

**مسئله ۱. جزء صحیح [۱۲ نمره]**

نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی  $x$  و هر عدد طبیعی  $n$  داریم:

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$$

**مسئله ۲. گزاره‌ی همیشه درست [۱۳ نمره]**

نشان دهید عبارت زیر یک عبارت همیشه درست است ( $n > 1$ ).

$$[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n)] \rightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n]$$

**مسئله ۳. شمارا [۲۵ نمره]**

فرض کنید  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  یک مجموعه باشد که لزوماً تعداد اعضای آن متناهی نیست. می‌دانیم مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های  $A$  ناشماراست. حال به ازای  $k$  ( $k > 1$ ) مشخص، فرض کنید مجموعه  $A_k$  شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های  $A$  با حداکثر  $k$  عضو باشد؛ در واقع  $A_k = \{X | X \subseteq A, |X| \leq k\}$ . آیا  $A_k$  شماراست؟ دلیل خود برای شمارا بودن یا نبودن مجموعه فوق را بیان کنید.

**مسئله ۴. متمم‌سازی [۲۵ نمره]**

عملگر  $\oplus$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

«عبارت  $a \oplus b$  درست است اگر و تنها اگر از بین  $a$  و  $b$  تنها یکی درست باشد.»

با کدام لیست (ها) از علائم زیر می‌توان نقیض یک عبارت را به دست آورد؟ (در هر قسمت ادعای خود را با مثال یا اثبات نشان دهید)

$\oplus, \rightarrow$  •

$\oplus, \vee$  •

**مسئله ۵. [۲۵ نمره]**

فرض کنید  $f : A \rightarrow B$  یک تابع باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید.

$$\forall X \subseteq A : f(X) = \{b \in B | \exists a \in X (f(a) = b)\}$$

$$\forall Y \subseteq B : f^{-1}(Y) = \{a \in A | f(a) \in Y\}$$

در ضمن عملگر  $\Delta$  برای دو مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

کدام یک از روابط زیر درست است (اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید).

$$\forall X, Y, Z \subseteq A : f(X \cap (Y \Delta Z)) = f(X) \cap (f(Y) \Delta f(Z)) \quad ۱.$$

$$\forall X, Y, Z \subseteq B : f^{-1}(X \cap (Y \Delta Z)) = f^{-1}(X) \cap (f^{-1}(Y) \Delta f^{-1}(Z)) \quad ۲.$$