ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۰۰

مدرس: دکتر آبام

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری سوم | شمارش | زمان آزمون: ۶ خرداد

اصول شمارش

مسئله‌ی ۱. دنباله صعودی

دنباله‌ای از اعداد ۱ تا ۹ داده شده است. ابتدا سه عدد اول دنباله را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم؛ سپس اعداد سوم، چهارم و پنجم دنباله را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. سپس اعداد پنجم، ششم و هفتم، و در نهایت اعداد هفتم، هشتم و نهم را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. به‌ازای چند دنباله‌ی متفاوت اولیه، دنباله‌ی نهایی به‌صورت مرتب‌شده است؟

مسئله‌ی ۲. مقسوم‌علیه در ترکیبیات

اگر $n = {p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}...{p_k}^{a_k}$ باشد به طوری که p_iها عدد اول باشند، تعداد مقسوم‌علیه‌های n چند تا است؟

مسئله‌ی ۳. کد نامتقارن

چند دنباله دودویی به طول $2 \times n$ وجود دارد که تعداد صفرهایش در n رقم اول برابر با تعداد یک‌هایش در n رقم آخر است؟

مسئله‌ی ۴. شمارش بی‌هدف

چند عدد فرد با ارقام متمایز بین ۳۰۰۰ و ۸۰۰۰ وجود دارد؟

مسئله‌ی ۵. مستطیل پاره پاره

یک مستطیل $m \times n$ را با رسم خطهایی موازی عرض و طول آن، به مربع‌های واحد تقسیم کرده‌ایم. در شکل حاصل، چند مستطیل و چند مربع دیده می‌شود؟

مسئله‌ی ۶. مستطیل سه‌گوش

در مسئله قبل، فرض کنید مربع واحد یکی از گوشه‌های شکل را حذف کنیم. در شکل حاصل چند مربع و چند مستطیل دیده می‌شود؟

مسئله‌ی ۷. تجمع زوجین

در چند زیرمجموعه از $\{1, 2, ..., n\}$، مجموع اعضا عددی زوج است؟

مسئله‌ی ۸. صف اتوبوس

تعداد دنباله‌های $A_۱, A_۲, , A_n$ را بشمارید، که در آن A_i مجموعه است و شرط‌های زیر برقرار می‌باشند:

$$A_i \subseteq \{۱, ۲, ..., n\}$$
$$i < j \Rightarrow A_i \subseteq Aj$$

مسئله‌ی ۹. دنباله‌ی غیرنزولی

تعداد دنباله‌های غیرنزولی (یعنی دنباله صعودی اما نه لزوما اکیدا صعودی) به طول حداکثر n را پیدا کنید که از اعداد $۱, ۲, \cdots, n$ تشکیل شده‌اند. برای $n = ۳$ دنباله های $\prec ۱, ۲, ۳ \succ$، $\prec ۱, ۱ \succ$، $\prec ۱, ۲, ۲ \succ$ و $\prec ۳ \succ$ نمونه‌هایی از دنباله‌های غیرنزولی به طول حداکثر ۳ هستند.

مسئله‌ی ۱۰. توپ و ظرف

فرض کنید n توپ و m ظرف داریم و می‌دانیم $n \leqslant ۲m$ است. می‌خواهیم تعداد حالات قرار گرفتن توپ‌ها در ظرف‌ها را بیابیم که در هر ظرف حداکثر ۲ توپ قرار گیرد. این مسئله را برای چهار حالت زیر با ذکر دلیل حل کنید.

۱. توپ‌ها یکسان و ظرف‌ها یکسان

۲. توپ‌ها یکسان و ظرف‌ها متمایز

۳. توپ‌ها متمایز و ظرف‌ها یکسان

۴. توپ‌ها متمایز و ظرف‌ها متمایز

تناظر یک به یک، تعداد جواب‌های معادله، دوگانه شماری

مسئله‌ی ۱۱. دو دوگانه شماری

در یک n ضلعی محدب تمام قطرها را رسم کرده‌ایم. اگر هیچ سه قطری همرس نباشند، n ضلعی به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

مسئله‌ی ۱۲. عبارات شگفت‌انگیز

درستی عبارات زیر را ثابت کنید:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱}$$
$$k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-۱}{k-۱}$$
$$\binom{m}{k} \times \binom{n}{m} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{m-k}$$

مسئله‌ی ۱۳. واندرموند بزرگ

رابطه‌ی واندرموند را اثبات کنید:

$\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}=\binom{m+n}{p}$

مسئله‌ی ۱۴. جمع مربعات

با استفاده از دوگانه شماری نشان دهید $1^2+2^2+\cdots+n^2=C_2^{n+1}+2C_3^{n+1}$.

