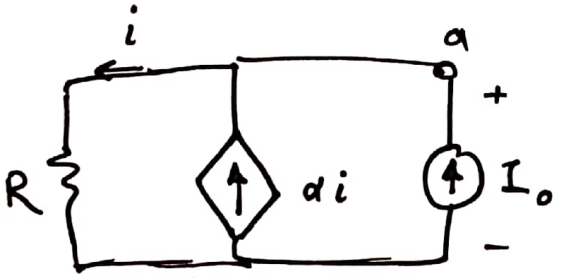
« پاسخنامه تشریحی میانترم درس مبانی مدار »

استاد کوهی

نویسنده: محمدعلی پشمنج

پاسخ سؤال 1) الف)

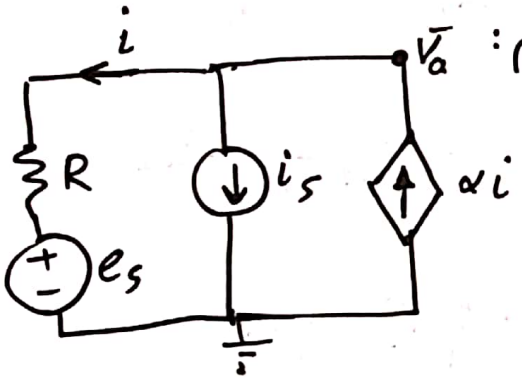
منابع مستقل را خاموش می‌کنیم. چون مدار منبع وابسته دارد، یک منبع جریان مستقل I_0 به مدار اضافه می‌کنیم و خواهیم داشت:



$$\Rightarrow i = \alpha i + I_0 \Rightarrow i(1-\alpha) = I_0 \Rightarrow i = \frac{I_0}{1-\alpha}$$

$$\Delta V = iR = \frac{I_0}{1-\alpha}R \Rightarrow R_{th} = \frac{\Delta V}{I_0} = \frac{R}{1-\alpha} \Rightarrow \boxed{R_{th} = \frac{R}{1-\alpha}}$$

حال برای به دست آوردن V_t، ولتاژ بین گره a و b را محاسبه می‌کنیم:



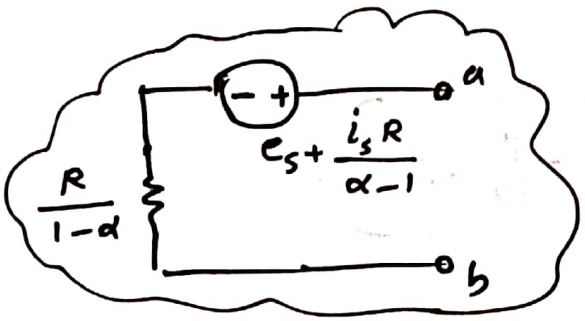
V_b را صفر در نظر می‌گیریم: $V_t = V_a - V_b = V_a \Leftarrow$

گره برای V_a: $-\alpha i + i + i_s = 0 \rightarrow i = \frac{i_s}{\alpha - 1}$

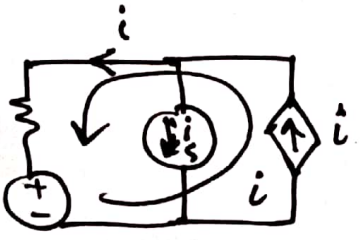
برای i: $\frac{V_a - e_s}{R} = i$

$$V_a = e_s + \frac{i_s}{\alpha-1}R = V_t$$

پس معادل تونن



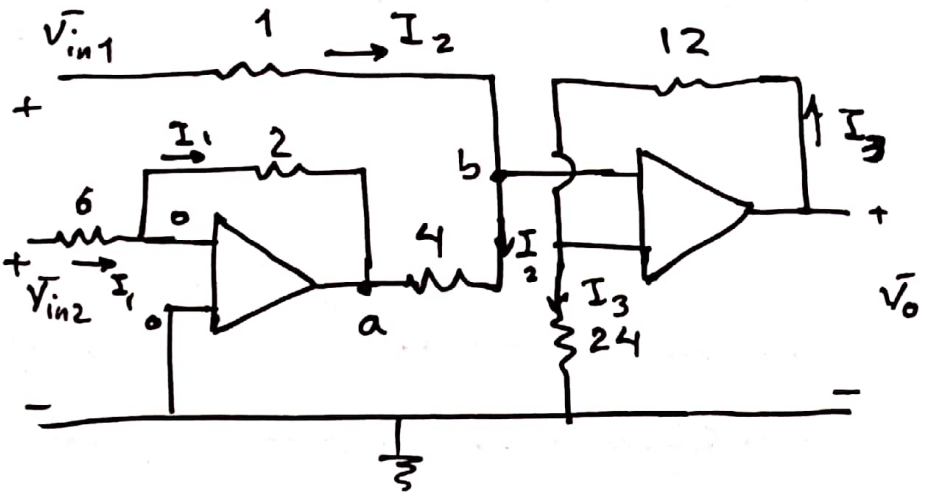
ب) در این صورت معادل تونن برای این مدار وجود نخواهد داشت زیرا در این صورت منبع i_s مدار را دچار مشکل می‌کند:



