

به نام خدا



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

# آمار و احتمال مهندسی

تمرین سری سوم

متغیرهای تصادفی

نیم‌سال اول ۹۶-۹۷

مدرس: دکتر مطهری

مهلت بخش تئوری: ۲۹ آبان ساعت ۲۳:۵۵ (امکان تحویل با تاخیر برای این تمرین وجود ندارد)

مهلت بخش عملی: ۵ آذر ساعت ۲۳:۵۵

## ۱ سوال اول

الف) اگر متغیر تصادفی با توزیع گاما دارای پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  باشد. نشان دهید که  $P(X < \frac{\alpha\beta}{\gamma}) \leq \frac{\gamma}{\alpha}$  است.  
(میانگین توزیع گاما  $\alpha\beta$  است و واریانس  $\alpha\beta^2$  آن است.)  
ب) مقدار  $c$  را طوری بیابید که مقدار  $E[(X - c)^2]$  کمینه شود.

## ۲ سوال دوم

اگر  $y = g(x)$  ثابت کنید:

$$f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|} + \dots = \sum_i \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

که می‌دانیم  $x_i$  ها ریشه هستند یعنی:

$$y = g(x_1) = \dots = g(x_i) = \dots$$

## ۳ سوال سوم

الف) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$  را محاسبه کنید.  
ب) میانگین و واریانس  $X$  را با استفاده از تابع مولد گشتاور محاسبه کنید.  
ج) ثابت کنید اگر  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند،  $M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y$ . منظور از  $M$  با اندیس یک متغیر تصادفی، تابع مولد گشتاور مرتبط با آن است.  
د) ثابت کنید اگر  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند که  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$  و  $Y \sim \text{Binomial}(m, p)$  آنگاه  $X + Y \sim \text{Binomial}(n + m, p)$

## ۴ سوال چهارم

فرض کنید تا  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغیرهایی تصادفی مستقل با توزیع تجمعی  $F$  و تابع چگالی  $f$  باشند. اگر  $Y_k$  برابر  $k$ مین بزرگترین عدد بین  $X_1$  تا  $X_n$  باشد، ثابت کنید تابع چگالی  $Y_k$  برابر عبارت زیر است:

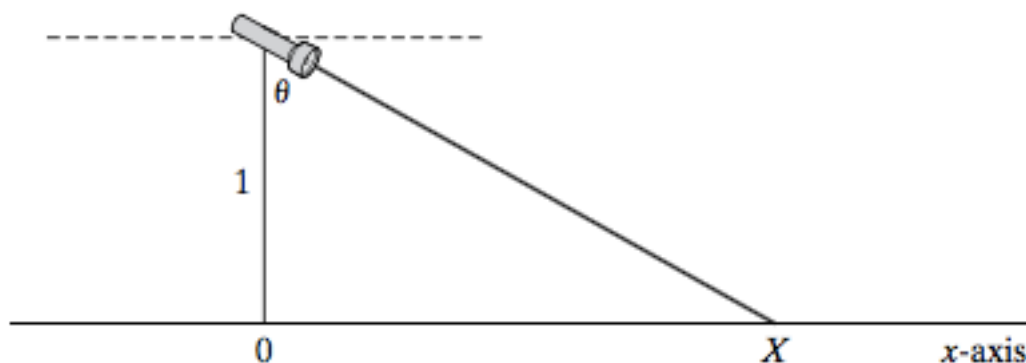
$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} f(x) (1-F(x))^{n-k}$$

## ۵ سوال پنجم

گفته می‌شود متغیر تصادفی  $x$  از توزیع Cauchy با پارامتر  $-\infty < \theta < \infty$  آمده است اگر:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + (\theta - x)^2)}$$

فرض کنید یک لیزر را که در فاصله واحد از مبدا قرار دارد (مطابق شکل) به زمین می‌تابانیم. متغیر تصادفی  $X$  بیانگر فاصله افقی نقطه برخورد این پرتو نسبت به مبدا در آزمایش‌های متوالی است. اگر بدانیم  $\theta$  که بیانگر زاویه قرارگیری لیزر است از توزیع یکنواخت  $(-\pi/2, \pi/2)$  پیروی می‌کند نشان دهید  $X$  از توزیع Cauchy پیروی می‌کند.



شکل ۱: سوال پنجم

## ۶ سوال ششم

فرض کنید  $F$  توزیع تجمعی متغیر تصادفی  $X$  باشد.

الف) فرض کنید  $Y = F(X)$ ، توزیع  $Y$  را بیابید.

ب) فرض کنید متغیر تصادفی  $U$  توزیع یکنواخت در بازه  $[0, 1]$  دارد. همچنین فرض کنید تابع  $h$  اکیداً صعودی با برد  $R = [0, 1]$  است. نشان دهید که اگر  $Y = h^{-1}(U)$ ، آنگاه  $h$  تابع توزیع تجمعی  $Y$  است.

ج) توزیع  $X$  مفروض است. برای تابع دلخواه صعودی  $F_Y$  با شرط  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_Y(x) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_Y(x) = 0$ ، تابع  $g$  را بیابید که اگر  $Y = g(X)$ ، این تابع توزیع تجمعی  $Y$  باشد.

د) (بخش عملی) با استفاده از دستور `rnorm`، ۱۰۰۰۰ نمونه از توزیع نرمال استاندارد تولید کنید و از روی آنها، ۱۰۰۰۰ نمونه با توزیع نمایی با ثابت  $\lambda = 1$  تولید کنید. هیستوگرام نمونه‌های به دست آمده را با هیستوگرام نمونه‌هایی از یک متغیر تصادفی نمایی با همین ثابت مقایسه کنید.

لطفا پاسخ تمرین را به فرمت PDF در کوئرا بفرستید. تایپ تمارین اولویت دارد. در صورت تمایل به انجام تمارین به صورت دست‌نویس، لطفاً آن را به صورت خوانا نوشته و به صورت اسکن‌شده و در قالب فایل pdf آپلود نمایید. اسم فایل شما باید به فرمت

[ نام و نام‌خانوادگی ] [ شماره دانشجویی ] [ شماره تمرین ] HW

برای مثال

HW3 95100000 Ali Alavi.pdf

باشد.