بسمه تعالی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰
مدرس: سید ابوالفضل مطهری

تمرین چندم

زمان تحویل: تا آخر روز .
لطفا پاسخها به همراه نام و شماره دانشجویی در کوئرا آپلود شوند.

---

۱ بساز و بنداز

$$\text{تعداد حالات کل} = \binom{۸}{۳}\binom{۶}{۳}$$

الف.

$$\binom{۸}{۳}\binom{۶}{۳} - \binom{۴}{۱}\binom{۸}{۳}$$

ب.

$$\binom{۸}{۳}\binom{۶}{۳} - \binom{۶}{۳}\binom{۶}{۱}$$

ج.

$$\binom{۸}{۳}\binom{۶}{۳} - \binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲}$$

۲ عروسی

الف.

$$P(\text{روشن شدن ریسه}) = P(\text{سالم بودن همه لامپ‌ها}) = (۰٫۹)^{۲۰}$$

ب.حداکثر ۵ لامپ خراب داریم. مطمئن هستیم که آخرین تعویض مربوط به یکی از لامپ‌های خراب بوده.

$$P = \frac{\binom{۱۹}{۴}}{\binom{۲۰}{۵}} \times \binom{۲۰}{۱} \times (۰٫۹)^{۱۹} \times (۰٫۱)$$ ← احتمال ۱ لامپ خراب ← چهار لامپ سالم در مجموعه ۵ انتخاب ما است.

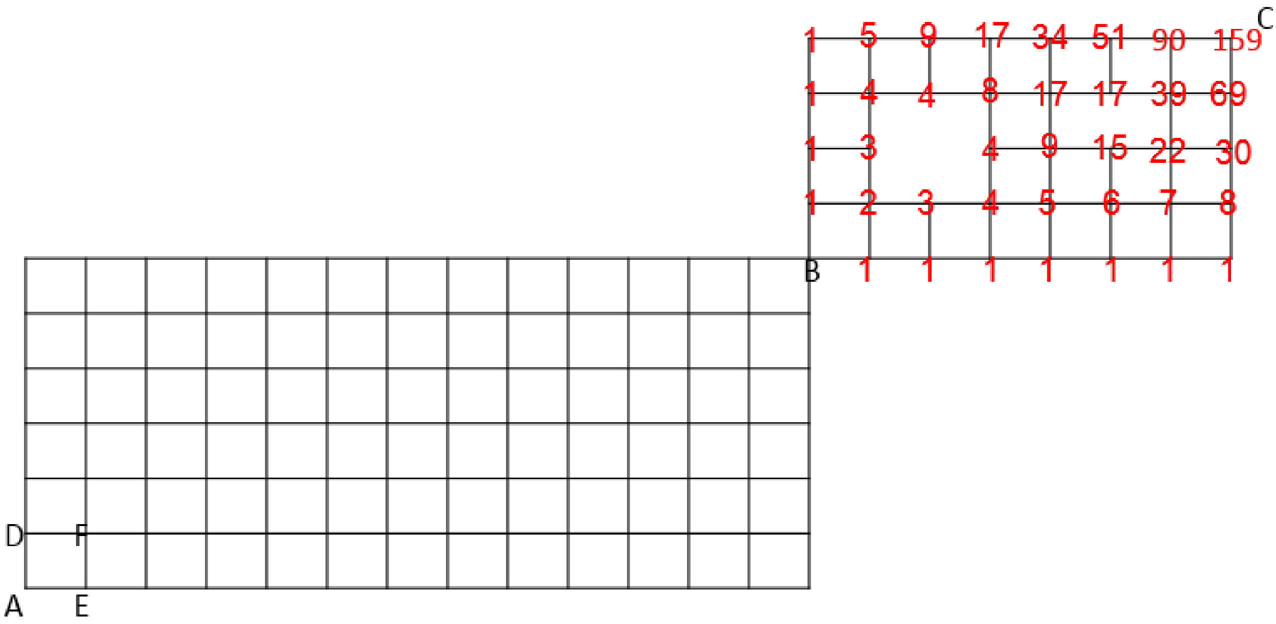
$$+\frac{\binom{۱۸}{۳}}{\binom{۲۰}{۵}} \times ۴ \times \binom{۲۰}{۲} \times (۰٫۹)^{۱۸} \times (۰٫۱)^{۲}$$ ← احتمال ۲ لامپ خراب ← ۴ انتخاب برای لامپ خراب دیگر یک لامپ خراب در انتخاب آخر است.

$$+\frac{\binom{۱۷}{۲}}{\binom{۲۰}{۵}} \times ۶ \times \binom{۲۰}{۳} \times (۰٫۹)^{۱۷} \times (۰٫۱)^{۳}$$ ← احتمال ۳ لامپ خراب ← پس ۶ حالت داریم نه ۱۲ تا. لامپ‌های خراب غیر متمایز هستند.

$$+\frac{\binom{۱۶}{۱}}{\binom{۲۰}{۵}} \times ۴ \times \binom{۲۰}{۴} \times (۰٫۹)^{۱۶} \times (۰٫۱)^{۴}$$ ← احتمال ۴ لامپ خراب

$$+\frac{\binom{۱۵}{۰}}{\binom{۲۰}{۵}} \times ۱ \times \binom{۲۰}{۵} \times (۰٫۹)^{۱۵} \times (۰٫۱)^{۵}$$ ← احتمال ۵ لامپ خراب

ج.مشابه قسمت ب احتمال روشن شدن ریسه را در ۰، ۱،...،۵ حرکت را با هم جمع میکنیم.



