آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: آرین احدی نیا، مهدی لطفیان

تمرین دوم

موضوع تمرین: استقلال، متغیرهای تصادفی گسسته و امید ریاضی

سوالات

مسئله‌ی ۱. تاس بازی

تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید و تاس B دارای ۲ وجه قرمز و ۴ وجه سفید است. یک سکه را پرتاب میکنیم، اگر شیر ظاهر شود بازی را با تاس A و اگر خط ظاهر شود با تاس B انجام میدهیم.

الف

نشان دهید که احتمال قرمز آمدن در هر پرتاب $\frac{۱}{۲}$ است.

ب

اگر دو پرتاب اولیه قرمز باشد، احتمال اینکه نتیجه سومین پرتاب قرمز باشد چه قدر است؟

ج

اگر دو پرتاب اولیه قرمز باشد، احتمال اینکه تاس A پرتاب شده باشد چه قدر است؟

حل.

الف

R_i: پیشامد قرمز آمدن در پرتاب iم ، A: پیشامد انتخاب تاس A ، B: پیشامد انتخاب تاس B

$$P(R_i) = P(R_i|A) + P(R_i|B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۶} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

ب

کافی است احتمال اینکه سه پرتاب اول قرمز باشند را به شرط قرمز بودن دو پرتاب اول محاسبه نماییم:

$R_۲$: پیشامد قرمز آمدن در دو پرتاب اول ،$R_۳$: پیشامد قرمز آمدن در سه پرتاب اول

$$P(R_۲) = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۴}{۶})^۲ + \frac{۱}{۲} \times (\frac{۲}{۶})^۲ = \frac{۵}{۱۸}$$

$$P(R_3) = \frac{1}{2} \times (\frac{4}{6})^3 + \frac{1}{2} \times (\frac{2}{6})^3 = \frac{1}{6}$$

$$P(R_3|R_2) = \frac{P(R_3 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_3)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}$$

ج

کافی است احتمال شرطی انتخاب تاس A به شرط آمدن قرمز در دو پرتاب اول را محاسبه نماییم:

$$P(A|R_2) = \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)}$$

$$P(A \cap R_2) = \frac{1}{2} \times (\frac{4}{6})^2 = \frac{2}{9}$$

$$P(A|R_2) = \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{18}} = \frac{4}{5}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۲. دانشگاه هیبرید

پس از امکان دوباره بازگشایی دانشگاه ها، قرار است برخی کلاسها با توجه به تعداد دانشجوی زیاد به حالت هیبریدی درآیند. یعنی عده ای به صورت مجازی و عده ای به صورت حضوری وارد کلاس شوند. فرض کنید تعداد دانشجویانی که به صورت حضوری وارد کلاس میشوند از توزیع Poisson با پارامتر λ_1 و تعداد دانشجویانی که به صورت مجازی وارد کلاس میشوند از توزیع Poisson با پارامتر λ_2 پیروی میکند. اگر مجموع افراد حاضر در کلاس n نفر باشند. احتمال اینکه k نفر به صورت حضوری شرکت کرده باشند را محاسبه کنید.
* راهنمایی: باید احتمال شرطی زیر را محاسبه نمایید:

$$P(\text{حضوری} = k | \text{حضوری} + \text{مجازی} = n)$$

حل.
V: حضوری، O: مجازی

$$P(V = k | V + O = n) = \frac{P(V = k, V + O = n)}{P(V + O = n)}$$

ابتدا توزیع مربوط به متغیر تصادفی X که از جمع دو پوآسون V و O تشکیل شده است را به دست می آوریم.

$$P(X = x) = P(V + O = x) = \sum_{i=0}^{x} P(V = i, V + O = x)$$

$$= \sum_{i=0}^{x} P(V = i, O = x - i) = \sum_{i=0}^{x} P(V = i)P(O = x - i)$$

$$= \sum_{i=0}^{x} (\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!})(\frac{\lambda_2^{x-i} e^{-\lambda_2}}{(x-i)!}) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{x-i}}{i!(x-i)!}$$

