ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری سوم — **استقرای ریاضی** — مبحث آزمون ۱

۱. به ازای هر عدد طبیعی n با استقرا ثابت کنید:

الف) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

ج) $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$

د) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$

ه) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}$

۲. یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, n\}$ را پراکنده می‌نامیم اگر هیچ دو عضوی از آن متوالی نباشند. به ازای هر زیرمجموعه‌ی پراکنده، اعضای آن را در در هم ضرب کرده و حاصل را به توان دو می‌رسانیم. ثابت کنید حاصل جمع اعداد به دست آمده برابر با $(n+1)! - 1$ است.

۳. می‌دانیم گزاره‌نمای $P(n)$ به ازای یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی درست است و از درست بودن $P(n+1)$، درستی $P(n)$ نتیجه می‌شود. نشان دهید $P(n)$ به ازای تمام اعداد طبیعی درست است.

۴. فرض کنید $x_1, \ldots, x_n$ اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید که:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

(سعی کنید از مسئله‌ی قبلی استفاده کنید.)

۵. ثابت کنید می‌توانیم اعداد $1, 2, \ldots, 1000$ را در یک ردیف پشت سر هم قرار دهیم به صورتی که میانگین هیچ دو عدد متمایزی از این اعداد، بین آن دو عدد قرار نگیرد.

۶. به ازای هر عدد طبیعی مانند n، ثابت کنید می‌توان 7^n دایره به شعاع واحد را دون یک دایره به شعاع 3^n جا داد، به طوری که هر دو دایره به شعاع واحد حداکثر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند.

۷. n خط در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها همرس نیستند و هیچ دوتایی هم موازی نیستند. ثابت کنید می‌توانیم نواحی ایجاد شده توسط این n خط را طوری با دو رنگ، رنگ کنیم که نواحی مجاور (یعنی ناحیه‌هایی که حداقل یک ضلع مشترک داشته باشند)، غیرهمرنگ باشند.

۸. دو مجموعه‌ی A و B از اعداد طبیعی داریم به طوری که برای هر $x \in A \cup B$، یا $x + 1$ در A است یا $x - 2$ در B است. نشان دهید تعداد اعضای مجموعه‌ی A دو برابر تعداد اعضای مجموعه‌ی B است.

۹. ناصر d سگ و c گربه در خانه‌اش دارد. او به تازگی می‌خواهد به خانه‌ی جدیدی نقل مکان کند و به همین منظور، باید سگ و گربه‌هایش را به خانه‌ی جدید منتقل کند. اما او نمی‌تواند در هر جابه‌جایی بین خانه‌ها بیشتر از دو حیوان را در خودروی خود جا دهد و در هر جابه‌جایی نیز باید حداقل یک حیوان در خودرو داشته باشد. همچنین اگر در یکی از خانه‌ها تعداد سگ‌ها از گربه‌ها بیشتر شود، سگ‌ها عصبی می‌شوند و اتفاقات بدی می‌افتند (اگر صفر گربه در آن خانه باشد مشکلی پیش نمی‌آید). تمام مقادیر c و d را بیابید که ناصر بتواند این انتقال را بدون این که اتفاق بدی بیفتد انجام دهد.

۱۰. یک دسته با n سنگریزه داده شده است. دو نفر با هم یک بازی انجام می‌دهند. هر کس در نوبت خود باید تمام دسته‌های موجود با بیش از یک سنگریزه را به دلخواه به دو دسته‌ی ناتهی تقسیم کند. اگر کسی در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است و فرد دیگر برنده است. به ازای هر یک از حالت‌های مختلف n چه کسی قطعا می‌تواند ببرد؟

۱۱. ساختمان روشنایی، تعداد زیادی چراغ و کلید دارد. هر کلید به بعضی از چراغ‌ها متصل است وبا بستن آن، وضعیت همه آن چراغ‌ها تغییر می‌کند. می‌دانیم هر چراغ دست‌کم به یک کلید متصل است. نشان دهید اگر در ابتدا همه چراغ‌ها خاموش باشند، می‌توان با بستن بعضی از کلیدها، به حالتی رسید که بیش از نیمی از چراغ‌ها روشن باشند.

