ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: حمید ضرابی زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری هشتم — رابطه‌ها و ترتیب جزئی — مبحث آزمون ۳

---

۱. براي هرکدام از رابطه‌های زیر، تعیین کنید که کدام یک از خواص بازتابی، پادتقارنی و تعدی را دارد. کدام رابطه‌ها ترتیب جزئی هستند؟

الف) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xRy \iff x \geqslant y$

ب) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xRy \iff x^۲ + y^۲ = ۱$

ج) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xRy \iff |x| = |y|$

۲. کدام یک از روابط زیر روی $\mathbb{R}$ تشکیل یک رابطه‌ی هم‌ارزی می‌دهند؟

الف) $xRy \iff x - y \in \mathbb{Z}$

ب) $xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}$

ج) $xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}^c$

۳. مشخص کنید هر یک از روابط زیر، رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه ارائه شده هستند یا خیر. اگر رابطه هم‌ارزی بود، کلاس‌های هم‌ارزی متناظر را توصیف کنید. در غیر این صورت، دلیل آن را ذکر کنید.

الف) $x \sim y$ در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ اگر $x \geqslant y$.

ب) $m \sim n$ در مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ اگر $mn > ۰$.

ج) $x \sim y$ در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ اگر $|x - y| \leqslant ۴$.

د) $m \sim n$ در مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ اگر $m \overset{۶}{\equiv} n$.

۴. فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی و R رابطه‌ای روی A با خاصیت ترتیب جزئی باشد. همچنین فرض کنید اعضای $x_۰, x_۱, \dots, x_{n-۱}$ به‌گونه‌ای از A انتخاب شده باشند که:

$$x_۰ \leqslant x_۱ \leqslant \cdots \leqslant x_{n-۱} \leqslant x_۰$$

نشان دهید $x_۰ = x_۱ = \cdots = x_{n-۱}$.

۵. مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \preccurlyeq)$ یک «مشبکه‌ی کامل» است، اگر هر زیرمجموعه از A دارای بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالا باشد. برای هر یک از مجموعه‌های مرتب جزئی زیر بررسی کنید که یک مشبکه کامل است یا خیر.

الف) اعداد گویا با عملگر کمتر مساوی متداول

ب) اعداد حقیقی با عملگر کمتر مساوی متداول

ج) زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A با عملگر زیرمجموعه بودن

۶. رابطه‌ی S روی مجموعه‌ی $M = \{۱, ۲, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰\}$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$xSy \iff (x < y \text{ و } x \mid y)$$

درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را مشخص کنید.

الف) برای هر $x, y \in M$ اگر $(x,y) \in S$، آنگاه $(y,x) \notin S$.
ب) برای هر $x \in M$ داریم $(x,x) \in S$.
ج) برای هر $x, y, z \in M$ اگر $(x,y) \in S$، و $(y,z) \in S$، آنگاه $(x,z) \in S$.

۷. بررسی کنید هر یک از روابط زیر ترتیب جزئی است یا خیر.

الف) $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ (a,b)R(c,d) \iff a \leqslant c$
ب) $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ (a,b)R(c,d) \iff a \leqslant c$ و $b \geqslant d$

۸. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به صورت زیر تعریف شده است. برای هر n طبیعی، رابطه‌ی R^n را پیدا کنید.

$$R = \{(۱,۲), (۱,۳), (۲,۴), (۳,۲)\}$$

۹. فرض کنید رابطه‌ی R روی $\mathbb{Z}$ تعریف شده به طوری که برای دو هر عدد صحیح x و y داریم xRy اگر و تنها اگر $x+y$ عددی زوج باشد.

الف) نشان دهید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.
ب) همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه را بیابید.

۱۰. فرض کنید $A, B \subseteq X$ و R رابطه‌ای دوتایی از X به Y باشد. نشان دهید:

الف) اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $R(A) \subseteq R(B)$.
ب) $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$.
ج) $R(A \cap B) \subseteq R(A) \cap R(B)$.

۱۱. دو مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \preccurlyeq_۱)$ و $(B, \preccurlyeq_۲)$ را در نظر بگیرید. رابطه‌ی $\preccurlyeq$ روی $A \times B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a,b) \preccurlyeq (a',b') \iff a \preccurlyeq_۱ a' \ \wedge\ b \preccurlyeq_۲ b'$$

در این صورت $\preccurlyeq$ را ضرب دو رابطه‌ی $\preccurlyeq_۱$ و $\preccurlyeq_۲$ می‌نامیم.

الف) نشان دهید $(A \times B, \preccurlyeq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.
ب) نشان دهید اگر $(A, \preccurlyeq_۱)$ و $(B, \preccurlyeq_۲)$ مشبکه باشند، آنگاه $(A \times B, \preccurlyeq)$ نیز یک مشبکه است.
ج) اگر $(A, \preccurlyeq_۱)$ و $(B, \preccurlyeq_۲)$ مجموعه‌هایی کاملا مرتب باشند، آیا $(A \times B, \preccurlyeq)$ نیز یک مجموعه‌ی کاملا مرتب است؟

۱۲. نشان دهید هر رابطه‌ی ترتیب جزئی روی مجموعه‌ی متناهی A زیرمجموعه‌ی یک ترتیب کامل روی A است.

