۱. درخت T با حداقل دو رأس را در نظر بگیرید. ثابت کنید:

الف) حذف هر یال، T را به دقیقا دو مولفه‌ی همبندی تقسیم می‌کند.

ب) حذف هر رأس v با درجه‌ی $d(v)$، درخت را به دقیقا $d(v)$ مولفه‌ی همبندی تقسیم می‌کند.

۲. ثابت کنید به ازای هر $k \geqslant ۲$، گراف kـ مکعب همیلتنی است.

۳. به گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ هماهنگ می‌گوییم اگر در دقیقا دو رأس اشتراک داشته باشند و این دو رأس در هیچ یک از دو گراف مجاور نباشند. همچنین داشته باشیم:

$$L = \chi(G_۱ \cup G_۲) > \max(\chi(G_۱), \chi(G_۲)) = R$$

الف) دو گراف هماهنگ مثال بزنید.

ب) $L - R$ چه مقادیری ممکن است داشته باشد؟

۴. به ازای هر گراف ساده‌ی G با m یال ثابت کنید:

$$m \geqslant \binom{\chi(G)}{۲}$$

۵. به ازای هر $n \geqslant ۲$ ثابت کنید تعداد گراف‌های همبند n رأسی برچسب‌دار از تعداد گراف‌های ناهمبند n رأسی برچسب‌دار کمتر نیست.

۶. گراف G یک گراف همبند و $۲k$ـ منتظم است. ثابت کنید اگر G تعداد زوجی یال داشته باشد، آنگاه یک زیرگراف H از G وجود دارد که kـ منتظم باشد و $V(H) = V(G)$.

۷. در یک گروه از آدم‌ها، رابطه‌ی دوستی دو طرفه است. برای $k \geqslant ۳$ می‌گوییم یک گروه kـ دوسته است اگر هر k نفری از آن‌ها را بتوان طوری دور دایره نشاند که هر دو نفر مجاور با هم دوست باشند. ثابت کنید اگر گروهی ۶ـ دوسته باشد، ۷ـ دوسته نیز هست.

۸. ثابت کنید رئوس هر گراف مسطح بدون مثلث را می‌توان با ۴ رنگ رنگ‌آمیزی کرد طوری که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند.

۹. به ازای هر یال e از گراف G، ثابت کنید e غیربرشی است اگر و تنها اگر عضو حداقل یک دور G باشد.

۱۰. اگر مکمل گراف n رأسی G را $\overline{G}$ بنامیم، ثابت کنید:

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + ۱$$

۱۱. گراف ساده‌ای با $n > ۲$ رأس داریم. می‌دانیم با طی کردن یال‌ها از هر رأسی می‌توان به هر رأس دیگر رسید. ثابت کنید می‌توان از رأسی شروع کرد و با حداکثر $۲n - ۴$ حرکت روی یال‌ها، همه‌ی رأس‌ها را مشاهده کرد.

۱۲. یک هفت‌ضلعی را به پنج‌ضلعی‌ها و شش‌ضلعی‌های محدب طوری افراز کرده‌ایم که هر یک از رأس‌های هفت‌ضلعی به حداقل دوتا از این چندضلعی‌های کوچک‌تر تعلق داشته باشد. ثابت کنید تعداد چندضلعی‌های کوچک‌تر حداقل ۱۳ است.

۱۳. یک درخت داده شده است. طول کوتاه‌ترین مسیر ساده‌ی بین دو رأس را فاصله‌ی این دو رأس می‌نامیم. مجموع فاصله‌های یک رأس با بقیه‌ی رأس‌های گراف را امتیاز این رأس می‌نامیم. می‌دانیم درخت داده شده دو رأس دارد که اختلاف امتیاز آن‌ها برابر ۱ است. ثابت کنید تعداد رئوس درخت فرد است.

۱۴. گراف G با n رأس داده شده است طوری که هیچ رأس تنهایی ندارد. ثابت کنید این گراف یک مجموعه‌ی غالب با حداکثر $\frac{n}{۲}$ رأس دارد.

۱۵. در یک مهمانی $۲n + ۱$ نفر حضور دارند. به ازای هر گروه n نفره در این مهمانی، فردی خارج از گروه در مهمانی وجود دارد که با همه‌ی افراد آن گروه دوست است. ثابت کنید فردی هست که با همه‌ی افراد مهمانی دوست باشد.

۱۶. T درختی با n رأس و k برگ است. می‌دانیم زیرمجموعه‌ای با حداقل $\frac{n+k-۱}{۲}$ رأس از رئوس T وجود دارد که هیچ دوتایی از آن‌ها همسایه نیستند. ثابت کنید بلندترین مسیر در T تعداد زوجی یال دارد.

۱۷. فرض کنید G گرافی ساده باشد. ثابت کنید زیرگراف rـ بخشی H از G وجود دارد به طوری که برای هر رأس v:

$$\deg_H(v) \geqslant (۱ - \frac{۱}{r}) \cdot \deg_G(v)$$

۱۸. فرض کنید $d_۱ \leqslant d_۲ \leqslant \cdots \leqslant d_n$ درجات رأس‌های گراف G باشد. اگر برای هر $k \leqslant n - d_n - ۱$ داشته باشیم $d_k \geqslant k$، ثابت کنید G همبند است.

۱۹. فرض کنید V یک گراف جهت‌دار با مجموعه‌ی رئوس D باشد. ثابت کنید مجموعه‌ی مستقل S از رأس‌های D وجود دارد طوری که برای هر رأس $v \in V - S$، رأس $u \in S$ یافت شود که از u به v یک مسیر جهت‌دار به طول حداکثر ۲ موجود باشد.

۲۰. ثابت کنید به ازای هر سه رأس u، v و w از گراف مسطح G، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\deg(u) + \deg(v) + \deg(w) \leqslant ۲n + ۲$$