دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی — بهار ۱۳۹۹

پاسخ‌نامه‌ی تمرین چهارم

(متغیرهای تصادفی گسسته: تابع مولد گشتاور؛ متغیرهای تصادفی پیوسته: تابع چگالی احتمال، توزیع‌های پیوسته‌ی مشهور، امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور، تابع چگالی احتمال مشترک و احتمال شرطی)

مدرس: نعیمه امیدوار — موعد تحویل: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۹

سؤال ۱. برای متغیر تصادفی پیوسته و مثبت X ثابت کنید.

$$E[x] = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$$

پاسخ.

$$\begin{aligned}
1 - F_X(x) &= P(X > x) \\
\int_0^\infty P(X > x)dx &= \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(y)dydx \\
&= \int_{0<x<y<\infty} f_X(y)dxdy = \int_0^\infty \int_0^y f_X(y)dydx \\
&= \int_0^\infty y f_X(y)dy = E(X|X \geq 0)P(X \geq 0) = E[x]
\end{aligned}$$

$\triangleright$

سؤال ۲. اگر X یک متغیر تصادفی باشد که تنها در بازه $[0, c]$ مقدار داشته باشد، نشان دهید:

$$\mathrm{Var}(X) \leq \frac{c^2}{4}$$

راهنمایی: ابتدا نشان دهید $E[X^2] \leq cE[X]$ و سپس $\mathrm{Var}(X) \leq c^2(\alpha - \alpha^2)$ که $\alpha = \frac{E[X]}{c}$ است.

پاسخ.

$$
\begin{aligned}
E[X^{۲}] &= \int_{۰}^{c} x^{۲} f_X(x)dx \\
\xrightarrow{x\leq c} &\leq c\int_{۰}^{c} x f_X(x)dx \\
\Rightarrow E[X^{۲}] &\leq cE[X]
\end{aligned}
$$

خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E[X^{۲}] - E^{۲}[X] \\
\xrightarrow{E[X^{۲}]\leq\ cE[X]} &\leq cE[X] - E^{۲}[X] \\
&= c^{۲}(\frac{E[X]}{c} - (\frac{E[X]}{c})^{۲}) \\
\xrightarrow{\alpha=\frac{E[X]}{c}} &= c^{۲}(\alpha-\alpha^{۲}) \\
\xrightarrow{\max(\alpha-\alpha^{۲})=\frac{۱}{۴}} &\leq \frac{c^{۲}}{۴} \\
\Rightarrow \mathrm{Var}(X) &\leq \frac{c^{۲}}{۴}
\end{aligned}
$$

$\triangleright$

سؤال ۳. فرض کنید $X_{۱}, X_{۲}, .., X_n$ متغیر های تصادفی مستقل و $X_i \sim Bernouli(p)$ باشند.

$$X = X_{۱} + X_{۲} + \cdots + X_n.$$

$Var[X]$ را با استفاده از تابع مولد گشتاور ($M_X(s)$) بدست آورید . سپس بگویید X چه توزیعی دارد.

پاسخ.

$$
\begin{aligned}
M_X(s) &= M_{X_{۱}}(s)M_{X_{۲}}(s)\cdots M_{X_n}(s) \\
&= \big(M_{X_{۱}}(s)\big)^n \quad (\text{چون } X_i \text{ ها i.i.d. هستند}) \\
M_{X_{۱}}(s) &= E[e^{sX_{۱}}] = pe^s + ۱ - p. \\
M_X(s) &= \big(pe^s + ۱ - p\big)^n. \\
E[X^k] &= \frac{d^k}{ds^k} M_X(s)|_{s=۰}. \\
E[X] &= np \\
E[X^{۲}] &= np\,(np - p + ۱) \\
var[X] &= E[X^{۲}] - E^{۲}[X] = np(۱-p)
\end{aligned}
$$

برای آنکه بگوییم دو توزیع با هم برابرند باید نشان دهیم تابع مولد گشتاورهای آن‌ها با هم برابرند.

$$\begin{aligned} M_{B_{n,p}}(s) &= E(e^{sk}) \\ &= \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} p^k (۱-p)^{n-k} e^{sk} \\ &= \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} (pe^s)^k (۱-p)^{n-k} \\ &= (pe^s + (۱-p))^n \end{aligned}$$

همانطور که می‌بینیم تابع مولد گشتاور *binomial* برابر تابع مولد گشتاور همان تابع مطلوب است. پس X توزیع *binomial* دارد.

$\triangleright$

سؤال ۴. فرض کنید Z متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد و همچنین g تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر و کراندار باشد. نشان دهید:

الف) $E[g'(Z)] = E[Zg(Z)]$

ب) $E[Z^{n+۱}] = nE[Z^{n-۱}]$

پاسخ.

الف)

$$\begin{aligned} E[g'(Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g'(z) f_Z(z) dz \\ \xrightarrow{\text{جز به جز}} \quad &= g(z) f_Z(z) \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(z) f'_Z(z) dz \\ \xrightarrow{\lim_{z\to\infty} \; f_Z(z)=۰, g(z)<\infty} \quad &= ۰ - \int_{-\infty}^{\infty} g(z) f'_Z(z) dz \\ \xrightarrow{\text{نرمال استاندارد است } Z \to f'_Z(z) = -z f_Z(z)} \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} z g(z) f_Z(z) dz \\ \Rightarrow E[g'(Z)] &= E[Zg(Z)] \end{aligned}$$

ب) با استفاده از نتیجه بخش قبل خواهیم داشت:

$$E[Z^{n+۱}] = E[Z(Z^n)] \overset{E[Zg(Z)] = E[g'(Z)]}{=} nE[Z^{n-۱}]$$

$\triangleright$

سؤال ۵. فرض کنید Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

الف) تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی را بیابید.

ب) نشان دهید:

$$E[Z^n] = \begin{cases} \frac{(۲k)!}{۲^k k!} & : n = ۲k \\ ۰ & : n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

راهنمایی: از بسط تیلور تابع مولد گشتاور استفاده نمایید.

پ) امید ریاضی و واریانس متغیر $Y = e^Z$ را بیابید. (به این متغیر، $lognormal$ گفته می‌شود)

پاسخ.

الف)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t) = E[e^{tZ}] &= \int e^{tz} * \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{z^۲}{۲}} dz = \int \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{z^۲-۲tz}{۲}} dz \\ &= \int \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(z-t)^۲-t^۲}{۲}} dz = e^{\frac{t^۲}{۲}} \int \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{(z-t)^۲}{۲}} dz \\ &\xrightarrow{y=z-t} = e^{\frac{t^۲}{۲}} \int \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{y^۲}{۲}} dy = e^{\frac{t^۲}{۲}}\end{aligned}$$

ب) بسط تیلور تابع $e^{\frac{t^۲}{۲}}$ حول صفر به صورت زیر است:

$$e^t = \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \rightarrow e^{\frac{t^۲}{۲}} = \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(\frac{t^۲}{۲})^m}{m!} = \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{t^{۲m}}{۲^m m!}$$

$$\mathcal{M}^{(n)}(t) = \sum_{m=\lceil n/۲ \rceil}^{\infty} \frac{(۲m)! t^{۲m-n}}{۲^m (۲m-n)! m!}$$

$$E[Z^n] = \mathcal{M}^{(n)}(۰) = \begin{cases} \frac{(۲k)!}{۲^k k!} & : n = ۲k \\ ۰ & : n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

پ)

$$y = g(z) = e^z \rightarrow z = g^{-۱}(y) = \log(y)$$

$$f_Y(y) = f_Z(g^{-۱}(y)) \frac{d}{dy}(g^{-۱}(y)) = f_Z(\log(y)) \frac{۱}{y}$$

$$\begin{aligned}E[Y] &= \int y f_Y(y) dy = \int y f_Z(\log(y)) \frac{۱}{y} dy = \int f_Z(\log(y)) dy \\ &\xrightarrow{z=\log(y)} = \int e^z f_Z(z) dz = \mathcal{M}(۱) = e^{\frac{۱}{۲}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E[Y^۲] &= \int y^۲ f_Y(y)dy = \int y^۲ f_Z(\log(y))\frac{۱}{y}dy = \int y f_Z(\log(y))dy \\
&\xrightarrow{z=\log(y)} = \int e^{۲z} f_Z(z)dz = \mathcal{M}(۲) = e^۲
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Var}(Y) = E[Y^۲] - E^۲[Y] = e^۲ - e^۱
$$

$\triangleright$

سؤال ۶. **(اختیاری)** اگر X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین $[۰, ۱]$ باشد، نشان دهید:

$$
E[|X-Y|^\alpha] = \frac{۲}{(\alpha+۱)(\alpha+۲)}
$$

پاسخ.

