ساختمان‌های گسسته

حل تمرین سری چهارم

۱. با استفاده از استقرا، گزاره‌های زیر را به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید.

الف) $۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

ب) $۱^۳+۲^۳+\cdots+n^۳=(۱+۲+\cdots+n)^۲$

ج) $۱\times ۱!+۲\times ۲!+\cdots+n\times n!=(n+۱)!-۱$

د) $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots\frac{۱}{n^۲}\leqslant ۲-\frac{۱}{n}$

ه) $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}\geqslant\frac{۳n}{۲n+۱}$

الف) $1^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}$

$$n^2+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(n-1)(2n-1)+6n=(n+1)(2n+1)\Rightarrow \cancel{2n^2}-3n+\cancel{1}+6n\stackrel{?}{=}\cancel{2n^2}+3n+\cancel{1}$$

ب) $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\Leftrightarrow n^3=\frac{n(n+1+n-1)}{2}\times\frac{n\times 2}{2}=\frac{4n^3}{4}=n^3$

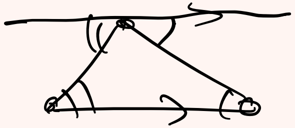
ج) $\cancel{1}n!-1+n\times n!=(n+1)n!-1=(n+1)!-1$

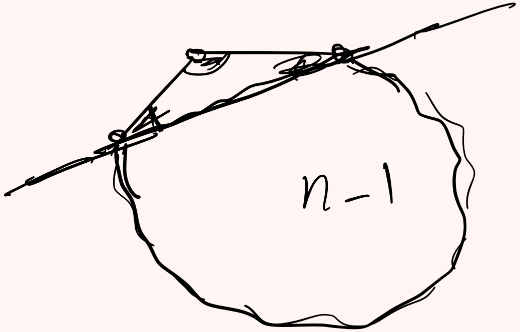
د) $2-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}\Leftrightarrow n^2\ge n^2-n$ ✓

ه) $\frac{3(n-1)}{2(n-1)+1}+\frac{1}{n^2}\ge\frac{3n}{2n+1}\Leftrightarrow(3n^3-3n^2+2n-1)(2n+1)\ge 3(2n-1)n^3$

$$\Leftrightarrow 6n^4-6n^3+4n^2-2n+3n^3-3n^2+2n-1\ge 6n^4-3n^3\Leftrightarrow n^2-1\ge 0$$ ✓

۲. با استفاده از استقرا ثابت کنید جمع زوایای داخلی هر nضلعی محدب برابر با $۱۸۰(n-۲)$ است.





$$180(n-1-2)+180 = 180(n-1-2+1)$$
$$= 180(n-2)$$

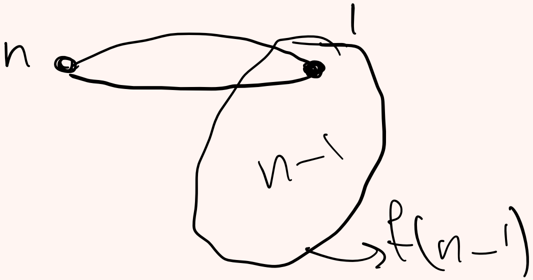
۳. در ابتدا $n \geqslant ۴$ نفر داریم که هر کدام یک خبر را می‌داند. در هر مرحله دو نفر از آن‌ها به هم تلفن می‌زنند و هر یک تمام اخباری که دارد را با دیگری به اشتراک می‌گذارد. ثابت کنید این افراد می‌توانند با $۲n - ۴$ بار تلفن زدن همه را از تمام اخبار مطلع کنند.

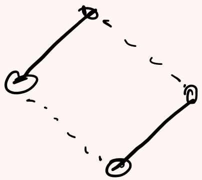
$2(n-1)-4$

4

گام:

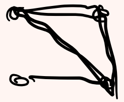
پایه:

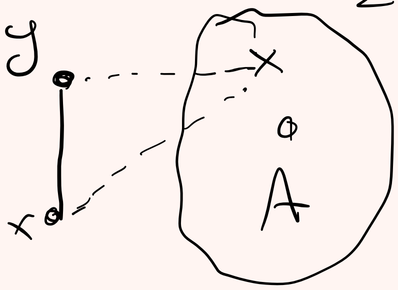




$$1+f(n-1)+1 = 2+f(n-1) =$$
$$2+2(n-1)-4 = 2(n-1+1)-4$$
$$=2n-4$$

۴. $2n$ نقطه در صفحه داریم که بعضی از آن‌ها با n^2+1 پاره‌خط به هم متصل شده‌اند. ثابت کنید سه نقطه بین این نقاط وجود دارند که دوبه‌دو به هم متصل باشند.

