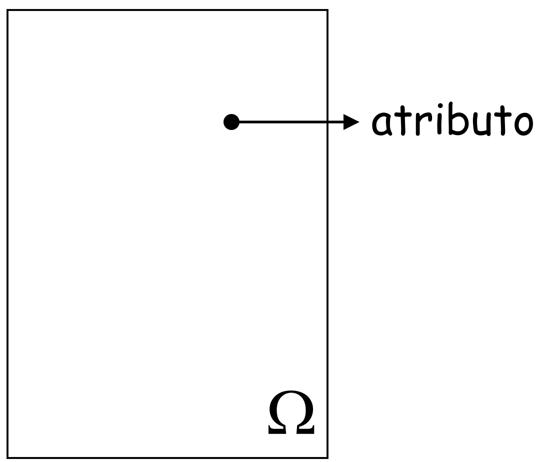
Estatística: Aplicação ao Sensoriamento Remoto

SER 204 - ANO 2024

Variáveis Aleatórias

Camilo Daleles Rennó
camilo.renno@inpe.br
http://www.dpi.inpe.br/~camilo/estatistica/

Variável



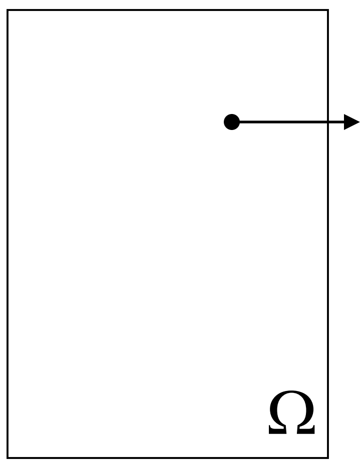
Em qualquer tipo de estudo, há sempre a necessidade de se focar em um ou mais atributos (características) dos elementos que compõem esta população (Ω)

Estes atributos constituem as variáveis de estudo

atributos quantitativos:
. biomassa (peso)
. altura

atributos qualitativos (categóricos):
. espécie
. fase fenológica

Tipos de Mensuração



atributo

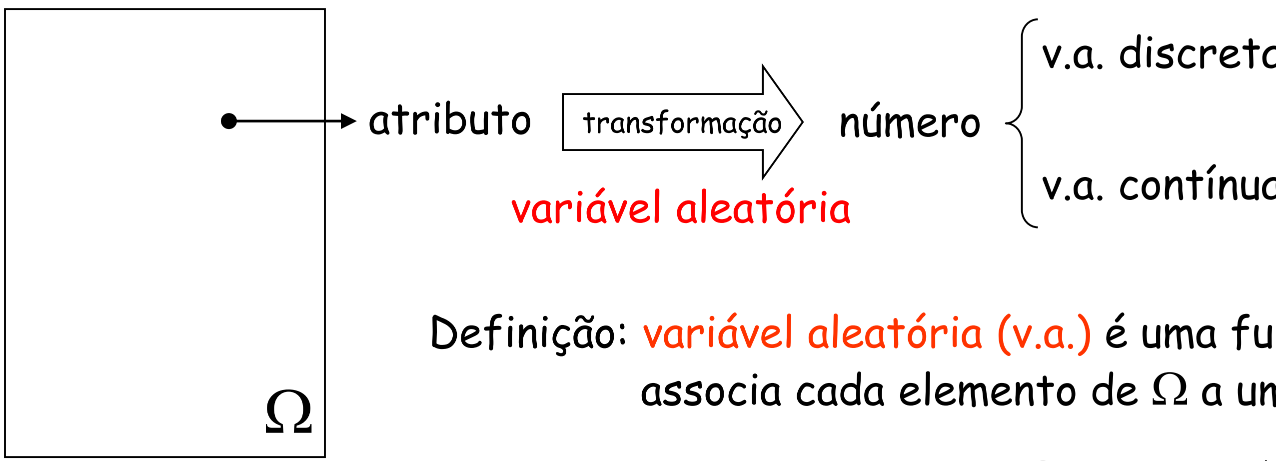
- nominal — cor (azul, verde, amarelo, branco, cinza)
- ordinal — *ranking* (ótimo, bom, regular, ruim, péssimo)
- intervalar — temperatura (Celsius, Fahrenheit, Kelvin)
  (zero representa apenas uma posição na escala)
- proporcional (racional) — peso (grama, quilo, tonelada)
  (zero representa ausência do atributo)

Um atributo representado por números pode ser, por uma conveniência matemática, combinado e/ou sumarizado através de inúmeras manipulações algébricas: soma, produto, mínimo, máximo, média, mediana, etc

Por definição, todos os atributos quantitativos já possuem esta propriedade

Como será visto a seguir, para atributos qualitativos, regras devem ser definidas para transformá-los em números

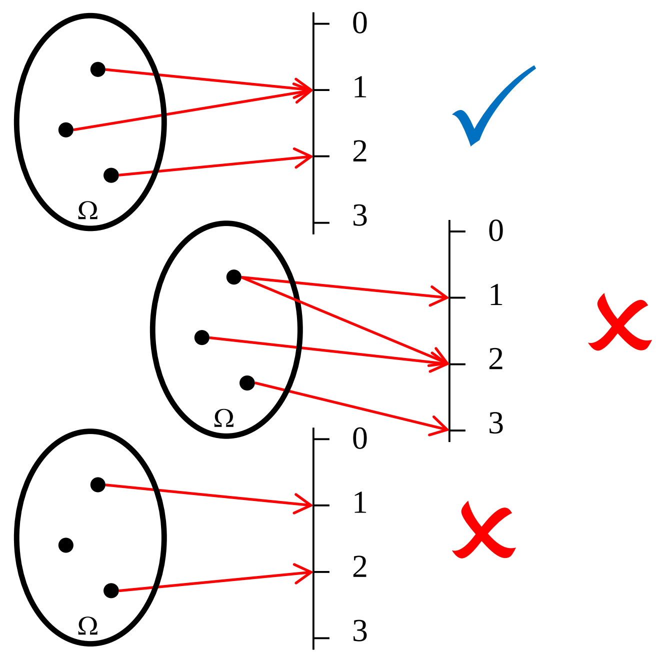
Variável Aleatória



Definição: variável aleatória (v.a.) é uma função que associa cada elemento de Ω a um número.

Propriedades de uma v.a.:

- Cada elemento de Ω deve estar associado a um único número
- Todos os elementos de Ω devem estar associados a algum número
- Vários elementos de Ω podem estar associados ao mesmo número

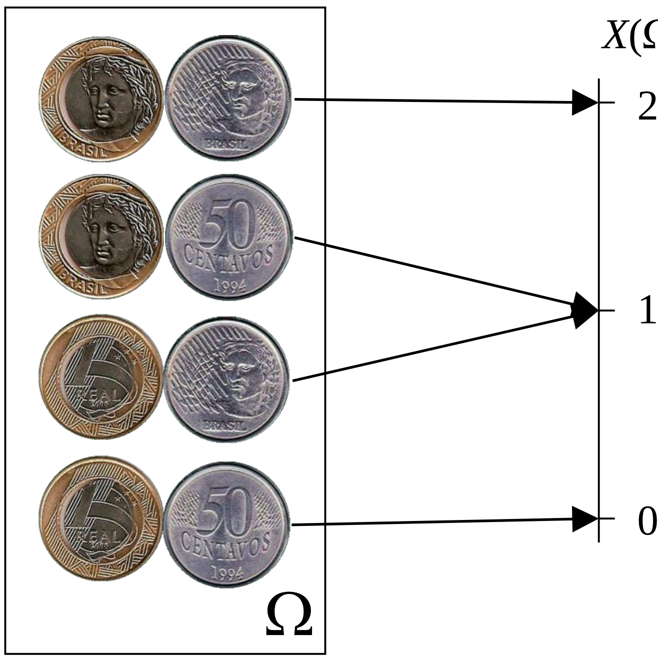


Variável Aleatória

Experimento: jogar 2 moedas (R$1,00 e R$0,50) e observar o resultado

Definindo uma v.a. X: número de caras em 2 lances de moeda

$X(\Omega)$ (representa o escopo da v.a.)



K $\leftrightarrow$ cara   C $\leftrightarrow$ coroa

$X(C_1C_{0,50}) = 0$
$X(K_1C_{0,50}) = X(C_1K_{0,50}) = 1$
$X(K_1K_{0,50}) = 2$

$P(X = 0) = P(C_1C_{0,50})$
$P(X = 1) = P(K_1C_{0,50} \cup C_1K_{0,50})$
$P(X = 2) = P(K_1K_{0,50})$

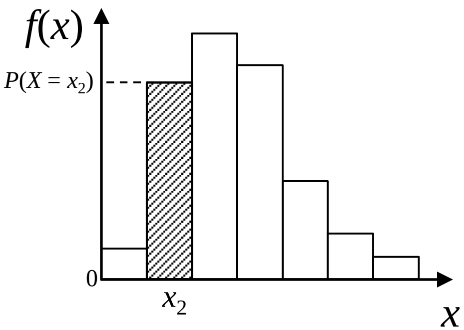
OBS: em $P(X = x)$, a natureza funcional da v.a. foi suprimida. De fato, a expressão mais correta seria $P(\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x)$.
por definição, os valores de uma v.a. são sempre mutuamente exclusivos

Variável Aleatória Discreta

Definição: uma v.a. é discreta quando o conjunto de valores possíveis (imagem) for finito ou infinito numerável.

