رابطه ها و ترتیب جزئی (۱۴۰۳/۲/۴)

رابطه ها
خواص
عملگر
نمایش
بستارها

• رابطه ها:

به ازای دو مجموعهٔ A و B هر زیرمجموعهٔ از $A\times B$ ، یک رابطه از A به B نامیده می‌شود.

نماد:

$$(a,b)\in R \longleftrightarrow aRb$$
$$(a,b)\notin R \longleftrightarrow a\not R b$$

• نکته: یک تابع از A به B رابطه‌ای است که هر عضو از A به عنوان مؤلفهٔ اول دقیقاً یک دوتایی ظاهر شود.

$R=\{(1,3),(2,5),(4,12)\}$

• نکته: یک رابطه از A به A را یک رابطه روی A می نامیم. (2^{n^2} رابطه روی A داریم)

$$A\times A=\{\begin{matrix}(1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots\\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots\\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{matrix}\}$$

خواص رابطه ها:

فرض کنید R یک رابطه روی A باشد. آن‌گاه: ($|A|=n$)

- R بازتابی است اگر $\forall a\in A:(a,a)\in A$ ⟵ 2^{n^2-n} رابطهٔ بازتابی روی A وجود دارد.
- R متقارن است اگر $(a,b)\in R\rightarrow(b,a)\in R$ ⟵ $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ رابطهٔ متقارن روی A وجود دارد.
- R پادمتقارن است اگر $(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\rightarrow a=b$ ⟵ $2^n\times 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ رابطهٔ پادمتقارن روی A وجود دارد.
  هر بسته ۳ حالت مجاز دارد.
- R ترایایی است اگر $(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R\rightarrow(a,c)\in R$

• مثال: رابطه های $<$ $\nless$ $=$ $\leq$ را از جهت داشتن خواص فوق بررسی کنید.

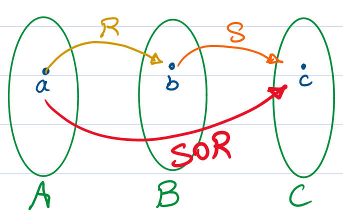
عملگرهای رابطه ای:

- عملگرهای مجموعه ای ($\cap$ $\cup$ $-$ Δ $\cdots$)
- متمم $\overline{R}=\{(a,b)\mid(a,b)\notin R\}$
- وارون $R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$
- ترکیب
- توان

• ترکیب دو رابطه:

اگر $R=A\times B$ باشد و $S\subseteq B\times C$ آن‌گاه

$$S\circ R=\{(a,c)\mid \exists b\,;(a,b)\in R\wedge(b,c)\in S\}$$



• مثال:

$R=\{(k,3k+1)\mid k\in\mathbb{Z}\}$

$R^2=\{(k,3(3k+1)+1)\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{(k,9k+4)\mid k\in\mathbb{Z}\}$

• تعریف: اگر R یک رابطه روی A باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}R^n=R^{n-1}\circ R\\ R^1=R\end{cases}$$

• **قضیه :** R ترایایی است اگر و فقط اگر $\forall n\geq 1;\ R^n\subseteq R$

اثباتِ ⟵ : اگر $R^2\subseteq R$: $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \rightarrow (a,c)\in R^2 \rightarrow \underbrace{(a,c)\in R}_{\text{تعریف ترایایی}}$ □

اثباتِ ⟶ : اگر R ترایایی باشد، با استقرا روی n، نشان می‌دهیم $R^n\subseteq R$ است.

• پایه : $R^1\subseteq R$ ✓

• گام : $(a,c)\in R^n \rightarrow (a,c)\in R^{n-1}\circ R \rightarrow \exists b;\ (a,b)\in R \wedge (b,c)\in R^{n-1}$

$$\xRightarrow{\text{فرض استقرا } (R^{n-1}\subseteq R)} (a,b)\in R \wedge (b,c)\in R$$

$$\xRightarrow{\text{ترایایی بودن}} (a,c)\in R$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R^n\subseteq R}}$$ □

• نمایش رابطه‌ها :

نمایش رابطه

$A=\{a_1,\dots,a_n\}$

$B=\{b_1,\dots,b_m\}$

$R\subseteq A\times B$

⟵ به صورت ماتریس $M_R=[m_{ij}]_{n\times m}$

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (\text{اگر } a_i R b_j)\\ 0 & (\text{در غیر این صورت})\end{cases}$$

⟵ بازنمایی خواص یک رابطه روی A با استفاده از ماتریس رابطه :

- بازتابی $I_n \leq M_R$
- متقارن $M_R = M_R^T$
- پادمتقارن $M_R \cap M_R^T \leq I_n$
- ترایایی $M_{R^2} \leq M_R$

• **نکته :** ماتریسِ رابطه بولی است؛

جمع و ضرب روی آن معادل OR و AND است :

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$$

$$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S$$

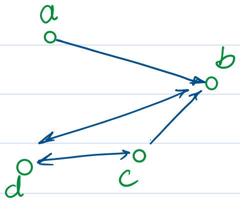
$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$$

ضرب بولی

$$M_{R^n} = M_R^{\,n}$$

• گراف یک رابطه :

به ازای aRb یک یال جهت دار از a به b در گراف وجود دارد.



• **قضیه :** در گراف رابطهٔ R، مسیری به طول n از a به b وجود دارد $\longleftrightarrow (a,b)\in R^n$

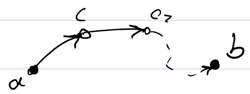
• **اثبات :**

$(a,b)\in R^n$

$\longleftrightarrow (a,b)\in R^{n-1}\circ R$

$\longleftrightarrow \exists c;\ (a,c)\in R \wedge (c,b)\in R^{n-1}$

$\longleftrightarrow$ استقرا :



$\longleftrightarrow$ (مسیری به طول n از a به b وجود دارد.) □

● بَستار رابطه :

بَستار رابطهٔ R نسبت به ویژگی P عبارت است از کوچکترین رابطه‌ای که R را شامل می‌شود و ویژگی P را دارد.

قضیه : فرض کنید R یک رابطه روی A باشد، آن‌گاه :

بستار بازتابی $R = R \cup \{(a,a) \mid a\in A\}$

بستار متقارن $R = R \cup R^{-1}$

$\bigstar$ بستار ترایایی $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^*$ $\bigstar$

در عمل : $R^* = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$ $(n=|A|)$

اثبات: فرض کنید S ترایایی و $R\subseteq S$، چون S ترایایی است، $S^*\subseteq S$

از طرفی $R^*\subseteq S^*$ چون هر مسیر در R، مسیری در S است. $\Leftarrow$ $R^*\subseteq S^*\subseteq S$ □

(R^* مینیمم است)

(ادامه ۱۴۰۳,۲,۹)

● محاسبه بستار ترایایی :

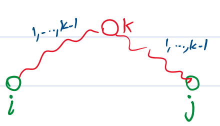
● الگوریتم کلاسیک

```
Transitive Closure (M_R):
    A = B = M_R
    for i=2 to n:
        A = A ⊙ M_R      ← O(n^3)
        B = B ∨ A
    return B
```

$\leftarrow O(n^4)$

الگوریتم وارشال (۱۹۶۰) :

با شروع از $W_0=M_R$ در مرحله k ام، تمام مسیرهایی که رئوس میانی آنها از مجموعه $\{1,\dots,k\}$ هستند را می‌یابیم.




```
warshal (M_R):
    W = M_R
    for k=1 to n:
        for i=1 to n:
            w_ij = w_ij ∨ (w_ik ∧ w_kj)
    return W
```

$\rightarrow O(n^3)$

● رابطهٔ هم‌ارزی :

رابطه‌ای که متقارن، بازتابی، و ترایایی است. (مثلاً همنهشتی به پیمانهٔ m)

نماد $a\sim b$

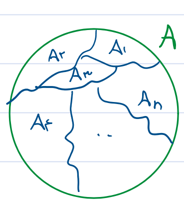
● **تعریف:** اگر $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد، تمام اعضای A که با a رابطهٔ هم ارزی دارند، کلاس هم‌ارزی a نامیده شده و با $[a]$ نمایش می‌دهیم.

* مثال : همنهشتی به پیمانهٔ ۳ :

$[0]_3 = \{3k \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$[1]_3 = \{3k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$[2]_3 = \{3k+2 \mid k\in\mathbb{Z}\}$



قضیه : یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A، مجموعه A را به گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مجزا از کلاسهای هم‌ارزی ، افراز می‌کند.

ترتیب جزئی :

رابطه ای که بازتابی، پادمتقارن، و ترایایی است.

تعریف: مجموعهٔ A به همراه ترتیب جزئی R، یک مجموعهٔ مرتب جزئی partially ordered set (poset) نامیده شده و با (A,R) نمایش داده می شود.

