



آمار و احتمال مهندسی

بهار ۱۴۰۱

استاد: مهدی جعفری سیاوشانی

گردآورندگان: علی شاه‌علی، امیرحسین عابدی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

مهلت ارسال: ۲۷ اسفند

مقدمات احتمال

تمرین اول

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه‌ی تمرین‌ها تا سقف ۳ روز پس از موعد آن وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال‌شده پذیرفته نخواهند بود. در مجموع ۱۰ روز از تاخیرها بخشیده خواهند شد.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های هر فرد حتماً باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. (۱۰ نمره) فرض کنید اعداد a_1, \dots, a_n یک جایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا n باشند. چقدر احتمال دارد که هیچ یک از اعداد

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ \vdots \\ S_i = S_{i-1} + a_i \end{cases}$$

بر ۳ بخش پذیر نباشد؟

۲. (۱۵ نمره) بعد از زیاد شدن درخواست دانشجویهای خارجی برای ورود به دانشگاه شریف، این دانشگاه تیمی تشکیل داده است که با این افراد مصاحبه کنند. فرض کنید N دانشجوی خارجی درخواست ورود به شریف را داشته باشند. (به دلیل زیاد بودن N میتوانید فرض $\ln(N-1) = \ln(N)$ را برای ادامه حل مسئله داشته باشید.)

اما مشکلی که وجود دارد این است که دانشجویهای خارجی بسیار عجول هستند و میخواهند دقیقاً بعد از مصاحبه بدانند که قبول شده‌اند و همینطور تیم تشکیل شده هم موظف است که فقط یک نفر را بپذیرد.

(آ) فرض کنید استراتژی تیم این باشد که به ازای یک m خاص، با m نفر اول مصاحبه کنند و بعد از آن اولین نفری که از همه m نفر اول بهتر بود را انتخاب کنند. احتمال اینکه این تیم بهترین نفر را برگزیند چقدر است؟

(ب) با استفاده از تقریب $\sum_{i=1}^n i^{-1} = \ln(n)$ جوابی که یافتید را تقریب بزنید و بهترین m را پیدا کنید.

۳. (۱۰ نمره) دایره‌ای به شعاع ۱ حول مبدا را در نظر بگیرید. ۳ نقطه تصادفی بر روی این دایره انتخاب میکنیم. احتمال اینکه ۳ نقطه تشکیل شده توسط این مثلث مرکز دایره را در خود داشته باشد چقدر است؟

۴. (۱۰ نمره) یک شبکه کامپیوتری در اختیار داریم که آنرا با صفحه مختصات مدل کرده‌ایم. رئوس این شبکه کامپیوتری تمامی نقاط زیر هستند

$$(i, j) \mid 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M, i, j \in \mathbb{Z}$$

هر راس فقط میتواند پیامی که دریافت کرده‌است را به بالا و یا راست انتقال دهد.

(آ) چند راه مختلف برای ارسال پیام از $(0, 0)$ به (N, M) وجود دارد؟

(ب) فرض کنید که تمام راه‌های بدست آمده در قسمت قبل هم احتمال هستند. احتمال این را بیابید که پیام
ارسالی از (x, y) بگذرد. $(0 < x < N, 0 < y < M)$

(ج) حال فرض کنید که هر راس پیام را با احتمال p به راست و با احتمال $1 - p$ به بالا میفرستد. همینطور
راس‌هایی به فرم (i, M) پیام را به احتمال ۱ به راست و همچنین راس‌هایی به فرم (N, j) پیام را فقط
به بالا منتقل میکنند. در اینصورت قسمت قبل را باری دیگر حل کنید.

۵. (۱۵ نمره) علی میخواهد دنباله‌ای به طول n از اعداد ۱ و -1 بسازد که جمع اعضای آن صفر شود و سپس
بیشترین مقدار مجموع اعضا در بین پیشندهای آن را محاسبه کند. جمع این بیشترین مقادیر در بین تمام
دنباله‌های ممکن چقدر است؟

۶. (۱۰ نمره) علی و امیر $2n + 1$ سکه دارند. علی $n + 1$ تا از سکه‌ها را پرتاب میکند و امیر بقیه سکه‌ها را
پرتاب میکند. احتمال این را بیابید که بعد از پرتاب‌ها تعداد شیرهای علی از تعداد شیرهای امیر بیشتر باشد.

۷. (۲۰ نمره) n سبد و توپ در اختیار داریم. در هر بار یکی از توپ‌ها به سمت سبدها پرتاب میکنیم و با احتمال
برابر در یکی از آنها قرار میگیرد. A_i را پیشامد این در نظر بگیرید که دقیقاً i سبد خالی باشند.

(آ) مقدار $\mathbb{P}[A_i]$ را بدست آورید.

(ب) احتمال این را بدست آورید که تمام سبدهای حاوی توپ بعد از تمام سبدهای بدون توپ باشند.

۸. (۱۰ نمره) یکی از آخرین تحقیقات نشان داده‌است که ۲۰٪ از افرادی که سیگار میکشند از نوعی بیماری
ریوی و همینطور ۱۰٪ از آنها از نوعی بیماری قلبی رنج میبرند. همینطور میدانیم که $\frac{1}{4}$ از این افراد که حداقل
یکی از بیماری ریوی یا قلبی را دارند، جفت آن را هم دارند.

(آ) احتمال این را بیابید که یک فرد هر دوی این بیماری‌ها را داشته باشد.

(ب) جواب قسمت قبل را برابر با q در نظر بگیرید. احتمال اینکه یک فرد بیماری ریوی داشته باشد به شرط
اینکه بیماری قلبی داشته باشد برحسب q چقدر است؟