دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	بهار ۱۳۹۹

پاسخ‌نامه تمرین سری ششم (محاسبه توزیع یک (یا چند) تابع از چند متغیر تصادفی، توزیع گاوسی چندمتغیره و متغیرهای مشترکا گاوسی)

مدرس: نعیمه امیدوار	موعد تحویل: دوشنبه ۱۲ خرداد ۱۳۹۹

توجه: از بین سوالات زیر، سوال‌های ۱، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۹ تحویلی هستند و بقیه سوالات برای تمرین بیش‌تر شماست و نیازی به تحویل آن‌ها نیست.

سؤال ۱ فرض کنید تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 به صورت زیر باشد:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

و فرض کنید دو متغیر Y_1 و Y_2 به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$Y_1 = X_1 + X_2$$
$$Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

تابع چگالی توزیع توام Y_1 و Y_2 و همین طور تابع چگالی حاشیه‌ای *(Marginal)* Y_1 و Y_2 را بیابید.

پاسخ ۱ ابتدا باید X_1 و X_2 را برحسب Y_1 و Y_2 بنویسیم:

$$Y_1 = X_1 + X_2$$
$$Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$
$$\Rightarrow X_1 = Y_1 - X_2$$
$$\Rightarrow Y_2 = \frac{Y_1 - X_2}{Y_1 - X_2 + X_2} = \frac{Y_1 - X_2}{Y_1}$$
$$\Rightarrow Y_1Y_2 = Y_1 - X_2$$
$$\Rightarrow X_2 = Y_1 - Y_1Y_2 = Y_1(1 - Y_2)$$
$$\Rightarrow X_1 = Y_1 - (Y_1 - Y_1Y_2) = Y_1Y_2$$

ژاکوبین به این شکل بدست می‌آید:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 - y_2 & -y_1 \end{vmatrix}$$

$$= -y_2y_1 - y_1(1-y_2) = -y_1$$

با توجه به دامنه انتخاب شده در صورت سوال، عبارت‌هایی که بدست آوردیم، توابعی یک به یک هستند.
پس داریم:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \times |J|$$

$$f_{Y_1,Y_2}\,(y_1,y_2) = \begin{cases} f_{X_1,X_2}(y_1y_2, y_1(1-y_1)) \times |J| & y_1 \geq 0, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-(y_1y_2+y_1-y_1y_2)}|-y_1| & y_1 \geq 0, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y_1e^{-y_1} & y_1 \geq 0, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

توجه کنید که با توجه به مثبت بودن X_1 و X_2 مقادیر Y_1 و Y_2 هم مثبت خواهند بود.
از طرفی طبق تعریف این دو، مشخص است که Y_1 می‌تواند هر مقدار نامنفی را اتخاذ کند ولی Y_2 با توجه به این که حاصل تقسیم یک عدد نامنفی بر جمع همان عدد و یک عدد نامنفی دیگر است، قطعا عددی بین 0 و 1 خواهد بود.
حالا برای یافتن تابع چگالی Y_1 و Y_2 داریم:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^1 y_1e^{-y_1}dy_2 = y_1e^{-y_1}$$

و

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_0^\infty y_1e^{-y_1}dy_1$$

که برای آن از طریق انتگرال جزء به جزء داریم:

$$u = y_1, v = -e^{-y_1}$$
$$du = dy_1, dv = e^{-y_1}dy_1$$

پس

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_0^\infty y_1e^{-y_1}dy_1 = -y_1e^{-y_1}|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-y_1}dy_1 = (0-0) - (e^{-y_1})|_0^\infty = 1$$

توجه: ماتریس ژاکوبین را می‌توان به شکل دیگری براساس مشتقات y_i ها نسبت به x_i هم تشکیل داد و در آن صورت، باید آن را در مخرج عبارت قرار می‌دادیم.

سؤال ۲ سه متغیر تصادفی X, Y, Z پیوسته با چگالی توام زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} c(x+2y+3z) & 0 \leq x,y,z \leq 1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

آ) ثابت c را بیابید.

ب) تابع چگالی احتمال X و چگالی توام YZ را بیبابد.

پاسخ ۲ آ) می‌دانیم که انتگرال تابع چگالی احتمال در کل بازه تعریف شده باید 1 باشد. پس داریم:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)dxdydz \\
&= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 c(x+2y+3z)dxdydz \\
&= \int_0^1\int_0^1 c\left(\frac{1}{2}+2y+3z\right)dydz \\
&= \int_0^1 c\left(\frac{3}{2}+3z\right)dz \\
&= 3c
\end{aligned}$$

پس $c=\frac{1}{3}$ است.

