What did you learn?

> 一些密码学算法的具体实现 Cryptographic Implementation Details

Number 15: Key generation, encryption and decryption algorithms for RSA-OAEP and ECIES.

1. RSA-OAEP

1.1 RSA

略

1.2 OAEP

Optimal Asymmetric Encryption Padding 它是与非对称加密（通常是 RSA）一起使用的填充方案。它可以给确定性加密方案带来一些随机性。当与 RSA 一起使用时，组合方案被证明是 IND-CCA 安全的。

令

- f 是一个 k 比特的陷门单向置换（trapdoor one-way permutation）： $f : 0,1^k \to 0,1^k$
- m 是一个 n 比特的消息
- G, H 是两个伪随机函数，其中 $G : 0,1^s \to 0,1^{n+t}, H : 0,1^{n+t} \to 0,1^s$，$where\ k = n + t + s$
- R 是一个 s 比特的随机数: $R \xleftarrow{\$} 0,1^s$

Encryption: 计算 k 比特密文的过程如下：

$$E(m) = f_{pk}((m||0^t) \oplus G(R)||R \oplus H((m||0^t) \oplus G(R)))$$

Decryption: 通过陷门解密：

$$D(c) = f_{sk}(c) = (m||0^t) \oplus G(R)||R \oplus H((m||0^t) \oplus G(R))$$

然后

1. 令前 $n + t$个比特为 $T : T = (m||0^t) \oplus G(R)$，剩下的 s 比特为 $S : S = R \oplus H((m||0^t) \oplus G(R))$
2. R 可以根据 $R = S \oplus H(T)$ 计算出来
3. 接着计算 $m||0^t = T \oplus G(R)$
4. 可以通过 n 位消息 m 后面是否正好有 t 个 0 来验证有效性。如果有效，则删除前 t 位并输出 m。

在实际应用中，我们分别用 RSA 加密和解密函数来代替 f_{pk} 和 f_{sk}。

2. ECIES

Elliptic Curve Integrated Encryption Scheme

> 是 ElGamal 加密方案在椭圆曲线上的一种变体

2.1 Elliptic Curve

定义在素数域 F_q，选择一个点 P 并拥有素数阶 n 略（看NO.12）

2.2 ECIES

ECIES 经常与一个对称加密方案和一个 MAC 方案一起使用。

- symmetric encryption scheme : $Enc_k(m) = c, Dec(c) = m$
- MAC scheme : $MAC_k(m) = t, Ver(t, m) = T/F$
- Key Derivation Function : $KDF(s_1, s_2) = (k_{enc}, k_{MAC})$，其中 s_1, s_2 是俩种子

Key Generation:

1. 选择一个随机整数 $d \in [1, n - 1]$
2. 计算一个新的点 $Q = dP$
3. 公钥是 Q，私钥是 d

Encryption:

1. 选择一个随机整数 $k \in [1, n - 1]$
2. 计算 $R = kP, z = kQ$， Z 不能是 ∞
3. 计算 $(k_1, k_2) = KDF(x_Z, R)$，其中 x_Z 是 Z 的 x 坐标
4. 计算 $c = Enc_{k_1}(m)$， $t = MAC_{k_2}(c)$
5. 输出密文 (R, c, t)

Decryption:

1. 验证 R 是否有效。通过将 R 代入曲线中可以轻松完成此操作。

2. 计算 $Z' = dR$
3. 计算 $(k'1,k'2)=KDF(x{Z'},R)，其中x{Z'}是Z'的x$ 坐标
4. 验证 $Very(t,c)$
5. 解密 $m' = Dec_{k'_1}(c)$
6. 输出明文 m'

正确性：$Z' = dR = d(kP) = k(dP) = kQ = Z$

Number 16: Describe the key generation, signature and verification algorithms for DSA, Schnorr and RSA-FDH.

