ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۹-۰۰

مدرس: دکتر آبام

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری دوم | استقرا و نظریه اعداد | زمان آزمون: ۹ اردیبهشت

مسئله‌ی ۱. توان‌های دو

آیا عدد صحیح و مثبتی که توانی از ۲ باشد وجود دارد که با جابه‌جایی ارقامش توان دیگری از ۲ حاصل شود؟ چرا؟
(نمی‌توانید اعداد را به شکل $0\ldots0a_k\ldots a_0$ در نظر بگیرید)

مسئله‌ی ۲. بخش‌پذیر بر p

ثابت کنید برای هر عدد اول p، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $2^n - n$ بر p بخش‌پذیر باشد.

مسئله‌ی ۳. فیبوناچی مضرب

دنباله‌ی فیبوناچی به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geqslant 2$$

نشان دهید برای هر عدد طبیعی k عدد طبیعی m وجود دارد به طوری که F_m بر k بخش‌پذیر باشد.

مسئله‌ی ۴. گوی رونده

محور اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. دو گوی روی خانه‌های شماره‌ی اول و دوم آن قرار دارند. در هر مرحله می‌توان یک گوی را انتخاب کرد و اگر مکان کنونی آن بر روی عدد i باشد، آن را i عدد به جلو منتقل کرد، به طوری که اگر گوی دیگر در مسیر آن بود، از آن پرش کرده و آن خانه جزو خانه‌های طی شده به شمار نخواهد رفت. به طور مثال اگر در مرحله‌ای گوی‌ها روی اعداد ۳ و ۵ باشند و گوی روی شماره‌ی ۳ را انتخاب کنیم، در مرحله بعد این گوی روی خانه‌ی شماره‌ی ۷ می‌رود، زیرا خانه ی شماره ۵ برای آن حساب نمی‌شود. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی دلخواه n می‌توان گوی‌ها را طوری حرکت داد به طوری که در یکی از مراحل، یکی از گوی‌ها روی خانه‌ی شماره‌ی n قرار بگیرد.

مسئله‌ی ۵. فاکتوریل

همه‌ی اعداد طبیعی n (با ذکر دلیل) را پیدا کنید که $n^2 | (n-1)!$.

مسئله‌ی ۶. بی‌نهایت اول

ثابت کنید برای هر عدد اول و فرد p، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $n2^n + 1$ بر p بخش‌پذیر باشد.

مسئله‌ی ۷. عدد قلی

در یک بازی، قلی عددی بین ۱ تا ۱۰۰ را انتخاب می‌کند. نقی در هر مرحله می‌تواند یک عدد بین ۱ تا ۱۰۰ به قلی بگوید و قلی موظف است بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این عدد و عدد اولیه را به نقی بگوید. نقی پس از حداقل چند بار می‌تواند عدد قلی را بیابد؟

مسئله‌ی ۸. معادله پنجی

تمام جواب‌های طبیعی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$۳^m - ۲^n = ۵$$

مسئله‌ی ۹. اعداد طبیعی خاص

همه‌ی عددهای طبیعی n را پیدا کنید به‌طوری که $n^۵ + ۳$ بر $n^۲ + ۱$ بخش‌پذیر باشد.

مسئله‌ی ۱۰. سیگما سیگما دو

برای عدد طبیعی $n \geqslant ۳$ ثابت کنید $۲n$ عدد طبیعی متمایز $a_۱$ و $a_۲$ و ... و a_n و نیز $b_۱$ و $b_۲$ و ... و b_n وجود دارند به طوری که داشته باشیم : $\sum_{i=۱}^{n} a_i = \sum_{i=۱}^{n} b_i$ و $\sum_{i=۱}^{n} {a_i}^۲ = \sum_{i=۱}^{n} {b_i}^۲$.

مسئله‌ی ۱۱. کران تعداد مقسوم‌علیه‌ها

فرض کنید $d(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n باشد. ثابت کنید نامساوی $d(n) \leqslant ۲\sqrt{n}$ برقرار است.

مسئله‌ی ۱۲. عدد صفر و یکی

فرض کنید n نسبت به ۱۰ اول باشد. ثابت کنید عددی فقط شامل ارقام ۰ و ۱ وجود دارد به نحوی که مجموع ارقام آن n بوده و بر n نیز بخش‌پذیر باشد.

مسئله‌ی ۱۳. ک.م.م. و بخش‌پذیری

روابط زیر را اثبات کنید:

۱. همه اعداد فراد n را پیدا کنید که $۳^n + ۱$ بر n بخش‌پذیر باشد.

۲. $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$

مسئله‌ی ۱۴. توان

۱. به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید: $۳^{n+۱} \mid (۲^{۳^n} + ۱)$

۲. نشان دهید اعداد $\binom{n}{۱}, \binom{n}{۲}, \cdots, \binom{n}{n-۱}$ زوج هستند اگر و فقط اگر n توانی از ۲ باشد.

مسئله‌ی ۱۵. اعداد اول و بخش‌پذیری

۱. تمام اعداد اول p را پیدا کنید که عبارت $p^۲ + ۲^p$ اول شود.

۲. به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید: $۸ \mid (۵^n + ۲ \times ۳^{n-۱} + ۱)$

مسئله‌ی ۱۶. چرا و چگونه

۱. فرض کنید p اول باشد. تمام اعداد طبیعی x و y را پیدا کنید که داشته باشیم: $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{۱}{p}$.

۲. $a > ۱, a^m + ۱ | a^n + ۱ \Rightarrow m | n$

مسئله‌ی ۱۷. خط‌خطی

قلی n خط در صفحه کشیده است ($n > ۲$) به طوری که هیچ دوتایی با هم موازی نیستند و هیچ سه‌تایی در یک نقطه متقاطع نیستند. ثابت کنید حداقل $n - ۲$ مثلث که خطی درون انها را قطع نکرده پدید خواهد آمد.

مسئله‌ی ۱۸. محبوب همه

دانشکده‌ی کامپیوتر n دانشجو دارد. به طوری که $n > ۳$. همچنین می‌دانیم در بین هر ۴ نفر فردی وجود دارد که ۳ نفر دیگر را دوست دارد. ثابت کنید فردی وجود دارد که همه را دوست داشته باشد (دوست داشتن رابطه‌ای دوطرفه است).

مسئله‌ی ۱۹. مجموع های نابرابر

به ازای $n > ۳$ ثابت کنید زیرمجموعه‌ای n عضوی از مجموعه $\{۱, ۲, ..., ۲^{n-۱} - ۱\}$ وجود دارد به طوری که مجموع اعضای هیچ دو زیرمجموعه‌ای از آن با هم برابر نباشند.

مسئله‌ی ۲۰. جدول یک‌دار

در هر خانه از یک جدول $(۲^m - ۱) \times (۲^n - ۱)$ یکی از اعداد ۱ و ۱- نوشته شده است به‌طوری که اعداد واقع در هر خانه برابر حاصل ضرب اعداد واقع در خانه‌هایی است که با این خانه ضلع مشترک دارند. ثابت کنید همه‌ی اعداد واقع در این جدول برابر ۱ هستند.

مسئله‌ی ۲۱. دودویی

ثابت کنید می‌توان $۲^{n+۱}$ عدد ۲^n بیتی ساخت که هر دوتایی حداقل در $۲^{n-۱}$ رقم متفاوت باشند.

مسئله‌ی ۲۲. ورود و خروج به شهر

در یک کشور $۲n + ۱$ شهر وجود دارد. بین هر دو شهر از این کشور یک جاده احداث شده است. ثابت کنید می‌توان تمام جاده‌های بین این شهرها را یک طرفه کرد به‌طوری که از هر شهر n جاده خارج و به هر شهر n جاده وارد شود.

مسئله‌ی ۲۳. نقاط وابسته

اعداد ۱ تا n به ترتیبی روی یک دایره نوشته شده‌اند ($n > ۳$).دو نقطه‌ی غیرمجاور A و B را وابسته می‌نامیم هرگاه روی یکی از دو کمان AB، تمام اعداد از اعداد نوشته شده روی A و B کوچک‌تر باشند. ثابت کنید دقیقا $n - ۳$ جفت وابسته وجود دارد.

مسئله‌ی ۲۴. صفحه‌ی رنگی

تعدادی خط در صفحه داریم به طوری که هیچ سه‌تایی همرس نیستند. ثابت کنید ناحیه‌های ایجاد شده توسط آن‌ها را می‌توان با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرد به‌طوری که هیچ دو ناحیه‌ی مجاوری هم‌رنگ نباشند.

مسئله‌ی ۲۵. علامت‌گذاری

در یک ماتریس $m \times n$ از اعداد حقیقی متمایز، به ازای هر سطر، p ($p \leqslant n$) بزرگ‌ترین عدد را علامت گذاری می‌کنیم. همچنین به ازای هر ستون، q ($q \leqslant m$) بزرگ‌ترین عدد را علامت‌گذاری می‌کنیم. نشان دهید حداقل pq عدد وجود دارد که دوبار علامت‌گذاری شده‌اند.

مسئله‌ی ۲۶. دنباله فیبوناچی

بااستفراء روابط زیر را برای دنباله فیبوناچی ($f_{n+۱} = f_n + f_{n-۱}, f_۱ = ۱, f_۰ = ۰$) اثبات کنید.

۱. $m|n \Rightarrow f_m|f_n$

۲. اگر تعریف دنباله فیبوناچی را به اعداد منفی گسترش دهیم ($f_{-۱} = f_۱ - f_۰ = ۱, f_{-۲} = f_۰ - f_{-۱} = -۱, \cdots$) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n درایم $f_{-n} = (-۱)^{n+۱} f_n$

مسئله‌ی ۲۷. مثلث

فرض کنید $۲n$ ($n \geqslant ۲$) نقطه متمایز روی صفحه که هیچ سه نقطه‌ای روی خط نیستند داده شده است. $n^۲ + ۱$ جفت دلخواه از این نقاط را با پاره‌خط به یکدیگر وصل می کنیم. ثابت کنید ۳ نقطه وجود دارد که دوبه‌دو آن‌ها را به یکدیگر وضل کرده‌ایم.