ب) داریم:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)dydz \\
&= \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{3}(x+2y+3z)dydz \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}(x+1+3z)dz \\
&= \frac{1}{3}\left(x+\frac{5}{2}\right)
\end{aligned}$$

پس با توجه به بازه تعریف:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(x+\frac{5}{2}\right) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

و برای توزیع YZ هم داریم:

$$f_{YZ}(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}(x+2y+3z)dydz = \frac{1}{6}+\frac{2y}{3}+z$$

پس با توجه به بازه تعریف:

$$f_{YZ}(y,z) = \begin{cases} \frac{1}{6}+\frac{2y}{3}+z & 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

سؤال ۳ فرض کنید X و Y دو تابع توزیع گاوسی (نرمال) مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشند. تعریف می‌کنیم: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\theta=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ که $|\theta|<\pi$ تابع توزیع توام r و θ را بدست آورده و نشان دهید که این دو از یکدیگر مستقل هستند.

پاسخ ۳ ابتدا توجه کنید که توزیع توام x و y، از آن جایی که هر دو گاوسی مستقل هستند به این صورت است:

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\left(x^2+y^2\right)/2\sigma^2}$$

حال x و y را برحسب r و θ پیدا می‌کنیم. از آن جایی که $|\theta|<\pi$ است، با توجه به شناختی که از روابط مثلثاتی داریم، می‌توان متوجه شد که:

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

حال داریم:

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

و یا به عبارت دیگر:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

می‌توانید به جواب سوال ۱ هم توجه کنید که در آن جا، گفتیم که بسته به تعریف ژاکوبین، ممکن است ژاکوبین را در مخرج عبارت قرار بدهیم. مشاهده می‌کنید که این دو ژاکوبین، معکوس همدیگر هستند.

پس داریم:

$$f_{r,\theta}(r,\theta) = |J(r,\theta)| f_{x,y}(x,y) = r f_{x,y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}$$

که در آن $0 < r < \infty$ و $|\theta| \leq \pi$

از طرفی:

$$f_r(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{r,\theta}(r,\theta) d\theta = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \quad 0 < r < \infty$$

و همچنین:

$$f_\theta(\theta) = \int_0^\infty f_{1,\theta}(r,\theta) dr = \frac{1}{2\pi} \quad |\theta| < \pi$$

که همان طور که مشخص است:

$$f_{r,\theta}(r,\theta) = f_r(r) f_\theta(\theta)$$

یعنی r و θ از هم مستقل هستند.

سؤال ۴ دو متغیر تصادفی X و Y مستقل و با توزیع نمایی با **میانگین** λ هستند. تابع چگالی احتمال متغیرهای زیر را بیابید. (هر کدام به صورت مجزا، نیازی به محاسبه توزیع توام نیست)

آ)

$$Z = \frac{Y}{max(X,Y)}$$

ب)

$$W = \frac{X}{min(X,2Y)}$$

پاسخ ۴ آ)

$$Z = \frac{Y}{\max(X,Y)} = \begin{cases} \frac{Y}{X}, & X \geq Y \\ 1, & X < Y \end{cases} \Rightarrow 0 < z \leq 1$$

در صورتی که $0 < z < 1$ باشد:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left\{\frac{Y}{X} \leq z, X > Y\right\}$$
$$= P\{Y \leq Xz, X > Y\} = \int_0^\infty \int_0^{xz} f_{XY}(x,y) dy dx$$

پس اگر نسبت به z متشق بگیریم طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال که در مورد مشتق‌گیری از انتگرال است، داریم:

$$f_Z(z) = \int_0^\infty x f_{XY}(x, xz)dx = \int_0^\infty \frac{x}{\lambda^2} e^{-(1+z)x/\lambda} dx = \frac{1}{(1+z)^2}, \quad 0 < z < 1$$

توجه کنید که هر دو متغیر X و Y مستقل بودند. ضمن این که وقتی میانگین λ باشد، خود پارامتر $\frac{1}{\lambda}$ است. همچنین
$(1+z) \times x = (1+y/x)x = x+y$
همچنین برای خود نقطه 1 هم داریم:

$$P(Z=1) = P(X<Y) = \int_0^\infty \int_0^y \frac{1}{\lambda^2} e^{-(x+y)/\lambda} dxdy = \frac{1}{2}$$

ب)

$$W = \frac{X}{\min(X, 2Y)} = \begin{cases} \frac{X}{2Y}, & X \geq 2Y \\ 1, & X < 2Y \end{cases} \Rightarrow 1 \leq w < \infty$$

