دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی — زمستان ۱۴۰۲

تمرین سری اول

مدرس: دکتر مهدی جعفری — موعد تحویل: چهارشنبه ۲۳ اسفند ۱۴۰۲

سؤال ۱ فرض کنید دو سکه داریم که یکی از آن‌ها سالم و دیگری هر دو طرفش شیر است. به تصادف یک سکه را انتخاب می‌کنیم و آن را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر ۵ بار شیر بیاید، احتمال آن را بیابید که سکه انتخاب شده سکه سالم باشد.

پاسخ: بنابر قانون بیز داریم:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\textit{fair coin} \mid \textit{5 consecutive heads}] &= \frac{\mathbb{P}[\textit{5 consecutive heads} \mid \textit{fair coin}].\mathbb{P}[\textit{fair coin}]}{\mathbb{P}[\textit{5 consecutive heads}]} \\ &= \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2}.1^5} = \frac{1}{33}\end{aligned}$$

سؤال ۲ n ریسمان در نظر بگیرید. در هر مرحله، دو سر را از بین سرهای آزاد این ریسمان‌ها انتخاب می‌کنیم و به هم گره می‌زنیم. این کار را تا زمانی تکرار می‌کنیم که سر گره نخورده‌ای باقی نماند. احتمال آن را پیدا کنید که در نهایت یک حلقه بزرگ به طول n تشکیل شود.

پاسخ: برای اینکه در نهایت یک حلقه ایجاد شود، در هر مرحله باید دو سری را گره بزنیم که تشکیل یک حلقه ندهد، به غیر از مرحله آخر. زمانی که n ریسمان داریم، از بین $\binom{n}{2}$ جفت سر آزاد، n جفت وجود دارند که اگر آنها را به هم گره بزنیم حلقه ایجاد می‌شود (دو سر آزاد یک ریسمان). پس احتمال اینکه در مرحله اول حلقه‌ای ایجاد نشود برابر است با: $\dfrac{\binom{2n}{2} - n}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{n-1}{n-\frac{1}{2}}$

پس از مرحله اول، می‌توان اینگونه به مسئله نگاه کرد که $n-1$ ریسمان داریم و همان کار مرحله قبل را می‌خواهیم انجام دهیم. در نهایت احتمال تشکیل یک حلقه بزرگ برابر است با:

$$\mathbb{P}[\textit{forming a loop of length n}] = \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}.\frac{n-2}{n-\frac{3}{2}}\cdots\frac{2}{3}$$

سؤال ۳ علی و محمد به نوبت به یک سری سوال پاسخ می‌دهند و علی با احتمال P_1 و محمد با احتمال P_2 به سوالات پاسخ صحیح می‌دهند.

الف) تابع جرم احتمال را برای علی برای پاسخ های صحیح در صورت جواب دادن به m تا سوال بیابید.

ب) اگر علی به m سوال و محمد به n سوال پاسخ داده باشند، تابع جرم احتمال برای تعداد پاسخ های صحیح را بیابید.

ج) اگر یک نفر زودتر ا.ولین پاسخ صحیح به یک سوال را بدهد برنده بازی میشود، احتمال برنده شدن علی را بیابید.

پاسخ:

الف) تابع را با استفاده از تعداد پاسخ های صحیح ورودی پیدا می‌کنیم. برای این کار، تعداد جایگشت ها را برای جواب های صحیح پیدا کرده و در احتمال دادن جواب های صحیح ضرب می‌کنیم:

$F(m) = \binom{m}{M} \times (P_1)^m \times (1-P_1)^{M-m}$

ب)

مانند قسمت قبلی عمل می‌کنیم اما با این تفاوت که به صورت ترکیبی برای هر دو بازیکن باید تابع را پیدا کنیم:

$$F(m,n) = ((\binom{m}{M} \times (P_1)^m \times (1-P_1)^{M-m}) \times \binom{n}{N} \times (P_2)^n \times (1-P_2)^{N-n}$$

ج) در این جا برای هر دور حل سوال احتمال برد علی را حساب می‌کنیم. به این صورت که احتمال برنده شدن علی در دور اول را با احتمال برد در دور دوم و ... جمع می‌کنیم:

$$P = P_1 + (1-P_1)(1-P_2)P_1 + (1-P_1)^2(1-P_2)^2P_1 + ... = \frac{P_1}{1-(1-P_1)(1-P_2)}$$

