به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

پاسخ تمرین سری سوم
متغیرهای تصادفی
نیم‌سال اول ۹۷-۹۶
مدرس: دکتر مطهری

۱ سوال اول

الف) نابرابری چبیشو (chebyshev's inequality):

$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

اگر k را $\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$ انتخاب کنیم، حکم سوال به دست خواهد آمد:

$$\mathbb{P}(|X-\alpha\beta| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{2}.\sqrt{\alpha\beta^2}) \leq \frac{4}{\alpha}$$
$$\mathbb{P}(|X-\alpha\beta| \geq \frac{\alpha\beta}{2}) \leq \frac{4}{\alpha}$$
$$\mathbb{P}(X < \frac{\alpha\beta}{2}) + \mathbb{P}(X > \frac{3\alpha\beta}{2}) \leq \frac{4}{\alpha}$$
$$\mathbb{P}(X < \frac{\alpha\beta}{2}) \leq \frac{4}{\alpha}$$

ب)

$$\mathbb{E}[(X-c)^2] = \mathbb{E}[((X-\mu)+(\mu-c))^2] =$$
$$\mathbb{E}[(X-\mu)^2 + 2(X-\mu)(\mu-c) + (\mu-c)^2] =$$
$$\mathbb{E}[(X-\mu)^2] + 2(\mu-c)\mathbb{E}[X-\mu] + (\mu-c)^2 =$$
$$\sigma^2 + 2(\mu-c)(0) + (\mu-c)^2 = \sigma^2 + (\mu-c)^2$$

بر اساس معادلات بالا، برای کمینه کردن $\mathbb{E}[(X-c)^2]$، $c=\mu$ باید باشد.

۲ سوال دوم

بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید برای $y=g(x)$ سه ریشه x_1, x_2, x_3 پیدا کرده ایم. می‌دانستیم:

$$f_y(y)dy = P\{y < \boldsymbol{y} \leq y+dy\}$$

پس کافی است مجموعه x هایی را پیدا کنیم که $y < g(x) \leq y+dy$ و احتمال هر x را در این مجموعه پیدا کنیم. با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$x_1 < x < x_1+dx_1 \qquad x_2+dx_2 < x < x_2 \qquad x_3 < x < x_3+dx_3$$

چون در این حالت فرض شده داریم : $dx_1 > 0, dx_3 > 0, dx_2 < 0$ پس :

$$P\{y < \boldsymbol{y} \leq y + dy\} = P\{x_1 < \boldsymbol{x} < x_1 + dx_1\} + P\{x_2 + dx_2 < \boldsymbol{x} < x_2\} + P\{x_3 < \boldsymbol{x} < x_3 + dx_3\}$$

سمت راست تساوی بالا همان قسمت هاشور خورده در شکل است:

$$P\{x_1 < \boldsymbol{x} < x_1 + dx_1\} = f_x(x_1)dx_1 \qquad dx_1 = dy/g'(x_1)$$

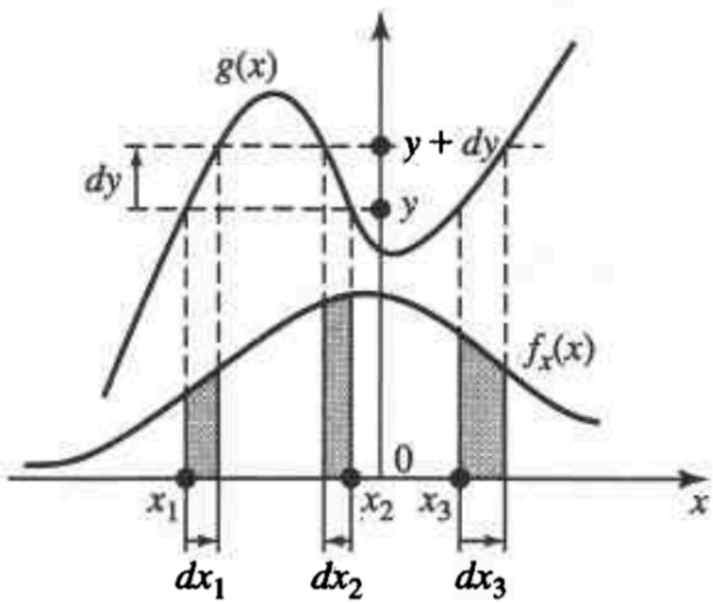
$$P\{x_2 + dx_2 < \boldsymbol{x} < x_2\} = f_x(x_2)|dx_2| \qquad dx_2 = dy/g'(x_2)$$

$$P\{x_3 < \boldsymbol{x} < x_3 + dx_3\} = f_x(x_3)dx_3 \qquad dx_3 = dy/g'(x_3)$$

پس درنهایت خواهیم داشت:

$$f_y(y)dy = \frac{f_x(x_1)}{g'(x_1)}dy + \frac{f_x(x_2)}{|g'(x_2)|}dy + \frac{f_x(x_3)}{g'(x_3)}dy$$

واضح است که با استقرا می‌توان مطالب بالاتر را به حالت کلی تعمیم داد.



