

**مسئله‌ی ۱. دنباله‌ی درجه رئوس [۱۲ نمره]**

فرض کنید  $d_1, \dots, d_n$  اعداد صحیح مثبتی باشند و داشته باشیم  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ . ثابت کنید درختی با دنباله درجاتی برابر با  $d_1, \dots, d_n$  وجود دارد.

**مسئله‌ی ۲. شبکه و افراز [۱۳ نمره]**

فرض کنید رابطه‌های هم‌ارزی  $R_1$  و  $R_2$  روی مجموعه  $A$  تعریف شده باشند. رابطه‌ی  $R_1$  زیررابطه  $R_2$  است، اگر داشته باشیم:

$$\forall (x, y) \ x R_1 y \rightarrow x R_2 y$$

ثابت کنید مجموعه تمام روابط هم‌ارزی روی مجموعه  $A$  با رابطه زیررابطه بودن تشکیل یک شبکه می‌دهند. به عبارت دیگر اگر این زیررابطه را با  $S$  نشان دهیم، داریم  $R_1 S R_2$  اگر و فقط اگر هر افراز  $R_1$  زیرمجموعه یک افراز در  $R_2$  باشد. شما باید نشان دهید رابطه  $S$  شبکه است.

**مسئله‌ی ۳. گراف [۲۵ نمره]**

فرض کنید  $G$  گرافی ساده (نه لزوماً همبند) با  $n$  راس باشد و  $2 \leq k \leq n$ . ثابت کنید  $k$  راس در  $G$  وجود دارد که تفاضل درجه‌های هر دو تا از آن‌ها حداکثر  $k - 2$  است. اگر صرفاً برای  $k = 2, n$  اثبات کنید ۱۲ نمره کسب خواهید کرد.

**مسئله‌ی ۴. روابط [۲۵ نمره]**

فرض کنید  $R$  یک رابطه روی مجموعه  $A$  باشد. نشان دهید بستر تعدی (بستار تقارن) (بستار انعکاسی رابطه  $R$ )) کوچکترین رابطه هم‌ارزی است که شامل  $R$  است.

**مسئله‌ی ۵. زبان [۲۵ نمره]**

نشان دهید زبان زیر منظم نیست و برای آن یک گرامر مستقل متن ارائه دهید.

$$L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in N\}$$