صورت و مخرج کسر داخل سیگما را در $x!$ ضرب میکنیم:

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{x-i} x!}{i!(x-i)!x!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{x-i}}{x!}$$

در نهایت با توجه به بسط دو جمله ای داریم:

$$P(V+O=x) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^x}{x!}$$

بنابراین متغیر تصادفی حاصل از جمع دو متغیر پوآسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 از توزیع پوآسون با پارامتار $\lambda_1 + \lambda_2$ پیروی میکند. حال احتمال خواسته شده را محاسبه میکنیم:

$$\frac{P(V=k, V+O=n)}{P(X=n)} = \frac{P(V=k)P(O=n-k)}{P(X=n)} = \frac{\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}} = \binom{n}{m} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۳. زنگ اثبات

الف

اگر متغیر تصادفی X از توزیع Poisson با پارامتر λ پیروی کند، اثبات کنید که $E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}]$

ب

اگر X متغیر تصادفی پوآسون باشد، مقدار $E[X(X-1)(X-2)...(X-k)]$ را برای هر مقدار طبیعی k محاسبه کنید.

حل.

الف

$$P_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E[X^n] = \sum_{x=0}^{\infty} x^n P_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

با تغییر متغیر $x' = x - 1$ داریم

$$E[X^n] = \sum_{x=1}^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \sum_{x'=0}^{\infty} (x'+1)^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x'+1}}{x'!} = \lambda \sum_{x'=0}^{\infty} (x'+1)^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x'}}{x'!} = E[(X+1)^{n-1}]$$

ب

$$P_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E[X(X-۱)(X-۲)\dots(X-k)] = \sum_{x=۰}^{\infty} x\dots(x-k)P_X(x) = \sum_{x=k+۱}^{\infty} x\dots(x-k)P_X(x) = \sum_{x=k+۱}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{x!}{(x-k-۱)!}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=k+۱}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{(x-k-۱)!}$$

با تغییر متغیر $x' = x - k - ۱$ داریم

$$= \sum_{x'=۰}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x'+k+۱}}{x'!} = \lambda^{k+۱}\sum_{x'=۰}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x'}}{x'!} = \lambda^{k+۱}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۴. تاس بازی ۲

در یک بازی، شما تاس سالمی را متناوبا پرتاب میکنید. در این بازی میتوانید در هر پرتابی که خواستید متوقف شوید، ولی اگر عدد ۱ ظاهر شد، مجبور به توقف هستید. در هر صورت امتیاز شما مربع عدد ظاهر شده در آخرین پرتاب خواهد بود.

الف

اگر استراتژی شما توقف در صورت ظاهر شدن ۵ یا ۶ باشد، امید ریاضی امتیاز خود را محاسبه کنید.

ب

فرض کنید استراتژی شما این است که عدد یا اعدادی از پیش تعیین کرده و در صورت ظاهر شدن آنها متوقف شوید. بهترین استراتژی از این نوع در راستای امتیاز بالاتر که میتوانید انتخاب کنید کدام است؟ معیار بهتر بودن را نیز ذکر کنید.

حل.

الف

با توجه به اینکه احتمال آمدن تمام اعداد روی تاس برابر است. احتمال پایان یافتن بازی با ۱، ۵ یا ۶ هم باهم برابر و برابر $frac۱۳$ است. در نتیجه امید ریاضی به صورت زیر محاسبه میشود.

$$E[P] = \frac{۱}{۳}\times ۱^۲ + \frac{۱}{۳}\times ۵^۲ + \frac{۱}{۳}\times ۶^۲ = \frac{۶۲}{۳}$$

