

**مسئله‌ی ۱. اصل لانه کبوتری [۱۲ نمره]**

فرض کنید ۷ نقطه دلخواه داخل یک مستطیل 4×3 داده شده است. نشان دهید حداقل یک زوج نقطه پیدا می‌شود که فاصله‌شان حداکثر $\sqrt{5}$ است.

مسئله‌ی ۲. دو دوگانه شماری [۱۳ نمره]

در یک n ضلعی محدب تمام قطرهای را رسم کرده‌ایم. اگر هیچ سه قطری هم‌رس نباشند، n ضلعی به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

مسئله‌ی ۳. روابط بازگشتی [۲۵ نمره]

فرض کنید w_n تعداد کلمات n حرفی متشکل از حروف a, b, c باشد که تعداد زوجی a دارند. یک رابطه‌ی بازگشتی برای w_n بدست آورید و با استفاده از روش تابع مولد فرمول صریح آن را بدست آورید؟ محاسبه دقیق ضرایب تنها ۳ نمره دارد. اگر کلیت راه‌حل درست باشد ۲۲ نمره کسب خواهید کرد.

مسئله‌ی ۴. زیرمجموعه‌های سه عضوی [۲۵ نمره]

فرض کنید X یک مجموعه n عضوی باشد. فرض کنید F یک مجموعه باشد که هر عضو آن یک زیرمجموعه سه عضوی از X است. اگر بدانیم اشتراک هر دو عضو (زیرمجموعه سه عضوی) F غیر تهی است ثابت کنید:

$$1. |F| \leq 3 \binom{n-1}{2}$$

$$2. |F| \leq 2 \binom{n-1}{2}$$

$$3. |F| \leq \binom{n-1}{2}$$

$$4. \text{ مثالی بزنید که } |F| = \binom{n-1}{2} \text{ باشد.}$$

بدیهی است اگر نامساوی قوی‌تر را اثبات کنید نمره نامساوی ضعیف‌تر را هم کسب خواهید کرد.

مسئله‌ی ۵. احتمال [۲۵ نمره]

فرض کنید n توپ و n ظرف موجود است. توپ‌ها را بصورت تصادفی با توزیع یکنواخت داخل ظرف‌ها قرار می‌دهیم (احتمال آنکه یک توپ در ظرف i ام قرار گیرد برابر $1/n$ است). فرض کنید X_i برابر تعداد توپ‌های قرار گرفته در ظرف i ام باشد و $X = \max(X_1, \dots, X_n)$ باشد. موارد زیر را اثبات کنید.

$$\bullet \Pr(X_i \geq t) \leq 1/t$$

$$\bullet \Pr(X_i \geq 1+t) \leq 1/t^2$$

$$\bullet \Pr(X \geq 1 + 2\sqrt{n}) \leq 1/4$$