به نام خدا

* قضیه پیوستگی احتمال *

الف) (خود قضیه پیوستگی احتمال!)

مسئله را برای حالتی که $\{E_i\}$ صعودی باشد حل می‌کنیم

حالت نزولی نیز به خودی خود اثبات می‌شود.

دنباله‌ی $\{E_i\}$ از رویدادها را افزایشی یا صعودی

می‌نامیم هرگاه $\forall i \in \mathbb{N}: \quad E_i \subseteq E_{i+1}$

همچنین $\lim_{i \to \infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

تعریف کنید

$$F_1 = E_1$$

$$F_2 = E_2 \setminus E_1 \ , \ F_3 = E_3 \setminus E_2 \ , \ \ldots$$

پس بوضوح داریم:

$$\forall n: \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_n$$

$$\mathbb{P}\left(\lim_{i \to \infty} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)$$

توجه داشته باشید تعریف $\{F_i\}$ برای این بود که به جای $\{E_i\}$ یک سری مجموعهٔ دو به دو مجزا داشته باشیم که اجتماع هر n تای نخستشان برابر $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ باشد.

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}_{E_n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

پس حکم ثابت شد.

برای حالت نزولی $\{E_i\}$ نیز یک ایده این است که به جای $\{E_i\}$ ، $\{E_i^c\}$ را در نظر بگیرید (که یک دنباله صعودی اند و با استفاده از حالت صعودی حکم را نتیجه بگیرید)

* کلاً توابع پیوسته دوست داشتنی ترند ... چه خوب که تابع احتمال نیز چنین است :)

ب) اگر تعریف کنیم $E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} C_i$

موضوع داریم: $\forall i \in \mathbb{N} \quad E_{i+1} \subseteq E_i$

$\Rightarrow \{E_i\}$ یک دنباله نزولی اند

(الف) $$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)}_{\text{مطلوب سؤال}} = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_i)$$

$D_1 = C_1 \; , \forall n > 1 : D_n = C_n \setminus C_{n-1}$ قرار دهید

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} C_i\right) = \mathbb{P}\left(C_n \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} D_i\right)$$

$$\leq \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} D_i\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} C_i}_{E_n}\Big) \leq \lim \left(\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} D_i\right)\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(C_n)}_{0 \;\text{فرض}} + \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} D_i\right)$$

$$\le 0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(D_k)$$

می دانیم طبق فرض سؤال $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(D_k) = C$ و $C < \infty$. پس

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(D_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(C - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(D_i) \right)$$

$$= C - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(D_i)$$

$$= C - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(D_i) = 0$$

چون $0 \le \mathbb{P}(E)$

$$0 \le \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} C_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} C_i\right)$$

≤ 0 حکم اثبات شد Q.E.D

* اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(C_{n+1} \setminus C_n) = \infty$$

را نداشتیم آیا می‌توان به یکی از دو نتایج

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} C_i\right) = 0$$

یا

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} C_i\right) \neq 0$$

رسید؟ سعی کنید مثال نقض‌های خلاقانه بسازید.