ب

مشخص است که استراتژی ما باید به گونه ای باشد که با بالاترین اعداد پایان یابد تا نتیجه بهتر شود. حال باید بررسی کنیم که چند عدد را برای توقف انتخاب کنیم تا به بهترین نتیجه دست یابیم. کافی است امید ریاضی را به ازای انتخاب i عدد برای پایان محاسبه نماییم، داریم:

$$i = ۰ \implies E[P] = \frac{۱}{۱} \times ۱^۲ = ۱$$

$$i = ۱ \implies E[P] = \frac{۱}{۲} \times (۱^۲ + ۶^۲) = \frac{۳۷}{۲}$$

$$i = ۲ \implies E[P] = \frac{۱}{۳} \times (۱^۲ + ۶^۲ + ۵^۲) = \frac{۶۲}{۳}$$

$$i = ۳ \implies E[P] = \frac{۱}{۴} \times (۱^۲ + ۶^۲ + ۵^۲ + ۴^۲) = \frac{۳۹}{۲}$$

$$i = ۴ \implies E[P] = \frac{۱}{۵} \times (۱^۲ + ۶^۲ + ۵^۲ + ۴^۲ + ۳^۲) = \frac{۸۷}{۵}$$

$$i = ۵ \implies E[P] = \frac{۱}{۶} \times (۱^۲ + ۶^۲ + ۵^۲ + ۴^۲ + ۳^۲ + ۲^۲) = \frac{۹۱}{۶}$$

بنابراین بهترین استراتژی همان توقف هنگام ظاهر شدن ۵ یا ۶ است که امید ریاضی امتیاز کسب شده طبق آن از بقیه حالات بیشتر است. $\triangleright$

مسئله‌ی ۵. مسابقه تلویزیونی

مهدی در یک مسابقه تلویزیونی شرکت کرده است. در هر مرحله از مسابقه به احتمال $۱ - p$، ۱ دلار به جایزهٔ مهدی اضافه شده و به احتمال p، جایزه او صفر شده و از مسابقه حذف میشود. مهدی در هر مرحله میتواند تصمیم بگیرد که برای مرحله بعدی بازی را ادامه دهد یا خیر. او بهتر است پس از چند مرحله از مسابقه خارج شود تا قبل از اینکه جایزه اش ۰ شود، بیشینه میانگین آماری جایزه را بدست آورد؟

حل.

میدانیم که احتمال حذف نشدن پس از n مرحله برابر $(۱ - p)^n$ است و احتمال اینکه در یکی از این n مرحله حذف شده باشد مکمل احتمال قبلی و برابر $۱ - (۱ - p)^n$ است. همچنین میدانیم درصورت حذف شدن جایزه مهدی ۰ و در غیر این صورت n دلار میباشد. حال میتوانیم امید ریاضی جایزه را پس از n مرحله بدست آوریم، داریم:

$$E[P] = ۰ \times (۱ - (۱ - p)^n) + n \times (۱ - p)^n = n \times (۱ - p)^n$$

برای ماکسیمم کردن امید ریاضی بر حسب n مشتق گرفته و مساوی ۰ قرار میدهیم:

$$\frac{d}{dn} n \times (۱ - p)^n = (۱ - p)^n (n \times \ln(۱ - p) + ۱) = ۰$$

$$n = \frac{-۱}{\ln(۱ - p)}$$

بنابراین بهتر است پس از $\lfloor(\frac{-۱}{\ln(۱-p)})\rfloor$ یا $\lceil(\frac{-۱}{\ln(۱-p)})\rceil$ مرحله، بازی را خاتمه دهد. $\triangleright$

مسئله‌ی ۶. زنگ اثبات ۲

الف

متغیر تصادفی گسسته X از توزیع هندسی با پارامتر p تبعیت میکند. عبارت زیر را اثبات کنید.

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{-p\ln p}{1-p}$$

* راهنمایی: در عبارت $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i}$، میتوان از جایگزینی زیر استفاده کرد:

$$\frac{a^i}{i} = \int_0^a x^{i-1} dx$$

ب

X یک متغیر تصادفی گسسته است که فقط میتواند مقادیر طبیعی بگیرد. نشان دهید:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(x \geqslant i)$$

حل.

