



ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری چهارم

مجموعه‌ها و توابع

مبحث آزمون ۲

۱. آلیس مدت n روز را در سرزمین عجایب گذرانده بود. پس از بازگشت برای دوستانش این گونه تعریف می‌کرد: «در ۷ روز از روزهایی که در سرزمین بودم، هر روز نصف روز (یا صبح یا عصر) باران بارید. هرگاه صبح می‌بارید، عصر هوا آفتابی بود و برعکس. ۵ روز صبح‌ها و ۶ روز عصرها آفتابی بود.» n را بیابید.

۲. حسن قلی می‌خواهد برای افزایش امنیت گله‌اش یک سگ گله بخرد. فروشنده‌ی سگ‌های گله، ۲۵ سگ دارد. هیچ یک از این سگ‌ها همزمان هم باهوش، هم دارای بویایی قوی و هم قدرتمند نیست. ۸ تا از آن‌ها باهوش، ۱۷ تا دارای بویایی قوی و ۱۳ تا قدرتمند هستند. ۶ تا نیز نه باهوش، نه دارای بویایی قوی و نه قدرتمند هستند. اگر حسن قلی به دنبال یک سگ باهوش و قدرتمند باشد، چند سگ امکان انتخاب شدن دارند؟

۳. مجموعه‌ی S شامل مجموعه‌هایی مانند x است که x شامل خودش نمی‌شود. یعنی

$$S = \{x \mid x \notin x\}$$

(الف) نشان دهید اگر $S \in S$ ، تناقض حاصل می‌شود.

(ب) نشان دهید اگر $S \notin S$ ، تناقض حاصل می‌شود.

۴. تعداد دنباله‌های (a, b, c, d) از اعداد طبیعی را بیابید که $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 50$. (راهنمایی: ثابت کنید بین دنباله‌های گفته شده و زیرمجموعه‌های ۴ عضوی $\{1, 2, 3, \dots, 53\}$ تابعی یک‌به‌یک و پوشا وجود دارد.)

۵. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند که A و C زیرمجموعه‌ی X ، و همچنین B و D زیرمجموعه‌ی Y هستند. اثبات کنید:

$$A \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (A \times D) \quad (\text{الف})$$

$$A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \quad (\text{ب})$$

$$A \times (Y - D) = (A \times Y) - (A \times D) \quad (\text{ج})$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \quad (\text{د})$$

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D) \quad (\text{ه})$$

۶. فرض کنید A, B, C و X مجموعه‌هایی باشند که $A, B, C \subseteq X$. عملگر تفاضل متقارن $A \oplus B$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

ثابت کنید:

$$A \oplus B = B \oplus A \quad (\text{الف})$$

$$A \oplus \emptyset = A \quad (\text{ب})$$

$$A \oplus A = \emptyset \quad (\text{ج})$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \quad (\text{د})$$

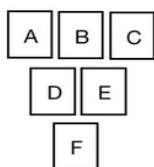
$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C) \quad (\text{ه})$$

۷. اگر داشته باشیم:

$$A' \cup (B - A) = (A' \cup B') \cup ((A \cap B)' \cap (C \cap D))$$

ثابت کنید $A \subseteq B$.

۸. فرض کنید A ، B و C سه مجموعه دلخواهاند و طبق شکل زیر، از سطر دوم به بعد، هر مجموعه حاصل تفاضل مجموعه‌ی بالا سمت راست از مجموعه‌ی بالا سمت چپ خود است (مثلاً $D = A - B$). همچنین $P(A)$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه توانی مجموعه‌ی A است. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.



الف) $B \subseteq F$

ب) $F \subseteq A \cap C$

ج) $D \cap C \subseteq F$

د) $(P(A) \cup P(B)) \subset P(A \cup B)$

۹. دو مجموعه‌ی متناهی A و B را در نظر بگیرید به طوری که $|A| = |B|$. ثابت کنید تابع $f: A \rightarrow B$ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد. مثالی بزنید که A و B نامتناهی باشند و این حکم برای آنها غلط باشد.

۱۰. برای زیرمجموعه‌ی A از S ، تابع مشخصه‌ی k_A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in S - A \end{cases}$$

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $k_A k_B$ تابع مشخصه‌ی $A \cap B$ است.

ب) باقی‌مانده‌ی $k_A + k_B$ بر ۲، تابع مشخصه‌ی $A \cap B$ است.

ج) $k_A - k_{A \cap B}$ تابع مشخصه‌ی $A - B$ است.

۱۱. عبارات زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) اگر توابع f و g یک‌به‌یک باشند، آن گاه g یک‌به‌یک است.

ب) اگر توابع f و g پوشا باشند، آن گاه g پوشا است.

۱۲. بین مجموعه‌های زیر، تناظر یک‌به‌یک تعریف کنید.

الف) $A = \mathbb{R}$ و $B = (0, \infty)$

ب) $A = (1, 7)$ و $B = (-2, 2)$

ج) $A = (0, 1)$ و $B = [0, 1]$

۱۳. مثالی برای دو مجموعه‌ی ناشمارای A و B بیابید به شکلی که $A - B$:

الف) متناهی باشد.

ب) نامتناهی و شمارا باشد.

ج) ناشمارا باشد.

۱۴. برای هر کدام از مجموعه‌های زیر، تعیین کنید که متناهی، یا نامتناهی و شمارا، و یا ناشمارا هستند. همچنین از هر یک از مواردی که نامتناهی و شمارا هستند، تابعی یک‌به‌یک و پوشا به \mathbb{N} ارائه دهید.

الف) اعداد صحیح که مضرب ۱۰ هستند.

ب) اعداد طبیعی که به ۳ بخش پذیر نیستند.

ج) اعداد حقیقی که در نمایش اعشاری شان تنها رقم ۱ وجود دارد.

د) اعداد صحیح که قدر مطلقشان از ۱۰۰۰ کمتر باشد.

ه) اعداد حقیقی بین ۰ و ۲.

۱۵. ثابت کنید:

$$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}| \quad \text{الف)}$$

ب) به ازای هر $k, k \in \mathbb{N}$ کاردینالیتی برابری با \mathbb{N} دارد.

۱۶. نشان دهید به ازای هر مجموعه‌ی شمارای A داریم $|A| < |P(A)|$ که $P(A)$ مجموعه توانی A است.

۱۷. درست یا نادرست بودن گزینه‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی شمارا حتما شماراست.

ب) ناشمارا مجموعه‌ی ناشمارا وجود دارند که اشتراک هر دوتای آن‌ها شمارا و ناتهی باشد.

۱۸. نشان دهید مجموعه‌ی انسان‌ها از آغاز خلقت تا انتهای دنیا (که ممکن است در بی‌نهایت اتفاق بیفتد)، شمارا است. فرض کنید هر انسان حداکثر تعداد متناهی فرزند می‌تواند داشته باشد.

۱۹. فرض کنید A مجموعه‌ای از دایره‌ها در فضای \mathbb{R}^2 باشد. نشان دهید:

الف) اگر دایره‌ها توپر باشند و هیچ دوتایی با یکدیگر اشتراک (و برخورد) نداشته باشند، A شمارا است.

ب) اگر دایره‌ها توخالی باشند و هیچ دوتایی با یکدیگر برخورد نداشته باشند، A می‌تواند ناشمارا باشد.

۲۰. الف) تمام توابع پیوسته‌ی $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ را بیابید به طوری که به ازای هر x مثبت، $f(f(x)) = \frac{1}{x}$ باشد.

ب) تمام توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید به طوری که به ازای هر x و y داشته باشیم:

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$