دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی — نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

پاسخنامه تمرین سری پنجم

مدرس: مهدی جعفری — موعد تحویل: ۹ خرداد ۱۴۰۱

سؤال ۱ X و Y دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت در بازه $(0,1)$ هستند. احتمال اینکه نزدیک ترین عدد صحیح به $\frac{X}{Y}$ زوج باشد را محاسبه کنید. حاصل را به صورت $a\pi + b$ که a و b عدد حقیقی هستند، بنویسید.
راهنمایی: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$

پاسخ:

$2k - 0.5 \leq \frac{X}{Y} \leq 2k + 0.5$

$k = 0 \Rightarrow -0.5 \leq \frac{X}{Y} \leq 0.5, 0 \leq X, Y \leq 1 \Rightarrow Y \geq 2X$

$k \geq 1 \Rightarrow \frac{2X}{4k-1} \geq Y \geq \frac{2X}{4k+1}$

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y \geq 2X) + \sum_k \mathbb{P}(\frac{2X}{4k-1} \geq Y \geq \frac{2X}{4k+1})$

$\Rightarrow \mathbb{P} = \int_0^{0.5} \mathrm{d}x \int_{2X}^1 f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\frac{2X}{4k+1}}^{\frac{2X}{4k-1}} f(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{9}) + ... = \frac{5}{4} - \frac{\pi}{4}$

سؤال ۲ متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $i.i.d$ و دارای توزیع یکنواخت روی $[0,1]$ هستند. متغیرهای Z و W را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Z = X + Y, W = X - Y$$

الف) آیا W و Z از یکدیگر مستقل هستند؟

ب) اگر W و Z دارای توزیع گاوسی استاندارد باشند چطور؟ (امتیازی)

پاسخ:
الف) وابسته هستند. زیرا اطلاعات یکی از آن ها بر مقدار دیگری تاثیرگذار است. برای مثال اگر $Z = 2$ باشد. آنگاه با احتمال ۱، $X = Y = 1$ است و در نتیجه با احتمال ۱، $W = 0$. پس Z و W از هم مستقل نیستند.

ب) از آن جا که طبق فرض سوال X, Y گاوسی هستند و از یکدیگر مستقل هستند پس X, Y مشترکا گاوسی هستند. پس ترکیبات خطی آنان نیز نسبت به یکدیگر مشترکا گاوسی هستند.

همچنین میدانیم که میانگین X و Y برابر ۰ است پس میانگین W و Z نیز برابر ۰ است. پس داریم:

$cov(W,Z) = \mathbb{E}((W - \mathbb{E}(W))(Z - \mathbb{E}(Z))) = \mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = 0$
پس W, Z به هم ناهمبسته هستند و در نتیجه مستقل هستند.

سؤال ۳ ثابت کنید متغیرهای $X_1, ..., X_n$ مستقلند اگر و تنها اگر تابع توزیع توام آن ها به شکل زیر قابل بیان باشد.

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$$

پاسخ:

تعریف میکنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_i(x_i)\mathrm{d}x_i = k_i$$

ابتدا نشان میدهیم به ااى هر n در معادله $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$ داریم:

$$\prod_{i=1}^n k_i = 1$$

اثبات:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1)...g_n(x_n)dx_1...dx_n = \prod_{i=1}^n k_i$$

سپس برای اثبات حکم روی n استقرا میزنیم.

پایه استقرا: برای $n = 2$ میدانیم، اگر x_1 و x_2 مستقل باشند، آنگاه:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x1)f_2(x_2)$$

است. در نتیجه توزیع توام این دو متغیر به شکل $g_1(x_1)g_2(x_2)$ قابل بیان است.
همچنین اگر $f(x_1, x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2)$ داریم:

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x_2)g_1(x_1)dx_1 = g_2(x_2)\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1)dx_1 = k_1 \cdot g_2(x_2) = g_2(x_2)/k_2$$

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x_2)g_1(x_1)dx_2 = g_1(x_1)\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x_2)dx_2 = k_2 \cdot g_1(x_1) = g_1(x_1)/k_1$$

$$\rightarrow f(x_1, x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2) = k_1k_2f_1(x_1)f_2(x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

بنابراین دو متغیر x_1 و x_2 مستقلند.

