What did you learn?

> 密码学一些基本的工具

Number 9: What are Shannon's definitions of entropy and information?

信息论是由香农在1948为了信号处理提出来的，本章主要介绍其中两个重要概念：**熵**（entropy）和**信息**（information）。

1. 熵

熵是一种评估一个或多个变量**不确定性**的度量。

> 举个例子：一个原批的发言记录大概率是"原神启动"或者"原神怎么你了"，不确定性低，熵小；而一个随机的发言记录，不确定性高，熵大。

香农熵（Shannon's Entropy）的定义如下：

$$H = -\sum_i p_i \log_b p_i$$

其中，p_i是第i个消息出现的概率，在计算机科学中，一般取$b = 2$

假如现在 4 个原批，4个正常人，那么熵为：

$$H_{\text{原批}} = -\sum_{i=1}^{4} 1 \log_2 1 = 0 \ H_{\text{正常人}} = -\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} = 2$$

这个结果也符合我们的直觉：原批的熵小，正常人的熵大。

2. 信息

1950年提出的信息定义如下： " Information is a measure of one's freedom of choice when one selects a message."

> "当一个人选择一条消息时，信息是衡量一个人选择自由度的标准。"

举个例子，还是4个原批4个正常人，如果给定一个回答——"甘雨的"履虫"效果是施放山泽麟迹后30秒内的第一次霜华矢，无需蓄力即可施放。" 那我们基本可以判断这个回答来自原批，相反，如果是其它知识点，那么我们就难以判断了。 因此我们可以说原神的包含了更多的信息（低自由度），随机回答则包含更少的信息（高自由度）。

那么信息和熵的关系是啥？ 我们扩展熵的定义，给出条件熵（Conditional Entropy）的定义：

$$H(Y|X) = \sum_{x \in X} p(x) H(Y|X = x)$$

熵是变量的不确定性，因此，条件熵的含义实际上是：给定"线索(clue)"（条件）X 时 Y 的不确定性。

当X只包含Y的一点信息时，给了X仍然很难确定Y，条件熵很大，即"**X并没有显著降低Y的不确定性**"；反之，如果X包含Y的基本信息，那么当给定X时Y的熵预计会很低。因此，条件熵可以被视为对**X所拥有的Y信息**的理性测量！

另一个重要测量标准被称为互信息（Mutual Information），它是两个变量之间相互依赖性的度量。定义它的一种方法是给定条件时的熵（不确定性）损失：

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

3. 密码学例子

信息论的概念广泛应用于密码学中。一个典型的例子是将密码过程视为一个通道（channel），明文和密文分别作为输入和输出。

> 因此测信道分析（side channel analysis）得益于信息论的使用。

Number 10: What is the difference between the RSA and strong-RSA problem?

1. RSA问题

$$N = pq, \quad \phi(N) = (p-1)(q-1) \ e, d \quad s.t. \quad ed \equiv 1 \mod \phi(N) \ \text{公钥} = (N, e), \quad \text{私钥} = (N, d) \ C = m^e \mod N, \quad M = c^d \mod N$$

对手可以窃听 C 并且可以知道公钥 (n, e)，但是要计算 M，对手必须找到 n 的因子。如果选择了合适的 n，这会是一个非常难解决的问题。

2. Strong-RSA问题

强 RSA 假设与 RSA 假设的不同之处在于，对手可以选择（奇数）公共指数 $e \geq 3$，对手的任务是在给定密文$C = M^e \mod N$的情况下计算明文M，

> 这个假设用脚想都知道解起来肯定比一般的RSA简单，所以这个问题被称为“强RSA问题”。

Number 11: What are the DLP, CDH and DDH problems?

这块内容英文教材基本看过了，这里简单总结一下。

1. The Discrete Logarithm Problem (DLP)

令 G 是一个Abelian群，g 是 G 的生成元，h 是 G 中的一个元素。DLP 问题是找到一个整数 x 使得 $g^x = h$。

> x is called the discrete logarithm of h with base g

2. The Computational Diffie-Hellman Problem (CDH)

给定 G, g, g^a, g^b，计算 g^{ab}。

> 如果我们解决了DLP，那么肯定可以解决CDH。$g^a \stackrel{DLP}{\rightarrow} a, (g^b)^a \rightarrow g^{ab}$ 所以，DLP起码和CDH一样难。DLP is at least as hard as CDH.