$0 < P(X = x_i) \leq 1$ para todo $x_i \in X(\Omega)$

$$\sum_i P(X = x_i) = 1$$



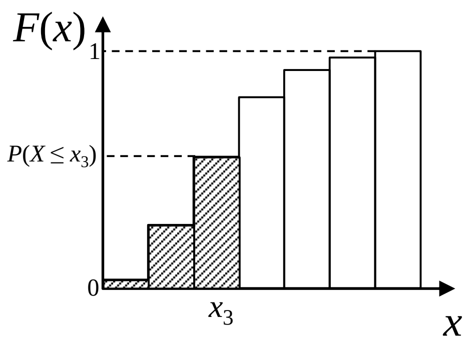
Função de Probabilidade

$$f(x) = P(X = x)$$

Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \sum_j f(x_j)$$ para todo j onde $x_j \leq x$



Variável Aleatória Discreta

Exemplos:

a) jogar um dado
X: ponto obtido no dado
$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
X: = 1 se ponto for igual a 6
= 0 caso contrário
$X = \{0, 1\}$

b) jogar 5 moedas (ou uma moeda 5 vezes)
X: número de caras em 5 lances
$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) jogar uma moeda até tirar uma cara
X: número de jogadas até tirar uma cara (incluindo-se a cara)
$X = \{1, 2, 3, ...\}$
X: número de coroas até tirar uma cara
$X = \{0, 1, 2, ...\}$

Variável Aleatória Discreta

Exemplos:

d) sortear um ponto de uma imagem (8*bits*)
X: valor de nível de cinza
X = {0, 1, ..., 255}
X: = 1 se valor de nível de cinza for menor que 100
= 0 caso contrário
X = {0, 1}

e) sortear 5 pontos em um mapa pedológico
X: número de pontos correspondentes à classe Argissolo
X = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

f) sortear pontos em um mapa de vegetação até que se encontre a classe Cerrado
X: número de pontos sorteados (incluindo-se o ponto da classe Cerrado)
X = {1, 2, 3, ...}
X: número de pontos sorteados (excluindo-se o ponto da classe Cerrado)
X = {0, 1, 2, ...}

Variável Aleatória Contínua

Definição: uma v.a. é contínua quando o conjunto de valores possíveis (imagem) for inumerável.

Se o conjunto imagem é inumerável, não há sentido em falar de valores específicos e portanto: $P(X = x) = 0$

Qual a probabilidade de se escolher uma pessoa qualquer com exatos 1,70 metros de altura? $P(X = 1{,}70) = 0$

1,700000... (infinitos zeros)

Isso é possível mas é muito pouco provável!

Nesse caso, a probabilidade nula é traduzida como evento improvável mas não impossível

Exceção para os eventos que estejam fora do escopo da v.a. considerada. Nesses casos, a probabilidade nula é sinônimo de evento impossível

Qual a probabilidade de se escolher uma pessoa qualquer com mais do que 10 metros de altura? $P(X > 10) = 0$

Impossível!

Variável Aleatória Contínua

Definição: uma v.a. é contínua quando o conjunto de valores possíveis (imagem) for inumerável.

Se o conjunto imagem é inumerável, não há sentido em falar de valores específicos e portanto: $P(X = x) = 0$

$$\boxed{0 \leq P(a < X < b) \leq 1}$$

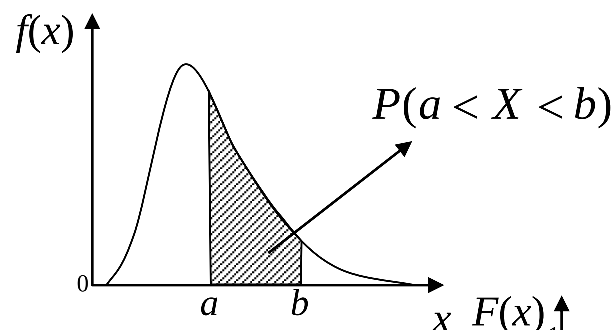
só há sentido em falar de probabilidade para um intervalo de valores!

Função Densidade de Probabilidade (fdp)

$$f(x) \geq 0$$

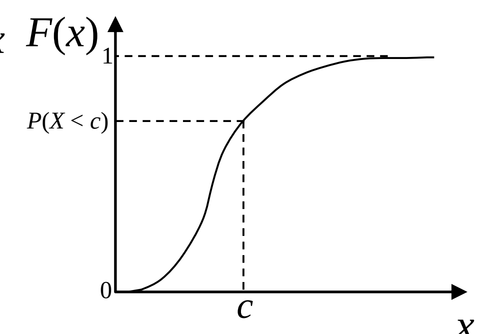
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

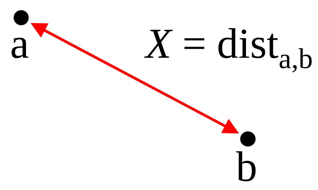


Variável Aleatória Contínua

Exemplos:

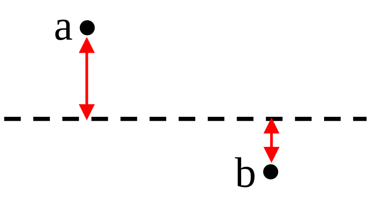
a) X: distância entre dois pontos

X = [0,+∞[



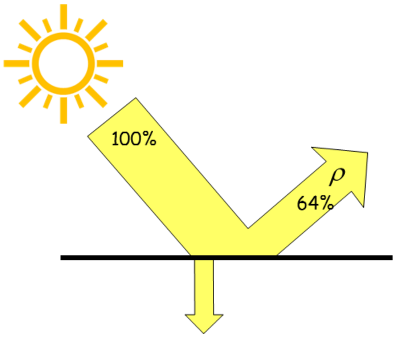
b) X: distância vertical de um ponto, relativa a uma superfície plana pré-definida

X =]-∞,+∞[



c) X: reflectância de um objeto

X = [0,1] = [0,100%]



V.A. Discretas e Contínuas

Observações importantes

- Variáveis discretas não necessariamente estão associadas a números inteiros

Se $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = X/2$ então

$Y = \{0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5\}$ e $P(X = 3) = P(Y = 1{,}5)$

- Não confunda conjunto numerável com conjunto finito

Algumas v.a. discretas são numeráveis mas podem assumir infinitos valores

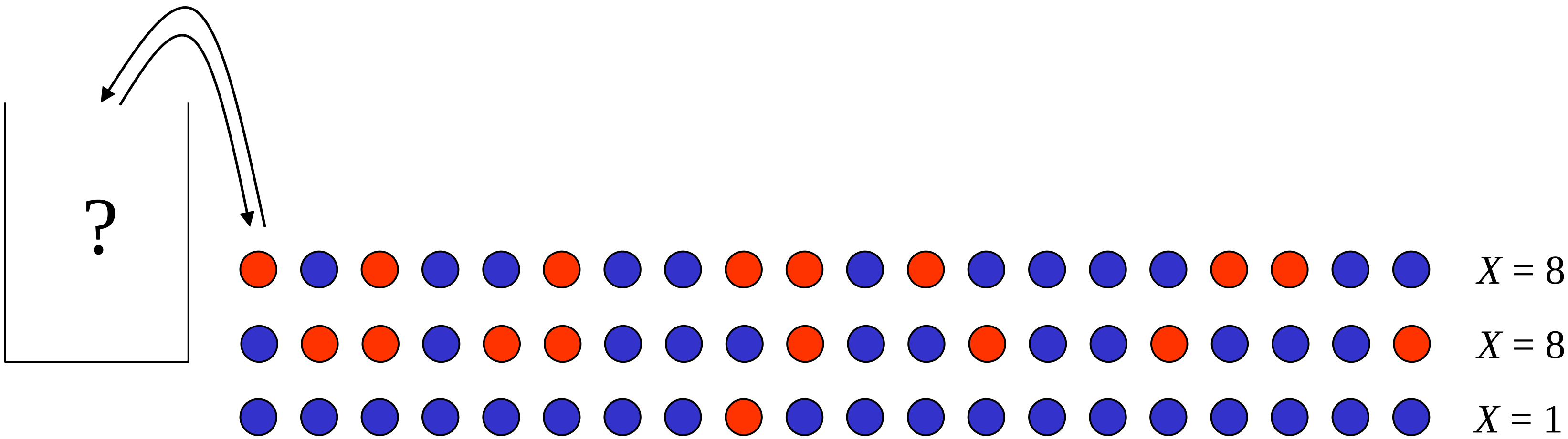
- No processo de medição de uma variável contínua, sempre haverá uma discretização que definirá a precisão desta medição

É importante entender a natureza da variável analisada e não necessariamente como ela é representada

Ex. Imagem de Reflectância (0-100%) discretizada em 256 níveis de cinza

Caracterização de uma Variável Aleatória

Exemplo: retiram-se 20 bolas de uma urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 20 escolhidas



Qual o escopo desta v.a.?

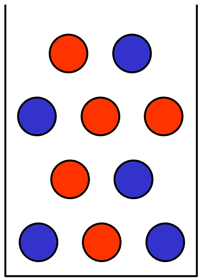
$X = \{0,1,2, ..., 20\}$

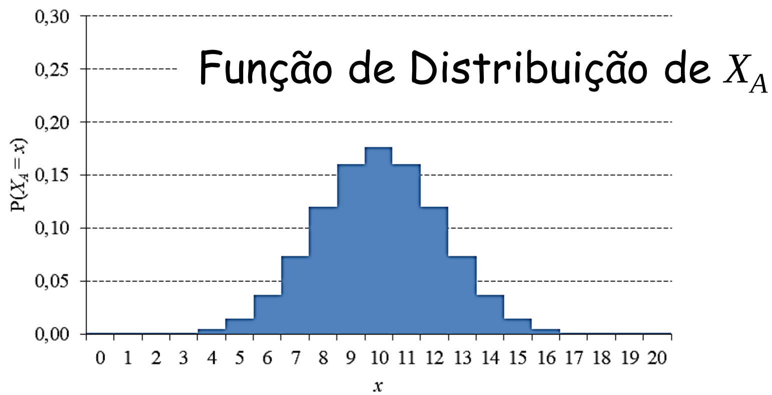
$P(X = x) = ?$

Caracterização de uma Variável Aleatória

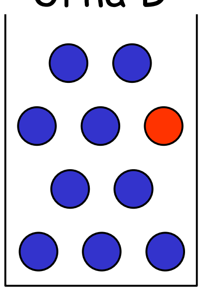
Exemplo: retiram-se 20 bolas de uma urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 20 escolhidas

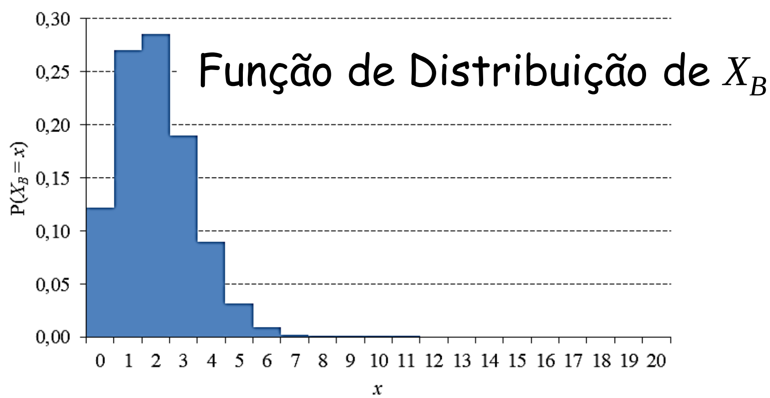
Urna A





Urna B





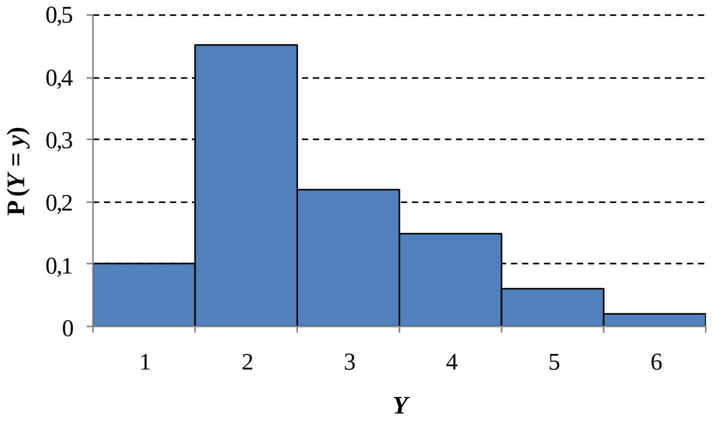
Como caracterizar estas variáveis aleatórias de modo a evidenciar suas semelhanças e diferenças?