قسمت اول: گام استقرا: ثابت میکنیم اگر برای n متغیر مستقل $x_1, ..., x_n$ داشته باشیم $f(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ آنگاه برای $n+1$ متغیر مستقل $x_1, ..., x_{n+1}$ خواهیم داشت: $f(x_1, ..., x_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} f_i(x_i)$. داریم:

$$f(x_1, ..., x_{n+1}) = f(x_1, ..., x_n|x_{n+1})f_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_1, ..., x_n)f_{n+1}(x_{n+1}) = f_{n+1}(x_{n+1}\prod_{i=1}^n f_i(x_i) = \prod_{i=1}^{n+1} f_i(x_i)$$

(همانطور که مشاهده میشود فرم مذکور در صورت سوال قابل مشاهده است ($f_i = g_i$)).

قسمت دوم: گام استقرا: میخواهیم ثابت کنیم اگر: $f(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$ آنگاه متغیرهای $x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ از هم مستقلند.
با انتگرال گیری روی x_{n+1} به دست می آید:

$$f(x_1, ..., x_n) = k_{n+1}\prod_{i=1}^n g_i(x_i)$$

بنابراین با توجه به فرض استقرا متغیرهای $x_1, ..., x_n$ از یکدیگر مستقلند(عدد ثابت k_{n+1} را می توان به هر کدام از توابع نسبت داد.)
بنابراین اکنون کافیست استقلال x_{n+1} را از بقیه متغیرها ثابت کنیم:

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n, x_{n+1})dx_1, ..., dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1)...g_n(x_n)g_{n+1}(x_{n+1})dx_1...dx_n = k_1k_2...k_ng_{n+1}(x_{n+1}) = g_{n+1}(x_{n+1})/k_{n+1} \quad (*)$$

$$f(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_{n+1})dx_{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1)..g_{n+1}(x_{n+1})dx_{n+1} = k_{n+1}\prod_{i=1}^n g_i(x_i) \quad (**)$$

$$(*), (**) \rightarrow f(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} g_i(x_i) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i) \cdot g_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_1, ..., x_n, x_n)f_{n+1}(x_{n+1})$$

در نتیجه همه متغیرها مستقلند.

سؤال ۴ X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

می دانیم به شرط $X = x$، متغیر Y دارای توزیع یکنواخت روی بازه $[-x, x]$ است.

الف) تابع چگالی احتمال مشترک X, Y را به دست آورید.

ب) تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی Y را بیابید.

پ) مقدار $\mathbb{P}(|Y| < X^3)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$Y|X \sim f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2x} \quad -x \leq y \leq x$$

$$f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = 1 \quad |y| \leq x, 0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = \int_{|y|}^{1} 1dx = 1 - |y| \quad |y| < 1$$

$$\mathbb{P}[|Y| < X] = \int_0^1 \int_{-x^3}^{x^3} 1dydx = \frac{1}{2}$$

سؤال ۵ X و Y دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت در بازه $(0,1)$ هستند. واریانس فاصله $|X - 0.5|$ و $2Y$ را بیابید.

پاسخ:

$Z = |2Y - |X - 0.5|| \to \mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(|2Y - |X - 0.5|| = z) = \mathbb{P}(2Y - |X - 0.5| = z) + \mathbb{P}(|X - 0.5| - 2Y)$
$= \mathbb{P}(2Y - z = X - 0.5, X > 0.5) + \mathbb{P}(2Y - z = 0.5 - X, X < 0.5) + \mathbb{P}(X - 2Y = z + 0.5, X > 0.5) +$
$\mathbb{P}(X + 2Y = 0.5 - Z, X < 0.5) =$
$(\int_{0.5}^{min(2.5-z,1)} dxdy + \int_{max(z-1.5,0}^{0.5} dxdy + \int_{min(1,0.5+z)}^{1} dxdy + \int_0^{max(0.5-z,0)})/2$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2 - z & 1.5 \leq z \leq 2 \\ 0.5 & 0.5 \leq z \leq 1.5 \\ 1 - z & 0 \leq z \leq 0.5 \\ 0 & o.w. \end{cases} \tag{۱}$$

$\mathbb{E}[Z] = \int_0^{0.5} z(1-z)dz + \int_{0.5}^{1.5} 0.5zdz + \int_{1.5}^{2} (2-z)zdz = \frac{19}{24}$
$\mathbb{E}[Z^2] = \int_0^{0.5} z^2(1-z)dz + \int_{0.5}^{1.5} 0.5z^2dz + \int_{1.5}^{2} (2-z)z^2dz = \frac{11}{12}$

$$var[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \frac{167}{576}$$

سؤال ۶ نقطه (X, Y, Z) به صورت یکنواخت از درون کره به شعاع r انتخاب شده است.

