دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	بهار ۱۳۹۹

پاسخ‌نامه تمرین سری پنجم

(متغیرهای تصادفی پیوسته: توزیع احتمال مشترک، احتمال شرطی، استقلال، قضیه احتمال کل و قاعده بیز، توزیع و امید ریاضی تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی)

مدرس: نعیمه امیدوار	موعد تحویل: ۲۸ اردیبهشت ۹۹

سؤال ۱ علی و حسین و محمد تصمیم گرفته‌اند تا مسابقه‌ی دویدن بین خود ترتیب دهند که در آن مسافت L را خواهند دوید. آن‌ها مدت بسیار زیادی‌ست که ورزش نکرده‌اند این احتمال وجود دارد که در نقطه ای در میانه‌ی راه بایستند و از مسابقه انصراف دهند. توزیع این احتمال برای نقاط مسیر یکنواخت است. مسابقه زمانی به پایان می‌رسد که دیگر کسی در حال دویدن نباشد (یعنی هر کس یا از خط پایان عبور کرده و یا انصراف داده است). احتمال اینکه در پایان مسابقه، فاصله هر دو فرد دلخواه بیشتر از نصف مسافت مسابقه نباشد را به دست آورید.

پاسخ ۱ برای شرایط گفته شده در مسئله باید حجم مورد نظر از یک مکعب را حساب کنیم. برای این کار، اینطور عمل می‌کنیم: ابتدا برای سه نفر ترتیب قائل شده (که A کوچکترین، B میانی و C بزرگترین است) و در نهایت جایگشت‌ها را حساب کرده و اعمال می‌کنیم. برای کوچکترین متغیر دو حالت فرض می‌کنیم؛ اول آن‌که قبل از نصفهٔ مسیر آمده باشد و دوم آن‌که در نیمهٔ دوم مسیر باشد. حال برای محاسبه‌ی احتمال‌های گفته شده مقادیر انتگرال‌ها را در این دو حالت حساب می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^{\frac{L}{2}} \int_A^{A+\frac{L}{2}} \int_B^{A+\frac{L}{2}} f(A,B,C)\ \mathrm{d}C\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}A + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \int_A^{L} \int_B^{L} f(A,B,C)\ \mathrm{d}C\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}A \\
&= \int_0^{\frac{L}{2}} \int_A^{A+\frac{L}{2}} \int_B^{A+\frac{L}{2}} \frac{1}{L^3}\ \mathrm{d}C\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}A + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \int_A^{L} \int_B^{L} \frac{1}{L^3}\ \mathrm{d}C\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}A \\
&= \frac{1}{L^3}\Big(\int_0^{\frac{L}{2}} \int_A^{A+\frac{L}{2}} \int_B^{A+\frac{L}{2}} 1\ \mathrm{d}C\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}A + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \int_A^{L} \int_B^{L} 1\ \mathrm{d}C\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}A\Big) \\
&= \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

۶ جایگشت از این ترتیب وجود دارد و در نهایت پاسخ مسئله نیم خواهد بود!
آیا می‌توانید تابعی یک‌به‌یک بین حالات مطلوب و غیر مطلوب بیابید و تقارن مسئله را پیدا کنید؟

سؤال ۲ احمد، پیمان و اشکان هر یک نقطه‌ای در بازه ۰ تا ۱ انتخاب می‌کنند. احتمال آن که نقطه انتخابی پیمان بین دو فرد دیگر باشد چقدر است؟

پاسخ ۲ از آن‌جایی که سه نقطه تقارن دارند و احتمال آنکه دو یا سه تا از آن‌ها روی یکدیگر بیفتند صفر است، احتمالِ اینکه هر یک میان دو نقطه‌ی دیگر باشد یکسان بوده و برابر یک‌سوم است.

سؤال ۳ تابع چگالی احتمال مشترک X و Y در زیر آمده است:

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} \qquad 0 \leq x < \infty,\ 0 \leq y < \infty$$

دو احتمالِ $P\{X < a\}$ و $P\{X < Y\}$ را بیابید.

پاسخ ۳

$$\iint\limits_{(x,y):x<y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{(x,y):x<y} e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^y e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty (e^{-y} - e^{-2y})\,\mathrm{d}y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X < a\} = \int_0^a \int_0^\infty e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^a e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - e^{-a}$$

سؤال ۴ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال (استاندارد) باشند. تابع چگالی احتمال مشترک دو متغیرِ U و V را به دست آورید که این طور تعریف می‌شوند: $U = X$ و $V = \frac{X}{Y}$