Aspectos principais:

- posição (tendência central)
- dispersão
- forma

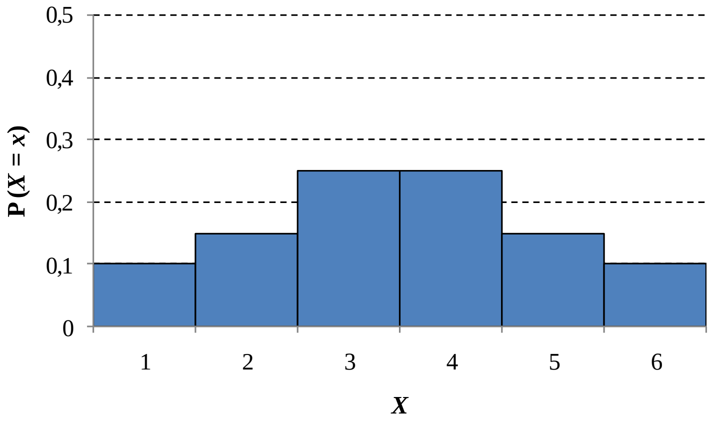
Caracterização de uma Variável Aleatória

Variável Y



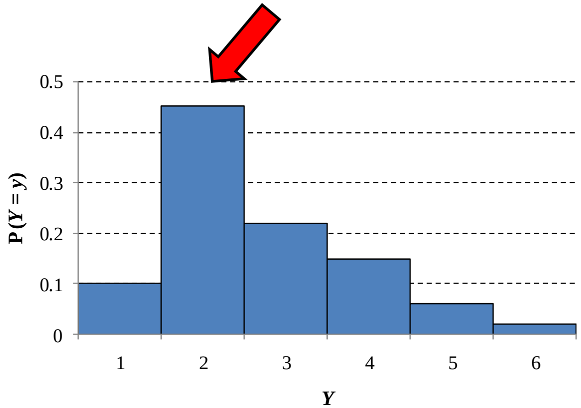
Y	$P(Y = y)$
1	0,10
2	0,45
3	0,22
4	0,15
5	0,06
6	0,02

Variável X



X	$P(X = x)$
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,25
5	0,15
6	0,10

Medidas de Tendência Central

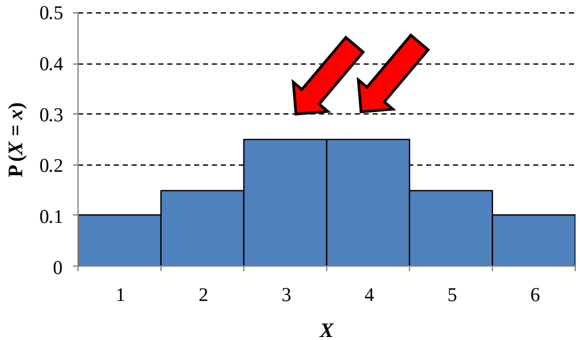


Y	$P(Y = y)$
1	0,10
2	0,45
3	0,22
4	0,15
5	0,06
6	0,02

- Identificar o(s) valor(es) que ocorre(m) com a maior frequência
  Moda

$$moda = 2$$

Medidas de Tendência Central



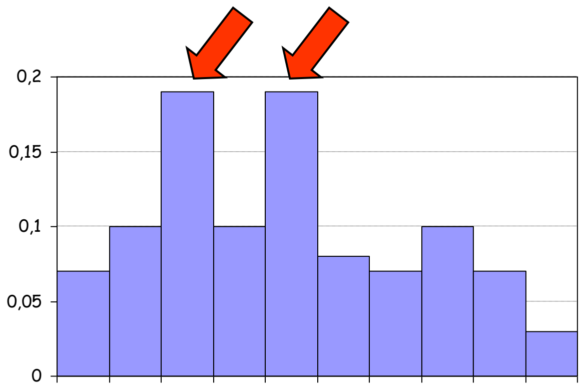
X	$P(X = x)$
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,25
5	0,15
6	0,10

- Identificar o(s) valor(es) que ocorre(m) com a maior frequência
  Moda

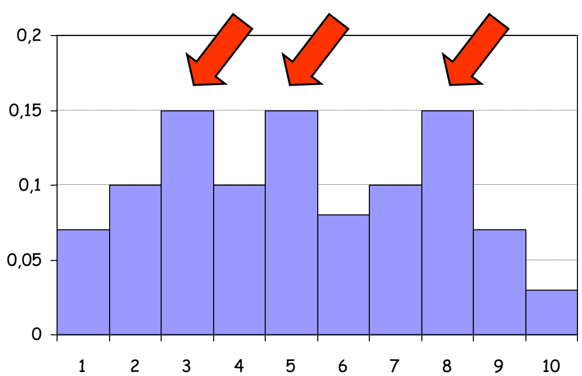
$$moda = \{3, 4\}$$

Medidas de Tendência Central

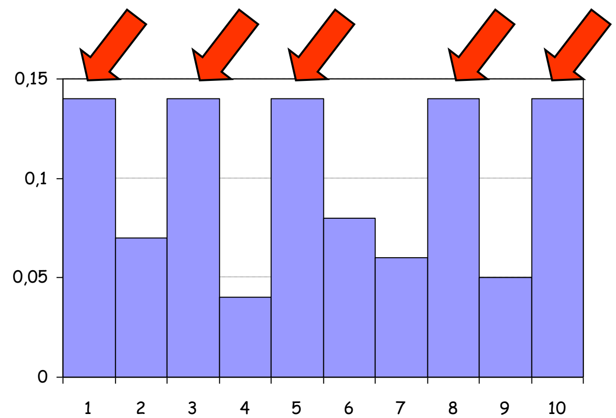
Moda



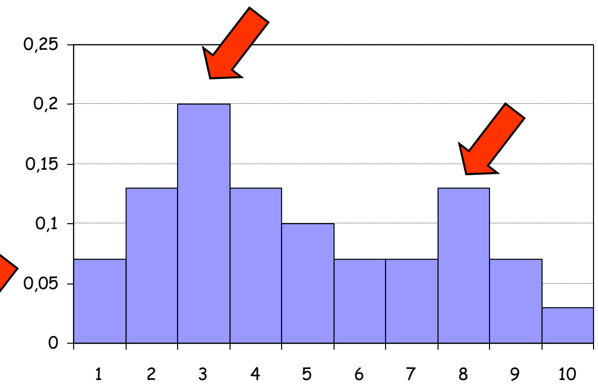
2 modas (bimodal)



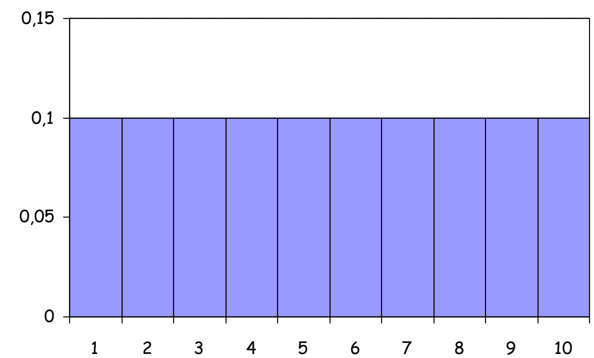
3 modas (trimodal)



muitas modas (multimodal)



modas "locais"



não definida

Medidas de Tendência Central

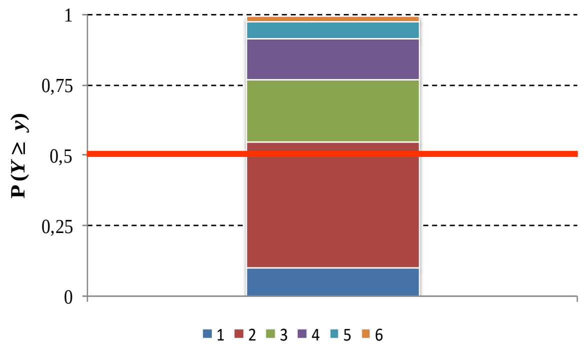
Moda

$$moda = \{x \mid \forall k : P(X = k) \leq P(X = x)\}$$ v.a. discretas

$$moda = \arg\max_{x} f(x) := \{x \mid \forall k : f(k) \leq f(x)\}$$ v.a. contínuas

- Representa valores possíveis da v.a. ✓
- Pode ser usada diretamente em variáveis de qualquer tipo de mensuração, inclusive a nominal (variável qualitativa) ✓
- Pode não existir ou ter muitos valores ✗

