



مسئله‌ی ۱. شمارش

چند رابطه روی یک مجموعه n عضوی با هر یک از ویژگی‌های زیر داریم:

(الف) متقارن؟

(ب) پادتقارنی؟

(ج) نامتقارن؟

(د) غیربازتابی؟

(ه) بازتابی و متقارن؟

(و) پادبازتابی؟

(ز) نه بازتابی و نه پادبازتابی؟

مسئله‌ی ۲. اکثریت مطلق

تعداد روابط ترابایی روی مجموعه n عضوی را به‌دست بیاورید در صورتی که:

(الف) $n = 1$

(ب) $n = 2$

مسئله‌ی ۳. داستان دو رابطه

یک مجموعه A و دو رابطه هم‌ارزی R_1 و R_2 را روی آن در نظر بگیرید. ثابت کنید $R_1 \cup R_2$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A است، اگر و تنها اگر برای هر دو رده هم‌ارزی مانند C_1 و C_2 از R_1 و R_2 که اشتراک آن‌ها ناتهی است، داریم $C_1 \subseteq C_2$ یا $C_2 \subseteq C_1$.

مسئله‌ی ۴. تعداد روابط

تعداد روابط قابل تعریف روی مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ را محاسبه کنید. چند تا از این روابط، رابطه‌ی هم‌ارزی و چند تا رابطه‌ی ترتیب‌جزی هستند. چند تا از روابط فوق هم رابطه‌ی ترتیب‌جزی و هم رابطه‌ی هم‌ارزی هستند.

مسئله‌ی ۵. تقارن شگفت‌انگیز

ثابت کنید اگر R یک رابطه با خاصیت تقارنی باشد، آنگاه R^n نیز خاصیت تقارنی دارد.

مسئله‌ی ۶. اسکای نت

فرض کنید L یک شبکه متناهی و توزیع‌پذیر باشد. ثابت کنید هر عضو L حداکثر یک متمم دارد.

مسئله‌ی ۷. شبکه کامل

مشبکه کامل شبکه‌ای است که هر زیرمجموعه ناتهی آن کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین داشته باشد.

(الف) ثابت کنید مجموعه توانی یک مجموعه با رابطه زیرمجموعه بودن یک شبکه کامل است.

(ب) فرض کنید شبکه (P, \preceq) با عنصر بیشینه u یک مجموعه مرتب جزئی باشد. ثابت کنید اگر هر زیرمجموعه ناتهی P بزرگترین کران پایین در P داشته باشد، در این صورت P یک شبکه کامل است.

مسئله‌ی ۸. شبکه متناهی

ثابت کنید هر شبکه متناهی کامل است.

مسئله‌ی ۹. شبکه و افراز

رابطه‌ی R_1 زیررابطه R_2 است، اگر داشته باشیم:

$$\forall (x, y) \ x R_1 y \rightarrow x R_2 y$$

(الف) ثابت کنید مجموعه تمام روابط هم‌ارزی روی مجموعه S با رابطه زیررابطه بودن تشکیل یک شبکه می‌دهند.

(ب) ثابت کنید این شبکه کامل است.

(ج) این شبکه را برای مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ رسم کنید.

مسئله‌ی ۱۰. ابر مکعب

اگر $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ باشد که p_i ها اعداد اول متمایز هستند و همچنین D_n را مجموعه همه مقسوم‌علیه‌های عدد n تعریف کنیم:

(الف) نشان دهید D_n یک جبر بول است.

(ب) نشان دهید اگر $n \mid p^2$ ، آنگاه D_n دیگر جبر بول نیست.

مسئله‌ی ۱۱. رابطه‌ی هم‌ارزی

فرض کنید R یک رابطه تعریف شده روی مجموعه متناهی A می‌باشد. آیا حاصل $X(Y(Z(R)))$ یک رابطه هم‌ارزی است که در آن X, Y و Z یک جایگشت از بستار متقارن، بستار انعکاسی و بستار تعدی هستند. برای هر مورد که رابطه هم‌ارزی است اثبات ذکر کنید و برای هر موردی که نیست مثال نقض بیاورید.