مسئله‌ی ۱۵. تعداد جواب‌های معادله

تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=1394$ را بدست آورید که حداقل دو تا از متغیرها با یکدیگر برابر باشند.

اصل شمول و عدم شمول

مسئله‌ی ۱۶. شمارش الکی

چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که مقسوم‌علیه حداقل یکی از اعداد 12^{50}، 45^{20} و 50^{100} باشد؟

مسئله‌ی ۱۷. همسایگی باینری

در چند رشته باینری n رقمی، تمام صفرها و یا تمام یک‌ها مجاورند؟

مسئله‌ی ۱۸. پریش

یک پریش یک جایگشت از $1, 2, \ldots, n$ است که هیچ عنصری سر جای خودش نیامده باشد. تعداد پریش‌ها را بدست آورید.

روابط بازگشتی

مسئله‌ی ۱۹. عبارات منظم

فرض کنید A_n تعداد کلمات n حرفی از a, b, c باشد به طوری‌که از هر سه حرف متوالی، حداقل یکی a باشد. رابطه بازگشتی آن را بیابید.

مسئله‌ی ۲۰. عبارات نامنظم

فرض کنید A_n تعداد کلمات n حرفی از a, b, c باشد به طوری‌که در آن‌ها عبارت ab ظاهر نشده است. رابطه بازگشتی آن را بیابید.

مسئله‌ی ۲۱. مثلث‌بندی

تعداد روش‌های مثلث‌بندی یک n ضلعی منتظم را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۲۲. رنگی رنگی

به چند طریق می‌توان رئوس یک n ضلعی را با k رنگ، رنگ‌آمیزی کرد، به طوری که هیچ دو راس مجاوری همرنگ نباشند؟

مسئله‌ی ۲۳. کلمات خاص

فرض کنید a_n تعداد کلمات n حرفی از ۲, ۱, ۰ باشد که تفاضل هر دو عدد متوالی در هر کلمه حداکثر ۱ است. رابطه‌ی بازگشتی a_n را بدست آورده و با استفاده از تابع مولد فرمول صریح آن را بدست آورید.

مسئله‌ی ۲۴. جواب عمومی

جواب عمومی معادله‌ی بازگشتی $a_n = ۸a_{n-۱} - ۱۶a_{n-۲} + ۲^n$ را با هم با استفاده از تابع مولد و هم بدون استفاده از تابع مولد بدست آورید.

مسئله‌ی ۲۵. قورباغه

فرض کنید A و E دو راس روبروی یک هشت‌ضلعی منتظم باشند. قورباغه‌ای از راس A آغاز به جهیدن می‌کند و هر بار به راس مجاور می‌پرد. ولی وقتی به راس E رسید همان‌جا توقف می‌کند. a_n را تعداد مسیرهای می‌گیریم که قورباغه از طریق آن‌ها با n جهش به E می‌رسد. رابطه بازگشتی a_n را بدست آورده و فرمول صریح آن را محاسبه نمایید.

اصل لانه کبوتری

مسئله‌ی ۲۶. مهمانی مجاز

در یک مهمانی، هر دو نفر حداکثر یکبار با هم دست داده‌اند. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد دست‌هایی که داده‌اند برابر است.

مسئله‌ی ۲۷. صفحه بینهایت

در یک صفحه که با دو رنگ قرمز و آبی رنگ شده است، ثابت کنید به ازای هر عدد مثبت a، دو نقطه همرنگ با فاصله a وجود دارد. درضمن ثابت کنید یا دو نقطه قرمز یافت می‌شود که فاصله آن‌ها یک است یا چهار نقطه آبی هم‌خط پیدا می‌شود که فاصله هر دو تای متوالی آن یک است.

مسئله‌ی ۲۸. لانه جاسوسی

فرض کنید، $n + ۱$ عدد از مجموعه $\{۱, ۲, ..., ۲n\}$ انتخاب شده است. ثابت کنید، دو تا از آن‌ها وجود دارند که نسبت به هم اول باشند.