الف

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{k}$$

با توجه به راهنمایی داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{1-p} x^{k-1} dx = \int_0^{1-p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\right) dx = \int_0^{1-p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k}\right) dx = \int_0^{1-p} \frac{1}{1-x} dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = 1-x$ داریم:

$$\int_0^{1-p} \frac{1}{1-x} dx = \int_0^{p} \frac{1}{y}(-dy) = \ln 1 - \ln p = -\ln p$$

در نهایت بدست می آید:

$$E\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{-p\ln p}{1-p}$$

ب

میدانیم:

$$P[x \geqslant i] = \sum_{j=i}^{\infty} P[x = j]$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{i=۱}^{\infty} P(x \geqslant i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P[x = j] = \sum_{i=۱}^{\infty} iP[x = i] = E[X]$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۷. تصحیح عادلانه

در زمان آزمون‌های حضوری، در برگه اول پاسخنامه، دانشجویان باید مشخصات خود را درج میکردند. مهدی برای رعایت بی‌طرفی کامل در تصحیح برگه‌ها، صفحه اول تمام برگه‌ها را جدا می‌کند تا رفاقتش در عدالتش تاثیر نگذارد. مادامی که فکر می‌کرد خیلی کار قشنگی انجام داده آرین به او یادآوری می‌کند که بر روی برگه‌ها شماره‌گذاری انجام نداده است و امکان تطبیق برگه‌ها با دانشجویان وجود ندارد. مهدی برای آبروداری تصمیم می‌گیرد که برگه‌ها را به صورت تصادفی با دانشجویان تطبیق دهد. آرین بسیار نگران است و از شما می‌خواهد که محاسبه کنید که به طور متوسط چند نفر با این ایده درخشان برگه خود را دریافت خواهند کرد؟

حل. متغیر تصادفی R_i را در نظر بگیرید که مقدار آن یک است اگر و تنها اگر دانشجو iام نمره خودش را دریافت کند و در غیر این صورت مقدار آن صفر است.
اگر تعداد دانشجویانی که نمره خود را دریافت می‌کنند با متغیر تصادفی R مشخص کنیم، خواهیم داشت

$$R = R_۱ + \cdots + R_n = \sum_{i=۱}^{n} R_i$$

با توجه به خواص احتمال می‌توانیم بنویسیم

$$E[R] = E\left[\sum_{i=۱}^{n} R_i\right] = \sum_{i=۱}^{n} E[R_i]$$

توجه کنید که $n!$ حالت برای توزیع نمرات وجود دارد. در $(n-۱)!$ نمره شخص iام به خودش داده می‌شود. بنابرین احتمال ۱ بودن متغیر تصادفی R_i به ازای هر i برابر است با

$$p = \frac{(n-۱)!}{n!} = \frac{۱}{n}$$

بنابرین به ازای هر i داریم

$$E[R_i] = \frac{۱}{n}$$

بنابرین

$$E[R] = \sum_{i=۱}^{n} E[R_i] = n \times \frac{۱}{n} = ۱$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۸. اورژانس

تعداد بیمارانی که هر روز به اورژانس مراجعه می‌کنند را متغیر تصادفی N در نظر می‌گیریم که از توزیع Poisson با پارامتر λ پیروی می‌کند و تعداد افرادی که به عمل جراحی اورژانسی نیاز پیدا می‌کنند از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای

N و p پیروی می‌کند. آیا تعداد افرادی که به عمل جراحی نیاز پیدا می‌کنند از تعداد کسانی که به عمل جراحی نیاز پیدا نمی‌کنند مستقل است؟ اثبات کنید.

