if $X \perp\!\!\!\perp Y = 0$ — 1

$$P_Z(z) = \sum_x P_X(x) P_Y(z-x)$$

$$\Rightarrow P_Z(z) = \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\alpha}\alpha^x}{x!} \frac{e^{-\beta}\beta^{z-x}}{(z-x)!} = \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-(\alpha+\beta)}\alpha^x \beta^{z-x}}{z!}\binom{z}{x}$$

$$= \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{z!}\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}\alpha^x\beta^{z-x}$$

$$= \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{z!}(\alpha+\beta)^z \sim \text{poiss}(\alpha+\beta)$$

— 2

$$\int_0^\infty P(X \geq x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty f_X(t)\,dt\right)dx$$

$$= \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(t)\,dt\,dx = \int_0^\infty \int_0^t f_X(t)\,dx\,dt$$

$$= \int_0^\infty t f_X(t)\,dt = E[X]$$

— 3

$$E[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |X| f_X(x)\,dx = 2\int_0^\infty x f_X(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left[-\sigma^2 e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\right]_{x=0}^{\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\sigma^2 = \boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma}$$

سوال ۴)

متغیر تصادفی که نمایانگر اثرگذار بودن دارو است. $\leftarrow B$

$$P(B=1)=0.75 \quad , \quad P(B=0)=0.25$$

$X \leftarrow$ متغیر تصادفی تعداد دفعات سرماخوردگی در سال

$$\left.\begin{aligned} P(X=2|B) &= \frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3} = \tfrac{9}{2}\cdot e^{-3} \\ P(X=2|B') &= \frac{5^2}{2!}\cdot e^{-5} = \tfrac{25}{2}\cdot e^{-5} \end{aligned}\right\} \rightarrow P(X=2) = \text{مجموع اینها}$$

$$P(B|X=2) = \frac{P(X=2|B)P(B)}{P(X=2|B)\underbrace{P(B)}_{P(B=1)} + P(X=2|B')\underbrace{P(B')}_{P(B=0)}}$$

$$= \frac{\tfrac{9}{2}\cdot e^{-3} \times 0.75}{\tfrac{9}{2}\cdot e^{-3}\cdot 0.75 + \tfrac{25}{2}\cdot e^{-5} \times 0.25}$$

$$= \frac{1}{1+\tfrac{25}{27}e^{-2}} = \underline{0.8886}$$

سوال ۵)

استفاده از تعریف امید ریاضی:

$$E[X] = \sum_{k \geq 0} \frac{k \cdot \mu^k e^{-\mu}}{k!} = \sum_{k \geq 1} k \cdot \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

$$= \sum_{k \geq 1} \frac{\mu^k e^{-\mu}}{(k-1)!}$$

$$= \mu e^{-\mu} \left(\sum \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \right) = \mu e^{-\mu} \left(1 + \mu + \mu^2/2! + \mu^3/3! + \dots \right)$$

$$= \mu e^{-\mu} \cdot e^{\mu} = \mu$$

سوال ۶)

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر آجیل نوع i انتخاب شده باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

متغیر تصادفی

$$X = \sum_{i=1}^{N} I_i \quad , \quad E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{N} I_i\right] = \sum_{i=1}^{N} [I_i]$$

$$P(I_i = 0) = (1 - p_i)^n \Rightarrow P(I_i = 1) = 1 - (1 - p_i)^n$$

$$\Rightarrow E[I_i] = 1 - (1 - p_i)^n$$

$$\rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{N} \left(1 - (1 - p_i)^n\right)$$