در بازه‌ای که $w \neq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(X/(2Y) \leq w, X > 2Y) = P(X \leq 2Yw, X > 2Y) \\ &= \int_0^\infty \int_{2y}^{2wy} f_{XY}(x,y) dxdy \end{aligned}$$

بنابراین با مشتق‌گیری نسبت به w داریم:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \int_0^\infty 2y f_{XY}(2wy, y)dy = \int_0^\infty \frac{2y}{\lambda^2} e^{-(1+2w)y/\lambda} dy \\ &= \frac{2}{(1+2w)^2}, \quad w > 1 \end{aligned}$$

همچنین برای نقطه $W=1$ داریم:

$$P(W=1) = P(X<2Y) = \int_0^\infty \int_0^{2y} \frac{1}{\lambda^2} e^{-(x+y)/\lambda} dxdy = \frac{2}{3}$$

سؤال ۵ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نرمال مستقل با میانگین 0 و واریانس σ^2 باشند. دو متغیر U و V را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$U = \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad V = \frac{2XY}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

آ) تابع چگالی احتمال توام $f_{U,V}(u,v)$ را بیابید.

ب) نشان دهید که U و V هم متغیرهای تصادفی نرمال مستقل هستند.

ج) نشان دهید: $\frac{(X-Y)^2 - 2Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ هم یک متغیر تصادفی نرمال است. این نشان می‌دهد که به جز ترکیب خطی متغیرهای نرمال، ممکن است توابع دیگری از آن‌ها هم نرمال بشود.
(راهنمایی: برای این سوال، می‌توانید تا حدی از سوال ۳ کمک بگیرید)

پاسخ ۵ آ) ابتدا این تغییر متغیر را انجام می‌دهیم:

$$R = \sqrt{X^2+Y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

که $0 \leq R < \infty$ و $|\theta| \leq \pi$

و در نتیجه $X = Rcos\theta, Y = R\sin\theta$
در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = R\cos 2\theta \\
V &= \frac{2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = R\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

همچنین:

$$
J = \begin{vmatrix} \cos 2\theta & -2r\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2r\cos 2\theta \end{vmatrix} = 2r = 2\sqrt{u^2 + v^2}
$$

از طرفی برای تبدیل بدست آوردن R, θ بر حسب U, V باید توجه داشت که θ می‌تواند دو مقدار

$$
\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \theta_1
$$

را بگیرد. دلیل ایجاد دو جواب، ضریب 2 است که باعث می‌شود در بازه تعریف θ وجود داشته باشد. همچنین برای r هم:

$$
r = \sqrt{u^2 + v^2}
$$

حال با توجه به همه این‌ها و همچنین با توجه به روابطی که در سوال 4 برای توزیع توام $f_{r,\theta}(r, \theta)$ به‌دست آوردیم:

$$
\begin{aligned}
f_{UV}(u, v) &= \frac{1}{|J|}\left\{f_{r,\theta}\left(r, \theta_1\right) + f_{r,\theta}\left(r, \theta_2\right)\right\} = \frac{2}{|J|} f_{r,\theta}\left(r, \theta_1\right) \\
&= \frac{2}{2\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2\pi\sigma^2} e^{-\left(u^2 + v^2\right)/2\sigma^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left(u^2 + v^2\right)/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-u^2/2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-v^2/2\sigma^2} \\
&= f_U(u) f_V(v)
\end{aligned}
$$

ب) از بخش بالا مستقیما ثابت شد که U و V مستقل و نرمال هستند. زیرا تنها کافیست از عبارت:

$$
\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left(u^2 + v^2\right)/2\sigma^2}
$$

بر حسب u و v به طور جداگانه انتگرال از $-\infty$ تا ∞ بگیرید. هر چند فارغ از آن، این که می‌توان عبارت صورت سوال را به دو تکه ضربی مجزا بر حسب u و v به راحتی تقسیم کرد هم نشان دهنده همین موضوع است.

البته توجه کنید که صورت اولیه سوال $V = \frac{XY}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ بوده است. ولی در اصل می توانیم این V را معادل با $\frac{V}{2}$ راه حل بدانیم و چون V نرمال بود پس $\frac{V}{2}$ هم نرمال است و همچنین چون V و U مستقل بودند، $\frac{V}{2}$ و U هم مستقل هستند. این را می‌توان به شکل مستقیم هم ثابت کرد اما راه حل آن به نسبت این راه، طولانی‌تر شده و نیاز به انتگرال‌های پیچیده‌تری دارد که باعث می‌شود راه بالا، از نظر سادگی و قابل فهم بودن، بهتر باشد. به هر حال، اگر سوال را براساس صورت قبلی هم به درستی حل کرده باشید، جواب شما قابل قبول خواهد بود.