3. The Decisional Diffie-Hellman Problem (DDH)

给定 G, g, g^a, g^b, g^c，判断 $g^{ab} = g^c$ 是否成立。

另外一种表示方法：给定 G, g, g^a, g^b, T_x，假设T_0是一个随机的群元素，$T_1 = g^{ab}$，x 随机取自$0, 1$，find x。

> 如果我们可以解决DDH（注意只需要判断x的正确率大于 $\frac{1}{2}$ 就行），这样就意味着即使算不出 g^{ab}，也一定会泄露 g^{ab} 的一些信息。 同样的道理，如果我们解决了CDH，那么肯定可以解决DDH。(都能算出来了还判断不了相不相等？) 所以，CDH起码和DDH一样难。CDH is at least as hard as DDH.

总结：DLP is the most hard, then CDH and then DDH.

Number 12: What is the elliptic curve group law?

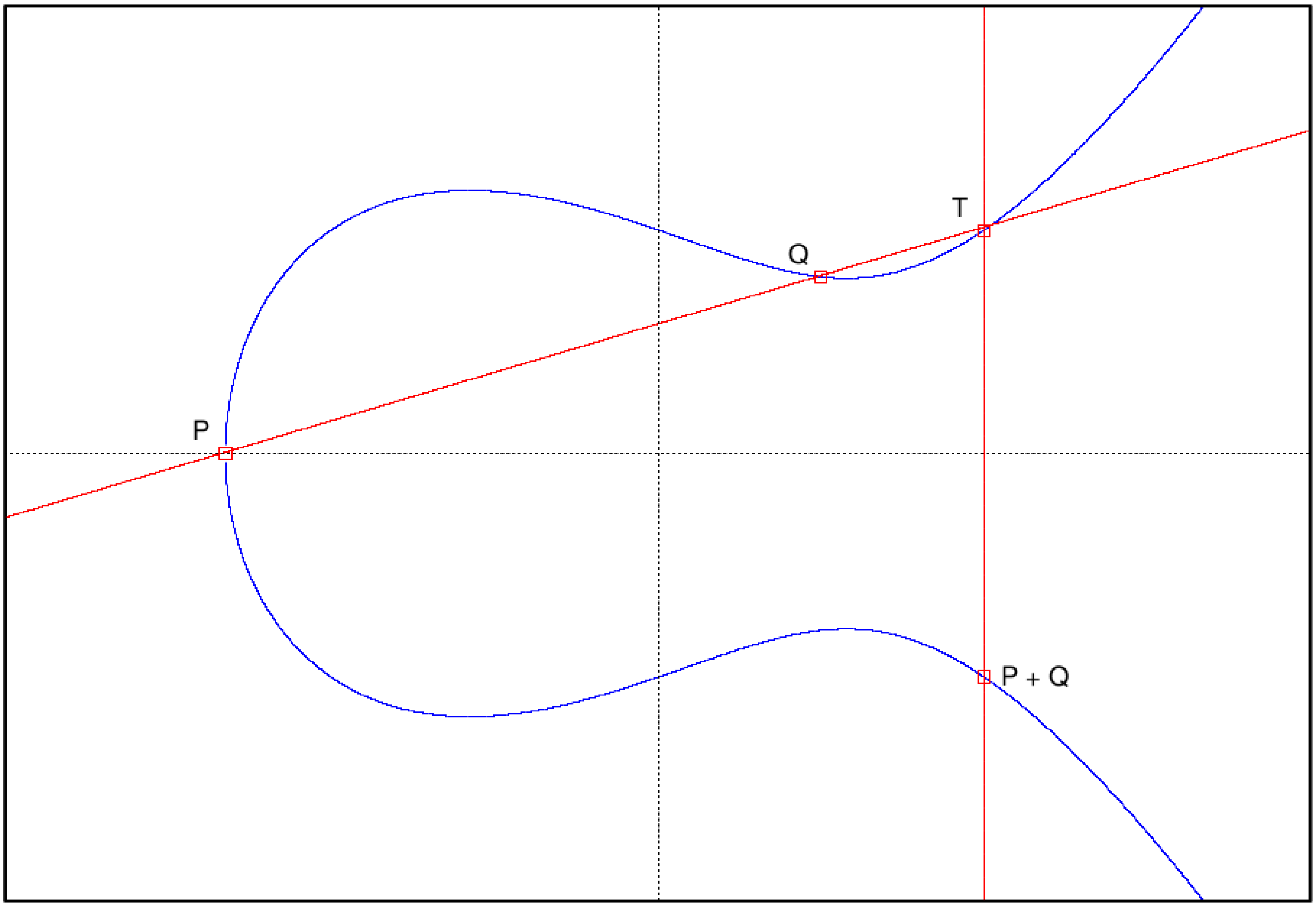
仍然只是简单总结一下：

椭圆曲线是一个二元三次方程，但是我们一般采用 Weierstrass 形式：

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

其中 $a, b \in \mathbb{F}_p$，$4a^3 + 27b^2 \neq 0$。

椭圆曲线的加法用一张图足矣



Number 13: Number 13: Outline the use and advantages of projective point representation.

1. What is a projective point?

什么是投影点?

令 c, d 为正整数，K 是一个域（field，特征不为 2 或 3），$K^3 \backslash 0,0,0$上存在一个等价关系"$\sim$"：

$$(X_1, Y_1, Z_1) \sim (X_2, Y_2, Z_2) \; if \; \exists \lambda \in K^* \quad s.t. \quad X_1 = \lambda^c X_2, Y_1 = \lambda^d Y_2, Z_1 = \lambda Z_2$$

包含$(X, Y, Z) \in K^3 \backslash 0,0,0$ 的等价类为:

$$(X : Y : Z) = (\lambda^c X, \lambda^d Y, \lambda Z) : \lambda \in K^*$$

现在我们有了投影点 $(X : Y : Z)$ 和它的表示形式 (X, Y, Z)。

上面是通用格式，我们一般采用 Jacobian 坐标系，其中 $Z \neq 0$，在这种表示中，投影点 $(X : Y : Z)$ 对应于仿射点(affine point) $(\frac{X}{Z^2}, \frac{Y}{Z^3})$。

