



نکات مهم

- پاسخ های نظری خود را در قالب یک فایل pdf با اسم `HW#_[STD-Num]` در بخش مختص به خود در کوئرا آپلود کنید. پاسخ های عملی را نیز با نامی مشابه، ولی با فرمت zip در بخش مختص خود آپلود کنید.
- تنها سوالات ستاره دار تمرین، نیاز به تحویل دارند. نوشتن پاسخ های نظری، هم به صورت تایپی و هم دست نویس، مقبول است. پاسخ های عملی باید در زبان R نوشته شوند.
- سوالات پرسیده شده در خصوص تمرین در شبکه های اجتماعی، به هیچ عنوان پاسخ داده نخواهند شد؛ تنها مکان مجاز رفع اشکال در خصوص تمرین، بخش پرسش ها و پاسخ ها در کوئرا است.
- زمان تحویل تمرین، به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد، بنابراین لازم است که زمان خود را برای انجام تمرین مدیریت کرده و آن را به روزهای پایانی موکول نکنید.
- امکان بارگذاری تمرین در کوئرا تا ۷۲ ساعت پس از ددلاین تمرین وجود دارد، اما به ازای هر ساعت تاخیر، یک درصد از نمره ی نهایی تمرین را از دست خواهید داد. دقیقه ها و ثانیه ها، رو به بالا گرد خواهند شد؛ مثلاً، یک ساعت و نیم تاخیر، معادل دو ساعت تاخیر محسوب می شود.
- در طول ترم، ۲۴۰ ساعت کوپن تاخیر خواهید داشت و با استفاده از آن ها، می توانید بدون کسر نمره، از تاخیرها استفاده کنید. جریمه ی تاخیرها، از تمرینی محاسبه می شوند که در آن، کوپن ها به اتمام رسیده باشند. نمره ی امتیازی برای اشخاصی که مجموع تاخیرهای ایشان در کل ترم، کم تر از ۲۴۰ ساعت باشد، به هیچ عنوان در نظر گرفته نمی شود.
- مشورت در تمرین ها مجاز است و توصیه هم می شود، اما هر دانش جو موظف است تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه حل نهایی ارسال شده، باید توسط خود دانش جو نوشته شده باشد. در صورت کشف اولین مورد تقلب هر دانش جو، نمره ی همان تمرین وی، صفر در نظر گرفته شده و در صورت کشف دومین مورد تقلب هر دانش جو، منفی نمره ی کل تمرین ها به وی تعلق خواهد گرفت. برای کسب اطلاعات بیشتر در خصوص آیین نامه ی مشورت و تقلب، می توانید به بخش مربوطه در ویکی دانشکده مراجعه کنید. لازم به ذکر است که این جرایم به هیچ عنوان بخشیده نخواهند شد.

سوالات نظری

مسئله‌ی ۱. حافظه‌سنج

آیا توزیع هندسی، بی‌حافظه است؟ مثبت یا منفی بودن جواب خود را با اثبات بیان کنید.

مسئله‌ی ۲. به توان قهوه *

دو دستگاه قهوه‌ساز، به‌طور مستقل از یک‌دیگر کار می‌کنند. مدت زمانی که دستگاه اول کار می‌کند تا برای اولین بار از کار بیفتد، با متغیر تصادفی $X \sim \exp(\lambda_1)$ و همین مدت زمان برای دستگاه دوم با متغیر تصادفی $X \sim \exp(\lambda_2)$ مدل می‌شود.

الف) اگر میانگین مدت زمانی که دستگاه اول کار می‌کند برابر با ۱۰۰ روز و میانگین مدت زمانی که دستگاه دوم کار می‌کند برابر با ۸۰ روز باشد، احتمال آن‌که تنها یکی از دو دستگاه تا ۹۵ روز اول خراب نشود را به کمک روابط توزیع نمایی، بیابید.

ب) با فرض $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ ، اگر پس از ۶۰ روز از خرید دستگاه اول، این دستگاه خراب نشده باشد، احتمال آنکه ۱۲۰ روز پس از خرید نیز دستگاه خراب نشده باشد را پیدا کنید.

ج) طبق بررسی‌های انجام شده، تعداد افرادی که تا زمان t از دستگاه قهوه‌ساز استفاده می‌کنند، با متغیر تصادفی $Z \sim \text{Poisson}(\lambda_3)$ مدل می‌شود. متغیر تصادفی A را برابر فاصله‌ی بین ورود افراد برای دریافت قهوه تعریف می‌کنیم. توزیع A را پیدا کرده و پارامتر(ها)ی آن را مشخص کنید. (در این قسمت، تنها یک قهوه‌ساز داریم. هم‌چنین، فرض کنید که در این قسمت، قهوه‌ساز هیچ‌گاه خراب نمی‌شود.)

