دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

تمرین سری چهارم

مهلت بخش تئوری: ۱۸ آذر
مهلت بخش عملی : ۲۱ آذر

مدرس: دکتر مطهری

سوال ۱

فرض کنید که متغیر های تصادفی X, Y متغیرهای تصادفی مستقل با چگالی احتمال $exp(x)$ و $exp(y)$ باشند. تابع چگالی احتمال $Z1, Z2, Z3$ در رابطه ۱ را برحسب x و y بدست آورید.

$$Z1 = min(X, Y), Z2 = min(X, Y)/max(X, Y), Z3 = X/Y \qquad (1)$$

سوال ۲

متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $f(x)$ است. به‌ازای چه‌مقداری از c حاصل $E(|X - c|)$ کمینه می‌شود.

سوال ۳

گزاره‌ی ۲ زیر را ثابت نمایید.

$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var(E[X|Y]) \qquad (2)$$

سوال ۴

می‌خواهیم با توزیع یکنواخت از روی دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع یک نقاطی را انتخاب کنیم.

الف)

توضیح دهید که چرا انتخاب x به صورت یکنواخت از بازه‌ی $[-1, +1]$ و انتخاب y به صورت یک‌نواخت از $[-\sqrt{1 - x^2}, +\sqrt{1 - x^2}]$ روش مناسبی برای نمونه برداری نیست.
عملی: این نمونه برداری را با R شبیه سازی و تحلیل کنید.

ب)

توضیح دهید که چرا انتخاب r به صورت یکنواخت از بازه‌ی $[0, +1]$ و انتخاب θ به صورت یک‌نواخت از $[-\pi, +\pi]$ انتخاب مناسبی نیست.
عملی: این نمونه برداری را با R شبیه سازی و تحلیل کنید.

ج)

با فرض امکان نمونه‌برداری از توزیع یکنواخت خطی چگونه می‌توانیم به صورت یک‌نواخت از سطح دایره نمونه‌برداری کنیم؟
عملی: پاسخ خود را با R شبیه‌سازی و بررسی کنید.

سوال ۵

بردار تصادفی $x^T = [x_1, x_2, ..., x_n]$ برداری است که هر عضو آن متغیری تصادفی است. توزیع نرمال چند متغیره از رابطه‌ی ۳ بدست می‌آید. یک تعریف قابل توجه و مشابهی که برای این توزیع وجود دارد به این صورت است که یک بردار تصادفی دارای توزیع نرمال چندمتغیره است اگر هر ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی x_i دارای توزیع نرمال یک متغیره باشد.

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^k|\Sigma|}} \tag{3}$$

الف)

در رابطه با مفهوم μ و Σ در این رابطه توضیح بدهید.(نیازی به اثبات نیست.)

ب)

توزیع مشترک دو متغیر نرمال مستقل را به فرم توزیع نرمال چند متغیره بنویسید.

ج)

اگر توزیع مشترک دو متغیر تصادفی X, Y یک توزیع نرمال دو متغیره باشد، نشان‌دهید که در صورتی که $Var(X) = Var(Y)$ باشد، دو متغیر تصادفی $X - Y, X + Y$ از همدیگر مستقل هستند.

سوال ۶

می‌دانیم دو متغیر تصادفی $X \sim unif(-۱, ۱)$ و $Y = X^۲$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف)

کوواریانس X و Y را به دست بیاورید.

ب)

آیا این نتیجه تعارضی با وابستگی X و Y دارد؟ چرا؟ در مورد معنای کوواریانس دو متغیر تصادفی بحث کنید.

ج)

G وT در ۴ دو متغیر تصادفی وابسته‌ی خطی هستند. کوواریانس را برای آن‌ها محاسبه کنید. در چه صورتی کوواریانس این دو متغیر صفر می‌شود ؟

$$G = aT + b \tag{۴}$$

سوال ۷

الف)

نامساوی چبیشف ۵ را به کمک نامساوی مارکف اثبات نمایید.

$$p(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^۲}{k^۲} \tag{۵}$$

در رابطه‌ی بالا X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ است.

ب)

فرض کنید که X یک متغیر تصادفی uniform در بازه‌ی ۰ تا ۱۰ باشد.

$$\begin{gathered} p(|X - ۵| \geq ۲) \\ p(|X - ۵| \geq ۴) \\ p(|X - ۵| \geq ۵) \end{gathered} \tag{۶}$$

ابتدا میانگین و واریانس توزیع X را بیابید، سپس به کمک نامساوی چبیشف برای هرکدام از احتمال‌های خواسته‌شده در معادله‌ی ۶ یک کران بالا پیدا کنید و به مقایسه با احتمال واقعی هرکدام بپردازید.

سوال ۸

$X_۱, X_۲, X_۳, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی i.i.d هستند.
قانون ضعیف اعداد بزرگ بیان می‌کند :
$lim_{n\to+\infty} P\{|\bar{x}-\mu| > \epsilon\} = ۱$
و قانون قوی اعداد بزرگ بیان می‌کند:
$P(lim_{n\to+\infty}\bar{x} = \mu\ \} = ۱$
قضیه‌ی حد مرکزی بیان می‌کند که $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{n}}$ در توزیع به $N(۰, ۱)$ میل می‌کند.

الف)

با استفاده از نامساوی چبیشف قانون ضعیف اعداد بزرگ را اثبات کنید.

ب)

در مورد تفاوت قانون ضعیف اعداد بزرگ و قانون قوی اعداد بزرگ بحث کنید.

چ)

احتمال معیوب بودن لامپ‌های ساخت شرکت نورافشان برابر با ۰/۲ است. با استفاده از قضیه حد مرکزی و با استفاده از تابع توزیع تجمعی نرمال به عنوان یک تابع جعبه سیاه تخمین احتمال برای این که از ۱۰۰۰۰ لامپ ساخته شده توسط این شرکت حداقل ۲۲۰۰ لامپ خراب باشد را محاسبه کنید.

د)

متغیر تصادفی X با توزیع پواسون و میانگین ۱۰۰ را در نظر بگیرید. احتمال این که X بزرگتر از ۱۴۰ باشد را به کمک قضیه‌ی حدمرکزی و با استفاده از تابع توزیع تجمعی نرمال تخمین بزنید.

ه)

قسمت عملی: قضیه حد مرکزی را در $n = ۵۰$ برای هنگامی که $X_i \sim unif(۰, ۱)$ شبیه‌سازی کنید.