دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری ششم | نظریه‌ی اعداد | مبحث آزمون ۲

۱. فرض کنید a, b, c, d اعدادی طبیعی هستند.

الف) اگر $a - c \mid ab + cd$، ثابت کنید $a - c \mid ad + cb$.

ب) اگر $۲۱ \mid a^۲ + b^۲$، ثابت کنید $۴۴۱ \mid a^۲ + b^۲$.

۲. تمام جواب‌های معادلات زیر را به دست آورید.

الف) p, q اعدادی اول‌اند و $p^۲ - ۲q^۲ = ۱$.

ب) x, y اعدادی صحیح‌اند و $x^۲ + ۶y^۲ = ۱۴۰۰$.

۳. ثابت کنید اگر جمع ارقام عددی با جمع ارقام دو برابر آن عدد برابر باشد، این عدد بر ۹ بخش پذیر است.

۴. به ازای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید در بین هر $n + ۱$ عدد طبیعی در بازه‌ی ۱ تا $۲n$، دو عدد وجود دارند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

۵. p عددی طبیعی است که اعداد p، $p + ۴۴$ و $p + ۲۸$ هر سه اول‌اند. p را بیابید.

۶. n عددی طبیعی است. اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ داده شده‌اند و به ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$، $a_i \in \{۱, -۱\}$. همچنین می‌دانیم:

$$a_۱a_۲ + a_۲a_۳ + \cdots + a_na_۱ = ۰$$

ثابت کنید $۴ \mid n$.

۷. کوچک‌ترین عددی طبیعی n را بیابید طوری که عدد طبیعی m وجود داشته باشد که

$$۹۹۹۹۹n = \underbrace{۱۱\ldots۱}_{\text{m تا}}$$

۸. یک عدد طبیعی ۲۰ رقمی داریم که ۱۱ رقم سمت چپ آن ۱ هستند. ثابت کنید این عدد نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۹. فرض کنید x, y, z جواب‌هایی طبیعی برای معادله‌ی فیثاغورث $x^۲ + y^۲ = z^۲$ باشند. ثابت کنید حداقل یکی از آن‌ها بر ۳ بخش پذیر است. این حکم را برای ۴ و ۵ نیز ثابت کنید.

۱۰. ثابت کنید هیچ دو عدد طبیعی a, b وجود ندارند که $b \geqslant ۲$ و $۲^b - ۱ \mid ۲^a + ۱$.

۱۱. ثابت کنید عددی که از ۱۴۰۰ بار پشت سر هم نوشتن رقم ۲ حاصل می‌شود، بر ۱۴۰۲ بخش‌پذیر است.

۱۲. اعداد ۱ تا ۱۴۰۱ را بدون ترتیب خاصی پشت سر هم نوشته‌ایم تا عدد جدیدی ساخته شود. ثابت کنید عدد جدید، مکعب کامل نیست.

۱۳. فرض کنید a, b, c, d, e اعدادی طبیعی هستند که

$$۲۵ \mid a^{۵} + b^{۵} + c^{۵} + d^{۵} + e^{۵}$$

ثابت کنید:

$$۵ \mid abcde$$

۱۴. اعداد طبیعی $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ داده شده‌اند به طوری که همگی کمتر از ۱۴۰۲ هستند و کوچک‌ترین مضرب مشترک هیچ دو تایی از آن‌ها کوچک‌تر از ۱۴۰۲ نیست. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_n} < ۲$$

۱۵. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند که

$$\frac{b+۱}{a} + \frac{a+۱}{b} \in \mathbb{N}$$

ثابت کنید مربع ب.م.م این دو عدد، از مجموع آن‌ها کوچک‌تر است.

۱۶. اگر n عددی طبیعی باشد و k عددی فرد، ثابت کنید عبارت

$$۲(۱^k + ۲^k + \cdots + n^k)$$

بر $n(n+۱)$ بخش‌پذیر است.

۱۷. m عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ است. می‌دانیم:

$$m \mid (m-۱)! + ۱$$

ثابت کنید m اول است.

۱۸. به ازای هر عددی طبیعی a، ثابت کنید عددی طبیعی مانند n وجود دارد که همه‌ی اعداد

$$n, n+۱, \dots, n+a$$

مرکب باشند.

۱۹. کمترین مقدار $۳۶^n - ۵^m$ به ازای مقادیر طبیعی n و m را به دست آورید.

۲۰. تعدادی عدد روی تخته نوشته شده‌اند. در هر مرحله، دو عدد از اعداد روی تخته را انتخاب کرده و با ب.م.م. این دو عدد و ک.م.م. این دو عدد جایگزین می‌کنیم. ثابت کنید پس از مدتی، این عملیات متوقف می‌شود و اعداد روی تخته دیگر تغییری نمی‌کنند.