۱) تبدیل‌های لاپلاس و وارون‌های خواسته‌شده را انجام دهید.

الف) $L[e^{2t}t^2]$

ب) $L[e^{3t}cos(2t)]$

ج) $L^{-1}[(s^2+1)/(s^2(s^2-4s+9))]$

الف)

$$x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X(s)$$

با استفاده از خواص داریم:

$$-tx(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds} \Longrightarrow -t\big(-tx(t)\big) = t^2x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{d^2X(s)}{ds^2}$$

$$x(t) = 1 \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s} \Longrightarrow t^2 \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{2}{s^3}$$

با استفاده از خواص داریم:

$$e^{at}x(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X(s-a) \Longrightarrow e^{2t}t^2 \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{2}{(s-2)^3}$$

ب)

$$e^{3t}\cos(2t) = \frac{1}{2}(e^{(3+2j)t} + e^{(3-2j)t})$$

$$1 \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s} \Longrightarrow e^{at} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-a}$$

$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-(3+2j)} + \frac{1}{s-(3-2j)}\right) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$$

ج)

$$\frac{s^2+1}{s^2(s^2-4s+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-\big(2+j\sqrt{5}\big)} + \frac{D}{s-\big(2-j\sqrt{5}\big)}$$

$$A = \frac{4}{81}, B = \frac{1}{9}, C = \frac{2}{4j\sqrt{5}-1}, D = \frac{-2}{4j\sqrt{5}+1}$$

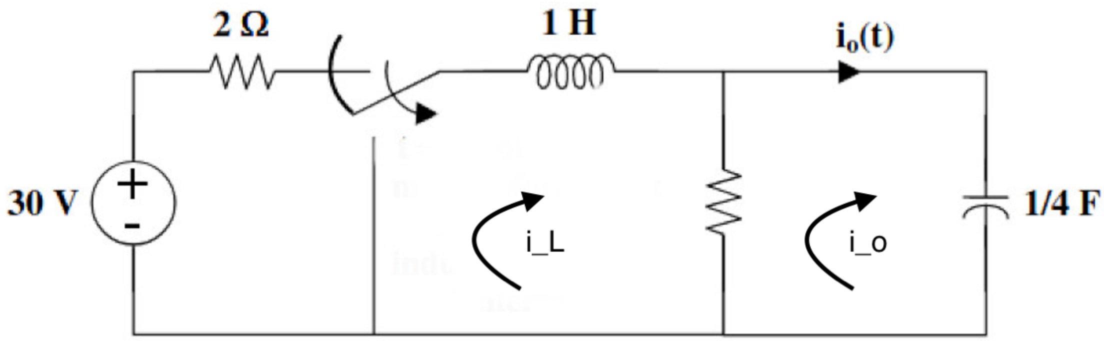
$$u(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}$$

$$tu(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2}$$

$$e^{at}u(t) \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s-a}$$

$$x(t) = Au(t) + Btu(t) + Ce^{(2+j\sqrt{5})t}u(t) + De^{(2-j\sqrt{5})t}u(t)$$

۲) در مدار شکل زیر، برای $t > 0$، $v_o(t)$ و $i_o(t)$ را محاسبه کنید. ($v_o(t)$ را ولتاژ دو سر خازن درنظر بگیرید.
همچنین کلید در زمان $t = 0$ تغییر وضعیت می‌دهد.)



برای $t = 0^-$:

$$i_o(0^-) = 0$$

$$i_L(0^-) = \frac{30}{2+1} = 10^A$$

$$V_o(0^-) = 10^V$$

$t > 0$:

با نوشتن KVL روی دور i_L داریم:

$$\frac{di_L}{dt} + (i_L - i_o) = 0$$

با نوشتن KVL روی دور i_o داریم:

$$(i_o - i_L) + V_o = 0$$

رابطه ولتاژ جریان دو سر خازن:

$$i_o = \frac{1}{4}\frac{dV_o}{dt}$$

معادلات اول و دوم را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{di_L}{dt} + V_o = 0 \Longrightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{dV_o}{dt} = 0 \Longrightarrow i_o = -\frac{1}{4}\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 4\frac{di_L}{dt} + 4 i_L = 0$$

$$i_L(t) = ke^{st} \Longrightarrow s^2 + 4s + 4 = 0 \Longrightarrow (s+2)^2 = 0 \Longrightarrow s = -2$$

ریشه مضاعف داریم بنابراین جواب به صورت زیر است:

$$i_L(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t}$$

$$V_o(0^+) = V_o(0^-) = 10^V \Longrightarrow \frac{di_L}{dt}(0^+) = -10^A$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 10^A \Longrightarrow k_1 = 10$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = -10^A = -2k_1 + k_2 \Longrightarrow k_2 = 10$$

$$\frac{di_L}{dt} + V_{\mathrm{o}} = 0 \Longrightarrow V_o(t) = 10(1 + 2t)e^{-2t}\, V$$

$$i_o = \frac{1}{4}\frac{dV_{\mathrm{o}}}{dt} = -10te^{-2t}\, A$$