الف) تابع چگالی احتمال توأم سه متغیر X, Y, Z را به دست آورید.

ب) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر X, Y را به دست آورید.

پ) انتگرالی را که بیانگر توزیع حاشیه ای متغیر X باشد، بنویسید. (نیازی به محاسبه این انتگرال نیست.)

پاسخ:
الف) مانند حالت دو بعدی که توزیع یکنواخت به معنی این است که احتمال با مساحت متناسب است، در سه بعد، نقش مساحت را حجم ایفا میکند:

$$Volume(A) = \frac{4\pi}{3}r^3$$

بنابراین تابع توزیع PDF توام این سه متغیر برابر است با:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{Volume(A)} & (x,y,z) \in Volume(A) \\ 0 & o.w. \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{4\pi r^3} & x^2+y^2+z^2 \leq r^2 \\ 0 & o.w. \end{cases} \tag{۲}$$

ب) در اینجا توزیع توام سه متغیر داریم و به دنبال توزیع دوتای آنها هستیم. بنابراین باید توزیع حاشیه ای را در حالتی که میخواهیم Z را از توزیع توام حذف کنیم، محاسبه کنیم.

$$f_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)dz = \frac{3}{4\pi r^3}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz = \frac{3}{2\pi r^3}\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

ج) میتوان از نتایج قبل استفاده کرد. مشابه قبل در حالتی که $-r \leq x \leq r$ تابع چگالی حاشیه ای X را از تابع چگالی توام X و Y برابر است با:

$$f_X(x) = \frac{3}{2\pi r^3}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}dy$$

سؤال ۷ تابع توزیع توأم X,Y به شرح زیر داده شده است. توزیع متغیر های خواسته شده را بیابید.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف) $X+Y$

ب) XY

پ) Y/X

ت) $Y-X$

پاسخ:
الف)

$$Z_1 = X+Y$$

$$F_{Z_1}(z) = \mathbb{P}(X+Y \leq z) = \begin{cases} \int_0^z \int_0^{z-y} f_{XY}(x,y)dxdy & 0 \leq z \leq 1 \\ 1-\int_{z-1}^1 \int_{z-y}^1 f_{XY}(x,y)dxdy & 1 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} \int_0^z f_{XY}(z-y,y)dy & 0 \leq z \leq 1 \\ \int_{z-1}^1 f_{XY}(z-y,y)dy & 1 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} z^2 & 0 \leq z \leq 1 \\ z(2-z) & 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

ب)

$$Z_2 = XY$$

$$F_{Z_2}(z) = \mathbb{P}(XY \leq z) = 1-\int_z^1 \int_{\frac{z}{y}}^1 f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$f_{Z_2}(z) = \int_z^1 \frac{1}{y} f_{XY}(\frac{z}{y},y)dy = \int_z^1 \frac{1}{y}(\frac{z}{y}+y)dy = 2(1-z), 0 < z < 1$$

ج)

$$Z_3 = \frac{Y}{X}$$

$$F_{Z_3}(z) = \mathbb{P}(\frac{Y}{X} \leq z) = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^{zx} f_{XY}(x,y)dxdy & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \int_0^1 \int_0^{\frac{y}{z}} f_{XY}(x,y)dxdy & 1 \leq z. \end{cases}$$

$$f_{Z_3}(z) = \begin{cases} \int_0^1 x f_{XY}(x,zx)dx & 0 \leq z \leq 1 \\ \int_0^1 \frac{y}{z^2} f_{XY}(\frac{y}{z},y)dy & 1 \leq z. \end{cases}$$

$$f_{Z_3}(z) = \begin{cases} \frac{1+z}{3} & 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{1+z}{3z^3} & 1 \leq z. \end{cases}$$

د)

$$Z_4 = Y - X$$

$$F_{Z_4}(z) = \mathbb{P}(Y - X \leq z) = \begin{cases} 1 - \int_z^1 \int_0^{y-z} f_{XY}(x,y)dxdy & 0 \leq z \leq 1 \\ \int_0^{z+1} \int_{y-z}^1 f_{XY}(x,y)dxdy & -1 \leq z \leq 0. \end{cases}$$

$$f_{Z_4}(z) = \begin{cases} \int_z^1 f_{XY}(y-z,y)dy & 0 \leq z \leq 1 \\ \int_0^{z+1} f_{XY}(y-z,y)dy & -1 \leq z \leq 0. \end{cases}$$

$$f_{Z_4}(z) = \begin{cases} 1 - z & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 + z & -1 \leq z \leq 0. \end{cases}$$

$$f_{Z_4}(z) = 1 - |z|, |z| < 1$$

سؤال ۸ تابع چگالی توام X, Y به صورت زیر داده شده است. مقدار C را بیابید. ($-y \leq x \leq y$ و $0 \leq y$)

$$f(x,y) = C(x^2 - y^2)e^{-y}$$

پاسخ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1 \to \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(y^2 - x^2)e^{-y}dxdy = 1$$