Medidas de Tendência Central

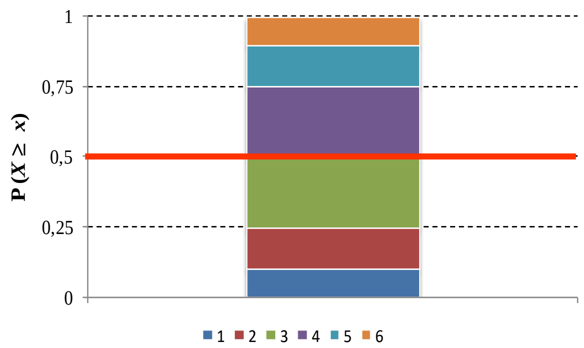


Y	$P(Y \leq y)$
1	0,10
2	0,55
3	0,77
4	0,92
5	0,98
6	1,00

- Identificar o ponto que divide a distribuição em duas partes iguais (equiprováveis) Mediana

$$mediana = 2$$

Medidas de Tendência Central



X	$P(X \leq x)$
1	0,10
2	0,25
3	0,50
4	0,75
5	0,90
6	1,00

- Identificar o ponto que divide a distribuição em duas partes iguais (equiprováveis) Mediana

$$mediana = 3,5$$

Medidas de Tendência Central

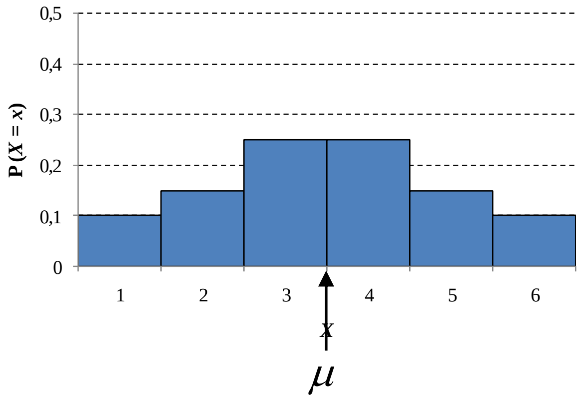
Mediana

$$P(X \leq mediana) \geq 0{,}5 \;\; e \;\; P(X \geq mediana) \geq 0{,}5$$ v.a. discretas

$$\int_{-\infty}^{mediana} f(x)dx = 0{,}5$$ v.a. contínuas

- Pode ser usada diretamente em variáveis cuja mensuração seja pelos menos ordinal ✓
- Não sofre influência de valores extremos (muito baixos ou muito altos com baixa prob.) ✓
- Pode não representar valores possíveis para v.a. discreta ✗
- Possui limitações para manipulação algébrica ✗

Medidas de Tendência Central



X	$P(X=x)$
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,25
5	0,15
6	0,10

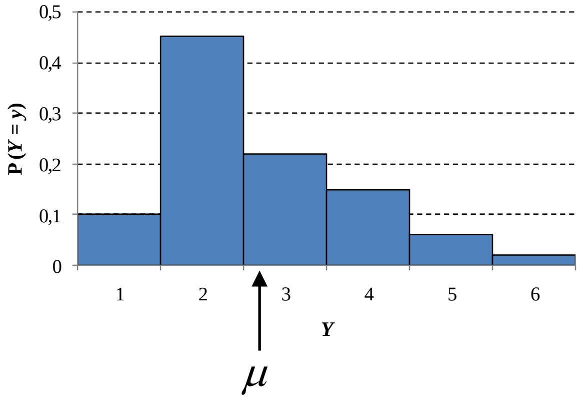
- Calcular o ponto de equilíbrio da distribuição
  Média

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$$

(trata-se de uma média ponderada pela probabilidade de cada valor)

$$\mu = 1*0,10 + 2*0,15 + 3*0,25 + 4*0,25 + 5*0,15 + 6*0,10 = 3,5$$

Medidas de Tendência Central



Y	$P(Y = y)$
1	0,10
2	0,45
3	0,22
4	0,15
5	0,06
6	0,02

- Calcular o ponto de equilíbrio da distribuição
  Média

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} y_i P(Y = y_i)$$

$$\mu = 1*0{,}10 + 2*0{,}45 + 3*0{,}22 + 4*0{,}15 + 5*0{,}06 + 6*0{,}02 = 2{,}68$$

Medidas de Tendência Central

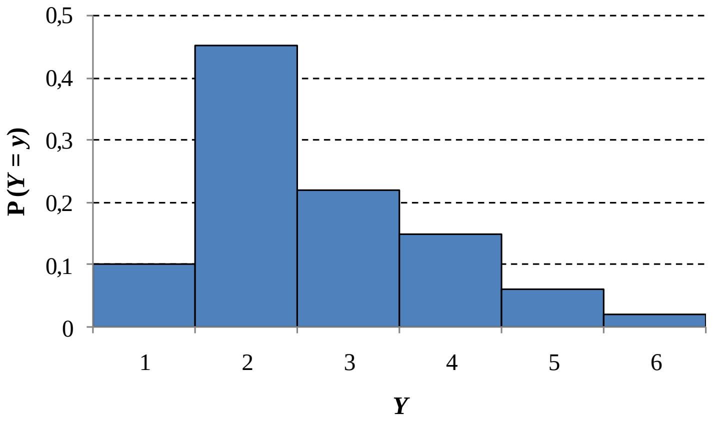
Média

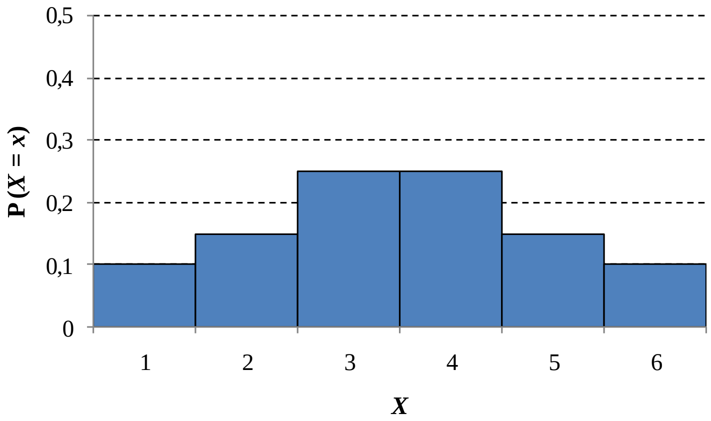
$$\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$$ v.a. discretas

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$ v.a. contínuas

- Permite manipulações algébricas ✓
- Pode não representar valores possíveis para v.a. discreta ✗
- Sofre forte influência de valores extremos ✗
- Em distribuições simétricas unimodais, média = mediana = moda

Medidas de Dispersão





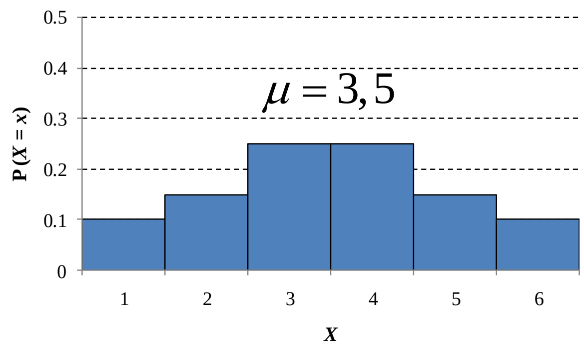
- Analisar a variação total da v.a.

$Y_{máx} - Y_{mín} = 5$

$X_{máx} - X_{mín} = 5$

$\boxed{\text{Amplitude Total}}$

Medidas de Dispersão



X - μ	X	$P(X = x)$
-2,5	1	0,10
-1,5	2	0,15
-0,5	3	0,25
0,5	4	0,25
1,5	5	0,15
2,5	6	0,10

- Analisar a média dos desvios da v.a. (em relação à média)

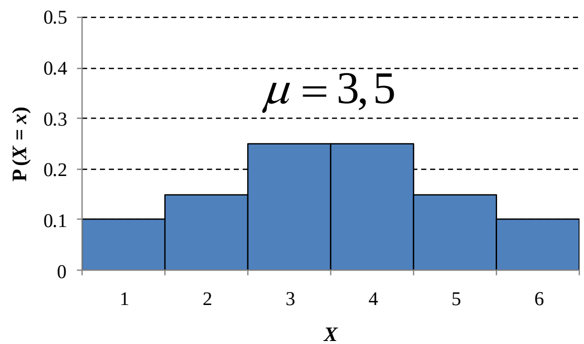
$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)P(X = x_i) = -2,5*0,10 - 1,5*0,15 - 0,5*0,25 + \\ +0,5*0,25 + 1,5*0,15 + 2,5*0,10 = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i) - \sum_{i=1}^{N} \mu P(X = x_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)}_{=\mu} - \mu \underbrace{\sum_{i=1}^{N} P(X = x_i)}_{=1}$$

$$= \mu - \mu = 0$$

Sempre será zero!

Medidas de Dispersão



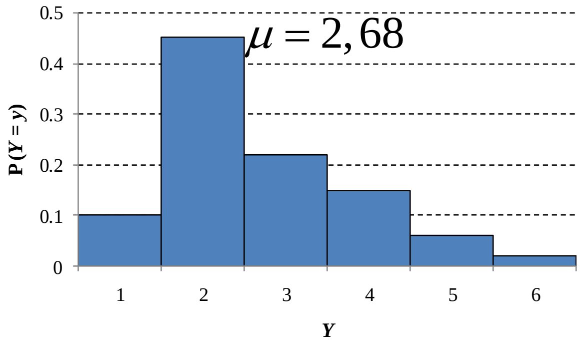
$\lvert X - \mu \rvert$	X	$P(X = x)$
2,5	1	0,10
1,5	2	0,15
0,5	3	0,25
0,5	4	0,25
1,5	5	0,15
2,5	6	0,10

- Analisar média dos desvios absolutos da v.a. (em relação à média)

$$\sum_{i=1}^{N} \lvert x_i - \mu \rvert P(X = x_i) = 2,5*0,10 + 1,5*0,15 + 0,5*0,25 + $$
$$+ 0,5*0,25 + 1,5*0,15 + 2,5*0,10 = \mathbf{1,2}$$

Desvio Absoluto Médio

Medidas de Dispersão



$\|Y - \mu\|$	Y	$P(Y = y)$
1,68	1	0,10
0,68	2	0,45
0,32	3	0,22
1,32	4	0,15
2,32	5	0,06
3,32	6	0,02

- Analisar a média dos desvios absolutos da v.a. (em relação à média)

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i - \mu| P(Y = y_i) = \mathbf{0{,}948}$$