1. Digital Signature Scheme (DSA)

> 也叫 Digital Signature Standard (DSS)

安全性基于计算离散对数的困难性。此外，没有在标准模型下的已知证明。

1.1 Domain Parameter Generation

1. 选择一个素数 p，其中 $2^{L-1} < p < 2^L$，L 是 64 的倍数，且 $512 \leq L \leq 1024$。
2. 选择 $p-1$ 的素因数 q，其中 $2^{159} < q < 2^{160}$。
3. 计算 q 阶子群的生成元 g：选择一个随机整数 r，其中 $1 < r < p-1$，令 $g = r^{(p-1)/q} \ mod \ p$ 且 $g \neq 1$。

> 了解即可

1.2 Key Generation

1. 选择一个随机整数 x，其中 $0 < x < q$。
2. 计算 $y = g^x \ mod \ p$。

公钥是 y，私钥是 x。

1.3 Signing

1. 选择一个随机整数 k，其中 $0 < k < q$。
2. 计算 $r = (g^k \ mod \ p) \ mod \ q$。
3. 计算 $s = k^{-1} \cdot (H(m) + x \cdot r) \ mod \ q$，其中 $H(m)$ 是消息 m 的哈希值（SHA-1）。

对消息 m 的签名是 (r,s)。

1.4 Verification

1. 计算 $u_1 = H(m) \cdot s^{-1} \ mod \ q$。
2. 计算 $u_2 = r \cdot s^{-1} \ mod \ q$。
3. 计算 $v = (g^{u_1} \cdot y^{u_2} \ mod \ p) \ mod \ q$。
4. 如果 $v = r$，则签名有效。

1.5 Correctness

$$v = g^{u_1} \cdot y^{u_2} = g^{H(m)\cdot s^{-1}} \cdot g^{x \cdot r \cdot s^{-1}} = g^{H(m)\cdot s^{-1} + x\cdot r\cdot s^{-1}} = g^{(H(m)+x\cdot r)\cdot s^{-1}} = g^k = r$$

2. Schnorr Signature Scheme

Schnorr 签名是一种重要的基于 DLP 的签名方案。它适用于任何素数阶群，并且其安全性在 DL 假设下的随机预言模型中得到了证明。

2.1 Domain Parameter Generation

1. 选择一个素数 p
2. 选择一个 $p-1$ 的素因数 q
3. 选择 q 阶子群的生成元

2.2 Key Generation

1. 选择一个随机整数 x，其中 $0 < x < q$
2. 计算 $y = g^x \ mod \ p$

公钥是 y，私钥是 x

2.3 Signing

1. 选择一个随机整数 k，其中 $0 < k < q$
2. 计算 $a = g^k \ mod \ p$
3. 计算 $r = H(m||a)$
4. 计算 $s = (k + x \cdot r) \ mod \ q$

对消息 m 的签名是 (r,s)

2.4 Verification

1. 计算 $v = g^s \cdot y^{-r} \ mod \ p$
2. 如果 $v = a$，则签名有效

2.5 Correctness

$$v = g^s \cdot y^{-r} = g^{k+x \cdot r} \cdot g^{-r \cdot x} = g^k \cdot g^{x \cdot r} \cdot g^{-r \cdot x} = a$$

3. RSA-FDH

RSA-FDH (full domain hash)是一种基于 RSA 的签名方案，遵循 **hash-then-sign** paradigm。它利用哈希函数（哈希函数的输出范围等于 RSA 模数）为普通 RSA 签名方案生成看起来随机的输出。因此，它可以防止对普通 RSA 签名方案的代数攻击，并且能够对任意长度的消息进行签名。但在实践中很难创建这样的哈希函数。 RSA-FDH 可以在随机预言模型中证明是 EU-CMA 安全的。

3.1 Key Generation

1. 选择两个大素数 p, q，计算 $N = p \cdot q$
2. 选择一个整数 e，其中 $1 < e < \phi(N)$ 且 $gcd(e, \phi(N)) = 1$
3. 计算 $d = e^{-1} \ mod \ \phi(N)$

公钥是 (N, e)，私钥是 (d, p, q)

3.2 Signing

1. 计算 $s = H(m)^d \ mod \ N$

对消息 m 的签名是 s

3.3 Verification

1. 计算 $s^e \stackrel{?}{=} H(m) \ mod \ N$

4. Correctness

$$s^e \ mod \ N = H(m)^{d \cdot e} \ mod \ N = H(m)^1 \ mod \ N = H(m)$$

Number 17: Describe and compare the round structure of DES and AES.

