



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

بهار ۱۳۹۹

تمرین هفتم

(نامساوی‌های احتمالاتی و قضیه‌ی حد مرکزی)

مدرس: نعیمه امیدوار

موعد تحویل: ۲۳ خرداد ۱۳۹۹

*سوالات ۱، ۴ و ۹ اختیاری هستند.

سؤال ۱. همانطور که می‌دانید بصورت کلی کران بالایی که نامساوی مارکوف ارائه می‌دهد از دقت بالایی برخوردار نیست. حال از شما می‌خواهیم، مثالی ارائه کنید که کران بالای ارائه‌شده توسط نامساوی مارکوف برای آن، کاملاً دقیق باشد.

منظور از کران بالای دقیق این است که برای یک مقدار مثبت و ناصفر a داشته باشیم: $P(X \geq a) = \frac{E[X]}{a}$

سؤال ۲. در سوال قبل مثالی ارائه دادید که نشان داد نامساوی مارکوف می‌تواند دقیق باشد. در این سوال از شما می‌خواهیم همین کار را برای نامساوی چبیشف انجام دهید. یعنی یک تابع توزیع احتمال برای X و یک مقدار مثبت و ناصفر برای a بیابید، به طوری که $P(|X - E[X]| \geq a) = \frac{var(X)}{a^2}$.

سؤال ۳. یک تاس سالم را در نظر بگیرید، خروجی آن را متغیر تصادفی X در نظر می‌گیریم، حال احتمال $P(X \geq 6)$ را در نظر بگیرید و با توجه به آن سوالات زیر را پاسخ دهید:
در این سوال باید از نامساوی چبیشف یک طرفه و دو طرفه استفاده کنید که رابطه آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:
چبیشف دو طرفه برای $a > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

چبیشف یک طرفه برای $a > 0$:

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

الف) یک کران بالا برای احتمال گفته شده با استفاده از نامساوی مارکوف بدست آورید.

ب) یک کران بالا برای احتمال گفته شده با استفاده از نامساوی چبیشف دو طرفه بدست آورید.

ج) یک کران بالا برای احتمال گفته شده با استفاده از نامساوی چبیشف یک طرفه بدست آورید.

د) مقدرهای بدست آمده را با یکدیگر مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

سؤال ۴. اگر یک نمونه با ۳۷ عضو از یک توزیع نرمال با میانگین ۱۲۷۵۱ و انحراف از معیار ۱۲.۶ بگیریم، احتمال اینکه میانگین این نمونه از ۱۲۷۵۱ کمتر و یا از ۱۲۷۵۴ بیشتر باشد را بدست آورید.

سؤال ۵. شما یک مهمانی با رعایت پروتکل‌های بهداشتی برگزار کرده‌اید که در آن n مهمان را دعوت کرده‌اید و برای اینکه مطمئن شوید که همه در مهمانی ماسک دارند می‌خواهید تعدادی ماسک خریداری کنید. همچنین می‌دانید هر مهمان مستقل از دیگران با احتمال $\frac{1}{4}$ نیاز به ماسک نخواهد داشت زیرا از قبل ماسک با خود آورده است و با احتمال $\frac{1}{2}$ به یک ماسک و با احتمال $\frac{1}{4}$ به دو ماسک احتیاج خواهد داشت. با توجه به اینکه مساله حیاتی است، شما می‌خواهید مطمئن باشید که با احتمال ۹۹ درصد کمبود ماسک نخواهید داشت؛ برای اینکه به این درجه اطمینان برسید، چه تعداد ماسک باید تهیه کنید؟ برای ۹۹.۹ و ۹۵ درصد نیز تعداد ماسک‌ها را بدست آورید. (فرض کنید که $n \geq 30$ می‌باشد)

بعد از اینکه جواب کلی را برای n مهمان بدست آوردید، تعداد ماسک‌ها را برای ۳۶ مهمان محاسبه کنید.

سؤال ۶. یک کلوپ فقط برای اعضای ویژه خود شام تدارک می‌بیند و این اعضا هنگام صرف شام بر سر میزهای ۱۲ نفره می‌نشینند. مدیر این مجموعه پس از مشاهدات فراوان متوجه می‌شود که در ۹۵ درصد اوقات بین ۶ تا ۹ میز کامل از اعضای ویژه وجود دارد و در باقی اوقات تعداد اعضای ویژه حاضر برای صرف شام، با احتمال مساوی ممکن است که از بازه ذکرشده بیشتر یا کمتر باشد. حال فرض کنید که هریک از اعضای ویژه این کلوپ با احتمال p تصمیم به صرف شام در کلوپ می‌گیرد و تصمیم این اعضا از هم مستقل است. حال با استفاده از قضیه حد مرکزی به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) تعداد اعضای ویژه این کلوپ چند نفر است؟

ب) مقدار p را به دست آورید.

سؤال ۷. دو قطار وجود دارند که در آخر هر هفته یک جمعیت ۱۰۰۰ نفره را از تهران به اصفهان منتقل می‌کنند. این دو قطار کاملاً مشابه هم هستند و هر یک از این ۱۰۰۰ مسافر، بصورت مستقل از بقیه و کاملاً تصادفی، تصمیم می‌گیرد که سوار کدامیک از این دو قطار شود. این قطارها باید حداقل چند صندلی داشته باشند تا با اطمینان حداقل ۹۹٪ برای هر یک از مسافران قطار، صندلی وجود داشته باشد؟

سؤال ۸. یک سکه را که احتمال شیر یا خط آمدن آن برابر است را در نظر بگیرید و به سوال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) اگر سکه را ۱۰۰ بار پرتاب کنیم احتمال اینکه بیشتر از ۵۵ بار رو بیاید را محاسبه کنید.

ب) اگر سکه را ۱۰۰ بار پرتاب کنیم احتمال اینکه بین ۴۰ و ۶۰ بار رو بیاید را محاسبه کنید.

سؤال ۹. یک امتحان شامل ۴۸ سوال صحیح-غلط است. احتمال پاسخگویی درست اصغر به یک سوال، $\frac{5}{8}$ است در حالی که اختر بصورت کاملاً تصادفی به سوالات پاسخ می‌دهد. برای قبولی در این امتحان باید بیش از ۳۰ نمره از ۴۸ نمره آن را کسب کنند. احتمال قبولی اصغر در این امتحان را با احتمال قبولی اختر در این امتحان، مقایسه کنید.

موفق باشید (: