



## سوالات

### مسئله‌ی ۱. اولیش

#### الف

در چند زیرمجموعه  $k$  عضوی از مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, n\}$  هیچ دو عدد متوالی وجود ندارد؟

#### ب

تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, n\}$  را بیابید که هیچ دو عدد متوالی ندارند.

### مسئله‌ی ۲. عروسی

روز جمعه عروسی علیرضا است و او میخواهد برای روشنایی جلوی خانه، ریشه‌ای شامل ۲۰ لامپ سری را از پارسا قرض بگیرد. تاریخ تولید لامپ‌ها اسفند ۹۹ است و پارسا ادعا دارد که احتمال سالم بودن یک لامپ پس از یک سال،  $0/9$  است، به همین دلیل علیرضا تعدادی لامپ نو نیز خریداری کرده است تا در صورت نیاز لامپ‌های معیوب را جایگزین کند.

#### الف.

احتمال اینکه ریشه بدون تعویض هیچ لامپی روشن شود چقدر است؟

#### ب.

اگر ریشه روشن نشود، یک لامپ را با لامپی نو جایگزین میکنیم. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم تا مشکل برطرف شود. احتمال اینکه پس از ۵ بار تعویض لامپ، ریشه روشن شود چقدر است؟

#### ج.

احتمال اینکه حداکثر پس از ۵ بار تعویض لامپ ریشه روشن شود چقدر است؟

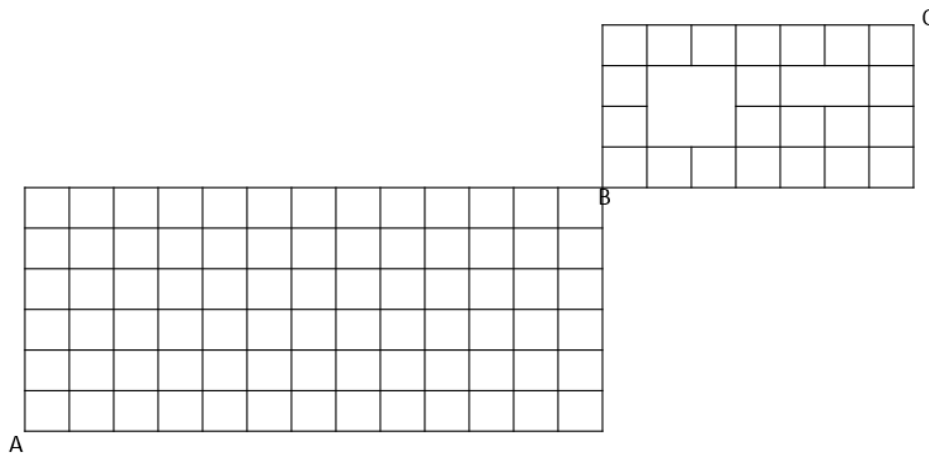
### مسئله‌ی ۳. قشنگ

یک کلمه انگلیسی را قشنگ می‌نامیم اگر کاراکتر تکراری نداشته باشد. بین تمام کلمات انگلیسی قشنگ یک کلمه را

تصادفی یکنواخت انتخاب کرده‌ایم. نشان دهید احتمال اینکه کلمه انتخاب شده شامل هر ۲۶ حرف انگلیسی باشد تقریباً  $\frac{1}{e}$  است. (دقت کنید که منظور از کلمه، رشته‌ای نه لزوماً با معنی از ۲۶ حرف انگلیسی است.)

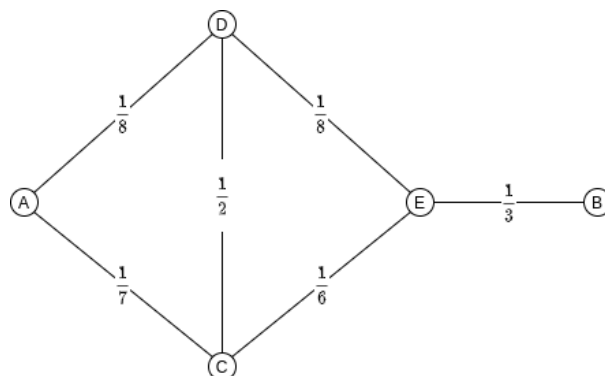
#### مسئله‌ی ۴. خرگوش احمق

خرگوشی می‌خواهد در نقشه زیر از نقطه A به C برود. خرگوش بر اساس تجربه میدانند اگر فقط به بالا یا راست برود، زودتر به مقصد میرسد به همین دلیل در هر قدم یک خانه به سمت راست یا به سمت بالا حرکت میکند. همان گونه که از نقشه مشخص است، خرگوش در صورت رسیدن به بعضی نقاط، فقط یک انتخاب برای قدم بعدی دارد. خرگوش به چند طریق مختلف ممکن است این مسیر را طی کند؟



#### مسئله‌ی ۵. مخابرات

در یک شبکه مخابراتی تعدادی آنتن داریم که بعضی‌شان با هم ارتباط دارند. ارتباطات آنها در شکل زیر نشان داده شده است. روی هر یال احتمال خراب بودن آن در یک روز نوشته شده است. احتمال اینکه A بتواند با B در یک روز ارتباط برقرار کند را به دست آورید.