Desvio Absoluto Médio

Medidas de Dispersão

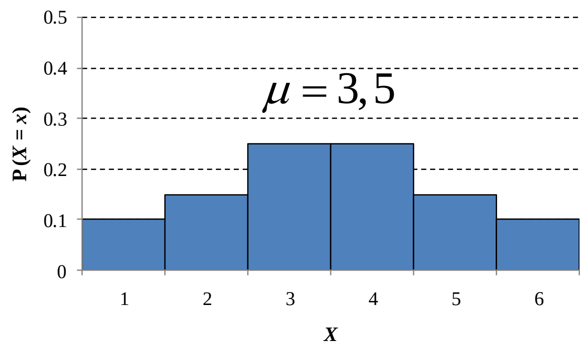
Desvio Absoluto Médio

$$DAM = \sum_{i=1}^{N} |x_i - \mu| P(X = x_i)$$ v.a. discretas

$$DAM = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu| f(x)dx$$ v.a. contínuas

- Possui a mesma unidade da média e da v.a. ✓
- Apresenta o inconveniente de ser de difícil manipulação algébrica ✗

Medidas de Dispersão



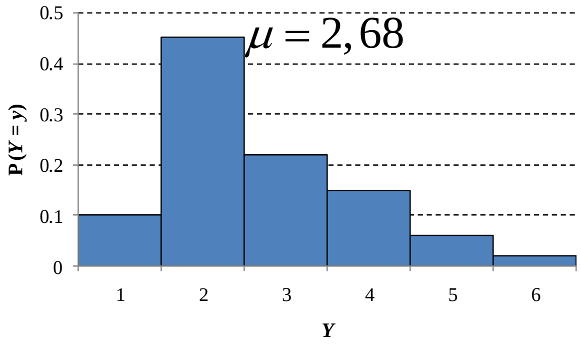
$(X - \mu)^2$	X	$P(X = x)$
6,25	1	0,10
2,25	2	0,15
0,25	3	0,25
0,25	4	0,25
2,25	5	0,15
6,25	6	0,10

- Analisar a média dos desvios quadráticos da v.a. (em relação à média)

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = 6,25*0,10 + 2,25*0,15 + 0,25*0,25 +$$
$$+0,25*0,25 + 2,25*0,15 + 6,25*0,10 = \mathbf{2,05}$$

Variância (σ^2)

Medidas de Dispersão



$(Y - \mu)^2$	Y	$P(Y = y)$
2,822	1	0,10
0,462	2	0,45
0,102	3	0,22
1,742	4	0,15
5,382	5	0,06
11,022	6	0,02

- Analisar a média dos desvios quadráticos da v.a. (em relação à média)

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - \mu)^2 P(Y = y_i) = \mathbf{1{,}318}$$

Variância (σ^2)

Medidas de Dispersão

Variância

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \, P(X = x_i) \qquad \text{v.a. discretas}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \, f(x)dx \qquad \text{v.a. contínuas}$$

- Pode ser manipulada algebricamente ✓
- Valores não são facilmente interpretados ✗
- Possui a unidade da v.a. ao quadrado (Ex. X em ºC, σ^2 em ºC^2) ✗

Desvio Padrão (σ) é a raiz quadrada da Variância

σ possui a mesma unidade de X

Medidas de Dispersão

Quando duas ou mais variáveis são comparadas quanto a sua dispersão, a variância (ou o desvio padrão) não pode ser utilizada se estas variáveis possuírem diferentes unidades. Exemplo: X é altura (m) e Y é biomassa (kg)

Neste caso, adota-se uma medida adimensional:

Coeficiente de Variação

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

- Mede a variação relativa a média
- Adimensional
- Pode ser expresso em porcentagem (mas pode ter valores maiores que 100%)
- Não pode ser utilizado quando $\mu = 0$ ✗

Momentos

Uma v.a. pode também ser caracterizada através dos momentos, calculados a partir de sua distribuição

Momento (ordinário) ou Esperança (matemática) de ordem k:

v.a. discreta

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^{N} x_i^k P\left(X = x_i\right)$$

v.a. contínua

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

lê-se: k-ésimo momento de X ou Esperança (matemática) da k-ésima potência de X

Momento centrado (na média) de ordem k

v.a. discreta

$$E\left((X-\mu)^k\right) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^k P\left(X = x_i\right)$$

v.a. contínua

$$E\left((X-\mu)^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k f(x)dx$$

OBS: $\mu = E(X)$ média = 1º momento = esperança (matemática) = valor esperado de X

$\sigma^2 = E\left((X-\mu)^2\right)$ variância = 2º momento centrado = esperança da diferença quadrática de X em relação a média

$= E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

Outras medidas

Quantil

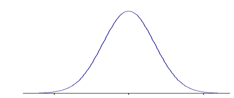
quartil (Q_i): divide a distribuição em 4 partes equiprováveis (mediana = 2º quartil)

distância interquartil: 3º quartil - 1º quartil (prob = 50%)

decil (D_i): divide a distribuição em 10 partes equiprováveis (mediana = 5º decil)

percentil (P_i): divide a distribuição em 100 partes equiprováveis (mediana = 50º percentil)

Curtose (achatamento)



$$C = \frac{E\left((X-\mu)^4\right)}{\left[E\left((X-\mu)^2\right)\right]^2} \qquad C' = \frac{Q_3 - Q_1}{2\left(D_9 - D_1\right)}$$

$C = 3$ ou $C' = 0{,}263$ mesocúrtica (distr. Normal)

$C < 3$ ou $C' < 0{,}263$ platicúrtica

$C > 3$ ou $C' > 0{,}263$ leptocúrtica

OBS: Excesso de curtose $= C - 3$ ou $C' - 0{,}263$ (mede a diferença em relação à distr. Normal)

Assimetria (obliquidade)

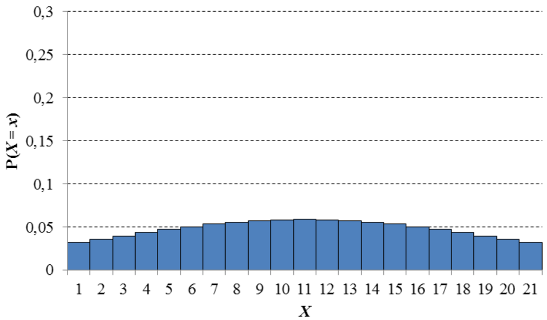
$$A = \frac{E\left((X-\mu)^3\right)}{\left[E\left((X-\mu)^2\right)\right]^{3/2}} \qquad A' = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Mediana}{Q_3 - Q_1}$$

$A = 0$ ou $A' = 0$ simétrica

$A < 0$ ou $A' < 0$ assimétrica à esquerda (média < mediana < moda)

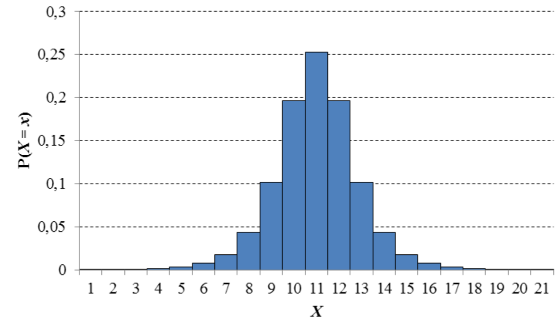
$A > 0$ ou $A' > 0$ assimétrica à direita (média > mediana > moda)

Assimetria e Curtose



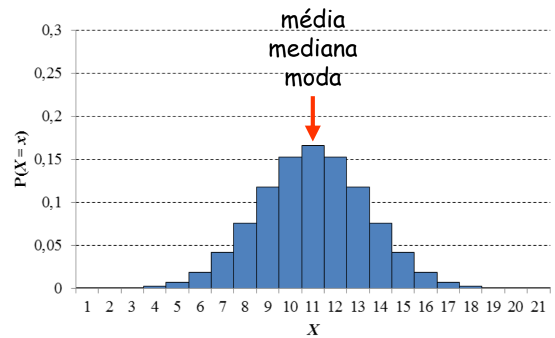
A = 0 (simétrica)

C = 1,99 (platicúrtica)



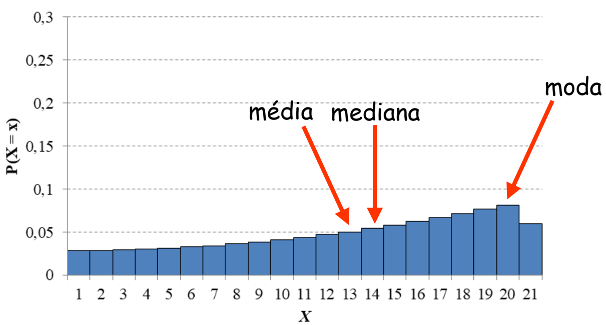
A = 0 (simétrica)

C = 5,01 (leptocúrtica)



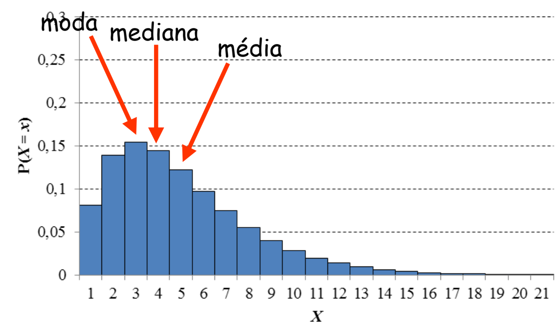
A = 0 (simétrica)

C = 3 (mesocúrtica)



A = -0,45 (assimétrica à esquerda)

C = 2,06 (platicúrtica)



A = 1,19 (assimétrica à direita)

C = 4,77 (leptocúrtica)

Transformação e Combinação de V.A.

Suponha que uma v.a. seja obtida através de uma transformação de uma outra v.a. ou através da combinação de várias v.a. É possível conhecer a média (esperança) e a variância desta nova v.a. em função da(s) média(s) e variância(s) da(s) v.a. da(s) qual(is) ela se originou?