حل. تعداد مراجعه‌کنندگان را N، تعداد افرادی که به عمل جراحی پیدا می‌کنند را X و تعداد سایر مراجعه‌کنندگان را Y در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه تعداد مراجعه‌کنندگان از توزیع پوآسون پیروی می‌کند،داریم

$$P_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

با توجه به اینکه از بین مراجعه‌کنندگان تعداد افرادی که به جراحی نیاز پیدا می‌کنند از توزیع دوجمله‌ای با پارامتر N و p پیروی می‌کند، داریم

$$P_{X|N}(x|n) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

با حاشیه‌سازی $X|N$ نسبت به N می‌توانیم توزیع احتمالی X را بدست آوریم.

$$P_X(x) = \sum_{n=x}^{\infty} P_N(n)P_{X|N}(x|n) = \sum_{n=x}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = e^{-\lambda}p^x(1-p)^{-x}\sum_{n=x}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}\binom{n}{x}$$

همچنین با توجه به اینکه $N = X + Y$ است، داریم $P_{Y|N}(y|n) = P_{X|N}(n-y|n)$. بنابرین به طریق مشابه داریم

$$P_Y(y) = \sum_{n=y}^{\infty} P_N(n)P_{X|N}(n-y|n) = \sum_{n=y}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{n-y}p^{n-y}(1-p)^y = e^{-\lambda}p^{-y}(1-p)^y\sum_{n=y}^{\infty}\frac{(\lambda p)^n}{n!}\binom{n}{y}$$

همچنین احتمال توام X و Y را میتوانیم به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$P_{XY}(x,y) = P_N(x+y)P_{X|N}(x|x+y) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x\lambda^y}{x!y!}p^x(1-p)^y$$

بنابرین داریم

$$P_X(x)P_Y(y) = \left(e^{-\lambda}p^x(1-p)^{-x}\sum_{n=x}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^n}{n!}\binom{n}{x}\right)\left(e^{-\lambda}p^{-y}(1-p)^y\sum_{n=y}^{\infty}\frac{(\lambda p)^n}{n!}\binom{n}{y}\right)$$

$$= e^{-2\lambda}p^x(1-p)^{-x}p^{-y}(1-p)^y\sum_{i=x}^{\infty}\binom{i}{x}\frac{(\lambda-\lambda p)^i}{i!}\sum_{j=y}^{\infty}\binom{j}{y}\frac{(\lambda p)^j}{j!}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda}p^x(1-p)^{-x}p^{-y}(1-p)^y(\lambda-\lambda p)^x(\lambda p)^y}{x!y!}\sum_{i=x}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^{i-x}}{(i-x)!}\sum_{j=y}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{j-y}}{(j-y)!}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda}p^x(1-p)^{-x}p^{-y}(1-p)^y\lambda^x(1-p)^x\lambda^y p^y}{x!y!}\sum_{i=x}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^{i-x}}{(i-x)!}\sum_{j=y}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{j-y}}{(j-y)!}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda}\lambda^x\lambda^y p^x(1-p)^y}{x!y!}\sum_{i=x}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^{i-x}}{(i-x)!}\sum_{j=y}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{j-y}}{(j-y)!} = e^{-\lambda}P_{XY}(x,y)\sum_{i=x}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^{i-x}}{(i-x)!}\sum_{j=y}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{j-y}}{(j-y)!}$$

$$= e^{-\lambda}P_{XY}(x,y)\sum_{i'=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^{i'}}{i'!}\sum_{j'=0}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{j'}}{j'!}$$

طبق بسط تیلور داریم

$$= e^{-\lambda}P_{XY}(x,y)e^{\lambda-\lambda p}e^{\lambda p} = P_{XY}(x,y)$$

بنابرین این دو متغیر از هم مستقل هستند. ▷

مسئله‌ی ۹. کدام جهت

فرض کنید که آرین در یک فضای n بعدی در مبدا مختصات قرار دارد. در هر دقیقه آرین یک واحد در جهت یا در خلاف جهت هر یک از محورها به احتمال برابر حرکت می‌کند. (احتمال حرکت در هر جهت برابر $\frac{۱}{۲n}$ است.)

