به نام خدا

۱. آرمان تعریف می‌کند که ۲۲، ۱۳ و ۱۵ نفر از دوستانش به ترتیب در مسابقات شطرنج، فیفا و دوتا شرکت داشته‌اند. همچنین ۸ نفر هم در شطرنج و هم در فیفا شرکت کرده‌اند، ۷ نفر هم در شطرنج هم در دوتا، ۶ نفر هم در فیفا هم در دوتا. ۳ نفر از دوستانش نیز در هر سه مسابقه شرکت داشته‌اند. اگر بدانیم هر یک از دوستان او در حداقل یک مسابقه شرکت کرده است، تعداد دوستان آرمان را بیابید.

$22 + \cancel{13} + \cancel{15 - 8 - 7 - 6 + 3} = 32$

۲. در یک گروه از دانشجویان n دانشجو وجود دارند که روی 2^{n-1} سوال گسسته فکر کرده‌اند. می‌دانیم به ازای هر دو سوال متمایز از بین این سوالات یک دانشجو وجود دارد که $\boxed{\text{هر دو سوال}}$ را حل کرده باشد و یک دانشجوی دیگر وجود دارد که دقیقا یکی از این دو سوال را حل کرده باشد. نشان دهید سوالی وجود دارد که تمام دانشجویان آن را حل کرده باشند.

$\boxed{000..0}$

$01001 \rightarrow c_1 \quad \cdots \quad c_{2^{n-1}} \qquad 2^n$

یکی تا n $\rightarrow \overline{c_1} \qquad \overline{c_{2^{n-1}}}$

11111

۳. فرض کنید $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای شامل زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی Ω باشد به طوری که اگر $A, B \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $A - B \in \mathcal{F}$. نشان دهید:

الف) برای هر $A, B \in \mathcal{F}$ داریم $A \cap B \in \mathcal{F}$. $= A-(A-B)$

ب) اجتماع شمارا عضو از $\mathcal{F}$ را می‌توان به شکل اجتماع شمارا عضو مجزا از $\mathcal{F}$ نوشت.

ج) اگر $\mathcal{F}$ نسبت به اجتماع شمارا بسته باشد نسبت به اشتراک شمارا نیز بسته است.

$A_1, A_2, A_3, \dots \in F$

$B_1, B_2, B_3, \dots \in F$

$\bigcup A_i = \bigcup B_i$

مجزا

$A_2 - B_1$

$B_3 = (A_3 - B_2) - B_1$

$A_1, A_2, A_3, \dots$

$\subseteq A_1$

$\bigcap A_i = A_1 - \bigcup (A_1 - A_i)$

$\in F$

$\in F$

۴. تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۲۰\}$ را بیابید که یا مجموع اعضای آن‌ها و یا تعداد اعضای آن‌ها فرد باشد.

$\subseteq \{1,2\}$ $\subseteq \{3, \dots, 20\}$

$\{\}$ ز ز

$\{1\}$ ف ف

$\{2\}$ ف ز

$\{1,2\}$ ف ز

2^{18}

S

3×2^{18}

۵. مجموعه‌ی $\Omega = \{۰,۱\}^{\mathbb{N}}$ شامل همه‌ی دنباله‌های با طول متناهی از ۰ و ۱ را در نظر بگیرید زیرمجموعه‌ی A از Ω را متناهی‌البعد گوییم هر گاه عدد طبیعی n و مجموعه‌ی $\boxed{B \subseteq \{۰,۱\}^n}$ موجود باشند طوری که همه‌ی اعضای A با عضوی از B شروع شوند. به عبارت دیگر:

$$A = \{\omega \in \Omega \mid w = (w_۱,\dots,w_m),\ m \geqslant n,\ (w_۱\dots w_n)\in B\}$$

فرض کنید زیرمجموعه‌های متناهی‌البعد $A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq \dots$ از Ω موجود باشند به طوری که:

n_1

B_1

$$\bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n = \emptyset$$

C_1

$\vdots$

C_k

0

1

000110

$n=3$

$B=\{000, 001, 010\}$

نشان دهید مقدار n وجود دارد که $\boxed{A_n = \emptyset}$.

