دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی — بهار ۱۳۹۹

# پاسخنامه تمرین هفتم
# (نامساوی‌های احتمالاتی و قضیه‌ی حد مرکزی)

مدرس: نعیمه امیدوار — موعد تحویل: ۲۳ خرداد ۱۳۹۹

سؤال ۱. همانطور که می‌دانید بصورت کلی کران بالایی که نامساوی مارکوف ارائه می‌دهد از دقت بالایی برخوردار نیست. حال از شما می‌خواهیم، مثالی ارائه کنید که کران بالای ارائه‌شده توسط نامساوی مارکوف برای آن، کاملا دقیق باشد.
منظور از کران بالای دقیق این است که برای یک مقدار مثبت و ناصفر $a$ داشته‌باشیم: $P(X \geq a) = \frac{E[X]}{a}$
پاسخ:
برای هر مقدار داخواه $a > 0$، تابع توزیع احتمال $X$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Pr_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & x = a \\ 1 - \frac{1}{a^2} & x = 0 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

در اینصورت داریم:

$$Pr_X(x \geq a) = Pr_X(a) = \frac{1}{a^2}$$

از طرفی برای امید ریاضی متغیر تصادفی $X$ نیز داریم:

$$E[X] = a \times \frac{1}{a^2} + 0 \times (1 - \frac{1}{a^2}) = \frac{1}{a}$$
$$\implies \frac{E[X]}{a} = \frac{1}{a^2} = Pr_X(x \geq a)$$

پس از این مثال، نتیجه می‌گیریم که نامساوی مارکوف در شرایط خاص، می‌تواند دقیق باشد. البته باید دقت کنید که این تنها یکی از مثال‌های این پدیده می‌باشد و مثال‌های دیگری نیز وجود دارند که برای آنها نیز نامساوی مارکوف دقیق می‌باشد.

---

سؤال ۲. در سوال قبل مثالی ارائه دادید که نشان داد نامساوی مارکوف می‌تواند دقیق باشد. در این سوال از شما می‌خواهیم همین کار را برای نامساوی چبیشف انجام دهید. یعنی یک تابع توزیع احتمال برای $X$ و یک مقدار مثبت و ناصفر برای $a$ بیابید، به طوری که $P(|X - E[X]| \geq a) = \frac{var(X)}{a^2}$.

پاسخ:
مقدار $a$ را برابر ۱ درنظر می‌گیریم و توزیع احتمال متغیر تصادفی $X$ را نیز بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 1, 0, -1 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

در اینصورت داریم:

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{3} + -1 \times \frac{1}{3} = 0$$
$$E[X^2] = 1^2 \times \frac{1}{3} + (-1)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{3} - 0^2 = \frac{2}{3}$$
$$\implies \frac{var(X)}{a^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1^2} = \frac{2}{3}(**)$$
$$p(|X - 0| \geq 1) = P(1) + P(-1) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(***)$$
$$(**), (***) \implies P(|X - E[X]| \geq 1) = \frac{var(x)}{1^2}$$

پس با این مثال توانستیم نشان دهیم که نامساوی چبیشف، می‌تواند دقیق باشد.
دقت کنید که این تنها یک مثال از این پدیده بود و مثال‌های دیگری نیز وجود دارند که برای آنها نامساوی چبیشف دقیق است.

---

سؤال ۳. یک تاس سالم را در نظر بگیرید، خروجی آن را متغیر تصادفی $X$ در نظر می‌گیریم، حال احتمال $P(X \geq 6)$ را در نظر بگیرید و با توجه به آن سوالات زیر را پاسخ دهید:
در این سوال باید از نامساوی چبیشف یک طرفه و دو طرفه استفاده کنید که رابطه آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:
چبیشف دو طرفه برای $a > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

چبیشف یک طرفه برای $a > 0$:

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

الف) یک کران بالا برای احتمال گفته شده با استفاده از نامساوی مارکوف بدست آورید.

