ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری هشتم | **رابطه‌ها و ترتیب جزئی** | مبحث آزمون ۳

۱. کدام یک از روابط زیر هم‌ارزی است؟

الف) فرض کنید ℓ مجموعه‌ی تمامی شناسه‌های مجاز در یک زبان برنامه‌نویسی باشد. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی ℓ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall s,t \in \ell,\quad sRt \iff \text{۸ حرف اول رشته‌ی } s \text{ با ۸ حرف اول رشته‌ی } t \text{ یکسان باشند}$$

ب) فرض کنید رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی اعداد صحیح تعریف شود و به ازای هر m و n در مجموعه‌ی اعداد صحیح، mRn اگر و تنها اگر حاصل $۳m - ۵n$ زوج باشد.

ج) به ازای هر دو عدد صحیح مثبت a و b، می‌گوییم $a \sim b$ اگر و تنها اگر مجموعه‌ی شمارنده‌های اول a و b یکسان باشند. به عنوان مثال $۶ \sim ۴۳۲$ زیرا $۳ \times ۲ = ۶$ و $۲^{۴} \times ۳^{۳} = ۴۳۲$.

۲. فرض کنید A یک مجموعه باشد و R نیز یک رابطه روی A باشد. S نیز رابطه‌ای روی A است به طوری که

$$xSy \iff (xRy \land yRx)$$

همچنین رابطه‌ی T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$xTy \iff (xRy \land y \not\!R\, x)$$

نشان دهید:

$$xRy \iff (xSy \lor xTy)$$

۳. رابطه‌ی $R \subseteq A \times A$ را آشفته گوییم هر گاه:

$$\forall x,y \in A:\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,y) \in R$$

تعداد روابط آشفته روی مجموعه‌ی متناهی و ناتهی A را بیابید.

۴. رابطه‌ی R را روی مجموعه $\mathbb{R}$ به این صورت تعریف می‌کنیم:
برای هر $a,b \in \mathbb{R}$، aRb اگر و تنها اگر تابع پیوسته‌ی $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ موجود باشد به گونه‌ای که $f(۰) = a, f(۱) = b$.

الف) نشان دهید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

ب) کدام یک از مجموعه‌های زیر در $R^{۲}$ در یک مولفه‌ی هم‌ارزی قرار می‌گیرند؟

$$\{(x,y) | x^{۲} + y^{۲} = ۱\}, \{(x,y) | xy = ۰\}, \{(x,y) | xy = ۱\}$$

۵. کدام یک از روابط زیر روی $\mathbb{R}$ تشکیل یک رابطه‌ی هم‌ارزی می‌دهند؟

الف)

$$xRy \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

ب)

$$xRy \iff x-y \in \mathbb{Q}$$

ج)

$$xRy \iff x-y \in \mathbb{Q}^c$$

۶. فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی و R یک رابطه روی A با خواص ترتیب جزئی باشد. همچنین فرض کنید اعضای $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ به گونه‌ای از A انتخاب شده باشند که:

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_0$$

نشان دهید $x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-1}$.

۷. مجموعه‌ی ناتهی A را همراه با ترتیب جزئی $\leqslant$ در نظر بگیرید. رابطه‌ی $<$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$a < b \iff a \leqslant b, a \neq b$$

الف) نشان دهید رابطه‌ی $<$ خاصیت تعدی دارد و برای هر دو عضو $a, b \in A$ که $a < b$ داریم $b \nless a$.

ب) برای هر رابطه‌ی $<$ که خواص قسمت قبل را داشته باشد، رابطه‌ی $\leqslant$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \leqslant b \iff a < b \vee a = b$$

نشان دهید رابطه‌ی $\leqslant$ یک ترتیب جزئی است.

۸. نشان دهید اگر یک مشبکه خاصیت توزیع‌پذیری داشته باشد، هر عضو آن حداکثر یک متمم دارد.

۹. فرض کنید R یک رابطه با خاصیت تعدی و آینه‌ای باشد. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، $R^n = R$.