مثال: $(\mathbb{R},\geq)$ / $(P(S),\subseteq)$ / $(\mathbb{N},|)$

عاد کردن

تعریف: در مجموعهٔ مرتب جزئی $(A,\preccurlyeq)$، دو عنصر $a,b\in A$ قابل مقایسه اند اگر $a\preccurlyeq b$ یا $b\preccurlyeq a$.

≼ نمادی است که برای یک ترتیب جزئی به کار می رود می تواند $\leq$ ، $\subseteq$ ، $|$ ، ... باشد.

مثال: در $(\mathbb{N},|)$:

۲ و ۶ قابل مقایسه اند؛ ✓

ولی ۲ و ۷ قابل مقایسه نیستند چون ۲∤۷ و ۷∤۲ ✗

تعریف: اگر در $(A,\preccurlyeq)$ هر دو عنصر A قابل مقایسه باشند، $\preccurlyeq$ یک رابطهٔ ترتیب کامل و $(A,\preccurlyeq)$ یک مجموعهٔ کاملاً مرتب (زنجیر) نامیده می شود.

مثال: $(\mathbb{R},\geq)$ ✓

$(P(S),\subseteq)$ ✗

ترتیب قاموسی (lexicographic) اگر $(A,\preccurlyeq_1)$ و $(B,\preccurlyeq_2)$ دو مجموعهٔ مرتب جزئی باشند، آنگاه ترتیب قاموسی $\preccurlyeq$ روی $A\times B$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$(a,b)\preccurlyeq(a',b') \Longleftrightarrow a\prec_1 a' \vee (a=a' \wedge b\preccurlyeq_2 b')$$

نمودار هاس (Hasse)

قضیه: گراف رابطهٔ یک ترتیب جزئی، دارای دوری به طول بیشتر از یک نیست.

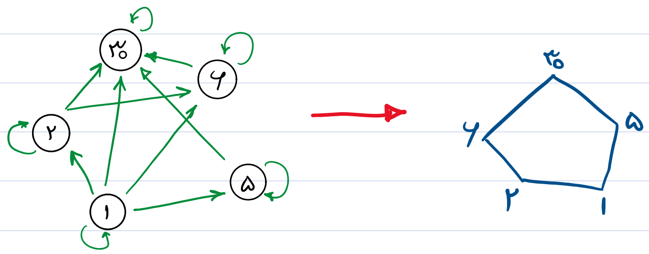
اثبات: فرض کنید گراف دارای دوری با طول $k>1$ است

$a_1\preccurlyeq a_2\preccurlyeq\cdots\preccurlyeq a_k\preccurlyeq a_1$ ← بنابر خاصیت ترایایی داریم $a_1\preccurlyeq a_k$ از طرفی $a_k\preccurlyeq a_1$ و در نتیجه بنابر خاصیت پادمتقارن، $a_1=a_k$ □

مراحل تشکیل نمودار هاس :

- تمام طوقه ها را حذف می کنیم.
- به ازای هر سریال $a\to b$ / $b\to c$ / $a\to c$ ، یال ac را حذف می کنیم.
- رأس ها را طوری قرار می دهیم که جهت تمام یال ها رو به بالا باشد؛ سپس جهت ها را حذف می کنیم.

مثال: نمودار هاس $(\{۱,۲,۵,۶,۳۵\},\ |)$



مثال: نمودار هاس $(\{۱,۲,۵,۶,۳۵\},\ \leq)$

بهمین دلیل است که به ترتیب کامل زنجیر می گویند!

ادامهٔ رابطه‌ها - کران‌ها و مشبکه‌ها (۱۴۰۳/۲/۱۱)

کران ها :

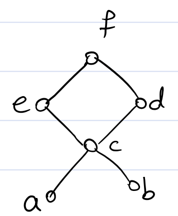
فرض کنید $(A,\preceq)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی باشد.

← $a\in A$ یک عضو مینیمال A است اگر برای هیچ عضو دیگر $b\in A$، $b\prec a$ نباشد.

← $a\in A$ کوچکترین عضو A است: اگر به ازای هر $b\in A$، $a\preceq b$ باشد.
(the least element)

(ماکزیمال و بزرگترین عضو، بطور مشابه تعریف می‌شود)
(the greatest element)

• مثال :



بزرگترین عضو: f
کوچکترین عضو: $\times$
ماکزیمال : f
مینیمال : a و b

• تعریف : فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد؛

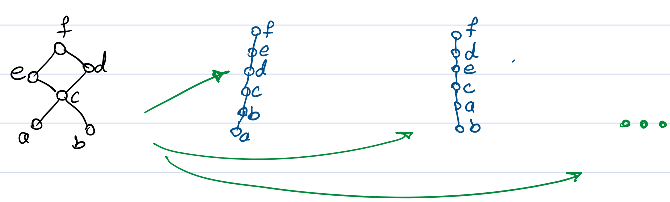
- $x\in A$ یک کران بالا برای S است اگر به‌ازای هر $a\in S$، $a\preceq u$ باشد. (upper bound)
- $x\in A$ یک کران پایین برای S است اگر به ازای هر $a\in S$، $a\succeq u$ باشد. (lower bound)

← مهم : lub : least upper bound (کوچکترین کران بالا)
glb : greatest lower bound (بزرگترین کران پایین)

(شبیه به مفهوم سوپریمم و اینفیمم که روی اعداد حقیقی و chain ها تعریف می شدند.)

ترتیب توپولوژیکی : (خطی سازی)

ایجاد یک ترتیب کامل، از یک ترتیب جزئی؛
طوریکه تمام روابط جزئی در ترتیب کامل حفظ شود.



• الگوریتم مرتب سازی توپولوژیکی :

```
topological_sort (A,≤):
    k=1
    while A≠∅ :
        a_k = a minimal element of A
        A = A \ {a_k}
        k = k+1
    return (a_1,a_2,...,a_n)
```

• مشبکه : (lattice)

یک مجموعهٔ مرتب جزئی که هردو عضو آن دارای lub و glb است.

نماد : $a\wedge b = glb(a,b)$ (meet)
$a\vee b = lub(a,b)$ (join)

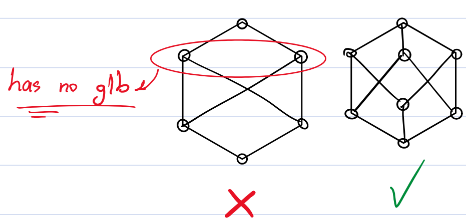
• مثال : در ترتیب جزئی $(\mathbb{N}, |)$:

glb : ب.م.م   lub : ک.م.م

• مثال : در ترتیب جزئی $(P(S),\subseteq)$:

$glb(A,B) = A\cap B$
$lub(A,B) = A\cup B$

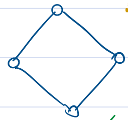
• مثال :



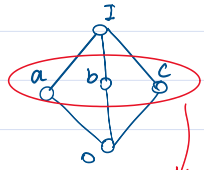
← **مشبکهٔ توزیع‌پذیر:** مشبکه‌ای که به‌ازای هر سه عضو a,b,c از آن،

$$\begin{cases} a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)\\ a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\end{cases}$$

• مثال:



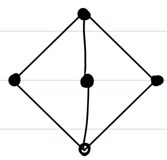
توزیع‌پذیر است ✓

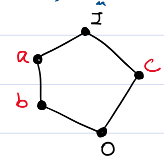


برای اینها توزیع‌پذیر نیست!

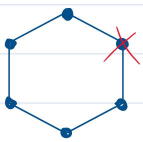
پس لاتیس توزیع‌پذیر نیست! ✗

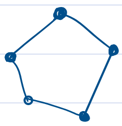
• **قضیه:** یک مشبکه توزیع‌پذیر است اگر و تنها اگر شامل یکی از زیرساختارهای زیر نباشد:





• مثال:





(می‌توان گفت هر مسیر بسته با حداقل ۵ عضو باعث می‌شود مشبکهٔ ما توزیع‌پذیر نباشد!)

پس توزیع‌پذیر نیست!

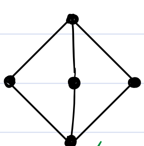
← **مشبکهٔ کران‌دار:** مشبکه‌ای که دارای کوچک‌ترین عضو (0) و بزرگ‌ترین عضو (I) است.

• **تعریف:** به‌ازای هر عضو a از مشبکهٔ کران‌دار L، عضو $\bar a\in L$ را متمم a گویند اگر $a\wedge\bar a=0$ و $a\vee\bar a=I$

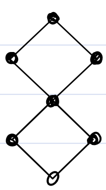
(متمم لزوماً یکتا نیست!)