ب) یک کران بالا برای احتمال گفته شده با استفاده از نامساوی چبیشف دو طرفه بدست آورید.

ج) یک کران بالا برای احتمال گفته شده با استفاده از نامساوی چبیشف یک طرفه بدست آورید.

د) مقدارهای بدست آمده را با یکدیگر مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ:
واریانس و میانگین به راحتی بدست می‌آیند: $Var(X) = \frac{35}{12}, E[X] = 3.5$

الف) با توجه به نامساوی مارکوف داریم:

$$Pr(X \geq 6) \leq \frac{3.5}{6} \approx 0.583$$

ب)

$$P(X \geq 6) \leq P(X \geq 6 \; OR \; X \leq 1) = P(|X - 3.5| \geq 2.5) \leq \frac{\frac{35}{12}}{(2.5)^2} = \frac{7}{15} \approx 0.467$$

ج)

$$P(X \geq 6) = P(X \geq 3.5 + 2.5) \leq \frac{35/12}{35/12 + (2.5)^2} = \frac{7}{22} \approx 0.318$$

د) با توجه به کران‌های بالای حاصل شده و مقدار واقعی که برابر با $0.167 \approx \frac{1}{6}$ است می‌فهمیم که با چبیشف یک طرفه کران بالای دقیق‌تری بدست می‌آوریم و برای مارکوف نیز پر خطاترین کران بالا بدست می‌آید.

---

سؤال ۴. اگر یک نمونه با ۳۷ عضو از یک توزیع نرمال با میانگین ۱۲۷۵۱ و انحراف از معیار ۱۲.۶ بگیریم، احتمال اینکه میانگین این نمونه از ۱۲۷۵۱ کمتر و یا از ۱۲۷۵۴ بیشتر باشد را بدست آورید.
پاسخ:
می‌دانیم میانگین نمونه از توزیع نرمال با میانگین 12751 و واریانس $\frac{(12.6)^2}{37}$ می‌باشد:

$$\bar{X} \sim N(12751, \frac{(12.6)^2}{37})$$

حال احتمال اینکه میانگین کمتر از ۱۲۷۵۱ و یا بیشتر از ۱۲۷۵۴ باشد به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &P(\bar{X} < 12751) + P(\bar{X} > 12754) \\ &= P(\bar{X} < 12751) + 1 - P(\bar{X} \leq 12754) \\ &= \Phi(\frac{12751 - 12751}{\frac{12.6}{\sqrt{37}}}) + \Phi(\frac{12754 - 12751}{\frac{12.6}{\sqrt{37}}}) \\ &= \Phi(0) + 1 - \Phi(1.45) \approx 0.57 \end{aligned}$$

---

سؤال ۵. شما یک مهمانی با رعایت پروتکل‌های بهداشتی برگزار کرده‌اید که در آن $n$ مهمان را دعوت کرده‌اید و برای اینکه مطمئن شوید که همه در مهمانی ماسک دارند می‌خواهید تعدادی ماسک خریداری کنید. همچنین می‌دانید هر مهمان مستقل از دیگران با احتمال $\frac{1}{4}$ نیاز به ماسک نخواهد داشت زیرا از قبل ماسک با خود آورده است و با احتمال $\frac{1}{2}$ به یک ماسک و با احتمال $\frac{1}{4}$ به دو ماسک احتیاج خواهد داشت. با توجه به اینکه مساله حیاتی است، شما می‌خواهید مطمئن باشید که با احتمال ۹۹ درصد کمبود ماسک نخواهید داشت؛ برای اینکه به این درجه اطمینان برسید، چه تعداد ماسک باید تهیه کنید؟ برای ۹۹.۹ و ۹۵ درصد نیز تعداد ماسک‌ها را بدست آورید.(فرض کنید که $n \geq 30$ می‌باشد).
بعد از اینکه جواب کلی را برای $n$ مهمان بدست آوردید، تعداد ماسک‌ها را برای ۳۶ مهمان محاسبه کنید.