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_t \dots \supseteq A_l$

۶. رده‌ی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های Ω را یک «میدان سیگمایی» می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشند:

- $\boxed{\Omega \in \mathcal{F}}$
- $\boxed{A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}}$ ✓ $= \bigcup B_i$
- $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$B_1, B_2, \ldots$

همچنین می‌گوییم $\mathcal{F}$ یک «لاندا سیستم» است اگر سه شرط زیر برقرار باشند:

- $\boxed{\Omega \in \mathcal{F}}$ $\quad \Omega \quad B - A \quad \Omega - A = A^c$
- $A \subseteq B \in \mathcal{F} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{F}$ $\quad B - (A \cap B) = B - A$
- $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}, \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

نشان دهید کوچک‌ترین لاندا سیستم شامل رده‌ی $\mathcal{F}$ که نسبت به اشتراک بسته باشد یک میدان سیگمایی است.

$F' \to$ اشتراک

$B \in F$

$F'_B = \{A \in F' \mid \boxed{A \cap B} \in F'\}$

$F \subseteq F'_B \subseteq F'$

$F'_B = F'$

$F'_B = F'$

$B \in F'$

لاندا

$F \subseteq F'_B = \{\boxed{A \in F'} \mid \boxed{A \cap B} \in F'\} \subseteq F'$

$\boxed{A \in F}$

$s_1, s_2, \dots$

۷. با فرض شمارا بودن مجموعه‌ی A نشان دهید: $\mathbb{N}$

الف) مجموعه‌ی $A^۲$ شمارا است. $(0,0)$

ب) برای هر n طبیعی مجموعه‌ی A^n شمارا است. $(0,0,0)$ $A^n \boxed{\mathbb{N}^n}$

ج) مجموعه‌ی $\boxed{\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n}$ شمارا است.

$A^n = A \times A^{n-1}$, $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$

۸. برای مجموعه‌های A و B نماد $\boxed{|A| \leqslant |B|}$ به این معنی است که تابعی یک‌به‌یک از A به B وجود دارد. نماد $|A| = |B|$ به این معناست که تابعی یک‌به‌یک و پوشا بین مجموعه‌های A و B موجود است. با توجه به این تعاریف نشان دهید اگر برای دو مجموعه‌ی A و B بدانیم $|A| \leqslant |B|$ و $|B| \leqslant |A|$ آن‌گاه خواهیم داشت $|A| = |B|$.

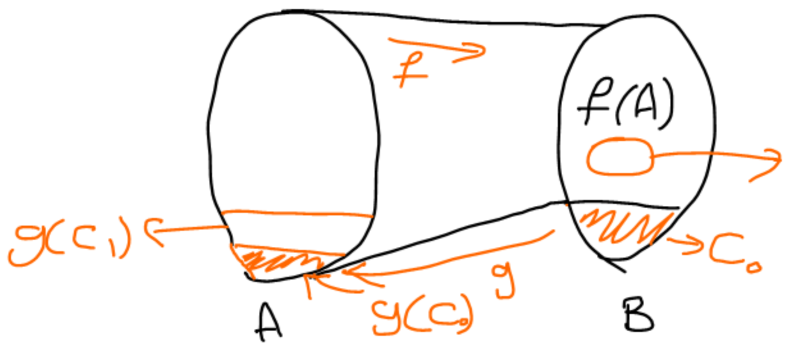
۱-۱ و پوشا

$\underset{1-1}{f}\ A \to B \iff |A| \leqslant |B|$

$\underset{1-1}{f}\ A \to B$

$\underset{1-1}{g}\ B \to A$

$h\ A \leftrightarrow B$ (۱-۱ پوشا)



$f(g(C_0)) = C_1$

$g(C) \to C = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots$ $\quad \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{N}$

$f^{-1}(B') \xrightarrow{f} \boxed{B'}$

$h : A \to B$

$x \in A \begin{cases} g^{-1}(x) & x \in g(C) \\ f(x) & \# \end{cases}$

$2, 3, 5, 7, 11, \dots$

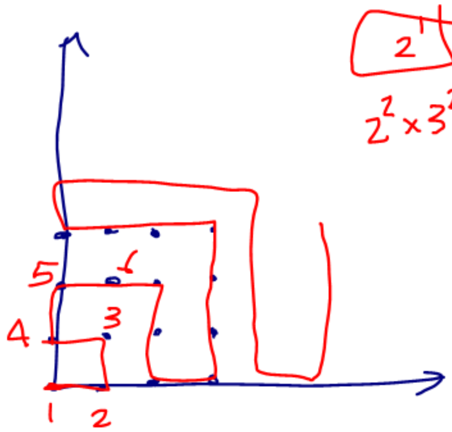
$\boxed{2^1}$ $\to 1,0,0,0,0$

$2^2 \times 3^2 \times 5^4$ $\leftarrow 1,2,4,0,0,0$ $\rightleftarrows \mathbb{N}$

