بسمه تعالی

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰
مدرس: سید ابوالفضل مطهری

دانشکده مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین ششم

پاسخ سوال اول

$\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[X_i] + q$
$Var[Y_i] = Var[X_i] = ۴$
$Y = Y_۱ + Y_۲ + ... + Y_n$
$\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = nq, \quad Var[Y] = ۴n$
$\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(nq, ۴n) \Rightarrow Z = \frac{Y-nq}{۲\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(۰, ۱)$

تعریف می‌کنیم:

$M_n = \frac{Y_۱+Y_۲+...Y_n}{n}$

حال داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[q - ۰/۱ \leqslant M_n \leqslant q + ۰/۱] &= \mathbb{P}[q - ۰/۱ \leqslant \frac{Y_۱ + Y_۲ + ...Y_n}{n} \leqslant q + ۰/۱] \\
&= \mathbb{P}[qn - ۰/۱n \leqslant Y \leqslant qn - ۰/۱n] \\
&= \mathbb{P}[\frac{qn - ۰/۱n - nq}{۲\sqrt{n}} \leqslant \frac{Y - nq}{۲\sqrt{n}} \leqslant \frac{qn + ۰/۱n - nq}{۲\sqrt{n}}] \\
&= \mathbb{P}[-۰/۰۵\sqrt{n} \leqslant \frac{Y - nq}{۲\sqrt{n}} \leqslant ۰/۰۵\sqrt{n}] \\
&= \mathbb{P}[-۰/۰۵\sqrt{n} \leqslant Z \leqslant ۰/۰۵\sqrt{n}] \\
&= \mathcal{Q}(-۰/۰۵\sqrt{n}) - \mathcal{Q}(۰/۰۵\sqrt{n} \\
&= ۱ - ۲\mathcal{Q}(۰/۰۵\sqrt{n}) \geqslant ۰/۹۵
\end{aligned}$$

و لذا داریم:

$\mathcal{Q}(۰/۰۵\sqrt{n}) \leqslant ۰/۰۲۵$
$\Rightarrow ۰/۰۵\sqrt{n} \geqslant ۱/۹۶$
$\Rightarrow n \geqslant ۱۵۳۷$

پاسخ سوال دوم

می‌دانیم:

$$\widehat{\mu}_{ML} = \arg\max f_{(X_1,...,X_n)|\mu}((x_1,...,x_n)|\mu)$$

داریم:

$$f_{(X_1,...,X_n)|\mu}((x_1,...,x_n)|\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp[\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma_v^2}]$$
$$= (\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}})^n \exp[\frac{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma_v^2}]$$

برای ماکسیمم شدن $f_{(X_1,...,X_n)|\mu}((x_1,...,x_n)|\mu)$ باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial}{\partial\mu} f_{(X_1,...,X_n)|\mu}((x_1,...,x_n)|\mu)$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(\frac{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma_v^2}) = \frac{1}{\sigma_v^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$
$$= \frac{1}{\sigma_v^2}[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu]$$

در نتیجه:

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

پاسخ سوال سوم

از تست Z استفاده می‌کنیم. داریم:

$$W = \frac{\bar{X} -]\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{21.32 - 20}{\sqrt{27.6}/\sqrt{100}} = 2.51$$

داشتیم $\alpha = 0.05$ پس:

$$z_\alpha = z_{0.05} = 1.654$$

در نتیجه داریم:

$$W > z_\alpha$$

بنابراین ما H_0 را رد می‌کنیم و H_1 را قبول می‌کنیم.

پاسخ سوال چهارم

از آنجا که می‌توان تابع جرم احتمال یک متغیِّر تصادفی برنولی با پارامتر p را به صورت $P_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}$ در نظر گرفت، نسبت بخت برای این مسئله،، برابر است با:

$$\Lambda = \frac{\mathbb{P}[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n | p = p_0]}{\mathbb{P}[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n | p = p_1]} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}[X_i = x_i | p = p_0]}{\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}[X_i = x_i | p = p_1]}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} p_o^{x_i}(1-p_o)^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^{n} p_o^{x_i}(1-p_o)^{1-x_i}} = \frac{p_o^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p_o)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{p_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p_1)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

