دانشکده مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	بهار ۱۴۰۳
تمرین سری سوم	
مدرس درس: مهدی جعفری	سررسید تحویل: جمعه ۱۴ اردیبهشت ۱۴۰۳

توجه: برای موارد مشخص شده با رنگ آبی نیازی به ارائه پاسخ نیست و به آن‌ها نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد. این موارد صرفا جهت تمرین و آمادگی بیشتر ارائه شده‌اند.

سؤال ۱ متغیر های X و Y را با توزیع چگالی مشترک زیر در نظر بگیرید:

$$f(x,y) = cx(y-x)e^{-y}, \quad 0 \leq x \leq y < \infty$$

الف) عدد c را بیابید.

ب) نشان دهید که:

$$f_{X|Y}(x|y) = 6x(y-x)y^{-3}, \quad 0 \leq x \leq y$$

$$f_{Y|X}(y|x) = (y-x)e^{x-y}, \quad 0 \leq x \leq y < \infty$$

ج) استدلال کنید که $\mathbb{E}[X|Y] = \frac{1}{2}Y$ و اینکه $\mathbb{E}[Y|X] = X + 2$

سؤال ۲ نشان دهید $\mathrm{Var}(X) = 0$ اگر و تنها اگر $P(X=c) = 1$ که c یک عدد ثابت است.

سؤال ۳ فرض کنید علیرضا فیروزجا در کل طول فعالیتش $N \sim Geom(s)$ بازی شطرنج انجام می‌دهد و در هر یک از بازی‌ها با احتمال p مستقل از بازی‌های قبلی یا بعدی برنده می‌شود. متغیر تصادفی T را تعداد بردهای علیرضا در کل فعلایتش تعریف می‌کنیم:

الف) میانگین و واریانس متغیر T را بیابید.

ب) تابع مولد گشتاور T را پیدا کنید.

ج) با توجه به تابع مولد بدست آمده توزیع T و پارامترش را بیان کرده و توجیه شهودی درباره تابعیتش از این توزیع ارائه کنید.

سؤال ۴ متغیر های مستقل $X_{۱}, X_{۲}, \ldots$ را با توزیع یکسان و تابع چگالی احتمال $f : \mathbb{R} \to [۰, \infty)$ در نظر بگیرید. به اندیس r یک زمان رکورد می‌گویند اگر داشته باشیم : $X_r > max\{X_{۱}, X_{۲}, ..., X_r - ۱\}$. همچنین زمان $r = ۱$ را پیشفرض زمان رکورد می‌گیریم. رویداد A_r را زمان رکورد بودن r تعریف می‌کنیم. نشان دهید:

الف) A_r ها مستقل و دارای احتمال $r^{-۱}$ هستند.

ب) اگر R_n را تعداد زمان‌های رکورد تا ثانیه n تعریف کنیم، نشان دهید واریانس R_n رابطه زیر است:

$$var(R_n) = \sum_{r=۱}^{n} (r^{-۱} + r^{-۲})$$

ج) اگر اولین زمان رکورد بعد از $r = ۱$ را با متغیر تصادفی T نشان دهیم نتیجه بگیرید که : $\mathbb{E}[T] = \infty$

سؤال ۵ برای متغیرهای تصادفی پیوسته روابط زیر را ثابت کنید:

الف) $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y, Z]|Y]$

ب) $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))^{۲}] \leq (۱ - cor(X, Y)^{۲})var(Y)$

ج) اگر $p > q \geq ۱$ داریم: $\mathbb{E}[X^p] < \infty \to \mathbb{E}[X^q] < \infty$.

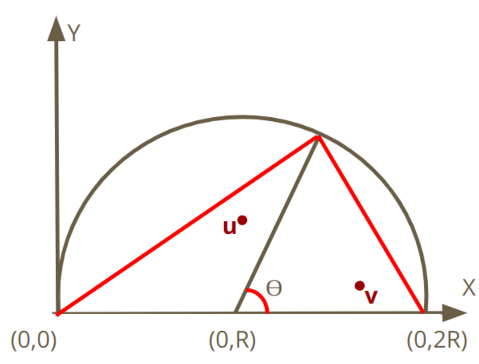
د) $\mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|Z]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z]Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z]\mathbb{E}[Y|Z]]$

سؤال ۶ (امتیازی) نیم‌دایره‌ای به مرکز $O = (۰, R)$ در ناحیه اول مختصات و دو نقطه $A = (۰, ۰)$ و $B = (۰, ۲R)$ را در نظر بگیرید. حال با زاویه $\theta \sim Unif(۰, \pi)$ نقطه دیگر C را روی محیط انتخاب می‌کنیم و این به ما مثلث تصادفی ABC را می‌دهد. سپس به‌طور هم‌شانس و مستقل ۲ نقطه $\vec{u} = (u_{۱}, u_{۲}), \vec{v} = (v_{۱}, v_{۲})$ را درون مثلث ایجاد شده انتخاب می‌کنیم. میخواهیم ببینیم به طور متوسط طول پاره‌خط وصل کننده این دو نقطه چقدر خواهد بود.

الف) تابع چگالی شرطی $f_{u_{۱}, u_{۲}, v_{۱}, v_{۲}|\theta}(u_{۱}, u_{۲}, v_{۱}, v_{۲}|\theta)$ را بدست آورید.

ب) تابع $g(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u} - \vec{v}||_{۲}^{۲} = (u_{۱} - v_{۱})^{۲} + (u_{۲} - v_{۲})^{۲}$ توان دوم فاصله دو نقطه است. $\mathbb{E}[g(\vec{u}, \vec{v})]$ را بدست آورید.

ج) فاصله دو نقطه $\vec{u}, \vec{v}$ برابر با $\sqrt{g(\vec{u}, \vec{v})}$ است. با توجه به مقعر بودن این رابطه بازه‌ای برای $\mathbb{E}[\sqrt{g(\vec{u}, \vec{v})}]$ مشخص کرده و سپس با محاسبه آن به طور مستقیم فاصله‌اش را با این حد بسنجید.



موفق باشید