پاسخ ۴ بنا به شرایط و مفروضات سؤال از معادله ۷.۱ از فصل ششم کتاب راس (ویرایش هشتم) استفاده می‌کنیم. ابتدا مقدار دترمینان را مشخص می‌کنیم و سپس متغیرهای ابتدایی (x,y) را برحسب متغیرهای جدید (u,v) به‌دست آورده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$u = x, v = \frac{x}{y}$$

$$g(x,y) = (u,v) = (x, \frac{x}{y})$$

$$|det\,\nabla g(x,y)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{x}{y^2}$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u,v))\,|det\,\nabla g^{-1}(u,v)|,\ x = u,\ y = \frac{u}{v} \ \Rightarrow\ f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{u^2v^2 + u^2}{v^2}} . \frac{u}{v^2}$$

سؤال ۵ فرض کنید سکه‌ای داریم که احتمال شیر آمدن آن p^2 است به طوری که خود p از توزیع یکنواخت در بازه $[0,1]$ می‌آید. حال اگر سکه را بیاندازیم و شیر بیاید، احتمال $p < \frac{1}{2}$ چقدر است؟

پاسخ ۵

$$\mathbb{P}(p < \frac{1}{2} \mid Head) = \frac{\mathbb{P}(p < \frac{1}{2} \cap Head)}{\mathbb{P}(Head)} = \frac{\mathbb{P}(Head \mid p < \frac{1}{2})P(p < \frac{1}{2})}{\mathbb{P}(Head)}$$

$$= \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(Head \mid p = x) f(x)\,\mathrm{d}x}{2\int_0^1 \mathbb{P}(Head \mid p = x) f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,\mathrm{d}x}{2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x} = \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{1}{2}}}{2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1}$$

$$= \frac{\frac{1}{24}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

سؤال ۶ آ) اگر برای $X_1, X_2, ..., X_n$ داشته باشیم $X_i \sim Exp(\lambda_i)$، تابع چگالی احتمال را برای $Y = max(X_1, X_2, ..., X_n)$ و $Z = min(X_1, X_2, ..., X_n)$ بیابید (برای محاسبه تابع چگالی احتمال Y فرض کنید $\lambda_i = \lambda$).

ب) اگر برای $X_1, X_2, ..., X_n$ داشته باشیم $X_i \sim Uniform(0,1)$، $E[max(X_1, ..., X_n)]$ و $E[min(X_1, ..., X_n)]$ را بیابید.

پاسخ ۶ آ)

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(max(X_1, X_2, ..., X_n) <= y) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i <= y) = (1 - e^{-\lambda x})^n$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$$

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(min(X_1, X_2, ..., X_n) <= z) = 1 - \mathbb{P}(min(X_1, X_2, ..., X_n) > z)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i z} = 1 - e^{(\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i)z}$$
$$\Rightarrow Z \sim Exp(\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i) \Rightarrow f_Z(z) = \lambda_s e^{-\lambda_s z} \quad (\lambda_s = \Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i)$$

ب)

$$\mathbb{E}[max(X_1, X_2, ..., X_n)] = \int_0^1 \mathbb{P}(max(X_1, X_2, ..., X_n) >= x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - x^n\,\mathrm{d}x$$
$$= 1 - \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\mathbb{E}[min(X_1, X_2, ..., X_n)] = \mathbb{E}[1 - max(1 - X_1, 1 - X_2, ..., 1 - X_n)]$$
$$= 1 - \mathbb{E}[max(1 - X_1, 1 - X_2, ..., 1 - X_n)] = 1 - \mathbb{E}[max(X_1, X_2, ..., X_n)] \quad (1 - X_i \sim Uniform(0, 1))$$
$$= 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

سؤال ۷ فرض کنید $F_X(x)$ توزیع تجمعی متغیر تصادفی X باشد.

آ) فرض کنید $Y = F_X(X)$، توزیع Y را بیابید.

ب) فرض کنید متغیر تصادفی U توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ دارد. همچنین فرض کنید تابع h اکیداً صعودی با برد $R = [0, 1]$ است. نشان دهید که اگر $Y = h^{-1}(U)$ ، آنگاه h تابع توزیع تجمعی Y است.

ج) توزیع X مفروض است. برای تابع دلخواه صعودی F_Y با شرط $\lim_{y\to\infty} F_Y(y) = 1$ و $\lim_{y\to-\infty} F_Y(y) = 0$ ، تابع g را بیابید که اگر $Y = g(X)$، این تابع توزیع تجمعی Y باشد.

پاسخ ۷ آ) مقدار Y بین صفر و یک خواهد بود و برای یک مقدار $y = F_X(x)$ در این بازه خواهیم داشت:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F_X(X) \le F_X(x)) \overset{F_X \text{ is non-decreasing}}{=} F_X(x) = y$$

پس توزیع Y، توزیع یکنواخت بین $[0, 1]$ است.

ب) چون h صعودی اکید است، h^{-1} هم صعودی اکید است.
اگر $y = h^{-1}(u)$،

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(h^{-1}(U) \le h^{-1}(u)) \overset{h^{-1} \text{ is increasing}}{=} u$$

حال چون $y = h^{-1}(u)$، در نتیجه $u = h(y)$، پس $F_Y(y) = h(y)$.
اگر برد h $[0, 1]$ نبود، نمی‌توانتسیم از اینکه $\mathbb{P}(h^{-1}(U) \le h^{-1}(u)) = u$ استفاده کنیم.