شکل ۱: اصل جمع

۳ خرگوش باهوش

مساله را به دو قسمت تقسیم میکنیم.

- تعداد راه های رسیدن از A به B
- تعداد راه‌های رسیدن از B به C

در نهایت جواب مساله طبق اصل ضرب برابر با ضرب جواب این دو قسمت خواهد بود.

- قسمت اول
  برای رسیدن از نقطه A به B باید ۶ قدم به بالا و ۱۳ قدم به راست بردارد. پس تعداد راه‌های رسیدن از A به B برابر است با: $\binom{۱۹}{۶}$
- قسمت دوم
  قسمتی از مسیر، از B به C ناقص است و نمیتوانیم مانند قسمت قبل عمل کنیم. برای حل این قسمت از اصل جمع استفاده میکنیم. به این صورت که تعداد راه‌های رسیدن از نقطه‌ای مانند A به نقطه‌ای مثل F (به شکل ۱ توجه کنید) برابر جمع تعداد راه‌های رسیدن از D به F و از E به F است. پس تعداد راه‌های رسیدن از B به C برابر ۱۵۹ است.

و جواب مساله برابر است با:

$$۱۵۹ \times \binom{۱۹}{۶}$$

روش دوم: با استفاده از مفهوم Union Bound هم میتوان این مساله را حل کرد:

تعداد راه‌های رفتن از نقطه B به C با فرض کامل بودن شبکه $\rightarrow$ $\binom{۱۹}{۶} \times (\binom{۱۱}{۷}$

تعداد راه‌های رفتن از B به C که از نقطه سوراخ سمت چپ بگذرد. $-\binom{۴}{۲}\binom{۷}{۲}$

تعداد راه های رفتن از B به C که از یال خالی سمت راست بگذرد. $-\binom{۷}{۲}\binom{۳}{۱}$

تعداد راه‌های رفتن از B به C که هم از نقطه سوارخ سمت چپ شبکه و هم یال خالی سمت راست شبکه بگذرد. ($\binom{۳}{۱}\times ۱\times\binom{۴}{۲}+$

$$=۱۵۹\times\binom{۱۹}{۶}$$

۴ کرونا

الف.با استفاده از قضیه بیز داریم:

$$P(\text{کرونا}|\text{مثبت شدن تست}) = \frac{P(\text{مثبت شدن تست}|\text{کرونا})P(\text{کرونا})}{P(\text{مثبت شدن تست}|\text{کرونا})P(\text{کرونا}) + P(\text{مثبت شدن تست}|\text{ناکرونا})P(\text{ناکرونا})}$$

$$\frac{\frac{۹۶}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰۰}}{\frac{۹۶}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰۰}+\frac{۱۰}{۱۰۰}\times\frac{۹۹۵}{۱۰۰۰}} \approx ۰٫۰۴۶$$

ب.

$$P(\text{کرونا}|\text{منفی شدن تست}) = \frac{P(\text{منفی شدن تست}|\text{کرونا})P(\text{کرونا})}{P(\text{منفی شدن تست}|\text{کرونا})P(\text{کرونا}) + P(\text{منفی شدن تست}|\text{ناکرونا})P(\text{ناکرونا})}$$

$$\frac{\frac{۴}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰۰}}{\frac{۴}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰۰}+\frac{۹۰}{۱۰۰}\times\frac{۹۹۵}{۱۰۰۰}} \approx ۰٫۰۰۰۲$$

ج.موارد الف و ب را دوباره حساب میکنیم:
الف.

$$\frac{۹۶\times ۵۰}{۹۶\times ۵۰+۱۰\times ۹۵۰} \approx ۰٫۳۳۶$$

ب.

$$\frac{۴\times ۵۰}{۴\times ۵۰+۹۰\times ۹۵۰} \approx ۰٫۰۰۲۳$$

۵ آقا موشه

الف.

$$P(\text{پیدا کردن}) =$$

$$P(\text{پیدا کردن}|\text{توافق روی راه درست})P(\text{توافق روی راه درست}) + P(\text{پیدا کردن}|\text{توافق روی راه نادرست})P(\text{توافق روی راه نادرست})$$

$$+P(\text{پیدا کردن}|\text{عدم توافق})P(\text{عدم توافق}) = ۱\times p^{۲} + ۰\times(۱-p)^{۲} + \frac{۱}{۲}\times p\times(۱-p)\times ۲ = p$$

ب.این روش هوشمندی بیشتری ندارد. چون یک موش به تنهایی نیز با همین احتمال راه درست را تشخیص میداد.