خواهیم داشت: $i = i + i_s \Rightarrow i_s = 0$ ×

پس مدار حالت پایدار ندارد. ←

پاسخ سوال 2 :



$$V_a = V_{in2} - I_1 \times 6 - I_1 \times 2 \quad , \quad I_1 = \frac{V_{in2} - 0}{6} \Rightarrow V_a = V_{in2} - V_{in2} - \frac{1}{3} V_{in2} = -\frac{1}{3} V_{in2}$$

$$V_b = V_{in1} - 1 \times I_2 \quad , \quad I_2 = \frac{V_{in1} - V_a}{1+4} = \frac{V_{in1} + \frac{1}{3} V_{in2}}{5} \Rightarrow V_b = V_{in1} - \frac{V_{in1} + \frac{1}{3} V_{in2}}{5}$$

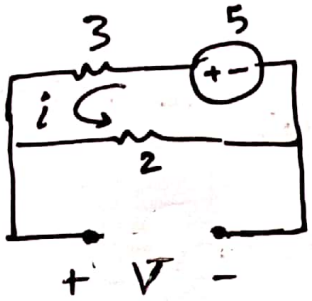
$$\Rightarrow V_b = \frac{4}{5} V_{in1} - \frac{1}{15} V_{in2}$$

$$V_o = 24 I_3 + 12 I_3 \quad , \quad I_3 = \frac{V_b - 0}{24} \Rightarrow V_o = 36 \left[\frac{V_b}{24} \right] = \frac{6}{4} V_b = \frac{3}{2} V_b$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{V_o = \frac{6}{5} V_{in1} - \frac{1}{10} V_{in2}}$$

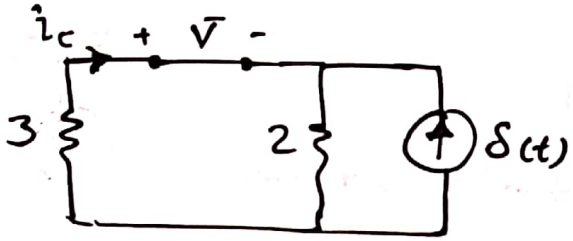
پاسخ سوال 3 :



در $t=0^-$:

$$i=\frac{5}{3+2}=1 \Rightarrow V=V_{c(t=0^-)}=2i=\boxed{2}$$

در $t=0$



$$i_c=-\frac{2}{2+3}\delta(t)=-\frac{2}{5}\delta(t)$$

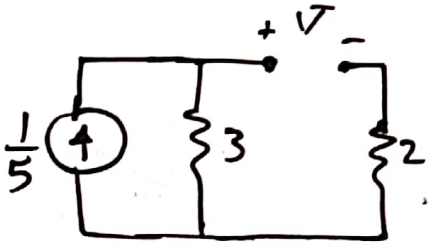
$$V_c(0^+)=V_{(0^-)}+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_c(t)\,dt$$

$$=2+\left(-\frac{2}{5}\right)\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt=\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{c(0^+)}=\frac{8}{5}}$$

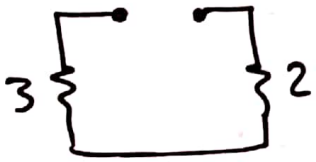
در $t>0$:

از دید خازن یک مدار مقاومتی 1 داریم ، پس در $t=\infty$ آن را برری می کنیم :



$$\boxed{V_{c(\infty)}=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}}$$

از دید خازن مقاومت توانی با خاموش کردن منبع مستقل مطابق زیر است :



