آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

موعد تحویل: ۱ دی

تمرین سری پنجم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله‌ی ۱. (۱۵ نمره)

گروهی متشکل از ۲۰۰ نفر شامل ۱۰۰ مرد و ۱۰۰ زن داریم که به صورت تصادفی به ۱۰۰ تیم دونفره تقسیم شده‌اند. با استفاده از نامساوی چبیشف، یک کران بالا برای احتمال این رویداد بیابید که حداکثر ۳۰ تیم هم عضو مرد و هم عضو زن داشته باشند.

مسئله‌ی ۲. (۱۱ نمره)

فرض کنید فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل $N(0,1)$ باشند و

$$Z = 1 + X + XY^2$$

$$W = 1 + X$$

مقدار $Cov(Z, W)$ را به دست آورید.

مسئله‌ی ۳. (۹ نمره)

فرض کنید $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع هندسی (θ) است که در آن θ نامعلوم است. تخمینگر بیشینه احتمالی(MLE) برای θ را بر اساس این نمونه تصادفی به دست آورید.

مسئله‌ی ۴. (۸ نمره)

فرض کنید که X یک متغیر تصادفی و f, g دو تابع صعودی باشند. نشان دهید:

$$Cov(f(x), g(x)) \geqslant 0$$

مسئله‌ی ۵. (۱۶ نمره)

در محله طرشت یک دستگاه خودپرداز متعلق به بانک ملی وجود دارد که به صورت توزیع زیر پول نقد پرداخت می‌کند.

Amount, x (Toman)	50	100	200
$P(X = x)$	0.3	0.5	0.2

تعداد شهروندان طرشتی که روزانه به این دستگاه مراجعه می‌کنند از توزیع $N \sim Poisson(\lambda)$ پیروی می‌کند. فرض کنید $T_N = X_۱ + X_+ ... + X_N$ مقدار کل پول‌های نقدی باشد که شهروندان در یک روز از دستگاه دریافت می‌کنند در شرایطی که هر کدام از X_i ها از توزیعی که بالاتر تعریف کردیم پیروی می‌کنند و از یکدیگر مستقل هستند، علاوه بر این از N نیز مستقل هستند.

۱. نشان دهید $E(X) = ۱۰۵, Var(X) = ۲۷۲۵$

۲. $E(T_N)$ و $Var(T_N)$ را بیابید.

مسئله‌ی ۶. (۱۱ نمره)

فرض کنید $x_۱, x_۲, ..., x_n$ نمونه‌های متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان(iid) از توزیعی به شکل زیر هستند.

$$f_X(x|\theta) = \begin{cases} \frac{\theta x^{\theta-1}}{3^\theta}, & 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

MLE پارامتر θ را بیابید.

مسئله‌ی ۷. (۱۲ نمره)

فرض کنید یک مدل داریم که برای ورودی x_i خروجی y_i را با استفاده از رابطه‌ی زیر تولید می‌کند.

$$y_i = ax_i + \epsilon_i$$

به صورتی که ϵ_i در واقع نویز سیستم ما می‌باشد و از توزیع $\epsilon_i \sim N(۰, \sigma^۲)$ با پارامتر ثابت σ تبعیت می‌کنید. با فرض اینکه n داده به صورت $\{(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), ..., (x_n, y_n)\}$ داریم. با استفاده از MLE، a را تخمین بزنید.

مسئله‌ی ۸. (۱۸ نمره)

در این مسئله می‌خواهیم مقدار انتگرال یک تابع را در بازه $[a, b]$ بدست آوریم.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

برای اینکار در نظر می‌گیریم که یک تابع توزیع داریم که احتمال PDF آن را با g نشان می‌دهیم و فقط در بازه $[a, b]$ می‌توان از آن داده گرفت. حال با n داده‌گیری از این توزیع مقدار $I(f)$ را با تخمینگر زیر تخمین می‌زنیم.

$$\hat{I}_n(f) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{f(X_i)}{g(X_i)}$$

۱. نشان دهید که $\mathbb{E}\left[\hat{I}_n(f)\right] = I(f)$

۲. نشان دهید که در تعداد داده بالا، مقدار تخمینگر ما به خود مقدار اصلی نزدیک می‌شود.

۳. مقدار $Var\left[\hat{I}_n(f)\right]$ را بدست آورید.

موفق باشید :)