آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: پارسا حسینی، علیرضا فراشاه

تمرین اول

موعد تمرین: ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۹ اسفند

سوالات

مسئله‌ی ۱. اولیش

الف

در چند زیرمجموعه k عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., n\}$ هیچ دو عدد متوالی وجود ندارد؟

ب

تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1, 2, ..., n\}$ را بیابید که هیچ دو عدد متوالی ندارند.

حل.

الف

فرض کنید $1 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_k \leqslant n$ اعداد زیرمجموعه k تایی باشند. حالا مجموعه

$$\{a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, ..., a_k - (k-1)\}$$

را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه اعداد متوالی نداریم پس این k عدد متمایز هستند. پس از روی مجموعه اولیه به یک زیرمجموعه k تایی از اعداد ۱ تا $n - k + 1$ رسیدیم. دقت کنید که این عمل برگشت پذیر هم هست، یعنی مجموعه‌ها با شرط مسئله با زیرمجموعه‌های k تایی مجموعه $\{1, 2, ..., n-k+1\}$ در تناظر یک به یک هستند. پس تعداد این دو با هم برابر بوده که یعنی جواب می‌شود $\binom{n-k+1}{k}$.

ب

تعداد مورد نظر مسئله را A_n بنامید. داریم $A_1 = 2, A_2 = 3$. حالا رابطه بازگشتی برای محاسبه A_n می‌نویسیم. دقت کنید که هر زیر مجموعه مربوط به A_n یا شامل n هست یا نیست. اگر شامل n باشد که دیگر نمی‌تواند $n - 1$ داشته باشد و می‌شود A_{n-2} حالت. اگر هم شامل n نباشد که می‌شود A_{n-1} حالت. پس داریم

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

لذا جواب $n + 2$ امین عدد فیبوناچی می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۲. عروسی

روز جمعه عروسی علیرضا است و او میخواهد برای روشنایی جلوی خانه، ریسه ای شامل ۲۰ لامپ سری را از پارسا قرض بگیرد. تاریخ تولید لامپ‌ها اسفند ۹۹ است و پارسا ادعا دارد که احتمال سالم بودن یک لامپ پس از

یک سال، ۰/۹ است، به همین دلیل علیرضا تعدادی لامپ نو نیز خریداری کرده است تا در صورت نیاز لامپ‌های معیوب را جایگزین کند.

الف.

احتمال اینکه ریسه بدون تعویض هیچ لامپی روشن شود چقدر است؟

ب.

اگر ریسه روشن نشود، یک لامپ را با لامپی نو جایگزین میکنیم. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم تا مشکل برطرف شود. احتمال اینکه پس از ۵ بار تعویض لامپ، ریسه روشن شود چقدر است؟

ج.

احتمال اینکه حداکثر پس از ۵ بار تعویض لامپ ریسه روشن شود چقدر است؟

حل.

الف

$$P(\text{روشن شدن ریسه}) = P(\text{سالم بودن همه لامپ‌ها}) = (۰/۹)^{۲۰}$$

ب

حداکثر ۵ لامپ خراب داریم. مطمئن هستیم که آخرین تعویض مربوط به یکی از لامپ‌های خراب بوده.

$$P = \frac{\binom{۱۹}{۴}}{\binom{۲۰}{۵}} \times \binom{۲۰}{۱} \times (۰/۹)^{۱۹} \times (۰/۱) \rightarrow \text{احتمال ۱ لامپ خراب}$$

$$+\frac{\binom{۱۸}{۳}}{\binom{۲۰}{۵}} \times ۴ \times \binom{۲۰}{۲} \times (۰/۹)^{۱۸} \times (۰/۱)^{۲} \rightarrow \text{احتمال ۲ لامپ خراب}$$

$$+\frac{\binom{۱۷}{۲}}{\binom{۲۰}{۵}} \times ۶ \times \binom{۲۰}{۳} \times (۰/۹)^{۱۷} \times (۰/۱)^{۳} \rightarrow \text{احتمال ۳ لامپ خراب}$$

$$+\frac{\binom{۱۶}{۱}}{\binom{۲۰}{۵}} \times ۴ \times \binom{۲۰}{۴} \times (۰/۹)^{۱۶} \times (۰/۱)^{۴} \rightarrow \text{احتمال ۴ لامپ خراب}$$

$$+\frac{\binom{۱۵}{۰}}{\binom{۲۰}{۵}} \times ۱ \times \binom{۲۰}{۵} \times (۰/۹)^{۱۵} \times (۰/۱)^{۵} \rightarrow \text{احتمال ۵ لامپ خراب}$$

ج

مشابه قسمت ب احتمال روشن شدن ریسه را در ۰، ۱،...،۵ حرکت را با هم جمع میکنیم.

