



نکات مهم

- پاسخ‌های نظری خود را در قالب یک فایل pdf با اسم [STD-Num]_HW# در بخش مختص به خود در کوئرا آپلود کنید. پاسخ‌های عملی را نیز با نامی مشابه، ولی با فرمت zip در بخش مختص خود آپلود کنید.
- تنها سوالات ستاره‌دار تمرین، نیاز به تحویل دارند. نوشتن پاسخ‌های نظری، هم به صورت تایپی و هم دست‌نویس، مقبول است. پاسخ‌های عملی باید در زبان R نوشته شوند.
- سوالات پرسیده شده در خصوص تمرین در شبکه‌های اجتماعی، به هیچ عنوان پاسخ داده نخواهند شد؛ تنها مکان مجاز رفع اشکال در خصوص تمرین، بخش پرسش‌ها و پاسخ‌ها در کوئرا است.
- زمان تحویل تمرین، به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد، بنابراین لازم است که زمان خود را برای انجام تمرین مدیریت کرده و آن را به روزهای پایانی موکول نکنید.
- امکان بارگذاری تمرین در کوئرا تا ۷۲ ساعت پس از ددلاین تمرین وجود دارد، اما به ازای هر ساعت تاخیر، یک درصد از نمره‌ی نهایی تمرین را از دست خواهید داد. دقیقه‌ها و ثانیه‌ها، رو به بالا گرد خواهند شد؛ مثلاً، یک ساعت و نیم تاخیر، معادل دو ساعت تاخیر محسوب می‌شود.
- در طول ترم، ۲۴۰ ساعت کوپن تاخیر خواهید داشت و با استفاده از آن‌ها، می‌توانید بدون کسر نمره، از تاخیرها استفاده کنید. جریمه‌ی تاخیرها، از تمرینی محاسبه می‌شوند که در آن، کوپن‌ها به اتمام رسیده باشند. نمره‌ی امتیازی برای اشخاصی که مجموع تاخیرهای ایشان در کل ترم، کم‌تر از ۲۴۰ ساعت باشد، به هیچ عنوان در نظر گرفته نمی‌شود.
- مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه هم می‌شود، اما هر دانش‌جو موظف است تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده، باید توسط خود دانش‌جو نوشته شده باشد. در صورت کشف اولین مورد تقلب هر دانش‌جو، نمره‌ی همان تمرین وی، صفر در نظر گرفته شده و در صورت کشف دومین مورد تقلب هر دانش‌جو، منفی نمره‌ی کل تمرین‌ها به وی تعلق خواهد گرفت. برای کسب اطلاعات بیشتر در خصوص آیین‌نامه‌ی مشورت و تقلب، می‌توانید به بخش مربوطه در ویکی دانشکده مراجعه کنید. لازم به ذکر است که این جرایم به هیچ عنوان بخشیده نخواهند شد.

سوالات نظری

مسئله ۱. چهار عمل اصلی

توزیع توأم متغیرهای تصادفی X و Y به شرح زیر است.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

(الف) تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی $Z_1 = X + Y$ را بیابید.

(ب) تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی $Z_2 = XY$ را بیابید.

(ج) تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی $Z_3 = \frac{Y}{X}$ را بیابید.

(د) تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی $Z_4 = Y - X$ را بیابید.

مسئله ۲. رادیکال

فرض کنید دو متغیر تصادفی U و T به ترتیب از توزیع‌های یکنواخت و نمایی به شکل زیر پیروی می‌کنند:

$$U \sim Uni(0, 2\pi), T \sim Exp(1)$$

تعریف می‌کنیم:

$$X = \sqrt{T} \cos U, Y = \sqrt{T} \sin U$$

توزیع توأم X و Y را به دست آورید. آیا این دو متغیر تصادفی از هم مستقل‌اند؟

مسئله ۳. یه مرغ دارم *

یک مرغ روزی $N \sim Poisson(\lambda)$ تخم می‌گذارد. هر تخم به صورت مستقل به احتمال p تبدیل به جوجه می‌شود. تعداد تخم‌های جوجه شده را با $X|N \sim Bin(N, p)$ مدل‌سازی می‌کنیم.

