A_j)}$$

Obs.: o termo no numerador será um dos termos do denominador

Probabilidade

Exercícios

1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A, B, C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A, 200 de B e 300 de C. Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:

   d) seja da classe A, sabendo que o ponto corresponde a uma queimada.

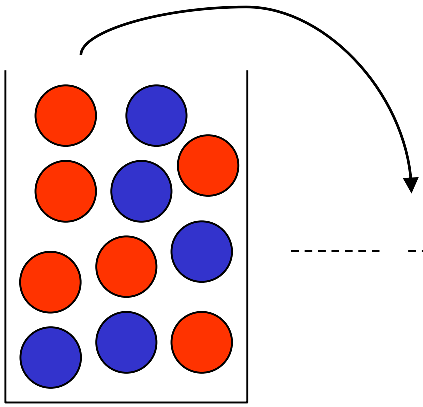
$$P(A/Q) = \frac{P(A).P(Q/A)}{P(A).P(Q/A) + P(B).P(Q/B) + P(C).P(Q/C)}$$

$$P(A/Q) = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}\frac{10}{100} + \frac{2}{6}\frac{5}{100} + \frac{3}{6}\frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{600}} = \frac{10}{600}\frac{600}{23} = \frac{10}{23}$$

Probabilidade

Exercícios

2)



------- ------- ------- ------- -------

Qual a probabilidade de escolher exatamente 3 objetos vermelhos?

$$3Vermelhos \Leftrightarrow 3Vermelhos \cap 2Azuis$$

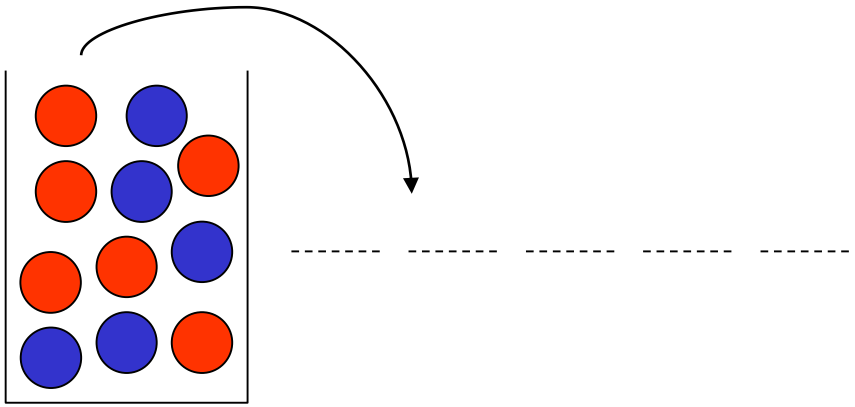
$$P(3Vermelhos) = \underbrace{P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) + \ldots + P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)}_{?}$$

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) = \_\_\,\_\_\,\_\_\,\_\_\,\_\_$$

Probabilidade

Exercícios

2)



Qual a probabilidade de escolher exatamente 3 objetos vermelhos?

$$3Vermelhos \Leftrightarrow 3Vermelhos \cap 2Azuis$$

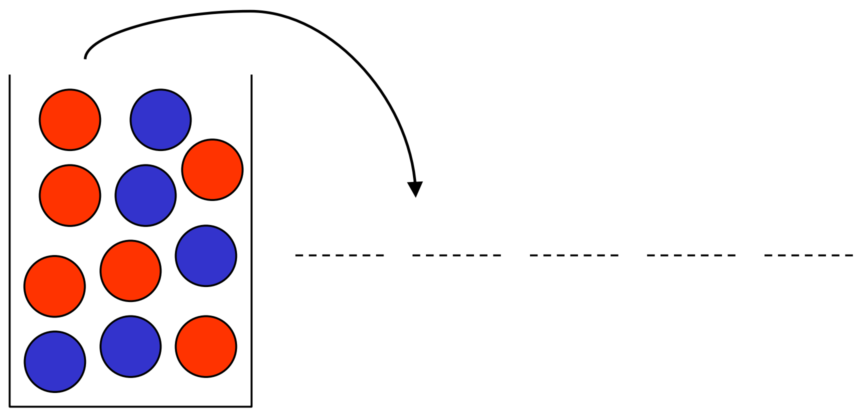
$$P(3Vermelhos) = \underbrace{P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) + \ldots + P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)}_{?}$$

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{}{11}\frac{}{10}\frac{}{9}\frac{}{8}\frac{}{7}$$

Probabilidade

Exercícios

2)



Qual a probabilidade de escolher exatamente 3 objetos vermelhos?

$$3Vermelhos \Leftrightarrow 3Vermelhos \cap 2Azuis$$

$$P(3Vermelhos) = \underbrace{P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) + \ldots + P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)}_{?}$$

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{6}{11}\frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{5}{8}\frac{4}{7}$$

iguais!

$$P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = \frac{5}{11}\frac{4}{10}\frac{6}{9}\frac{5}{8}\frac{4}{7}$$

Mas quantas vezes?