مسئله‌ی ۲۹. زیبایی اعداد

اگر $A_۱, A_۲, , A_n$ یک دنباله از اعداد طبیعی باشد، ثابت کنید یک زیردنباله متوالی از آن وجود دارد که مجموع اعضایش بر n بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی ۳۰. امید ریاضی

تعدادی لامپ و کلید داریم. می‌دانیم همه‌ی لامپ‌ها به حداقل یک کلید وصل می‌باشند. هر بار که روی یک کلید بزنیم، همه‌ی لامپ‌هایی که به آن وصل هستند، تغییر وضعیت می‌دهند. ثابت کنید می‌توانیم حداقل نیمی از لامپ‌ها را روشن کنیم.

مسئله‌ی ۳۱. صفحه بینهایت دو

در یک صفحه که با سه رنگ قرمز، آبی و سبز رنگ شده است، ثابت کنید به ازای هر عدد مثبت a، دو نقطه همرنگ با فاصله a وجود دارد.

مسئله‌ی ۳۲. جمع‌های دوتایی

۱۶ عدد طبیعی بین ۱ تا ۱۰۰ داده شده است. ثابت کنید ۴ عدد متمایز a, b, c, d از بین این ۱۶ عدد پیدا می‌شود به گونه‌ای که $a + b = c + d$.

مسئله‌ی ۳۳. چندضلعی محدب

ثابت کنید در هر $۲n$ ضلعی محدب، قطری وجود دارد که موازی هیچ‌یک از اضلاع $۲n$ ضلعی محدب نیست.

مسئله‌ی ۳۴. مستطیل

فرض کنید m نقطه دلخواه داخل یک مستطیل ۴×۳ داده شده است. به ازای مقادیر مشخص شده زیر نشان دهید حداقل یک زوج نقطه پیدا می‌شود که فاصله‌شان حداکثر $\sqrt{۵}$ است.

- $m = ۷$
- $m = ۶$

احتمال

مسئله‌ی ۳۵. زیرمجموعه‌های تودرتو

فرض کنید مجموعه‌ی S شامل n عنصر متمایز است. $S_۰ = S$ و S_i ($i > ۰$) را از روی $S_{i-۱}$ بدین شکل می‌سازیم: هر عنصر $S_{i-۱}$ به احتمال ۱/۲ در S_i ظاهر می‌شود و به احتمال ۱/۲ ظاهر نمی‌شود. فرض کنید m عددی است که $S_m = \emptyset$. موارد زیر را پاسخ دهید:

۱. به ازای k مشخص، امید ریاضی و واریانس اندازه S_k (تعداد اعضاء) را محاسبه کنید.

۲. نشان دهید $Pr(m > t \log n) \leqslant ۱/n^{t-۱}$. (راهنمایی: از نامساوی $Pr(A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots A_k) \leqslant Pr(A_۱) + Pr(A_۲) + \cdots + Pr(A_k)$ استفاده کنید که در آن A_i ها رویداد می‌باشند.)

مسئله‌ی ۳۶. نقطه ثابت

فرض کنید به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، تابع f عدد i را بصورت تصادفی و یکنواخت به یکی از اعداد ۱ تا n نگاشت می‌کند. فرض کنید X برابر تعداد i هایی باشد که $f(i) = i$ است. $\mathrm{E}(X)$ و $\mathrm{Var}(X)$ را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۳۷. کران بالا برای ضرایب دوجمله‌ای

متغیر تصادفی $X = X_1 + \cdots + X_{2m}$ را در نظر بگیرید که در آن X_iها متغیرهای تصادفی مستقل هستند که به احتمال ۱/۲ مقدار آن‌ها صفر و به احتمال ۱/۲ مقدار آن‌ها یک است.

- $E(X)$ و $Var(X)$ را محاسبه کنید.
- با مقدار دهی مناسب برای مقدار t در نامساوی چپیشف ($P(|X-E(X)| < t\sqrt{Var(X)}) \geqslant 1 - \frac{1}{t^2}$) نشان دهید $C_m^{2m} \geqslant \frac{2^{2m}}{4\sqrt{m}+2}$. فرض کنید به ازای هر k داریم $C_m^{2m} \geqslant C_k^{2m}$.