



آمار و احتمال مهندسی

۹ تیر ۱۳۹۹

امتحان پایان ترم

استاد: نعیمه امیدوار

سلام، امیدوارم حال همگی شما خوب باشد. قبل از شروع، لطفاً به نکات زیر توجه نمایید:

- امتحان شامل ۶ سؤال بوده و زمان آن ۳ ساعت است.
- امتحان کتاب‌باز، جزوه‌باز، اینترنت‌بسته و مشورت‌بسته است.
- تمام پاسخ‌ها باید همراه با استدلال باشد. آنچه در کلاس اثبات شده نیاز به اثبات ندارد.
- امتحان ۱۲۰ نمره دارد (هر سؤال ۲۰ نمره) که ۲۰ نمره‌ی آن، اضافی است. (بنابراین، در صورت تمایل، می‌توانید یکی از سوالات را به دلخواه خود حذف کنید و فقط به ۵ سؤال پاسخ دهید.)

سؤال ۱ فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ باشد. می‌خواهیم آن را توسط فرآیند زیر کوانتیزه کنیم:

- هنگام دریافت ورودی x مقدار خروجی $q(x) = \frac{1}{n}[nx]$ خواهد بود. (علامت $\lfloor \cdot \rfloor$ بیانگر عملگر جز صحیح (کف) است.) خطای MSE مربوط به کوانتیزاسیون، یعنی $E[(X - q(X))^2]$ ، را محاسبه کنید.

سؤال ۲ در شهری ساحلی، هر روز با احتمال p هوا آفتابی است و با احتمال $1 - p$ ابری. در هر روز، اداره هواشناسی این شهر گزارش می‌دهد که یک «تغییر در هوای شهر» اتفاق افتاده، اگر که هوای آن روز با روز قبل فرق داشته باشد. مثلاً اگر هوای شهر در چند روز متوالی به صورت: «آفتابی، آفتابی، ابری، آفتابی، ابری، ابری، آفتابی» باشد، ۴ تغییر در هوای شهر در این مدت اتفاق افتاده است. اگر n روز متوالی را در نظر بگیریم، امیدریاضی تعداد تغییرها را محاسبه کنید.

سؤال ۳ متغیر تصادفی Y یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر X است در حالی که خود X یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ است. مقدار $\mathbb{P}(X < T \mid Y < S)$ را به شکل عبارتی بر حسب پارامترهای λ, S, T به دست آورید.

سؤال ۴ تابع چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به شکل

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & \text{if } 0 < x, 0 < y \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases} \quad (1)$$

است. اگر $Z = \frac{X}{Y}$ و $W = X + Y$ باشد، تابع چگالی احتمال مشترک Z و W را به دست آورید.

سؤال ۵ در یک پیاده روی دل‌انگیز در عصری تابستانی، شخصی ساعت خود را گم می‌کند. این شخص به یاد دارد که از n خیابان مختلف عبور کرده است. فرض کنید که احتمال اینکه ساعت در خیابان i ام افتاده باشد، برابر با p_i باشد (مثلاً در برخی از خیابان‌ها زمان بیشتری گذرانده یا ...). همچنین، به خاطر ویژگی‌های مختلف خیابان‌ها (نظیر شلوغی و تراکم درختان و ...)، اگر ساعتش در خیابان i ام افتاده باشد، با جستجو کردن آن خیابان، به احتمال q_i می‌تواند منجر به پیدا کردن ساعت بشود. احتمال این را بیابید که ساعت در خیابان j ام باشد، مشروط بر این که در جستجوی خیابان i ام آن را نیافته باشد (هر دو حالت $i = j$ و $i \neq j$ را بررسی کنید).

سؤال ۶ در یک شرکت صنعتی، مطالعه‌ای روی طول مدت همکاری کارمندان با شرکت انجام شده و یک مدل‌سازی احتمالاتی برای این متغیر ارائه شده است. این مدل‌سازی می‌گوید احتمال این که یک کارمند پس از x سال همچنان در شرکت باشد برابر:

$$\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}x}$$

احتمال این که مدت همکاری یک فرد با شرکت بین ۲ تا ۴ سال باشد را حساب کنید. همین‌طور امید ریاضی و واریانس این متغیر را حساب کنید.

موفق باشید