# آمار و احتمال مهندسی

**نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰**

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: آرین احدی نیا، مهدی لطفیان

تمرین دوم

موضوع تمرین: استقلال، متغیرهای تصادفی گسسته و امید ریاضی

# سوالات

## مسئله‌ی ۱. تاس بازی

تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید و تاس B دارای ۲ وجه قرمز و ۴ وجه سفید است. یک سکه را پرتاب میکنیم، اگر شیر ظاهر شود بازی را با تاس A و اگر خط ظاهر شود با تاس B انجام میدهیم.

### الف

نشان دهید که احتمال قرمز آمدن در هر پرتاب $\frac{1}{2}$ است.

### ب

اگر دو پرتاب اولیه قرمز باشد، احتمال اینکه نتیجه سومین پرتاب قرمز باشد چه قدر است؟

### ج

اگر دو پرتاب اولیه قرمز باشد، احتمال اینکه تاس A پرتاب شده باشد چه قدر است؟

## مسئله‌ی ۲. دانشگاه هیبرید

پس از امکان دوباره بازگشایی دانشگاه ها، قرار است برخی کلاسها با توجه به تعداد دانشجوی زیاد به حالت هیبریدی درآیند. یعنی عده ای به صورت مجازی و عده ای به صورت حضوری وارد کلاس شوند. فرض کنید تعداد دانشجویانی که به صورت حضوری وارد کلاس میشوند از توزیع Poisson با پارامتر $\lambda_1$ و تعداد دانشجویانی که به صورت مجازی وارد کلاس میشوند از توزیع Poisson با پارامتر $\lambda_2$ پیروی میکند. اگر مجموع افراد حاضر در کلاس n نفر باشند. احتمال اینکه k نفر به صورت حضوری شرکت کرده باشند را محاسبه کنید.

* راهنمایی: باید احتمال شرطی زیر را محاسبه نمایید:

$$P(\text{حضوری} = k \mid \text{حضوری} + \text{مجازی} = n)$$

## مسئله‌ی ۳. زنگ اثبات

### الف

اگر متغیر تصادفی X از توزیع Poisson با پارامتر $\lambda$ پیروی کند، اثبات کنید که $E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}]$

### ب

اگر X متغیر تصادفی پوآسون باشد، مقدار $E[X(X-۱)(X-۲)...(X-k)]$ را برای هر مقدار طبیعی k محاسبه کنید.

## مسئله‌ی ۴. تاس بازی ۲

در یک بازی، شما تاس سالمی را متناوبا پرتاب میکنید. در این بازی میتوانید در هر پرتابی که خواستید متوقف شوید، ولی اگر عدد ۱ ظاهر شد، مجبور به توقف هستید. در هر صورت امتیاز شما مربع عدد ظاهر شده در آخرین پرتاب خواهد بود.

### الف

اگر استراتژی شما توقف در صورت ظاهر شدن ۵ یا ۶ باشد، امید ریاضی امتیاز خود را محاسبه کنید.

### ب

فرض کنید استراتژی شما این است که عدد یا اعدادی از پیش تعیین کرده و در صورت ظاهر شدن آنها متوقف شوید. بهترین استراتژی از این نوع در راستای امتیاز بالاتر که میتوانید انتخاب کنید کدام است؟ معیار بهتر بودن را نیز ذکر کنید.