• **تعریف:** مشبکه L متمم‌دار است اگر هر عضو آن دارای متمم باشد.

• مثال:



✓



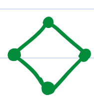
✗

• جبر بول:

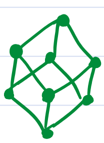
یک مشبکهٔ توزیع‌پذیر متمم‌دار را جبر بول می‌نامیم

$B=(\{0,1\},\leq)$

B_2 :



B_3 :



⋮

• مثال: $D_6=(\{1,2,3,6\},|)$ یک جبر بول است ✓

• **قضیه:** یک مشبکهٔ متناهی جبر بول است اگر و فقط اگر نمودار هاس آن با یکی از B_n $(n\geq 1)$ ها یک ریخت باشد.

• **اصل دوگانی:** اگر در یک تساوی در جبر بول برقرار باشد، دوگان آن نیز برقرار است.

$\wedge\leftrightarrow\vee$

$I\leftrightarrow 0$

• مثال:

$$x\wedge(x\vee y)=x \quad\longrightarrow\quad x\vee(x\wedge y)=x$$

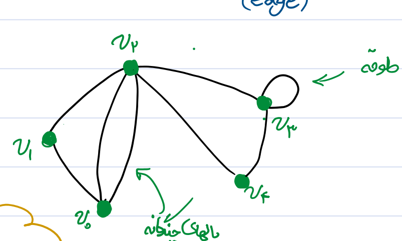
$$(\overline{x\wedge y})\vee(x\wedge y)=1 \quad\longrightarrow\quad (\overline{x\vee y})\wedge(x\vee y)=0$$

نظریه گراف ها
تعاریف
گرافهای خاص
گرافهای دوبخشی
نمایش گرافها
یکریختی

نظریهٔ گراف‌ها (جلسه ۱ - ۱۴۰۳/۲/۱۶)

گراف‌ها

گراف $G=(V,E)$ تشکیل شده از یک مجموعهٔ V از رأس‌ها (vertex) و یک مجموعهٔ E از یالها (edge) که رأسها را به هم متصل می‌کند.



$n=|V|$ n: تعداد رئوس
$m=|E|$ m: تعداد یالها
$deg(v)$: درجهٔ رأس v = تعداد یالهای واقع بر v

انواع گراف ها
- **گراف ساده**: گرافی که طوقه و یال چندگانه ندارد.
- **گراف چندگانه**: گرافی که یال چندگانه دارد.
- **گراف جهت دار**: گراف با یالهای جهت دار.

• **قضیه (لم دست دادن)**: $\sum_{v\in V} deg(v) = 2m$

• **اثبات**: هر یال در این مجموع دوبار شمرده می‌شود.

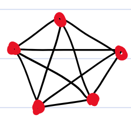
• **قضیه**: در هر گراف تعداد رأسهای فرد، زوج است.

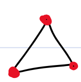
• **اثبات**: V_1: مجموعهٔ رأسهای فرد
V_2: مجموعهٔ رأسهای زوج

$$2m=\sum_{v\in V} deg(v) = \sum_{v\in V_1} deg(v) + \underbrace{\sum_{v\in V_2} deg(v)}_{\text{زوج}} \Rightarrow \sum_{v\in V_1} deg(v) = 2k \qquad \square$$

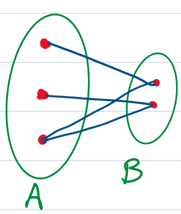
رده‌های خاص از گراف‌های ساده:

* **گراف کامل**: گرافی که بین هر دو رأس آن یک یال وجود داشته باشد.
گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهند.


K_5

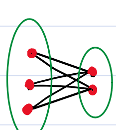

K_3

* **گراف دوبخشی**: گرافی که رأس های آن را می‌توان به دو بخش A و B افراز کرد؛ بطوریکه یک سر هر یال در A و سر دیگر آن در B است.

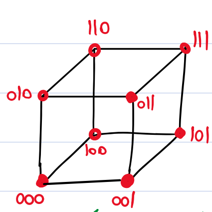


$G(A\cup B, E)$
برای تأکید روی دوبخشی بودن اینگونه نمایش می‌دهند.

* **گراف دوبخشی کامل** (Complete bipartary Graph):
گراف دوبخشی که بین هر رأس از بخش A و هر رأس از بخش B یال وجود دارد.


$K_{3,2}$

* **گراف k-مکعب**:
گرافی که رأسهای آن رشته‌های دودویی به طول k است؛ (با Q_k نمایش می‌دهند)
و دو رأس به هم متصل اند اگر تنها در یک بیت باهم اختلاف داشته باشند.
(فاصلهٔ همینگ آنها 1 باشد)



گراف ۳-مکعب Q_3

• تعداد رأس ها: 2^k
• تعداد یال ها: $2^{k-1}\times k$

• **قضیه:** هر گراف k-مکعب دوبخشی است.

• **اثبات:** کافی است دو دسته V_1 و V_2 معرفی کنیم که در داخل آنها هیچ یالی وجود نداشته باشد.

$V_1 \to$ رأس‌ها با تعداد بیت 1 فرد

$V_2 \to$ رأس‌ها با تعداد بیت 1 زوج

هیچ یالی بین دو رأس از V_1 (یا دو رأس از V_2) وجود ندارد. □

• **قضیه:** یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر (iff) هیچ دور فردی نداشته باشد.

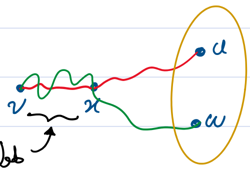
• **اثبات:**

جهت ⇐ : $G=(A\cup B, E)$ گراف دوبخشی باشد، در این صورت هر مسیر از A به A (از B به B) تعداد زوج یال دارد. (بدیهی)

جهت ⇒ : فرض کنید G دور فرد ندارد؛ رأس دلخواه v را در نظر بگیرید؛ رأسهای G را به دو بخش زیر افراز می‌کنیم:

$V_1=\{u;\ d(v,u)\ \text{زوج}\}$

$V_2=\{u;\ d(v,u)\ \text{فرد}\}$

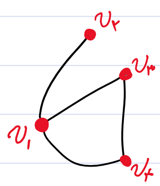


طول مسیر یکسان (کوتاه‌ترین مسیر)

بین رأسهای V_1 (و مشابهاً V_2) یالی وجود ندارد؛ زیرا در صورت وجود، یک دور به طول فرد تشکیل می‌دهند. □

فاصلهٔ دو رأس v و u در یک گراف (طول کوتاه‌ترین مسیر) را با $d(u,v)$ نمایش می‌دهند.

• نمایش گراف‌ها:



★ **لیست مجاورت** (Adjacency list): رأس‌های متصل به هر رأس را در یک لیست (پیوندی) نگه می‌داریم. (linked list :) $O(n+m)$

$v_1 \to v_2 / v_3 / v_4$

$v_2 \to v_1$

$v_3 \to v_1, v_4$

$v_4 \to v_1, v_3$

★ **ماتریس مجاورت:** یک ماتریس صفر و یک $n\times n$ که درایهٔ (i,j) اُم آن یک است اگر بین v_i و v_j یال وجود داشته باشد.

حافظهٔ لازم: $O(n^2)$

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

← اگر گراف جهت‌دار نباشد، ماتریس مجاورت آن متقارن است. برای مثال ماتریس مجاورت مثال قبل:

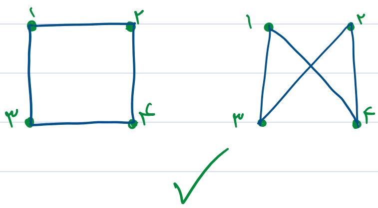
← اینکه لیست بهتر است یا ماتریس، باید به چگالی و فشردگی گراف توجه کنیم.

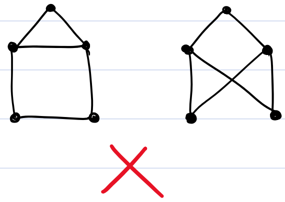
← گراف‌های کم یال ← قطعاً لیست بهتر است.

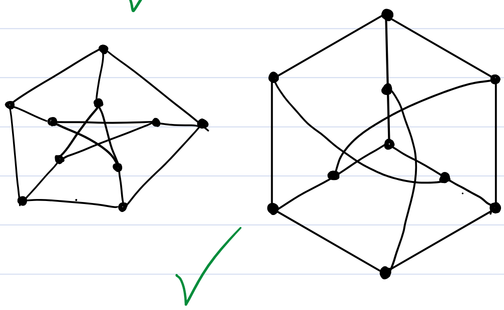
← گراف‌های پُر یال ← شاید ماتریس بهتر باشد.