✓  5



فرض خلف: نداشتن مثلث:

$$A^{\#\text{پاره‌خط}} \le (n-1)^2$$

فرض استقرا

$$\le \overbrace{(n-1)^2}^{\text{فرض استقرا}} + 1 + 2(n-1) = n^2 - \cancel{2n} + \cancel{1} + \cancel{1} + \cancel{2n} - \cancel{2}$$

$$= n^2 \quad \times$$

هرکس یا به x یا به y

۵. زیرمجموعه‌ای $\overset{n+2}{n \cancel{+1}}$ عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ داده شده است. ثابت کنید سه عدد متمایز مانند a, b, c در این زیرمجموعه یافت می‌شوند که $a = b + c$.

$n=2 \quad \{1,2,3,4\}$ $\quad n+2=4$

$\{1, \ldots, 2(n-1)\}$ $\quad n-1+2 = n+1$

$n+2-1 = n+1$ ✓

if $\quad 2n, 2n-1$

$2n, \underline{2n-1}$ اومده $\quad$ 1 اومده ✓

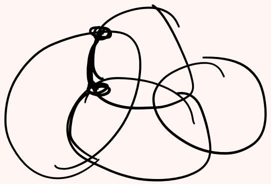
1 نیومده

$2n-2 \longrightarrow 1$

$n-2+1+2 = n+1$

$$n-2 \left\{ \begin{array}{l} 2, 2n-3 \\ 3, 2n-4 \\ \vdots \\ n-1, n \end{array} \right. \longrightarrow n-2$$

۶. n دایره در صفحه داریم به طوری که هر دوتایی از آن‌ها با هم در دو نقطه برخورد دارند. ثابت کنید این n دایره صفحه را به $n(n-۱)+۲$ ناحیه تقسیم می‌کنند.



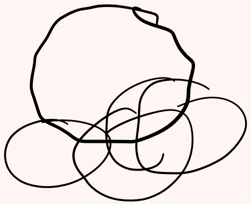
$$n - e + f = 2$$

$$n \downarrow 2\binom{n}{2}$$

$$e \to n \times 2(n-1)$$

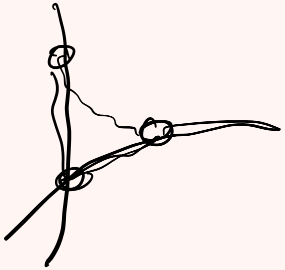
$$n(n-1) - 2n(n-1) + f = 2$$

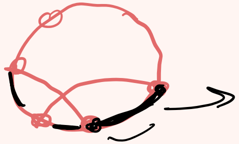
$$f = 2 + n(n-1)$$



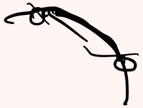
$$n(n-1)+2$$

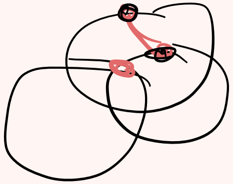
$$(n-1)(n-2)+2 \longrightarrow (n-1)\,(n-(n-2)) = 2(n-1)$$

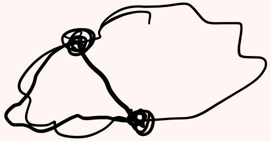


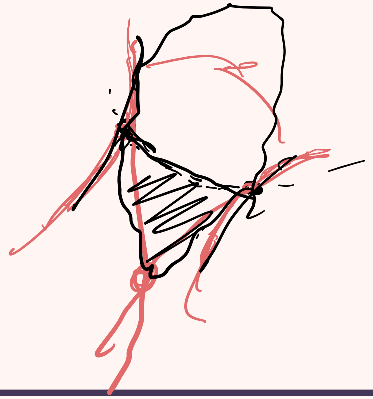


$$\to 2(n-1)$$









۷. تعدادی چوب روی زمین وجود دارند و دو بازیکن با آن‌ها بازی می‌کنند. هرکدام به نوبت در هر مرحله می‌تواند یک، دو یا سه چوب از چوب‌های روی زمین را حذف کند. بازیکنی که آخرین چوب روی زمین را حذف کند می‌بازد. به ازای چه تعدادی از چوب‌های اولیه، بازیکن دوم استراتژی برد دارد؟

