



مسئله‌ی ۱. معادله کسری [۱۵ نمره]

فرض کنید p اول باشد. تمام اعداد طبیعی x و y را پیدا کنید که داشته باشیم: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$.

مسئله‌ی ۲. علامت‌گذاری [۱۵ نمره]

در یک ماتریس $m \times n$ از اعداد حقیقی متمایز، به ازای هر سطر، p ($p \leq n$) بزرگ‌ترین عدد را علامت‌گذاری می‌کنیم. همچنین به ازای هر ستون، q ($q \leq m$) بزرگ‌ترین عدد را علامت‌گذاری می‌کنیم. نشان دهید حداقل pq عدد وجود دارد که دوبار علامت‌گذاری شده‌اند.

مسئله‌ی ۳. دوگان [۲۰ نمره]

فرض کنید $P(x_1, \dots, x_n)$ یک عبارت گزاره‌ای باشد که روی n متغیر تعریف شده است که در آن تنها از عملگرهای \vee, \wedge, \neg استفاده شده است. دوگان P بدین شکل ساخته می‌شود: عملگر \vee به عملگر \wedge تبدیل می‌شود و بالعکس. در ضمن F به T تبدیل می‌شود و بالعکس. به عنوان مثال اگر $P(x_1, x_2) = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee T)$ باشد دوگان آن $(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge F)$ می‌شود. با استقراء ثابت کنید دوگان P برابر $\neg P(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$ است. نتیجه بدیهی این مسئله این است که اگر دو عبارت گزاره‌ای P و Q هم‌ارز باشند، دوگان آن‌ها نیز هم‌ارز هستند.

مسئله‌ی ۴. حل معادله [۳۰ نمره]

۱. اگر x یک عدد طبیعی و p یک عامل اول $\frac{x^5-1}{x-1}$ باشد نشان دهید $p = 5$ یا $p \equiv 1 \pmod{5}$.
۲. اگر x یک عدد طبیعی و d یک عامل (نه لزوماً اول) $\frac{x^5-1}{x-1}$ باشد نشان دهید $5 \mid d$ یا $d \equiv 1 \pmod{5}$.
۳. همه اعداد طبیعی x و y بزرگتر از یک را پیدا کنید که $\frac{x^5-1}{x-1} = y^5 - 1$.

مسئله‌ی ۵. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک [۲۰ نمره]

با استفاده از استقراء نشان دهید به ازای هر دو عدد صحیح نامنفی a و b ، دو عدد صحیح x و y وجود دارد که $ax+by = (a, b)$ که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است.