$$
\begin{aligned}
E[|X-Y|^\alpha] &= \int_۰^۱ \int_۰^۱ |x-y|^\alpha dxdy \\
&= \int_۰^۱ \int_۰^y (y-x)^\alpha dxdy + \int_۰^۱ \int_y^۱ (x-y)^\alpha dxdy \\
&= \int_۰^۱ [\frac{-۱}{\alpha+۱}(y-x)^{\alpha+۱}]_{x=۰}^{y} + [\frac{۱}{\alpha+۱}(x-y)^{\alpha+۱}]_{x=y}^{۱} dy \\
&= \frac{۱}{\alpha+۱}\int_۰^۱ y^{\alpha+۱} + (۱-y)^{\alpha+۱} dy \\
&= \frac{۱}{(\alpha+۱)(\alpha+۲)}[y^{\alpha+۲} - (۱-y)^{\alpha+۲}]_{y=۰}^{۱} \\
&= \frac{۲}{(\alpha+۱)(\alpha+۲)}
\end{aligned}
$$

$\triangleright$

سؤال ۷. سه متغیر تصادفی مستقل $X_۱, X_۲, X_۳$ از توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda_i}$ پیروی می‌کند.

الف) $E[X_۱ + X_۲ + X_۳ | X_۱ > ۱, X_۲ > ۲, X_۳ > ۳]$ را برحسب λ_i ها پیدا کنید.

ب) ثابت کنید $P(X_۱ < X_۲) = \frac{\lambda_۱}{\lambda_۱+\lambda_۲}$

پ) $P(X_۱ = min(X_۱, X_۲, X_۳))$ را بیابید.

پاسخ.

الف) با استفاده از خاصیت خطی بودن امید ریاضی و بی‌حافظه بودن و استقلال متغیرهای تصادفی نمایی داریم:

$$E(X_1|X_1>1)+E(X_2|X_2>2)+E(X_3|X_3>3)=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+6$$

ب) از آنجایی که X_1, X_2 از هم مستقل هستند توزیع توام آنها برابر با:

$$P(X_1=a, X_2=b)=\lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1 a+\lambda_2 b)}$$

پس روی قسمتی از توزیع توام آنها انتگرال می‌گیریم که شرط گفته شده در آن برقرار باشد.

$$\begin{aligned}
P(X_1<X_2) &= \int_0^\infty\int_0^b P(X_1=a, X_2=b)dadb \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 b}\int_0^b \lambda_1 e^{-\lambda_1 a}dadb \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 b}(1-e^{\lambda_1 b})db \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 b}db-\int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)b}db \\
&= 1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned}$$

پ) احتمال خواسته شده همان $P(X_1\leq min(X_2, X_3))$ است و $min(X_2, X_3)$ مستقل از X_1 است و برابر $Exp(\lambda_2+\lambda_3)$است.

$$P(X_1\leq min(X_2, X_3))=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

$\triangleright$

سؤال ۸. (اختیاری) فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیر های تصادفی مستقل و $X_i\sim Exponential(\lambda)$ باشند.

$$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

$E[Y]$ را برحسب λ و n مستقیما از توزیع Y حساب کنید .

پاسخ.
جمع n متغیر های تصادفی نمایی با پارامتر λ معادل متغیر تصادفی $Y\sim Gamma(n,\lambda)$ است. (اثبات)

پس باید امید ریاضی گاما را حساب کنیم.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{۰}^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= \int_{۰}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-۱} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_{۰}^{\infty} x \cdot x^{n-۱} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_{۰}^{\infty} x^{n} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n+۱)}{\lambda^{n+۱}} \\
&= \frac{n\Gamma(n)}{\lambda\Gamma(n)} \\
&= \frac{n}{\lambda}.
\end{aligned}$$

$\triangleright$

سؤال ۹. اگر توزیع قد بازیکنان والیبال از توزیع نرمال با میانگین ۱۹۷/۵ تبعیت کند و ۹۵ درصد بازیکنان بین ۱۸۵ تا ۲۱۰ سانتی‌متر باشند، با استفاده از جدول احتمال توزیع نرمال استاندارد (جدول ۱) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) انحراف معیار این توزیع را بیابید.

ب) اگر بازیکن مورد علاقه شما در بین ۱۰ درصد بلندقدترین بازیکنان باشد، حداقل چه قدی دارد؟ (حداقل قد را به صورت بازه‌ای به دست آورید)

پاسخ.

الف)

$$\begin{gathered}
P(۱۸۵ < Y < ۲۱۰) = ۰/۹۵ \\
P(-۱۲/۵ < Y - ۱۹۷/۵ < ۱۲/۵) = ۰/۹۵ \\
P(\frac{-۱۲/۵}{\sigma} < \frac{Y - ۱۹۷/۵}{\sigma} < \frac{۱۲/۵}{\sigma}) = ۰/۹۵ \\
P(۰ < \frac{Y - ۱۹۷/۵}{\sigma} < \frac{۱۲/۵}{\sigma}) = ۰/۴۷۵ \\
\xrightarrow{\text{طبق جدول}} z = ۱/۹۶ = \frac{۱۲/۵}{\sigma} \rightarrow \sigma = ۶/۳۸
\end{gathered}$$

ب)

$$P(Y > y) = ۰/۱ \rightarrow P(Y < y) = ۰/۹$$
$$P(\frac{Y - ۱۹۷/۵}{۶/۳۸} < \frac{y - ۱۹۷/۵}{۶/۳۸}) = ۰/۹$$
$$\xrightarrow{\text{بزرگتر از میانگین است } y} P(۰ < \frac{Y - ۱۹۷/۵}{۶/۳۸} < \frac{y - ۱۹۷/۵}{۶/۳۸}) = ۰/۴$$
$$\xrightarrow{\text{طبق جدول}} ۱/۲۸ < z < ۱/۲۹ \rightarrow ۱/۲۸ < \frac{y - ۱۹۷/۵}{۶/۳۸} < ۱/۲۹ \rightarrow$$
$$۸/۱۶۶۴ < (y - ۱۹۷/۵) < ۸/۲۳۰۲ \rightarrow ۲۰۵/۶۶۶۴ < y < ۲۰۵/۷۳۰۲$$

این بازیکن حداقل بین [۲۰۵/۶۷, ۲۰۵/۷۳] قد دارد.

▷

سؤال ۱۰. گزارش سوال عملی

موفق باشید

جدول ۱: جدول احتمال توزیع نرمال استاندارد ـ $P(0 < Z < z)$ [1]