سؤال ۴ فرض کنید n مسافر، به ترتیب از شماره 1 تا n وارد یک قطار می‌شوند. نفر اول بلیتش را گم کرده است، پس به صورت کاملا تصادفی روی یکی از صندلی‌ها می‌نشیند. پس از او، مسافران دیگر به ترتیب وارد قطار می‌شوند و اگر صندلی متناظر با شماره آنها خالی باشد روی آن می‌نشینند و اگر هم صندلی‌شان پر باشد، به صورت کاملا تصادفی روی یکی از صندلی‌های خالی می‌نشینند. احتمال آن را بیابید که نفر آخر روی صندلی خودش بنشیند. (نکته: جواب فرم بسته دارد)

پاسخ: به کمک قانون احتمال کل یک رابطه بر حسب n به دست می‌آوریم. فرض کنید $f(n)$ احتمال رویداد مورد نظر (E) برای زمانی که n مسافر داریم باشد. همچنین فرض کنید احتمال اینکه نفر اول در جایگاه نفر i ام بنشیند برابر H_i باشد. داریم:

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathbb{P}[H_1].\mathbb{P}[E|H1] + \mathbb{P}[H_2].\mathbb{P}[E|H_2] + \cdots + \mathbb{P}[H_{n-1}].\mathbb{P}[E|H_{n-1}] + \mathbb{P}[H_n].\mathbb{P}[E|H_n] \\ &= \frac{1}{n}.1 + \frac{1}{n}.f(n-1) + \frac{1}{n}.f(n-2) + \cdots + \frac{1}{n}.\frac{1}{2} + \frac{1}{n}.0 \end{aligned}$$

دقت کنید زمانی که مسافر اول در جایگاه نفر i ام می‌نشیند $(1 < i < n)$، وقتی که نوبت به نشستن نفر i ام می‌شود، صندلی 1 و صندلی های $i+1$ تا n باقی مانده‌اند. اکنون اینگونه می‌توان به مسئله نگاه کرد که صندلی شماره 1 صندلی نفر i ام است و مسئله به تعداد مسافران $n-i+1$ کاهش می‌یابد.

اگر رابطه بالا را برای n های کوچک حل کنیم متوجه می‌شویم که جواب $\frac{1}{2}$ می‌شود. در نهایت با استقرا می‌توان ثابت کرد که این احتمال به ازای هر n برابر $\frac{1}{2}$ است.

سؤال ۵ در یک اتاق ۳۰ نفر حضور دارند. احتمال این که حداقل دونفر روز تولد یکسانی داشته باشند چقدر است؟ فرض کنید که تولد ها به صورت یونیفرم توزیع شده اند.

پاسخ: ابتدا احتمال همه حالاتی که افراد روز تولد یکسانی نداشته باشند را پیدا کرده و سپس متمم آن را حساب می‌کنیم:

$$P = 30! \times (\tfrac{1}{30})^{30}$$

سؤال ۶ دو تاس را با هم پرتاب میکنیم، احتمال این که یکی از اعداد به دست آمده شمارنده دیگری باشد چقدر است؟

پاسخ: همه حالات ممکن را پیدا کرده و احتمال را حساب میکنیم:

$(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)$

$(2,1)(3,1)(4,1)(5,1)(6,1)$

$(2,2)(2,4)(2,6)$

$(4,2)(6,2)$

$(3,3)(3,6)$

$(6,3)$

$(4,4)$

$(5,5)$

$(6,6)$

$P = \frac{22}{36}$

سؤال ۷ موارد زیر را اثبات کنید:
الف) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
ب) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j)$

پاسخ:
الف)

.۱

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$$

.۲

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_1 \cap A_2)$$

.۳

$$P(A_1) = P(A_1 \setminus A_2) + P(A_1 \cap A_2)$$
$$P(A_2) = P(A_2 \setminus A_1) + P(A_1 \cap A_2)$$

.۴

$$P(A_1 \cup A_2) = (P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)) + (P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)) + P(A_1 \cap A_2)$$
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

ب)

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} \cup (\cup^n A_i)) &= P(A_{n+1}) + P(\cup^n A_i) - P(A_{n+1} \cap (\cup^n A_i)) \\ &\geq P(A_{n+1}) + \sum^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) - P(\cup^n (A_i \cap A_{n+1})) \\ &\geq \sum^{n+1} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n+1} P(A_i \cap A_j) \end{aligned} \tag{1}$$

سؤال ۸ به یک خانواده از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی Ω یک میدان سیگما روی Ω گفته می‌شود اگر:
۱) $\Omega \in \mathcal{F}$
۲) $A \in \mathcal{F} \to \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
۳) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
حال به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) فرض کنید $\mathcal{F}$ یک میدان سیگما روی $\Omega = [0,1]$ باشد، به گونه‌ای که $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$ به ازای $n = 1, 2, \dots$. نشان دهید:
۱) $\{0\} \in \mathcal{F}$
۲) $\forall n \in \mathbb{N} : (\frac{1}{n}, 1] \in \mathcal{F}$
۳) $\{\frac{1}{n} : n = 2, 3, \dots\} \in \mathcal{F}$
۴) $\forall n \in \mathbb{N} : (0, \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$

ب) فرض کنید $\mathcal{F}$ یک میدان سیگما باشد و داشته باشیم $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. نشان دهید:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

ج) نشان دهید اگر $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ میدان‌های سیگما روی Ω باشند، آنگاه $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ هم یک میدان سیگما است.

