



ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۰۰

مدرس: دکتر آبام

زمان آزمون: ۱۰ فروردین

منطقی و جبر مجموعه‌ها

تمرین سری اول

مسئله‌ی ۱. کلاه‌های منگوله‌دار

۲۰۰ نفر از دانش‌آموزان در یک صف ایستاده‌اند و هر یک کلاهی روی سر دارند که یا منگوله‌دار است و یا منگوله ندارد. ناظم مدرسه به ترتیب از انتهای صف از دانش‌آموزان می‌پرسد که کلاهشان منگوله دارد یا خیر. هر کس که جواب درست بدهد به اردو خواهد رفت. بچه‌های مدرسه که صلاح جمع را به صلاح خود ترجیح می‌دهند، می‌خواهند باهم قراری بگذارند که بیشترین تعداد از آن‌ها به اردو برود. همچنین ناظم هر کسی را که در حین پرسش وی صحبت کند، از مدرسه اخراج می‌کند و لذا صحبت و انتقال اطلاعات بین آن‌ها مجاز نیست. اما چون دانش‌آموزان به ترتیب در صف ایستاده‌اند هر کسی کلاه تمام افراد جلوی خود را به خوبی می‌بیند. حداکثر تعداد افرادی که می‌توانند به اردو بروند را مشخص کرده و روش دستیابی به این تعداد را شرح دهید.

مسئله‌ی ۲. چراغ خواب سحرآمیز

جک بعد از لوبیای سحرآمیز به یک چراغ خواب سحرآمیز دست یافت که می‌تواند نور به رنگ‌های نارنجی، بنفش یا سفید را ایجاد کند. این چراغ خواب سه کلید دارد که هر کلید آن می‌تواند در سه وضعیت پایین، وسط و بالا قرار بگیرد. می‌دانیم اگر وضعیت کلیدها را همزمان تغییر دهیم، رنگ چراغ حتماً تغییر می‌کند. ابتدا هر سه کلید پایین هستند و چراغ نارنجی است. جک با تغییر وضعیت کلید اول از پایین به وسط، چراغ را به رنگ دلخواهش یعنی بنفش درمی‌آورد و به خواب می‌رود. مرغ تخم‌طلا که از کنار جک می‌گذشته پایش روی کلید دوم رفته و وضعیت کلید دوم نیز به وسط تغییر می‌کند. حالا نور چراغ چه رنگ است؟

مسئله‌ی ۳. گله حسن‌قلی

چوپان گله حسن‌قلی روزی متوجه می‌شود که گرگ‌هایی در لباس گوسفند وارد گله او شده‌اند. می‌دانیم گرگ‌ها همیشه دروغ گفته و گوسفندها راستگو هستند. چوپان مکالمه ۳ نفر از اعضای گله را می‌شنود: A در گوش B یکی از این دو عبارت «من یک گوسفندم» و یا «من یک گرگم» را زمزمه می‌کند. B به C می‌گوید A ادعا می‌کند که گوسفند است. در انتها C می‌گوید که A گوسفند نیست و یک گرگ است. چند نفر از این سه نفر گوسفند هستند؟

مسئله‌ی ۴. گرگ‌های گوسفندنما

چوپان گله حسن‌قلی همچنان در میان گله گوسفندان و گرگ‌های گوسفندنما گیج است. وی از یکی از بچه‌های روستا گزاره‌های زیر را می‌شنود:

- اگر A گوسفند باشد، آنگاه B و C نیز گوسفندند.
- اگر B گوسفند باشد، آنگاه حداقل یکی از A و C نیز گوسفند است.
- اگر C گوسفند باشد، آنگاه A گوسفند و B گرگ است.

کدام از یک از A و B و C گوسفندند ؟

مسئله ۵. خنثی سازی بمب ها

دستیار کارآگاه پوارو در یک عملیات وظیفه خنثی کردن بمب ها را دارد. هر بمب با قطع کردن تعدادی از سیم هایش خنثی می شود. در هر قسمت حالت هایی که بمب منفجر خواهد شد گفته شده است. به دستیار کارآگاه پوارو کمک کنید تا مشخص کند چه سیم هایی را باید قطع کند. اگر هر یک از متغیرها را به صورت زیر تعریف کنیم، گزاره های معادل شرط انفجار بمب را برای هر بخش بنویسید. در واقع گزاره نوشته شده توسط شما در صورتی که یک شود بمب منفجر خواهد شد.

- P : سیم بنفش قطع شود.
- B : سیم آبی قطع شود.
- R : سیم قرمز قطع شود.
- L : سیم سیاه قطع شود.
- Y : سیم زرد قطع شود.
- O : سیم نارنجی قطع شود.

الف) در این بخش سه سیم وجود دارد:

- سیم بنفش و آبی وصل باشند.
- سیم بنفش و قرمز قطع باشند.
- فقط دو سیم وصل باشند.

