



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

# آمار و احتمال مهندسی

بهار ۱۴۰۲

استاد: مهدی جعفری سیاوشانی

گردآورندگان: علیرضا رضائی مقدم، امیرحسین عابدی

تمرین چهارم

متغیر تصادفی پیوسته، تابع گشتاور

مهلت ارسال: ۱۹ خرداد

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه‌ی تمرین‌ها تا سقف ۳ روز پس از موعد آن وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند بود. در مجموع ۱۰ روز از تاخیرها بخشیده خواهند شد.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر فرد حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

## سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. (۲۵ نمره) متغیرهای تصادفی  $X, Y$  متغیرهای تصادفی مستقل هستند و توابع MGF آنها به صورت زیر تعریف میشود.

$$M_X(s) = \frac{1}{1 - 5s}$$

$$M_Y(s) = \frac{1}{(1 - 5s)^2}$$

مقدار  $\mathbb{E}[(X + Y)^2]$  را بدست آورید.

۲. (۲۰ نمره) دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی  $X_i$  با توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  را در نظر بگیرید. اثبات کنید که متغیر تصادفی زیر یک متغیر تصادفی گاما است.

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i$$

۳. (۲۰ نمره) متغیر تصادفی  $X$  با تابع MGF زیر را در اختیار داریم

$$M_X(s) = \frac{1}{6}e^{-2s} + \frac{1}{3}e^{-s} + \frac{1}{4}e^s + \frac{1}{4}e^{2s}$$

مقدار  $\mathbb{P}[|X| \leq 1]$  را بدست آورید.

۴. (۱۵ نمره) فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  با تابع چگالی  $f_X$  به شما داده شده است. برای هر کدام از قسمت‌های زیر  $c$  را طوری بیابید که تابع خواسته شده را کمینه کند.

$$L(c) = \mathbb{E}[(X - c)^2] \quad (\text{آ})$$

$$L(c) = \mathbb{E}[|X - c|] \quad (\text{ب})$$

۵. (۱۵ نمره) دو متغیر تصادفی  $X \sim \exp(\lambda_1)$  و  $Y \sim \exp(\lambda_2)$  داریم. توابع چگالی را برای هرکدام از متغیرهای تصادفی خواسته شده بدست آورید.

(آ)

$$Z = \frac{X}{Y}$$

(ب)

$$Z = \min(X, Y)$$

۶. (۵ نمره) دو متغیر تصادفی از فضای احتمال  $f_{X,Y}$  داریم که این فضا برای ما ناشناخته است. تنها اطلاعاتی که از این ۲ متغیر تصادفی داریم این است که با احتمال ۱ متفاوت هستند و همینطور هردو نامنفی هستند. فرض کنید یکی از  $X, Y$  به شما نشان داده شود (اما نمیدانیم کدام)، که اسم آن را  $W$  میگذاریم. همینطور اسم متغیر تصادفی دیگر که هنوز ندیده‌ایم را  $Z$  میگذاریم. استراتژی‌ای ارائه دهید که با آن بتوانیم حدس بزنیم مقدار  $W$  از  $Z$  بیشتر است یا خیر و همینطور احتمال موفقیت این استراتژی برای یک  $\epsilon$  بزرگتر از صفر برابر باشد با  $\frac{1}{4} + \epsilon$ .