DES 与 AES 都属于迭代分组密码（iterated block ciphers），特点：

- 通过重复使用简单的轮函数获得安全性
- 轮数 r 可变，一般 r 越大，安全性越高
- 每轮的轮密钥都是主密钥通过 key schedule 生成的
- 轮加密是一个可逆的过程，注意轮函数本身n不一定是可逆的

1. **DES**

1. 本质属于 Feistel 网络

$$L_{i+1} = R_i \ R_{i+1} = L_i \oplus F(R_i, K_i)$$

2. 轮函数 F 本身不需要可逆，我们只需要使用相反顺序的轮密钥来解密即可；加解密使用相同的操作
3. 参数：
    - 轮数：16
    - 分组长度：64 bits
    - 密钥长度：56 bits
    - Feistel 迭代之前和之后执行一次permutation
4. 轮函数操作（具体不写，没意思）：
    - Expansion Permutation
    - Round Key Addition
    - Splitting
    - S-Box
    - P-Box

2. **AES**

1. 不依赖于 Feistel 网络，而是使用了 SPN（Substitution-Permutation Network）
2. 加密和解密操作不同，基于 F_2^8 上的有限域运算
3. 参数：
    - 轮数：10/12/14
    - 分组长度：128 bits
    - 密钥长度：128/192/256 bits
4. 轮函数操作（具体不写，没意思）：
    - SubBytes

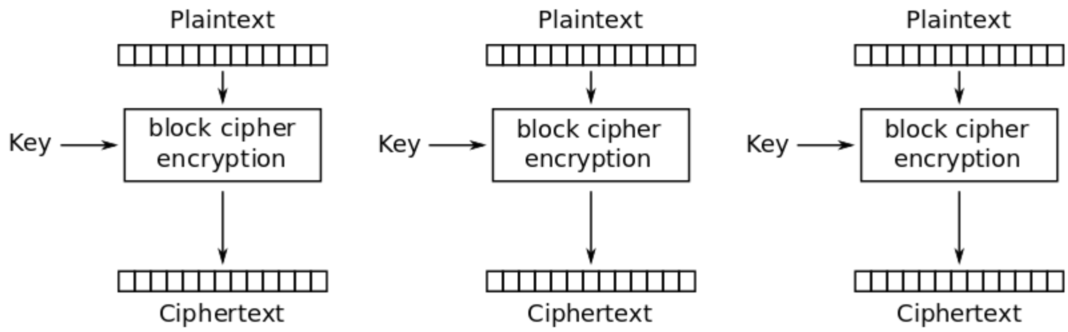
- ShiftRows
- MixColumns
- AddRoundKey

Number 18: Draw a diagram (or describe) the ECB, CBC and CTR modes of operation

密码学必学内容，具体自己看对应链接，这里只简单过一下

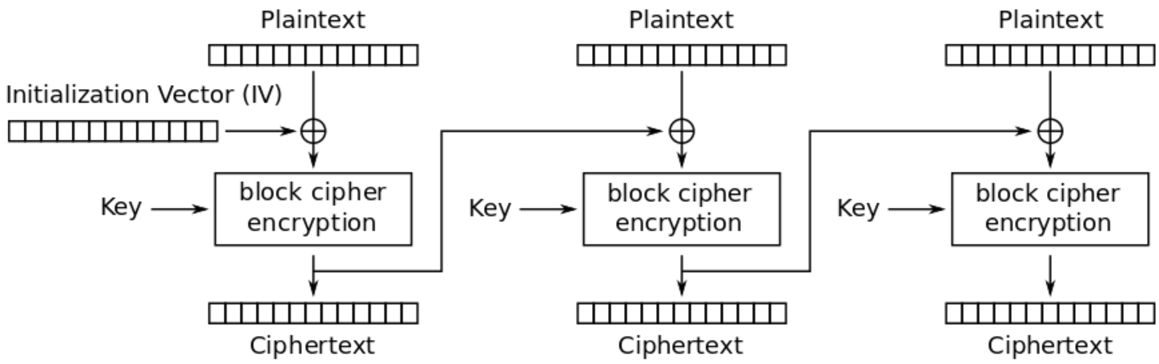
分组密码可以解决一个块的加密问题，而**操作模式**（Modes of operation）可以解决多个块的加密问题。

ECB 明文被分为 m 个块，每个块使用相同的密钥单独加密，但重复的明文块会产生相同的密文块.