مسئله‌ی ۳. کلی کلید *

فرض کنید n نفر هنگام ورود به یک مهمانی، کلید خود را درون یک جعبه می‌اندازند و در نهایت هنگام خروج، هر کدام یک کلید را به تصادف بر می‌دارند. امید ریاضی تعداد افرادی که کلید خودشان را بر می‌دارند را به دست آورید. (راهنمایی: می‌توانید از متغیرهای تصادفی شاخص استفاده کنید)

مسئله‌ی ۴. سلف یا لابی؟ *

توجه: قسمت (الف)، تحویلی بوده و قسمت (ب)، غیر تحویلی است.

پس از بازگشایی دانشگاه، تعداد افرادی که تا قبل از ظهر به ساختمان‌های شلوغ وارد می‌شوند، مورد بررسی قرار گرفته است. طبق نتایج بررسی‌ها، تعداد دانش‌جویانی که به سلف دانشگاه می‌روند با متغیر تصادفی S مدل می‌شود که از توزیع $\text{Poisson}(\lambda_1)$ پیروی می‌کند و تعداد دانش‌جویانی که به لابی دانشکده می‌روند با متغیر تصادفی L مدل می‌شود که از توزیع $\text{Poisson}(\lambda_2)$ پیروی می‌کند. این دو متغیر، مستقل از یک‌دیگر هستند.

الف) (*) در صورتی که بدانیم مجموع افرادی که به لابی و یا سلف رفته‌اند n نفر بوده است، احتمال آن‌که m نفر به سلف رفته باشند را محاسبه کنید. (تحویلی)

راهنمایی: باید احتمال شرطی زیر را محاسبه کنید:

$$P(S = m | S + L = n)$$

بهتر است که ابتدا توزیع مربوط به $S + L$ (یعنی توزیع حاصل از جمع دو متغیر پواسون) را پیدا کنید و سپس با استفاده از آن، حاصل احتمال شرطی بالا را به کمک روابط احتمال شرطی، محاسبه کنید.

ب) آیا می‌توان گفت متغیر تصادفی $Y = L - S$ از توزیع پواسون پیروی می‌کند؟ در صورتی که پاسخ بله است، آن را اثبات کرده و در غیر این صورت، استدلال کافی برای رد آن ارائه کنید. (غیر تحویلی)

مسئله‌ی ۵. بانک عجیب *

حسن - جوانی اهل شهر «فن‌آباد» که از تمرین نخست با او آشنا هستید - در نهایت موفق می‌شود که سری هفتم ساعت هوشمند شرکت مورد علاقه‌اش را بخرد. پس از استفاده از ساعت به مدت چند هفته، وی بسیار به این دستگاه علاقه‌مند شده و تصمیم می‌گیرد که برای استفاده‌ی بهتر از امکانات دستگاه در خارج از خانه، یک نسخه‌ی مجهز به اتصال Cellular از ساعت‌های همان شرکت را خریداری کند، اما در حساب بانکی خود به اندازه‌ی کافی موجودی نداشته و بر آن می‌شود که پول‌های باقی‌مانده نزد خود را در حسابی بانکی با سود مناسب بریزد تا بتواند پس از مدتی، ساعت مورد علاقه‌ی خود را خریداری کند. به این منظور، وی در بانک «فن‌پول» حسابی باز می‌کند.

بانک «فن‌پول»، مقررات عجیبی روی حساب‌های باز شده وضع کرده است؛ پس از گذشت هر روز، به ازای هر حساب افتتاح شده و مستقل از یک‌دیگر، به احتمال $1 - p$ ، یک دلار به موجودی حساب اضافه شده و به احتمال p ، موجودی آن حساب، صفر شده و حساب از بانک حذف می‌شود!

حسن بهتر است پس از گذشت چند روز، پول خود را از بانک بردارد تا قبل از آن که موجودی حسابش صفر شود، بیشینه‌ی میانگین آماری پول را به دست آورد؟ بدون کاستن از کلیت مسئله، می‌توانید فرض کنید که موجودی اولیه‌ی حساب، صفر است،

مسئله‌ی ۶. حافظه‌ی نادقیق

امیر یک برنامه‌ی رایانه‌ای نوشته است که یک عدد تک‌رقمی باینری (صفر یا یک) را دریافت کرده و آن را در خانه‌ای از حافظه، ذخیره می‌کند. امیر، با مشکلات احتمالی کار با اعداد float در برنامه‌های کامپیوتری، آشنا نیست و از این رو، بر حسب عادت غلط خود، متغیری که قرار است عدد ورودی را در خود نگه دارد (در این سوال، آن را X می‌نامیم) را از نوع float تعریف می‌کند. حافظه‌ی به کار رفته در این رایانه، هنگام ذخیره‌سازی اعداد float، به جای مقدار واقعی آن که X است، مقدار $X + Y$ را در خود ذخیره کرده که در آن، Y یک متغیر تصادفی از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 است (می‌توانید X و Y را مستقل از یک‌دیگر فرض کنید).