پاسخ:
اگر $X_i$ را تعداد ماسک‌هایی که مهمان $n$ام نیاز دارد در نظر بگیریم تعداد کل ماسک‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

ابتدا برای ۰.۹۹ محاسبه می‌کنیم. هدف محاسبه احتمال زیر است که $y$ همان تعداد ماسک‌های تهیه شده است:

$$P(Y \leq y) \geq 0.99$$

از آنجایی که $E[X_i] = 1$ و $Var(X_i) = 0.5$ داریم:

$$E[Y] = n \times 1 = n$$
$$Var(Y) = n \times 0.5 = \frac{n}{2}$$

حال داریم:

$$P(Y \leq y) = P(\frac{Y-n}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \leq \frac{y-n}{\sqrt{\frac{n}{2}}}) = \Phi(\frac{y-n}{\sqrt{\frac{n}{2}}})$$
$$\rightarrow \Phi(\frac{y-n}{\sqrt{\frac{n}{2}}})) \geq 0.99 \rightarrow \frac{y-n}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \geq \Phi^{-1}(0.99) = 2.32$$
$$\rightarrow y \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \times 2.32 + n$$

با توجه به اینکه $\Phi^{-1}(0.95) = 1.64$ و $\Phi^{-1}(0.999) = 3.09$ هستند برای این دو نیز جواب به صورت جواب بدست آمده برای ۰.۹۹ بدست می‌آید و فقط ضریب $\sqrt{\frac{n}{2}}$ تفاوت می‌کند.
حال برای ۳۶ مهمان حداقل تعداد ماسک‌ها را بدست می‌آوریم که برای هر کدام از حالات به صورت زیر بدست می‌آید:

$$mask_{0.95} = 1.64 \times \sqrt{18} + 36 = 42.95 \implies \lceil mask_{0.95} \rceil = 43$$
$$mask_{0.99} = 2.32 \times \sqrt{18} + 36 = 45.84 \implies \lceil mask_{0.95} \rceil = 46$$
$$mask_{0.999} = 3.09 \times \sqrt{18} + 36 = 49.1 \implies \lceil mask_{0.95} \rceil = 50$$

---

سؤال ۶. یک کلوپ فقط برای اعضای ویژه خود شام تدارک می‌بینند و این اعضا هنگام صرف شام بر سر میزهای ۱۲ نفره می‌نشینند. مدیر این مجموعه پس از مشاهدات فراوان متوجه می‌شود که در ۹۵ درصد اوقات بین ۶ تا ۹ میز کامل از اعضای ویژه وجود دارد و در باقی اوقات تعداد اعضای ویژه حاضر برای صرف شام، با احتمال مساوی ممکن است که از بازه ذکرشده بیشتر یا کمتر باشد. حال فرض کنید که هریک از اعضای ویژه این کلوپ با احتمال $p$ تصمیم به صرف شام در کلوپ می‌گیرد و تصمیم این اعضا از هم مستقل است. حال با استفاده از قضیه حد مرکزی به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) تعداد اعضای ویژه این کلوپ چند نفر است؟

ب) مقدار $p$ را به‌دست آورید.

پاسخ:
متغیر تصادفی $X_i$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر عضو ویژه‌ی } i\text{ام بخواهد شام را در کلوپ صرف کند}, Pr = p \\ 0 & \text{در غیر اینصورت}, Pr = 1-p \end{cases}$$

حال متغیر تصادفی $Y$ را تعداد افراد حاضر در کلوپ برای صرف شام تعریف می‌کنیم، پس داریم:

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$$
$$E[Y] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = np$$
$$var[Y] = \sum_{i=1}^{n} var[X_i] = np(1-p)$$

