



ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری دهم

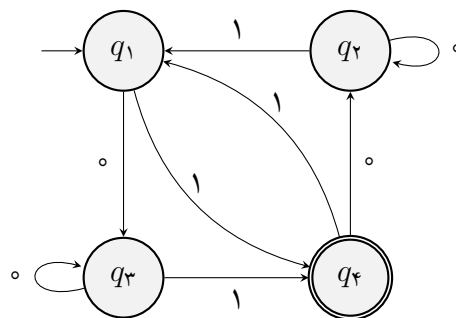
مدل‌سازی محاسبات

مبحث آزمون پایانی

۱. ثابت کنید هر زبان متناهی، یک زبان منظم است.
۲. اثبات کنید مجموعه‌ی زبان‌های منظم نسبت به اشتراک و اجتماع و بستار بسته است.
۳. به ازای هر عدد طبیعی n نشان دهید زبان منظمی وجود دارد که دارای ماشین حالت‌متناهی با کمتر از n حالت نیست.
۴. تابع shift را روی زبان‌های L به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{shift}(L) = \{xw \mid w \in \{0, 1\}^*, x \in \{0, 1\} \text{ و } wx \in L\}$$

اگر L زبانی باشد که ماشین حالت‌متناهی قطعی زیر را می‌پذیرد، ماشین حالت‌متناهی قطعی‌ای که زبان $\text{shift}(L)$ را می‌پذیرد رسم کنید.

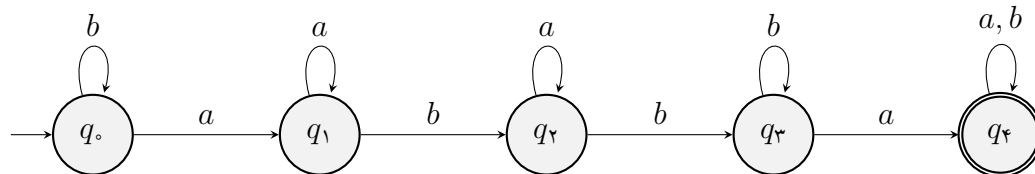


۵. نشان دهید مجموعه‌ی زبان‌های منظم تحت تابع shift که در مسئله‌ی قبلی تعریف شده است، بسته است.
 ۶. ثابت کنید مجموعه‌ی زبان‌های منظم تحت عملیات قرینه کردن همه‌ی رشته‌ها بسته است.
 ۷. فرض کنید زبان L منظم است. ثابت کنید زبان زیر نیز منظم است:
- $$L_2 = \{w \mid ww \in L\}$$
۸. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

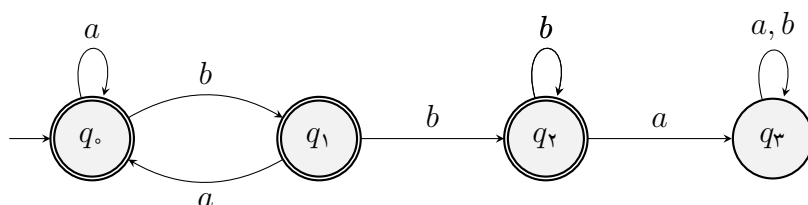
$$L = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \text{ و } n_a(w) \% 3 = 1 \text{ یا } n_b(w) \% 4 = 2\}$$

- که در آن $\%$ نماد باقی‌مانده و n_a, n_b به ترتیب برابر تعداد حروف a و تعداد حروف b داخل رشته می‌باشند.
- الف) یک ماشین حالت‌متناهی قطعی که زبان فوق را بپذیرد و کمترین تعداد حالت را داشته باشد رسم کنید. نشان دهید نمی‌توان با تعداد حالت کمتری این کار را انجام داد.
- ب) یک ماشین حالت‌متناهی غیرقطعی با حداکثر هشت حالت طراحی کنید که زبان فوق را بپذیرد.
۹. برای هر یک از ماشین‌های حالت‌متناهی داده شده زبان آن را توصیف کرده و ادعای خود را اثبات کنید.