Principais transformações/combinações:

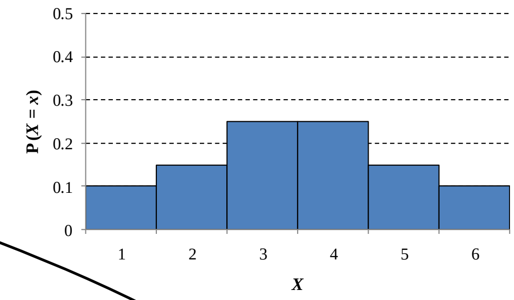
$$Y = X \pm o$$

$$Y = gX$$ onde o e g são constantes

$$Y = X \pm W$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10



$E(X) = 3{,}5$ $\qquad$ $Var(X) = 2{,}05$

- $\boxed{Y = X + o}$

Ex: $Y = X + 3$

+ 3

=

Y	4	5	6	7	8	9
X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(Y) = 4*0{,}10 + 5*0{,}15 + \cdots + 9*0{,}10 = \boxed{6{,}5}$$

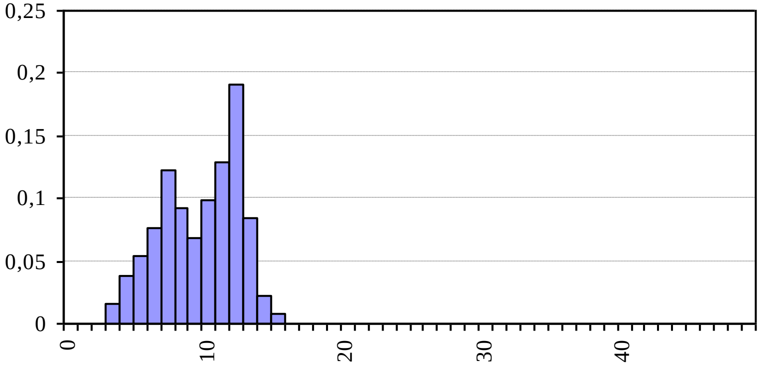
$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 44{,}3 - 42{,}25 = \boxed{2{,}05}$$

Propriedades da Esperança e Variância

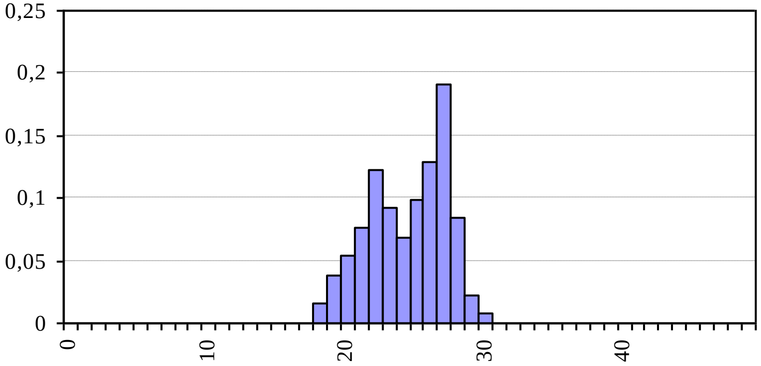
$$Y = X \pm o$$

$$E(Y) = E(X \pm o) = E(X) \pm o$$

$$Var(Y) = Var(X \pm o) = Var(X)$$



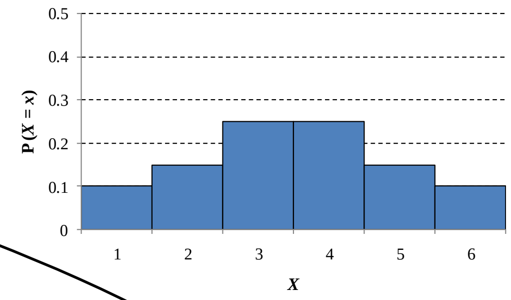
X



$Y = X + 15$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10



$E(X) = 3{,}5$ $\qquad Var(X) = 2{,}05$

- $Y = gX$

$* 3$ $\qquad * 9 = 3^2$

Ex: $Y = 3X$

Y	3	6	9	12	15	18
X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(Y) = 3*0{,}10 + 6*0{,}15 + \cdots + 18*0{,}10 = \boxed{10{,}5}$$

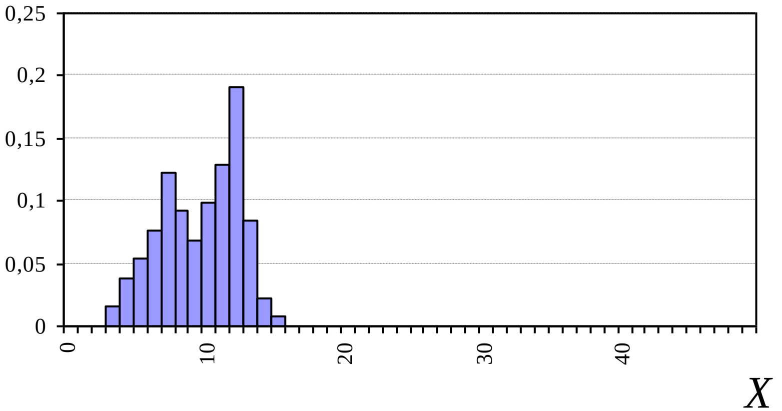
$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 128{,}7 - 110{,}25 = \boxed{18{,}45}$$

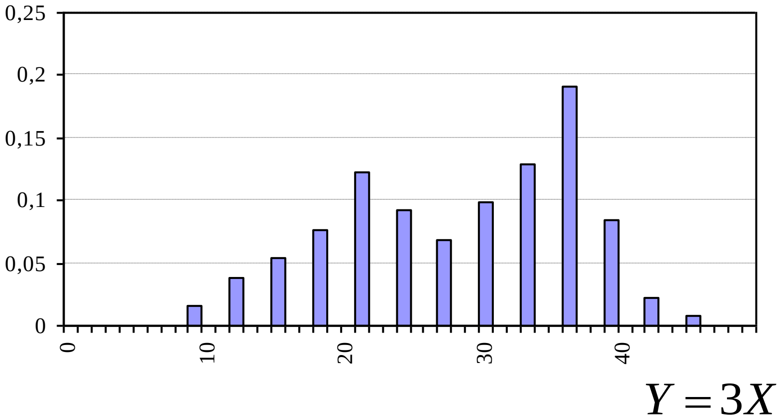
Propriedades da Esperança e Variância

$$Y = gX$$

$$E(Y) = E(gX) = gE(X)$$

$$Var(Y) = Var(gX) = g^2 Var(X)$$





Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W = w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X) = 3{,}5$ $\quad Var(X) = 2{,}05$ $\quad E(W) = 2{,}68$ $\quad Var(W) = 1{,}318$

$$\boxed{\bullet\ Y = X + W}$$

$Y = \{2, \ldots, 12\}$

W \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	7
2	$\boxed{3}$	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Distribuição Conjunta de X e W

W \ X	1	2	3	4	5	6	$P(W = w_i)$
1							0,10
2							0,45
3							0,22
4							0,15
5							0,06
6							0,02
$P(X = x_i)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10	1

$$P(Y = 3) = P(X = 1; W = 2) + P(X = 2; W = 1)$$

$$P(X = 1; W = 2) = ?$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X)=3,5$ $\quad Var(X)=2,05$ $\quad E(W)=2,68$ $\quad Var(W)=1,318$

$\boxed{\bullet\ Y = X + W}$

$Y = \{2, ..., 12\}$

W \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	7
2	$\boxed{3}$	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Distribuição Conjunta de X e W

W \ X	1	2	3	4	5	6	$P(W=w_i)$
1	0,010	0,015	0,025	0,025	0,015	0,010	0,10
2	$\boxed{0,045}$	0,0675	0,1125	0,1125	0,0675	0,045	0,45
3	0,022	0,033	0,055	0,055	0,033	0,022	0,22
4	0,015	0,0225	0,0375	0,0375	0,0225	0,015	0,15
5	0,006	0,009	0,015	0,015	0,009	0,006	0,06
6	0,002	0,003	0,005	0,005	0,003	0,002	0,02
$P(X=x_i)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10	1

$$P(Y=3) = P(X=1;W=2) + P(X=2;W=1)$$

$P(X=1;W=2) = P(X=1)P(W=2)$ considerando que X e W sejam independentes

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X)=3,5$ $\qquad Var(X)=2,05$ $\qquad E(W)=2,68$ $\qquad Var(W)=1,318$

W \ X	1	2	3	4	5	6	$P(W=w_j)$
1	0,010	0,015	0,025	0,025	0,015	0,010	0,10
2	0,045	0,0675	0,1125	0,1125	0,0675	0,045	0,45
3	0,022	0,033	0,055	0,055	0,033	0,022	0,22
4	0,015	0,0225	0,0375	0,0375	0,0225	0,015	0,15
5	0,006	0,009	0,015	0,015	0,009	0,006	0,06
6	0,002	0,003	0,005	0,005	0,003	0,002	0,02
$P(X=x_i)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10	1

$$\boxed{\bullet\ Y = X - W}$$

$$E(Y)=\sum_i y_i P(Y=y_i)$$

$$E(X-W)=\sum_i\sum_j (x_i-w_j)P(X=x_i;W=w_j)$$

$$=\sum_i\sum_j x_i P(X=x_i;W=w_j)-\sum_i\sum_j w_j P(X=x_i;W=w_j)$$

$$=\sum_i x_i \sum_j P(X=x_i;W=w_j)-\sum_j w_j \sum_i P(X=x_i;W=w_j)$$

$$=\sum_i x_i P(X=x_i)-\sum_j w_j P(W=w_j)$$

$$=E(X)-E(W)=3,5-2,68=0,82$$

$$\boxed{E(X\pm W)=E(X)\pm E(W)}$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X)=3{,}5$ $\quad Var(X)=2{,}05$ $\quad E(W)=2{,}68$ $\quad Var(W)=1{,}318$

$$\boxed{\bullet\ Y = X + W}$$

$$Var(Y)=E\left(Y^2\right)-E\left(Y\right)^2$$

$$\begin{aligned}
Var(X+W) &= E\left((X+W)^2\right)-\left(E(X+W)\right)^2 \\
&= E\left(X^2+2XW+W^2\right)-\left(E(X)+E(W)\right)^2 \\
&= E(X^2)+2E(XW)+E(W^2)-E(X)^2-2E(X)E(W)-E(W)^2 \\
&= \underbrace{E(X^2)-E(X)^2}_{Var(X)}+\underbrace{E(W^2)-E(W)^2}_{Var(W)}+2\left(\underbrace{E(XW)-E(X)E(W)}_{COV(X,W)}\right)
\end{aligned}$$

covariância entre X e W

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W = w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X) = 3,5$ $\quad Var(X) = 2,05$ $\quad E(W) = 2,68$ $\quad Var(W) = 1,318$