دقت کنید که چون تصمیم یک عضو از اعضای دیگر مستقل است، پس اگر $i \neq j$، آنگاه داریم: $Cov(X_i, X_j) = 0$.
طبق فرض سوال می‌دانیم که :

$$P(72 \leq Y \leq 108) = 95\%$$
$$= P(\frac{72 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{108 - np}{\sqrt{np(1-p)}})$$

حال طبق قضیه حد مرکزی می‌دانیم که:

$$\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$$

چون در صورت سوال ذکر شده که در باقی اوقات به احتمال مساوی احتمال دارد که تعداد افراد حاضر برای صرف شام بیشتر از این بازه باشد یا کمتر از بازه، پس متوجه می‌شویم که این بازه‌ای که به‌دست آورده‌ایم نیز باید متقارن باشد. پس داریم:

$$108 - np = np - 72 \Rightarrow np = 90(*)$$
$$\frac{18}{\sqrt{90(1-p)}} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$$
$$\implies \sqrt{10(1-p)} = \frac{6}{1.96}$$
$$\implies 1 - p = 0.937 \Rightarrow p = 0.063(**)$$
$$(*), (**) \implies n = \frac{90}{0.063} = \lceil 1428.57 \rceil \implies n = 1429$$

---

سؤال ۷. دو قطار وجود دارند که در آخر هر هفته یک جمعیت ۱۰۰۰ نفره را از تهران به اصفهان منتقل می‌کنند. این دو قطار کاملا مشابه هم هستند و هر یک از این ۱۰۰۰ مسافر، بصورت مستقل از بقیه و کاملا تصادفی، تصمیم می‌گیرد که سوار کدامیک از این دو قطار شود. این قطارها باید حداقل چند صندلی داشته باشند تا با اطمینان حداقل $99\%$ برای هر یک از مسافران قطار، صندلی وجود داشته باشد؟

پاسخ:
چون دو قطار کاملا مشابه‌اند در محاسبات و بررسی حالات مختلف تنها قطار یک را در نظر می‌گیریم. $n$ را تعداد صندلی این قطارها در نظر می‌گیریم و متغیر تصادفی $X_i$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{مسافر } i\text{ام قطار یک را انتخاب کند}, p = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت}, p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

حال متغیر $X$ را تعداد مسافرانی که قطار یک را انتخاب کرده‌اند، تعریف می‌کنیم و داریم:

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_{1000}$$
$$E[X] = \sum_{i=1}^{1000} E[X_i] = 1000 \times \frac{1}{2} = 500$$
$$var(X) = \sum_{i=1}^{1000} var(X_i) = 1000 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 250$$

دقت کنید که چون تصمیم یک مسافر از تصمیم باقی مسافران مستقل است پس واریانس مجموع، برابر مجموع واریانس متغیرهای $X_i$ می‌شود.
مطلوب سوال این است که تعداد مسافران قطار یک و دو بصورت همزمان از تعداد صندلی‌های قطار بیشتر نباشند. و از ما خواسته که حداقل تعداد صندلی را برای این قطارها به‌گونه‌ای مشخص کنیم که احتمال رخ‌دادن مطلوب سوال، حداقل ۹۹درصد باشد. پس داریم:

$$P(1000 - n \leq X \leq n) \geq 99\% \Rightarrow$$
$$P(\frac{500 - n}{5\sqrt{10}} \leq \frac{X - 500}{5\sqrt{10}} \leq \frac{n - 500}{5\sqrt{10}}) \geq 99\%$$

حال طبق قضیه حد مرکزی، می‌دانیم:

$$\frac{X - 500}{5\sqrt{10}} \sim N(0,1)$$
$$\Rightarrow 2\phi(\frac{n - 500}{5\sqrt{10}}) - 1 \geq 0.99$$
$$\Rightarrow \phi(\frac{n - 500}{5\sqrt{10}}) \geq 0.995$$
$$\frac{n - 500}{5\sqrt{10}} \geq 2.58 \Rightarrow$$
$$n - 500 \geq 40.79 \Rightarrow n \geq 540.79$$

پس از این نامساوی نتیجه می‌گیریم که اگر تعداد صندلی‌های این قطارها حداقل ۵۴۱تا باشد، آنگاه دست‌کم با اطمینان ٪۹۹ برای هر یک از مسافرین، صندلی وجود خواهد داشت.