الف) $\Sigma = \{a, b\}$



ب) $\Sigma = \{a, b\}$



۱۰. برای هر یک از زبان‌های زیر، یا یک ماشین حالت متناهی قطعی که آن را بپذیرد ارائه دهید و یا ثابت کنید که نامنظم است.

الف) $L_1 = \{a^{pq} \mid p, q \text{ اعداد اول باشند}\}$

ب) $L_2 = \{a^k b^k \mid k \geq 0\}$

ج) $L_3 = \{a^{p+q} b^q \mid p, q \geq 0\}$

۱۱. فرض کنید L یک زبان باشد. به رشته‌های s_1 و s_2 تمایزپذیر گوییم، اگر رشته‌ای مانند s_3 وجود داشته باشد که L دقیقاً یکی از کلمات $s_1 s_3$ و $s_2 s_3$ را داشته باشد.

روی مجموعه‌ی رشته‌ها، رابطه‌ی تمایزناپذیری را در نظر بگیرید. این رابطه در واقع مجموعه‌ی زوج مرتب‌هایی مانند (s_1, s_2) از رشته‌ها است که s_1 و s_2 تمایزپذیر نباشند.

ابتدا ثابت کنید این رابطه، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. سپس ثابت کنید L منظم است، اگر و تنها اگر تعداد کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه متناهی باشد.

۱۲. فرض کنید A و B دو زبان تشخیص‌پذیر باشند. ثابت کنید زبان‌های $A \cup B$, $A \cap B$, $A.B$, A^* نیز تشخیص‌پذیر هستند.

۱۳. فرض کنید r و s دو عبارت منظم تحت الفبای Σ باشند. در هر یک از موارد زیر، عبارت منظم داده شده را تا حد امکان ساده کنید؛ یعنی عبارت منظمی ارائه دهید که معادل با عبارت منظم داده شده باشد و طول آن تا حد امکان کوتاه باشد (نیازی به اثبات این که عبارت منظم کوتاه‌تری وجود ندارد که معادل عبارت منظم داده شده باشد نیست).

الف) $r(r^*r + r^*) + r^*$

ب) $(r + \lambda)^*$

ج) $(r + s)^* r s (r + s)^* + s^* r^*$

۱۴. در هر مورد، درستی تساوی داده شده را اثبات یا رد کنید. در تمامی موارد الفبا را $\{0, 1\}$ در نظر می‌گیریم.

الف) $(0 + 01)^* = 00^*1^*$

ب) $(0 + 1)^*(11 + 0 + \lambda)^* = (0 + 1)^*11(0 + 1)^*$

ج) $(0 + 11 + 10 + 1)^* = (111 + 110 + 101 + 011 + 010 + 0)^*$

$$(01 + 10 + 00 + 11)^* = ((00)^* + (01)^* + (10)^* + (11)^*)^* \quad (د)$$

۱۵. عملگر avoid را روی دو زبان A و B به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ avoid } B = \{w \mid w \text{ عضو } A \text{ است و } w \text{ شامل هیچ زیررشته‌ای در زبان } B \text{ نیست} \mid w\}$$

نشان دهید مجموعه‌ی زبان‌های منظم نسبت به عمل avoid بسته است.

۱۶. با استفاده از لم پمپاژ نشان دهید مجموعه‌ی رشته‌های آینه‌ای ساخته‌شده به کمک الفبای $\{0, 1\}$ منظم نیست. رشته آینه‌ای رشته‌ای است که از دو طرف به یک شکل خوانده شود.

۱۷. نشان دهید مجموعه‌ی زبان‌های تصمیم‌پذیر نسبت به عمل اشتراک بسته است.

۱۸. ثابت کنید هر ماشین تورینگ با چند نوار، معادل ماشین تورینگ با یک نوار است.

۱۹. ماشین تورینگ داریم که می‌دانیم به ازای هر رشته‌ی ورودی بعد از حداکثر k مرحله به حالت پایانی می‌رسد. اثبات کنید زبانی که ماشین تورینگ ما می‌پذیرد یک زبان منظم است.

۲۰. ماشین تورینگ طراحی کنید که اگر در نوار آن 1^n نوشته شده باشد، پس از اتمام کار، در نوار 1^{2n} نوشته شده باشد و اشاره‌گر به اول آن اشاره کند.