

به نام خدا



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

# آمار و احتمال مهندسی

تمرین سری دوم

متغیرهای تصادفی

نیم‌سال اول ۹۶-۹۷

مدرس: دکتر مطهری

مهلت بخش تئوری: ۱۲ آبان ساعت ۲۳:۵۵

مهلت بخش تئوری: ۱۵ آبان ساعت ۲۳:۵۵

## ۱ سوال اول

یک تاس را  $n$  بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی  $X$  نشان دهنده ماکزیمم اعداد ظاهر شده بر روی تاس باشد، امید ریاضی  $X$  را حساب کنید.

## ۲ سوال دوم

در کیسه‌ای  $n$  مهره ریخته شده که روی آن‌ها شماره‌های ۱ تا  $n$  نوشته شده‌است. شخصی در هر مرحله یک مهره را به صورت تصادفی از کیسه خارج می‌کند و شماره‌ی آن را یادداشت می‌کند و مهره را به کیسه برمی‌گرداند. امید ریاضی تعداد مراحل که طول می‌کشد تا همه‌ی شماره‌ها یادداشت شود چقدر است؟

## ۳ سوال سوم

الف) گاهی اوقات لازم است که امید ریاضی را با توجه به شرایط فعلی که در آن هستیم محاسبه کنیم، یا این که برای محاسبه‌ی امید ریاضی مقدار آن را تحت شرایط مختلف محاسبه کرده و از روی آن‌ها مقدار اصلی امید ریاضی را بیابیم. امید ریاضی متغیر تصادفی  $X$  به شرط پیشامد  $A$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[X|A] = \sum_x xPr(X=x|A).$$

حال اگر  $A_1, A_2, \dots, A_n$  افرازی از فضای نمونه باشند، ثابت کنید:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n Pr(A_i) E[X|A_i].$$

ب) در سبدهی  $n$  طناب داریم. فردی هر بار به طور تصادفی از میان سرهای آزاد طناب‌های موجود (که تعدادشان در ابتدا  $2n$  است) دو سر را انتخاب می‌کند و آن دو را به هم وصل می‌کند. او آنقدر به این کار ادامه می‌دهد تا سر آزادی باقی‌نماند و به تعدادی دور (تعدادی طناب که دو انتهای هر کدام از آن‌ها، به انتهای طناب دیگری وصل است) برسد. امید ریاضی تعداد دورها چقدر است؟

## ۴ سوال چهارم

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصدفی پیوسته روی اعداد حقیقی است. می‌گوییم  $X$  از یک توزیع بی حافظه آمده است اگر برای هر عدد حقیقی نامنفی  $s$  و  $t$  داشته باشیم:

$$Pr(X > s + t | X > s) = Pr(X > t)$$

(الف) ثابت کنید توزیع نمایی یک توزیع بی حافظه است.

(ب) فرض کنید طول عمر یک وسیله برقی از توزیع نمایی با میانگین ۱۰ سال تبعیت می‌کند. اگر بدانیم این دستگاه تاکنون ۵ سال عمر کرده احتمال این که دستگاه تا سال آینده خراب نشود چقدر است؟

## ۵ سوال پنجم

سکه ای که احتمال شیر و خط آمدن آن یکسان است را مرتب پرتاب می‌کنیم تا زمانی که ۱۰ بار شیر بیاید. فرض کنید  $X$  تعداد دفعات آمدن خط باشد. تابع توزیع  $X$  را به دست آورید.

## ۶ سوال ششم

گاهی اوقات حساب کردن مقدار احتمال با استفاده از رابطه‌ی اصلی توزیع از نظر محاسباتی کاری دشوار و حتی غیر ممکن است. به همین دلیل نیاز داریم تا تقریب‌هایی از احتمال مورد نظر را به گونه‌ای بدست بیاوریم تا هم محاسبات کمتری انجام داده و هم اینکه مقدار تقریب زده شده از مقدار واقعی دور نباشد. در این سوال می‌خواهیم توزیع دوجمله‌ای را با یکی از توزیع‌های نرمال و پواسون تقریب بزنیم. توضیح دهید در چه مواقعی می‌توان از هر کدام از این دو توزیع برای تقریب مورد بحث استفاده کرد. سپس در سوالات زیر از این تقریب‌ها استفاده کرده و دلیل انتخاب تقریبی که به کار بردید را شرح دهید.

