دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	بهار ۱۳۹۹

تمرین سری پنجم

(متغیرهای تصادفی پیوسته: توزیع احتمال مشترک، احتمال شرطی، استقلال، قضیه احتمال کل و قاعده بیز، توزیع و امید ریاضی تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی)

مدرس: نعیمه امیدوار	موعد تحویل: ۲۷ اردیبهشت

توجه: سوالات یک و سه اختیاری هستند و برای تمرین بیش‌تر شما داده شده‌اند.

سؤال ۱ علی و حسین و محمد تصمیم گرفته‌اند تا مسابقه‌ی دویدن بین خود ترتیب دهند که در آن مسافت L را خواهند دوید. آن‌ها مدت بسیار زیادی‌ست که ورزش نکرده‌اند این احتمال وجود دارد که در نقطه ای در میانه‌ی راه بایستند و از مسابقه انصراف دهند. توزیع این احتمال برای نقاط مسیر یکنواخت است. مسابقه زمانی به پایان می‌رسد که دیگر کسی در حال دویدن نباشد (یعنی هر کس یا از خط پایان عبور کرده و یا انصراف داده است). احتمال اینکه در پایان مسابقه، فاصله هر دو فرد دلخواه بیشتر از نصف مسافت مسابقه نباشد را به دست آورید.

سؤال ۲ احمد، پیمان و اشکان هر یک نقطه‌ای در بازه ۰ تا ۱ انتخاب می‌کنند. احتمال آن که نقطه انتخابی پیمان بین دو فرد دیگر باشد چقدر است؟

سؤال ۳ تابع چگالی احتمال مشترک X و Y در زیر آمده است:

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} \qquad 0 \leq x < \infty,\ 0 \leq y < \infty$$

دو احتمالِ $P\{X < a\}$ و $P\{X < Y\}$ را بیابید

سؤال ۴ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال (استاندارد) باشند. تابع چگالی احتمال مشترک دو متغیرِ U و V را به دست آورید که این طور تعریف می‌شوند: $U = X$ و $V = \frac{X}{Y}$

سؤال ۵ فرض کنید سکه‌ای داریم که احتمال شیر آمدن آن p^2 است به طوری که خود p از توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ می‌آید. حال اگر سکه را بیاندازیم و شیر بیاید، احتمال $p < \frac{1}{2}$ چقدر است؟

سؤال ۶ آ) اگر برای $X_1, X_2, ..., X_n$ داشته باشیم $X_i \sim Exp(\lambda_i)$، تابع چگالی احتمال را برای $Y = max(X_1, X_2, ..., X_n)$ و $Z = min(X_1, X_2, ..., X_n)$ بیابید.

ب) اگر برای $X_1, X_2, ..., X_n$ داشته باشیم $X_i \sim Uniform(0, 1)$، $E[max(X_1, ..., X_n)]$ و $E[min(X_1, ..., X_n)]$ را بیابید.

سؤال ۷ فرض کنید $F_X(x)$ توزیع تجمعی متغیر تصادفی X باشد.

آ) فرض کنید $Y = F_X(X)$، توزیع Y را بیابید.

ب) فرض کنید متغیر تصادفی U توزیع یکنواخت در بازه $[0,1]$ دارد. همچنین فرض کنید تابع h اکیداً صعودی با برد $R = [0,1]$ است. نشان دهید که اگر $Y = h^{-1}(U)$ ، آنگاه h تابع توزیع تجمعی Y است.

ج) توزیع X مفروض است. برای تابع دلخواه صعودی F_Y با شرط $\lim_{y\to\infty} F_Y(y) = 1$ و $\lim_{y\to-\infty} F_Y(y) = 0$ ، تابع g را بیابید که اگر $Y = g(X)$، این تابع توزیع تجمعی Y باشد.

سؤال ۸ در مسابقه تیر و کمان، فاصله طولی و عرضی تیر شلیک شده با هدف را با X و Y نمایش می‌دهیم. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نرمال مستقل از هم با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 100$ باشند.

آ) نشان دهید تابع چگالی احتمال مشترک $f(x,y)$ تابعی از $x^2 + y^2$ است (به عبارتی چگالی احتمال به ازای هر نقطه متناسب با فاصله آن از هدف است).

ب) احتمال آن که فاصله یک تیر شلیک شده از هدف بین ۱ و ۲ شود را به دست آورید.

سؤال ۹ اگر داشته باشیم $X \sim N(0,1)$ و $Y = e^X$.

آ) توزیع چگالی احتمال Y را محاسبه کرده و نمودار آن را رسم کنید.

ب) بردار $10,000$ تایی $x = (x_1, \ldots, x_{10,000})$ متشکل از $10,000$ عدد تصادفی مستقل نرمال استاندارد را تولید کنید و از روی آن بردار $y = (y_1, \ldots, y_{10,000})$ را که $y_i = e^{x_i}$ بسازید. سپس هیستوگرام y را رسم کنید و آن را با توزیع چگالی احتمالی که در بخش قبل به دست آوردید مقایسه کنید.

ج) یکی از روش‌های تولید اعداد تصادفی مستقل نرمال، روش *Box-Muller transform* است. بعد از مطالعه این روش، آن را پیاده‌سازی کرده و بخش قبل را این بار با استفاده از تابع تولید کننده نرمال استاندارد خودتان انجام دهید.

موفق باشید