---

سؤال ۸. یک سکه را که احتمال شیر یا خط آمدن آن برابر است را در نظر بگیرید و به سوال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) اگر سکه را ۱۰۰ بار پرتاب کنیم احتمال اینکه بیشتر از ۵۵ بار رو بیاید را محاسبه کنید.

ب) اگر سکه را ۱۰۰ بار پرتاب کنیم احتمال اینکه بین ۴۰ و ۶۰ بار رو بیاید را محاسبه کنید.

پاسخ:
می‌توان تعداد رو آمدن‌ها را در کل از توزیع نرمال با میانگین ۵۰ و واریانس ۲۵ در نظر گرفت. با توجه به این نکته دو قسمت پایین را حل می‌کنیم:

الف) اگر تعداد رو آمدن‌ها را برابر با $Y$ در نظر بگیریم می‌خواهیم احتمال زیر را بدست آوریم:

$$P(Y > 55) = 1 - P(Y \leq 55) = 1 - P(\frac{Y-50}{5} \leq \frac{55-50}{5}) = 1 - P(Z \leq 1)$$
$$= 1 - \Phi(1) \approx 0.16$$

ب) احتمال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(40 < Y < 60) = P(Y < 60) - P(Y \leq 40) = P(\frac{Y-50}{5} < 2) - P(\frac{Y-50}{5} \leq -2)$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.977 - 1 \approx 0.954$$

---

سؤال ۹. یک امتحان شامل ۴۸ سوال صحیح-غلط است. احتمال پاسخگویی درست اصغر به یک سوال، $\frac{5}{8}$ است در حالی‌که اختر بصورت کاملا تصادفی به سوالات پاسخ می‌دهد. برای قبولی در این امتحان باید بیش از ۳۰ نمره از ۴۸ نمره آن را کسب کنند. احتمال قبولی اصغر در این امتحان را با احتمال قبولی اختر در این امتحان، مقایسه کنید.
پاسخ:
چون تعداد کل سوالات به‌اندازه‌ی کافی است و همچنین برای پاسخگویی هر دو نفر به سوالات(که در واقع یک آزمایش تصادفی است که از توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند)، نامساوی $npq >= 10$ نیز برقرار است، پس می‌توان تعداد پاسخ‌های صحیح اصغر را از توزیع نرمال با میانگین ۳۰ و واریانس ۱۱/۲۵ در نظر گرفت همچنین می‌توان تعداد پاسخ‌های صحیح اختر را از توزیع نرمال با میانگین ۲۴ و واریانس ۱۲ در نظر گرفت. حال تعداد پاسخ‌های صحیح اصغر را برابر با $X$ و تعداد پاسخ‌های صحیح اختر را برابر با $Y$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - P(\frac{X-36}{1.5\sqrt{5}} \leq \frac{30-36}{1.5\sqrt{5}})$$
$$= 1 - P(Z \leq -1.79) = 1 - \phi(-1.79) = \phi(1.79) \approx 0.963$$

$$P(Y > 30) = 1 - P(Y \leq 30) = 1 - P(\frac{Y-24}{2\sqrt{3}} \leq \frac{30-24}{2\sqrt{3}})$$
$$= 1 - P(Z \leq \sqrt{3}) = 1 - \phi(\sqrt{3}) = \phi(-\sqrt{3}) \approx 0.042$$

پس احتمال قبولی اصغر در این امتحان، بسیار بیشتر از احتمال قبولی اختر است.

موفق باشید :)