Técnicas de contagem

Técnicas de Contagem

A	A	E
I	U	O
I	O	O

De quantas formas posso rearranjar estas 9 letras?

Se fossem 9 letras diferentes: $9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 9!$ (sem reposição) Permutação

Permutação com repetição

$$\# grupos = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$\# grupos = \frac{9!}{2!1!2!3!1!} = \frac{9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2}{2\ 2\ 3\ 2} = 15120$$

A E I O U

Técnicas de Contagem

A B
C
D E

Quantos grupos de 2 letras é possível formar com estas 5 letras?

- A ordem é importante: Arranjo

{AB, AC, AD, AE, BA, BC, ..., ED}

$$\# grupos = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{3!} = 5.4 = 20$$

- A ordem não é importante: Combinação

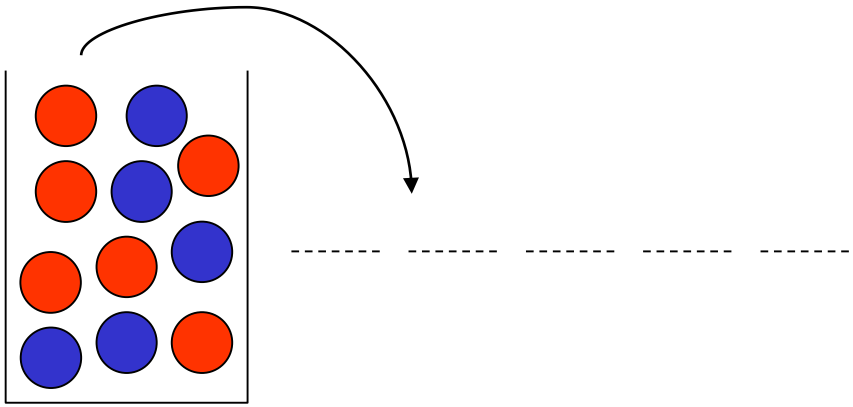
{AB, AC, AD, AE, BC, BD, ..., DE}

$$\# grupos = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Probabilidade

Exercícios

2)



Qual a probabilidade de escolher exatamente 3 objetos vermelhos?

$$3Vermelhos \Leftrightarrow 3Vermelhos \cap 2Azuis$$

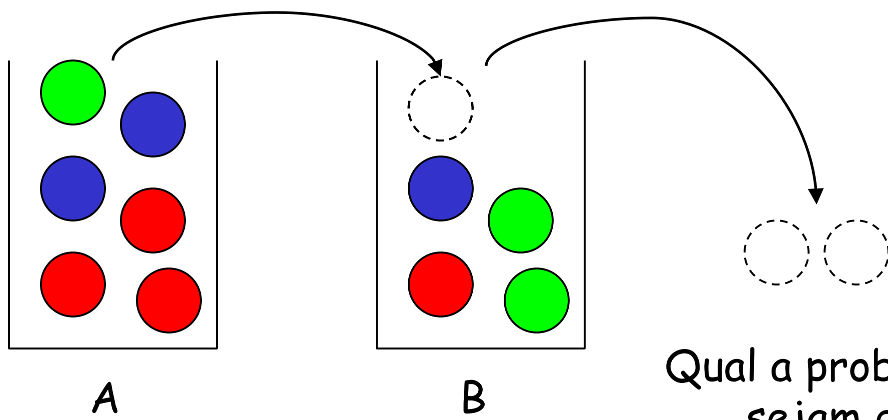
$$P(3Vermelhos) = \underbrace{P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) + \ldots + P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)}_{\frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}}$$

$$P(3Vermelhos) = \frac{5!}{3!2!}\frac{6}{11}\frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{5}{8}\frac{4}{7}$$

Probabilidade

Exercícios

3)



(sem reposição)

Qual a probabilidade que ambas sejam da mesma cor?