1 دوم
2 اول
3 اول
4 اول
5 دوم

$4k+1$
نفر

1, 2, 3

t : $4k+1$

$4(k-1)+1 \xleftarrow{4-t}$ ✓

$4k+2$
~~2~~, 3, 4
1 2 3

$\underline{4k+1} \xleftarrow{r-1}$ بازیکن اول

جا شدن عوض شد

✓ نفر اول برد

۸. دو نفر با هم بازی می‌کنند. با شروع از یک رشته‌ی تهی، نفر اول در هر حرکت حرف a یا b را به انتهای رشته اضافه می‌کند. پس از آن نفر دوم یا کاری نمی‌کند یا جای دوتا از حروفی که تا کنون در رشته نوشته شده است را عوض می‌کند. پس از $2n-1$ مرحله بازی تمام می‌شود (هر مرحله شامل حرکت نفر اول و سپس حرکت نفر دوم است). ثابت کنید نفر دوم می‌تواند به نحوی بازی کند که فارغ از نحوه‌ی بازی نفر اول رشته‌ی پایانی آینه‌ای باشد (رشته‌ی آینه‌ای، رشته‌ای‌ست که از سمت چپ و راست به یک صورت خوانده شود).

$a\,x\,y$

- $y=a$ ✓
- $y \neq a$ $\quad a=x$ $\quad x, y$
- $y \neq a$ $\quad y=x$ $\quad a, x$

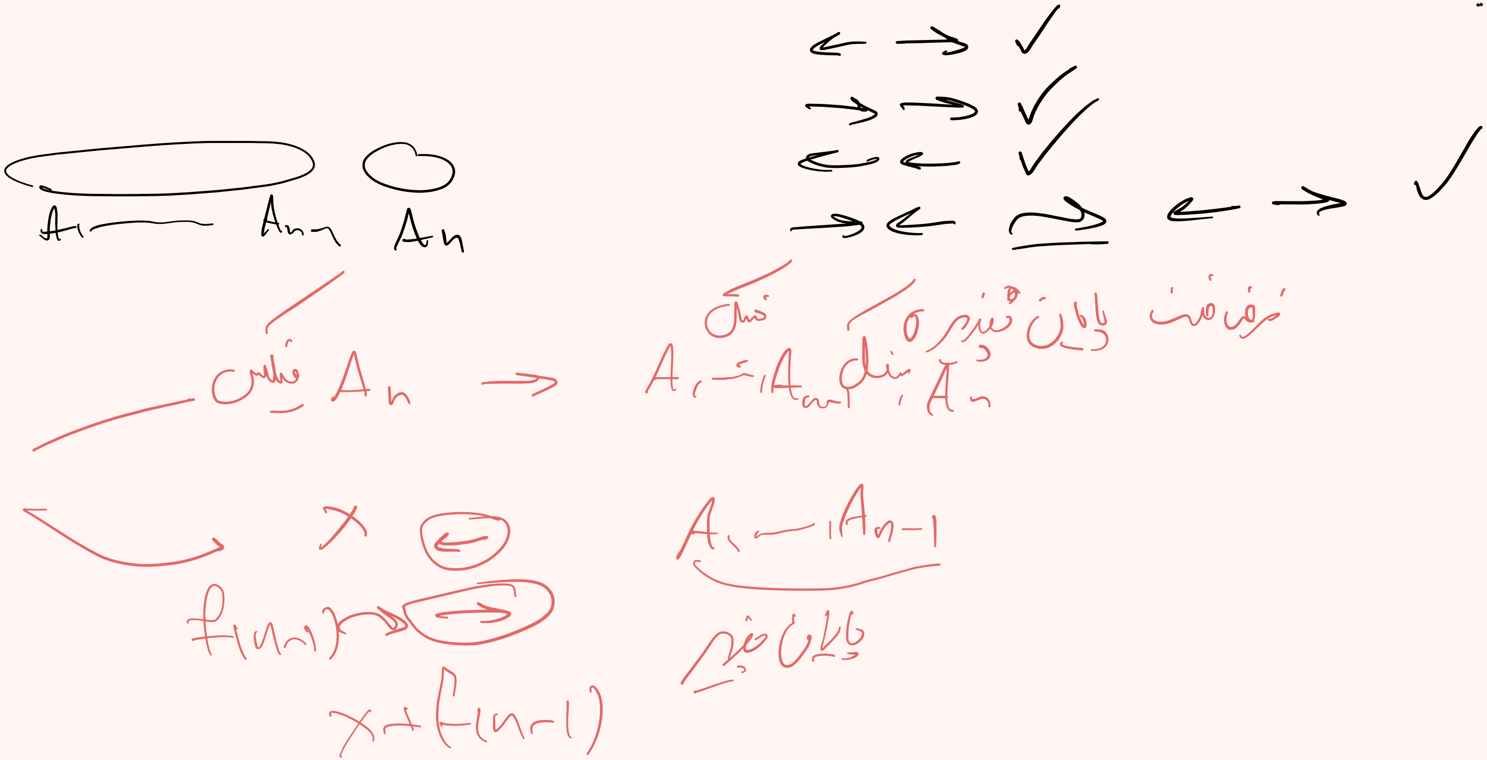
$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-1} \longrightarrow a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n+2}, \dots, a_{2n-1}$$