ب) در این بخش نیز سه سیم وجود دارد:

- سیم بنفش قطع و سیم آبی وصل باشد.
- حداقل یکی از سیم ها وصل باشد.

ج) در این بخش شش سیم وجود دارد:

- سیم های بنفش و سیاه وصل و سیم قرمز قطع باشد.
- سیم های زرد یا نارنجی وصل ولی سیم آبی قطع باشد.
- سیم آبی قطع باشد و فقط یکی از سیم های بنفش و سیاه وصل باشد.
- حداقل یکی از سیم های آبی یا قرمز وصل باشند.

مسئله ۶. فقط یکی

XOR دو جمله را به صورت زیر تعریف می کنیم :

p	q	p XOR q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الف) با کشیدن جدول صحت ثابت کنید عبارت $\neg(p \leftrightarrow q)$ معادل XOR است.

ب) به کمک قواعد استنتاج ثابت کنید: $\neg(p \leftrightarrow q) \implies p \vee q$

مسئله‌ی ۷. باران و تخم‌طلا

مرغ تخم‌طلا همیشه پیش از باران تخم می‌گذارد. مرغ تخم‌طلا امروز تخم گذاشته است. دوست جک نتیجه می‌گیرد که امروز باید باران ببارد. آیا با دوست جک موافقت می‌کنید؟

مسئله‌ی ۸. جک و لوبیای سحرآمیز

فرض کنید p, q, r و s معرف گزاره‌های زیر باشد:

- p : مرغ تخم‌طلا تخم می‌گذارد.
- q : فروشگاه جک و لوبیای سحرآمیز باز است.
- r : امروز باران می‌بارد.
- s : جک خوشحال است.

با استفاده از موارد بالا گزاره‌های زیر را به صورت نمادین بنویسید:

الف) اگر امروز باران ببارد مرغ تخم‌طلا تخم گذاشته است.

ب) برای آن که فروشگاه جک و لوبیای سحرآمیز باز باشد، نباید باران ببارد.

ج) جک از این که ببیند مرغ تخم‌طلا تخم گذاشته است یا امروز باران ببارد، خوشحال خواهد شد.

مسئله‌ی ۹. تابع پی

گزاره زیر را در نظر بگیرید.

$$P(x, y) : (y - x)^2 = y^2 - x^2 - 2xy$$

درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را بررسی کنید.

الف) $\forall x \exists y P(x, y)$

ب) $\exists y \forall x P(x, y)$

ج) $\forall y \exists x P(x, y)$

مسئله‌ی ۱۰. جدول بمب‌ها

در برخی از خانه‌های جدول زیر بمب وجود دارد. در هر یک از خانه‌های آن تعداد همسایه‌های حاوی بمب آن نوشته شده است. اگر گزاره $P(i, j)$ نشان دهد که در خانه سطر i ام و ستون j ام بمب وجود دارد یا نه، با نوشتن گزاره‌های قابل استنتاج از عدد هر خانه، خانه‌های بمب‌دار را پیدا کنید.

2	3	2
2	3	2
1	1	1

مسئله‌ی ۱۱. گزاره‌های منطقی

گزاره‌های زیر را ثابت یا رد کنید.

الف) $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge q$

ب) $\neg q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

ج) $(p \wedge (r \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r)) \rightarrow (s \vee r)$

د) $(\forall x (f(x) \wedge g(x))) \rightarrow (\forall x f(x) \wedge \forall x g(x))$

ه) $(\exists x (f(x) \vee g(x))) \rightarrow (\exists x f(x) \vee (\exists x g(x)))$

و) $(\forall x (f(x) \rightarrow g(x))) \Rightarrow \exists x g(x)$

مسئله‌ی ۱۲. توابع مشخصه

برای زیر مجموعه A از S ، تابع مشخصه‌ی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_A(X) = ۱, X \in A$$

$$k_A(X) = ۰, X \in S - A$$

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

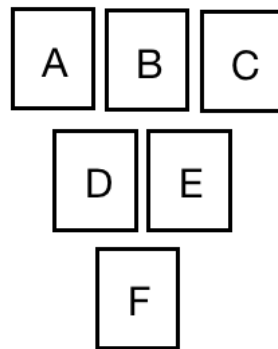
الف) $k_A \cdot k_B$ تابع مشخصه‌ی $A \cap B$ است.

ب) $k_A + k_B$ در پیمانه ۲ تابع مشخصه‌ی $A \cup B$ است.

ج) $k_A - k_{A \cap B}$ تابع مشخصه‌ی $A - B$ است.

مسئله‌ی ۱۳. مجموعه‌های پله‌ای

A ، B و C سه مجموعه دلخواه‌اند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه‌ی بالای سر خودش است (سمت چپی منهای سمت راستی) مثلاً $D = A - B$. همچنین $P(A)$ نشان‌دهنده مجموعه توانی مجموعه A است. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.



