



- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله ۱. (۹ نمره)

یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه زیر در نظر بگیرید.

$$S = \{1, 2, 3, \dots\}$$

فرض کنید می‌دانیم:

$$p(k) = p(k) = \frac{c}{k^2} \quad k = 1, 2, \dots$$

که c یک ثابت است.

الف) c را بیابید.

ب) $P(\{2, 4, 6\})$ را بیابید.

ج) $P(\{3, 4, 5, \dots\})$ را بیابید.

مسئله ۲. (۱۲ نمره)

دسته‌های صدتایی از یک کالا به این شکل مورد بازرسی قرار می‌گیرند که چهار کالا از آن دسته انتخاب می‌شود؛ اگر حداقل یکی از این چهار کالا خراب باشد، دسته مذکور رد می‌شود. اگر فرض کنیم در یک دسته پنج کالای خراب وجود داشته باشد، چقدر احتمال دارد دسته فوق تایید شود؟

مسئله ۳. (۹ نمره)

درباره سه پیشامد A, B, C می‌دانیم:

• A و C مستقل هستند.

• B و C مستقل هستند.

• اشتراک A و B تهی است.

• $P(A \cup C) = \frac{2}{3}, P(B \cup C) = \frac{3}{4}, P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$

احتمال وقوع هر کدام از پیشامدها را بیابید.

مسئله ۴. (۱۲ نمره)

گروه شطرنج دو مدرسه A و B به ترتیب دارای ۸ و ۹ عضو هستند. از هر مدرسه یک تیم متشکل از ۴ عضو گروه به شکل تصادفی انتخاب می‌شوند تا در رقابت بین دو مدرسه با هم بازی کنند. در این رقابت ۴ بازی همزمان بین دو مدرسه برگزار می‌شود. هر عضو از تیم شطرنج مدرسه A به شکل تصادفی مقابل عضوی از تیم شطرنج مدرسه B قرار می‌گیرد و هر بازیکن دقیقاً در یک بازی حضور دارد. فرض کنید حشمت و برادرش سیروس به ترتیب در گروه شطرنج مدرسه A و B حضور دارند.

(الف) احتمال اینکه سیروس و حشمت رو به روی یکدیگر بازی کنند را محاسبه کنید

(ب) احتمال اینکه سیروس و حشمت برای مسابقات مدرسه خود انتخاب شوند اما رو به روی یکدیگر بازی نکنند را محاسبه کنید.

(ج) احتمال اینکه دقیقاً یکی از دو برادر برای عضویت در تیم مدرسه خود انتخاب شده باشند را محاسبه کنید.

مسئله ۵. (۱۲ نمره)

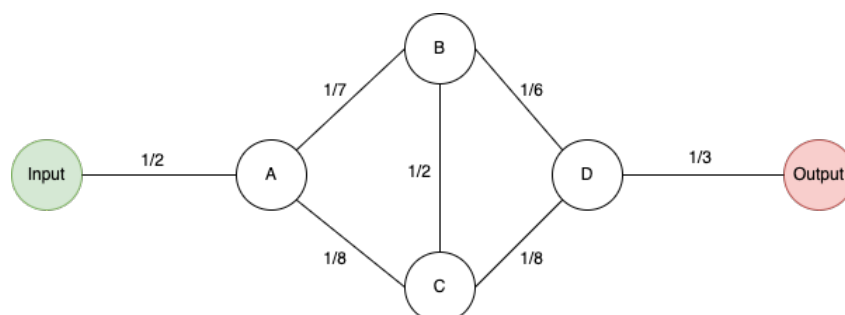
یک جرم توسط یکی از دو متهم A یا B صورت گرفته است. همچنین یک مدرک هم ارز در مورد اثبات جرم، برای هر کدام از این دو متهم وجود دارد. در تحقیقات بیشتری که در صحنه جرم صورت گرفته است، مشخص شده است که خون ریخته شده از مجرم در صحنه، از نوع گروه خونی است که فقط در ۱۰ درصد مردم جامعه وجود دارد. گروه خونی متهم A با گروه خونی پیدا شده در صحنه تطابق دارد، در صورتی که از گروه خونی متهم B اطلاعی نداریم. با توجه به اطلاعات داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید.

(الف) احتمال آنکه متهم A مجرم واقعی باشد چقدر است؟

(ب) احتمال آنکه گروه خونی متهم B با گروه خونی خون ریخته شده در صحنه تطابق داشته باشد چقدر است؟

مسئله ۶. (۱۵ نمره)

۷ کلید مختلف برای انتقال یک سیگنال بین ورودی و خروجی یک شبکه وجود دارد که متناظر با یال‌های گراف زیر می‌باشند. هریک از کلیدها ممکن است به احتمالی که روی آن نوشته شده است باز باشد. برای احتمال انتقال سیگنال از ورودی به خروجی یک کران بالا پیدا کنید (راهنمایی: از کران اجتماع استفاده نمایید).



مسئله‌ی ۷. (۸ نمره)

فرض کنید رخداد‌های X_1, X_2, \dots, X_n دو به دو از یکدیگر مستقل هستند. همچنین به ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ، Y_i را به دلخواه برابر یکی از مجموعه‌های X_i یا \bar{X}_i (فضای نمونه) قرار می‌دهیم. ثابت کنید که به ازای هر انتخاب دلخواه Y_i ‌ها به شکل فوق رخداد‌های Y_1, Y_2, \dots, Y_n نیز دو به دو مستقل هستند.

مسئله‌ی ۸. (۱۲ نمره)

می‌خواهیم از بین تمام کلمات انگلیسی که حروف تکراری ندارند (با معنی یا بی معنی) یک کلمه را انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد که کلمه انتخاب شده شامل همه ۲۶ حرف انگلیسی باشد؟ ثابت کنید جواب به دست آمده تقریباً برابر با $\frac{1}{e}$ است. توجه داشته باشید که بزرگی یا کوچکی حروف را در نظر نمی‌گیریم.

مسئله‌ی ۹. (۲۱ نمره)

خانواده‌ای n فرزند دارد که $n \geq 2$. فرض کنیم احتمال دختر یا پسر بودن هر فرزند برابر $\frac{1}{2}$ و مستقل از جنسیت سایر فرزندان باشد. در هر یک از قسمت‌های زیر یک مشاهده به ثبت رسیده است. برای هر مشاهده، احتمال دختر بودن تمام فرزندان خانواده با داشتن آن مشاهده را محاسبه نمایید (دقت کنید که هر قسمت را مستقل از سایر قسمت‌ها مورد بررسی قرار دهید).

الف) می‌دانیم که این خانواده حداقل یک فرزند دختر دارد.

ب) به خانه‌ی این خانواده می‌رویم و یکی از فرزندان آن‌ها را به تصادف می‌بینیم (در حالی که بقیه فرزندان حضور ندارند). فرزند مشاهده شده دختر است.

ج) (امتیازی) می‌دانیم این خانواده دختری به نام مریم دارد. فرض می‌کنیم اگر فرزندی دختر باشد، احتمال اینکه نام وی مریم باشد β است که $0 < \beta \ll 1$ (احتمال وجود پسری با این نام برابر ۰ است!).

موفق باشید:)