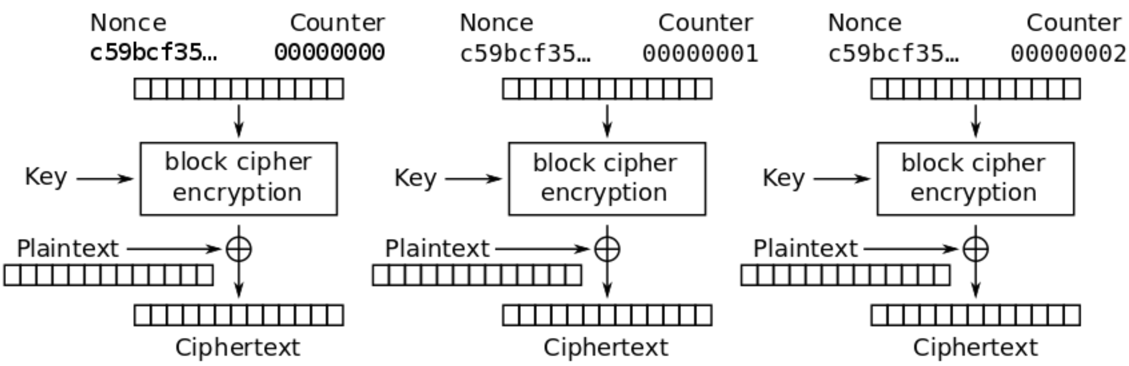
Electronic Codebook (ECB) mode encryption

CBC CBC 模式消除了 ECB 模式的局限性。每个明文在加密之前都与先前的密文进行异或，其中第一个明文块与随机初始化向量 (IV) 进行异或。CBC是实践中最常用的模式。



Cipher Block Chaining (CBC) mode encryption

CTR 它在某种意义上就像流密码。 CTR 模式通过重复加密"计数器"的连续值来生成密钥流。



Counter (CTR) mode encryption

p.s.：一些操作模式除了保证明文的机密性之外，还保证其真实性。有关更多信息，请参阅 AEAD 模式。

Number 19: The Shamir secret sharing scheme.

如果我们有一个秘密 S 和 n 个参与方，我们可以将 S 分成 n 个部分并将其分发给各个参与方。秘密可以以这样的方式划分：可以设置阈值 k，使得当秘密 S 的 k 部分已知时，可以计算整个秘密。如果 S 的 $k-1$ 或更少部分已知，则无法计算 S。该方案称为 (k,n) threshold scheme。

以一个例子说明： $S=1425,\ n=5,\ k=3$

首先确定多项式的阶数（order），即 $k-1$，然后随机选取系数，即随机选取a_1, a_2，例如：

$$f(x) = S + a_1x + a_2x^2 = 1425 + 64x + 112x^2$$

然后可以计算 n 个点：

$$f(1) = 1425 + 64 + 112 = 1601\ f(2) = 1425 + 128 + 448 = 2001\ f(3) = 1425 + 192 + 1008 = 2625\ f(4) = 1425 + 256 + 1792 = 3473\ f(5) = 1425 + 320 +$$

然后将这些点分发给 n 个参与方。

解密的话，只需要 k 个点即可，然后使用拉格朗日插值法或者列线性方程组即可得到多项式，最后得到 S。

$$(x_0, y_0) = (2, 2001), (x_1, y_1) = (3, 2625), (x_2, x_3) = (5, 4545)$$

Computing 3 Lagrange Polynomials gives

$$l_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 5$$

$$l_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 5$$

$$l_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1$$

$$\sum_{j=0}^{2} y_j l_j(x) = 112x^2 + 64x + 1425.$$

> 听不懂这儿的基本可以告别密码学了

Number 20: How are Merkle-Damgaard style hash functions constructed?