(الف) یک شیرینی‌پز برای تهیه شیرینی گردویی ۵۰۰ قطعه گردو را با خمیر مخلوط می‌کند و به این ترتیب ۱۰۰ شیرینی گردویی می‌پزد. اگر به صورت رندوم یک شیرینی را برداریم چقدر احتمال دارد در این شیرینی بیش از ۴ قطعه گردو وجود داشته باشد؟

(ب) طبق مطالعات انجام شده روی نوجوانان زیر ۱۸ سال کشور، به این نتیجه رسیده ایم که تعداد دختران و پسران زیر ۱۸ سال تقریباً برابر است. حال احتمال‌های زیر را با استفاده از تخمین مناسب حساب کنید.

(i) فرض کنید  $n = ۱۰$  نوجوان زیر ۱۸ سال داریم. احتمال آنکه حداقل ۶ نفر آنها پسر باشند چقدر است؟

(ii) اگر  $n = ۱۰۰۰$  باشد، احتمال آنکه حداقل ۶۰۰ نفر دختر باشند، چقدر است؟

(iii) اگر بخواهیم  $n$  نمونه بگیریم که در آن‌ها به احتمال ۰/۹۵، ۱۵ پسر وجود داشته باشد،  $n$  مورد نظر باید چند باشد؟

## ۷ سوال هفتم

گزاره های زیر را تحت شرایط بیان شده ثابت کنید:

(الف) اگر  $X$  یک متغیر تصادفی گسسته (صحیح) و همواره نامنفی باشد:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$$

(ب) اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته و همواره نامنفی باشد:

$$E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

(ج) (نامساوی مارکوف) اگر  $X$  یک متغیر تصادفی همواره نامنفی باشد:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

## ۸ سوال هشتم (تمرین عملی)

یک منشی در دفتر کار خود منتظر تلفن است. فرض کنید زمان میان تلفن ها در طول یک روز کاری برحسب دقیقه از توزیع نمایی با ثابت  $1/0.1$  پیروی می کند.

(الف) با دستور `rexp`، ۱۰۰۰ نمونه از زمان های بین تلفن ها بگیرید و هیستوگرام و تابع چگالی (با استفاده از دستور `geom_density` در نمودارهای `ggplot2`) این نمونه ها را بکشید. نمونه های کمتر از ۱۰ را حذف کنید و کارهای بالا را برای آن ها نیز انجام دهید و نتایج را مقایسه کنید. دلیل مشاهده ی شما به چه ویژگی توزیع نمایی مربوط است؟

(ب) با دستور `rgeom`، ۱۰۰۰ نمونه از متغیر تصادفی  $X$  با توزیع هندسی  $P = 0.1$  بگیرید. هیستوگرام مقدار  $\frac{X}{n}$  را بکشید و با هیستوگرام نمونه های نمایی بخش الف مقایسه کنید.

(ج) فرض کنید او هرروز ۸ ساعت در دفترش باشد. ۱۰۰۰ روز او را شبیه سازی کنید و هیستوگرام تعداد تلفن هایی که او در این روزها جواب می دهد، را بکشید. به نظر شما، نتیجه شبیه به چه توزیعی است؟

---

لطفا پاسخ تمرین را به فرمت PDF در کوئرا بفرستید. تایپ تمارین اولویت دارد. در صورت تمایل به انجام تمارین به صورت دست نویس، لطفا آن را به صورت خوانا نوشته و به صورت اسکن شده و در قالب فایل pdf آپلود نمایید. اسم فایل شما باید به فرمت

[ نام و نام خانوادگی ] [ شماره دانشجویی ] [ شماره تمرین ] HW

برای مثال

HW2 95100000 Ali Alavi.pdf

باشد.

\*\*\*هر روز تاخیر در ارسال تمرین ۱۰ درصد کسر نمره در پی دارد و بعد از ۷ روز پاسخ نامه آپلود شده و امکان ارسال تمرین با تاخیر وجود ندارد.