



ساختمان‌های گسسته

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: حمید ضرابی زاده

تمرین سری اول

شمارشی

مبحث آزمون ۱

۱. عدد طبیعی $n \geq 3$ داده شده است. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, n\}$ را بیابید که شامل دقیقاً دو عدد از اعداد ۱، ۲ و ۳ باشند. برای مثال دو مجموعه‌ی $\{1, 2, 7, 9\}$ و $\{1, 3, 9\}$ این ویژگی را دارند، اما $\{1, 7, 9\}$ این ویژگی را ندارد.

۲. تمامی رمزهای ۸ حرفی از حروف کوچک الفبای انگلیسی را در نظر بگیرید.

(الف) چه تعداد از این رمزها شامل حرف x است؟

(ب) چه تعداد از این رمزها شامل حروف x و y است؟

۳. فرض کنید k و n اعدادی طبیعی با شرط $2k \leq n$ و C یک مجموعه‌ی n عضوی است. تعداد دوتایی‌های نامرتب $\{A, B\}$ را بیابید که $A, B \subset C$ و $|A| = |B| = k$ و همچنین هر یک از شروط زیر به صورت جداگانه برقرار باشد.

(الف) $A \cap B = \emptyset$

(ب) $|A \cap B| = 1$

۴. چند دنباله به طول ۱۰ از اعداد طبیعی وجود دارند که عضو اول آن‌ها ۱ و عضو آخرشان 2^6 بوده و هر عدد بر عدد قبلی خود بخش‌پذیر باشد؟

۵. چند دنباله به طول ۱۲ از اعداد طبیعی متمایز وجود دارند که عضو اول آن‌ها ۱ و عضو آخرشان $5^4 \times 3^4 \times 2^3$ بوده و هر عدد بر عدد قبلی خود بخش‌پذیر باشد؟

۶. در یک سبد به ترتیب ۵، ۴، ۲ و ۹ توپ با رنگ‌های سبز، آبی، قرمز و زرد وجود دارند. به چند طریق می‌توانیم ۵ توپ از سبد بیرون بیاوریم طوری که در نهایت از هر رنگ حداقل یک توپ بیرون آورده شود؟

۷. به چند روش می‌توانیم در صفحه‌ی مختصات با استفاده از حرکات به سمت بالا و راست با شروع از نقطه‌ی $(0, 0)$ به نقطه‌ی $(8, 10)$ برویم به طوری که از هیچ کدام از نقاط $(4, 4)$ ، $(5, 5)$ و $(4, 6)$ عبور نکنیم؟

۸. به چند روش می‌توانیم در صفحه‌ی مختصات با استفاده از حرکات به سمت بالا و راست با شروع از نقطه‌ی $(0, 0)$ به نقطه‌ی $(8, 10)$ برویم به طوری که از هیچ کدام از نقاط $(4, 6)$ یا $(6, 8)$ عبور نکنیم؟

۹. به چند روش می‌توانیم در صفحه‌ی مختصات با انجام دقیقاً ۱۷ حرکت به طول ۱ در چهار جهت اصلی (بالا، راست، پایین و چپ) از نقطه‌ی $(0, 0)$ به نقطه‌ی $(7, 8)$ برویم؟

۱۰. فرض کنید یک صفحه‌ی شطرنج 8×8 در اختیار داریم. حداکثر چند مهره‌ی فیل شطرنج را می‌توانیم روی صفحه قرار دهیم به طوری که هیچ دوتایی از آن‌ها یکدیگر را تهدید نکنند؟ به چند طریق مختلف این تعداد فیل را می‌توان در صفحه‌ی شطرنج قرار داد؟

۱۱. فرض کنید یک صفحه‌ی شطرنج 9×9 در اختیار داریم. به چند روش می‌توانیم ۹ مهره‌ی رخ شطرنج را در خانه‌های هم‌رنگ صفحه قرار دهیم به طوری که هیچ دوتایی از آن‌ها یکدیگر را تهدید نکنند؟

۱۲. روابط زیر را بدون استفاده از قضیه‌ی دو جمله‌ای ثابت کنید.