فرض کنید تابعی به نام f در برنامه‌ی امیر وجود دارد که هنگام چاپ یک عدد ممیز شناور میان صفر و یک به عنوان یک عدد صحیح، اگر آن عدد به ۱ نزدیک‌تر باشد، عدد ۱ و اگر آن عدد به ۰ نزدیک‌تر باشد، عدد ۰ را برمی‌گرداند. امیر از این تابع برای چاپ عدد ورودی - پس از ورودی گرفتن آن - استفاده می‌کند.

الف) اگر کاربر عدد ۰ را وارد کند، چه‌قدر احتمال دارد که عدد ۱ در خروجی چاپ شود؟

ب) اگر X از توزیع برنولی بوده و با احتمال p مقدار آن برابر یک باشد، احتمال آن که عدد چاپ شده با عدد ورودی داده شده توسط کاربر متفاوت باشد را به دست آورید. توجه کنید که لازم است جواب هر دو بخش، تنها بر اساس σ و تابع erf باشد.

مسئله‌ی ۷. رب تمشک *

یک توزیع‌کننده‌ی رب تمشک، هر شیشه رب را به قیمت ۱۰ تومان می‌خرد و به قیمت ۱۵ تومان می‌فروشد. می‌دانیم جنس فروخته شده پس گرفته نمی‌شود و در نتیجه او نمی‌تواند رب‌هایی که خریداری کرده است را به کارخانه بازگرداند؛ هم‌چنین، تمام رب‌هایی که فروخته نشده‌اند، در انتهای روز فاسد شده و دور ریخته می‌شوند. اگر تقاضای روزانه‌ی رب، متغیر تصادفی X با توزیع $Binomial(10, \frac{1}{3})$ باشد، توزیع‌کننده باید حدوداً چند شیشه رب در ابتدای روز بخرد تا بیش‌ترین متوسط مقدار سود را داشته باشد؟

مسئله ۸. تیک تاک

آقای دقیق، دو ساعت مچی دارد. او برای این که زمان را از دست ندهد، بلافاصله پس از این که یکی از ساعت ها از کار بیفتد، ساعت دوم را به کار می اندازد. مدت زمانی که طول می کشد تا ساعت مچی اول خراب شود، با متغیر تصادفی $X \sim \text{Gamma}(\alpha_1, \beta)$ و مدت زمانی که طول می کشد تا ساعت مچی دوم خراب شود، با متغیر تصادفی $Y \sim \text{Gamma}(\alpha_2, \beta)$ مدل می شود. فرض کنید $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ و $\beta = 0.1$.

الف) احتمال آن که در مجموع، ساعت مچی های او بیش از ۱۰ ساعت کار کنند را محاسبه کنید.

ب) در صورتی که بدانیم ساعت مچی های او در مجموع تا به حال ۸ ساعت کار کرده اند، احتمال آن که بیشتر از ۲۰ ساعت کار کنند را محاسبه کنید.

راهنمایی ها:

- بهتر است ابتدا توزیع متغیر تصادفی $X + Y$ را پیدا کنید و سپس با جای گذاری مقادیر پارامترها، به ادامه ی حل بپردازید.

- توزیع گاما، یک توزیع پیوسته در اعداد مثبت است. تابع چگالی احتمال آن مطابق زیر است:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$$

- برای حل این سوال، نیازی به دانستن رابطه ی اصلی تابع گاما ندارید و این رابطه، تنها برای اطلاعات بیشتر شما آورده شده است.

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} s^{a-1} e^{-s} ds$$

- روابط زیر در رابطه با تابع گاما، در حل سوال به شما کمک خواهند کرد:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

$$\Gamma(1) = 1$$

سوالات عملی *

سوالات عملی که تحویل آن ها اجباری است، به صورت یک ژوپیترونوت بوک در کوئرای درس قرار داده شده اند. لازم است این ژوپیترونوت بوک را طبق دستورالعمل های نوشته شده در آن، تکمیل کرده و در کوئرا آن را آپلود کنید.

موفق باشید! (: