



## ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: حمید ضرابی زاده

مبحث آزمون ۲

رابطه‌های بازگشتی و توابع مولد

تمرین سری هفتم

۱. دنباله  $F$  به این صورت تعریف می‌شود که  $F_0 = 0$ ،  $F_1 = 1$  و به ازای هر  $n \geq 1$ ،  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ . تابع مولد این دنباله را بیابید.

۲. فرض کنید  $p_n$  تعداد جایگشت‌های مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, n\}$  باشد. مقدار  $p_n$  را با استفاده از روابط بازگشتی به دست آورید.

۳. فرض کنید  $T_n$  تعداد راه‌های پوشاندن جدولی  $2 \times n$  با موزاییک‌های  $1 \times 2$  باشد.  $T_n$  را بیابید.

۴. رابطه‌ی بازگشتی زیر را با استفاده از روش معادله مشخصه حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} & n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

۵. فرض کنید  $a_n$  تعداد ماتریس‌های متقارن  $n \times n$  با درایه‌های ۰ و ۱ باشد به طوری‌که در هر سطر آن‌ها دقیقاً یک درایه‌ی ۱ وجود داشته باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای  $a_n$  بیابید.

۶. فرض کنید  $t_n$  تعداد کلمات  $n$  حرفی با حروف  $a$  و  $b$  باشد که شامل دو حرف متوالی  $a$  هستند. رابطه‌ای بازگشتی برای  $t_n$  بیابید.

۷. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی زیر را بیابید.

$$\begin{cases} f_{2n} = f_n & n \geq 1 \\ f_{2n+1} = f_n + f_{n+1} & n \geq 1 \\ f_1 = 1 \end{cases}$$

۸. توابع مولد متناظر با دنباله‌های زیر را به دست آورید.

(الف)  $1, 2, 3, 4, \dots$

(ب)  $0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

(ج)  $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$

۹.  $n+1$  وزنه با وزن‌های  $2^0, 2^1, \dots, 2^n$  داریم. می‌خواهیم آن‌ها را یکی یکی بر روی کفه‌های ترازو قرار دهیم طوری که کفه‌ی سمت راست ترازو هیچ‌گاه سبک‌تر از سمت چپ نشود. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱۰.  $n$  خط در صفحه داده شده‌اند به طوری‌که هیچ دو خطی موازی نیستند و هیچ سه خطی از یک نقطه نمی‌گذرند. فرض کنید  $f_n$  تعداد ناحیه‌های ایجاد شده با این خطوط در صفحه باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای  $f_n$  بیابید و آن را حل کنید.

۱۱. فرض کنید  $T_n$  تعداد مثلث‌هایی باشد که طول اضلاع آن‌ها صحیح است و محیط  $n$  دارند. رابطه‌ای بازگشتی برای  $T_n$  بیابید.

۱۲. یک صفحه‌ی شطرنجی  $n \times n$  در نظر بگیرید که همه‌ی خانه‌های بالای قطر اصلی آن حذف شده باشند. به چند طریق می‌توان شکل حاصل را با  $n$  مستطیل با مساحت‌های طبیعی و متمایز پوشاند طوری که اضلاع هر مستطیل روی خطوط صفحه‌ی شطرنج باشند؟

۱۳. با استفاده از تابع مولد ثابت کنید که هر عدد طبیعی را به صورت یکتا می‌توان به صورت جمع تعدادی توان ۲ که متمایز باشند نوشت.

۱۴. اگر  $F$  دنباله‌ی فیبوناچی باشد و  $F_0 = 0, F_1 = 1$ ، با استفاده از تابع مولد برای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید:

$$F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

۱۵. فرض کنید  $a_n$  تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی رئوس  $n$  ضلعی  $A_1 A_2 \dots A_n$  با  $k$  رنگ باشد به طوری که هیچ دو راس مجاور هم‌رنگ نباشند. رابطه‌ای بازگشتی برای  $a_n$  بیابید.

۱۶. در باغ  $n$  گل  $g_1, g_2, \dots, g_n$  و  $1, 2, \dots, 2n-1$  باغچه‌ی  $b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}$  وجود دارند. هر گل مانند  $g_i$  را در  $b_1, b_2, \dots, b_{2i-1}$  می‌توان کاشت. به ازای هر  $1 \leq r \leq n$  فرض کنید  $A(n, r)$  برابر تعداد راه‌های گل کاشتن در  $r$  باغچه‌ی متفاوت باشد به طوری که در هر باغچه یک نوع گل قابل کشت، کاشته شده باشد و گل‌های دو باغچه متمایز باشند. رابطه‌ای بازگشتی برای  $A(n, r)$  به دست آورید و آن را حل کنید.

۱۷. تابع  $f$  را در نظر بگیرید که به هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, n\}$  مانند  $A$  عضوی از  $A$  را نسبت می‌دهد.  $f$  را ویژه گوئیم هرگاه برای هر دو زیرمجموعه مانند  $A$  و  $B$ ،  $f(A \cup B)$  برابر یکی از  $f(A)$  و  $f(B)$  باشد. تعداد توابع ویژه را بیابید.

۱۸. فرض کنید  $a_n$  تعداد حالات رنگ‌آمیزی یک جدول  $2 \times n$  با دو رنگ سیاه و سفید باشد، طوری که هیچ دوخانه‌ی مجاور هر دو به رنگ سیاه نباشند. برای  $a_n$  یک رابطه‌ی بازگشتی با درجه‌ی ثابت پیدا کنید.

۱۹. فرض کنید  $n$  عددی طبیعی است. تعداد جایگشت‌های  $a_1, a_2, \dots, a_n$  از اعداد  $\{1, 2, \dots, n\}$  را بیابید به طوری که:

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \dots \leq na_n$$

۲۰. عدد طبیعی  $n$  مفروض است. منظور از افراز  $n$  به جمع تعدادی عدد، نوشتن  $n$  به صورت جمع آن اعداد بدون در نظر گرفتن ترتیب اعداد است. فرض کنید  $A$  نیز برابر تعداد راه‌های افراز  $n$  به جمع تعدادی عدد فرد است. فرض کنید  $B$  برابر تعداد راه‌های افراز  $n$  به جمع تعدادی عدد طبیعی متمایز است. ثابت کنید  $A = B$ .