ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۰۱-۰۲

مدرس: آبام

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم | *نظریهٔ گراف‌ها* | زمان آزمون: ۲۳ خرداد

مسئله‌ی ۱. مکمل‌گیری

ثابت کنید به‌ازای $n \geqslant 2$، تعداد گراف‌های همبند n رأسی برچسب‌دار از گراف‌های ناهمبند n رأسی بیشتر است.
راهنمایی: ثابت کنید مکمل هر گراف ناهمبند، همبند است.

مسئله‌ی ۲. یال غیربرشی

ثابت کنید یک یال، یال غیربرشی است اگر و تنها اگر عضو یک دور باشد.

مسئله‌ی ۳. مسیرِ فرعی

در یک گراف همبند، P و Q دو مسیر بیشینه هستند. ثابت کنید این دو مسیر قطعا رأس مشترک دارند.

مسئله‌ی ۴. برگ‌ریزان

ثابت کنید در هر درخت، تعداد برگ‌ها برابر است با $\sum_{x \in V(G)} (d_i - 2) + 2$، به شرطی که x برگ نباشد.

مسئله‌ی ۵. سحر و جادو

نشان دهید هر گرافی با کمینه درجهٔ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ همبند است؛ اما به‌ازای هر $n \geqslant 2$ ، گرافی n رأسی ناهمبند با کمینهٔ درجهٔ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ وجود دارد.

مسئله‌ی ۶. گراف چندبخشی

گراف G با رئوس v_1 تا v_n را درنظر بگیرید که هر یک از رئوس v_i به حداکثر $k - 1$ تا از رئوس v_1 تا v_{i-1} متصل است. ثابت کنید این گراف k-بخشی است.

مسئله‌ی ۷. رنگ‌آمیختنی

رنگ‌آمیزی k-تایی یک گراف زمانی است که به هر رأس، یک مجموعهٔ k-تایی از رنگ‌ها نسبت دهیم؛ به‌طوری که هیچ‌کدام از اعضای دو رأس مجاور با هم برابر نباشند. χ_k را کم‌ترین تعداد رنگی تعریف می‌کنیم که بتوان با این مجموعه رنگ، رئوس یک گراف را رنگ‌آمیزی k-تایی کرد. به‌ازای هر k طبیعی، χ_k را برای یک گراف دوبخشی به‌دست آورید.

مسئله‌ی ۸. پادشاه تورنمنت

ثابت کنید در هر تورنمنت، رأسی وجود دارد که به هر رأس دیگری مسیری با حداکثر ۲ یال دارد. (به این رأس پادشاه می‌گویند)

مسئله‌ی ۹. دَگ‌بازی

ثابت کنید می‌توان رئوس هر گراف جهت‌دار بدون دوری را طوری روی یک خط چید که تمامی یال‌ها به یک سمت باشند (به چنین ترتیب چینشی، ترتیب توپولوژیکال می‌گویند).

مسئله‌ی ۱۰. سنتروید

مرکز یک گراف، رأسی است که بیشینهٔ فاصله‌اش از دیگر رئوس، بین تمامی رئوس کمینه باشد. به‌عبارت دیگر اگر $dis_{i,j}$ را برابر فاصلهٔ رأس i و j تعریف کنیم و $M_i = max_{j=۱}^{n} dis_{i,j}$، رأسی که کمترین M_i را دارد، مرکز گراف است. ثابت کنید هر درخت یا فقط یک مرکز دارد و یا دقیقا دارای دو مرکز است که با هم مجاورند.

