



ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری دهم

مدل‌سازی محاسبات

مبحث آزمون پایانی

۱. ثابت کنید هر زبان متناهی، یک زبان منظم است. همچنین نشان دهید مجموعه‌ی زبان‌های منظم نسبت به اجتماع، اشتراک، مکمل، الحاق، بستار و قرینه کردن بسته است.

۲. فرض کنید L یک زبان باشد. به رشته‌های s_1 و s_2 تمایزپذیر گوییم، اگر رشته‌ای مانند s_3 وجود داشته باشد که L دقیقاً یکی از کلمات $s_1 s_3$ و $s_2 s_3$ را داشته باشد. روی مجموعه‌ی رشته‌ها، رابطه‌ی تمایزناپذیری را در نظر بگیرید. این رابطه در واقع مجموعه‌ی زوج مرتب‌هایی مانند (s_1, s_2) از رشته‌ها است که s_2 و s_1 تمایزپذیر نباشند. ابتدا ثابت کنید این رابطه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. سپس ثابت کنید L منظم است، اگر و تنها اگر تعداد کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه متناهی باشد.

۳. عملگر avoid را روی دو زبان A و B به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ avoid } B = \{w \mid w \text{ عضو } A \text{ است و } w \text{ شامل هیچ زیررشته‌ای در زبان } B \text{ نیست}\}$$

نشان دهید مجموعه‌ی زبان‌های منظم نسبت به عمل avoid بسته است.

۴. ثابت کنید اگر زبان‌های L و L' منظم باشند، زبان‌های زیر هم منظم هستند:

$$L_{\text{suffix}} = \{y \mid \exists x \in \Sigma^* : xy \in L\} \quad (\text{الف})$$

$$L_{\text{prefix}} = \{x \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L\} \quad (\text{ب})$$

$$L/L' = \{x \mid \exists y \in L' : xy \in L\} \quad (\text{ج})$$

$$L_{\text{shuffle}} = \{w_1 v_1 \dots w_m v_m \mid w_1 \dots w_m \in L \text{ و } v_1 \dots v_m \in L'\} \quad (\text{د})$$

که هرکدام از w_i ها و v_i ها یک رشته هستند.

$$L_{\text{noprefix}} = \{w \in L \mid \text{هیچ پیشوند اکیدی از } w \text{ داخل } L \text{ نیست}\} \quad (\text{ه})$$

$$L_{\text{noextend}} = \{w \in L \mid \text{هیچ رشته‌ای از } L \text{ نیست}\} \quad (\text{و})$$

۵. فرض کنید A یک زبان منظم است. نشان دهید زبان زیر هم منظم است:

$$A_{\frac{1}{2}} = \{x \mid xy \in A, |x| = |y|\}$$

۶. فرض کنید A یک زبان منظم است. نشان دهید زبان زیر هم منظم است:

$$A_{\frac{2}{3}} = \{xy \mid xyz \in A, |x| = |y| = |z|\}$$

۷. فرض کنید A یک زبان منظم و B یک زبان دلخواه باشد. نشان دهید زبان زیر هم منظم است:

$$L = \{w \mid \exists x \in B : wx \in A\}$$

۸. نشان دهید برای هر ماشین حالت متناهی غیرقطعی با k حالت، یک ماشین حالت متناهی قطعی هم‌ارز با حداکثر 2^k حالت وجود دارد. همچنین یک ماشین حالت متناهی غیرقطعی با k حالت معرفی کنید که ماشین قطعی هم‌ارز آن حداقل 2^{k-1} حالت داشته باشد.

۹. فرض کنید A, B و C زبان‌های دلخواه روی الفبای Σ هستند. گزاره‌های زیر را اثبات کرده یا با مثال نقض رد کنید.

(الف) $(A^*)^* = A^* = (A^+)^* = (A^*)^+$

(ب) $A(BA)^* = (AB)^*A$

(ج) $(AB)^* = A^*B^*$

(د) $A(B \cup C) = AB \cup AC$

(ه) $A^*(B \cap C)^* = (AB \cap AC)^*$

(و) $(AB)^R = B^RA^R$

(ز) $(A^*)^R = (A^R)^*$

۱۰. یک عبارت منظم بنویسید که اعداد مبنای ۲ که بر ۳ بخش پذیرند را بسازد. توجه کنید که یک عدد نباید رشته‌ی تهی باشد و نمی‌تواند با \circ شروع شود مگر این که عدد \circ باشد.