▷

مسئله‌ی ۳. قشنگ

یک کلمه انگلیسی را قشنگ می‌نامیم اگر کاراکتر تکراری نداشته باشد. بین تمام کلمات انگلیسی قشنگ یک کلمه را تصادفی یکنواخت انتخاب کرده‌ایم. نشان دهید احتمال اینکه کلمه انتخاب شده شامل هر ۲۶ حرف انگلیسی باشد تقریبا $\frac{۱}{e}$ است. (دقت کنید که منظور از کلمه، رشته‌ای نه لزوما با معنی از ۲۶ حرف انگلیسی است.)

حل.
تعداد کلمات بدون تکرار k حرفی به این صورت قابل شمارش است که ابتدا K حرف از ۲۶ حرف را انتخاب میکنیم و تمامی جایگشت های آن را در نظر میگیریم. بنابراین کل کلمات به صورت زیر بدست می آید.

$$\sum_{i=۱}^{۲۶} \binom{۲۶}{i} i! \tag{۱}$$

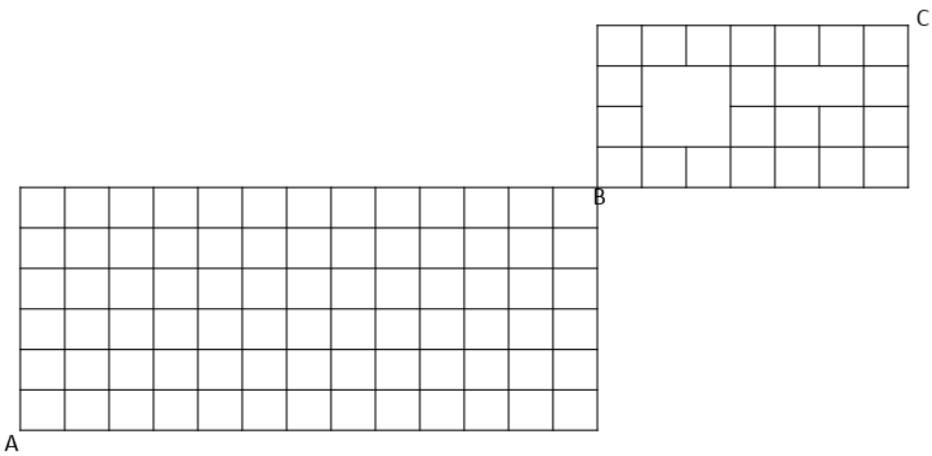
تعداد کلمات ۲۶ حرفی برابر !۲۶ است و از تقسیم این تعداد به کل به کسر زیر میرسیم

$$\frac{۲۶!}{\sum_{i=۱}^{۲۶} \frac{۲۶!}{k!(۲۶-k)!} i!} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲۵!} + \frac{۱}{۲۴!} + ... + \frac{۱}{۰!}} \tag{۲}$$

که مخرج کسر برابر ۲۶ جمله اول سری تیلور e^x به ازای $x = ۱$ میباشد. بنابراین این احتمال تقریبا برابر $\frac{۱}{e}$ است.
▷

