



## ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری هفتم

رابطه‌های بازگشتی و توابع مولد

مبحث آزمون ۳

۱. فرض کنید  $a_n$  برابر با تعداد دنباله‌های  $n$  عضوی با اعداد ۱، ۲ و ۳ باشد به طوری که هیچ دو عضو مجاوری با یکدیگر برابر نباشند و عضو اول و آخر دنباله نیز نابرابر باشند. رابطه‌ای بازگشتی برای  $a_n$  بیابید.

۲. نشان دهید  $a_n = 3^n$  جواب رابطه‌ی بازگشتی زیر است:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

۳. تعداد جایگشت‌های  $\pi$  از  $\{1, 2, \dots, n\}$  را بیابید طوری که به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  داشته باشیم:

$$|\pi_i - i| \leq 1$$

۴. یک صفحه‌ی شطرنجی  $n \times n$  را در نظر بگیرید که همه‌ی خانه‌های بالای قطر اصلی آن حذف شده باشند. به چند طریق می‌توان شکل حاصل را با  $n$  مستطیل با مساحت‌های طبیعی و متمایز پوشاند طوری که اضلاع هر مستطیل روی خطوط صفحه‌ی شطرنج باشند؟

۵.  $n+1$  وزنه با وزن‌های  $2^0, 2^1, \dots, 2^n$  در اختیار داریم. می‌خواهیم آن‌ها را یکی یکی بر روی کفه‌های یک ترازوی دوکفه‌ای قرار دهیم، طوری که کفه‌ی سمت راست هیچ‌گاه سبک‌تر از کفه‌ی سمت چپ نشود. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۶. فرض کنید  $f(n, k)$  تعداد دنباله‌های  $a_1, a_2, \dots, a_n$  از اعداد طبیعی ۱ تا  $k$  باشد به طوری که هر یک از  $k$  عدد در دنباله ظاهر شوند و برای هر  $1 \leq i \leq k-1$  اولین  $i$  قبل از اولین  $i+1$  ظاهر شود. رابطه‌ای بازگشتی برای  $f(n, k)$  بیابید.

۷. رابطه‌ی بازگشتی ناهمگن زیر را حل کنید:

$$a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 10 \times 3^{n-2}(n+4)$$

۸. فرض کنید  $a_n$  تعداد اعداد  $n$  رقمی متشکل از ارقام  $\{1, 2, 3, 4\}$  باشد که هیچ کدام از عبارات ۱۲، ۲۱، ۳۳ ظاهر نشود. رابطه‌ای بازگشتی برای  $a_n$  بیابید.

۹. رابطه‌ی بازگشتی زیر را با استفاده از روش معادله‌ی مشخصه حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-2} & n > 2 \\ a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 21 \end{cases}$$

۱۰. فرض کنید  $a_n$  تعداد زیرمجموعه‌هایی از  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  باشد که شامل هیچ دو عدد متوالی‌ای نیستند. رابطه‌ای بازگشتی برای  $a_n$  بیابید.

۱۱. توابع مولد متناظر با دنباله‌های زیر را بنویسید.

(الف)  $1, 2, 3, 4, \dots$

(ب)  $1, 3, 4, 0, 1, 1, 1, \dots$

(ج)  $2, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, \dots$

۱۲. اگر جمله‌ی  $n$  ام دنباله‌ی فیبوناچی را با  $F_n$  نشان دهیم و فرض کنیم جملات دنباله از اندیس یک شروع می‌شوند، ثابت کنید برای هر  $n \geq 2$  داریم

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}.$$

۱۳. با استفاده از توابع مولد، ثابت کنید هر عدد طبیعی را به صورت یکتا می‌توان به شکل جمع تعدادی توان متمایز از ۲ نوشت.

۱۴. رابطه‌ی بازگشتی  $a_n = 2a_{n-1} - 1$  را با شرط اولیه‌ی  $a_1 = 2$  حل کنید.

۱۵. ایلیا از دوست‌داران پروپاقرص تاکو است. او دوست دارد برای یک ماه خود از پیش برنامه‌ی تاکو خوری بریزد. از طرفی او کمی وسواسی است و با توجه به وسواسش می‌خواهد تعداد خاصی از هر یک از انواع تاکو بردارد. او می‌خواهد حداقل ۴ تاکو از نوع د بارباکوآ (با توجه به علاقه‌اش به گوشت بره) و حداکثر ۲ تاکو از نوع د پسکادو (به دلیل علاقه‌ی کمش به ماهی) بخورد. با توجه به علاقه‌ی وافر ایلیا به اعداد رند، دوست دارد تعداد تاکوهای از نوع د کارنه اسادا، مضرب ۵ باشد. او همچنین دوست دارد تعداد تاکوهایی که او از نوع د بیریا می‌خورد، مضرب ۱۹ باشد. فرض کنید او بخواهد به خاطر بودجه‌ی محدودش دقیقاً ۳۰ تاکو در ماه بخورد. به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱۶. سری مولد زیر نشان‌دهنده‌ی چه دنباله‌ای است؟

$$1 + 5x^7 + 10x^8 + 100x^9$$

۱۷. رابطه‌ی بازگشتی زیر را با استفاده از روش تابع مولد حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} & n > 1 \\ a_0 = 2, a_1 = 5 \end{cases}$$

۱۸. فرض کنید  $a_n$  تعداد حالات رنگ‌آمیزی یک جدول  $2 \times n$  با دو رنگ سیاه و سفید باشد، طوری که هیچ دوخانه‌ی مجاوری هر دو به رنگ سیاه نباشند. برای  $a_n$  یک رابطه‌ی بازگشتی با درجه‌ی ثابت پیدا کنید.

۱۹.  $2n$  نفر را دور یک میز چیده‌ایم.  $a_n$  را تعداد روش‌های افراز این  $2n$  نفر به  $n$  زوج می‌نامیم، طوری که با رسم پاره‌خط‌های واصل زوج‌ها، هیچ دوتایی یکدیگر را قطع نکنند. رابطه‌ی بازگشتی برای  $a_n$  بیابید.

۲۰. تابع مولد دنباله‌ی زیر را با فرض  $a_0 = 1$  پیدا کنید:

$$1 + 10x + 6x^2 + x$$