۱۳. فرض کنید خانواده‌ای از روابط از مجموعه‌ی X به مجموعه‌ی Y به صورت $R_i \subseteq X \times Y$ داشته باشیم که $i \in I$. نشان دهید:

الف) اگر $R \subseteq W \times X$ رابطه‌ای دلخواه از W به X باشد، آنگاه

$$R(\bigcap_{i \in I} R_i) = \bigcap_{i \in I} RR_i$$

ب) اگر $S \subseteq Y \times Z$ رابطه‌ای دلخواه از Y به Z باشد، آنگاه

$$(\bigcap_{i\in I} R_i)S = \bigcap_{i\in I} R_i S$$

۱۴. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. رابطه‌ی همنهشتی $\sim$ به پیمانه‌ی n رابطه‌ای هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ است. $\mathbb{Z}_n$ را مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم‌ارزی $(\mathbb{Z}, \sim)$ تعریف می‌کنیم. برای عدد صحیح a نیز تابع $f_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_a([x]) = [ax]$$

الف) کاردینالیتی مجموعه‌ی $f_a(\mathbb{Z}_n)$ را پیدا کنید.

ب) تمام اعداد صحیح a را بیابید که f_a وارون‌پذیر باشد.

۱۵. فرض کنید I مجموعه‌ی تمام بازه‌های باز از اعداد حقیقی باشد.

الف) یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی اعضای I تعریف کنید، به صورتی که در آن دو بازه‌ی مختلف قابل‌مقایسه نباشند اگر و تنها اگر اشتراک ناتهی داشته باشند. آیا این رابطه مشبکه است؟

ب) دو بازه را تودرتو می‌نامیم اگر یکی از آن‌ها زیرمجموعه‌ی دیگری باشد. حال یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی اعضای I تعریف کنید به صورتی که دو بازه‌ی مختلف قابل‌مقایسه نباشند اگر و تنها اگر تودرتو باشند. آیا این رابطه مشبکه است؟

۱۶. درستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید و ادعای خود را اثبات کنید.

الف) هر مشبکه یک ترتیب کامل است.

ب) هر ترتیب کامل یک مشبکه است.

۱۷. فرض کنید X مجموعه‌ای با n عضو باشد. نشان دهید تعداد روابط هم‌ارزی قابل تعریف روی X برابر با عبارت زیر است.

$$\sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \sum_{l=k}^{n} \frac{(l-k)^n}{k!(l-k)!}$$

۱۸. فرض کنید $R(S)$ مجموعه‌ی همه‌ی رابطه‌ها روی مجموعه‌ی S باشد. رابطه‌ی $\preccurlyeq$ روی $R(S)$ این‌گونه تعریف می‌شود که $R_۱ \preccurlyeq R_۲$ هرگاه $R_۱ \subseteq R_۲$. ثابت کنید $\preccurlyeq$ روی $R(S)$ یک ترتیب جزئی است.

۱۹. فرض کنید رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X بازتابی و تعدی باشد. نشان دهید رابطه‌ی $R \cap R^{-۱}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲۰. مجموعه‌ی S و رابطه‌ی ترتیب جزئی $\preccurlyeq$ روی آن را در نظر بگیرید. $(S, \preccurlyeq)$ را «خوب» می‌نامیم اگر هیچ دنباله‌ی نزولی و نامتناهی از اعضای آن پیدا نشود. به این معنی که عناصر متمایز $x_۱, x_۲, \ldots$ موجود نباشند طوری که $\cdots \preccurlyeq x_۲ \preccurlyeq x_۱$. همچنین $(S, \preccurlyeq)$ را «چگال» می‌نامیم اگر برای هر دو عضو متمایز x و y از S که $x \preccurlyeq y$، عضوی مانند z در S باشد که $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$.

الف) نشان دهید $(S, \preccurlyeq)$ خوش‌ترتیب است اگر و تنها اگر خوب باشد و هر دو عضوی از آن قابل‌مقایسه باشند. (یادآوری: یک مجموعه‌ی کاملا مرتب «خوش‌ترتیب» است، اگر هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از آن دارای یک کوچک‌ترین عضو باشد.)

ب) نشان دهید مجموعه‌ی رشته‌های متناهی متشکل از حروف زبان انگلیسی با ترتیب لغت‌نامه‌ای نه خوب است و نه چگال.

ج) نشان دهید اگر $(S, \preccurlyeq)$ چگال باشد و حداقل دو عضو متمایز قابل‌مقایسه داشته باشد، آنگاه خوب نیست.