#### مسئله‌ی ۶. ژنتیک بزی

گونه‌ای از بزه‌ای کمیاب دو ژن دارند که هر کدام از یکی از والدینش به ارث میرسد. هر کدام از ژن‌ها از مجموعه  $\{A, O\}$  هستند. بزهایی که  $\{A, A\}$  یا  $\{A, O\}$  هستند، گروه خونی A دارند و  $\{O, O\}$  ها گروه خونی O دارند. لوسی و پدر و مادرش هر سه از گروه خونی A هستند ولی خواهر لوسی گروه خونی O دارد.

الف.

احتمال اینکه لوسی ژن  $O$  داشته باشد چقدر است؟

ب.

لوسی با بز نری با گروه خونی  $O$  ازدواج میکند. احتمال اینکه بچه اول آنها از گروه خونی  $O$  باشد، چقدر است؟

ج.

اگر بچه‌ی اول آنها از گروه خونی  $A$  باشد، احتمال اینکه لوسی ژن  $O$  داشته باشد چقدر است؟

د.

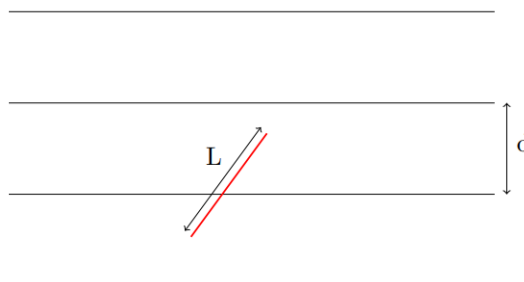
اگر بچه اول آنها از گروه خونی  $A$  باشد، احتمال اینکه بچه دوم آنها هم از همین گروه خونی باشد چقدر است؟

### مسئله‌ی ۷. رخنه

در یک برج ۲۰ طبقه، ۱۰۰ نفر از کارکنان یک شرکت مستقر هستند. به جز نگهبان در اصلی که آبی می‌پوشد، همه کارکنان با لباس سبز در شرکت حاضر می‌شوند. شب گذشته یک اقدام خرابکارانه در اتاق سرور صورت گرفت و برخی از اطلاعات برای عموم مردم فاش شد. آبدارچی ادعا می‌کند که فردی با لباس آبی را در حین ورود به اتاق سرور مشاهده کرده است. کارمندان شرکت با این سخنان آبدارچی، به نگهبان مشکوک می‌شوند. اما مدیر عامل به او فرصت دفاع می‌دهد. نگهبان هم ادعای بی‌گناهی می‌کند و با استخدام یک متخصص آمار و احتمالات، از او می‌خواهد که توانایی آبدارچی در تشخیص رنگ های سبز و آبی را بررسی نماید. داده‌هایی که متخصص جمع‌آوری می‌کند، نشان می‌دهند که آبدارچی در ۹۹ درصد موارد، رنگ پیراهن افرادی را که آبی پوشیده‌اند، آبی و در ۲ درصد مواقع، رنگ پیراهن افرادی را که سبز پوشیده‌اند، به عنوان آبی تشخیص می‌دهد. آیا با توجه به این آمار و ارقام، راهی وجود دارد که نگهبان بتواند استدلالی احتمالاتی مبنی بر کم‌اعتبار بودن حرف‌های آبدارچی بیاورد؟

### مسئله‌ی ۸. سوزن

سوزنی را به طول  $L$  را روی کاغذی خط کشی شده که فاصله‌ی خطوط آن  $d > L$  است می‌اندازیم. احتمال اینکه سوزن خطی را قطع کند چیست؟ (فرض کنید کلیه‌ی مکان‌های مرکز سوزن و کلیه‌ی جهت‌های قرار گرفتن سوزن متساوی‌الاحتمال باشند).



خنده بر لب می‌زنم تا کس نداند راز من  
ورنه این دنیا که ما دیدیم، خندیدن نداشت