ج)

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{(X - Y)^2 - 2Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{\left(X^2 - Y^2\right) - 2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\
&= \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \frac{2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\
&= U - V \sim N\left(0, 2\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

سؤال ۶ فرض کنید X و Y مشترکا نرمال باشند و همچنین $Var(X) = Var(Y)$. نشان دهید دو متغیر تصادفی $X+Y$ و $X-Y$ از هم مستقل هستند.

پاسخ ۶ از آنجایی که X و Y مشترکا نرمال هستند طبق تعریف می‌دانیم $X+Y$ و $X-Y$ نیز مشترکا نرمال هستند. همچنین داریم:

$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) = Var(X) - Var(Y) = 0$$

پس ناهمبسته هستند. بنابراین از آنجایی که ناهمبسته هستند و مشترکا نرمال هستند نتیجه می‌گیریم که مستقل نیز هستند.

سؤال ۷ فرض کنید X و Y مشترکا نرمال باشند و پارامترهایشان به‌صورت زیر باشد:

$$\mu_X = 0, Var(X) = 1, \mu_Y = -1, Var(Y) = 4, \rho = -\frac{1}{2}$$

آ) احتمال $P(X+Y>0)$ باشد را محاسبه کنید.

ب) متغیر a را طوری بیابید که $aX+Y$ و $X+2Y$ نسبت به هم مستقل باشند.

پاسخ ۷ آ) متغیر تصادفی Z را به‌صورت $Z = X+Y$ تعریف می‌کنیم. از آنجایی که X و Y مشترکا نرمال بودند بنابراین طبق تعریف می‌دانیم Z نیز متغیر تصادفی با توزیع نرمال است.

$$E[Z] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \mu_X + \mu_Y = -1$$

$$Var(Z) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 1 + 4 - 2 = 3$$

$$\rightarrow Z \sim N(-1, 3)$$

$$\rightarrow P(Z>0) = 1 - \Phi(\frac{0-(-1)}{\sqrt{3}}) = 1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

ب) از آنجایی که $aX+Y$ و $X+2Y$ مشترکا نرمال هستند بنابراین برای شرط استقلال آن‌ها تنها کافیست حالت ناهمبسته بودن آن‌ها را پیدا کنیم.

$$Cov(X,Y) = Var(X)Var(Y)\rho(X,Y) = -2$$

$$Cov(aX+Y, X+2Y) = aCov(X,X) + 2aCov(X,Y) + Cov(Y,X) + 2Cov(Y,Y) = a - 4a - 2 + 8 = 6 - 3a$$

بنابراین به‌ازای $a=2$ این دو متغیرتصادفی تعریف شده ناهمبسته و درنتیجه مستقل می‌شوند.

سؤال ۸ فرض کنید چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}) + (\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y})^2]\}$$

و همچنین تابع مولد گشتاور X و Y به‌صورت زیر است:

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = exp[t_1\mu_X + t_2\mu_Y + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_X^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_X\sigma_Y + t_2^2\sigma_Y^2)]$$

آ) چگالی احتمال مارجینال X و Y را محاسبه کنید.

ب) تابع توزیع $Z = X+Y$ را به‌دست آورید.

ج) توزیع چگالی احتمال شرطی $p(X=x|Y=y)$ و $p(Y=y|X=x)$ را به‌دست آورید.

پاسخ ۸ آ)

$$M_X(t) = M(t,0) = exp[\mu_X t + \frac{1}{2}\sigma_X^2 t^2]$$

$$M_Y(t) = M(0,t) = exp[\mu_Y t + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 t^2]$$

$$\rightarrow X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad , \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

ب)

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX+tY}]$$

همچنین می‌دانیم که

$$M(t_1,t_2) = E[e^{t_1X+t_2Y}] \rightarrow M_{X+Y}(t) = M(t_1 = t, t_2 = t)$$

$$\longrightarrow M_{X+Y}(t) = M(t,t) = exp[\mu_X t + \mu_Y t + \frac{1}{2}(\sigma_X^2 t^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y t^2 + \sigma_Y^2 t^2)]$$

$$\rightarrow M_{X+Y}(t) = exp[(\mu_X + \mu_Y)t + \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2)t^2]$$

$$\Longrightarrow X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2)$$

ج)

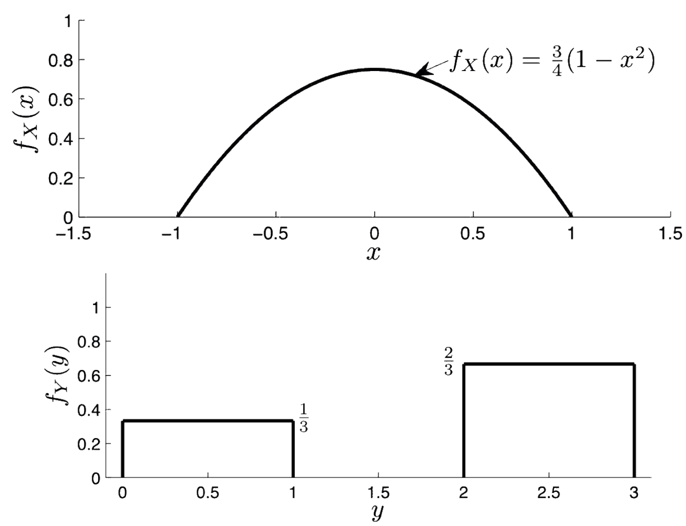
$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} exp\{-\frac{(x-\mu_X-\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho(y-\mu_Y))^2}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2}\}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} exp\{-\frac{(x-\mu_Y-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho(x-\mu_X))^2}{2(1-\rho^2)\sigma_Y^2}\}$$

$$\longrightarrow X|Y \sim N(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y), (1-\rho^2)\sigma_X^2)$$

$$\longrightarrow Y|X \sim N(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_x), (1-\rho^2)\sigma_Y^2)$$

سؤال ۹ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. نمودار تابع توزیع چگالی احتمال آن‌ها در دو شکل زیر آمده است. اگر $Z = X + Y$ باشد چگالی احتمال متغیر تصادفی Z را بیابید.



پاسخ ۹

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t)dt$$

برای $z \in [-1,0]$

$$f_Z(z) = \int_{-1}^{z} \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}(1-t^2)dt = \frac{1}{4}(z - \frac{z^3}{3} + \frac{2}{3})$$

برای $z \in [0,1]$

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{z} \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}(1-t^2)dt = \frac{1}{4}(1 - \frac{z^3}{3} + \frac{(z-1)^3}{3})$$

برای $z \in [1,2]$

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} \frac{1}{3}.\frac{3}{4}(1-t^2)dt + \int_{-1}^{z-2} \frac{2}{3}.\frac{3}{4}(1-t^2)df = \frac{1}{4}(z + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{2(z-2)^3}{3} - 1)$$

برای $z \in [2,3]$

$$f_Z(z) = \int_{z-3}^{z-2} \frac{2}{3}.\frac{3}{4}(1-t^2)dt = \frac{1}{6}(3 + (z-3)^3 - (z-2)^3)$$

برای $z \in [3,4]$

$$f_Z(z) = \int_{z-3}^{1} \frac{2}{3}.\frac{3}{4}(1-t^2)dt = \frac{1}{6}(11 - 3z + (z-3)^3)$$

سؤال ۱۰ فرض کنید U متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ و Z متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر 1 است. با فرض اینکه Z و U از هم مستقل باشند دو متغیر تصادفی X و Y را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \sqrt{2Z}cos(U), Y = \sqrt{2Z}sin(U)$$

نشان دهید توزیع چگالی احتمال توام $f_{XY}(x,y)$ از توزیع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد تبعیت می‌کند.

پاسخ ۱۰

$$f_{U,Z}(u,z) = f_U(u)f_Z(z) = \frac{e^{-z}}{2\pi}$$

$$g(u,z) = (\sqrt{2Z}cos(U), \sqrt{2Z}sin(U))$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{f_U(u)f_Z(z)}{|detJ(u,z)|}$$

$$J(u,z) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2z}sin(u) & \frac{cos(u)}{\sqrt{2z}} \\ \sqrt{2z}cos(u) & \frac{sin(u)}{\sqrt{2z}} \end{bmatrix}$$

$$detJ = -sin(u)^2 - cos(u)^2 = -1 \rightarrow |detJ| = 1 \longrightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-z}}{2\pi}$$

$$z = \frac{x^2+y^2}{2} \longrightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

با جایگذاری در رابطه‌ی به‌دست آمده در قسمت الف توزیع توام آن‌ها برابر حاصل ضرب توزیع‌شان می‌شود یعنی دو متغیر نسبت به هم مستقل می‌شود.

موفق باشید