الف) $B \subseteq F$

ب) $F \subseteq A \cap C$

ج) $D \cap C \subseteq F$

د) $(P(A) \cup P(B)) \subset P(A \cup B)$

ه) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

و) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$

مسئله‌ی ۱۴. آلیس در سرزمین عجایب

آلیس مدت n روز را در سرزمین عجایب گذرانده بود. پس از بازگشت برای دوستانش این‌گونه تعریف می‌کرد: «در مدت هفت روز، هر روز نصف روز باران می‌آمد. هرگاه صبح می‌بارید عصر هوا آفتابی بود. ۵ روز صبح‌ها و ۶ روز عصرها آفتابی بود.» n را بیابید.

مسئله‌ی ۱۵. سگ گله حسن‌قلی

حسن‌قلی می‌خواهد برای افزایش امنیت گله‌اش یک سگ گله‌بخرد. فروشنده سگ‌های گله، ۲۵ سگ دارد. هیچ یک از این سگ‌ها هم باهوش، هم دارای بویایی قوی و هم قدرتمند نیستند. ۸ تا از آن‌ها باهوش، ۱۷ تا دارای بویایی قوی و ۱۳ تا قدرتمند هستند. ۶ تا نیز نه باهوشند و نه دارای بویایی قوی و نه قدرتمند. اگر حسن‌قلی به دنبال یک سگ باهوش و قدرتمند باشد چند سگ شانس انتخاب شدن دارند؟

مسئله‌ی ۱۶. کاردینال

ثابت کنید:

$$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

مسئله‌ی ۱۷. هم‌ارزی

نشان دهید دو عبارت $\forall x \exists y (p(x) \wedge q(y))$ و $\forall x p(x) \wedge \exists x q(x)$ هم‌ارز هستند. فرض کنید دامنه‌ی صورها یکسان است. آیا دو عبارت $\forall x \exists y (p(x) \vee q(y))$ و $\forall x p(x) \vee \exists x q(x)$ نیز هم‌ارز هستند؟

مسئله‌ی ۱۸. کاردینالیتی مجموعه‌ی توانی

نشان دهید به ازای هر مجموعه‌ی شمارای A داریم $|A| < |P(A)|$ که $P(A)$ مجموعه‌ی توانی A (یا همان زیرمجموعه‌های A) است.

مسئله‌ی ۱۹. مجموعه‌های شمارا

درست یا نادرست بودن گزینه‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱. ضرب دکارتی دو مجموعه شمارا حتما شماراست.

۲. ناشمارا مجموعه ناشمارا وجود دارد که اشتراک هر دو تای آن‌ها شمارا و ناتهی است.

مسئله‌ی ۲۰. گزاره‌ی همیشه درست

نشان دهید عبارت زیر یک عبارت همیشه درست است ($n > 1$).

$$[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n)] \rightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n]$$

مسئله‌ی ۲۱. مجموعه‌ها

اگر داشته باشیم $A' \cup (B - A) = (A' \cup B') \cup ((A \cap B)' \cap (C \cap D))$ ثابت کنید $A \subset B$.

مسئله‌ی ۲۲. جزء صحیح

نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد طبیعی n داریم:

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$$

مسئله‌ی ۲۳. شمارا

فرض کنید $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ یک مجموعه باشد که لزوما تعداد اعضای آن متناهی نیست. می‌دانیم مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A ناشماراست. حال به ازای k ($k > 1$) مشخص، فرض کنید مجموعه A_k

شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های A با حداکثر k عضو باشد؛ در واقع $A_k = \{X | X \subset A, |X| \leq k\}$. آیا A_k شماراست؟ دلیل خود برای شمارا بودن یا نبودن مجموعه فوق را بیان کنید.

مسئله‌ی ۲۴. متمم‌سازی

عملگر \oplus را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

«عبارت $a \oplus b$ درست است اگر و تنها اگر از بین a و b تنها یکی درست باشد.»

با کدام لیست (ها) از علائم زیر می‌توان نقیض یک عبارت را به‌دست آورد؟ (در هر قسمت ادعای خود را با مثال یا اثبات نشان دهید)

• \oplus, \rightarrow

• \oplus, \vee

مسئله‌ی ۲۵. توابع

فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید.

$$\forall X \subseteq A : f(X) = \{b \in B | \exists a \in X (f(a) = b)\}$$

$$\forall Y \subseteq B : f^{-1}(Y) = \{a \in A | f(a) \in Y\}$$

در ضمن عملگر Δ برای دو مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

کدام یک از روابط زیر درست است (اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید).

$$1. \forall X, Y, Z \subseteq A : f(X \cap (Y \Delta Z)) = f(X) \cap (f(Y) \Delta f(Z))$$

$$2. \forall X, Y, Z \subseteq B : f^{-1}(X \cap (Y \Delta Z)) = f^{-1}(X) \cap (f^{-1}(Y) \Delta f^{-1}(Z))$$