شکل ۱: سوال دوم

۳ سوال سوم

الف

از روی تعریف تابع مولد داریم:

$$G(t) = P(X=0) + P(X=1) \times t^1 + P(X=2) \times t^2 + \cdots =$$
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^i \times t^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (pi)^i \times (1-p)^i = (pt + (1-p))^n$$

ب

میانگین و واریانس را با استفاده از مشتق های تابع مولد و مقدار دهی ۱ به آنها به دست می آوریم:

$$G'(t) = \sum_{i=1}^{n} i \times P(X=i) \times t^{i-1} \Rightarrow G'(1) = \sum_{i=0}^{n} i \times P(X=i) = E[X]$$
$$G'(t) = \frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt}(pt + (1-p))^n = n \times (pt + (1-p))^{n-1} \times p$$
$$E[X] = G'(1) = n \times (p + 1 - p)^{n-1} \times p = n \times p$$
$$G''(t) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)P(X=i)t^{i-2} \Rightarrow G'(1) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)P(X=i) = E[X^2 - X]$$
$$G''(t) = \frac{d^2G}{dt} = n(n-1)p^2(pt + (1-p))^n \Rightarrow G''(1) = n(n-1)p^2$$
$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$
$$Var(X) = np - np^2 = np(1-p)$$

ج

با فرض استقلال دو متغیر تصادفی X و Y داریم:

$$M_{X+Y} = \sum_r \sum_s P(X=r, Y=s)t^{r+s} = \sum_r \sum_s (P(X=r)t^r)(P(Y=s)t^s)$$
$$M_{X+Y} = (\sum_r P(X=r)t^r)(\sum_s P(Y=s)t^s) = M_X \times M_Y$$

د

ابتدا تابع مولد دو متغیر تصادفی X و Y را به دست می آوریم و طبق بخش قبل با ضرب آنها تابع مولد جمع این دو را به دست می‌آوریم:

$$G_X(t) = (pt + (1-p))^n$$
$$G_Y(t) = (pt + (1-p))^m$$
$$G_{X+Y}(t) = (pt + (1-p))^{n+m} \Rightarrow X + Y \sim Binomial(n+m, p)$$

۴ سوال چهارم

ابتدا سعی می کنیم که برای تابع $F_{Y_k}(x)$ رابطه بازگشتی به دست آوریم. می دانیم که $F_{Y_k}(x)$ برابر است با احتمال آنکه حداقل k تا از X_i ها کوچکتر مساوی x باشند. این احتمال برابر است با احتمال اینکه حداقل k-۱ تا از X_i ها از x کوچکتر مساوی باشند منهای احتمال اینکه دقیقا k-۱ تا ز X_i ها از x کوچکتر مساوی باشند. پس می توان نوشت:

$$F_{Y_k}(x) = P(Y_k \leq x) = P(Y_k \leq x-1) - \binom{n}{k-1} F_X(x)^{k-1} \times (1 - F_X(x))^{n-k+1}$$

و همچنین در حالت پایه داریم:

$$F_{Y_1}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

حال با جای گذاری در رابطه بازگشتی و باز کردن جملات داریم:

$$F_{Y_k}(x) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} F_X(x)^i (1 - F_X(x))^{n-i}$$
$$F_{Y_k}(x) = (F_X(x) + (1 - F_X(x)))^n - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} F_X(x)^i (1 - F_X(x))^{n-i}$$
$$F_{Y_k}(x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} F_X(x)^i (1 - F_X(x))^{n-i}$$

حال از رابطه بالا مشتق می گیریم:

$$f_{Y_k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (i f_X(x) F_X(x)^{i-1} + (n-i)(-f_X(x)) F_X(x)^i (1 - F_X(x))^{n-i-1} +$$
$$f_{Y_k} = f_X(x) \sum_{i=k}^{n} (i \binom{n}{i} - (n-i+1) \binom{n}{i-1}) (F_X(x)^{i-1} (1 - F_X(x)^{n-i}) +$$
$$+ f_X(x)(n-k+1) \binom{n}{k-1} (F_X(x)^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k} =$$
$$F_{Y_k}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F_X(x)^{k-1} f(x) (1 - F(x))^{n-k}$$

حکم ثابت شد.

۵ سوال پنجم

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{tan\theta \leq x\} = P\{\theta \leq tan^{-1} x\}$$

چون می‌دانیم θ از توزیع یکنواخت بین $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ آمده است. پس خواهیم داشت:

$$P\{\theta \leq tan^{-1} x\} = \frac{tan^{-1} x - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{tan^{-1} x}{\pi}$$

و نتیجه می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

که همان توزیع Cauchy است.