z	+۰/۰۰	+۰/۰۱	+۰/۰۲	+۰/۰۳	+۰/۰۴	+۰/۰۵	+۰/۰۶	+۰/۰۷	+۰/۰۸	+۰/۰۹
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۳۹۹	۰/۰۰۷۹۸	۰/۰۱۱۹۷	۰/۰۱۵۹۵	۰/۰۱۹۹۴	۰/۰۲۳۹۲	۰/۰۲۷۹۰	۰/۰۳۱۸۸	۰/۰۳۵۸۶
۰/۱	۰/۰۳۹۸۳	۰/۰۴۳۸۰	۰/۰۴۷۷۶	۰/۰۵۱۷۲	۰/۰۵۵۶۷	۰/۰۵۹۶۲	۰/۰۶۳۵۶	۰/۰۶۷۴۹	۰/۰۷۱۴۲	۰/۰۷۵۳۵
۰/۲	۰/۰۷۹۲۶	۰/۰۸۳۱۷	۰/۰۸۷۰۶	۰/۰۹۰۹۵	۰/۰۹۴۸۳	۰/۰۹۸۷۱	۰/۱۰۲۵۷	۰/۱۰۶۴۲	۰/۱۱۰۲۶	۰/۱۱۴۰۹
۰/۳	۰/۱۱۷۹۱	۰/۱۲۱۷۲	۰/۱۲۵۵۲	۰/۱۲۹۳۰	۰/۱۳۳۰۷	۰/۱۳۶۸۳	۰/۱۴۰۵۸	۰/۱۴۴۳۱	۰/۱۴۸۰۳	۰/۱۵۱۷۳
۰/۴	۰/۱۵۵۴۲	۰/۱۵۹۱۰	۰/۱۶۲۷۶	۰/۱۶۶۴۰	۰/۱۷۰۰۳	۰/۱۷۳۶۴	۰/۱۷۷۲۴	۰/۱۸۰۸۲	۰/۱۸۴۳۹	۰/۱۸۷۹۳
۰/۵	۰/۱۹۱۴۶	۰/۱۹۴۹۷	۰/۱۹۸۴۷	۰/۲۰۱۹۴	۰/۲۰۵۴۰	۰/۲۰۸۸۴	۰/۲۱۲۲۶	۰/۲۱۵۶۶	۰/۲۱۹۰۴	۰/۲۲۲۴۰
۰/۶	۰/۲۲۵۷۵	۰/۲۲۹۰۷	۰/۲۳۲۳۷	۰/۲۳۵۶۵	۰/۲۳۸۹۱	۰/۲۴۲۱۵	۰/۲۴۵۳۷	۰/۲۴۸۵۷	۰/۲۵۱۷۵	۰/۲۵۴۹۰
۰/۷	۰/۲۵۸۰۴	۰/۲۶۱۱۵	۰/۲۶۴۲۴	۰/۲۶۷۳۰	۰/۲۷۰۳۵	۰/۲۷۳۳۷	۰/۲۷۶۳۷	۰/۲۷۹۳۵	۰/۲۸۲۳۰	۰/۲۸۵۲۴
۰/۸	۰/۲۸۸۱۴	۰/۲۹۱۰۳	۰/۲۹۳۸۹	۰/۲۹۶۷۳	۰/۲۹۹۵۵	۰/۳۰۲۳۴	۰/۳۰۵۱۱	۰/۳۰۷۸۵	۰/۳۱۰۵۷	۰/۳۱۳۲۷
۰/۹	۰/۳۱۵۹۴	۰/۳۱۸۵۹	۰/۳۲۱۲۱	۰/۳۲۳۸۱	۰/۳۲۶۳۹	۰/۳۲۸۹۴	۰/۳۳۱۴۷	۰/۳۳۳۹۸	۰/۳۳۶۴۶	۰/۳۳۸۹۱
۱/۰	۰/۳۴۱۳۴	۰/۳۴۳۷۵	۰/۳۴۶۱۴	۰/۳۴۸۴۹	۰/۳۵۰۸۳	۰/۳۵۳۱۴	۰/۳۵۵۴۳	۰/۳۵۷۶۹	۰/۳۵۹۹۳	۰/۳۶۲۱۴
۱/۱	۰/۳۶۴۳۳	۰/۳۶۶۵۰	۰/۳۶۸۶۴	۰/۳۷۰۷۶	۰/۳۷۲۸۶	۰/۳۷۴۹۳	۰/۳۷۶۹۸	۰/۳۷۹۰۰	۰/۳۸۱۰۰	۰/۳۸۲۹۸
۱/۲	۰/۳۸۴۹۳	۰/۳۸۶۸۶	۰/۳۸۸۷۷	۰/۳۹۰۶۵	۰/۳۹۲۵۱	۰/۳۹۴۳۵	۰/۳۹۶۱۷	۰/۳۹۷۹۶	۰/۳۹۹۷۳	۰/۴۰۱۴۷
۱/۳	۰/۴۰۳۲۰	۰/۴۰۴۹۰	۰/۴۰۶۵۸	۰/۴۰۸۲۴	۰/۴۰۹۸۸	۰/۴۱۱۴۹	۰/۴۱۳۰۸	۰/۴۱۴۶۶	۰/۴۱۶۲۱	۰/۴۱۷۷۴
۱/۴	۰/۴۱۹۲۴	۰/۴۲۰۷۳	۰/۴۲۲۲۰	۰/۴۲۳۶۴	۰/۴۲۵۰۷	۰/۴۲۶۴۷	۰/۴۲۷۸۵	۰/۴۲۹۲۲	۰/۴۳۰۵۶	۰/۴۳۱۸۹
۱/۵	۰/۴۳۳۱۹	۰/۴۳۴۴۸	۰/۴۳۵۷۴	۰/۴۳۶۹۹	۰/۴۳۸۲۲	۰/۴۳۹۴۳	۰/۴۴۰۶۲	۰/۴۴۱۷۹	۰/۴۴۲۹۵	۰/۴۴۴۰۸
۱/۶	۰/۴۴۵۲۰	۰/۴۴۶۳۰	۰/۴۴۷۳۸	۰/۴۴۸۴۵	۰/۴۴۹۵۰	۰/۴۵۰۵۳	۰/۴۵۱۵۴	۰/۴۵۲۵۴	۰/۴۵۳۵۲	۰/۴۵۴۴۹
۱/۷	۰/۴۵۵۴۳	۰/۴۵۶۳۷	۰/۴۵۷۲۸	۰/۴۵۸۱۸	۰/۴۵۹۰۷	۰/۴۵۹۹۴	۰/۴۶۰۸۰	۰/۴۶۱۶۴	۰/۴۶۲۴۶	۰/۴۶۳۲۷
۱/۸	۰/۴۶۴۰۷	۰/۴۶۴۸۵	۰/۴۶۵۶۲	۰/۴۶۶۳۸	۰/۴۶۷۱۲	۰/۴۶۷۸۴	۰/۴۶۸۵۶	۰/۴۶۹۲۶	۰/۴۶۹۹۵	۰/۴۷۰۶۲
۱/۹	۰/۴۷۱۲۸	۰/۴۷۱۹۳	۰/۴۷۲۵۷	۰/۴۷۳۲۰	۰/۴۷۳۸۱	۰/۴۷۴۴۱	۰/۴۷۵۰۰	۰/۴۷۵۵۸	۰/۴۷۶۱۵	۰/۴۷۶۷۰
۲/۰	۰/۴۷۷۲۵	۰/۴۷۷۷۸	۰/۴۷۸۳۱	۰/۴۷۸۸۲	۰/۴۷۹۳۲	۰/۴۷۹۸۲	۰/۴۸۰۳۰	۰/۴۸۰۷۷	۰/۴۸۱۲۴	۰/۴۸۱۶۹
۲/۱	۰/۴۸۲۱۴	۰/۴۸۲۵۷	۰/۴۸۳۰۰	۰/۴۸۳۴۱	۰/۴۸۳۸۲	۰/۴۸۴۲۲	۰/۴۸۴۶۱	۰/۴۸۵۰۰	۰/۴۸۵۳۷	۰/۴۸۵۷۴
۲/۲	۰/۴۸۶۱۰	۰/۴۸۶۴۵	۰/۴۸۶۷۹	۰/۴۸۷۱۳	۰/۴۸۷۴۵	۰/۴۸۷۷۸	۰/۴۸۸۰۹	۰/۴۸۸۴۰	۰/۴۸۸۷۰	۰/۴۸۸۹۹
۲/۳	۰/۴۸۹۲۸	۰/۴۸۹۵۶	۰/۴۸۹۸۳	۰/۴۹۰۱۰	۰/۴۹۰۳۶	۰/۴۹۰۶۱	۰/۴۹۰۸۶	۰/۴۹۱۱۱	۰/۴۹۱۳۴	۰/۴۹۱۵۸
۲/۴	۰/۴۹۱۸۰	۰/۴۹۲۰۲	۰/۴۹۲۲۴	۰/۴۹۲۴۵	۰/۴۹۲۶۶	۰/۴۹۲۸۶	۰/۴۹۳۰۵	۰/۴۹۳۲۴	۰/۴۹۳۴۳	۰/۴۹۳۶۱
۲/۵	۰/۴۹۳۷۹	۰/۴۹۳۹۶	۰/۴۹۴۱۳	۰/۴۹۴۳۰	۰/۴۹۴۴۶	۰/۴۹۴۶۱	۰/۴۹۴۷۷	۰/۴۹۴۹۲	۰/۴۹۵۰۶	۰/۴۹۵۲۰
۲/۶	۰/۴۹۵۳۴	۰/۴۹۵۴۷	۰/۴۹۵۶۰	۰/۴۹۵۷۳	۰/۴۹۵۸۵	۰/۴۹۵۹۸	۰/۴۹۶۰۹	۰/۴۹۶۲۱	۰/۴۹۶۳۲	۰/۴۹۶۴۳
۲/۷	۰/۴۹۶۵۳	۰/۴۹۶۶۴	۰/۴۹۶۷۴	۰/۴۹۶۸۳	۰/۴۹۶۹۳	۰/۴۹۷۰۲	۰/۴۹۷۱۱	۰/۴۹۷۲۰	۰/۴۹۷۲۸	۰/۴۹۷۳۶
۲/۸	۰/۴۹۷۴۴	۰/۴۹۷۵۲	۰/۴۹۷۶۰	۰/۴۹۷۶۷	۰/۴۹۷۷۴	۰/۴۹۷۸۱	۰/۴۹۷۸۸	۰/۴۹۷۹۵	۰/۴۹۸۰۱	۰/۴۹۸۰۷
۲/۹	۰/۴۹۸۱۳	۰/۴۹۸۱۹	۰/۴۹۸۲۵	۰/۴۹۸۳۱	۰/۴۹۸۳۶	۰/۴۹۸۴۱	۰/۴۹۸۴۶	۰/۴۹۸۵۱	۰/۴۹۸۵۶	۰/۴۹۸۶۱
۳/۰	۰/۴۹۸۶۵	۰/۴۹۸۶۹	۰/۴۹۸۷۴	۰/۴۹۸۷۸	۰/۴۹۸۸۲	۰/۴۹۸۸۶	۰/۴۹۸۸۹	۰/۴۹۸۹۳	۰/۴۹۸۹۶	۰/۴۹۹۰۰
۳/۱	۰/۴۹۹۰۳	۰/۴۹۹۰۶	۰/۴۹۹۱۰	۰/۴۹۹۱۳	۰/۴۹۹۱۶	۰/۴۹۹۱۸	۰/۴۹۹۲۱	۰/۴۹۹۲۴	۰/۴۹۹۲۶	۰/۴۹۹۲۹
۳/۲	۰/۴۹۹۳۱	۰/۴۹۹۳۴	۰/۴۹۹۳۶	۰/۴۹۹۳۸	۰/۴۹۹۴۰	۰/۴۹۹۴۲	۰/۴۹۹۴۴	۰/۴۹۹۴۶	۰/۴۹۹۴۸	۰/۴۹۹۵۰
۳/۳	۰/۴۹۹۵۲	۰/۴۹۹۵۳	۰/۴۹۹۵۵	۰/۴۹۹۵۷	۰/۴۹۹۵۸	۰/۴۹۹۶۰	۰/۴۹۹۶۱	۰/۴۹۹۶۲	۰/۴۹۹۶۴	۰/۴۹۹۶۵
۳/۴	۰/۴۹۹۶۶	۰/۴۹۹۶۸	۰/۴۹۹۶۹	۰/۴۹۹۷۰	۰/۴۹۹۷۱	۰/۴۹۹۷۲	۰/۴۹۹۷۳	۰/۴۹۹۷۴	۰/۴۹۹۷۵	۰/۴۹۹۷۶
۳/۵	۰/۴۹۹۷۷	۰/۴۹۹۷۸	۰/۴۹۹۷۸	۰/۴۹۹۷۹	۰/۴۹۹۸۰	۰/۴۹۹۸۱	۰/۴۹۹۸۱	۰/۴۹۹۸۲	۰/۴۹۹۸۳	۰/۴۹۹۸۳
۳/۶	۰/۴۹۹۸۴	۰/۴۹۹۸۵	۰/۴۹۹۸۵	۰/۴۹۹۸۶	۰/۴۹۹۸۶	۰/۴۹۹۸۷	۰/۴۹۹۸۷	۰/۴۹۹۸۸	۰/۴۹۹۸۸	۰/۴۹۹۸۹
۳/۷	۰/۴۹۹۸۹	۰/۴۹۹۹۰	۰/۴۹۹۹۰	۰/۴۹۹۹۰	۰/۴۹۹۹۱	۰/۴۹۹۹۱	۰/۴۹۹۹۲	۰/۴۹۹۹۲	۰/۴۹۹۹۲	۰/۴۹۹۹۲
۳/۸	۰/۴۹۹۹۳	۰/۴۹۹۹۳	۰/۴۹۹۹۳	۰/۴۹۹۹۴	۰/۴۹۹۹۴	۰/۴۹۹۹۴	۰/۴۹۹۹۴	۰/۴۹۹۹۵	۰/۴۹۹۹۵	۰/۴۹۹۹۵
۳/۹	۰/۴۹۹۹۵	۰/۴۹۹۹۵	۰/۴۹۹۹۶	۰/۴۹۹۹۶	۰/۴۹۹۹۶	۰/۴۹۹۹۶	۰/۴۹۹۹۶	۰/۴۹۹۹۶	۰/۴۹۹۹۷	۰/۴۹۹۹۷
۴/۰	۰/۴۹۹۹۷	۰/۴۹۹۹۷	۰/۴۹۹۹۷	۰/۴۹۹۹۷	۰/۴۹۹۹۷	۰/۴۹۹۹۷	۰/۴۹۹۹۸	۰/۴۹۹۹۸	۰/۴۹۹۹۸	۰/۴۹۹۹۸

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table