$a_{n+1} = a_{n-1}$ ✓

$a_{n+1} \neq a_{n-1}$

- $a_n = a_{n-1}$ $\qquad a_n \leftrightarrow a_{n+1}$
- $a_{n+1} = a_n$ $\qquad a_n \leftrightarrow a_{n-1}$

۹. یک دسته سرباز که در یک خط ایستاده‌اند. در لحظه‌ی اول با فرمان رئیس، بعضی به چپ و بعضی به راست می‌چرخند (پس از این دستور هر سرباز یا به سمت راست یا به سمت چپ ایستاده است). پس از این در هر ثانیه هر دو سربازی که روبه‌روی هم ایستاده‌اند ۱۸۰ درجه می‌چرخند (اگر به سمت چپ بودند پس از آن به سمت راست خواهند بود و اگر به سمت راست بودند به سمت چپ می‌شوند). ثابت کنید بعد از مدتی سربازها از حرکت می‌ایستند.



۱۰. عدد طبیعی a_0 داده شده است. برای هر عدد صحیح غیرمنفی n، عدد a_{n+1} از روی عدد a_n بر اساس قانون زیر به دست می‌آید: اگر آخرین رقم سمت راست a_n از ۵ بیشتر باشد $a_{n+1} = 9a_n$ است. در غیر این صورت رقم سمت راست a_n را کنار می‌گذاریم و ارقام باقی‌مانده نمایانگر a_{n+1} هستند. اگر a_{n+1} شامل هیچ رقمی نباشد، کار پایان می‌یابد. آیا به ازای هر a_0 دلخواه، این فرآیند پایان‌پذیر است؟

$1,2,3,4,5 \rightsquigarrow -$

$1, \dots, k \quad \to a_n = k+1 \to$ یکان $: 0,1,2,3,4,5 \qquad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{k+1}{10} \right\rfloor < k+1$

پایان‌پذیر ⇐ فرض استقرا ⇐ $a_{n+1} \leq k$

یکان $6,7,8,9 \quad 9a_n = a_{n+1} \overset{10}{\equiv} 4,3,2,1 \Rightarrow a_{n+2} = \left\lfloor \frac{a_{n+1}}{10} \right\rfloor$

$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{9a_n}{10} \right\rfloor < a_n \Rightarrow a_{n+2} \leq k \to$ پس a_{n+2}

فرض استقرا پایان‌پذیر

۱۱. n سکه با وزن‌های دوبه‌دو متمایز و یک ترازوی دوکفه‌ای داریم. ثابت کنید با حداکثر $\lceil \frac{3n}{2} \rceil - 2$ بار استفاده از ترازو، می‌توان سبک‌ترین و سنگین‌ترین سکه را پیدا کرد.