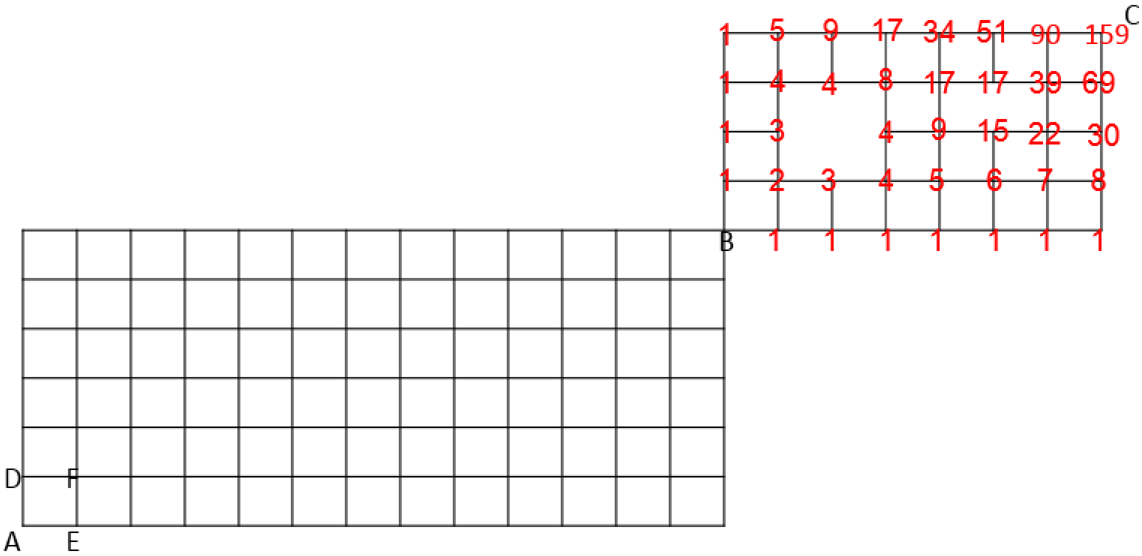
مسئله‌ی ۴. خرگوش احمق

خرگوشی میخواهد در نقشه زیر از نقطه A به C برود. خرگوش بر اساس تجربه میداند اگر فقط به بالا یا راست برود، زودتر به مقصد میرسد به همین دلیل در هر قدم یک خانه به سمت راست یا به سمت بالا حرکت میکند.همان گونه که از نقشه مشخص است، خرگوش در صورت رسیدن به بعضی نقاط، فقط یک انتخاب برای قدم بعدی دارد. خرگوش به چند طریق مختلف ممکن است این مسیر را طی کند؟



حل.

- تعداد راه های رسیدن از A به B



شکل ۱: اصل جمع

- تعداد راه‌های رسیدن از B به C

در نهایت جواب مساله طبق اصل ضرب برابر با ضرب جواب این دو قسمت خواهد بود.

- **قسمت اول**
برای رسیدن از نقطه A به B باید ۶ قدم به بالا و ۱۳ قدم به راست بردارد. پس تعداد راه‌های رسیدن از A به B برابر است با: $\binom{۱۹}{۶}$

- **قسمت دوم**
قسمتی از مسیر، از B به C ناقص است و نمیتوانیم مانند قسمت قبل عمل کنیم. برای حل این قسمت از اصل جمع استفاده میکنیم. به این صورت که تعداد راه‌های رسیدن از نقطه‌ای مانند A به نقطه‌ای مثل F (به شکل توجه کنید) برابر جمع تعداد راه‌های رسیدن از D به F و از E به F است. پس تعداد راه‌های رسیدن از B به C برابر ۱۵۹ است.

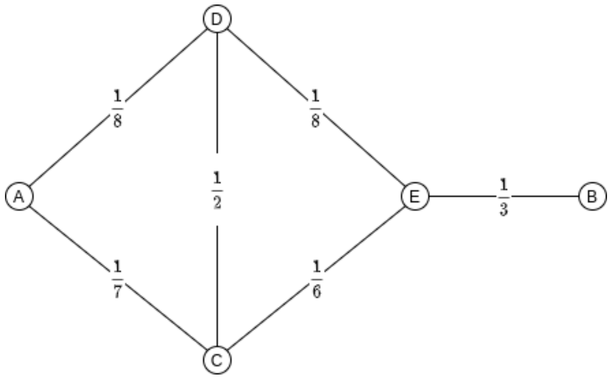
و جواب مساله برابر است با:

$$۱۵۹ \times \binom{۱۹}{۶}$$

▷

مسئله‌ی ۵. مخابرات

در یک شبکه مخابراتی تعدادی آنتن داریم که بعضیشان با هم ارتباط دارند. ارتباطات آنها در شکل زیر نشان داده شده است. روی هر یال احتمال خراب بودن آن در یک روز نوشته شده است. احتمال اینکه A بتواند با B در یک روز ارتباط برقرار کند را به دست آورید.



حل.

برای حساب کردن این احتمال، ابتدا احتمال عدم برقراری ارتباط (خراب بودن تمامی مسیر های ممکن از A به B) حساب میکنیم و سپس از اصل متمم استفاده میکنیم.