الف

اگر آرین k دقیقه در محیط بوده باشد و $|x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n| \leqslant k$ باشد، چقدر احتمال دارد که پس از آن در نقطه‌ای با مختصات صحیح $(x_۱, x_۲, x_۳, \ldots, x_n)$ باشد.

ب

اگر آرین k دقیقه در محیط بوده باشد و $|x_۱| \leqslant k$ باشد، چقدر احتمال دارد که پس از آن در نقطه‌ای که مختصه اول آن برابر $x_۱$ باشد. دقت بفرمایید که روی مختصه‌های دیگر شرطی وجود ندارد.

ج

اگر دقیقا در k' دقیقه از کل k دقیقه آرین روی محور مختصاتی اول حرکت کرده باشد، و $|x_۱| \leqslant k$ باشد، چقدر احتمال دارد که پس از آن در نقطه‌ای که مختصه اول آن برابر $x_۱$ باشد. دقت بفرمایید که روی مختصه‌های دیگر شرطی وجود ندارد.

حل.

الف

با یک $۲n$ تایی مرتب میتوانیم حرکت را در هر جهت مشخص کنیم

$$(p_۱, o_۱, p_۲, o_۲, \ldots, p_n, o_n)$$

به این صورت که p_i حرکت در جهت مثبت محور iام و o_i حرکت در جهت منفی محور iام باشد.
مجموعه S را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$S = \{(p_۱, o_۱, p_۲, o_۲, \ldots, p_n, o_n) | \forall i, p_i - n_i = x_i, \sum_{i=۰}^{n} p_i + o_i = k\}$$

هر عضو مجموعه s یک دسته روش برای رسیدن به مقصد است که مشخص می‌کند در هر جهت چه تعداد گام باید برداشته شود. حال اگر ترتیب این گام‌ها مشخص شود، تعداد روش‌های رسیدن به مقصد مشخص میشود. برای این منظور ابتدا از کل گام‌ها، گام‌های در جهت مثبت محور اول را مشخص می‌کنیم. سپس گام‌های در راستای منفی این محور را از گام‌های باقی‌مانده مشخص می‌کنیم. با ادامه این روند برای محورهای دیگر، میتوانیم تا انتها تعداد گام‌های هر جهت را مشخص کنیم که برابر میشود با

$$\binom{p_۱ + o_۱ + p_۲ + \cdots + p_n + o_n}{p_۱} \binom{o_۱ + p_۲ + \cdots + p_n + o_n}{o_۱} \binom{p_۲ + \cdots + p_n + o_n}{p_۲} \cdots \binom{o_n}{o_۱}$$

که برابر می‌شود با

$$\frac{(p_۱ + o_۱ + p_۲ + o_۲ + \cdots + p_n + o_n)!}{p_۱!o_۱!p_۲!o_۲!\ldots p_n!o_n!} = \frac{k!}{p_۱!o_۱!p_۲!o_۲!\ldots p_n!o_n!}$$

بنابرین احتمل قرارگیری در نقطه مد نظر برابر می‌شود با

$$p = \sum_{s\in S} \frac{k!}{p_۱!o_۱!p_۲!o_۲!\ldots p_n!o_n!}(\frac{۱}{۴})^k$$

ب

مجموعه S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S = \{(p_۱, o_۱, p_۲, o_۲, \ldots, p_n, o_n) | p_۱ - n_۱ = x_۱, \sum_{i=۰}^{n} p_i + o_i = k\}$$

به صورت مشابه می‌توان احتمال را در این بخش نیز محاسبه کرد.

ج

مجموعه S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S = \{(p_۱, o_۱, p_۲, o_۲, \ldots, p_n, o_n) | p_۱ - o_۱ = x_۱, \sum_{i=۰}^{n} p_i + o_i = k, p_۱ + o_۱ = k'\}$$

به صورت مشابه می‌توان احتمال را در این بخش نیز محاسبه کرد. ▷

نکات مهم

- بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم HW#_[STD-Num] آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۳ فروردین می‌باشد.

موفق باشید :)