(الف) تابع جرم احتمال X را بیابید.

(ب) اگر Y متغیر تصادفی نشان‌دهنده تعداد تخم‌های جوجه نشده باشد، تابع توزیع توأم X و Y را بیابید. آیا X و Y از یکدیگر مستقل‌اند؟

(ج) هم‌بستگی بین N و X را بیابید.

مسئله ۴. همگی متحد شویم *

کوواریانس شرطی X و Y به شرط Z ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cov(X, Y|Z) = E[(X - E[X|Z])(Y - E[Y|Z])|Z]$$

با توجه به تعریف فوق، گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(الف)

$$Cov(X, Y|Z) = \mathbb{E}[XY|Z] - \mathbb{E}[X|Z]\mathbb{E}[Y|Z]$$

(ب)

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[Cov(X, Y|Z)] + Cov(\mathbb{E}[X|Z], \mathbb{E}[Y|Z])$$

(ج)

$$Var(X) = \mathbb{E}[X|Y] + Var(\mathbb{E}[X|Y])$$

مسئله ۵. باینری کامل

فرض کنیم S مجموعه رشته‌های باینری به طول n باشد. گوییم S, k -کامل است اگر به ازای هر اندیس $1 \leq i_1 \leq i_k \leq n$ و هر رشته باینری $b_1 \dots b_k$ به طول k ، رشته $s_{i_1} \dots s_{i_k} \in S$ وجود داشته باشد که $s_{i_1} \dots s_{i_k} = b_1 \dots b_k$. برای مثال به ازای $n = 3$ ، $S = \{001, 010, 011, 100, 101, 110\}$ یک مجموعه ۲-کامل است. نشان دهید اگر نامساوی $\binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^m < 1$ برقرار باشد، آنگاه یک مجموعه k -کامل به اندازه حداکثر m وجود دارد.

مسئله ۶. دو دانش‌جو *

دو دانش‌جو به صورت مستقل در حال حل یک تمرین هستند. دانش‌جوی اول در $Y_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ و دانش‌جوی دوم در $Y_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ این تمرین را به سرانجام می‌رسانند.

(الف) تابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی $\frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$ را بیابید.

(ب) به چه احتمالی، دانش‌جوی اول زودتر از دانش‌جوی دوم تمرین را تمام می‌کند؟

مسئله ۷. مین مکس *

فرض کنید U_1, U_2, U_3 سه متغیر مستقل و یکنواخت روی $(0, 1)$ باشند. اگر

$$L = \min(U_1, U_2, U_3)$$

و

$$M = \max(U_1, U_2, U_3)$$

(الف) تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای و تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای M را بیابید.

(ب) توزیع توأم L و M را به دست آورید.

(ج) تابع چگالی احتمال M به شرط L را بیابید.

مسئله ۸. جمع پواسون‌ها

فرض کنید $X = V + W$ و $Y = V + Z$ که V و W و Z سه متغیر تصادفی مستقل پواسون با پارامتر λ اند.

(الف) کوواریانس X و Y را محاسبه کنید.

(ب) آیا X و Y مستقل‌اند؟ آیا X و Y به شرط V مستقل‌اند؟

(ج) توزیع توأم X و Y را محاسبه کنید.

مسئله ۹. لاله‌ی مرداب *

با استفاده از LoTUS و با توجه به تابع چگالی احتمال توام زیر، مقدار $E[XY^2]$ را به دست آورید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

سوالات عملی *

سوالات عملی که تحویل آن‌ها اجباری است، به صورت یک ژوپیتر نوت‌بوک در کوئرای درس قرار داده شده‌اند. لازم است این ژوپیتر نوت‌بوک را طبق دستورالعمل‌های نوشته شده در آن، تکمیل کرده و در کوئرا آن را آپلود کنید.

موفق باشید! (: