آمار و احتمال مهندسی نیمسال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰ مدرس: سید ابوالفضل مطهری



تمرين چهارم

زمان تحویل: تا آخر روز ۵شنبه ۲۰ آذر.

لطفا پاسخها به همراه نام و شماره دانشجویی در کوئرا آپلود شوند.

سوال اول (۱۰ نمره)

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته و $\{0,1,2\}$. تابع توزیع X را اینگونه تعریف می کنیم:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/3 & x \in R_X \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

همچنین فرض کنید Y متغیر تصادفی گسسته ی باشد که مستقل از X است و $R_Y = \{1,2\}$ تابع توزیع Y را اینگونه تعریف می کنیم:

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}y & y \in R_Y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

تابع توزیع Z = X + Y را بیابید.

سوال دوم (۱۰ نمره)

ثابت کنید متغیرهای X_n ، ... ، X_n مستقلند اگر و تنها اگر تابع توزیع توام آنها به شکل زیر قابل بیان باشد.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$$

تابعی مثبت است. g_i

سوال سوم (۱۵ نمره)

نقطه (X,Y,Z) به صورت یکنواخت از درون کره ای به شعاع r انتخاب شده است.

الف) تابع چگالی احتمال توأم سه متغیر X، Y و Z را به دست آورید.

ب) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر X و Y را به دست آورید.

ج) انتگرالی را که بیانگر توزیع حاشیه ای متغیر X باشد، بنویسید. (نیازی به محاسبه این انتگرال نیست.)

سوال چهارم (۱۵ نمره)

کواریانس شرطی X و Y به شرط Z به صورت زیر تعریف می شود:

$$cov(X, Y|Z) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Z])(Y - \mathbb{E}[Y|Z])|Z]$$

گزارههای زیر را ثابت کنید:

$$cov(X,Y|Z) = \mathbb{E}[XY|Z] - \mathbb{E}[X|Z]\mathbb{E}[Y|Z]$$
 .)

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}[cov(X,Y|Z)] + cov(\mathbb{E}[X|Z],\mathbb{E}[Y|Z])$$
 .Y

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var(\mathbb{E}[X|Y])$$
 .*

سوال پنجم (۱۰ نمره)

برای متغیرهای تصادفی توأم X، Y و Z گزارههای زیر را ثابت کنید.

$$\mathbb{E}[Y|Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,Z]|Z]$$
 .)

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|X]]$$
 .

سوال ششم (۱۵ نمره)

یک باکتری در هر مرحله با احتمال p موفق به تولید مثل می شود (یکی شبیه خودش درست می کند.)، با احتمال p در رقابت تولید مثل می باکتری در هر مرحله با احتمال p موفق به تولید مثل می ضورت در بقا شکست می خورد و می میرد. با فرض دانستن تعداد باکتری ها در مرحله صفر (X_0) امید ریاضی و واریانس تعداد باکتری ها در مرحله (X_0) را حساب کنید.

سوال هفتم (۱۵ نمره)

به ازای هر توزیع توأم X و Y دادهشده، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) تابع چگالی X را بیابید.

ب) تابع چگالی Yرا بیابید.

Y و X مستقل اند X

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

موفق باشید.