اصل لانه‌کبوتری

۱. ۱۰ نقطه درون یک مربع 3×3 داده شده‌اند. ثابت کنید دو نقطه بین آن‌ها وجود دارند که فاصله‌ی بین‌شان از $\sqrt{2}$ بزرگ‌تر نباشد.

۲. a, b اعدادی طبیعی هستند. $ab + 1$ مهره در اختیار داریم که هرکدام با یک رنگ دلخواه رنگ شده‌اند. ثابت کنید یا $b + 1$ تا از آن‌ها موجودند که دوبه‌دو ناهمرنگ باشند یا $a + 1$ تا از آن‌ها موجودند که همگی همرنگ باشند.

۳. n نفر در یک مهمانی حضور دارند. بعضی از این n نفر باهم دست داده‌اند. ثابت کنید دونفر از آن‌ها موجودند که به تعداد یکسانی دست داده‌اند.

۴. ۱۵ نقطه در صفحه داده شده‌اند. می‌دانیم که بین هر ۳ تایی از این نقاط فاصله‌ی دوتا از آن‌ها از یک کم‌تر است. ثابت کنید دایره‌ای به شعاع یک موجود است که حداقل شامل ۸ تا از این نقاط باشد.

۵. ثابت کنید در بین هر n عدد صحیح تعدادی ناصفر از آن‌ها وجود دارند که جمع‌شان بر n بخش‌پذیر باشد.

۶. ۱۷ عدد با شمارنده‌های اول کم‌تر از ۱۰ داده شده‌اند. ثابت کنید دوتا از آن‌ها هستند که ضربشان مربع کامل باشد.

۷. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای $n + 1$ عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 2n\}$ باشد. ثابت کنید دو عضو متمایز از S مانند a, b موجودند که a بر b بخش‌پذیر باشد.

۸. ۹۲ صندلی به فواصل مساوی دور میزی دایره‌ای شکل چیده شده‌اند و ۹۲ نفر روی این صندلی‌ها نشسته‌اند. همچنین ۱۰ میکروفون مقابل ۱۰ تا از این افراد قرار داده شده است. ثابت کنید می‌توان میز را طوری چرخاند که میکروفون‌ها جلوی افرادی قرار گیرند که قبلا در مقابل هیچ یک از آن‌ها میکروفون نبوده است.

۹. ماتریسی $2n \times 2n$ با درایه‌های ۰ و ۱ شامل دقیقا $3n$ درایه‌ی صفر داده شده است. ثابت کنید می‌توان n سطر و n ستون از این ماتریس را حذف کرد طوری که تمام درایه‌های ۰ این ماتریس حذف شوند.

۱۰. هریک از اضلاع و اقطار یک شش‌ضلعی را با یکی از رنگ‌های سیاه یا سفید رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید ۳ رأس از رئوس شش‌ضلعی را می‌توان انتخاب کرد طوری که که پاره‌خط‌های بین آن‌ها همرنگ باشند.

۱۱. اعداد ۱ تا ۱۰۰ در خانه‌های یک جدول 10×10 نوشته شده‌اند. ثابت کنید دو خانه با حداقل یک رأس مشترک وجود دارند که جمع اعداد واقع در آن‌ها مضرب ۴ باشد.

۱۲. S زیرمجموعه‌ای ۷۰ عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 200\}$ است. ثابت کنید دو عضو از S موجودند که اختلافشان ۴، ۵ یا ۹ باشد.

۱۳. فرض کنید $n > 1$ عددی طبیعی و فرد باشد و $c_1, c_2, \dots, c_n$ اعدادی صحیح باشند. برای هر جایگشت $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ از اعداد $\{1, 2, \dots, n\}$ تعریف کنید $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. ثابت کنید دو جایگشت متمایز a, b موجودند که $S(a) - S(b)$ بر $n!$ بخش‌پذیر باشد.

۱۴. فرض کنید $n > 1$ عددی طبیعی باشد. $n + 2$ عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 3n\}$ داده شده‌اند. ثابت کنید در بین این اعداد دو عدد یافت می‌شوند که تفاضل آن‌ها بزرگ‌تر از n و کوچک‌تر از $2n$ باشد.

۱۵. فرض کنید X زیرمجموعه‌ای ۲ + n عضوی از مجموعه‌ی $\{-n, -n+۱, \ldots, n\}$ باشد. ثابت کنید سه عضو متمایز مانند a، b و c در X وجود دارند به طوری که $a+b=c$.

۱۶. ۱۰۰ مجموعه‌ی ۱۰ عضوی داده شده‌اند. می‌دانیم که اشتراک هر دوتا از این مجموعه‌ها تک‌عضوی است. ثابت کنید اشتراک همه‌ی این مجموعه‌ها تک‌عضوی است.

۱۷. ۱۶ خانه از یک جدول ۸ × ۸ رنگ شده‌اند. ثابت کنید ۴ خانه‌ی رنگ شده موجودند که مرکزشان تشکیل یک متوازی‌الاضلاع دهد.

۱۸. جدولی داریم که از سمت راست و پایین نامتناهی است. هر یک از خانه‌های این جدول با یکی از k رنگ موجود، رنگ شده است. ثابت کنید مستطیلی وجود دارد که ۴ خانه‌ی گوشه‌ی آن همرنگ باشند.

۱۹. ۵۵ کاشی ۲ × ۲ در یک جدول ۱۰ × ۱۰ قرار داده شده‌اند به طوری که کل جدول را بپوشانند. هر کاشی ۲ × ۲ دقیقا ۴ خانه از جدول را می‌پوشاند و کاشی‌ها می‌توانند همپوشانی داشته باشند. ثابت کنید می‌توان یکی از این ۵۵ کاشی را برداشت به طوری که ۵۴ کاشی باقی‌مانده نیز کل جدول را بپوشانند.

۲۰. هر عدد طبیعی با یکی از k رنگ داده شده رنگ شده است. ثابت کنید اعداد متمایز و همرنگ a، b، c و d وجود دارند به طوری که $ad=bc$، $\frac{b}{a}$ توانی از ۲ بوده و $\frac{c}{a}$ توانی از ۳ باشد.