بسمه تعالی

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰
مدرس: سید ابوالفضل مطهری

دانشکده مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین پنجم

## پاسخ سوال اول

الف)

$$Z_1 = X + Y$$

$$F_{Z_1}(z) = P(X+Y \leq z) = \begin{cases} \int_0^z \int_0^{z-y} f_{XY}(x,y)dxdy & 0 < z < 1 \\ 1 - \int_{z-1}^1 \int_{z-y}^1 f_{XY}(x,y)dxdy & 1 < z < 2 \end{cases}$$

$$f_{Z_1}(z1) = \begin{cases} \int_0^z f_{XY}(z-y,y)dy & 0 < z < 1 \\ \int_{z-1}^1 f_{XY}(z-y,y)dy & 1 < z < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} z^2 & 0 < z < 1 \\ z(2-z) & 1 < z < 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

ب)

$$Z_2 = XY$$

$$F_{Z_2}(z) = P(XY \leq z) = 1 - \int_z^1 \int_{\frac{z}{y}}^1 f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$f_{Z_2}(z) = \int_z^1 \frac{1}{y} f_{XY}(\frac{z}{y}, y)dy = \int_z^1 \frac{1}{y}(\frac{z}{y} + y)dy = 2(1-z),\ 0 < z < 1$$

ج)

$$Z_3 = \frac{Y}{X}$$

$$F_{Z_3}(z) = P(\frac{Y}{X} \leq z) = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^{zx} f_{XY}(x,y)dydx & 0 < z < 1 \\ 1 - \int_0^1 \int_0^{\frac{y}{z}} f_{XY}(x,y)dxdy & z > 1 \end{cases}$$

$$f_{Z_3}(z) = \begin{cases} \int_0^1 x f_{XY}(x,zx)dx & 0 < z < 1 \\ \int_0^1 \frac{y}{z^2} f_{XY}(\frac{y}{z},y)dy & z > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1+z}{3} & 0 < z < 1 \\ \frac{1+z}{3z^3} & z > 1 \end{cases}$$

د)

$$Z_4 = Y - X$$

$$F_{Z_4}(z) = P(Y - X \leq z) = \begin{cases} 1 - \int_z^1 \int_0^{y-z} f_{XY}(x,y)dxdy & 0 < z < 1 \\ \int_0^{z+1} \int_{y-z}^1 f_{XY}(x,y)dxdy & -1 < z < 0 \end{cases}$$

$$f_{Z_4}(z) = \begin{cases} \int_z^1 f_{XY}(y-z,y)dy & 0 < z < 1 \\ \int_0^{z+1} f_{XY}(y-z,y)dy & -1 < z < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - z & 0 < z < 1 \\ 1 + z & -1 < z < 0 \end{cases}$$

$$= 1 - |z|, \; |z| < 1$$

---

## پاسخ سوال دوم

هر یک از سه متغیر $Y_1$ ، $Y_2$ و $Y_3$ می‌تواند ماکزیمم باشد، بنابراین:

$$P = P(Y_1 > Y_2, Y_1 > Y_3, Y_2 + Y_3 > Y_1) + P(Y_2 > Y_1, Y_2 > Y_3, Y_1 + Y_3 > Y_2) + P(Y_3 > Y_2, Y_3 > Y_1, Y_2 + Y_1 > Y_3)$$

$$P = 3 \times P(Y_1 > Y_2, Y_1 > Y_3, Y_2 + Y_3 > Y_1) = 3 \int_{Y_1=0}^{Y_1=1} \int_{Y_2=0}^{Y_2=Y_1} \int_{Y_3=Y_1-Y_2}^{Y_3=Y_1} d(Y_3)d(Y_2)d(Y_1)$$
$$\to P = 3/6 = 1/2$$

---

## پاسخ سوال سوم

الف) با استفاده از خواص خطی بودن امید ریاضی، بی‌حافظه بودن و مستقل بودن متغیر تصادفی‌ها از هم، داریم:

$$E(X_1|X_1 > 1) + E(X_2|X_2 > 2) + E(X_3|X_3 > 3) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + 6$$

ب) از آنجایی که $X_1$ و $X_2$ از هم مستقل هستند، چگالی احتمال توأم آنها برابر است با:

$$Pr(X_1 = a, X_2 = b) = \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1 a + \lambda_2 b)}$$

چگالی احتمال توأم روی اعداد حقیقی مثبت تعریف شده و باید روی قسمتی انتگرال بگیریم که $X_2$ در $[0, \infty]$ و $X_1$ در $[0, X_2]$ مقدار میگیرند.

$$\begin{aligned}
Pr(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty \int_0^b Pr(X_1 = a, X_2 = b) da db \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 b} \int_0^b \lambda_1 e^{-\lambda_1 a} da db \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 b}(1 - e^{-\lambda_1 b}) db \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 b} db - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)b} db \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}
\end{aligned}$$

ج) احتمال خواسته شده همان $Pr(X_1 \leq min(X_2, X_3))$ است. همینطور می‌دانیم $min(X_2, X_3)$ از $X_1$ مستقل است و توزیع آن $Exp(\lambda_2 + \lambda_3)$ می‌باشد. پس:

$$Pr\big(X_1 = min(X_1, X_2, X_3)\big) = Pr\big(X_1 \leq min(X_2, X_3)\big) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

---

## پاسخ سوال چهارم

الف) تعداد افراد موافق را قرار دهید $X \sim binomial(25, 0.5)$. می‌دانیم:

$$E[X] = 12.5 \quad , \quad Var(X) = 25 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{4} \quad , \quad \sigma_X = \frac{5}{2}$$