۱۲. دنباله‌ی کلمات $W_۰$، $W_۱$، $W_۲$ و ... به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$W_۰ = a, \quad W_۱ = b, \quad W_n = W_{n-۲}W_{n-۱} \quad (n \geqslant ۲)$$

(اگر A و B دو کلمه باشند، منظور از AB کلمه‌ای است که از نوشتن B در انتهای A به دست می‌آید.)
برای هر $n \geqslant ۱$ ثابت کنید $L_n = W_۱W_۲ \ldots W_n$ کلمه‌ای آینه‌ای است.

۱۳. در مسابقات بسکتبال n تیم شرکت کرده‌اند که دوبه‌دو با هم مسابقه می‌دهند (دقت کنید که در مسابقات بسکتبال مساوی نداریم). یک تیم را قوی می‌نامیم اگر برای هر تیم دیگر مانند A یا آن را برده باشد یا تیم دیگری مانند B وجود داشته باشد که تیم قوی B را برده باشد و B هم تیم A را برده باشد. ثابت کنید در مسابقات حداقل یک تیم قوی وجود دارد.

۱۴. دسته‌ای از کارت‌ها داریم که روی هر کدام از آن‌ها یکی از اعداد ۱ تا n نوشته شده است، به طوری که مجموع اعداد روی کارت‌ها مضربی از $n!$ باشد. نشان دهید می‌توان کارت‌ها را به تعدادی دسته افراز کرد به طوری که مجموع اعداد کارت‌های هر دسته دقیقا برابر $n!$ باشد.

۱۵. به ازای هر عدد طبیعی n نشان دهید حاصل‌ضرب اعداد اول کمتر یا مساوی n حداکثر برابر $۴^{n-۱}$ است.

۱۶. آرایه‌ای به طول ۲^n از اعداد داریم. در هر مرحله، یک عدد طبیعی دلخواه k را انتخاب می‌کنیم و آرایه را k واحد به سمت چپ شیفت دوری می‌دهیم. سپس اعضای این آرایه را با اعضای آرایه‌ی قبلی دوبه‌دو XOR می‌کنیم تا آرایه‌ای جدید حاصل شود. همین کار را با آرایه‌ی جدید تکرار می‌کنیم. نشان دهید پس از حداکثر ۲^n مرحله، تمام درایه‌های آرایه برابر صفر خواهند شد.

۱۷. نشان دهید هر عدد طبیعی را می‌توان برابر با جمع اعدادی به شکل $۲^a۳^b$ (که در آن a و b اعدادی صحیح و نامنفی هستند) نوشت به طوری که هیچ یک از این اعداد بر دیگری بخش‌پذیر نباشد.

۱۸. n نقطه زیبا روی محور اعداد حقیقی داده شده‌اند. می‌خواهیم این n نقطه را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که به ازای هر بازه‌ی $[a,b]$ روی محور اعداد حقیقی، از بین نقاط زیبایی که در این بازه قرار گرفته‌اند، حداقل یک نقطه وجود داشته باشد که رنگ آن با بقیه نقاط زیبای داخل بازه متفاوت باشد. نشان دهید با $۱ + \lceil \log(n) \rceil$ رنگ می‌توان چنین کاری کرد.

۱۹. فرض کنید n عددی فرد بوده و n نقطه روی یک خط داده شده‌اند، به طوری که هر یک به رنگ سفید یا سیاه هستند. روی هر نقطه، مجموع تعداد نقاط سفید سمت راست و تعداد نقاط سیاه سمت چپ آن نقطه را می‌نویسیم. ثابت کنید عدد $\frac{n-۱}{۲}$ بر روی تعداد فردی از این نقاط نوشته می‌شود.

۲۰. کشوری $۲n + ۱$ شهر دارد. بین هر دو تا از این شهرها یک جاده وجود دارد که فقط می‌تواند یک جهت رفت یا برگشت داشته باشد. ثابت کنید می‌توانیم این جاده‌ها را به گونه‌ای جهت‌دهی کنیم که به هر شهر n جاده وارد و از آن n جاده خارج شوند.