(البته تفاوت اصلی سر بحث حافظه است)

یک ریختی گراف (isomorph): دو گراف $G=(V,E)$ و $G'=(V',E')$ یکریخت هستند اگر یک تناظر یک‌به‌یک $f:V\to V'$ وجود داشته باشد؛ طوری که رأسهای v و u در G مجاورند اگر $f(v)$ و $f(u)$ در G' مجاور باشند.







- مسائل یکریختی جزو مسائل NP هستند ت

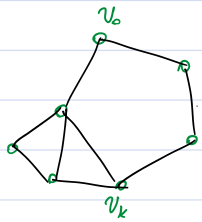
یعنی با order چندجمله‌ای نمی‌توان کشف کرد.

(GI class)

نظریهٔ گراف‌ها (جلسه ۲ - ۱۴۰۳/۲/۲۳)

• مسیر

دنبالهٔ $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$ با شرط $e_i=(v_{i-1},v_i)$ را یک مسیر به طول k نامیده می‌شود.



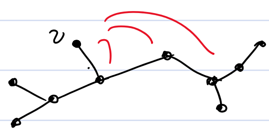
• مسیر ساده: در تعریف بالا اگر هیچ یک از v_i ها تکراری نباشد، یک مسیر ساده گویند. (path)
در غیر اینصورت به آن گشت گویند. (walk)

• دور: یک مسیر سادهٔ بسته ($v_0=v_k$) را یک دور می‌نامیم. (cycle)
a closed Path → cycle

• مدار: و یک گشت بسته را یک مدار می‌نامیم. (circuit)
a closed Walk → Circuit

→ قضیه: اگر در گراف سادهٔ G درجهٔ هر رأس حداقل $k\geq 2$ باشد، آن‌گاه G شامل یک مسیر ساده به طول حداقل k، و دوری به طول $k+1$ است.

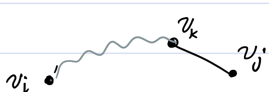
→ اثبات: (اثبات‌های اکسترمال)
مسیر ماکزیمال P را در نظر بگیرید.



(رأس انتهایی مسیر را در نظر می‌گیریم، حتماً باید تمام همسایه‌هایش در مسیر باشند
پس $k-1$ رأس دیگر در مسیر موجود است پس طول مسیر حداقل k است.)
□

→ قضیه: اگر A ماتریس مجاورت گراف G باشد، آن‌گاه مسیری به طول r از v_i به v_j برابر است با درایهٔ $(A^r)_{i,j}$

→ اثبات: (استقرا)
هر مسیر به طول k بین v_i و v_j،
تشکیل شده از یک مسیر به طول $r-1$ از v_i به v_k $(1\leq k\leq n)$ دلخواه
و یال $v_k v_j$؛



$A^{r-1}=(b_{ij})$

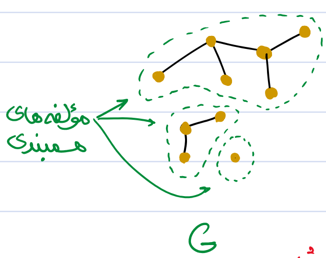
$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\cdot a_{kj}=(A^{r-1}\times A)_{i,j}=(A^r)_{i,j}$$

b_{ik}: تعداد مسیر از v_i به v_k
a_{kj}: تعداد یال بین v_k و v_j

• نکته: لزوماً تعداد مسیرهای ساده را نمی‌دهد!
تمام مسیرهای ممکن (گشت) را می‌دهد!

• همبندی

گراف سادهٔ G همبند است، اگر بین هر دو رأس آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.
(اگر هر دو رأس آن همبند باشند)

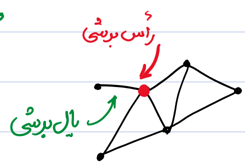


*تعاریف:

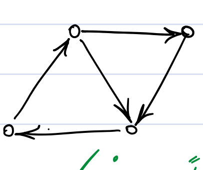
مؤلفهٔ همبندی (Connected Component): یک زیرگراف همبند ماکزیمال

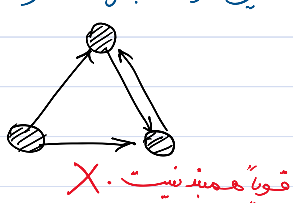
رأس برشی (cut vertex): رأسی که حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف را افزایش می‌دهد.

یال برشی (cut edge): یالی که 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃



گراف قویاً همبند (strongly connected):
گراف جهت‌داری که به ازای هر دو رأس v_i و v_j از آن، مسیری از v_i به v_j، و مسیری از v_j به v_i وجود داشته باشد.

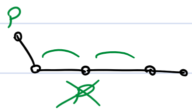




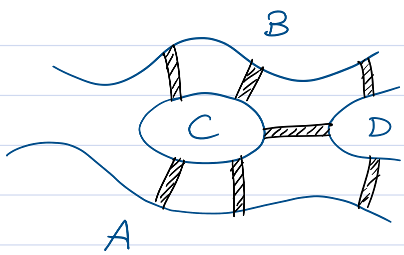
اگر جهت‌ها را حذف کنیم به آن گراف زمینه می‌گویند
و اگر گراف زمینهٔ یک گراف جهت‌دار، همبند باشد
همبندی ضعیف (weakly connectivity)
تعریف می‌شود.

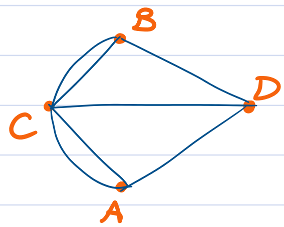
قضیه : هر گراف با حداقل دو رأس، دارای حداقل دو رأس غیر برشی است.

اثبات : دو سر هر مسیر ماکزیمال P ، غیر برشی است. □



• مدارهای اویلری

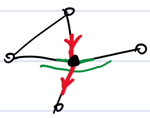




یک گراف، اویلری است ؛
اگر مداری داشته باشد، که از هر یال گراف
دقیقاً یک بار عبور کند. (مدار اویلری)

X اویلری نیست!

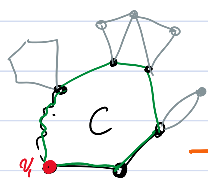
قضیه : گراف همبند G اویلری است ؛ اگر و تنها اگر درجهٔ همهٔ رئوس آن زوج باشد.



اثبات : ⇐ : هربار عبور از یک رأس از دو یال غیرتکراری استفاده می کنیم ⟵ درجهٔ همهٔ رئوس زوج است.

⇒ : شرط لازم بدیهی، شرط کافی هم هست :)

با استقرا روی تعداد یالها :



از گراف دور C را حذف می‌کنیم ⟵ زوجیت ثابت می ماند (ممکن است ناهمبند شود!) ⟵ روی مولفه های همبندی باقیمانده استقرا می زنیم.

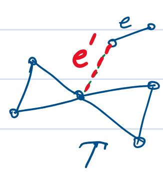
(نتیجهٔ ضمنی : هر گراف زوج را می توان به تعدادی دور افراز کرد!)

اثبات دیگر قضیهٔ اویلر : (اثبات اکسترمال)

گشت ماکزیمم T را در نظر بگیرید (که قطعاً بسته است - چون هنگام ورود به هر رأس غیر شروع، تعداد زوجی یال استفاده شده؛ و یالی برای ادامه وجود دارد)

فرض کنید یالی مثل e وجود دارد که توسط T طی نشده!

آن گاه با ماکزیمم بودن T به تناقض می رسیم!

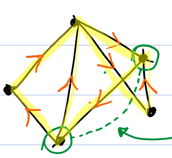


• قضیه : (مسیر اویلری که دو رأس فرد)

اگر 2k رأس فرد داشته باشیم، k مسیر اویلری خواهیم داشت. (ابتدا و انتهای این مسیرها، همان رئوس فرد هستند)

• اثبات :

k تا یال اضافه می کنیم (به رئوس فرد) تا گراف زوج و در نتیجه اویلری شود؛ پس یک مدار اویلری داریم. حالا اگر آن k یال را حذف کنیم. این مدار اویلری به k تکه تقسیم می شود پس در نتیجه k مسیر اویلری خواهیم داشت.

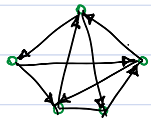


گراف ها
تورنمنت ها
گراف‌های همیلتنی
قضیهٔ دیراک

نظریهٔ گراف‌ها (جلسه ۳ - ۱۴۰۳/۲/۲۵)

تورنمنت‌ها

گراف جهت داری که گراف زمینهٔ آن کامل است.



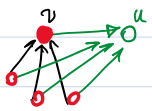
• قضیه: اگر یک تورنمنت دارای دور باشد، آن گاه دارای دور با طول ۳ است.

• اثبات: فرض کنید کوچکترین دور $P_1 \to P_2 \to P_3 \to \dots \to P_k$ به ازای $k>3$ باشد.