(1)

$(2,5) \longleftrightarrow \in \mathbb{N}$

$2^2 \times 3^5$



۹. مجموعه‌ی A را «مجموع متناهی» گوییم هر گاه مجموع اعضای هر زیرمجموعه‌ی متناهی آن از مقدار ثابت c تجاوز نکند. نشان دهید اگر A مجموعه‌ای مجموع متناهی با اعضای مثبت باشد، آن گاه A شمارا عضو ~~دارد~~ دارد.

۱۰. نشان دهید می‌توان شمارا گوی در فضای $\mathbb{R}^n$ یافت به طوری که برای هر دو نقطه‌ی متمایز x, y گوی A شامل x و گوی B شامل y موجود باشند به طوری که:

$$A \cap B = \emptyset$$

$\mathbb{Q}^n$ شمارا — مرکز

$\times \mathbb{Q}$ — شعاع

$\forall x \in A \ \exists n : \frac{c}{n} \leq x$

$c \leq x$ $\boxed{1}$

$\frac{c}{2} \leq x$ $\boxed{2}$

$\frac{c}{n} \leq x$ $\boxed{n}$

$\{a_1, a_2,$

۱۱. مجموعه C_0 را برابر مجموعه $[0, 1]$ قرار می‌دهیم. سپس برای ساختن C_1 یک سوم میانی مجموعه C_0 را حذف می‌کنیم. پس از آن برای ساختن C_2 از هر کدام از بازه‌های موجود در C_1 یک سوم میانی را حذف می‌کنیم و به همین شکل ادامه می‌دهیم. مجموعه C_n برای چند n اول در شکل زیر نمایش داده شده است:

$\boxed{\text{مبنای } 3}$

$$C_0 = [0, 1] \qquad [0, 0.\bar{2}]$$

$$C_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1] \qquad [0.0, 0.0\bar{2}] \cup [0.2, 0.2\bar{2}]$$

$$\vdots$$

همچنین تعریف می‌کنیم $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. تابعی یک‌به‌یک و پوشا از مجموعه‌ی C به C_0 ارائه دهید.

دقیقا ← اعشاری با

ارقام ۰ و 2

در مبنای 3

$2 \to 1$

مبنای 3 ← مبنای 2 !

۱۲. مجموعه‌ی ناشمارای Ω را در نظر بگیرید. تعدادی شمارا عضو از آن را حذف می‌کنیم و مجموعه‌ی جدید را Ω' می‌نامیم. نشان دهید $|\Omega'| = |\Omega|$.

$A \cup \Omega' = \Omega$

شمارا

$B \cup \Omega''$

شمارا

$B \cup \Omega'' \leftrightarrow \underbrace{A \cup B}_{\text{شمارا}} \cup \Omega''$

۱۳. رده‌ی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های R^n را «شمارای دوم» گوییم هرگاه بتوان زیرمجموعه‌ی شمارای $\mathcal{F}'$ از $\mathcal{F}$ را یافت به شکلی که هر عضو از $\mathcal{F}$ را بتوان به شکل اجتماع تعدادی (احتمالا بی‌شمار) عضو از $\mathcal{F}'$ نمایش داد.

$A \in F \longrightarrow B \subseteq F' \rightarrow A = \bigcup_{C \in B} C$

الف) نشان دهید $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ در خاصیت بالا صدق می‌کنند اگر به ازای هر عضو $A \in \mathcal{F}$ و هر نقطه‌ی $x \in A$ عضو $B \in \mathcal{F}'$ موجود باشد به طوری که $x \in B, B \subset A$.

$A = \bigcup C \quad C \subseteq A$

ب) نشان دهید مجموعه‌ی $2^{\mathbb{R}}$ (مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی) شمارای دوم نیست.

ج) نشان دهید مجموعه‌ی همه گوی‌های باز در $\mathbb{R}^n$ شمارای دوم است.