2. What are the advantages to using projective point representation?

投影点表示可以提高计算效率，因为它可以减少计算中除法的次数。

> 场反演（field inversion）是计算中最慢的操作之一。

计算开销对比如下：

Format	Doubling	Addition
Affine	1*I*, 2*M*, 2*S*	1*I*, 2*M*, 1*S*
Jacobian	4*M*, 4*S*	12*M*, 4*S*

Operation counts for point addition and doubling on $y = x^3 - 3x + b$. *I = inversion, M = multiplication, S = squaring.*

消除inversion算法，代价是增加了一些乘法和加法，但是这些操作在计算机上运行的代价要小得多。

p.s.：缺点是可能在实现中泄露一些额外信息？？

Number 14: Number 14: What is a cryptographic pairing?

1. Pairing

一个 **pairing** 是一个映射 $e : G_1 \times G_2 \rightarrow G_3$，其中 G_1, G_2, G_3 是三个循环群，生成元分别是g_1, g_2, g_3，阶为 q，需要满足以下条件：

1. 双线性(**bilinearity**)：$\forall A, B \in G_1, C, D \in G_2 : e(A+B, C) = e(A, C) \cdot e(B, C)\ and\ e(A, C+D) = e(A, C) \cdot e(A, D)$
2. 非简并性(**non-degeneracy**)：$e(g_1, g_2) \neq 1$
3. 有效性(**efficiency**)：e运算可以快速完成

2. Types of pairing

- Type 1: $G_1 = G_2$
- Type 2: $G_1 \neq G_2$，但存在从 G_2 到 G_1 的有效可计算同构，可将 g_2 映射到 g_1。
- Type 3: $G_1 \neq G_2$，且不存在有效可计算同构。

后两个被称为非对称pairing，第一个被称为对称pairing。

3. Warings and Applications

warings: 在Type 1 和 2 中，DDH 问题很容易被解决，只需要计算 $e(g^x, g^y) \stackrel{\$}{=} e(g^z, g)$ 即可。

> 这不代表Type 3是安全的

applications:

- cryptanalysis
- Identity Based Encryption
- Attribute Based Encryption
- Leakage Resilient Cryptography
- $\ldots$

> 它和椭圆曲线也联系密切，后期会讲