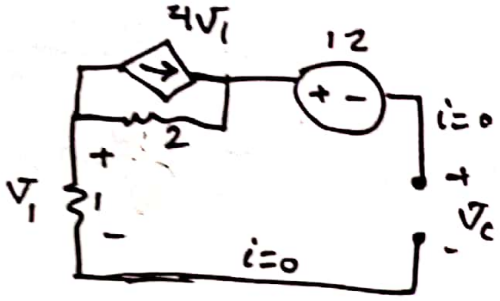
$$\rightarrow \boxed{R_{th}=2+3=5} \Rightarrow \tau=R_{th}C=5$$

$$\Rightarrow V_c(t)=\left(V_{c(0^+)}-V_{c(\infty)}\right)e^{-t/\tau}+V_{c(\infty)}$$

$$\Rightarrow V_c(t)=\left(\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\right)e^{-t/5}+\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_c(t)=e^{-\frac{t}{5}}+\frac{3}{5}}$$

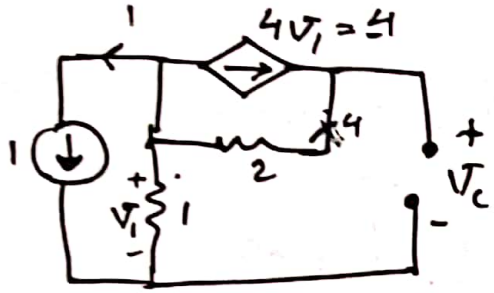
پاسخ سوال 4 :



در $t=0^-$: $i=0 \Rightarrow V_1=0 \Rightarrow V_{c(0^-)}=-12$

$\hookrightarrow V_{c(0^+)}=V_{c(0^-)}=\boxed{-12}$

در $t=\infty$:

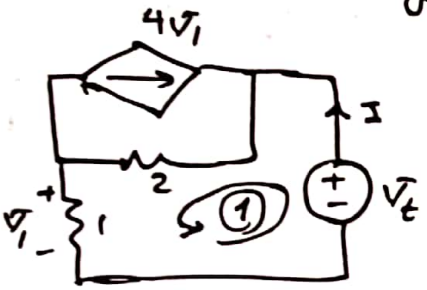


$V_1=-1\times 1=-1$

$\Rightarrow V_{c(\infty)}=-1\times 1-2\times 4=\boxed{-9}$

از دید خازن مقاومت تونن مدار را باید حساب کنیم: با حذف منابع مستقل

و گذاشتن منبع مستقل V_t بین دو پایه‌ی خازن داریم :



$\overset{KVL}{(1)}$: $+V_t-2(I+4V_1)-1\times I=0$

از طرفی : $V_1=1\times I=I$

$\Rightarrow V_t-2I-8(I)-I=0 \Rightarrow V_t=11I \Rightarrow \boxed{R_{th}=11}$

$\Rightarrow \tau=R_{th}C=11\times 1=\boxed{11}$

$\rightarrow V_c(t)=(V_{c(0^+)}-V_{c(\infty)})e^{-t/\tau}+V_{c(\infty)}$

$=(-12+9)e^{-t/11}+(-9)$

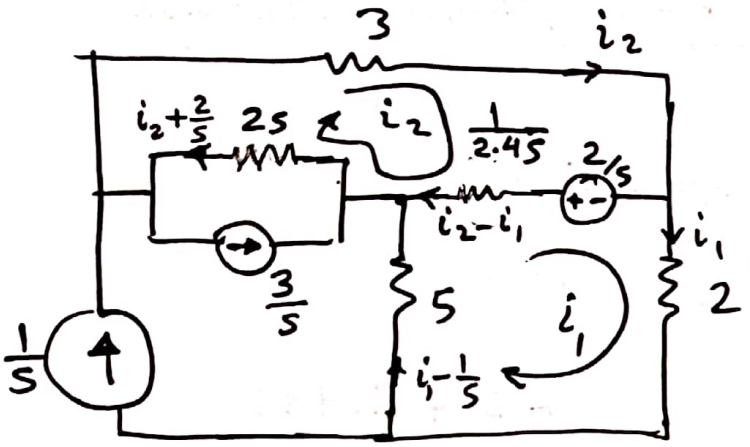
$\Rightarrow \boxed{V_c(t)=(-3)e^{-t/11}-9}$

پاسخ سؤال 5 :

$i_s(t) = u(t)$

برای $t=0^+$ داریم : $V_c(0^+) = 2V$, $i_L(0^+) = 3A$

مدار به شکل معادل (برای لاپلاس) خواهد شد :



