ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری پنجم | مجموعه‌ها و توابع | مبحث آزمون ۲

۱. آرمان تعریف می‌کند که ۲۲، ۱۳ و ۱۵ نفر از دوستانش به ترتیب در مسابقات شطرنج، فیفا و دوتا شرکت داشته‌اند. همچنین ۸ نفر هم در شطرنج و هم در فیفا شرکت کرده‌اند، ۷ نفر هم در شطرنج هم در دوتا، ۶ نفر هم در فیفا هم در دوتا. ۳ نفر از دوستانش نیز در هر سه مسابقه شرکت داشته‌اند. اگر بدانیم هر یک از دوستان او در حداقل یک مسابقه شرکت کرده است، تعداد دوستان آرمان را بیابید.

۲. در یک گروه از دانشجویان n دانشجو وجود دارند که روی 2^{n-1} سوال گسسته فکر کرده‌اند. می‌دانیم به ازای هر دو سوال متمایز از بین این سوالات یک دانشجو وجود دارد که هر دو سوال را حل کرده باشد و یک دانشجوی دیگر وجود دارد که دقیقا یکی از این دو سوال را حل کرده باشد. نشان دهید سوالی وجود دارد که تمام دانشجویان آن را حل کرده باشند.

۳. فرض کنید $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای شامل زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی Ω باشد به طوری که اگر $A, B \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $A - B \in \mathcal{F}$. نشان دهید:

الف) برای هر $A, B \in \mathcal{F}$ داریم $A \cap B \in \mathcal{F}$.

ب) اجتماع شمارا عضو از $\mathcal{F}$ را می‌توان به شکل اجتماع شمارا عضو مجزا از $\mathcal{F}$ نوشت.

ج) اگر $\mathcal{F}$ نسبت به اجتماع شمارا بسته باشد نسبت به اشتراک شمارا نیز بسته است.

۴. تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 20\}$ را بیابید که یا مجموع اعضای آن‌ها و یا تعداد اعضای آن‌ها فرد باشد.

۵. مجموعه‌ی $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ شامل همه‌ی دنباله‌های با طول متناهی از ۰ و ۱ را در نظر بگیرید زیرمجموعه‌ی A از Ω را متناهی‌البعد گوییم هر گاه عدد طبیعی n و مجموعه‌ی $B \subseteq \{0, 1\}^n$ موجود باشند طوری که همه‌ی اعضای A با عضوی از B شروع شوند. به عبارت دیگر:

$$A = \{\omega \in \Omega \mid w = (w_1, \dots, w_m),\ m \geqslant n,\ (w_1 \dots w_n) \in B\}$$

فرض کنید زیرمجموعه‌های متناهی‌البعد $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ از Ω موجود باشند به طوری که:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

نشان دهید مقدار n وجود دارد که $A_n = \emptyset$.

۶. رده‌ی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های Ω را یک «میدان سیگمایی» می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشند:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

همچنین می‌گوییم $\mathcal{F}$ یک «لاندا سیستم» است اگر سه شرط زیر برقرار باشند:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \subseteq B \in \mathcal{F} \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}, \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

نشان دهید کوچک‌ترین لاندا سیستم شامل رده‌ی $\mathcal{F}$ که نسبت به اشتراک بسته باشد یک میدان سیگمایی است.

۷. با فرض شمارا بودن مجموعه‌ی A نشان دهید:

الف) مجموعه‌ی A^2 شمارا است.

ب) برای هر n طبیعی مجموعه‌ی A^n شمارا است.

ج) مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ شمارا است.

۸. برای مجموعه‌های A و B نماد $|A| \leqslant |B|$ به این معنی است که تابعی یک‌به‌یک از A به B وجود دارد. نماد $|A| = |B|$ به این معناست که تابعی یک‌به‌یک و پوشا بین مجموعه‌های A و B موجود است. با توجه به این تعاریف نشان دهید اگر برای دو مجموعه‌ی A و B بدانیم $|A| \leqslant |B|$ و $|B| \leqslant |A|$ آنگاه خواهیم داشت $|A| = |B|$.