ج) طبق قسمت الف، اگر $U = F_X(X)$، U توزیع یکنواخت خواهد داشت و بر اساس قسمت ب، اگر $Y = F_Y^{-1}(U)$، Y توزیع دلخواه را خواهد داشت. پس $Y = F_Y^{-1}(F_X(X))$، در نتیجه $g = F_Y^{-1} o F_X$ جواب مسئله است.

سؤال ۸ در مسابقه تیر و کمان، فاصله طولی و عرضی تیر شلیک شده با هدف را با X و Y نمایش می‌دهیم. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نرمال مستقل از هم با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 100$ باشند.

آ) نشان دهید تابع چگالی احتمال مشترک $f(x,y)$ تابعی از $x^2 + y^2$ است (به عبارتی چگالی احتمال به ازای هر نقطه متناسب با فاصله آن از هدف است).

ب) احتمال آن که فاصله یک تیر شلیک شده از هدف بین ۱ و ۲ شود را به دست آورید.

پاسخ ۸ آ)

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x)\cdot f(y) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-\mu}{\sigma})^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{e^{-\frac{x^2}{200}}}{10\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{y^2}{200}}}{10\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{200}}}{200\pi} = \frac{e^{-\frac{r^2}{200}}}{200\pi} = g(x^2+y^2) = g(r^2) \qquad (r^2 = x^2+y^2) \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} \iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} g(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} g(r^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 g(r^2)\,r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{e^{-\frac{r^2}{200}}}{200\pi}\,r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_1^2\frac{e^{-\frac{r^2}{200}}}{200\pi}\,r\mathrm{d}r \\ &= \int_1^2\frac{e^{-\frac{r^2}{200}}}{100}\,r\mathrm{d}r = -e^{-\frac{r^2}{200}}\Big|_1^2 = e^{-\frac{1}{200}} - e^{-\frac{4}{200}} \approxeq 0.01481 \end{aligned}$$

همچنین می‌توان توجه داشت که متغیرهای تصادفی $\hat{X} = \frac{X}{10}$ و $\hat{Y} = \frac{Y}{10}$ متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد مستقل از هم هستند و در نتیجه $\hat{X}^2 + \hat{Y}^2$ از یک توزیع $Chi-squared$ با درجه آزادی دو تبعیت می‌کند. حال از آنجا که $1 \le X^2 + Y^2 \le 4$ معادل است با $\frac{1}{100} \le \hat{X}^2 + \hat{Y}^2 \le \frac{4}{100}$، می‌توانیم با استفاده از تابع توزیع تجمعی برای توزیع $Chi-squared$ که در حالت کلی به شکل $F(x;k) = \frac{\gamma(\frac{k}{2},\frac{x}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} = P(\frac{k}{2},\frac{x}{2})$ و به ازای $k = 2$ برابر با $F(x;2) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$ است جواب را به دست آوریم که برابر می‌شود با:

$$F(\frac{4}{100};2) - F(\frac{1}{100};2) = (1 - e^{-\frac{\frac{4}{100}}{2}}) - (1 - e^{-\frac{\frac{1}{100}}{2}}) = e^{-\frac{1}{200}} - e^{-\frac{4}{200}} \approxeq 0.01481$$

که برابر با عدد به دست آمده با راه قبلی با استفاده از مختصات قطبی است.

سؤال ۹ اگر داشته باشیم $X \sim N(0,1)$ و $Y = e^X$.

آ) توزیع چگالی احتمال Y را محاسبه کرده و نمودار آن را رسم کنید.

ب) بردار $10,000$ تایی $x = (x_1, ..., x_{10,000})$ متشکل از $10,000$ عدد تصادفی مستقل نرمال استاندارد را تولید کنید و از روی آن بردار $y = (y_1, ..., y_{10,000})$ را که $y_i = e^{x_i}$ بسازید. سپس هیستوگرام y را رسم کنید و آن را با توزیع چگالی احتمالی که در بخش قبل به دست آوردید مقایسه کنید.

ج) یکی از روش‌های تولید اعداد تصادفی مستقل نرمال، روش *Box-Muller transform* است. بعد از مطالعه این روش، آن را پیاده‌سازی کرده و بخش قبل را این بار با استفاده از تابع تولید کننده نرمال استاندارد خودتان انجام دهید.

پاسخ ۹

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y <= y) = \mathbb{P}(e^X <= y) = \mathbb{P}(X <= \ln y) = F_X(\ln(y)) \quad (y > 0)$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(ln(y))}{dy} = f'_x(ln(y)) \cdot ln'(y)$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{\ln^2(y)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{y} & if\ y > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

پاسخ بخش عملی به پیوست آمده است.

موفق باشید