## مسئله‌ی ۵. مسابقه تلویزیونی

مهدی در یک مسابقه تلویزیونی شرکت کرده است. در هر مرحله از مسابقه به احتمال $۱-p$ ، ۱ دلار به جایزهٔ مهدی اضافه شده و به احتمال $p$، جایزه او صفر شده و از مسابقه حذف میشود. مهدی در هر مرحله میتواند تصمیم بگیرد که برای مرحله بعدی بازی را ادامه دهد یا خیر. او بهتر است پس از چند مرحله از مسابقه خارج شود تا قبل از اینکه جایزه اش ۰ شود، بیشینه میانگین آماری جایزه را بدست آورد؟

## مسئله‌ی ۶. زنگ اثبات ۲

### الف

متغیر تصادفی گسسته $X$ از توزیع هندسی با پارامتر p تبعیت میکند. عبارت زیر را اثبات کنید.

$$E\left[\frac{۱}{X}\right] = \frac{-p\ln p}{۱-p}$$

* راهنمایی: در عبارت $\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{a^i}{i}$، میتوان از جایگزینی زیر استفاده کرد:

$$\frac{a^i}{i} = \int_{۰}^{a} x^{i-۱}dx$$

### ب

$X$ یک متغیر تصادفی گسسته است که فقط میتواند مقادیر طبیعی بگیرد. نشان دهید:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(x \geqslant i)$$

## مسئله‌ی ۷. تصحیح عادلانه

در زمان آزمون‌های حضوری، در برگه اول پاسخنامه، دانشجویان باید مشخصات خود را درج میکردند. مهدی برای رعایت بی‌طرفی کامل در تصحیح برگه‌ها، صفحه اول تمام برگه‌ها را جدا می‌کند تا رفاقتش در عدالتش تاثیر نگذارد. مادامی که فکر می‌کرد خیلی کار قشنگی انجام داده آرین به او یادآوری می‌کند که بر روی برگه‌ها شماره‌گذاری انجام نداده است و امکان تطبیق برگه‌ها با دانشجویان وجود ندارد. مهدی برای آبروداری تصمیم می‌گیرد که برگه‌ها را به صورت تصادفی با دانشجویان تطبیق دهد. آرین بسیار نگران است و از شما می‌خواهد که محاسبه کنید که به طور متوسط چند نفر با این ایده درخشان برگه خود را دریافت خواهند کرد؟

## مسئله‌ی ۸. اورژانس

تعداد بیمارانی که هر روز به اورژانس مراجعه می‌کنند را متغیر تصادفی $N$ در نظر می‌گیریم که از توزیع Poisson با پارامتر $\lambda$ پیروی می‌کند و تعداد افرادی که به عمل جراحی اورژانسی نیاز پیدا می‌کنند از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $N$ و $p$ پیروی می‌کند. آیا تعداد افرادی که به عمل جراحی نیاز پیدا می‌کنند از تعداد کسانی که به عمل جراحی نیاز پیدا نمی‌کنند مستقل است؟ اثبات کنید.

## مسئله‌ی ۹. کدام جهت

فرض کنید که آرین در یک فضای $n$ بعدی در مبدا مختصات قرار دارد. در هر دقیقه آرین یک واحد در جهت یا در خلاف جهت هر یک از محورها به احتمال برابر حرکت می‌کند. (احتمال حرکت در هر جهت برابر $\frac{1}{2n}$ است.)

### الف

اگر آرین $k$ دقیقه در محیط بوده باشد و $k \geqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ باشد، چقدر احتمال دارد که پس از آن در نقطه‌ای با مختصات صحیح $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ باشد.

### ب

اگر آرین $k$ دقیقه در محیط بوده باشد و $k \geqslant |x_1|$ باشد، چقدر احتمال دارد که پس از آن در نقطه‌ای که مختصه اول آن برابر $x_1$ باشد. دقت بفرمایید که روی مختصه‌های دیگر شرطی وجود ندارد.

### ج

اگر دقیقا در $k'$ دقیقه از کل $k$ دقیقه آرین روی محور مختصاتی اول حرکت کرده باشد، و $k \geqslant |x_1|$ باشد، چقدر احتمال دارد که پس از آن در نقطه‌ای که مختصه اول آن برابر $x_1$ باشد. دقت بفرمایید که روی مختصه‌های دیگر شرطی وجود ندارد.

## نکات مهم

- بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم HW#_[STD-Num] آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۳ فروردین می‌باشد.

موفق باشید :)