$x \in A$

$A \stackrel{?}{=} \underbrace{\bigcup C_x} \subseteq A$

$x \in R$

$\boxed{A = \{x\}}$

$\boxed{B = \{x\}} \in F'$

F'

$F' =$ گوی های گویا باز

۱۴. فرض کنید A مجموعه‌ای از دایره‌ها در فضای $\mathbb{R}^2$ باشد. نشان دهید:

الف) اگر دایره‌ها توپر باشند و هیچ دوتایی با یک‌دیگر اشتراک و برخورد نداشته باشند، A شمارا است.

ب) اگر دایره‌ها توخالی باشند و هیچ دوتایی با یک‌دیگر برخورد نداشته باشند، A می‌تواند ناشمارا باشد.

$(0,0)$

شعاع $= x \in \mathbb{R}^{>0}$

۱۵. برای مجموعه‌ی A منظور از 2^A مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های A است. نشان دهید:

~~الف) اگر A شمارا باشد، $|2^A| > |A|$.~~

ب) برای هر مجموعه‌ی A، $|2^A| > |A|$.

$A \leqslant 2^A \qquad A \neq 2^A$

$x \to \{x\} \subseteq A$

$|A| < |2^A|$

$f: A \leftrightarrow 2^A$ $\boxed{\text{فرض خلف}}$ ✗

$B = \{x \in A \mid \underbrace{x \notin f(x)}\} \subseteq A$

$\exists y \in A: f(y) = B$

$y \in B \Rightarrow y \notin f(y) = B$ ✗

$y \notin B \Rightarrow y \in f(y) = B$ ✗

۱۶. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید طوری که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$\to c = 0 \quad \boxed{f \equiv x}$

$$f(f(x)+f(y)) = x + f(y) = y + f(x) \Rightarrow \boxed{f(x) = x + \cancel{f(0)}\,c}$$

$x + 3c = x + y + c \quad (+y)$

۱۷. فرض کنید $S \subset \mathbb{R}$ مجموعه‌ای متناهی باشد که حداقل ۴ عضو دارد. فرض کنید تابع پوشای غیرهمانی $f: S \to S$ موجود باشد به طوری که برای هر دو عضو متمایز S مثل a, b بدانیم $\boxed{ab \leqslant f(a)f(b)}$. ثابت کنید جمع اعضای S برابر صفر است.

$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$a_i a_j \leqslant \underbrace{f(a_i)f(a_j)}_{a_k a_l}$

$ab = f(a)f(b)$

$aS' = f(a)S'$

$a(S' - a) = f(a)(S' - f(a))$

$S' =$ جمع.

۱۸. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(xy+f(x)) = xf(y)+f(x) \to f(a)=0$$

$$f(x_1)=f(x_2)=c \to x_1 c = x_2 c \to \boxed{x_1=x_2 \ \text{یا}\ c=0}$$

$$f(a)=0$$

$$\cancel{f(a+f(a))} = af(1)+0 \to \boxed{a=0 \ \text{یا}\ f(1)=0}$$

I) $f(1)=0$: $f(\underbrace{x+f(x)}_{}) = f(x)=0 \to f(x)=0$ $\boxed{f\equiv 0}$

$x+f(x)=x$

II) $f(1)\neq 0$, $f(0)=0$ $\quad f(f(x))=f(x) \to \boxed{f(x)=0} \leftarrow x=0$

$\boxed{f(x)=x} \to \boxed{f\equiv x}$

۱۹. تمام توابع کران‌دار $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(f(x)+y)=f(x)+f(y)$$

$f(x)+y$ $\quad$ $f(f(x)+y)=f(x)+f(y)$

$2f(x)$

$$\Rightarrow f(2f(x)+y)=2f(x)+f(y) \to f(nf(x)+y)=nf(x)+f(y) \quad n\to\infty$$

$$\to \boxed{f\equiv 0}$$

۲۰. ثابت کنید برای هر تابع غیرثابت مثل $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، اعداد حقیقی x,y موجودند که $f(x+y)<f(xy)$.

$\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)\geq f(xy) \Longrightarrow f\equiv$ ثابت

$\forall x: f(x)\geq f(0)$

$\forall z\leq 0: \quad f(0)\geq f(z)\geq f(0) \Longrightarrow f(z)=f(0)$

$x>0 \quad \underbrace{f(-2x)}_{=f(0)} \geq f(x^2) \rightsquigarrow f(x)=f(0) \rightsquigarrow f\equiv$ ثابت