آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری اول | موعد تحویل: ۲۵ مهر

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله‌ی ۱. (۹ نمره)

یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه زیر در نظر بگیرید.

$$S = \{۱, ۲, ۳, ...\}$$

فرض کنید می‌دانیم:

$$p(k) = p(k) = \tfrac{c}{۳^k} \quad k = ۱, ۲, ...$$

که c یک ثابت است.

الف) c را بیابید.

ب) $P(\{۲, ۴, ۶\})$ را بیابید.

ج) $P(\{۳, ۴, ۵, ...\})$ را بیابید.

حل.

الف)

$$P(\{۱\}) + P(\{۲\}) + ... = \frac{c}{۳} + \frac{c}{۹} + \frac{c}{۲۷} + ... = ۱ \longrightarrow c(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \dots) = ۱ \quad (۱)$$

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \cdots = A \longrightarrow \frac{۱}{۳}(۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + ...) = A \longrightarrow ۱ + A = ۳A \longrightarrow A = \frac{۱}{۲} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \longrightarrow c = ۲ \quad (۱)$$

ب)

$$P(\{۲, ۴, ۶\}) = \frac{c}{۹} + \frac{c}{۸۱} + \frac{c}{۷۲۹} = \frac{۹۱}{۷۲۹}c = \frac{۱۸۲}{۷۲۹}$$

ج)

$$P(\{۳, ۴, ۵, ...\}) = ۱ - P(\{۱, ۲\}) = ۱ - (\frac{c}{۳} + \frac{c}{۹}) = \frac{۱}{۹}$$

▷

مسئله‌ی ۲. (۱۲ نمره)

دسته‌های صدتایی از یک کالا به این شکل مورد بازرسی قرار می‌گیرند که چهار کالا از آن دسته انتخاب می‌شود؛ اگر حداقل یکی از این چهار کالا خراب باشد، دسته مذکور رد می‌شود. اگر فرض کنیم در یک دسته پنج کالای خراب وجود داشته باشد، چقدر احتمال دارد دسته فوق تایید شود؟

حل.

فرض می‌کنیم A پیشامد تایید شدن دسته موردنظر بوده و A_i پیشامد سالم بودن iامین کالای انتخابی باشد. داریم $A = A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ \cap A_۴$ که $i = ۱, ..., ۴$. بنابراین :

$$P(A) = P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|A_۱ \cap A_۲)P(A_۴|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = \frac{۹۵}{۱۰۰}.\frac{۹۴}{۹۹}.\frac{۹۳}{۹۸}.\frac{۹۲}{۹۷} = ۰/۸۱۲$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۳. (۹ نمره)

درباره سه پیشامد A, B, C می‌دانیم:

- A و C مستقل هستند.
- B و C مستقل هستند.
- اشتراک A و B تهی است.
- $P(A \cup C) = \frac{۲}{۳}, P(B \cup C) = \frac{۳}{۴}, P(A \cup B \cup C) = \frac{۱۱}{۱۲}$

احتمال وقوع هر کدام از پیشامدها را بیابید.

حل.

$$P(A) = a \, , P(B) = b \, , P(C) = c$$

$$P(A \cup C) = a + c - ac = \frac{۲}{۳} \qquad (۱)$$

$$P(B \cup C) = b + c - bc = \frac{۳}{۴} \qquad (۲)$$

$$P(A \cup B \cup C) = a + b + c - ac - bc = \frac{۱۱}{۱۲} \qquad (۳)$$

$$(۱) + (۲) - (۳) = c = \frac{۱}{۲} \longrightarrow a = \frac{۱}{۳} \, , b = \frac{۱}{۲}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۴. (۱۲ نمره)

گروه شطرنج دو مدرسه A و B به ترتیب دارای ۸ و ۹ عضو هستند. از هر مدرسه یک تیم متشکل از ۴ عضو گروه به شکل تصادفی انتخاب می‌شوند تا در رقابت بین دو مدرسه با هم بازی کنند. در این رقابت ۴ بازی همزمان بین دو مدرسه برگزار می‌شود. هر عضو از تیم شطرنج مدرسه A به شکل تصادفی مقابل عضوی از تیم شطرنج مدرسه B قرار می‌گیرد و هر بازیکن دقیقا در یک بازی حضور دارد. فرض کنید حشمت و برادرش سیروس به ترتیب در گروه شطرنج مدرسه A و B حضور دارند.