۶ نتورک

برای حساب کردن این احتمال، ابتدا احتمال عدم برقراری ارتباط (خراب بودن تمامی مسیر های ممکن از A به B) حساب میکنیم و سپس از اصل متمم استفاده میکنیم.

- در صورتی که یال EB خراب باشد که کار تمام است.
  در غیر این صورت، برای یال های DE و CE، ۴ حالت داریم:
- در صورتی که دو یال DE و CE خراب باشد ارتباط قطع میشود.
- اگر یال DE خراب و CE سالم باشد، باید AC حتما خراب باشد و یکی از دو یال AD یا DC خراب باشد.
- اگر یال CE خراب و DE سالم باشد، باید AD حتما خراب باشد و یکی از دو یال AC یا CD خراب باشد.

- اگر هر دوی DE و CE سالم باشد، باید AD و AC خراب باشد.

با توجه به موارد بالا داریم:

$$P(\text{عدم برقراری ارتباط}) = \frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}\times(\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۷}\times(\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۸})+\frac{۱}{۶}\times\frac{۷}{۸}\times\frac{۷}{۸}\times\frac{۱}{۸}\times(\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۷})+\frac{۷}{۸}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۸}) \approx ۰{,}۳۷$$

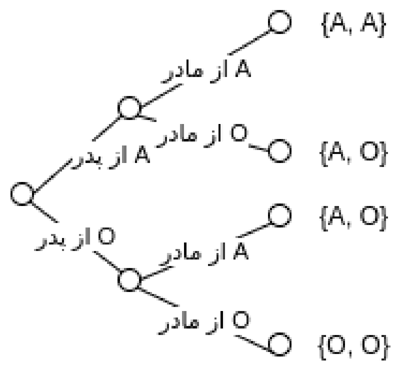
$$P(\text{برقراری ارتباط}) = ۱ - P(\text{عدم برقراری ارتباط}) \approx ۱ - ۰{,}۳۷ = ۰{,}۶۳$$

۷ ژنتیک بزی

از آنجا که خواهر لوسی گروه خونی O است، پس دارای دو ژن O میباشد که هر کدام از آنها از یکی از والدینش به ارث رسیده است. پس پدر و مادر، هر دو، $\{A, O\}$ هستند. حال لوسی ممکن است $\{A, A\}$ باشد یا $\{A, O\}$.

الف. با توجه به شکل ۲ داریم:

$$P(\text{بودن لوسی}\{A, O\}) = \frac{\frac{۲}{۴}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۲}{۳}$$



شکل ۲: درخت حالات

ب. یک ژن O از پدر به بچه به ارث میرسد. احتمال O شدن گروه خونی بچه برابر با احتمال به ارث رسیدن ژن O از لوسی به بچه است بنابراین داریم:

$$P(\text{ O بودن بچه }) = P(\text{به ارث رسیدن ژن O از لوسی به بچه })$$

$$= P(\text{ به ارث رسیدن ژن O از لوسی به بچه | بودن لوسی }\{A, O\}) \times P(\text{بودن لوسی}\{A, O\})$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

ج.

$$P(\text{ بچه اول A | ژن O داشتن لوسی}) = P(\text{بودن لوسی}\{A, O\} \text{ | بچه اول A })$$

$$= \frac{P(\text{ A بچه اول| بودن لوسی}\{A, O\}) \times P(\text{بودن لوسی}\{A, O\})}{P(\text{ A بچه اول| بودن لوسی}\{A, O\}) \times P(\text{بودن لوسی}\{A, O\}) + P(\text{ A بچه اول| بودن لوسی}\{A, A\}) \times P(\text{بودن لوسی}\{A, A\})}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} + ۱ \times \frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

د.

$$P(\text{A بودن دومی} \mid \text{A بودن اولی}) = P(\text{A بودن دومی} \mid \text{A بودن اولی و } \{A,O\}\text{بودن لوسی}) \times P(\{A,O\}\text{بودن لوسی} \mid \text{A بودن اولی})$$
$$+P(\text{A بودن دومی} \mid \text{A بودن اولی و } \{A,A\}\text{بودن لوسی}) \times P(\{A,A\}\text{بودن لوسی} \mid \text{A بودن اولی})$$
$$\overset{\text{استقلال شرطی}}{=} P(\text{A بودن دومی} \mid \{A,O\}\text{بودن لوسی}) P(\{A,O\}\text{بودن لوسی} \mid \text{A بودن اولی})$$
$$+P(\text{A بودن دومی} \mid \{A,A\}\text{بودن لوسی}) P(\{A,A\}\text{بودن لوسی} \mid \text{A بودن اولی})$$
$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + ۱ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

لازم به ذکر است که احتمال $P(\{A,O\}\text{بودن لوسی} \mid \text{A بودن اولی})$ در قسمت ج محاسبه شد و $P(\{A,A\}\text{بودن لوسی} \mid \text{A بودن اولی})$ نیز متمم همان احتمال است.

موفق باشید.