- در صورتی که یال EB خراب باشد که کار تمام است.
  در غیر این صورت، برای یال های DE و CE، ۴ حالت داریم:
- در صورتی که دو یال DE و CE خراب باشد ارتباط قطع میشود.
- اگر یال DE خراب و CE سالم باشد، باید AC حتما خراب باشد و یکی از دو یال AD یا DC خراب باشد.
- اگر یال CE خراب و DE سالم باشد، باید AD حتما خراب باشد و یکی از دو یال AC یا CD خراب باشد.
- اگر هر دوی DE و CE سالم باشد، باید AD و AC خراب باشد.

با توجه به موارد بالا داریم:

$$P(\text{عدم برقراری ارتباط}) = \frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}\times(\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۷}\times(\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۸})+\frac{۱}{۶}\times\frac{۷}{۸}\times\frac{۷}{۸}\times\frac{۱}{۸}\times(\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۷})+\frac{۷}{۸}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۸})$$

$$P(\text{برقراری ارتباط}) = ۱ - P(\text{عدم برقراری ارتباط}) \approx ۱ - ۰/۳۷ = ۰/۶۳$$

▷

مسئله‌ی ۶. ژنتیک بزی

گونه‌ای از بزهای کمیاب دو ژن دارند که هر کدام از یکی از والدینش به ارث میرسد. هر کدام از ژن ها از مجموعه $\{A, O\}$ هستند. بزهایی که $\{A, A\}$ یا $\{A, O\}$ هستند، گروه خونی A دارند و $\{O, O\}$ ها گروه خونی O دارند. لوسی و پدر و مادرش هر سه از گروه خونی A هستند ولی خواهر لوسی گروه خونی O دارد.

الف.

احتمال اینکه لوسی ژن O داشته باشد چقدر است؟

ب.

لوسی با بز نری با گروه خونی O ازدواج میکند. احتمال اینکه بچه اول آنها از گروه خونی O باشد، چقدر است؟

ج.

اگر بچه‌ی اول آنها از گروه خونی A باشد، احتمال اینکه لوسی ژن O داشته باشد چقدر است؟

د.

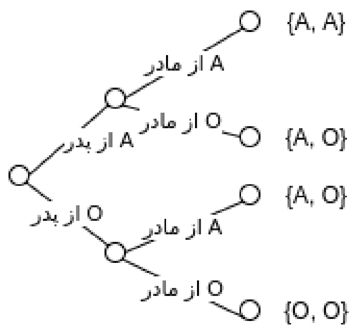
اگر بچه اول آنها از گروه خونی A باشد، احتمال اینکه بچه دوم آنها هم از همین گروه خونی باشد چقدر است؟

حل. از آنجا که خواهر لوسی گروه خونی O است، پس دارای دو ژن O میباشد که هر کدام از آنها از یکی از والدینش به ارث رسیده است. پس پدر و مادر، هر دو، $\{A, O\}$ هستند. حال لوسی ممکن است $\{A, A\}$ باشد یا $\{A, O\}$.

الف.

با توجه به شکل ۲ داریم:

$$P(\text{لوسی}\{A,O\}\text{بودن}) = \frac{\frac{۲}{۴}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۲}{۳}$$



شکل ۲: درخت حالات

ب.

یک ژن O از پدر به بچه به ارث میرسد. احتمال O شدن گروه خونی بچه برابر با احتمال به ارث رسیدن ژن O از لوسی به بچه است بنابراین داریم:

$$P(\text{ بودن بچه } \mathrm{O}) = P(\text{به ارث رسیدن ژن O از لوسی به بچه})$$

$$= P(\text{به ارث رسیدن ژن O از لوسی به بچه} \mid \text{لوسی}\{A,O\}\text{بودن}) \times P(\text{لوسی}\{A,O\}\text{بودن})$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

ج.

$$P(\text{لوسی داشتن ژن O} \mid \text{بچه اول A}) = P(\text{لوسی}\{A,O\}\text{بودن} \mid \text{بچه اول A})$$

$$= \frac{P(\text{بچه اول A} \mid \text{لوسی}\{A,O\}\text{بودن}) \times P(\text{لوسی}\{A,O\}\text{بودن})}{P(\text{بچه اول A} \mid \text{لوسی}\{A,O\}\text{بودن}) \times P(\text{لوسی}\{A,O\}\text{بودن}) + P(\text{بچه اول A} \mid \text{لوسی}\{A,A\}\text{بودن}) \times P(\text{لوسی}\{A,A\}\text{بودن})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