یال بین $P_1 P_3$ را در نظر بگیرید
اگر $P_1 \to P_3$: دور کوتاهتری به صورت $P_1 \to P_3 \to \dots$ داریم. $\times$
اگر $P_3 \to P_1$: دور به طول ۳ داریم $\times$

• قضیه: **King vertex**: درهر تورنمنت، رأسی وجود دارد که از تمام رأسهای دیگر با مسیری به طول حداکثر ۲ قابل دسترسی است. (بقیه را غیرمستقیم یا مستقیم بُرده است) و رأس با بیشترین ورودی، شاه است. (برعکس برقرار نیست لزوماً)

اثبات: فرض کنید v رأس با بیشترین درجهٔ ورودی باشد؛ ادعا کنیم v شاه است؛ زیرا در غیر اینصورت؛



u ای وجود دارد که v از آن باخته، و نسبت به تمام کسانی که از آنها برده هم برده است.
پس درجهٔ ورودی آن، طبق تصویر، بیشتر از v می‌شود $\times$

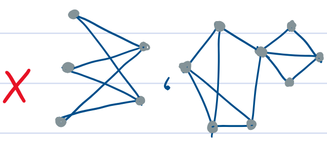
• گراف‌های همیلتنی

• مثال: گراف کامل، Q_k، $K_{n\times n}$ ✓
(مکعب - k) (گراف دوبخشی کامل $n\times n$)

دور همیلتنی: دوری که از تمام رئوس گراف دقیقاً یکبار عبور می کند.

گراف همیلتنی: گراف همیلتنی گرافی است که دور همیلتنی دارد.

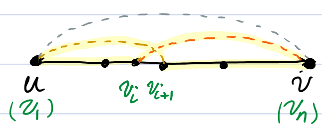
• مثال:



• قضیه (دیراک - شرط کافی):
اگر G گرافی ساده با حداقل ۲ رأس و $\delta(G) \geq n/2$ باشد، آن‌گاه G همیلتنی است.

• اثبات: گراف G که ساده و $n \geq 2$ و $\delta(G) \geq n/2$؛ ولی همیلتنی نیست. یک ماکزیمال از بین این مجموعه برمی‌داریم.
(یعنی اگر یک یال اضافه کنیم همیلتنی می‌شود)

به‌زبان دیگر: فرض کنید G یک گراف ناهمیلتنی ماکزیمال به شرط $\delta(G) \geq n/2$ را در نظر می گیریم.
u و v دو رأس غیرمجاور در G؛ $G+uv$ همیلتنی است!
پس یک مسیر از u به v در G موجود است؛
دو مجموعهٔ زیر را در نظر می گیریم:



$$S=\{i : (v_i, v) \in E\}$$
$$T=\{i : (u, v_{i+1}) \in E\}$$

$$\left.\begin{array}{l} |S|+|T| = \deg(v)+\deg(u) \geq n \\ |S|+|T| = |S\cup T| + |S\cap T| \\ |S\cup T| \leq n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow |S\cap T| \geq 1$$

چون هیچ کدام v را ندارد.

بنابراین یک i ای وجود دارد که دور همیلتنی $u, v_{i+1}, \dots, v, v_i, \dots u$ (طبق شکل) وجود دارد. $\times$ $\square$

• قضیه (اُر - شرط کافی):

اگر G یک گراف ساده با حداقل ۲ رأس، و به ازای هر دو رأس غیرمجاور u و v ، $d(u)+d(v) \geq n$ باشد، آن‌گاه G همیلتنی است.

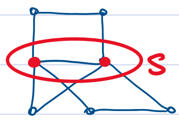
• اثبات: دقیقاً همان اثبات قبلی ☺ (جایی از $\delta(G) \geq n/2$ استفاده نکردیم صرفاً می‌خواستیم به ازای u و v دلخواه، $d(u)+d(v) \geq n$ شود!)

• قضیه (شرط لازم):

اگر G همیلتنی باشد، به ازای هر زیرمجموعهٔ S ناتهی از رأس‌ها، داریم: $C(G-S) \leq |S|$

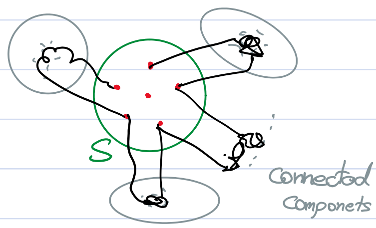
تعداد connected component
(مؤلفه‌های همبندی)

• مثال: می‌خواهیم نشان دهیم گراف زیر همیلتنی نیست:



$C(G-S) = ۳ > |S|$ ⚠ $\Rightarrow$ همیلتنی نیست ✗

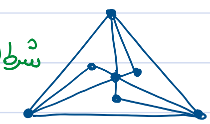
• اثبات:



در مسیر حرکت روی دور همیلتنی، هر خروج از یک مؤلفه، باید به عضو جدیدی از S باشد.
پس به تعداد component ها باید عضو در S داشته باشیم.

$|S| \geq C(G-S)$

• مثال:



شرط لازم را دارد ولی کافی نیست!
همیلتنی نیست ✗

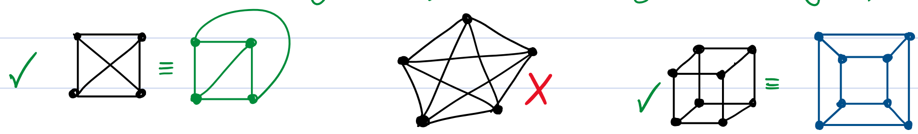
نظریه گراف ها
گراف های مسطح
فرمول اویلر
قضیه کوراتفسکی
رنگ آمیزی گراف ها

نظریهٔ گراف‌ها (جلسه ۴ - ۱۴۰۳/۲/۳۰)

گراف‌های مسطح: گرافی که بتوان آن را طوری روی صفحه رسم کرد، که یال های آن یکدیگر را قطع نکنند.

(مفهوم planer embedding مطرح می‌شود که درواقع گرافهای یکریخت می‌توانند planer embedding های متفاوت داشته باشند.)

مثال:

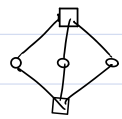


وجه: چون یال ها همدیگر را قطع نکرده‌اند، صفحه را به تعدادی ناحیه افراز می‌کند؛ به هرکدام از این ها، وجه گفته می‌شود.

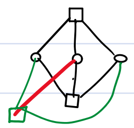
درجهٔ وجه: تعداد یال هایی که هر وجه را احاطه کرده‌اند.

قضیه: $K_{3,3}$ نامسطح است.

اثبات: دوتا در نظر می‌گیریم



اگر متقاطع نباشند، صفحه را به سه ناحیه افراز می‌کنند.

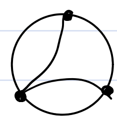


خانهٔ سوم در یکی از همین ۳ ناحیه قرار خواهد گرفت؛ در هرکدام قرار بگیرد، مجبور است حتماً یک ناحیه را قطع کند تا یالهایش رسم شود.

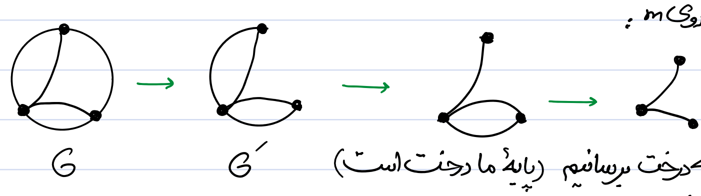
فرمول اویلر:

در هر گراف مسطح همبند با n رأس و m یال و f وجه، داریم: $f = m - n + 2$

(لازم است گفته شود گراف های یکریخت لزوماً planer embedding یکسان نیستند یعنی ترکیب وجه‌های آنها یکسان نیست! ولی تعداد وجوه یکسان دارند.)



اثبات: استقرا روی m.