۱۰. فرض کنید A یک مجموعه‌ی ناتهی و R یک رابطه روی A باشد. نشان دهید اگر R متقارن باشد، بستار ترایایی آن (R^*) نیز متقارن خواهد بود.

۱۱. مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \leqslant)$ یک «مشبکه‌ی کامل» است، اگر هر زیرمجموعه از A دارای بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالا باشد. برای هر یک از مجموعه‌های مرتب جزئی زیر تعیین کنید که آیا یک مشبکه‌ی کامل است یا خیر.

الف) اعداد گویا با عملگر کمتر مساوی متداول

ب) اعداد حقیقی با عملگر کمتر مساوی متداول

ج) زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A با عملگر زیرمجموعه بودن

۱۲. فرض کنید $f : A \to B$ تابعی پوشا باشد. نشان دهید رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A است.

$$xRy \iff f(x) = f(y)$$

همچنین نشان‌دهید تابعی یک‌به‌یک و پوشا بین کلاس‌های هم‌ارزی تشکیل شده و مجموعه‌ی B وجود دارد.

۱۳. فرض کنید C مجموعه‌ی تمام توابع محدب پیوسته روی بازه‌ی $[0, 1]$ باشد. عملگر $\leqslant$ به این شکل تعریف شده است که $f \leqslant g$ اگر برای هر x در بازه‌ی $[0, 1]$ داشته باشیم $f(x) \leqslant g(x)$. نشان دهید این عملگر یک ترتیب جزئی است و هر دو عضوی، کوچک‌ترین کران بالا دارند.

۱۴. نشان دهید در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی متناهی، عضو مینیمال وجود دارد. همچنین نشان دهید در صورت یکتا بودن عضو مینیمال، این عضو مینیمم است. مثال نقضی بیاورید که مجموعه متناهی نباشد و عضو مینیمال یکتا لزوما مینیمم نباشد.

۱۵. دو مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \preceq_1)$ و $(B, \preceq_2)$ را در نظر بگیرید. رابطه‌ی $\preceq$ بر روی $A \times B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall (a,b),(a',b') \in A \times B:\ (a,b) \preceq (a',b') \iff a \preceq a'\ ,\ b \preceq b'$$

الف) نشان دهید $(A \times B, \preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.

ب) نشان دهید اگر $(A, \preceq_1)$ و $(B, \preceq_2)$ مشبکه باشند، آن‌گاه $(A \times B, \preceq)$ نیز یک مشبکه است.

ج) اگر $(A, \preceq_1)$ و $(B, \preceq_2)$ مجموعه‌هایی کاملا مرتب باشند، آیا $(A \times B, \preceq)$ هم یک مجموعه‌ی کاملا مرتب است؟

۱۶. فرض کنید R_1, R_2 دو رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $A \times A$ باشند. ثابت کنید $R_1 \circ R_2$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است اگر و تنها اگر $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

۱۷. نشان دهید هر رابطه‌ی مرتب جزئی روی مجموعه‌ی متناهی A زیررابطه‌ی یک ترتیب کامل روی A است.

۱۸. ثابت کنید اگر در یک مشبکه بیش از دو عضو داشته باشیم که با تمام اعضا قابل مقایسه‌اند، آن رابطه متمم‌دار نیست.

۱۹. الف) نشان‌دهید برای هر عدد طبیعی n، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های n با عمل عاد کردن، تشکیل مشبکه‌ای توزیع‌پذیر می‌دهد.

ب) نشان‌دهید مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های n با عمل عاد کردن تشکیل جبر بول می‌دهد، اگر و فقط اگر n بر مربع کامل هیچ عدد طبیعی بزرگتر ۱ بخش‌پذیر نباشد.

۲۰. R رابطه‌ای ناتهی بر روی مجموعه‌ای n عضوی است به طوری که $R^2 = R$.

الف) ثابت کنید $R^n = R$ و نتیجه بگیرید گراف رابطه‌ی R حداقل یک دور جهت‌دار دارد.

ب) ثابت کنید حداقل یک a وجود دارد که aRa.