الف) احتمال اینکه سیروس و حشمت رو به روی یکدیگر بازی کنند را محاسبه کنید

ب) احتمال اینکه سیروس و حشمت برای مسابقات مدرسه خود انتخاب شوند اما رو به روی یکدیگر بازی نکنند را محاسبه کنید.

ج) احتمال اینکه دقیقا یکی از دو برادر برای عضویت در تیم مدرسه خود انتخاب شده باشند را محاسبه کنید.

حل.

الف)
برای حل این قسمت باید ابتدا حشمت و سیروس از بین ۸ نفر و ۹ نفر به ترتیب انتخاب شوند و سپس احتمال به دست آمده در احتمال رو به روی هم قرار گرفتنشان ضرب شود.

$$\frac{c(۷,۳)*c(۸,۳)*۳!}{c(۸,۴)*c(۹,۴)*۴!} = \frac{۱}{۱۸}$$

ب)
ابتدا احتمال انتخاب شدن سیروس و حشمت را محاسبه می کنیم و سپس احتمال حالتی را که رو به روی هم قرار بگیرند که در قسمت الف محاسبه کردیم را از آن کم می کنیم.

$$\frac{c(۷,۳)*c(۸,۳)}{c(۸,۴)*c(۹,۴)} - \frac{۱}{۱۸} = \frac{۱}{۶}$$

ج)
دو حالت داریم که حالت اول سیروس انتخاب شود و حشمت انتخاب نشود و حالت دوم حشمت انتخاب شود و سیروس انتخاب نشود.

$$\frac{c(۷,۳)*c(۸,۴)+c(۷,۴)*c(۸,۳)}{c(۸,۴)*c(۹,۴)} = \frac{۱}{۲}$$

▷

مسئله‌ی ۵. (۱۲ نمره)

یک جرم توسط یکی از دو متهم A یا B صورت گرفته است. همچنین یک مدرک هم ارز در مورد اثبات جرم، برای هرکدام از این دو متهم وجود دارد. در تحقیقات بیشتری که در صحنه جرم صورت گرفته است، مشخص شده است که خون ریخته شده از مجرم در صحنه، از نوع گروه خونی است که فقط در ۱۰ درصد مردم جامعه وجود دارد. گروه خونی متهم A با گروه خونی پیدا شده در صحنه تطابق دارد، در صورتی که از گروه خونی متهم B اطلاعی نداریم. با توجه به اطلاعات داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) احتمال آنکه متهم A مجرم واقعی باشد چقدر است؟

ب) احتمال آنکه گروه خونی متهم B با گروه خونی خون ریخته شده در صحنه تطابق داشته باشد چقدر است؟

حل.

الف)
فرض کنید M رویدادی است که خون A با خون موجود در صحنه جرم تطابق داشته باشد:

$$P(A|M) = \frac{P(M|A)P(A)}{P(M|A)P(A)+P(M|B)P(B)} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۱۰})(\frac{۱}{۲})} = \frac{۱۰}{۱۱}$$

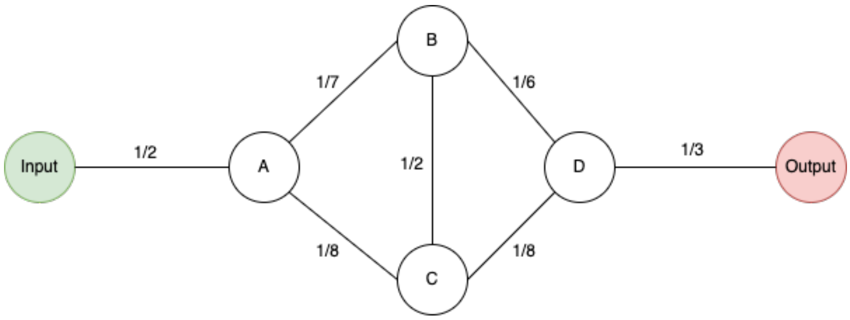
ب)
فرض کنید که C رویدادی است که خون B را خون موجود در صحنه جرم تطابق داشته باشد:

$$P(C|M) = P(C|M,A)P(A|M) + P(C|M,B)P(B|M) = \frac{1}{10} * \frac{10}{11} + \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$$

▷

مسئله‌ی ۶. (۱۵ نمره)

۷ کلید مختلف برای انتقال یک سیگنال بین ورودی و خروجی یک شبکه وجود دارد که متناظر با یال‌های گراف زیر می‌باشند. هریک از کلیدها ممکن است به احتمالی که روی آن نوشته شده است باز باشد. برای احتمال انتقال سیگنال از ورودی به خروجی یک کران بالا پیدا کنید (**راهنمایی:** از کران اجتماع استفاده نمایید).



