



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱
مدرس: مهدی جعفری	تمرین سری پنجم
	موعد تحویل: ۹ خرداد ۱۴۰۱

سؤال ۱ X و Y دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت در بازه $(0, 1)$ هستند. احتمال اینکه نزدیک‌ترین عدد صحیح به $\frac{X}{Y}$ زوج باشد را محاسبه کنید. حاصل را به صورت $a\pi + b$ که a و b عدد حقیقی هستند، بنویسید.
راهنمایی: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

سؤال ۲ متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $i.i.d$ و دارای توزیع یکنواخت روی $[0, 1]$ هستند. متغیرهای Z و W را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z = X + Y, W = X - Y$$

الف) آیا W و Z از یکدیگر مستقل هستند؟
ب) اگر W و Z دارای توزیع گاوسی استاندارد باشند چطور؟ (امتیازی)

سؤال ۳ ثابت کنید متغیرهای X_1, \dots, X_n مستقلند اگر و تنها اگر تابع توزیع توأم آن‌ها به شکل زیر قابل بیان باشد.

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$$

سؤال ۴ X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

می‌دانیم به شرط $X = x$ ، متغیر Y دارای توزیع یکنواخت روی بازه $[-x, x]$ است.

الف) تابع چگالی احتمال مشترک X, Y را به دست آورید.

ب) تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی Y را بیابید.

پ) مقدار $\mathbb{P}(|Y| < X^3)$ را به دست آورید.

سؤال ۵ X و Y دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت در بازه $(0, 1)$ هستند. واریانس فاصله $|X - 0.5|$ و $2Y$ را بیابید.

سؤال ۶ نقطه (X, Y, Z) به صورت یکنواخت از درون کره به شعاع r انتخاب شده است.

- الف) تابع چگالی احتمال توأم سه متغیر X, Y, Z را به دست آورید.
- ب) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر X, Y را به دست آورید.
- پ) انتگرالی را که بیانگر توزیع حاشیه ای متغیر X باشد، بنویسید. (نیازی به محاسبه این انتگرال نیست).

سؤال ۷) تابع توزیع توأم X, Y به شرح زیر داده شده است. توزیع متغیرهای خواسته شده را بیابید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف) $X + Y$

ب) XY

پ) Y/X

ت) $Y - X$

سؤال ۸) تابع چگالی توأم X, Y به صورت زیر داده شده است. مقدار C را بیابید. ($0 \leq y$ و $-y \leq x \leq y$)

$$f(x, y) = C(x^2 - y^2)e^{-y}$$

سؤال ۹) دو آزمایش انجام شده است و نتایج نهایی به صورت X و Y گزارش شده اند. می دانیم X و Y مستقل هستند و از توزیع نرمال استاندارد پیروی می کنند. همبستگی (*correlation*) متغیر تصادفی $\max(2X, Y)$ و متغیر تصادفی $\min(2X, Y)$ را بدست آورید. همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y به صورت روبرو تعریف می شود: $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

موفق باشید