۹. مجموعه‌ی A را «مجموع متناهی» گوییم هر گاه مجموع اعضای هر زیرمجموعه‌ی متناهی آن از مقدار ثابت c تجاوز نکند. نشان دهید اگر A مجموعه‌ای مجموع متناهی با اعضای مثبت باشد، آن گاه A شمارا عضو ناصفر دارد.

۱۰. نشان دهید می‌توان شمارا گوی در فضای $\mathbb{R}^n$ یافت به طوری که برای هر دو نقطه‌ی متمایز x, y گوی A شامل x و گوی B شامل y موجود باشند به طوری که:

$$A \cap B = \emptyset$$

۱۱. مجموعه C_0 را برابر مجموعه $[0, 1]$ قرار می‌دهیم. سپس برای ساختن C_1 یک سوم میانی مجموعه C_0 را حذف می‌کنیم. پس از آن برای ساختن C_2 از هر کدام از بازه‌های موجود در C_1 یک سوم میانی را حذف می‌کنیم و به همین شکل ادامه می‌دهیم. مجموعه C_n برای چند n اول در شکل زیر نمایش داده شده است:

$$C_0 = [0, 1]$$

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$\vdots$$

همچنین تعریف می‌کنیم $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. تابعی یک‌به‌یک و پوشا از مجموعه‌ی C به C_0 ارائه دهید.

۱۲. مجموعه‌ی ناشمارای Ω را در نظر بگیرید. تعدادی شمارا عضو از آن را حذف می‌کنیم و مجموعه‌ی جدید را Ω' می‌نامیم. نشان دهید $|\Omega| = |\Omega'|$.

۱۳. رده‌ی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های R^n را «شمارای دوم» گوییم هرگاه بتوان زیرمجموعه‌ی شمارای $\mathcal{F}'$ از $\mathcal{F}$ را یافت به شکلی که هر عضو از $\mathcal{F}$ را بتوان به شکل اجتماع تعدادی (احتمالا بی‌شمار) عضو از $\mathcal{F}'$ نمایش داد.

(الف) نشان دهید $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ در خاصیت بالا صدق می‌کنند اگر به ازای هر عضو $A \in \mathcal{F}$ و هر نقطه‌ی $x \in A$ عضو $B \in \mathcal{F}'$ موجود باشد به طوری که $x \in B, B \subset A$.

(ب) نشان دهید مجموعه‌ی $۲^{\mathbb{R}}$ (مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی) شمارای دوم نیست.

(ج) نشان دهید مجموعه‌ی همه گوی‌های باز در $\mathbb{R}^n$ شمارای دوم است.

۱۴. فرض کنید A مجموعه‌ای از دایره‌ها در فضای $\mathbb{R}^۲$ باشد. نشان دهید:

(الف) اگر دایره‌ها توپر باشند و هیچ دوتایی با یک‌دیگر اشتراک و برخورد نداشته باشند، A شمارا است.

(ب) اگر دایره‌ها توخالی باشند و هیچ دوتایی با یک‌دیگر برخورد نداشته باشند، A می‌تواند ناشمارا باشد.

۱۵. برای مجموعه‌ی A منظور از ۲^A مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های A است. نشان دهید:

(الف) اگر A شمارا باشد، $|A| < |۲^A|$.

(ب) برای هر مجموعه‌ی A، $|A| < |۲^A|$.

۱۶. تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید طوری که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(f(x) + f(y)) = x + f(y)$$

۱۷. فرض کنید $S \subset \mathbb{R}$ مجموعه‌ای متناهی باشد که حداقل ۴ عضو دارد. فرض کنید تابع پوشای غیرهمانی $f : S \to S$ موجود باشد به طوری که برای هر دو عضو متمایز S مثل a, b بدانیم $ab \leqslant f(a)f(b)$. ثابت کنید جمع اعضای S برابر صفر است.

۱۸. تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$$

۱۹. تمام توابع کران‌دار $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$$

۲۰. ثابت کنید برای هر تابع غیرثابت مثل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، اعداد حقیقی x, y موجودند که $f(x + y) < f(xy)$.