حل.

چهار پیشامد زیر را در نظر بگیرید.

- $\mathcal{A}_1$ احتمال اینکه مسیر input-A-B-D-output باز باشد.
- $\mathcal{A}_2$ احتمال اینکه مسیر input-A-B-C-D-output باز باشد.
- $\mathcal{A}_3$ احتمال اینکه مسیر input-A-C-D-output باز باشد.
- $\mathcal{A}_4$ احتمال اینکه مسیر input-A-C-B-D-output باز باشد.

بنابراین احتمال باز بودن کل مسیر برابر خواهد بود با :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_4) &\leqslant P(\mathcal{A}_1) + \dots + P(\mathcal{A}_4) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{1}{3} \end{aligned}$$

▷

مسئله‌ی ۷. (۸ نمره)

فرض کنید رخدادهای $X_1, X_2, ..., X_n$ دو به دو از یکدیگر مستقل هستند. همچنین به ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$، Y_i را به دلخواه برابر یکی از مجموعه‌های X_i، $\bar{X}_i$ و یا Ω (فضای نمونه) قرار می‌دهیم. ثابت کنید که به ازای هر انتخاب دلخواه Y_iها به شکل فوق رخدادهای $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ نیز دو به دو مستقل هستند.

حل.

رابطه زیر برقرار است:

$$X_۱ = (X_۱ \cap X_۲) \cup (X_۱ \cap \bar{X_۲}) \Longrightarrow P(X_۱) = P(X_۱ \cap X_۲) + P(X_۱ \cap \bar{X_۲})$$

می‌دانیم رخدادهای $X_۱$ و $X_۲$ از هم مستقل هستند. با توجه به این مورد ثابت می‌کنیم رخدادهای $X_۱$ و $\bar{X_۲}$ نیز مستقل از یکدیگر می‌باشند:

$$P(X_۱ \cap \bar{X_۲}) = P(X_۱) - P(X_۱ \cap X_۲) = P(X_۱) - P(X_۱)P(X_۲) = P(X_۱)[۱ - P(X_۲)] = P(X_۱)P(\bar{X_۲})$$

پس ثابت شد که $X_۱$ و $\bar{X_۲}$ مستقل هستند. حال ثابت می‌کنیم که Ω و X_i ها از هم مستقل هستند. می‌دانیم که به ازای هر X داریم $\Omega \cap X = X$ است. با توجه به این مورد داریم: $P(\Omega \cap X) = P(X) = P(\Omega)P(X)$. بنابراین به ازای هر انتخاب $Y_۱$ و $Y_۲$ داریم

$$P(Y_۱ \cap Y_۲) = P(Y_۱)P(Y_۲)$$

برای $n = ۲$ ثابت کردیم که تمامی Y_i ها مستقل از یکدیگر هستند. حال کافی است از استقرا استفاده کنیم و فرض کنیم که $X_{n+۱}$ مستقل از $X_۱, ..., X_n$ است. بدیهی است که $X_{n+۱}$ و $\bar{X_{n+۱}}$ مستقل از $Y_۱, ..., Y_n$ هستند. حال خواهیم داشت:

$$P(Y_۱...Y_n X_{n+۱}) = P(Y_۱...Y_n)P(X_{n+۱})$$

$$P(Y_۱...Y_n \bar{X_{n+۱}}) = P(Y_۱...Y_n)P(\bar{X_{n+۱}})$$

پس استقرا ما کامل شد و ثابت کردیم که رخدادهای $Y_۱, ..., Y_n$ نیز از هم مستقل هستند. $\triangleright$

مسئله‌ی ۸. (۱۲ نمره)

می‌خواهیم از بین تمام کلمات انگلیسی که حروف تکراری ندارند (با معنی یا بی معنی) یک کلمه را انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد که کلمه انتخاب شده شامل همه ۲۶ حرف انگلیسی باشد؟ ثابت کنید جواب به دست آمده تقریبا برابر با $\frac{۱}{e}$ است. توجه داشته باشید که بزرگی یا کوچکی حروف را در نظر نمی‌گیریم.

حل.