$n=2$ 1

$n=3$

$A > B$

فرض استقرا $n-2$

$$\overbrace{\left\lceil \frac{3(n-2)}{2} \right\rceil - 2} + 3 =$$

A

B

$n-2$

M N

max min

$$\left\lceil \frac{3(n-2+2)}{2} \right\rceil - 2$$

$$= \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil - 2$$

$A > B$

$\max(A, M)$ $\min(B, N)$

maximum min

مجزا

۱۲. دو مجموعه‌ی A و B از اعداد طبیعی داریم به طوری که برای هر $x \in A \cup B$، یا $x+1$ در A است یا $x-2$ در B است. نشان دهید تعداد اعضای مجموعه‌ی A دو برابر تعداد اعضای مجموعه‌ی B است.

x min B

$x-2 \in B \Rightarrow x+1 \in A \to x+1 \in A \cup B$

$x+1-2 = x-1 \in B$ $\times$

$x+1+1 = x+2 \in A$

$x \in B \to 1$

$x+1 \in A \to 2$

$x+2 \in A$

$x+3 \leq y$

$y+1 \in A$

$y-2 \in B \to x+3-2 = x+1$

$\to$ $|A| = 2|B|$

$|A|+2 \to |B|+1$

$|A|+2 = 2|B|+2 = 2(|B|+1)$

۱۳. برای اعداد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$ می‌دانیم:

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 2a_1,\ a_2 \leqslant a_3 \leqslant 2a_2,\ \dots,\ a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}$$

ثابت کنید در عبارت $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ می‌توان علامت‌های $\pm$ را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $0 \leqslant S \leqslant a_1$.

$0 \le a_1 \le a_2 \le 2a_1$

$S = -a_1 + a_2 \to 0 \le S \le a_1$ ✓

$0 \le a_2$

گام

$(a_2, \dots, a_n) \to n-1$

$\to S' = \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n \quad 0 \le S' \le a_2$

$S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = \pm a_1 \pm S'$

$0 \le a_1 \le S' \le a_2 \le 2a_1 \to 0 \le S' - a_1 \le a_1$

$0 \le S' \le a_1 \to 0 \le +a_1 - S' \le a_1$

۱۴. در یک پادگان هر سرباز یک رتبه دارد که عددی طبیعی است. یک سرباز با رتبه‌ی n، n روز نگهبانی می‌دهد و سپس n روز آزاد است، به همین ترتیب مجددا n روز نگهبانی می‌دهد و الی آخر. برای هر دو سرباز نسبت رتبه‌ی سرباز ارشد به دیگری حداقل ۳ است. اگر کمترین مقدار در میان رتبه‌های سربازها t باشد، ثابت کنید t روز متوالی وجود دارند که هیچ سربازی نگهبانی ندهد (شروع نگهبانی سربازها لزوما در یک روز نیست و ممکن است در یک روز چند سرباز نگهبانی بدهند).

$n-1 \to n$

$a_1 \le \dots \le a_n$

فرض استقرا

$a_2 \le \dots \le a_n \longrightarrow$ a_2 روز هست

$2,\dots,n$ هیچ نگهبانی نمیده

$3a_1 \le a_2$

$k \le a_1$ نمیده a_1

$3a_1$ تو این

$3a_1 \longrightarrow$ $2,\dots,n$ نمیده

نمیده $k \le t$ t t اینم نمیده

$k+2t \le 3t \longrightarrow$ t روز

$k \le t$

$3t$ تو روز $3t$

۱۵. یک زبان با n حرف الفبا داده شده است. یک بلوک از یک یا چند حرف پشت سر هم تشکیل شده است. ثابت کنید دنباله‌ای متناهی از حروف این زبان وجود دارد به طوری که هیچ دو بلوک مجاوری از آن یکسان نباشند، ولی هر حرفی به ابتدا یا انتهای آن اضافه کنیم دیگر این ویژگی برقرار نباشد.

$x_1 \cdots x_n$

الفبا: ۱ تایی $\quad x_1 \to \underbrace{x_1 x_1}$

۲ $\quad x_1 x_2 x_1$

$\sqrt{n} \longrightarrow n+1$

S_n

$S_n x_{n+1} S_n$

$S_n x_{n+1} S_n x_{n+1}$

$x_{n+1} S_n x_{n+1} S_n$

۱۶. یک دسته با n سنگریزه داده شده است. دو نفر با هم یک بازی انجام می‌دهند. هر کس در نوبت خود باید تمام دسته‌های موجود با بیش از یک سنگریزه را به دلخواه به دو دسته‌ی ناتهی تقسیم کند. اگر کسی در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است و فرد دیگر برنده است. به ازای هر یک از حالت‌های مختلف n چه کسی قطعا می‌تواند ببرد؟