$$M = (R_1 \cap R_2) \cup (G_1 \cap G_2) \cup (B_1 \cap B_2)$$

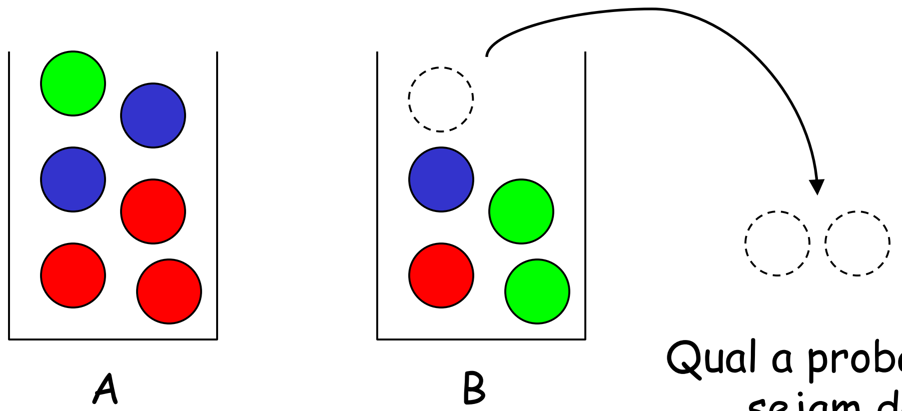
$$P(M) = P(R_1 \cap R_2) + P(G_1 \cap G_2) + P(B_1 \cap B_2)$$

$$P(M) = P(R_1)P(R_2 / R_1) + P(G_1)P(G_2 / G_1) + P(B_1)P(B_2 / B_1)$$???

Probabilidade

Exercícios

3)



Qual a probabilidade que ambas sejam da mesma cor?

$$M = (M_B \cap R_A) \cup (M_B \cap G_A) \cup (M_B \cap B_A)$$

$$P(M) = P(M_B \cap R_A) + P(M_B \cap G_A) + P(M_B \cap B_A)$$

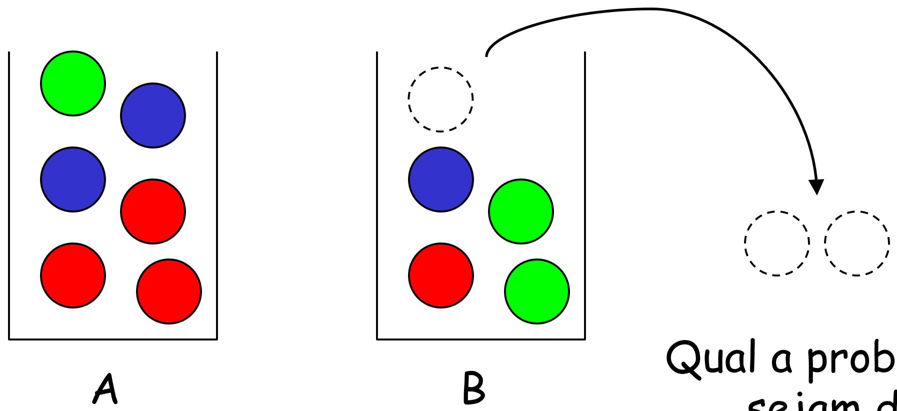
$$P(M) = P(R_A)P(M_B / R_A) + P(G_A)P(M_B / G_A) + P(B_A)P(M_B / B_A)$$

$$M_B = (R_{B1} \cap R_{B2}) \cup (G_{B1} \cap G_{B2}) \cup (B_{B1} \cap B_{B2})$$

Probabilidade

Exercícios

3)



Qual a probabilidade que ambas sejam da mesma cor?

$$P(M) = P(R_A)P(M_B / R_A) + P(G_A)P(M_B / G_A) + P(B_A)P(M_B / B_A)$$

$$M_B = (R_{B1} \cap R_{B2}) \cup (G_{B1} \cap G_{B2}) \cup (B_{B1} \cap B_{B2})$$

$$P(M) = \frac{3}{6}\left(\frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} + 0\right) + \frac{1}{6}\left(0 + \frac{3}{5}\frac{2}{4} + 0\right) + \frac{2}{6}\left(0 + \frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4}\right)$$

$$P(M) = \frac{3}{6}\frac{4}{20} + \frac{1}{6}\frac{6}{20} + \frac{2}{6}\frac{4}{20} = \frac{26}{120} = \frac{13}{60}$$

(ver pasta exemplo2 em revisao_probabilidade.xls)