د.

$$P(\text{A بودن دومی} \mid \text{A بودن اولی}) = P(\text{A بودن دومی} \mid \text{A بودن اولی و بودن لوسی}\{A,O\}) \times P(\text{بودن لوسی}\{A,O\} \mid \text{A بودن اولی})$$

$$+ P(\text{A بودن دومی} \mid \text{A بودن اولی و بودن لوسی}\{A,A\}) \times P(\text{بودن لوسی}\{A,A\} \mid \text{A بودن اولی})$$

$$= P(\text{A بودن دومی} \mid \text{بودن لوسی}\{A,O\}) P(\text{بودن لوسی}\{A,O\} \mid \text{A بودن اولی})$$

$$+ P(\text{A بودن دومی} \mid \text{بودن لوسی}\{A,A\}) P(\text{بودن لوسی}\{A,A\} \mid \text{A بودن اولی})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

لازم به ذکر است که احتمال $P(\text{بودن لوسی}\{A,O\} \mid \text{A بودن اولی})$ در قسمت ج محاسبه شد و $P(\text{بودن لوسی}\{A,A\} \mid \text{A بودن اولی})$ نیز متمم همان احتمال است. ▷

مسئله‌ی ۷. رخنه

در یک برج ۲۰ طبقه، ۱۰۰ نفر از کارکنان یک شرکت مستقر هستند. به جز نگهبان در اصلی که آبی می‌پوشد، همه کارکنان با لباس سبز در شرکت حاضر می‌شوند. شب گذشته یک اقدام خرابکارانه در اتاق سرور صورت گرفت و برخی از اطلاعات برای عموم مردم فاش شد. آبدارچی ادعا می‌کند که فردی با لباس آبی را در حین ورود به اتاق سرور مشاهده کرده است. کارمندان شرکت با این سخنان آبدارچی، به نگهبان مشکوک می‌شوند. اما مدیر عامل به او فرصت دفاع می‌دهد. نگهبان هم ادعای بی گناهی می‌کند و با استخدام یک متخصص آمار و احتمالات، از او می‌خواهد که توانایی آبدارچی در تشخیص رنگ های سبز و آبی را بررسی نماید. داده هایی که متخصص جمع آوری می‌کند، نشان می‌دهند که آبدارچی در ۹۹ درصد موارد، رنگ پیراهن افرادی را که آبی پوشیده اند، آبی و در ۲ درصد مواقع، رنگ پیراهن افرادی را که سبز پوشیده اند، به عنوان آبی تشخیص می‌دهد. آیا با توجه به این آمار و ارقام، راهی وجود دارد که نگهبان بتواند استدلالی احتمالاتی مبنی بر کم اعتبار بودن حرف های آبدارچی بیاورد؟

حل. در ابتدا چهار رخداد را تعریف میکنیم.
Wb: شاهد پیراهن شخصی را آبی ببیند.
Wg: شاهد پیراهن شخصی را سبز ببیند.
Cb: شخص آبی پوشیده باشد
Cg: شخص سبز پوشیده باشد

$$P(C_b|W_b) = \frac{P(W_b|C_b)P(C_b)}{P(W_b)} \tag{۳}$$

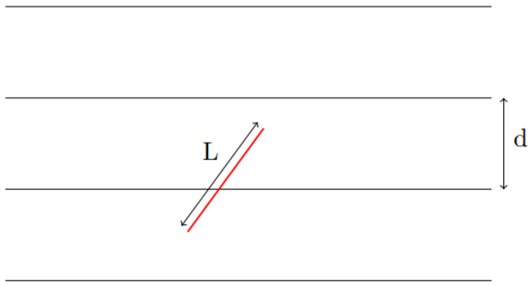
$$P(W_b) = P(W_b|C_b)P(C_b) + P(W_b|C_g)P(C_g) = ۰/۹۹ \times ۰/۰۱ + ۰/۰۲ \times ۰/۹۹ = ۰/۹۹ \times ۰/۰۳ \tag{۴}$$

$$P(C_b|W_b) = \frac{۰/۹۹ \times ۰/۰۱}{۰/۹۹ \times ۰/۰۳} = \frac{۱}{۳} \tag{۵}$$

چون احتمال آبی بودن پیراهن به شرط آبی دیده شدن توسط آبدارچی کم است سخنان آبدارچی بی اعتبار است. ▷

