

ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۰۲-۰۱

مدرس: آبام

آزمون میان‌ترم دوم

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

۷ خرداد ۱۴۰۲

نام و نام خانوادگی:

زمان: ۱۲۰ دقیقه

شماره‌ی دانش‌جویی:

مسئله‌ی ۱. جمع مربعات [۱۵ نمره]

با استفاده از دوگانه شماری نشان دهید $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = C_{n+1}^n + 2C_{n+1}^{n-1}$.

مسئله‌ی ۲. مهمانی مجاز [۱۵ نمره]

در یک مهمانی، هر دو نفر حداکثر یکبار با هم دست داده‌اند. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد دست‌هایی که داده‌اند برابر است.

مسئله‌ی ۳. ضرب زیرمجموعه‌ها [۱۵ نمره]

به ازای هر زیرمجموعه از اعداد ۱ تا ۷، اعداد آن را در یکدیگر ضرب کنید. چند عدد مختلف به دست می‌آید؟ صرفاً جواب نهایی کفایت نمی‌کند. روش خود را توضیح دهید.

مسئله‌ی ۴. حل معادله [۱۰ نمره]

تعداد جواب‌های معادله $x + y + z = 20$ را با فرض آنکه $5 \leq x, y, z \leq 15$ است را با ذکر روش محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۵. بازگشتی [۲۰ نمره]

اگر w_n تعداد کلمات n حرفی متشکل از حروف a, b, c باشد که تعداد زوجی a دارند، رابطه بازگشتی w_n را بدست آورید و فرمول صریح آن را بدست آورید.

مسئله‌ی ۶. امید ریاضی ماکزیمم [۲۵ نمره]

فرض کنید n توپ متمایز و n ظرف متمایز داریم. هر توپ را بصورت تصادفی با توزیع یکنواخت داخل ظرف‌ها می‌ریزیم. فرض کنید X_i تعداد توپ‌های قرار گرفته شده در ظرف i ام باشد. فرض کنید $X = \max(X_1, \dots, X_n)$ مسائل زیر را حل کنید.

۱. امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X_i را محاسبه کنید.

۲. نشان دهید $P(X_i \geq 2\sqrt{n}) \leq 1/(4n)$.

۳. نشان دهید $P(X \geq 2\sqrt{n}) \leq 1/4$.

۴. نشان دهید $E(X) \leq n/4 + (3/2)\sqrt{n}$.

۵. به ازای $n = 2$ مقدار دقیق $E(X)$ را محاسبه کنید.