از آنجایی که محدوده هر یک از متغیرهای x و y در عبارت فوق توسط صورت سوال محدود شده است این محدودیت را در بازه انتگرال گیری لحاظ میکنیم.

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y^2 - x^2)e^{-y}dxdy = 1$
$\to c\int_0^{\infty} \int_{-y}^{y} (y^2 - x^2)e^{-y}dxdy = 1$
$\to c\int_0^{\infty} (y^2 x - \frac{x^3}{3})|_{-y}^{y} e^{-y}dy = 1$
$\to c\int_0^{\infty} (y^3 - \frac{y^3}{3} + y^3 - \frac{y^3}{3})e^{-y}dy = 1 \to 2c\int_0^{\infty} (y^3 - \frac{y^3}{3})e^{-y}dy = 1$
$\to \frac{4}{3}c\int_0^{\infty} y^3 e^{-y}dy = 1$

حل انتگرال بالا به صورت جز به جز انجام میگیرد:

$$\to \int_0^{\infty} y^3 e^{-y}dy = -y^3 e^{-y}|(+\infty, 0) + \int_0^{\infty} 3y^2 e^{-y}dy = \int_0^{\infty} 3y^2 e^{-y}dy$$

$$= -3y^2 e^{-y}(+\infty, 0) + \int_0^{\infty} 6ye^{-y}dy = \int_0^{\infty} 6ye^{-y}dy$$

$$= -6ye^{-y}(+\infty, 0) + \int_0^{\infty} 6e^{-y}dy = \int_0^{\infty} 6e^{-y}dy = -6e^{-y}(+\infty, 0) = 6$$

$$\frac{4}{3}c \cdot 6 = 1 \to c = \frac{1}{8}$$

سؤال ۹ دو آزمایش انجام شده است و نتایج نهایی به صورت X و Y گزارش شده اند. می دانیم X و Y مستقل هستند و از توزیع نرمال استاندارد پیروی می کنند. همبستگی ($correlation$) متغیر تصادفی $max(2X, Y)$ و متغیر تصادفی $min(2X, Y)$ را بدست آورید.
همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y به صورت روبرو تعریف می شود: $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
پاسخ:

$$cov(max(2X,Y), min(2X,Y)) = \mathbb{E}[max(2X,Y)min(2X,Y)] - \mathbb{E}[max(2X,Y)]\mathbb{E}[min(2X,Y)]$$

$$\rightarrow cov(max(2X,Y), min(2X,Y)) = 2\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[max(2X,Y)]\mathbb{E}[min(2X,Y)]$$

$$max(2X,Y) = \frac{2X+Y}{2} + \frac{|2X-Y|}{2}, min(2X,Y) = \frac{2X+Y}{2} - \frac{|2X-Y|}{2}, W = 2X - Y$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[W] = 2\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 0, var[W] = var[2X] + var[-Y] - 2cov(2X,Y) = 4var[X] + var[Y] = 5 \rightarrow W \sim N(0,5)$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(|W| \leq t) = \mathbb{P}(W \leq t) - \mathbb{P}(W \leq -t) = F_W(t) - F_W(-t)$$

$$\rightarrow f_{|W|}(t) = f_W(t) + f_W(-t) = 2f_W(t) \rightarrow \mathbb{E}(|W|) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} dz = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{10}{\pi}}$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[max(2X,Y)] = 0.5\mathbb{E}[|W|] = \sqrt{\frac{5}{2\pi}}, \mathbb{E}[min(2X,Y)] = -0.5\mathbb{E}[|W|] = -\sqrt{\frac{5}{2\pi}}$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[max(2X,Y)]\mathbb{E}[min(2X,Y)] = -\frac{5}{2\pi}, \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

$$\rightarrow cov(max(2X,Y), min(2X,Y)) = \frac{5}{2\pi} \rightarrow \rho_{2X,Y} = \frac{5}{4\pi}$$

موفق باشید