پس از استاندارد کردن $X$ و استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی، داریم $Z = \frac{X-12.5}{2.5} \approx N(0,1)$، بنابراین:

$$Pr(X \geq 14) = Pr\Big(\frac{X-12.5}{2.5} \geq \frac{14-12.5}{2.5}\Big) = Pr(Z \geq 0.6) \approx \Phi(-0.6) = 0.274$$

ب)

$$Pr(p - 0.01 \leq \bar{X}_n \leq p + 0.01) = 0.9$$

$$Pr(\bar{X}_n < p - 0.01) = Pr\big(X_n < n(p - 0.01)\big) = 0.05$$

$$Pr\Big(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{-0.01n}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) = Pr\Big(Z < \frac{-0.01n}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) = 0.05$$

$$\frac{-0.01n}{\sqrt{np(p-1)}} = \Phi^{-1}(0.05)$$

$$\sqrt{n} = \Phi^{-1}(0.05)\sqrt{p(1-p)} \Longrightarrow n = 10^4\big(\Phi^{-1}(0.05)\big)^2 p(1-p) = 10^4\big(\Phi^{-1}(0.05)\big)^2/4$$

---

## پاسخ سوال پنجم

برای سادگی فرض می‌کنیم $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ داریم:

$$cov(Y, max(X,Y)) = \mathbb{E}[Y \max(X,Y)] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[\max(X,Y)] = \mathbb{E}[Y \max(X,Y)]$$

$$\mathbb{E}[Y \max(X,Y)] = \begin{cases} \mathbb{E}[XY] & X > Y \\ \mathbb{E}[Y^2] & X < Y \end{cases}$$

در واقع دو مقدار بالا $\mathbb{E}[XY|X > Y]$ و $\mathbb{E}[Y^2|X < Y]$ می‌باشند. پس کافی است فضای کلی را به این دو فضا افراز کرده و برای هر فضا جداگانه حساب کنیم.

برای حالت اول داریم:

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} xye^{\frac{-x^2}{2}}e^{\frac{-y^2}{2}}dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{\frac{-y^2}{2}}(\int_{-\infty}^{y} xe^{\frac{-x^2}{2}}dx)dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{\frac{-y^2}{2}}e^{\frac{-y^2}{2}}dy = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2ye^{-y^2}dy = \frac{1}{4\pi}e^{-y^2}\Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} = 0$$

برای حالت دوم داریم:

$$\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} y^2e^{\frac{-x^2}{2}}e^{\frac{-y^2}{2}}dxdy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2e^{\frac{-y^2}{2}}(\int_{-\infty}^{y}\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2F_Y(y)\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \mathbb{E}[Y^2F(Y)]$$

در متغیر نرمال استاندارد توزیع متغیر تصادفی $Y$ مشابه با توزیع $-Y$ است. پس داریم: $F(Y) = 1 - F(-Y)$. پس می‌توان نوشت:

$$\mathbb{E}[Y^2F(Y)] = \mathbb{E}[(-Y)^2F(-Y)] = \mathbb{E}[Y^2(1-F(Y))] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y^2F(Y)]$$

با توجه به همه نکات بالا می‌توان گفت:

$$cov(Y, \max(X,Y)) = \mathbb{E}[Y\max(X,Y)] = \mathbb{E}[Y^2F(Y)] = \frac{\mathbb{E}[Y^2]}{2} = \frac{Var(Y)}{2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین جواب نهایی برای واریانس $\sigma^2$ عبارت است از:

$$cov(Y, \max(X,Y)) = \sigma^2/2 \tag{۱}$$

برای محاسبه $cov(Y, min(X,Y))$ داریم:

$$cov(Y, max(X,Y)) + cov(Y, \min(X,Y)) = cov(Y, X+Y) = Var(Y)$$
$$\implies cov(Y, \min(X,Y)) = Var(Y) - cov(Y, \max(X,Y)) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین جواب نهایی برای واریانس $\sigma^2$ عبارت است از:

$$cov(Y, \min(X,Y)) = \sigma^2/2 \tag{۲}$$

## پاسخ سوال ششم

فرض کنیم $P_n$ احتمال خرابی پل در صورتی که $n$ ماشین روی آن باشند، باشد. اگر $X_i$ متغیر تصادفی وزن ماشین $i$ باشد، و $W$ متغیر تصادفی وزنی باشد که پل می‌تواند تحمل کند، آنگاه:

$$P_n = P\{X_1 + ... + X_n \geq W\} = P\{X_1 + ... + X_n - W \geq 0\}$$

با توجه به قضیه حد مرکزی، $\Sigma_{i=1}^{n}$ یک توزیع نرمال با میانگین $3n$ و واریانس $9n$ است. چون $W$ مستقل از $X_i$ها و نرمال است، توزیع $\Sigma_{i=1}^{n} X_i - W$ نیز نرمال است و میانگین و واریانس آن به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\mathbb{E}[\Sigma_{i=1}^{n} X_i - W] = 3n - 400$$
$$Var(\Sigma_{i=1}^{n} X_i - W) = Var(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) + Var(W) = 9n + 1600$$

بنابراین قرار می‌دهیم:

$$Z = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} X_i - W - (3n - 400)}{\sqrt{9n + 1600}} \implies P_n = P\{Z \geq \frac{-(3n - 400)}{\sqrt{9n + 1600}}\}$$

که $Z$ یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

$$P\{Z \geq 1.28\} \approx 0.1 \implies \frac{400 - 3n}{\sqrt{9n + 1600}} \leq 1.28 \implies n \geq 112$$

---

موفق باشید.