1 دوم

$2 \to 1, 1$ اول

$3 \to 1, 2 \to 1, 1$ دوم

$5 \to 3, 2$ اول

$2^2, \dots, 2^3-2$

2^m-1 تا تقسیم دسته‌ها می‌دن 2^n-1 ← نفر دوم می‌بره

نفر اول

$1, \dots, 2^n-1$ ← فرض درسته

$X \in \{2^n, \dots, 2^{n+1}-1\}$

2^n-1 ← نفر اول طبق فرض استقرا استراتژی می‌برد

(1 ← $X \in \{2^n, \dots, 2^{n+1}-2\}$

2^n-1 کمتر داد

$2^{n+1}-2 \geq \geq 2^n$

$X \in \{2^n, \dots, 2^{n+1}-2\}$ ← نفر دوم استراتژی می‌برد

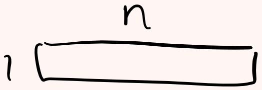
(2 $X = 2^{n+1}-1$

2^n-1 حداکثر

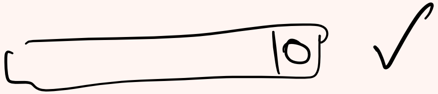
$2^n-1+2^n-1 = 2^{n+1}-2$

۱۷. یک جدول $n \times ۲$ داریم که ۲^n مهره در خانه‌های آن قرار دارند. در هر مرحله می‌توان یک خانه که حداقل ۲ مهره دارد را انتخاب کرد، ۲ مهره از آن را حذف کرده و یک مهره به خانه‌ی بالا یا راست آن اضافه کرد. ثابت کنید همواره می‌توان یک مهره به راست‌ترین خانه‌ی بالای جدول رساند.

لم ۱) 2^{n-1} ← به راست برون برسونیم ۱ مهره رو خونه راست‌ترین

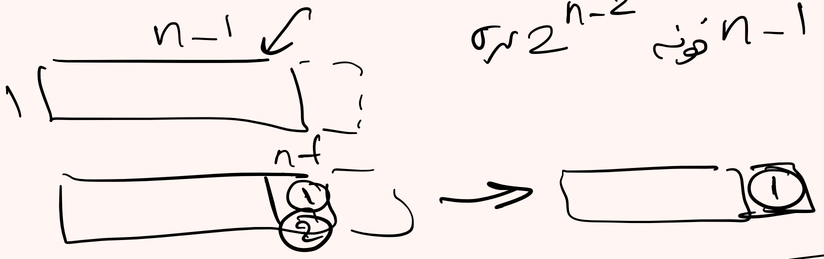


1) ✓



2) $2 \times 2^{n-2}$

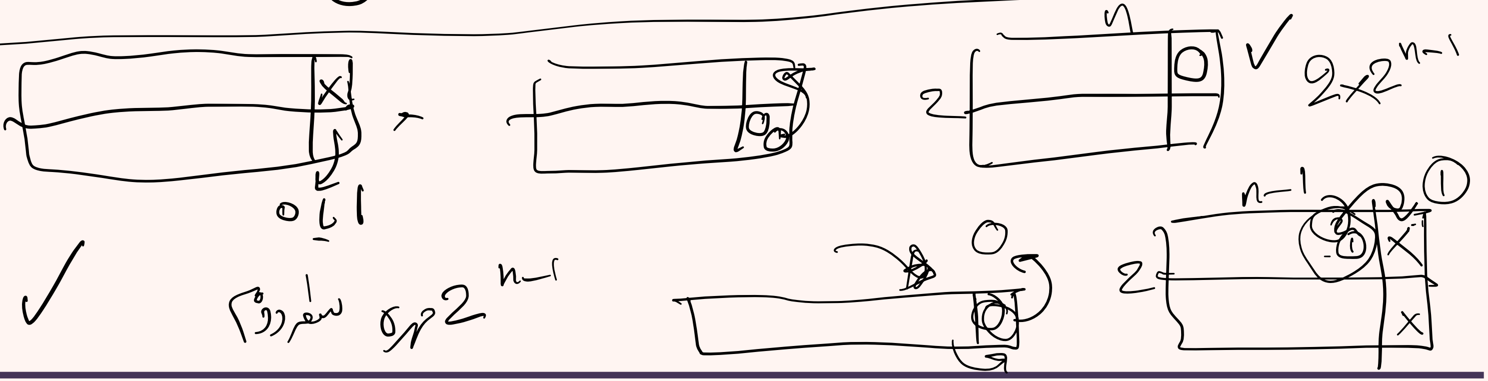
$n-1$ خونه 2^{n-2} مهره → ۱ دونه برسونیم راست‌ترین