KVL i_1 : (I)

$$-2i_1 - 5(i_1 - \tfrac{1}{s}) + (i_2 - i_1)\frac{1}{2.4s} - \frac{2}{s} = 0$$

KVL i_2 : (II)

$$-3i_2 + \frac{2}{s} - (i_2 - i_1)\frac{1}{2.4s} - (i_2 + \tfrac{2}{s})2s = 0$$

(I) $\Rightarrow$

$$i_1\left(-2-5-\frac{1}{2.4s}\right) + i_2\left(\frac{1}{2.4s}\right) = -\frac{5}{s} + \frac{2}{s} = -\frac{3}{s}$$

$$\hookrightarrow \quad i_1\left(-7-\frac{1}{2.4s}\right) + i_2\left(\frac{1}{2.4s}\right) = -\frac{3}{s} \quad (*)$$

(II) $\Rightarrow$

$$i_1\left(\frac{1}{2.4s}\right) + i_2\left(-3-\frac{1}{2.4s}-2s\right) = -\frac{2}{s} + 4 \quad (**)$$

$(*), (**) \Rightarrow$

$$i_2 = \frac{\left(-7-\frac{1}{2.4s}\right)\left(-\frac{2}{s}+4\right) - \left(-\frac{3}{s}\right)\left(\frac{1}{2.4s}\right)}{\left(-7-\frac{1}{2.4s}\right)\left(-3-2s-\frac{1}{2.4s}\right) - \left(\frac{1}{2.4s}\right)^2} \times \frac{(2.4s)^2}{(2.4s)^2}$$

$$= \frac{(-16.8s-1)(-4.8+9.6s) + (7.2)(1)}{(-16.8s-1)(-7.2s-4.8s^2-1) - 1}$$

$$i_2 = \frac{-161.28s^2 + 71.04s + 12}{80.64s^3 + 125.76s^2 + 24s}$$

$$V_L = (i_2 + \tfrac{2}{s})2s = 4 + 2i_2 s = 4 + \frac{-161.28s^2 + 71.04s + 12}{40.32s^2 + 62.88s + 12}$$

$$\Rightarrow V_L(s) = \frac{322.56s + 60}{40.32s^2 + 62.88s + 12}$$

$$s_{1,2} = \frac{-62.88 \pm \sqrt{(62.88)^2 - 4 \times 12 \times 40.32}}{80.64}$$

$$s_{1,2} \simeq \frac{-62.88 \pm 44.93}{80.64}$$

$$s_1 \simeq -1.34$$

$$s_2 \simeq -0.22$$

$$\Rightarrow \frac{322.56s + 60}{(s+1.34)(s+0.22) \times 40.32} = \frac{8s + 1.488}{(s+1.34)(s+0.22)}$$

$$= \frac{A}{s+1.34} + \frac{B}{s+0.22}$$

$$\times (s+1.34)(s+0.22)$$

$$8s + 1.488 = A(s+0.22) + B(s+1.34)$$

$$= (A+B)s + (0.22A + 1.34B)$$

$$A + B = 8$$

$$0.22A + 1.34B = 1.488$$

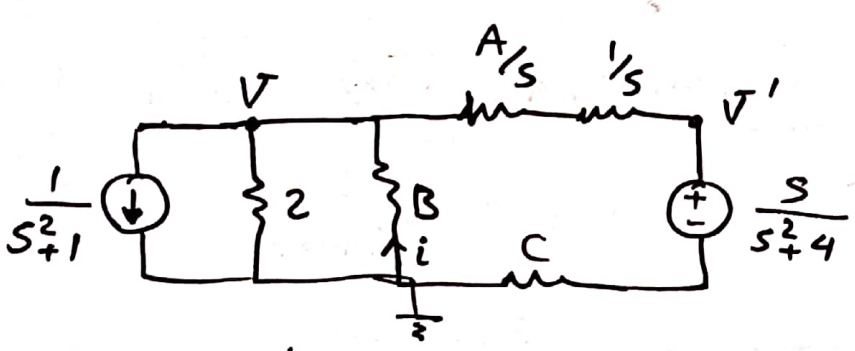
$$\Rightarrow A = \frac{1.488 - 0.22 \times 8}{1.34 - 0.22} \simeq -0.243$$

$$B = 8 - A = 8.243$$

$$\Rightarrow V_L = \frac{-0.243}{s+1.34} + \frac{8.243}{s+0.22}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow V_L(t) = -0.243\, e^{-1.34t} + 8.243\, e^{-0.22t}$$

پاسخ سوال 6:



KCL V: $\frac{1}{s^2+1} + \frac{V-0}{2} + \frac{V-0}{B} + \frac{V-V'}{\frac{A}{s}+\frac{1}{s}} = 0$ (1)

