۱. نشان دهید در هر گراف با n رأس و m یال، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\delta(G) \leqslant \frac{۲m}{n} \leqslant \Delta(G)$$

۲. فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد.

الف) ثابت کنید A ماتریسی متقارن است.

ب) مجموع درایه‌های هر سطر A نشان‌دهنده‌ی چیست؟

ج) اگر تعداد یال‌ها برابر با m باشد، ثابت کنید مجموع درایه‌های A برابر $۲m$ است.

د) ثابت کنید درایه‌های روی قطر $A^۲$ درجه‌های رأس‌های G هستند.

ه) ثابت کنید اگر $i \neq j$، درایه‌ی واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس $A^۲$ برابر با تعداد همسایه‌های مشترک رئوس i و j است.

۳. فرض کنید G گرافی ساده با n رأس باشد و $n \geqslant ۲$. ثابت کنید دو رأس در G وجود دارند که درجه‌شان با هم برابر است.

۴. ثابت کنید به ازای $n \geqslant ۲$، تعداد گراف‌های همبند n رأسی برچسب‌دار از گراف‌های ناهمبند n رأسی کمتر نیست.

۵. نشان دهید هر گرافی با کمینه درجه‌ی $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ همبند است؛ اما به ازای هر $n \geqslant ۲$، گرافی n رأسی با کمینه درجه‌ی $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor - ۱$ وجود دارد که ناهمبند است.

۶. در هر گراف، ثابت کنید یک یال، یال غیربرشی است اگر و تنها اگر عضو حداقل یک دور باشد.

۷. گراف ساده‌ی G با n رأس را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های زیر حداکثر تعداد یال‌های G چقدر می‌تواند باشد؟

الف) G ناهمبند است.

ب) G دارای دقیقاً k مولفه‌ی همبندی است.

ج) G دارای مجموعه‌ی مستقلی به اندازه‌ی k است. (زیرمجموعه‌ی S از رأس‌های G «مستقل» نامیده می‌شود اگر بین هیچ دو راس S در G یالی نباشد.)

۸. گراف ساده‌ی G را خودمکمل می‌نامیم هرگاه خودش با مکملش یک‌ریخت باشد. اگر G گرافی خودمکمل با n رأس باشد، ثابت کنید:

الف) n به صورت $۴k$ یا به صورت $۴k + ۱$ است.

ب) اگر $n = ۴k + ۱$، آنگاه G رأسی از درجه‌ی $\frac{n-۱}{۲}$ دارد.

۹. در یک گراف همبند، P و Q دو مسیر با بیشترین تعداد یال‌ها هستند. ثابت کنید این دو مسیر حداقل یک رأس مشترک دارند.

۱۰. در چند گراف ساده‌ی n رأسی با رئوس برچسب‌دار ۱ تا n، هیچ رأس تنهایی وجود ندارد؟

۱۱. فرض کنید $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ اعداد صحیح مثبتی باشند که

$$\sum_{i=۱}^{n} d_i = ۲n - ۲.$$

ثابت کنید درختی وجود دارد که دنباله‌ی درجاتش برابر با $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ باشد.

۱۲. ثابت کنید به ازای هر سه رأس u، v و w از گراف مسطح G، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\deg(u) + \deg(v) + \deg(w) \leqslant ۲n + ۲$$

۱۳. به یک گراف «کاکتوس» می‌گوییم اگر هیچ دو دوری از آن اشتراک یالی نداشته باشند. ثابت کنید یک گراف کاکتوس n رأسی حداکثر $\lfloor \frac{۳(n-۱)}{۲} \rfloor$ یال دارد.

۱۴. می‌خواهیم رأس‌های گراف جهت‌دار و قویاً همبند D را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ بزنیم، طوری که هر رأس به حداقل یک رأس ناهمرنگ خود یال داشته باشد. ثابت کنید این کار قابل انجام است اگر و تنها اگر D دوری جهت‌دار به طول زوج داشته باشد.

۱۵. یال‌های یک گراف کامل n رأسی را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید این گراف زیردرخت فراگیری دارد که تمام یال‌های آن همرنگ هستند.

۱۶. درخت فراگیر کمینه‌ی T از گراف وزن‌دار G داده شده است. ثابت کنید به ازای هر دور G یالی وجود دارد که در T نیست و بزرگ‌ترین وزن را درون آن دور دارد.

۱۷. درختی n رأسی در نظر بگیرید که درجه‌ی هر رأس در آن حداکثر ۳ است. ثابت کنید می‌توان یالی پیدا کرد که با حذف آن، درخت به دو زیردرخت افراز شود که اندازه هر کدام حداقل $\frac{n-۱}{۳}$ باشد.

۱۸. در یک درخت ریشه‌دار که در آن هر رأس داخلی حداقل دو فرزند دارد، فاصله رأس داخلی v تا نزدیک‌ترین برگ درخت را با $d(v)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید:

$$\sum_{v} d(v) \leqslant n \log n$$

۱۹. n خط روی صفحه کشیده شده‌اند. هیچ دوتایی از آن‌ها موازی نیستند و هیچ سه‌تایی نیز از یک نقطه نمی‌گذرند. با استفاده از فرمول اویلر برای گراف‌های مسطح، تعداد نواحی ایجاد شده توسط این n خط را به دست آورید.

۲۰. اگر مکمل گراف n رأسی G را $\overline{G}$ بنامیم، ثابت کنید:

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + ۱$$