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k} \quad (\text{ب})$$

$$\binom{ab}{c} = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_b=c} \binom{a}{i_1} \times \binom{a}{i_2} \times \dots \times \binom{a}{i_b} \quad (\text{ج})$$

۱۳. ۱۰۰ مهره گردن‌بند داریم. به چند طریق می‌توان با این ۱۰۰ مهره سه گردن‌بند ۲۰ مهره‌ای و چهار گردن‌بند ۱۰ مهره‌ای ساخت؟

۱۴. یک عدد چهاررقمی را «آینه‌ای» می‌نامیم اگر دنباله‌ی ارقام آن از چپ به راست و از راست به چپ یکسان باشد. برای مثال ۷۳۳۷ و ۳۳۳۳ اعداد چهاررقمی آینه‌ای هستند، ولی ۱۳۳۷ آینه‌ای نیست. یک عدد چهاررقمی را «تقریباً آینه‌ای» می‌نامیم اگر با تغییر دقیقاً یک رقم آن بتوان به یک عدد چهاررقمی آینه‌ای رسید. برای مثال، ۱۳۳۷، ۱۵۰۱ و ۱۹۹۰ اعداد چهاررقمی تقریباً آینه‌ای هستند (آن‌ها می‌توانند به ۱۳۳۱ یا ۷۳۳۷، ۱۰۰۱ و ۱۹۹۱ تبدیل شوند)، اما ۱۲۳۴، ۰۹۹۱ و ۱۳۳۱ نیستند. مشکل ۰۹۹۱ این است که این عدد ۳ رقمی است و مشکل ۱۳۳۱ این است که نمی‌توان رقمی از آن را تغییر داد تا به عددی آینه‌ای تبدیل شود. چند عدد چهاررقمی تقریباً آینه‌ای داریم؟

۱۵. دو نفر از مبدا مختصات شروع به حرکت می‌کنند. هر کدام در هر مرحله یک واحد به سمت راست، چپ، بالا یا پایین حرکت می‌کند. به چند طریق ممکن است پس از ۵ مرحله در نقطه‌ی یکسانی قرار داشته باشند؟

۱۶. تعداد اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۱۰۱۰ که مجموع ارقامشان برابر با ۹ است را بیابید.

۱۷. فرض کنید می‌خواهیم از نقطه‌ی $(0, 0)$ به نقطه‌ی (n, m) برویم به طوری که در هر مرحله تنها یک واحد به سمت بالا یا راست حرکت کنیم. از بین تمامی مسیرهای ممکن برای انجام این کار، می‌خواهیم ۲ مسیر انتخاب کنیم به طوری که به جز در نقاط شروع و پایان، این ۲ مسیر هیچ نقطه‌ی مشترک دیگری نداشته باشند. تعداد حالات انتخاب این ۲ مسیر با شرایط فوق را بشمارید.

۱۸. علی می‌خواهد یک دنباله به طول ۱۰ از اعداد $+1$ و -1 بسازد که جمع اعضای آن صفر شود و سپس بیشترین مقدار مجموع اعضا در بین پیشوندهای آن را حساب کند. مجموع تمام این مقادیر را به ازای تمام دنباله‌های ممکن حساب کنید.

۱۹. یک جدول 6×4 داریم که در گوشه‌ی بالاچپ آن عدد ۱ و در گوشه‌ی پایین‌راست آن عدد ۶ نوشته شده است. به چند طریق می‌توان این جدول را با اعداد طبیعی پر کرد، به گونه‌ای که عدد هر خانه، به اعداد خانه‌های بالا و چپ خود بخش‌پذیر باشد؟

۲۰. یک پارکینگ با n جایگاه متوالی و یک دنباله از اعداد طبیعی ۱ تا n به نام a در اختیار داریم. n ماشین به ترتیب وارد پارکینگ می‌شوند. ماشین i ام به سمت جایگاه a_i رفته و در صورتی که آن جایگاه خالی باشد در آنجا پارک می‌کند. در غیر این صورت، به سمت اولین جایگاه خالی بعد از آن رفته و در آنجا پارک می‌کند. اگر هم هیچ جایگاه خالی‌ای جلوتر از a_i وجود نداشت، در هیچ جایگاهی پارک نمی‌کند. تعداد دنباله‌های a که به ازای همه‌ی آن‌ها تمام ماشین‌ها پارک کنند را بشمارید.