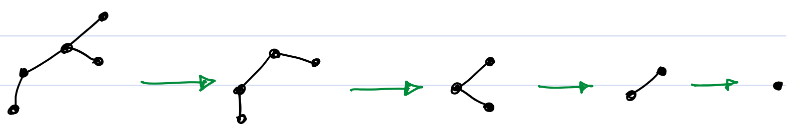
G': $f' = m' - n' + 2$ (فرض استقرا)

$f' + 1 = m' + 1 - n' + 2$ ✓

$f = m - n + 2$

سعی می‌کنیم به درخت برسانیم (پایهٔ ما درخت است)
(یال غیر برشی را برمی‌داریم)

پایه: در هر درخت، $m = n - 1$ (اثبات خود این با استقرا):



پایهٔ این اثبات: در درخت $n = 1 \longrightarrow m = 1$ ✓

قضیه: در هر گراف سادهٔ مسطح همبند، (با حداقل ۳ رأس) داریم: $m \leq 3n - 6$

اثبات:

مجموع درجات وجوه گراف

$$2m = \sum_{f \in F} deg(f) \geq 3f$$

چون هر یال را دوبار شمردیم

چون درجهٔ هر وجه حداقل ۳ است؛ (یعنی هر وجه را حداقل ۳ یال احاطه کرده)

$$f = m - n + 2 \leq \frac{2}{3} m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} m \leq n - 2$$

$$\Rightarrow m \leq 3n - 6 \quad \square$$

پس نتیجه می‌گیریم گراف‌های سادهٔ مسطح، از دستهٔ گراف‌های تُنُک و خلوت محسوب می‌شود!
(تعداد یال‌ها از مرتبهٔ n است)

قضیه: در هر گراف سادهٔ مسطح یک رأس با درجهٔ ۵ وجود دارد.

اثبات:

اگر درجهٔ همهٔ رئوس حداقل ۶ باشند، آنگاه:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2m \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n$$

$$m \leq 3n - 6 \Rightarrow m < 3n$$

$\%$

قضیه: K_5، نامسطح است.

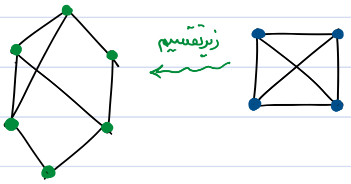
اثبات: در K_5 داریم: $\begin{cases} n = 5 \\ m = 10 \end{cases}$

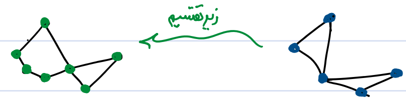
اگر مسطح باشد داریم:

$10 = m \leq 3n - 6 = 9$ $\%$

تعریف: یک زیرتقسیم از گراف G با جایگزین کردن تعدادی از یال های G با مسیرهای به طول مثبت بدست می آید.
(subdivision)

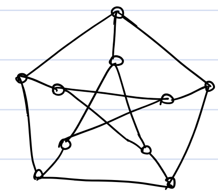
* مثال :

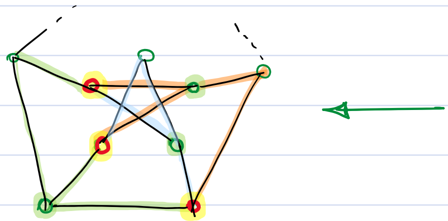




قضیهٔ کوراتفسکی : گراف G مسطح است اگر و تنها اگر شامل زیرتقسیمی از K_5 و $K_{3,3}$ نباشد.

• مثال : گراف پترسن :





X مسطح نیست.

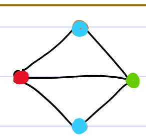
یک زیرتقسیم از $K_{3,3}$ دارد!

• رنگ آمیزی گرافها : (رنگ آمیزی رأسی)

• یک رنگ آمیزی مجاز (proper coloring) ⟵ هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند.

تعریف: کمترین عدد k طوری که به ازای آن بتوان گراف G را با k رنگ بطور مجاز رنگ کرد، به آن عدد رنگی گراف $\chi(G)$ می گوییم.
(خی G خوانده می شود)

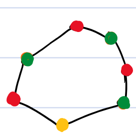
• مثال :



$\chi(G)=3$

• مثال : $\chi(K_n)=n$
گراف کامل

• مثال : یک دور فرد :



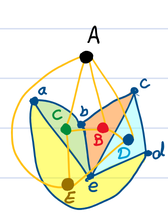
$\chi(G)=3$

• قضیه : در هر گراف دوبخشی، $\chi(G)$ برابر ۲ است.
(اثبات بدیهی)

• قضیه : $\chi(G)\le\Delta(G)+1$

• اثبات : یک رأس Δ را بیرون می کشیم ، سایر رئوس طبق فرض استقراء رنگ می شوند.
برای رنگ آمیزی رأس بیرون کشیده شده ، $\Delta(G)+1$ رنگ کافی است.

• قضیه (بروکس) : اگر G یک گراف همبند غیرکامل باشد که شامل دور فرد نیست ، $\chi(G)\le\Delta(G)$



هر وجه ⟵ رأس
وجه های مجاور ⟵ یال

• دوگان رنگ آمیزی رأسی ⟵ رنگ آمیزی وجهی

• **قضیه** : هر گراف ساده مسطح، ۶-رنگ پذیر است.

• **اثبات** :

برای اینکار، آن رأسی را که درجهٔ حداکثر ۵ دارد را رنگ می کنیم؛
(ثابت کرده بودیم وجود دارد) ؛ بقیه را به صورت استقرایی
(طبق فرض استقرا) رنگ می کنیم. (چون گراف باقیمانده سادهٔ مسطح است
باز هم رأسی با درجهٔ حداکثر ۵ دارد)
رأس با درجهٔ حداکثر ۵ ، بوسیله ۶ رنگ کفایت می کند. □

• باید گفت حتی هر گراف سادهٔ مسطح ، ۴-رنگ پذیر است!!
۱۹۷۶ اثبات شده ولی کسی کمتر قبول کرده ؛ حالات پایهٔ بسیار زیادی دارد
اثباتی عجیب و غریب دارد...

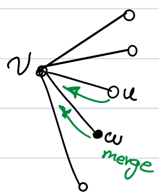
• **قضیه** : هر گراف سادهٔ مسطح ، ۵-رنگ پذیر است!

• **اثبات** : با استقراء : در هر مرحله رأس با کمترین درجه (v) را بررسی داریم :

← اگر درجه اش کمتر از ۵ بود ← حله ! ت

← اگر درجه اش خود ۵ بود ← داریم :

دوتا از رئوس مجاور v هستند که به هم وصل نیستند ؛ (مثل u و w)
u و w را به طور جداگانه در v ، merge می کنیم ؛
(می دانیم مسطح بودن تغییری نمی کند)



به یک گراف $n-2$ رأسی می رسیم
که طبق فرض استقرا رنگ می شود.
حالا برای اختصاص رنگها به طور بازگشتی، کافیست
رنگ v را به u و w نسبت دهیم و حال برای v
باید رنگ انتخاب کنیم که غیر از u و w و ۳ رأس مجاور دارد ؛
پس برای رنگ کردن ، ۵ رنگ لازم است. □

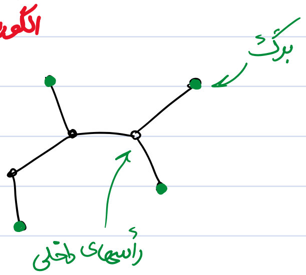
نظریهٔ گرافها (۵)
درخت ها
درخت پوشا
الگوریتم کروسکال

نظریهٔ گراف‌ها (جلسه ۵ - ۱۴۰۳/۳/۱)

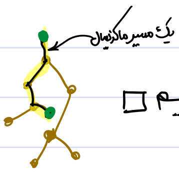
* درخت ها :

به گراف همبند بدون دور **درخت** می گویند.

(گراف بدون دور و نه لزوماً همبند را جنگل می نامیم)



• تعریف : هر رأس با درجهٔ حداکثر یک ، یک برگ (leaf) از درخت نامیده می شود.

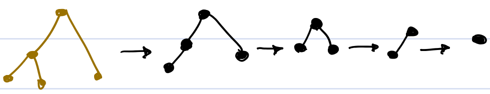


• قضیه : هر درخت با $n \geq 2$ رأس ، حداقل دو برگ دارد.

• اثبات : دو سر هر مسیر ماکزیمال درخت ، چون درجه اش ۱ است پس برگ است. پس حداقل ۲ برگ داریم □

• قضیه : هر درخت با n رأس ، $n-1$ یال دارد.

• اثبات : با استقراء یک برگ را می داریم و طبق استقراء حل می شود.



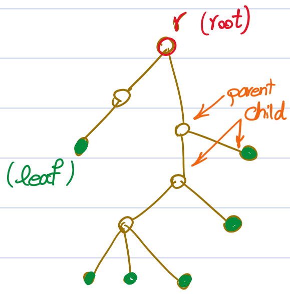
← همبندی / بدون دور بودن / $n-1$ یال داشتن ؛

از این ۳ شرط ، هر دو تا را باشیم کافی است برای شرط دیگر . ← درخت خواهیم داشت .

• قضیه : گراف G یک درخت است ؛ اگر ، هر دو رأس با یک مسیر **یکتا** به هم متصل اند .

← نتیجه : هر یال یک درخت ، یک یال برشی است .

← نتیجه : افزودن یک یال به درخت ، دقیقاً یک دور ایجاد می کند .



← **درخت ریشه دار** : یک درخت با رأس r که به عنوان ریشه انتخاب شده است .