2^n مهره → سطر بالا 2^{n-1} مهره باشه

۱ یا ۰

$2 \times 2^{n-1}$ ✓



اگه سطر اول 2^{n-1} مهره برسه → لم راست‌ترین ✓

سطر دوم 2^{n-1} مهره

۱۸. فرض کنید $n > ۴$ و $k = \frac{n(n+1)}{۶}$ عددی طبیعی باشد. مجموعه‌ی X شامل $۳k$ عضو است که kتا از آن‌ها سفید، kتا قرمز و kتا سبز هستند. ثابت کنید می‌توان زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ از X ساخت طوری که به ازای هر i، A_i دقیقا i عضو هم‌رنگ داشته باشد.

$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$3k = 3\frac{n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}$

$\overset{3}{\equiv} 2, 0$

$\{1, 2, \dots, n\}$

سبز قرمز ... قرمز

$\sum \#$ قرمز $= k = \frac{n(n+1)}{6}$

جمع پذیر $\leftarrow \sum \#$ سبز $= k$

$\sum \#$ سفید $= k$

$\to \{1, \dots, n\} \xleftarrow{\text{افراز}}$

$\{1, \dots, n\} \to A, B, C$

$A \leftarrow$ استقرا

k'

$A / \{1\} \cup \{n+3\} = k'-1+n+3$

$B \cup \{n+2\}$ $\quad k'+n+2$

$C \cup \{1\} \cup \{n+1\} \to k'+1+n+1$

$n \to n+3$

$\{1, \dots, n+3\} \to n+1, n+2, n+3$

$1, 2, 3, 4, 5 \quad 5$

$1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad 6$

۱۹. به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$\sqrt{۲\sqrt{۳\sqrt{۴\dots\sqrt{(n-۱)\sqrt{n}}}}} < ۳$$

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}} < m+1$$

$$\sqrt{n-1\sqrt{n}} < n \qquad (n-1)\sqrt{n} < n^2$$

حکم : $\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\sqrt{\cdots n}}} < m+2$

$$\sqrt{m\underbrace{\sqrt{(m+1)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}_{}} < \sqrt{m(m+2)} \leq m+1 \iff m(m+2) \leq (m+1)^2$$

$$m^2+2m \leq m^2+2m+1$$

$$0 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$\sqrt{2\cdots\sqrt{n}} < 2+1 = 3$$

۲۰. S مجموعه‌ای با ۲۰۰۲ عضو است. N عددی صحیح است طوری که $0 \leqslant N \leqslant 2^{2002}$. ثابت کنید می‌توان هر یک از زیرمجموعه‌های S را سیاه یا سفید کرد طوری که سه شرط زیر برقرار باشند:

- اجتماع دو زیرمجموعه‌ی سفید، سفید باشد.
- اجتماع دو زیرمجموعه‌ی سیاه، سیاه باشد.
- دقیقا N زیرمجموعه‌ی سفید داشته باشیم.

$m=1$ بدیهی.

$|S|=m$

$0 \leqslant N \leqslant 2^m \longrightarrow 0 \leqslant N \leqslant 2^{m-1} \leftarrow |S|=m-1$

$(*)\ 0 \leqslant N \leqslant 2^{m-1} \longrightarrow$

m زیرمجموعه بدون $\rightarrow 2^{m-1}$

m زیرمجموعه شامل $\rightarrow$ سیاه

$\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ زیرمجموعه

سفید سیاه $\rightarrow$ سفید N

$2^{m-1} < N \leqslant 2^m$

$\hookrightarrow N' = 2^m - N \ (**)$

$2^{m-1} > N' \geqslant 0$

S سفید N' رنگ سفید $\rightarrow$ سیاه

$2^m - N' = N \ (**)$

سیاه سیاه

سفید سفید

اجتماع دو سفید سفید

سیاه سیاه ~