- $Y = X + W$

$$Var(Y) = E\left(Y^2\right) - E\left(Y\right)^2$$

$$Var(X+W) = E\left((X+W)^2\right) - \left(E(X+W)\right)^2$$

$$= E\left(X^2 + 2XW + W^2\right) - \left(E(X) + E(W)\right)^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XW) + E(W^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(W) - E(W)^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 + E(W^2) - E(W)^2 + 2\left(E(XW) - E(X)E(W)\right)$$

$$\boxed{Var(X+W) = Var(X) + Var(W) + 2COV(X,W)}$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X)=3,5$ $\quad Var(X)=2,05$ $\quad E(W)=2,68$ $\quad Var(W)=1,318$

$$\boxed{\bullet\ Y = X - W}$$

$$Var(Y)=E\left(Y^2\right)-E\left(Y\right)^2$$

$$Var(X-W)=E\left((X-W)^2\right)-\left(E(X-W)\right)^2$$

$$=E\left(X^2-2XW+W^2\right)-\left(E(X)-E(W)\right)^2$$

$$=E(X^2)-2E(XW)+E(W^2)-E(X)^2+2E(X)E(W)-E(W)^2$$

$$=E(X^2)-E(X)^2+E(W^2)-E(W)^2-2\left(E(XW)-E(X)E(W)\right)$$

$$\boxed{Var(X\pm W)=Var(X)+Var(W)\pm 2COV(X,W)}$$

se X e W são independentes: $E(XW)=E(X)E(W)$ $\quad\therefore$

$$\boxed{Var(X\pm W)=Var(X)+Var(W)}$$

$$Var(X\pm W)=2,05+1,318=3,368$$

Propriedades da Esperança e Variância

Resumo:

$$Y = X \pm o$$

$$E(Y) = E(X \pm o) = E(X) \pm o$$
$$Var(Y) = Var(X \pm o) = Var(X)$$

$$Y = gX$$

$$E(Y) = E(gX) = gE(X)$$
$$Var(Y) = Var(gX) = g^2 Var(X)$$

$$Y = X \pm W$$

$$E(Y) = E(X \pm W) = E(X) \pm E(W)$$
$$Var(Y) = Var(X \pm W) = Var(X) + Var(W) \pm 2COV(X,W)$$
$$Var(Y) = Var(X \pm W) = Var(X) + Var(W) \quad \text{(independentes)}$$

sempre soma!

Brilho e Contraste

Imagem original (I)

Banda TM3/Landsat

Em Processamento de Imagens, é comum se referir à média como brilho e variância como contraste.

Uma imagem de baixo brilho é uma imagem escura, ou seja, sua média é baixa. Por outro lado, uma imagem de alto brilho é uma imagem clara, com média alta.

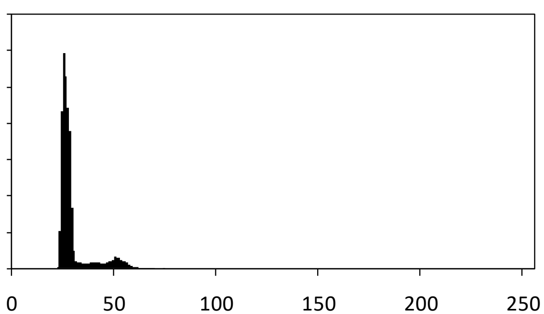
Uma imagem de baixo contraste é uma imagem cujos alvos são de difícil distinção, possuindo baixa variância. Por outro lado, uma imagem de alto contraste possui alvos bem distintos (objetos claros e escuros), possuindo assim alta variância.

Brilho e Contraste

Imagem original (I)

Banda TM3/Landsat

Média: 29,07
Variância: 62,14



O brilho e o contraste de uma imagem podem ser alterados através de transformações aplicadas à imagem original.

A mais comum é a transformação linear, chamada de "Aumento Linear de Contraste":

$$I_{nova} = gI + o \qquad (g = \text{ganho},\ o = \text{offset})$$

Esta transformação é aplicada ao valor de cada pixel que compõe a imagem.

Em imagens coloridas (RGB), cada canal pode ter sua própria transformação.

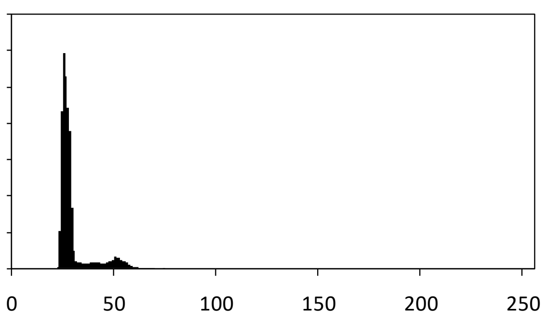
Muitos sistemas aplicam esta transformação de forma interativa e visual, não se conhecendo de fato os valores de ganho e offset utilizados na transformação.

Alterando Offset...

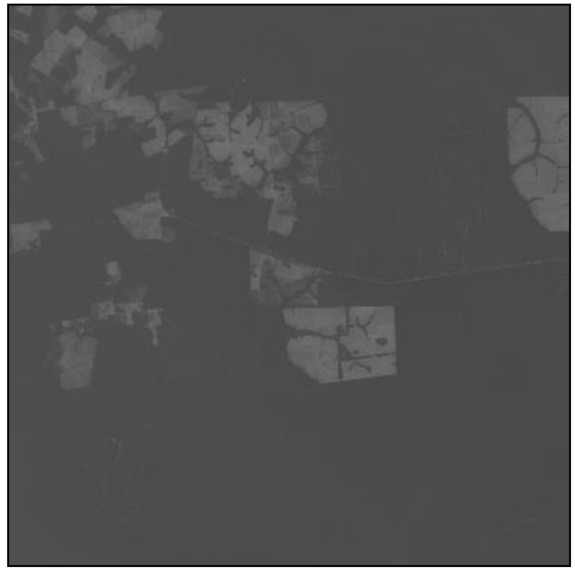
Banda TM3/Landsat

Imagem original (I)

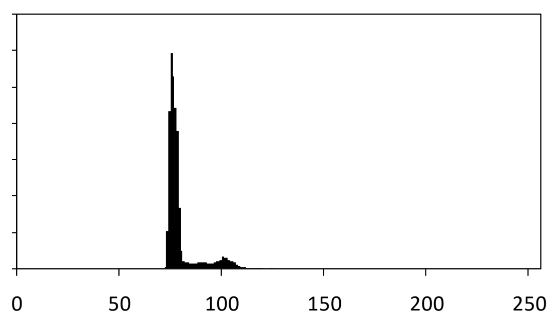
Média: 29,07
Variância: 62,14



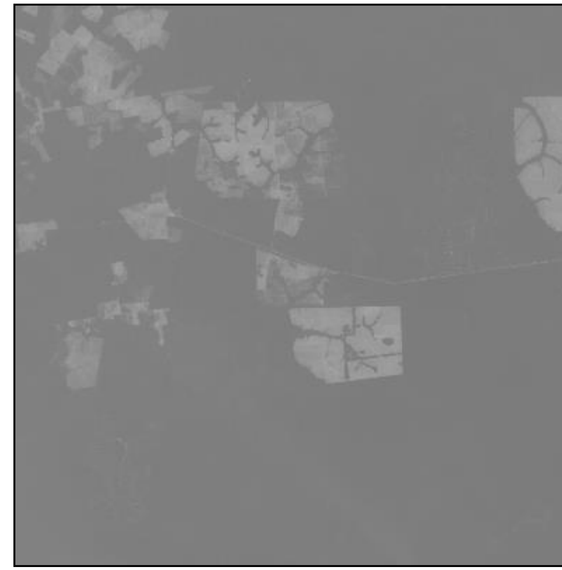
$I_{nova} = I + 50$



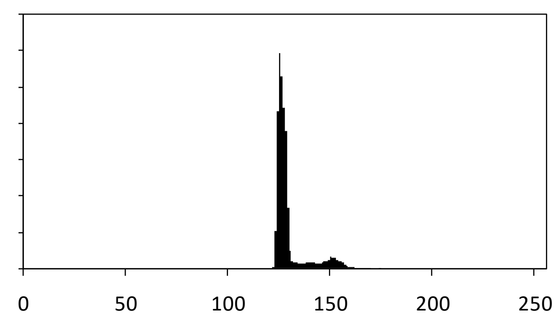
Média: 79,07
Variância: 62,14



$I_{nova} = I + 100$



Média: 129,07
Variância: 62,14

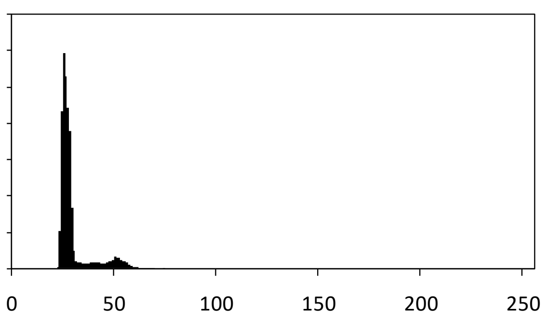


Alterando Ganho...