د) در قسمت قبل، آیا $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ لزوما یک میدان سیگما است؟ ادعایتان را ثابت کنید.

پاسخ:
الف) هر کدام از مجموعه‌های داده شده را به صورت اجتماع شمارا تا مجموعه که به $\mathcal{F}$ متعلق هستند می‌نویسیم:

1) $\{0\} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$

2) $(\frac{1}{n}, 1] = \bigcup_{i=1}^{n-1}[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}] \setminus [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$

3) $\{\frac{1}{n} : n = 2, 3, \dots\} = \bigcup_{n=2}^{\infty}\left([\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \cap [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]\right) \in \mathcal{F}$

4) $(0, \frac{1}{n}] = \bigcap_{i=n}^{\infty}[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}] \in \mathcal{F}$

ب) بنابر قانون دمورگان داریم: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(\Omega \setminus A_i)$
طبق تعریف داریم $\Omega \setminus A_i \in \mathcal{F}$. پس $\bigcup_{i=1}^{\infty}(\Omega \setminus A_i) \in \mathcal{F}$. پس $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(\Omega \setminus A_i) \in \mathcal{F}$.

ج)

$$\Omega \in \mathcal{F}_1,\ \Omega \in \mathcal{F}_2 \implies \Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

$$\textit{Let } A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \implies A \in \mathcal{F}_1, A \in \mathcal{F}_2 \implies \Omega \setminus A \in \mathcal{F}_1,\ \Omega \setminus A \in \mathcal{F}_2 \implies \Omega \setminus A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

$$\textit{Let } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \implies A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_1,\ A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_2 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_2$$
$$\implies \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1,\ \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_2 \implies \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

از آنجایی که هر سه شرط گفته شده را رعایت می‌کند، پس مجموعه داده شده یک میدان سیگما است.

د) اجتماع دو میدان سیگما لزوما یک میدان سیگما نیست. برای مثال:

$$\textit{Let } \Omega = \{1,2,3\},\ \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\}\},\ \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{1,3\}\}$$
$$\implies \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$$

می‌بینیم که $\{1\}, \{2\} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ ولی $\{1,2\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. پس $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ یک میدان سیگما نیست.

سؤال ۹ یک کشوی قدیمی حاوی دو رنگ جوراب است. یک رنگ قرمز و دیگری رنگ مشکی. زمانیکه دو جوراب بصورت تصادفی از میان کشو بیرون کشیده می‌شوند، احتمال آنکه این دو جوراب، قرمز رنگ باشند $\frac{1}{2}$ است.
الف) حداقل تعداد جوراب‌های داخل کشو چقدر باید باشد؟
ب) اگر بدانیم که تعداد جوراب‌های مشکی، زوج است، حداقل تعداد جوراب‌ها چقدر باید باشد؟

سؤال ۱۰ برای تشویق *Francisco Ruiz* پس از قهرمانی او در مسابقات *8 Ball Pool 2022*، برای تکرار قهرمانی به او دو برنامه پیشنهاد شده است. هدف *Francisco* این است که ۲ برد پیاپی(متوالی) کسب کند. تنها در اینصورت است که به جایزه‌ی نقدی دست پیدا می‌کند. او در این دو برنامه، با یک رقیب ساده (که رقیب تمرینی او است و آنرا با S نشان می‌دهیم) و یک رقیب حرفه‌ای (که آنرا با P نمایش می‌دهیم) روبرو می‌شود. بدیهی است که احتمال برد او در هر بازی مقابل رقیب تمرینی، از رقیب حرفه‌ای بیشتر است. یک برنامه‌ی پیش روی او، برنامه‌ی بازی SPS است و برنامه‌ی دیگر PSP است. (مجددا اشاره می شود که *Francisco* باید از این ۳ بازی پیش رو، ۲ برد متوالی کسب کند). بنظر شما، *Francisco* باید کدام برنامه‌ی بازی را برای مسابقات پیش روی خود انتخاب کند؟ برای انتخاب خود دلیل بیاورید و ثابت کنید.

موفق باشید