تعداد کلمات بدون تکرار انگلیسی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=۱}^{۲۶} \binom{۲۶}{i} i!$$

تعداد کلمات انگلیسی که شامل حروف انگلیسی می‌باشند اما حرف تکراری ندارند برابر !۲۶ است. حال احتمال انتخاب این کلمات را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۲۶!}{\sum_{i=۱}^{۲۶} \binom{۲۶}{i} i!} = \frac{۲۶!}{\sum_{i=۱}^{۲۶} \frac{۲۶!}{(۲۶-i!)i!} i!} = \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱!} + ... + \frac{۱}{۲۵!}} \approx \frac{۱}{e}$$

مخرج کسر به دست آمده تقریبا برابر e است. پس احتمال به دست آمده برابر $\frac{۱}{e}$ می‌شود. $\triangleright$

مسئله‌ی ۹. (۲۱ نمره)

خانواده‌ای n فرزند دارد که $n \geqslant ۲$. فرض کنیم احتمال دختر یا پسر بودن هر فرزند برابر $\frac{۱}{۲}$ و مستقل از جنسیت سایر فرزندان باشد. در هر یک از قسمت‌های زیر یک مشاهده به ثبت رسیده است. برای هر مشاهده، احتمال دختر بودن تمام فرزندان خانواده با داشتن آن مشاهده را محاسبه نمایید (دقت کنید که هر قسمت را مستقل از سایر قسمت‌ها

مورد بررسی قرار دهید.)

الف) می‌دانیم که این خانواده حداقل یک فرزند دختر دارد.

ب) به خانه‌ی این خانواده می‌رویم و یکی از فرزندان آن‌ها را به تصادف می‌بینیم(در حالی که بقیه فرزندان حضور ندارند). فرزند مشاهده شده دختر است.

ج) (**امتیازی**) می‌دانیم این خانواده دختری به نام مریم دارد. فرض می‌کنیم اگر فرزندی دختر باشد، احتمال اینکه نام وی مریم باشد β است که $۰ < \beta \ll ۱$ (احتمال وجود پسری با این نام برابر ۰ است!).

حل.

الف) فرض کنیم A پیشامد دختر بودن تمام فرزندان، B پیشامد دختر بودن حداقل یکی از فرزندان و C پیشامد پسر بودن تمام فرزندان خانواده باشد. می‌خواهیم $P(A|B)$ را به دست آوریم.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(C) = \frac{۱}{۲^n} \\
P(B) &= ۱ - P(C) = ۱ - \frac{۱}{۲^n} \\
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۲^n}}{۱ - \frac{۱}{۲^n}} = \frac{۱}{۲^n - ۱}
\end{aligned}
$$

ب) اگر $P(g)$ احتمال دختر بودن فرزندی که به صورت تصادفی مشاهده کردیم باشد و $P(A)$ احتمال دختر بودن تمام فرزندان باشد خواهیم داشت :

$$
\begin{gathered}
P(G|A) = ۱ \ \ , \ \ P(A) = \tfrac{۱}{۲^n} \ \ , \ \ P(G) = \tfrac{۱}{۲} \\
P(A|G) = \tfrac{P(G|A)P(A)}{P(G)} = \tfrac{۱ . \frac{۱}{۲^n}}{\frac{۱}{۲}} = \tfrac{۱}{۲^{n-۱}}
\end{gathered}
$$

ج) فرض کنیم M پیشامد "مریم" بودن نام حداقل یکی از دختران خانواده بوده و G پیشامد دختر بودن تمام فرزندان خانواده باشد. خواهیم داشت :

$$
\begin{gathered}
P(G|M) = \tfrac{P(G \cap M)}{P(M)} = ? \\
P(G \cap M) = P(G) - P(G \cap \overline{M}) = (\tfrac{۱}{۲})^n - (\tfrac{۱}{۲} * (۱ - \beta))^n \\
P(M) = ۱ - P(\overline{M}) = ۱ - (\tfrac{۱}{۲} * (۱ - \beta) + \tfrac{۱}{۲} * ۱)^n = ۱ - (۱ - \tfrac{\beta}{۲})^n
\end{gathered}
$$

خط آخر از آنجا بدست می‌آید که احتمال اینکه نام یکی از فرزندان مریم نباشد برابر با متمم جمع احتمال مریم بودن نام فرزند در صورت دختر و پسر بودن است.

$$
\begin{gathered}
P(G|M) = \tfrac{(\frac{۱}{۲})^n (۱ - (۱ - \beta)^n)}{۱ - (۱ - \frac{\beta}{۲})^n} \\
\overset{\beta \ll ۱}{\rightarrow} \ \tfrac{(\frac{۱}{۲})^n (n\beta))}{\frac{n}{۲}\beta} = (\tfrac{۱}{۲})^{n-۱}
\end{gathered}
$$

$\triangleright$

موفق باشید :)