مسئله‌ی ۱۲. شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری در شبکه

در یک شبکه (lattice) متناهی دو عملگر دودویی \vee و \wedge را به این صورت تعریف می‌کنیم: $a \vee b = \text{LUB}(a, b)$ و $a \wedge b = \text{GLB}(a, b)$. نشان دهید این دو عملگر خاصیت شرکت‌پذیری دارند. شبکه‌ای مثال بزنید که این دو عملگر خاصیت پخش‌ناداشته باشند.

مسئله‌ی ۱۳. متمم در شبکه

یک شبکه (lattice) را در نظر بگیرید که دارای مینیم و ماکزیمم باشد. متمم عنصر x ، عنصر x' است اگر و فقط اگر کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین x و x' به ترتیب ماکزیمم و مینیمم شبکه شود.

۱. شبکه‌ای مثال بزنید که هر عنصر متمم داشته باشد و حداقل یک عنصر باشد که حداقل دو متمم داشته باشد.

۲. نشان دهید اگر شبکه خاصیت توزیع‌پذیری داشته باشد (نسبت به دو عملگر کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین) آنگاه هر عنصر حداقل یک متمم خواهد داشت.

۳. فرض کنید شبکه فوق یک ترتیب کامل باشد. آیا این شبکه دارای خاصیت توزیع‌پذیری می‌باشد؟ چه عناصری در این شبکه دارای متمم هستند.

مسئله‌ی ۱۴. گرامر منظم

آیا زبان $L = \{0^i 1^j \mid i > j > 0\}$ منظم است؟ ادعای خود را ثابت کنید. برای L یک گرامر مستقل از متن طراحی کنید و ثابت کنید زبان این گرامر برابر L است.

مسئله‌ی ۱۵. رشته‌آینه‌ای

یک رشته را آینه‌ای گوئیم اگر رشته با معکوسش برابر باشد. یک گرامر مستقل از متن بسازید که زبان آن تمام رشته‌های آینه‌ای باشد که از $\{0, 1\}$ تشکیل شده باشد. نشان دهید نمی‌توان اتوماتایی ساخت که زبان آن برابر تمام رشته‌های آینه‌ای باشد.

مسئله‌ی ۱۶. گرامر زیبا

برای هر یک از زبان‌های زیر یک گرامر منظم ارائه دهید.

- رشته‌های دودویی که به 1011 ختم می‌شوند.
- رشته‌های دودویی (مبنای ۲) که باقیمانده آن‌ها به ۳ برابر ۲ است.
- رشته‌های دودویی که شامل زیر رشته‌ی 1100 هستند.
- رشته‌های دودویی که شامل زیر رشته‌ی 10 نیستند.

مسئله‌ی ۱۷. منظم بسته

ثابت کنید زبان‌های منظم تحت عملگر اشتراک و اجتماع بسته هستند.

مسئله‌ی ۱۸. ماشین حالت ۴ دبلو دی

برای هر یک از زبان‌های زیر یک DFA یا NFA ارائه دهید.

- رشته‌های دودویی که تعداد فردی رقم دارند.
- رشته‌های در مبنای ۱۰ که به ۲۰ بخش‌پذیرند.
- رشته‌های در مبنای دو که تعداد فردی یک و تعداد فردی صفر دارند.

مسئله‌ی ۱۹. رشته‌های تک‌حرفی

اگر L زبانی تشکیل شده از یک حرف باشد، آیا L لزوماً منظم است؟ آیا L^* لزوماً منظم است؟

مسئله‌ی ۲۰. عبارات بی‌معنا

برای زبان‌های زیر یک عبارت منظم ارائه دهید.

- رشته‌های شامل صفر و یک بدون رشته‌ی تهی.
- رشته‌های شامل تعداد زوجی از یک و صفر.
- رشته‌هایی که تعداد یک‌ها قبل از اولین صفر زوج و تعداد صفرها بعد از آخرین یک فرد باشد.
- رشته‌هایی که تعداد یک‌های آن‌ها مضربی از سه است.

مسئله‌ی ۲۱. خیلی دور، خیلی نزدیک

زبانی را که گرامر مستقل از متن زیر تولید می‌کند، توصیف کنید.

$$A \rightarrow BB|C$$

$$B \rightarrow \bullet B|B\bullet|\#$$

$$C \rightarrow \bullet C\bullet\bullet|\#$$

مسئله‌ی ۲۲. ماشین حساب

برای زبان عبارات ریاضی که شامل چهار عمل اصلی، به همراه پرانتز هستند، یک گرامر مستقل از متن ارائه دهید.