دانشکده مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	بهار ۱۴۰۳
تمرین سری پنجم	
مدرس درس: مهدی جعفری	سررسید تحویل: چهارشنبه ۶ تیر ۱۴۰۳

سؤال ۱ فرض کنید $X_1, ..., X_n \sim Exponential(\lambda)$ و متغیرهای تصادفی از یکدیگر مستقل باشند.
اگر داشته باشیم: $Y_n = min\{X_1, ..., X_n\}$، تابع چگالی احتمال[1] را برای Y_n بیابید.

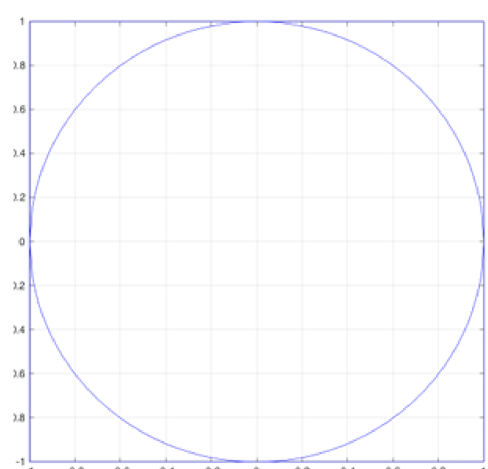
سؤال ۲ آ) با در نظر گرفتن متغیر تصادفی نامنفی X، نامساوی زیر را اثبات کنید (نامساوی مارکوف):

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}$$

ب) با در نظر گرفتن نتیجه بخش الف، نشان دهید برای متغیر تصادفی دلخواه Z با امید ریاضی μ و واریانس σ^2، نامساوی زیر برقرار است (نامساوی چبیشف):

$$\mathbb{P}(|Z - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

پ) می‌خواهیم مقدار عدد π را تخمین بزنیم. برای این‌کار روی صفحه مختصات دو بعدی، دایره‌ای به شعاع واحد و مربع محیطی آن را شبیه شکل زیر رسم می‌کنیم. مساحت این دایره π و مساحت مربع محیطی آن ۴ است. برای تخمین مقدار π تعدادی نقاط تصادفی داخل این مربع تولید کرده و نسبت تعداد نقاطی که داخل دایره قرار می‌گیرند به تعداد کل و ضرب این نسبت در عدد ۴ را به عنوان مقدار عدد π در نظر می‌گیریم. با استفاده از نامساوی چبیشف تعداد اعداد تصادفی‌ای که باید تولید کنیم تا با قطعیت ۹۵٪ بدانیم که خطای تخمین از ۱٪ کمتر است را مشخص کنید.



[1] PDF

سؤال ۳ کارخانه‌ای تعداد X_n خودرو در n روز تولید می‌کند به طوری که X_n به صورت مستقل و با توزیع یکسان با میانگین ۵ و واریانس ۹ به دست می‌آیند.

آ) یک تقریب از احتمال اینکه تعداد کل خودروهای تولید شده در ۱۰۰ روز کم‌تر از ۴۰۰ باشد را محاسبه کنید.

ب) بزرگ‌ترین مقدار n به صورتی که رابطه زیر برقرار باشد را به صورت تقریبی بیابید.

$$\mathbb{P}(X_۱ + \cdots + X_n \geq ۲۰۰ + ۵n) \leq ۰{,}۰۵$$

پ) N را اولین روزی تعریف می‌کنیم که مجموع خودروهای تولید شده به بیش از ۱۰۰۰ برسد. تقریبی از احتمال اینکه $N \geq ۲۲۰$ باشد را محاسبه کنید.

سؤال ۴ ثابت کنید متغیرهای $X_۱, \dots, X_n$ مستقل هستند، اگر و تنها اگر تابع توزیع توأم آن‌ها به شکل زیر قابل بیان باشد.

$$f(x_۱, \dots, x_n) = \prod_{i=۱}^{n} g_i(x_i)$$

به طوری که g_i تابعی مثبت است.

سؤال ۵ متغیرهای تصادفی مستقل از هم $X_۱, \dots, X_n$ را در نظر بگیرید که همه آن‌ها توزیع نمایی با پارامتر λ هستند.

$$Y_i = \sum_{j=۱}^{i} X_j$$

$$i = ۱, \dots, n$$

آ) تابع چگالی احتمال توزیع توام $Y_۱, \dots, Y_n$ را به دست آورید.

ب) با استفاده از نتیجه بخش (آ)، تابع چگالی توزیع احتمال را برای متغیر تصادفی Y_n بیابید.

سؤال ۶ فرض کنید $x_۱, x_۲, \dots, x_{۱۵}$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} ۳x^۲ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

احتمال زیر را با استفاده از قضیه حد مرکزی به طور تقریبی محاسبه کنید.

$$\mathbb{P}\left(۰{,}۶ < \frac{۱}{۱۵}\left(\sum_{i=۱}^{۱۵} x_i\right) < ۰{,}۸ \right) =?$$

سؤال ۷ تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی X، Y و Z به صورت زیر مفروض است:

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \frac{۱}{۲(۲\pi)^{\frac{۳}{۲}}} \exp\left(-\frac{x^۲}{۲} - \frac{y^۲}{۲} - \frac{z^۲}{۴} - \frac{xz}{۲} \right)$$

آ) $f_X(x \mid Z > ۰)$ را بر حسب تابع توزیع نرمال استاندارد ($G(۰)$) پیدا کنید.

ب) با فرض $W \equiv X + Y$ میانگین شرطی $\mathbb{E}[W \mid W < ۰]$ را به‌دست آورید.

سؤال ۸ (امتیازی) تابع چگالی توزیع دلخواه زیر را درنظر بگیرید:

$$f_X(x) = \frac{۱}{x^۲ \ln(x)} \left(\frac{۱}{\Gamma(۰, \ln(۲)) - \Gamma(۰, \ln(\lambda))} \right), \quad ۲ \leq x \leq \lambda$$

که در آن ضریب ثابت توزیع را می‌توان به صورت تابعی از λ در نظر گرفت.

$$f_X(x) = \frac{۱}{x^۲ \ln(x)} \times g(\lambda)$$

حال تعداد زیادی نمونه تصادفی iid از این توزیع با پارامتر ۸ در نظر بگیرید. حد زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{n \to \infty} (X_۱ X_۲ \dots X_n)^{\frac{۱}{n}} = ?$$

راهنمایی: در اینجا می‌توانید مقدار $g(۸)$ را با ۳ تقریب بزنید.

موفق باشید