از طرفی: $\frac{V-V'}{\frac{A}{s}+\frac{1}{s}} = \frac{V'-\frac{s}{s^2+4}}{C}$ (2)

(2) $\Rightarrow V-V' = \frac{A+1}{sC}V' - \frac{A+1}{sC}\frac{s}{s^2+4}$

$\hookrightarrow V + \frac{A+1}{C(s^2+4)} = V'\left[1+\frac{A+1}{sC}\right]$

$\hookrightarrow V' = \frac{V + \frac{A+1}{C(s^2+4)}}{1+\frac{A+1}{sC}}$

(1) $\hookrightarrow \frac{1}{s^2+1} + \frac{V}{2} + \frac{V}{B} + \frac{s}{A+1}V - \frac{s}{A+1}\left[\frac{V + \frac{A+1}{C(s^2+4)}}{1+\frac{A+1}{sC}}\right] = 0$

$\Rightarrow V\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{B}+\frac{s}{A+1} - \frac{\frac{s}{A+1}}{1+\frac{A+1}{sC}}\right) = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{\frac{s}{A+1}\frac{A+1}{C(s^2+4)}}{1+\frac{A+1}{sC}}$

$\hookrightarrow V\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{B}+\frac{s}{A+1}\left(\frac{A+1/sC}{1+A+1/sC}\right)\right) = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{C(s^2+4)+(A+1)(s+\frac{4}{s})}$

$\hookrightarrow V\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{B}+\frac{s}{sC+A+1}\right) = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{Cs^2+(A+1)s+(4C)+\frac{4(A+1)}{s}}$

$\hookrightarrow V = \frac{-\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{Cs^2+(A+1)s+4C+4(A+1)/s}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{B}+\frac{s}{sC+A+1}}$

$$i = \frac{0 - V}{B} = -\frac{V}{B} = -\frac{1}{B}\left[\frac{\frac{S}{Cs^2 + (A+1)s + 4C + \frac{4(A+1)}{s}} - \frac{1}{s^2+1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{B} + \frac{S}{SC + A + 1}}\right]$$

پاسخ سوال 7 :

الف)

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 0.5 \times 0.25} = \boxed{4\ s^{-1}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.16 \times 0.25}} = \frac{1}{0.4 \times 0.5} = 5\ \frac{rad}{s}$$

$\omega_0 > \alpha$ → پاسخ میرا شونده ✓

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3\ \frac{rad}{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_d = 3\ \frac{rad}{s}}\ ,\ \boxed{\alpha = 4\ s^{-1}}$$

ب) در حالت کلی داریم :

$$i_L(t) = e^{-4t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t)$$

شرایط اولیه:

$$i_L(0^+) = 2.5\ A \Rightarrow B_1 = 2.5$$

$$V_L(0^+) = 0 \Rightarrow \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow -4e^{-4t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t) + e^{-4t}(-3B_1 \sin 3t + 3B_2 \cos 3t)$$

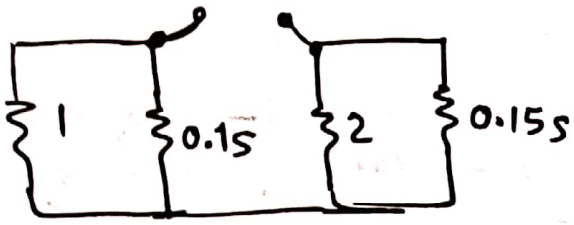
$\downarrow t=0$

$$-4(B_1) + 3B_2 = 0 \rightarrow B_2 = \frac{4B_1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_L = e^{-4t}\left(2.5 \cos 3t + \frac{10}{3} \sin 3t\right)}$$

پاسخ سؤال 8 :

از دو سر خازن به مدار نگاه می‌کنیم و منابع مستقل را خاموش می‌کنیم. و تبدیل لاپلاس را اعمال می‌کنیم:



$$\Rightarrow Z_{th} = \frac{2 \times 0.1s}{2+0.1s} + \frac{1 \times 0.1s}{1+0.1s} = \frac{0.3s+4-4}{2+0.1s} + \frac{0.1s+1-1}{1+0.1s}$$

$$= 2 - \frac{4}{2+0.1s} + 1 - \frac{1}{1+0.1s}$$

$$= 3 - \frac{26.\overline{6}}{13.\overline{3}+s} - \frac{10}{10+s}$$

$$\Rightarrow Z_{th_{(t)}} = 3\delta(t) - 26.\overline{6}\, e^{-13.\overline{3}t} - 10\, e^{-10t}$$