



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

بهار ۱۳۹۹	آمار و احتمال مهندسی
تمرین سوم (امید ریاضی)	
مدرس: نعیمه امیدوار	موعد تحویل: ۲۹ فروردین ۱۳۹۹

توجه: در این سری تمرین، سوالات ۱، ۶ و ۸ اختیاری هستند و پاسخ به آن‌ها نمره‌ای ندارد.

سؤال ۱. فرض کنید در یک پرواز، موتورهای هواپیما به احتمال $1 - p$ خراب می‌شوند و احتمال خرابی هر موتور از موتورهای دیگر مستقل است. اگر یک هواپیما برای پرواز نیاز داشته باشد تا بیشتر از نصف موتورهایش سالم باشند،

الف) به ازای چه مقادیری از p یک هواپیمای پنج موتور را به یک هواپیمای سه موتور ترجیح می‌دهید؟

ب) اگر p را اینفیمم بازه‌ی قسمت قبل بگیریم و چهار هواپیمای دو، سه، چهار و پنج موتور را بفرستیم امید ریاضی تعداد هواپیماهایی که همه‌ی موتورهایشان سالم بمانند را بدست آورید.

سؤال ۲. X را تعداد نقاط ثابت برای یک جایگشت تصادفی از ۱ تا n در نظر بگیرید. با استفاده از امید ریاضی و واریانس X استدلال کنید $x > 1$ تقریباً غیر ممکن است.
(نقطه‌ی ثابت: $f(x) = x$ مثلاً در 321 عدد دو نقطه‌ی ثابت است)

سؤال ۳. برای متغیر تصادفی $X \in N$ است نشان دهید:

$$E[x] = \sum_{i=0}^{\infty} P(x \geq i)$$

سؤال ۴. فرض کنید a, b, c اعداد مثبت و حقیقی هستند ثابت کنید.

$$\frac{a}{\sqrt{8bc + a^2}} + \frac{b}{\sqrt{8ac + b^2}} + \frac{c}{\sqrt{8ab + c^2}} \geq 1$$

راهنمایی: می‌توانید از نامساوی Jensen استفاده کنید.

سؤال ۵. برای متغیر تصادفی دو جمله‌ای X با پارامترهای (n, p) ، نشان دهید:

$$E\left[\frac{1}{1+X}\right] = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$

حد رابطه بالا را به ازای $n \rightarrow \infty$ و $p \rightarrow 0$ ، به طوری که np ثابت بماند، محاسبه کنید. این حد بیانگر چیست؟ (راهنمایی: برای محاسبه حد بالا می توانید از هم‌ارزی برنولی استفاده کنید).

سؤال ۶. در کیسه‌ای تعداد برابری گوی با رنگ‌های آبی و زرد موجود است. دقت کنید که برداشتن گوی از درون این کیسه با جایگذاری همراه است. می‌خواهیم به قدری از این کیسه گوی خارج کنیم تا حداقل یک‌بار گوی به رنگ آبی و حداقل یک‌بار گوی به رنگ زرد مشاهده کرده باشیم. امید ریاضی تعداد دفعاتی که از این کیسه گوی خارج می‌کنیم چقدر است؟

سؤال ۷. ۶ پسر و ۱۰ دختر می‌خواهند در یک صف بایستند. متغیر تصادفی X را تعداد مکان‌هایی در نظر بگیرید که یک پسر و یک دختر کنار هم قرار گرفته باشند. اگر تمام حالات قرارگیری این ۱۶ نفر کنار هم را در نظر بگیریم، امید ریاضی متغیر X را به دست آورید.
(برای مثال مقدار متغیر X در جایگشت روبه‌رو برابر ۱۱ است. $GBGBGBGBGBGBGB$)

سؤال ۸. کلاسی دارای n دانش‌آموز است که هیچ دونفری از آن‌ها قد یکسانی ندارند. از آن جایی که مدیر این مدرسه از وسواس شدیدی رنج می‌برد از دانش‌آموزان می‌خواهد که به ترتیب قد در صف کلاس خود بایستند. اما دانش‌آموزان طبق معمول همیشه قصد دارند به صورت کاملاً تصادفی به صف شوند، پس از این که دانش‌آموزان به صف شدند:
(الف) به طور میانگین چند نفر در جایگاهی ایستاده‌اند که باعث آرامش روان مدیر می‌شود؟
(ب) امید ریاضی جفت دانش‌آموزانی که اگر جای خود را با هم عوض کنند هریک سر جای خود (از نظر مدیر) قرار می‌گیرند، چه قدر است؟

سؤال ۹. دو متغیر تصادفی مستقل X و Y داریم که هریک از مقادیر طبیعی $1, 2, \dots, n$ را با احتمال مساوی به خود می‌گیرند. ثابت کنید:

$$E[|X - Y|] = \frac{n^2 - 1}{3n}$$

سؤال ۱۰. روز تولد ۹۸ نفر را در هفته در نظر بگیرید. فرض کنید روزهای تولد این افراد از هم مستقل اند و با احتمال برابری هریک از هفت روز هفته می‌توانند باشند. کوواریانس تعداد افرادی که در یکشنبه به دنیا آمده‌اند و تعداد افرادی که در پنجشنبه به دنیا آمده‌اند را به دست آورید. از این حاصل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

سؤال ۱۱. توضیحات مربوط به سوال عملی را اینجا بنویسید