



ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری دوم

منطقی و روش‌های اثبات

مبحث آزمون ۲

۱. گزاره‌ی زیر را به صورت فرمال با جبر گزاره‌ای بنویسید و درستی آن را بررسی کنید:
 «اگر محمد برنده‌ی مسابقه شده باشد، یا علیرضا دوم شده است و یا سینا سوم شده است. سینا سوم نشده است. بنابراین اگر علیرضا دوم نشده باشد، محمد برنده نشده است.»

۲. بدون استفاده از جدول درستی، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را با ذکر هر مرحله اثبات کنید.

$$\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p \quad \text{الف}$$

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r) \equiv p \wedge q \quad \text{ب}$$

۳. سه نفر وارد یک اتاق می‌شوند. بر روی سر هر کدام یک کلاه قرار داده می‌شود و روی هر کلاه یک عدد طبیعی قرار دارد و همه می‌دانند که اعداد روی همه‌ی کلاه‌ها یک عدد طبیعی است. هرکس عدد بقیه را می‌بیند و از عدد خودش بی‌اطلاع است. به آن‌ها اطلاع داده می‌شود که یکی از اعداد روی کلاه‌ها مجموع دوتای دیگر است. از نفر اول پرسیده می‌شود که آیا عدد روی کلاهت را می‌توانی حدس بزنی؟ می‌گوید خیر. سپس همین سوال از نفر دوم پرسیده می‌شود و او پاسخ مشابهی می‌دهد. سپس از نفر سوم همین سوال پرسیده می‌شود ولی این بار او می‌گوید بله و عدد من برابر ۲۵ است. اعداد دو نفر دیگر را پیدا کنید.

۴. دو گزاره‌ی زیر را در نظر بگیرید.

• P : علیرضا زاده‌ی تهران است.

• Q : محمدرضا زاده‌ی کرج است.

استدلال‌های زیر را به صورت گزاره‌های منطقی بنویسید.

الف) علیرضا زاده‌ی تهران است یا اگر علیرضا زاده‌ی تهران نباشد، محمدرضا زاده‌ی کرج است.
 ب) یا علیرضا زاده‌ی تهران و محمدرضا زاده‌ی کرج است، یا نه علیرضا زاده‌ی تهران و نه محمدرضا زاده‌ی کرج است.

۵. فرض کنید شما در یک قبیله میان آدم‌خوارها گیر افتاده‌اید. رئیس قبیله به شطرنج علاقه‌ای وافر دارد و به شما این شانس را می‌دهد که با نشان دادن مهارت خود در بازی شطرنج از بلعیده شدن نجات پیدا کنید. در همین راستا از شما می‌خواهد که با دو نفر از ماهرترین شطرنج‌بازهای قبیله شطرنج بازی کنید و یا حداقل در یک بازی برنده شوید و یا با هردو نفر مساوی کنید. همچنین در راستای عدالت بیشتر برای شما، در یکی از بازی‌ها شما شروع‌کننده‌ی بازی و در دیگری شما نفر دوم خواهید بود. آیا استراتژی‌ای وجود دارد که زنده ماندن شما را تضمین کند؟

۶. در یک شرکت سختی کار و درآمد هیچ دو کارمندی یکسان نیست. همه‌ی کارمندان دو عبارت زیر را اعلام کردند:

• کمتر از ۱۲ کارمند کار سخت‌تری نسبت به من دارند.

• دست کم ۳۰ کارمند درآمدی بیشتر از من دارند.

با فرض این که هر کارمند یا همواره راست‌گو یا همواره دروغ‌گو است، تعداد کارمندان شرکت را به دست آورید.

۷. جملات زیر را به صورت فرمال با جبر گزاره‌ای بنویسید.

(الف) اگر علی خوشحال باشد و یک تابلو نقاشی کند، آرش خوشحال نخواهد بود.

(ب) اگر سارا خوشحال باشد و به دیدن مادر بزرگش برود، مادر بزرگ او خوشحال خواهد بود.

(ج) (با فرض این که علی، سارا و آرش خواهر و برادر باشند) مادر بزرگ این سه نفر خوشحال است اگر و تنها اگر هیچ یک از آن‌ها با ناراحتی پیش او نرود و حداقل یکی از آن‌ها، پیش او برود.

۸. چهار متهم A, B, C و D برای بازجویی به شما سپرده شده‌اند و هر کدام برای دفاع از خود جملات زیر را گفته‌اند:

$A: B$ یا C دروغ‌گو است.

$B: C$ دروغ‌گو است.

$C: C$ فقط یک نفر از میان ما دروغ‌گو است.

$D: B$ و C راست‌گو هستند.

با فرض این که هر فرد راست‌گو یا دروغ‌گو است، مشخص کنید چه کسانی راست‌گو و چه کسانی دروغ‌گو هستند.

۹. گزاره‌نمای زیر را در نظر بگیرید و تعیین کنید که به ازای چه مقادیری از اعداد طبیعی درست است.

$$P(n) = \forall i \in \mathbb{N}, (i < n \Rightarrow (\forall j \in \mathbb{N}, (j = n \vee n \neq ij)))$$

۱۰. می‌دانیم پلیس همواره راست می‌گوید، دزد همواره دروغ می‌گوید و دلقک یا راست می‌گوید یا دروغ. شما می‌توانید سوال‌هایی به فرم «آیا فرد x یک پلیس/دزد/دلقک است؟» را از هر یک از افراد اتاق بپرسید.

(الف) فرض کنید سه نفر در اتاق هستند، شما می‌دانید که یکی از آن‌ها پلیس، یکی از آن‌ها دزد و دیگری دلقک است. راهی نشان دهید که با پرسش‌های مطرح شده هویت هر سه نفر را مشخص کند.

(ب) فرض کنید چهار نفر در اتاق هستند. شما می‌دانید که یکی از آن‌ها پلیس، یکی از آن‌ها دزد، و دو فرد دیگر دلقک هستند. نشان دهید که دو دلقک می‌توانند پاسخ‌هایشان را طوری هماهنگ کنند که شما با هر تعداد پرسش هم نتوانید هویت افراد را به قطع مشخص کنید.

۱۱. در مدرسه‌ای سه دبیر به نام‌های تقوایی، صفوی و جلالی درس‌های ریاضی، فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، انگلیسی و تاریخ را درس می‌دهند. با فرض درستی گزاره‌های زیر مشخص کنید که هریک از این دبیرها مدرس کدام یک از درس‌ها هستند.

- هر دبیر دقیقاً دو موضوع را درس می‌دهد.
- خانم تقوایی جوان‌ترین دبیر است.
- دبیر ریاضی و خانم جلالی همیشه با هم به باشگاه شنا می‌روند.
- دبیر شیمی و دبیر ریاضی در یک خانه زندگی می‌کنند.
- دبیر فیزیک از خانم صفوی کوچک‌تر است و دبیر زیست‌شناسی از دبیر فیزیک جوان‌تر است.
- بزرگترین دبیر تنها زندگی می‌کند و خانه‌اش به مدرسه نزدیک‌تر از خانه دو دبیر دیگر است.

۱۲. درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید. در صورتی که عبارت همواره درست یا همواره نادرست باشد، آن را اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید.

الف) $((p \vee \neg q) \rightarrow r) \rightarrow ((\neg p \rightarrow r) \wedge (q \wedge r))$

ب) $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

۱۳. پنج دوست در یک مسابقه‌ی تنیس روی میز شرکت کرده‌اند اما به دلایلی تصمیم گرفتند که در اعلام نتایج به والدینشان، تنها نیمی از حقیقت را بگویند. به عبارت دیگر، هرکس یک گزاره‌ی درست و یک گزاره‌ی نادرست بیان می‌کند. گزاره‌ها به شکل زیر هستند.

- مهسا: مهشید دوم شد و من سوم.
- سارا: من اول شدم و نیکی دوم.
- نیکی: من سوم شدم و سارا پنجم.
- مهشید: من دوم شدم و آتوسا چهارم.
- آتوسا: من چهارم شدم و مهسا اول.

با استفاده از داده‌های مسئله مشخص کنید که هر نفر چه مقامی را کسب کرده است.

۱۴. گزاره‌ی زیر را اثبات کنید:

$$(\exists y : P(a, y) \wedge (\forall x \forall y : \neg(P(x, y) \wedge Q(x)))) \rightarrow (\neg \forall x : Q(x))$$

۱۵. سه ریاضی‌دان را پشت سر هم نشانده‌ایم. به آن‌ها می‌گوییم که چشمانتان را می‌بندیم و از میان ۲ کلاه زرد و ۳ کلاه سبز، بر سر هر یک از شما یک کلاه می‌گذاریم و سپس چشم‌بندها را برمی‌داریم. باید تلاش کنید تا متوجه شوید کلاه روی سرتان چه رنگی است. البته هیچ‌کدام مجاز نیستید به عقب نگاه کنید، در نتیجه هر شخص تنها می‌تواند کلاه افراد جلویی خود را ببیند. به محض برداشتن چشم‌بندها، فردی که از همه عقب‌تر بود گفت که نمی‌تواند رنگ کلاهش را بگوید. سپس نفر دوم نیز همین گزاره را تکرار کرد. آیا فردی که از همه جلوتر بوده، می‌تواند رنگ کلاهش را مشخص کند؟

۱۶. گزاره‌ی زیر را در نظر بگیرید:

«آرایشگری وجود دارد که فقط موهای تمامی افرادی که موهای خودشان را اصلاح نمی‌کنند را اصلاح می‌کند.»

الف) آیا آرایشگر موهای خود را خودش اصلاح می‌کند؟

ب) عبارت مربوطه را به صورت فرمال با جبر گزاره‌ای بنویسید.

۱۷. از ۷ نفر سوال کردیم که از بین ۶ نفر دیگر، چند نفر را می‌شناسد. پاسخ‌ها به ترتیب به صورت ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بوده است.

اگر بدانیم در این جمع:

- حداکثر یک نفر دروغ می‌گوید.
- دروغ‌گو تعداد افرادی که می‌شناسد را کمتر از مقدار واقعی می‌گوید.
- شناختن یک رابطه دو طرفه است.
- فرد اول و دوم (افرادی که گفته‌اند ۱، ۲) دروغ‌گو نیستند.

مشخص کنید که دروغ‌گو چه کسی است.

۱۸. عبارت «حداکثر یک عضو در مجموعه A وجود دارد که خاصیت P را ندارد» را در نظر بگیرید.

الف) این عبارت را با استفاده از سورهای وجودی و عمومی بیان کنید.

ب) نقیض این گزاره را با استفاده از سورهای وجودی و عمومی بیان کنید.

۱۹. ۶ نفر با نام‌های A, B, C, D, E و F در نظر بگیرید. تعدادی از این افراد دروغ‌گو و تعدادی از آن‌ها راست‌گو هستند. همچنین می‌دانیم دروغ‌گو همواره دروغ و راست‌گو همواره راست می‌گوید. این افراد گزاره‌های زیر را مطرح کرده‌اند:

• A می‌گوید که C دروغ‌گو است.

• B می‌گوید که C راست‌گو و A دروغ‌گو است.

• C می‌گوید که D دروغ‌گو و E دروغ‌گو است.

• D می‌گوید که F راست‌گو است.

• E می‌گوید که F راست‌گو و C دروغ‌گو است.

• F می‌گوید که B دروغ‌گو است.

اگر بدانیم حداکثر دو نفر از این افراد دروغ‌گو هستند، دروغ‌گو(ها) را مشخص کنید.

۲۰. الف) با فرض درست بودن گزاره‌های زیر و با به کارگیری قواعد استنتاج نشان دهید $\neg(p \vee r) \equiv T$.

$$p \rightarrow q \bullet$$

$$\neg q \bullet$$

$$\neg r \bullet$$

ب) با فرض درست بودن گزاره‌های زیر و با به کارگیری قواعد استنتاج نشان دهید $p \equiv T$.

$$(\neg p \vee q) \rightarrow r \bullet$$

$$r \rightarrow (s \vee t) \bullet$$

$$\neg s \wedge \neg u \bullet$$

$$\neg u \rightarrow \neg t \bullet$$