英文教材里基本有，这里简单说一下。

Merkle-Damgaard (MD) 哈希函数是通过扩展抗碰撞压缩函数的域而构建的哈希函数。即，将一个小的压缩函数扩展成一个安全变长的哈希函数

1. Secure Hash Function

安全哈希函数 h 的特点：

- Pre-image resistant : 给定 $h(x)$，计算 x 是困难的
- Second pre-image resistance : 给定 x，计算 y, 使得 $h(x) = h(y)$ 是困难的
- Collision Resistance: 找到 x, y，使得 $h(x) = h(y)$ 是困难的

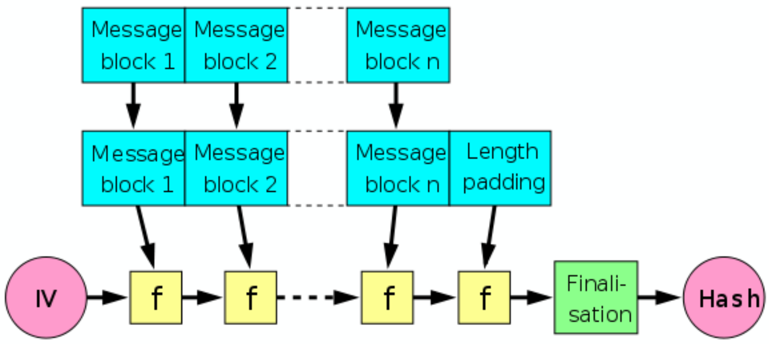
2. Compression Function

$$h : 0,1^n \times 0,1^r \rightarrow 0,1^n$$

顾名思义就是把 $n + r$ 位的输入压缩成 n 位的输出，当然也是 Collision Resistance 的。可以理解为固定输入长度的哈希函数。

3. Merkle-Damgaard hash function Construction

将 “固定输入长度” 变为 “变长输入长度”，维基百科截下来的图：



教材上截下来的图：

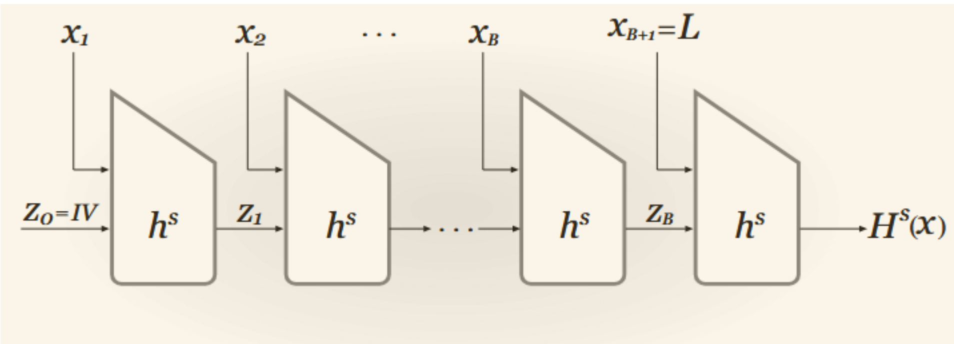


FIGURE 5.1: The Merkle–Damgård transform.

输入 M 被分成 n 个块 $M_1, M_2, \ldots, M_m$ ，然后通过迭代的方式计算哈希值：

$$S_0 = IV \qquad i = 0, \cdots m-1 \ S_{i+1} = f(S_i, M_i) \ h(M) = S_m$$

MD 结构最重要的是，如果压缩函数是抗碰撞的，那么整体结构也是抗碰撞的

P.S. : 注意到上图有个 “finalisation” 阶段，这个阶段是为了防止长度扩展攻击（length extension attack）

> 如果 N 是一个块，且已知 $h(M) = x$ ，那么可以通过 $h(M||N) = f(x, N)$ 轻易计算 $M||N$ 的哈希值