$$= \frac{p_o^y(۱-p_o)^{n-y}}{p_۱^y(۱-p_۱)^{n-y}}$$

که در آن $y = \sum_{i=۱}^n$. این تابع را می‌توان به فرم

$$\Lambda(x_۱, x_۲, ..., x_n) = a^n r^y$$

بازنویسی کرد، که در آن $a = \frac{۱-p_o}{۱-p_۱} > ۰$ است و $r = \frac{p_o(۱-p_۱)}{p_۱(۱-p_o)}$. از آن جایی که $p_۱ > p_o$ ، داریم $r < ۱$. در نتیجه، نسبت بخت تابعی نزولی برحسب y است.
حال فرض کنید که $level significance$ برابر α ، و مقدار مشاهده شده‌ی $\hat{y}$ از Y ،تست فرضیه‌ی H_o را رد کند. این بدین معناست که $\Lambda(\hat{y}) \leqslant c_\alpha$ که c_α ناحیه ردّ فرضیه، عددی‌ست که بر حسب α تعیین شده است. در این صورت برای هر $y > \hat{y}$ داریم:

$$\Lambda(y) < \Lambda(\hat{y}) \leqslant c_\alpha$$

در نتیجه باز هم این تست فرضیه‌ی H_o

پاسخ سوال پنجم

الف

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_۱) = \mathbb{E}(۲\bar{Y}) = ۲\mathbb{E}(\bar{Y}) = ۲\mu = \theta$$

پس مقدار بایاس $\hat{\theta}_۱$ صفر می‌باشد.
تابع چگالی $Y_{(n)}$ به صورت زیر هست:

$$g_{(n)}(y) = n[F_Y(y)]^{n-۱} f_Y(y) = n(\frac{y}{\theta})^{n-۱}\frac{۱}{\theta}, \quad ۰ \leqslant y \leqslant \theta$$

$$\mathbb{E}(Y_{(n)}) = \frac{n}{\theta^n}\int_۰^\theta y^n dy = \frac{n}{n+۱}\theta$$

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_۲) = \mathbb{E}([\frac{n}{n+۱}]Y_{(n)}) = ۲\mathbb{E}(\bar{Y}) = ۲\mu = \theta$$

پس مقدار بایاس $\hat{\theta}_۲$ نیز صفر می‌باشد.
ب

$$Var(\hat{\theta}_۱) = Var(۲\bar{Y}) = ۴Var(\bar{Y}) = ۴\frac{\sigma^۲}{n} = \frac{\theta^۲}{۳n}$$

$$\mathbb{E}(Y_{(n)}^۲) = \frac{n}{\theta^n}\int_۰^{n+۱} dy = \frac{n}{n+۲}\theta^۲$$

$$Var(Y_{(n)}) = \mathbb{E}(Y_{(n)}^۲) - \mathbb{E}(Y_{(n)})^۲ = \frac{n}{n+۲}\theta^۲ - (\frac{n}{n+۱}\theta)^۲ = \frac{n}{(n+۲)(n+۱)^۲}\theta^۲$$

$$Var(\hat{\theta}_۲) = Var(\frac{n+۱}{n}Y_{(n)}) = (\frac{n+۱}{n})^۲[\frac{n}{(n+۲)(n+۱)^۲}\theta^۲] = \frac{۱}{n(n+۲)}\theta^۲$$

پاسخ سوال ششم

الف از آزمون تی برای دو نمونه مستقل می‌توان استفاده کرد و برای نشان دادن متفاوت بودن یا نبودن باید از آزمون دو طرفه استفاده کرد زیرا فرض‌های آزمون به این صورت است:

$$\begin{cases} H_۰ : \bar{X}_۱ = \bar{X}_۲, \\ H_۱ : \bar{X}_۱ \neq \bar{X}_۲ \end{cases}$$

ب آماره مورد استفاده در این آزمون برابر است با:

$$t = \frac{\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲}{s_d}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{s_۱^۲}{n_۱} + \frac{s_۱^۲}{n_۱}}$$

با جایگذاری داریم:

$$t = \frac{۱۲ - ۱۳/۳}{\sqrt{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۳}{۲۰}}} = -۲/۶$$

که با مقایسه این مقدار با مقدار متناظر ۹۵ درصد (محاسبه درجه آزادی مناسب) در جدول توزیع تی (۲/۰۴۸) فرض تاثیرگذار نبودن تراشه رد می‌شود.

ج با توجه به جدول توزیع تی شاکی قلی خان حداکثر تا ۹۸ درصد سطح اهمیت می‌تواند فرض یکسان بودن را رد کند (البته این مقدار دقیقی نیست ولی می‌دانیم با سطح اهمیت ۹۹ درصد نمی‌توان فرض را رد کرد با توجه به جدول. مقدار دقیق را می‌توان با محاسبه $p - value$ بدست آورد)

موفق باشید.