



۱. ثابت کنید حاصل ضرب هر ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

۲. برای هر عدد اول  $p$  و عدد طبیعی  $k$  ثابت کنید:

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

۳. گزاره‌های زیر را اثبات کنید.

(الف)  $3^{70} + 2^{70} \mid 13$ .

(ب) اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، آنگاه  $n^7 - n \mid 42$ .

(ج) برای هر عدد اول  $p$  به غیر از ۲ و ۵، تعداد نامتناهی عدد از اعداد دنباله‌ی ۱، ۱۱، ۱۱۱، ۱۱۱۱ و ... بر  $p$  بخش پذیرند.

۴. فرض کنید عدد اول  $p$  وجود داشته باشد طوری که  $2 + p^2$  نیز اول است. نشان دهید  $2 + p^3$  نیز اول است.

۵. برای هر سه عدد طبیعی  $a, b, x$  نشان دهید:

$$\gcd(x^a - 1, x^b - 1) = x^{\gcd(a,b)} - 1$$

۶. تمام اعداد فرد  $n$  را پیدا کنید که داشته باشیم:

$$n \mid 3^n + 1$$

۷. فرض کنید  $p(x)$  یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. ثابت کنید هیچ سه عدد طبیعی و متمایز مانند  $a, b, c$  وجود ندارند به طوری که:

$$p(a) = b, p(b) = c, p(c) = a$$

۸. فرض کنید  $2^n + 1$  عددی اول باشد. ثابت کنید  $n$  توانی از ۲ است.

۹. اگر  $a, b, m$  اعداد صحیحی باشند که  $a \equiv b \pmod{m}$ ، ثابت کنید:

$$\gcd(a, m) = \gcd(b, m)$$

۱۰. برای اعداد طبیعی  $a$  و  $m$  که  $a > 1$  ثابت کنید:

$$\gcd\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \gcd(a - 1, m)$$

۱۱. برای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید:

$$n^2 \mid (n+1)^n - 1$$

۱۲.  $a$  و  $b$  اعداد طبیعی و متمایز هستند. ثابت کنید نامتناهی عدد طبیعی  $n$  وجود دارند که اعداد  $a+n$  و  $b+n$  نسبت به هم اول باشند.

۱۳. تمام اعداد اول  $p$  را بیابید که  $16p + 1$  مکعب کامل باشد.

۱۴. ثابت کنید هر عدد طبیعی بزرگتر از شش را می‌توان به شکل مجموع دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت که نسبت به هم اول باشند.

۱۵. تعدادی عدد روی تخته نوشته شده‌اند. در هر مرحله دو عدد از اعداد روی تخته را انتخاب کرده و با ب.م.م. و ک.م.م. این دو عدد جایگزین می‌کنیم. ثابت کنید پس از مدتی، این عملیات متوقف می‌شود و اعداد روی تخته دیگر تغییری نمی‌کنند.

۱۶. چهار عدد طبیعی  $a, b, c, d$  را در نظر بگیرید. می‌دانیم  $ab = cd$ . ثابت کنید  $a + b + c + d$  عددی مرکب است.

۱۷. تمام اعداد طبیعی را پیدا کنید که بتوان آن‌ها را به شکل اختلاف دو عدد مربع کامل نوشت.

۱۸. فرض کنید  $x$  و  $y$  اعداد صحیح باشند. ثابت کنید  $3y + 2x \mid 17$  است اگر و تنها اگر  $9x + 5y \mid 17$ .

۱۹. به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، ثابت کنید  $n$  عدد متوالی وجود دارند که همگی مرکب باشند.

۲۰. به ازای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید:

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$