← **درخت k تایی** : درختی که هر رأس داخلی آن، حداکثر k فرزند دارد.

← **درخت k تایی پُر** : درختی که هر رأس داخلی آن، دقیقاً k فرزند دارد.

← **درخت ریشه دار مرتب** : یک درخت ریشه دار با ترتیب چپ به راست مشخص روی فرزندان هر رأس .

• زیرگراف پوشا (Spanning Subgraph) :
گرافی که همهٔ رئوس گراف اصلی را داشته باشد؛
ولی یالها را می تواند نداشته باشد.
$H \subseteq G$ پوشاست اگر $V(G)=V(H)$

← **درخت باینری** : یک درخت ۲ تایی مرتب .

• قضیه : هر درخت k-تایی پُر با n رأس ، $\frac{n-1}{k}$ رأس داخلی و $n-\frac{n-1}{k}$ برگ دارد.

• اثبات : فرض کنید i رأس داخلی داریم؛
یعنی ik یال داریم که برابر $n-1$ است $\Longleftarrow$ $n-1=ik \Rightarrow \boxed{i=\frac{n-1}{k}}$ □

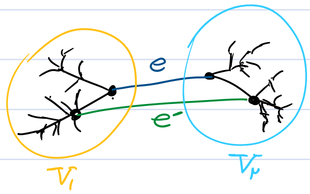
* درخت پوشای یک گراف :

اگر گراف G یک زیرگراف پوشا داشته باشد که درخت باشد، به آن درخت، درخت پوشای G گفته می شود.

* اگر گراف G همبند باشد ← درخت پوشا دارد (با الگوریتم می توان ساخت)

• **قضیه:** اگر T و T' درخت‌های پوشای G باشند و $e \in T \setminus T'$ ، آنگاه یالی مانند e' وجود دارد که $e' \in T' \setminus T$ ؛
و درواقع $T-e+e'$ یک درخت پوشای G است.

• **اثبات:**



هر یال از T (مثل e) برشی است و T را به V_1 و V_2 افراز می‌کند.
چون T' همبند است، یالی مانند e' در T' بین V_1 و V_2 وجود دارد.
$T-e+e'$ همبند است و $n-1$ یال دارد ← درخت است. □

• **گراف وزن‌دار:** هر یال یک عدد دارد ← کمترین عدد برای ایجاد مسیر و وصل کردن هر دو نقطه ← **درخت پوشای کمینه**

درخت پوشای کمینه، یک درخت پوشا برای گراف G است با کمترین مجموع وزن‌ها.

★ **الگوریتم کروسکال:** هدف: یافتن درخت پوشای کمینه گراف G:

```
def kruskal(G):
    T = Φ
    for i=0 → n-1 :
        let e = cheapest edge in G
                s.t T+e is acyclic
        T = T+e
    return T
```

کمترین وزن در G

دور نباشد

هر بار اگر می‌توانم کوچکترین را برمی‌دارم تا زمانی که دور ایجاد نمی‌کند. (greedy) (حریصانه)

• **اثبات بهینه بودن الگوریتم کروسکال:**

به وسیلهٔ برهان خلف: فرض کنیم T بهینه نیست!
از بین درخت‌های پوشای کمینه، T^* را انتخاب می‌کنیم طوری که بیشترین اشتراک را با T دارد و بهینه است.
پس باید یالی در T^* باشد که در T وجود ندارد؛ با افزودن آن (e^*) در T دور ایجاد می‌شود!
می‌آییم و یک یال را طوری از T برداریم که به T^* شبیه‌تر شود؛
ولی این با فرض بیشترین اشتراک تناقض دارد؛ ×
پس $T=T^*$ و بهینه است □

زبان‌ها و ماشین‌ها (۱۴۰۳/۳/۶)

تعاریف:

- الفبا: مجموعه‌ای متناهی از نشانه‌ها (Σ)
- رشته: دنباله‌ای متناهی از نشانه‌ها (عنصری از Σ^*)

$$\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$$

Σ^k: رشته‌ای به طول k

رشته‌ای به طول صفر را با λ نشان می‌دهند.

- زبان: مجموعه‌ای از رشته‌ها (هر زیرمجموعه از Σ^*)

• مثال:

$\Sigma = \{0,1\}$ یک الفبا

$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$ رشته‌های به طول ۲

$\Sigma^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$ مجموعهٔ همهٔ رشته‌ها

$L = \{1^*0\} = \{0, 10, 110, 1110, \dots\}$ یک زبان (مثلاً)

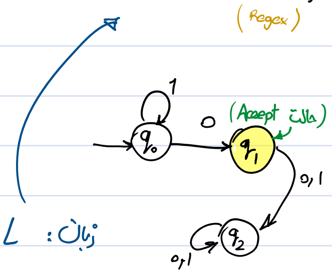
(Regex)

ماشین‌های حالت متناهی

یک ماشین حالت متناهی $M = (Q, \Sigma, f, q_0, F)$ تشکیل شده از:

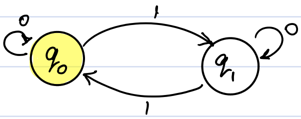
- Q: مجموعه‌ای متناهی از حالت‌ها
- Σ: الفبای ورودی
- f: تابع انتقال: $f: Q \times \Sigma \to Q$
- q_0: حالت شروع
- F: مجموعه‌ای از حالات پایانی (Accept)

• مثال:



L : زبان

• مثال:



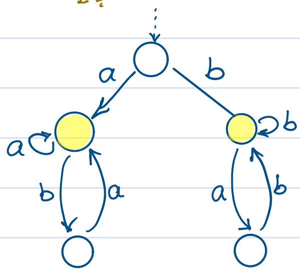
زبان: تمام رشته‌هایی که تعداد 1 آنها زوج است.

• تعریف: ماشین M، رشتهٔ ω را می‌پذیرد، اگر با شروع از q_0 و حرکت بین حالات براساس ω، به یک حالت نهایی (Accept) برسد.

• تعریف: زبان ماشین M، $L(M)$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ رشته‌هایی که M می‌پذیرد.

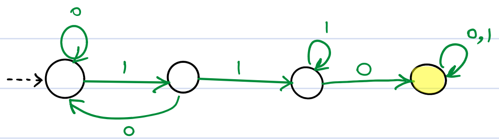
اگر $L(M) = L$، آن‌گاه می‌گوییم M زبان L را تشخیص می‌دهد.

• مثال ①: زبان ماشین زیر چیست؟

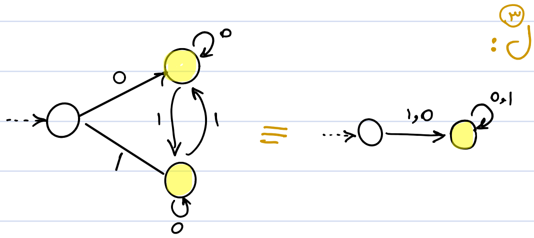


(تمام رشته‌هایی از a و b که حرف اول و آخر آنها یکسان باشد.)

• مثال ②: ماشینی برای تشخیص رشته‌هایی باینری شامل 110



• مثال ③:



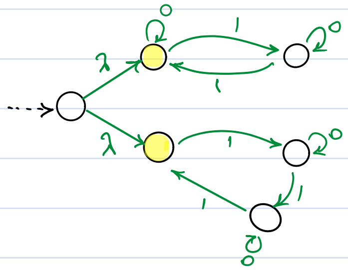
• تعریف: ماشین‌های M_1 و M_2 هم‌ارزند؛ اگر $L(M_1) = L(M_2)$

- ماشین غیرقطعی (non-deterministic):

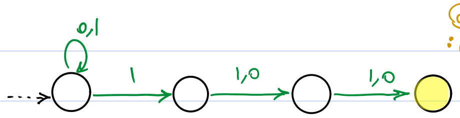
ماشینی که به ازای حالت جاری و مقدار ورودی، چند حالت بعدی ممکن داشته باشد.

$$f: Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \longrightarrow P(Q)$$

● مثال ④: ماشینی که مضارب ۲ و ۳ را می‌پذیرد:



● مثال ⑤:



زبان این ماشین، تمام رشته‌هایی که دو حرف قبل از آخر آن ۱ باشد.

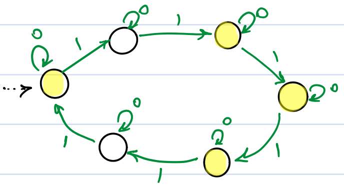
مثلاً 000100 ✓

0101 ✓

01001 ✗

(در خیلی از مسائل، عدم قطعیت ماشین، طراحی را آسانتر می‌کند)

● قضیه: هر ماشین حالت متناهی غیرقطعی را می‌توان یک ماشین حالت متناهی قطعی هم‌ارز آن تبدیل کرد.