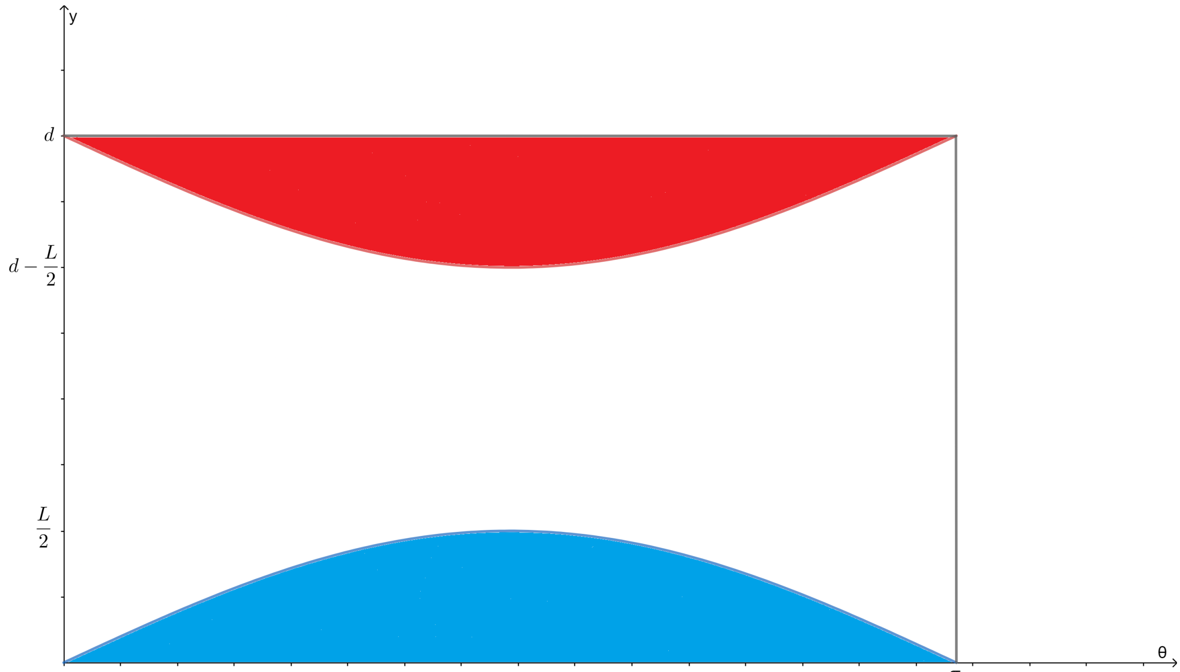
مسئله‌ی ۸. سوزن

سوزنی را به طول L را روی کاغذی خط کشی شده که فاصله‌ی خطوط آن $L < d$ است می‌اندازیم. احتمال اینکه سوزن خطی را قطع کند چیست؟ (فرض کنید کلیه‌ی مکان‌های مرکز سوزن و کلیه‌ی جهت‌های قرار گرفتن سوزن متساوی الاحتمال باشند.)



حل. با توجه به فرض سوال، مکان مرکز سوزن و زاویه قرار گرفتن آن یکنواخت است. فرض کنید $0 \leqslant y \leqslant d$ مکان مرکز سوزن و $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ زاویه آن باشد. (با توجه به تقارن مسئله)

برای اینکه سوزن خط را قطع کند، باید یا داشته باشیم $\frac{L}{2}\sin\theta \geqslant y$ یا $\frac{L}{2}\sin\theta \geqslant d-y$ (دقت کنید که θ زاویه بین سوزن و خط‌ها است.) پس در نهایت به نمودار زیر می‌رسیم.



نواحی رنگی همان نواحی برخورد سوزن با خط است. برای همین و با توجه به یکنواختی کافی است مساحت قسمت رنگی را حساب کنیم. دقت کنید که مساحت آبی و قرمز برابر است. حالا مساحت قسمت آبی را حساب می‌کنیم.

$$\int_0^\pi \frac{L}{2}\sin\theta d\theta = L$$

پس مساحت کل قسمت رنگی می‌شود $2L$، که یعنی جواب نهایی می‌شود $\frac{2L}{\pi d}$. ▷

خنده بر لب می‌زنم تا کس نداند راز من
ورنه این دنیا که ما دیدیم، خندیدن نداشت