۱۱. نشان دهید زبان‌های زیر منظم نیستند. می‌توانید از لم پمپاژ و نتایج سوال اول تمرین استفاده کنید:

(الف) $\{a^n b^m a^n \mid m, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$

(ب) $\{a^m b^n \mid m \neq n\}$

(ج) $\{wtw \mid w, t \in \{a, b\}^+\}$

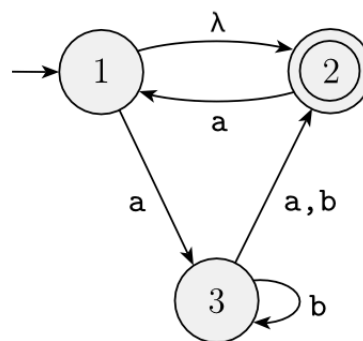
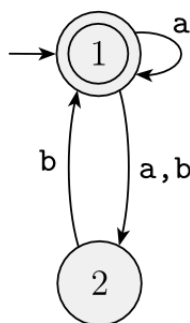
(د) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \neq w^R\}$

۱۲. نشان دهید زبان $D = \{1^n \mid n \geq 0\}$ منظم نیست.

۱۳. برای رشته‌ی $w = w_1 w_2 \dots w_n$ معکوس آن را به شکل $w^R = w_n \dots w_2 w_1$ تعریف می‌کنیم. برای هر زبان A تعریف می‌کنیم $A^R = \{w^R \mid w \in A\}$ نشان دهید اگر A منظم باشد A^R نیز منظم است.

۱۴. اگر $\Sigma = \{0, 1\}$ باشد، D را مجموعه‌ی رشته‌هایی قرار می‌دهیم که شامل تعداد یکسانی ۰ و ۱ باشند. نشان دهید D منظم است.

۱۵. برای هر یک از ماشین‌های حالت متناهی غیرقطعی زیر، یک ماشین قطعی هم‌ارز طراحی کنید.



۱۶. الف) قرار دهید:

$$B = \{y \mid y \text{ حداقل } k \text{ تا } 1 \text{ دارد و } y \in \{0, 1\}^* \text{ و } k \geq 1\}$$

نشان دهید B منظم است.

ب) قرار دهید:

$$C = \{y \mid y \text{ حداکثر } k \text{ تا } 1 \text{ دارد و } y \in \{0, 1\}^* \text{ و } k \geq 1\}$$

نشان دهید C منظم نیست.

۱۷. فرض کنید $\Sigma = \{0, 1\}$. برای هر $k, k \geq 1$ C_k را زبان متشکل از رشته‌هایی تعریف می‌کنیم که در جایگاه k ام از سمت راست آن‌ها ۱ قرار داشته باشد.

الف) یک NFA شامل $k + 1$ حالت توصیف کنید که C_k را تشخیص دهد.

ب) نشان دهید هیچ DFA با کمتر از 2^k حالتی نمی‌تواند C_k را تشخیص دهد.

۱۸. فرض کنید زبان A توسط یک ماشین حالت‌متناهی غیرقطعی با k حالت قابل تشخیص باشد.

الف) نشان دهید اگر A ناتهی باشد، A شامل رشته‌ای به طول حداکثر k خواهد بود.

ب) نشان دهید اگر \bar{A} ناتهی باشد، آنگاه \bar{A} شامل رشته‌ای به طول حداکثر 2^k خواهد بود.

۱۹. برای زبان‌های زیر یک ماشین تورینگ تصمیم‌پذیر ارائه دهید. $n_0(w)$ و $n_1(w)$ به ترتیب تعداد تکرارهای حروف صفر و یک در رشته‌ی w تعریف می‌شوند.

الف)

$$L_1 = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \text{ و } n_0(w) = n_1(w)\}$$

ب)

$$L_2 = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \text{ و } 2n_0(w) = n_1(w)\}$$

ج)

$$L_3 = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \text{ و } 2n_0(w) \neq n_1(w)\}$$

۲۰. ماشین تورینگ داریم که می‌دانیم به ازای هر رشته‌ی ورودی بعد از حداکثر k مرحله به حالت پایانی می‌رسد. نشان دهید زبانی که این ماشین تورینگ می‌پذیرد یک زبان منظم است.