



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

زمستان ۱۳۹۸

آمار و احتمال مهندسی

تمرین سری اول (اصول موضوعه احتمال، احتمال شرطی و استقلال)

مدرس: نعیمه امیدوار

موعده تحویل: یکشنبه ۱۸ اسفند ۱۳۹۸

توجه: از بین سوالات زیر، سوال‌های ۱، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰ تحویلی هستند و بقیه سوالات برای تمرین بیشتر شماس و نیازی به تحویل آن‌ها نیست.

سؤال ۱ فرض کنید یک جایگشت تصادفی از تمام ۲۶ حرف کوچک الفبای انگلیسی تولید می‌کنیم. احتمال هر یک از موارد زیر را به همراه استدلال (راه حل) بیابید.

آ) ترتیب الفبایی تمامی ۱۰ حرف اول الفبا رعایت شده باشد. مثلاً  $a$  قبل از  $b$  آمده باشد؛ اما لزومی ندارد که دقیقاً  $b$  بلافاصله بعد از  $a$  بیاید.

ب) حرف  $a$  اولین حرف جایگشت و حرف  $z$  آخرین حرف جایگشت باشد.

ج) حروف  $a$  و  $z$  در کنار هم بیایند. (بدون فاصله)

د) حروف  $a$  و  $b$  در کنار یکدیگر نیایند.

ه) بین  $a$  و  $z$  حداقل ۲۳ حرف دیگر قرار داشته باشد.

و) حرف  $z$  هم از  $a$  و هم از  $b$  دیرتر ظاهر بشود.

سؤال ۲ احتمال این را بیابید که در رشته‌های متشکل از ۰ و ۱ به طول  $n \geq 4$  که به طور تصادفی تولید شده اند، دقیقاً دو بار عبارت: 01 قرار داشته باشد. یعنی برای یک  $n$  مشخص و ثابت، فرمولی برای محاسبه این احتمال به همراه استدلال درستی آن ارائه دهید. به عنوان مثال، برای  $n = 5$  تعداد این رشته‌ها برابر ۶ است. 01010 – 01011 – 01001 – 01101 – 00101 – 10101

سؤال ۳ از بین تمام اعداد دودویی ۸ بیتی یکی را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه دارای سه صفر متوالی و یا چهار یک متوالی باشد را بدست آورید.

سؤال ۴ یک تاس داریم که با احتمال برابر اعداد یک تا شش را نمایش می‌دهد. همچنین یک تاس دیگر داریم که شماره  $i$  را با احتمال  $\frac{i}{21}$  نمایش می‌دهد. ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) یکی از آنها را به صورت رندم انتخاب می‌کنیم و 2 بار پرتاب می‌کنیم. هر یک از وقایع زیر را در نظر بگیرید:

(آ) دو بار یک می‌آید.

(ب) یک بار 2 و یک بار 4 می‌آید.

در هر کدام از دو حالت بالا مشخص کنید اگر تاس را یکبار دیگر پرتاب کنیم، با چه احتمالی 6 می‌آید؟

سؤال ۵ .

(آ) در یک کارخانه لامپ سازی 2 بسته لامپ 50 تایی وجود دارد که بسته اول دارای 5 لامپ سوخته و بسته دوم دارای 7 لامپ سوخته است. هر بار با احتمال برابر یکی از 2 بسته را انتخاب می‌کنیم و یک لامپ را انتخاب کرده و خارج می‌سازیم. این فرایند را 3 بار تکرار می‌کنیم. با چه احتمالی هر سه لامپ سالم‌اند؟

(ب) در کارخانه مثال قبل اگر یک لامپ را انتخاب کنیم و سالم باشد؛ احتمال اینکه برای هر کدام از بسته‌ها باشد را بدست آورید.

سؤال ۶ در یک شهر صد تاکسی با رنگ های سبز و زرد وجود دارد. 1 درصد تاکسی‌های این شهر سبز و 99 درصد آنان زرد هستند. در یک شب یکی از این تاکسی‌ها با فردی تصادف کرده و از صحنه حادثه می‌گریزد. شاهده‌ی که در صحنه بوده، ادعا می‌کند که تاکسی که دیده، سبز رنگ بوده است. پلیس هم راننده‌ای را که تاکسی سبز داشته و در آن شب شیف‌ت بوده است، دستگیر می‌کند. این راننده با توجه به توانایی بالای شما در احتمال، شما را به عنوان وکیل خود استخدام کرده تا نشان بدهید که برخلاف تصور عامه، احتمال این که او واقعا آن شب تصادف کرده باشد، خیلی زیاد نیست. نکته مهمی که شما باید بدانید، این است که طبق تحقیقات علمی این شهر خاص، احتمال این که در تاریکی شب یک نفر تاکسی سبز رنگ را سبز ببیند 99 درصد و احتمال این که تاکسی زرد رنگ را سبز ببیند، 2 درصد است. شما به عنوان وکیل این فرد، باید استدلال مناسبی بیاورید که نشان بدهد احتمال این که موکل شما مجرم باشد، خیلی کمتر از 99 درصد است. (راهنمایی: شما باید در واقع احتمال این که تاکسی سبز باشد به شرطی که شاهد آن را سبز دیده باشد را بدست بیاورید).

سؤال ۷ با استفاده از قوانین مجموعه‌ها و اصول کولموگوروف ثابت کنید:  
نامساوی بونفرونی (Bonferroni's Inequality): اگر  $E_i$  ها رویدادهای احتمالاتی باشند (بدون هیچ شرط خاصی در مورد روابط بین آنها) نشان دهید:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + \dots P(E_n) - (n - 1)$$

راهنمایی: ابتدا این موضوع را برای دو رویداد نشان داده و سپس از استقرا کمک بگیرید.

سؤال ۸ به سوالات زیر در مورد رویدادهای مستقل پاسخ بدهید.

(آ) اگر  $A_1, A_2, \dots, A_n$  رویدادهای دو به دو مستقلی باشند، ثابت کنید:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \dots (1 - P(A_n))$$

(ب) خانواده‌ای  $n$  فرزند دارد. اگر بدانیم در این خانواده دو رویداد  $A$ : وجود فرزند از هر دو جنسیت و  $B$ : وجود حداکثر یک فرزند دختر مستقل از هم باشند، آن گاه  $n$  را بیابید.

سؤال ۹ با استفاده از قوانین مربوط به سیگما فیلد ثابت کنید:

(آ)

$$A, B \in F \Rightarrow A - B \in F$$

(ب)

$$A, B, C \in F \Rightarrow A \Delta B \Delta C \in F$$

منظور از  $A \Delta B$  تفاضل متقارن  $A$  و  $B$  است که به صورت  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$  تعریف می‌شود.

---

سؤال ۱۰ سه کارت رنگی داریم. هر دو روی کارت اول قرمز است. هر دو روی کارت دوم آبی است. کارت سوم دو رنگ دارد و یک طرف آن قرمز و سمت دیگر آن آبی است. این کارت‌ها درون جعبه‌ای هستند که درون آن را نمی‌بینیم. یک کارت را به طور تصادفی بر می‌داریم و رنگی که مشاهده می‌کنیم آبی است. چقدر احتمال دارد که روی دیگر آن نیز آبی باشد؟

---

موفق باشید