مسئله‌ی ۱۱. جمع کمترین ارتفاع

در یک درخت ریشه‌دار که در ان هر گره داخلی حداقل دو فرزند دارد، فاصله هر گره تا نزدیک‌تر برگ را با $d(v)$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید $\sum d(v) \leqslant n \log n$. اگر فرض حداقل دو فرزند برداشته شود، حداکثر عبارت فوق چقدر است؟

مسئله‌ی ۱۲. دنباله‌ی درجه رئوس

فرض کنید $d_۱, \cdots, d_n$ اعداد صحیح مثبتی باشند و داشته باشیم $\sum_{i=۱}^{n} d_i = ۲n - ۲$. ثابت کنید درختی با دنباله درجاتی برابر با $d_۱, \cdots, d_n$ وجود دارد.

مسئله‌ی ۱۳. تور اویلری

ثابت کنید هر گراف جهتدار همبند که درجه‌ی ورودی هر راس آن با درجه‌ی خروجی آن برابر است تور اویلری دارد.

مسئله‌ی ۱۴. تعداد نواحی

فرض کنید n خط که هیج دوتایی موازی نیستند روی صفحه کشیده شده است. هیچ سه خطی نیز از یک نقطه رد نمی‌شوند. با استفاده از فرمول اویلر برای گراف‌های مسطح تعداد نواحی ایجاد شده بوسیله این n خط را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۱۵. ساخت دور اویلری با اضافه کردن حداقل یال

به یک گراف که لزوما همبند نیست حداقل چندیال باید اضافه شود که دارای دور اویلری شود.

مسئله‌ی ۱۶. حداقل درجه

فرض کنید در درختی با $n > ۲$ گره، فاصله هر دو راسی حداکثر برابر ℓ است (فاصله دو راس برابر تعداد یال‌های موجود در مسیر ساده بین آن دو راس در درخت است). ثابت کنید در درخت فوق راسی وجود دارد که درجه آن حداقل $n^{۱/(\lceil \ell/۲ \rceil + ۱)}$ است.

مسئله‌ی ۱۷. تقسیم متوازن درخت

فرض کنید یک درخت با n راس در اختیار داریم که درجه هر راس حداکثر ۳ است. ثابت کنید می‌توان یالی پیدا کرد که با حذف آن درخت به دو زیر درخت افراز شود که هر زیردرخت حداکثر $۲n/۳$ راس داشته باشد.

مسئله‌ی ۱۸. ناحیه‌بندی

n پاره‌خط غیرمتقاطع داخل یک مربع داده شده است. هیچ پاره‌خطی عمودی نیست و مختصات x و y هیچ دو نقطه انتهایی پاره‌خط‌ها مساوی نیستند. از هر نقطه انتهایی پاره‌خط‌ها، یک نیم خط عمودی به سمت بالا و یکی به سمت پایین می‌کشیم تا زمانی که به یک پاره‌خط دیگر یا یکی از اضلاع مربع برخورد کند. بعد از رسم این خطوط، تعدادی ذوزنقه ایجاد خواهد شد. تعداد ذوزنقه‌ها را با ذکر دلیل با استفاده از فرمول اویلر برای گراف‌های مسطح پیدا کنید.

مسئله‌ی ۱۹. دور هامیلتونی

یک گراف همبند G بسازید که برای آنکه دارای دور هامیلتونی شود مجبور باشید به ان $n - ۲$ یال اضافه کنید.

مسئله‌ی ۲۰. مثلث‌بندی

فرض کنید داخل یک n ضلعی محدب m نقطه داده شده است. فرض کنید هیچ سه نقطه‌ای از این $n + m$ نقطه هم‌خط نیستند. حال شروع به رسم پاره‌خط‌هایی می‌کنیم که دو سر آن از مجموعه این $n + m$ نقطه باشد به گونه‌ای که این پاره‌خط‌ها جز در نقاط فوق بایکدیگر تقاطع نداشته باشند. این کار را انقدر ادامه می‌دهیم تا دیگر نتوانیم پاره‌خطی اضافه کنیم. حال اگر به شکل ترسیم شده نگاه کنید تعدادی مثلث خواهید دید. تعداد مثلث‌ها را با استفاده از فرمول اویلر برحسب m و n محاسبه کنید.