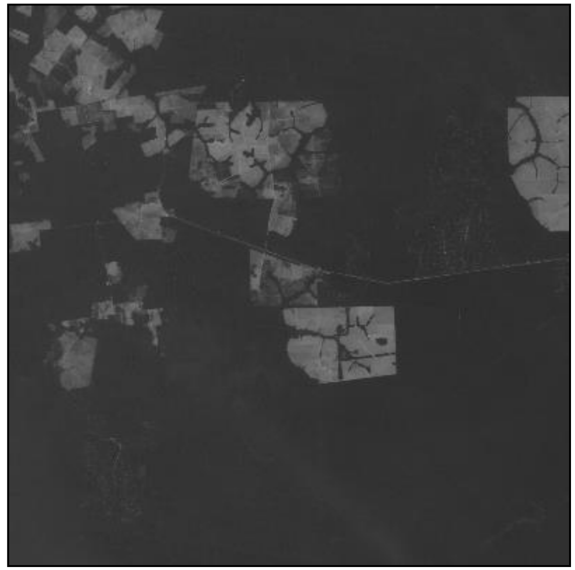
Banda TM3/Landsat

Imagem original (I)

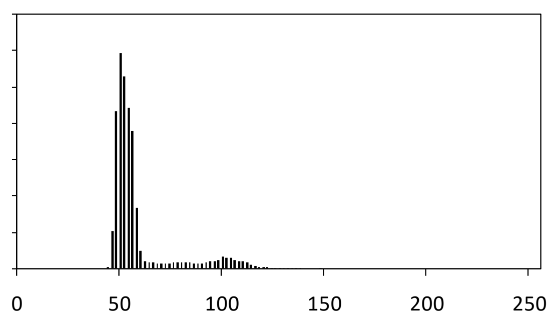
Média: 29,07
Variância: 62,14



$I_{nova} = 2*I$

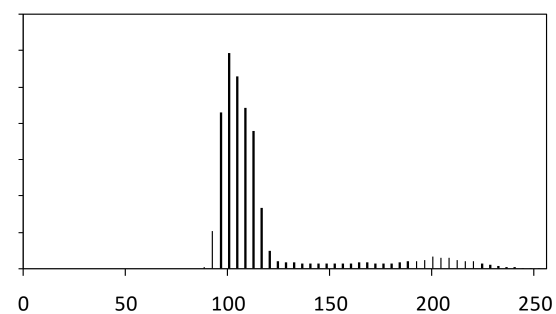


Média: 58,14
Variância: 248,55



$I_{nova} = 4*I$

Média: 116,29
Variância: 994,21

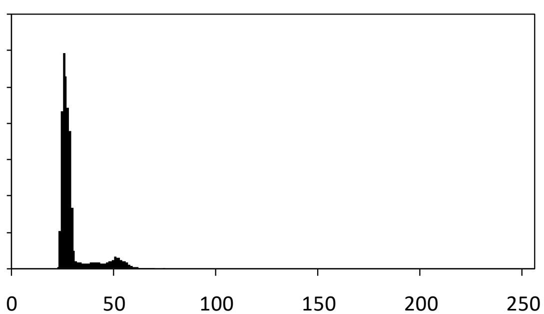


Alterando Ganho e Offset...

Banda TM3/Landsat

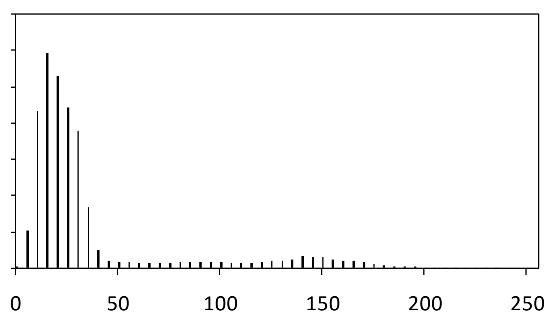
Imagem original (*I*)

Média: 29,07
Variância: 62,14



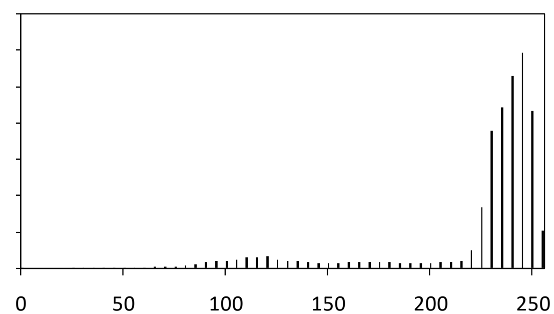
$I_{nova} = 5*I - 110$

Média: 35,36
Variância: 1553,45



$I_{nova} = -5*I + 370$

Média: 224,64
Variância: 1553,45



Aplicações em Imagens

- alterar brilho (média)
- alterar contraste (variância)

$$I_{nova} = gI + o$$

Exemplo 1: Tem-se uma imagem qualquer com média 100 e variância 150. Deseja-se aumentar o contraste dessa imagem, aumentando-se sua variância para 600. Qual deve ser o ganho aplicado nessa imagem? Qual será a média da imagem após a aplicação desse ganho?

$$Var(I_{nova}) = g^2 Var(I)$$

$$600 = g^2 150$$

$$g^2 = \frac{600}{150}$$

$$g = \sqrt{4} = 2$$

$$E(I_{nova}) = gE(I)$$

$$= 2 \times 100 = 200$$

Aplicações em Imagens

- alterar brilho (média)
- alterar contraste (variância)

$$I_{nova} = gI + o$$

Exemplo 2: Tem-se uma imagem qualquer com média 100 e variância 150. Deseja-se aumentar o contraste dessa imagem, aumentando-se sua variância para 600, sem alterar seu brilho (ou seja, mantendo a média em 100). Quais devem ser o ganho e o offset aplicados nessa imagem?

$$Var(I_{nova}) = g^2 Var(I)$$

$$600 = g^2 150$$

$$g^2 = \frac{600}{150}$$

$$g = \sqrt{4} = 2$$

$$E(I_{nova}) = gE(I) + o$$

$$100 = 2 \times 100 + o$$

$$o = 100 - 200 = -100$$

$$\boxed{I_{nova} = 2I - 100}$$

Aplicações em Imagens

Observações:

- A aplicação de um ganho e um offset sobre uma imagem representada por inteiros como, por exemplo, imagens de 8 bits (256 níveis de cinza), pode resultar em valores não inteiros.

  Exemplo: $I_{nova} = 1,29 \times I - 45,7$

  Se $I = 78$ então $I_{nova} = 54{,}92$

  Este resultado pode ser convertido para inteiro por truncamento ou por arredondamento, ou seja, para 54 ou 55 respectivamente

- O resultado pode estar fora do escopo permitido para aquele tipo de imagem

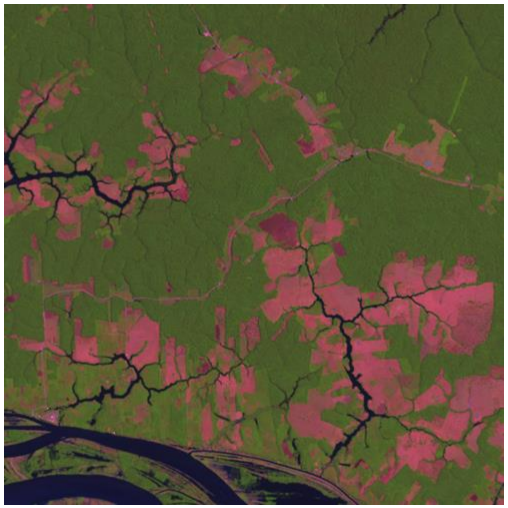
  Se $I = 249$ então $I_{nova} = 275{,}51$

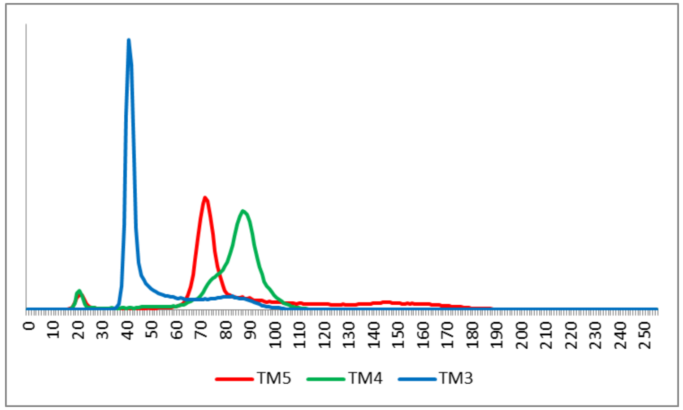
  Se $I = 10$ então $I_{nova} = -32{,}8$

  Geralmente, estes resultados são "saturados" no zero (se negativo) ou 255 (se maior que 255).

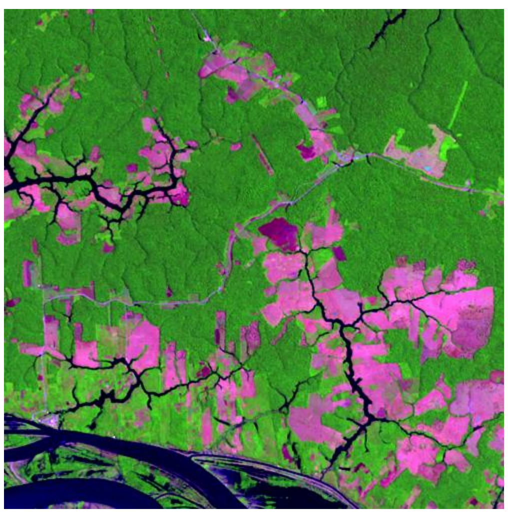
- Nesses casos, os valores de média e variância da imagem resultante podem não corresponder aos valores teóricos.

Aplicações em Imagens

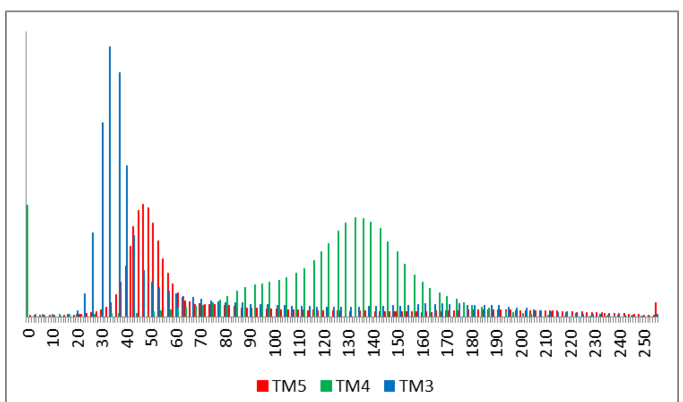




	Min	Max	Média	Desv.Pad.
TM5	8	235	88,10	34,30
TM4	15	145	81,47	16,95
TM3	32	212	51,28	16,09



	ganho	offset
TM5	1,903	-89,440
TM4	3,400	-163,200
TM3	3,355	-104,013



Teórico	Min	Max	Média	Desv.Pad.
TM5	-74,22	357,76	78,22	65,27
TM4	-112,20	329,80	113,81	57,64
TM3	3,36	607,30	68,04	53,98

Real	Min	Max	Média	Desv.Pad.
TM5	0	255	80,29	61,44
TM4	0	255	118,19	44,04
TM3	3	255	67,75	53,82