زبان‌های منظم: زبان L منظم است؛ اگر توسط یک ماشین حالت متناهی (قطعی یا غیرقطعی) قابل تشخیص باشد.

(Regex : Regular Expressions اشاره به مبحث)

● مثال ⑥:

✓ $A = \{0^n 1 \ , \ n \geq 0\}$

✗ $B = \{0^n 1^n \ , \ n \geq 0\}$ باید بتوانیم یادمان بماند که چند تا صفر داشتیم؛ اگر n بزرگ شود نمی‌توانیم.

✗ $C = \{\omega :$ تعداد 0 و 1ها در ω برابر است$\}$

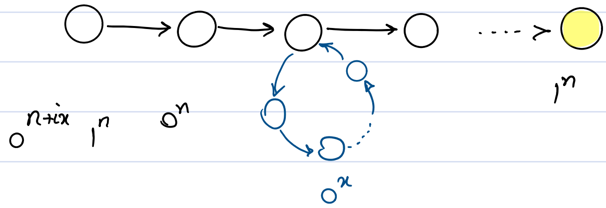
✓ $D = \{\omega :$ ω تعداد برابری زیررشته 01 و 10 دارد$\}$ بالاتر ماشین آن را گفتیم: در مثال ①

← برای نشان دادن منظم بودن، کافی است ماشین ارائه دهیم ✓

← اما برای نشان دادن نامنظم بودن، ... ؟

● مثال: نشان دهید زبان $\{0^n 1^n ; n \geq 0\}$ نامنظم است.

● برهان خلف: فرض کنید ماشین M با k حالت، زبان L را می‌پذیرد. اگر $n > k$ ← در مسیر پذیرش $0^n 1^n$، بیش از k حالت طی می‌شود،
پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک حالت تکراری است.

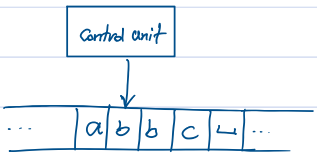


در نتیجه طبق شکل، و لم پمپاژ، هر رشته به شکل $0^{n+x} 1^n$ $(x \neq 0)$ نیز توسط ماشین M پذیرش می‌شود. ✗

ماشین تورینگ
ساختار ماشین
تصمیم پذیری
مسئله توقف
تز چرچ-تورینگ

ماشین تورینگ (۱۴۰۳/۳/۸)

• **ماشین تورینگ** یک ماشین حالت متناهی با حافظهٔ نامحدود.



(می‌تواند روی Tape خود بنویسد، جابجا شود
می‌تواند چند Head یا چند Tape داشته باشد یا ...)

• **تعریف:** ماشین تورینگ $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,q_{acc},q_{rej})$ — یک ۶-تایی مرتب
(accept) (reject)
تشکیل شده از:

Q: مجموعهٔ متناهی از حالت‌ها

Σ: الفبا شامل نشانهٔ خالی ($\sqcup$) (blank symbol is $\sqcup$)

δ: تابع انتقال $\delta: Q,\Sigma \longrightarrow Q\times\Sigma\times\{R,L\}$

مربوط به حرکت هد - حالا اینجا چون یه دونه Head داریم روی Tape یک بُعدی، صرفاً Right و Left داریم.

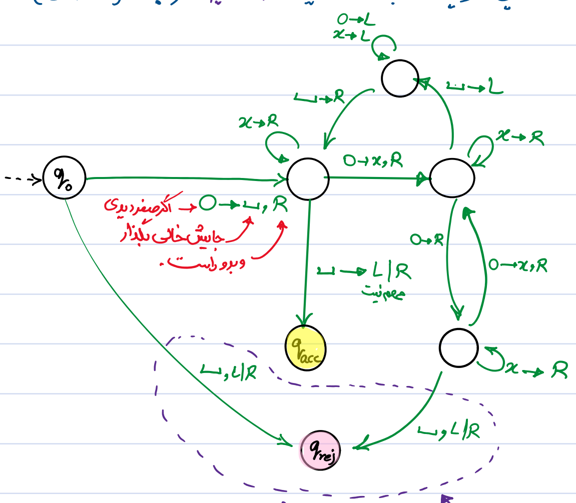
q_0: حالت شروع

q_{acc}: حالت (های) پذیرش

q_{rej}: حالت (های) رد

ماشین تورینگ هرگاه به یکی از حالات Accept یا Reject برسد، متوقف می‌شود. (تعریف توقف)

مثال: ماشین تورینگی برای تشخیص (تصمیم) زبان $L=\{0^{2^n}; n\geq 0\}$



برای تصمیم گیرنده شدن

← **تعریف:** ماشین M، زبان L را تشخیص می‌دهد (recognize)، اگر به ازای هر $x\in L$، ماشین در حالت پذیرش متوقف شود.

← **تعریف:** می‌گوییم M، زبان L را تصمیم می‌گیرد (decide) اگر به ازای هر $x\in L$، ماشین در حالت پذیرش، و به ازای هر رشتهٔ خارج از L، در حالت رد متوقف شود.

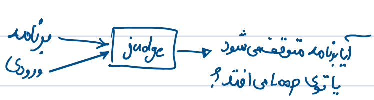
← **تعریف:** یک زبان قابل تشخیص (قابل تصمیم) است؛
(reognizable) (decidable)
اگر ماشین تورینگی وجود داشته باشد که آن را تشخیص دهد (تصمیم بگیرد).

قضیه: برخی زبان‌ها توسط ماشین تورینگ قابل تشخیص (تصمیم) نیستند!

← **اثبات:** مجموعهٔ ماشین‌های تورینگ شمارا است؛
ولی مجموعهٔ همهٔ زبان‌ها، ناشمارا است! ▨
(اثبات وجودی)

← مثلاً چه مسئله‌ای؟ (Halting Problem مسئله توقف)

فرض کنید یک کد به شما داده شده و می‌خواهید عملکرد آن را بنویسید



• مسئله توقف Halting Problem

← قضیه : زبان $L=\{\langle T,w\rangle \mid$ ماشین تورینگ T به‌ازای w متوقف می‌شود$\}$ قابل تصمیم نیست.

یک ماشین تورینگ

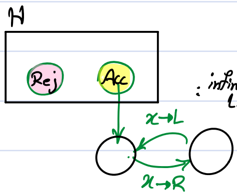
یک رشته

← اثبات : فرض کنید ماشین تورینگ H برای تصمیم زبان L وجود دارد.

$H(T,w)=\begin{cases} \text{Accept} & : \text{اگر T روی رشتهٔ w متوقف شود} \\ \text{Reject} & : \text{اگر T روی رشتهٔ w متوقف نشود} \end{cases}$

ماشین تورینگ D را با استفاده از H می‌سازیم :

$D(\langle T\rangle)=\begin{cases} \text{infinite Loop} & : \text{اگر T روی رشتهٔ } \langle T\rangle \text{ متوقف شود} \\ \text{Halt (Accept|Reject)} & : \text{اگر " " " " " نشود} \end{cases}$



برای ساختن infinite Loop :

حال، $D(\langle D\rangle)$ را در نظر بگیرید :

$D(\langle D\rangle)=\begin{cases} \text{عدم توقف} & : \text{اگر D روی رشتهٔ } \langle D\rangle \text{ متوقف شود} \\ \text{توقف} & : \text{اگر D " " " نشود} \end{cases}$

%

پس ماشین تورینگ H وجود ندارد :)

• تز چرچ-تورینگ :

می‌شود به ماشین تورینگ بعنوان خروجی دهنده نگاه کرد

می‌شود تعمیم‌های مختلفی روی آن سوار کرد ← چندبعدی کردن نوار، چند Head کردن، انواع مختلف ...

می‌شود محدود کرد ← نوار متناهی باشد، یا ...

اما در هر حال، همهٔ آنها قدرت یکسانی دارند :)

(تأثیری در مجموعهٔ زبانهایی که تشخیص می‌دهند ندارد)

← هر مسئله‌ای که با یک الگوریتم کارآ قابل حل باشد، با ماشین تورینگ قابل حل است.

* Decision Problems (مسائلی که جواب آنها بله و خیر است)
مسائل تصمیم

P : دسته مسائلی که با یک ماشین تورینگ قطعی در زمان چندجمله‌ای (نسبت به اندازهٔ ورودی) قابل حل است.

NP : دسته مسائلی که با یک ماشین تورینگ غیرقطعی (Non-deterministic) در زمان چندجمله‌ای قابل حل است.

به وضوح : $P \subseteq NP$

اما سؤال اصلی علوم کامپیوتر : $P = NP$?

[ادامهٔ داستان در درس ساختار داده‌ها و الگوریتم‌ها :)]