



مسئله ۱. تابع [۱۵ نمره]

فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید.

$$\forall X \subseteq A : f(X) = \{b \in B \mid \exists a \in X (f(a) = b)\}$$

$$\forall Y \subseteq B : f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

در ضمن عملگر Δ برای دو مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

کدام یک از روابط زیر درست است (اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید).

$$1. \forall X, Y, Z \subseteq A : f(X \cap (Y \Delta Z)) = f(X) \cap (f(Y) \Delta f(Z))$$

$$2. \forall X, Y, Z \subseteq B : f^{-1}(X \cap (Y \Delta Z)) = f^{-1}(X) \cap (f^{-1}(Y) \Delta f^{-1}(Z))$$

مسئله ۲. متمم‌سازی [۱۵ نمره]

عملگر \oplus را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

«عبارت $a \oplus b$ درست است اگر و تنها اگر a و b تنها یکی درست باشد.»

با کدام لیست (ها) از علائم زیر می‌توان نقیض یک عبارت را به دست آورد؟ (در هر قسمت ادعای خود را با مثال یا اثبات نشان دهید)

$$\oplus, \rightarrow$$

$$\oplus, \vee$$

مسئله ۳. جزء صحیح [۲۰ نمره]

نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی $x \geq 0$ داریم

$$[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{x}]$$

مسئله ۴. کاردینالیتی [۲۰ نمره]

فرض کنید s و s' دو پارخط با طول بزرگتر از صفر باشند. فرض کنید A مجموعه‌ای متناهی از نقاط روی پارخط s' باشد. نشان دهید کاردینالیتی مجموعه‌ی نقاط روی پارخط s و مجموعه نقاط روی پارخط s' منهای مجموعه‌ی A باهم برابرند.

مسئله ۵. منطق [۳۰ نمره]

۱. از فرضیات $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$ ، $p \rightarrow (p \vee \neg r)$ و $q \rightarrow \neg r$ و $q \rightarrow p$ ، $\neg r$ قابل استنتاج است (دلیل خود را ذکر کنید).

۲. آیا $\exists x P(x)$ و $\forall x (P(x) \vee \exists y P(y))$ هم ارز هستند؟ دلیل خود را ذکر کنید.