آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۳ـ۱۴۰۲

مدرس: دکتر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم

موعد تحویل: ۱۷ آذر

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله‌ی ۱. دست‌گرمی! (۹ نمره)

تابع توزیع توام X, Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & 0 < y < 1, 0 < x < 1-y \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

الف. مقدار c را بیابید.

ب. تابع $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را به دست آورید.(تابع چگالی حاشیه ای را برای Y و X پیدا کنید.)

ج. آیا Y و X مستقل هستند؟

د. $P(X < Y)$ را بیابید.

مسئله‌ی ۲. آشپزخانه دربار (۱۰ نمره)

دو آشپز به طور مستقل مشغول پخت یک غذا هستند. آشپز اول در $Y_1 \sim Exp(\lambda_1)$ و آشپز دوم در $Y_2 \sim Exp(\lambda_2)$ این غذا را می پزند.

الف. تابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی $\frac{Y_1}{Y_2}$ را بیابید.

ب. به چه احتمالی آشپز اول زودتر از آشپز دوم غذا را آماده می‌کند؟

مسئله‌ی ۳. نقاط بازیگوش! (۱۰ نمره)

فرض کنید X و Y دو نقطه تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه (۰ ,۱) می‌باشند. تابع توزیع احتمال(توزیع تجمعی) و تابع چگالی احتمال $\frac{max(X,Y)}{min(X,Y)}$ را حساب کنید.

مسئله‌ی ۴. پرتاب ۳ امتیازی! (۱۴ نمره)

امیررضا که یک بازیکن بسکتبال است، روزی $N \sim Poisson(\lambda)$ بار اقدام به پرتاب ۳ امتیازی می کند که هر پرتاب به طور مستقل به احتمال p تبدیل به امتیاز می شود. تعداد پرتاب های منجر به امتیاز را با X نمایش می‌دهیم.

الف. تابع جرم احتمال X را به دست آورید.

ب. اگر Y متغیر تصادفی نشان‌دهنده تعداد پرتاب‌های ناموفق باشد، تابع توزیع توام Y و X را بیابید. آیا Y و X از یکدیگر مستقل هستند؟

مسئله‌ی ۵. حد مرکزی (۱۰ نمره)

با استفاده از قضیه حد مرکزی ثابت کنید:

$$\lim_{n} \frac{1}{e^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

راهنمایی: جمع n توزیع پوآسون مستقل با پارامترهای $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ از یک توزیع پوآسون با پارامتر $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ پیروی میکند.

مسئله‌ی ۶. ملاقات (۱۰ نمره)

دو نفر هر یک در زمان تصادفی بین ۵ تا ۶ عصر به ایستگاه میرسند.(زمان رسیدن از توزیع یکنواخت بین ۵ تا ۶ پیروی میکنند). هر یک ۵ دقیقه در ایستگاه توقف میکنند و بعد آنجا را ترک میکنند. چقدر احتمال دارد که این دو نفر همدیگر را در ایستگاه ملاقات کنند؟

مسئله‌ی ۷. توزیع توام (۱۵ نمره)

فرض کنید X یک متفیر تصادفی پیوسته با PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} e^x & 0 \leqslant x \leqslant c \\ \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

باشد. میدانیم که با دانستن $X = x$، متغیر تصادفی Y روی بازه $[-x^2, x^2]$ از توزیع یکنواخت پیروی میکند.

الف. مقدار c را بیابید.

ب. تابع چگالی احتمال توام $f_{XY}(x, y)$ را بیابید.

ج. $f_Y(y)$ را بیابید.

د. $P(|Y| < X^3)$ را بیابید.

مسئله‌ی ۸. قضیه حد مرکزی (۱۰ نمره)

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_{25}$ متغیرهای تصادفی iid باشند

$$P_X(k) = \begin{cases} ۰/۶ & k = ۱ \\ ۰/۴ & k = -۱ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

و همچنین فرض کنید $Y = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$. با استفاده از قضیه حد مرکزی مقدار $P(۴ \leqslant Y \leqslant ۶)$ را تخمین بزنید.

اگر Φ نشان‌دهنده‌ی تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشد، در صورت مشاهده‌ی $\Phi(۰/۳۰۶۲)$ در راه‌حل خود، آن را با ۰/۶۲ جایگزین کنید.

مسئله‌ی ۹. مهمانی (۱۲ نمره)

۶۴ مهمان دعوت کرده اید و باید برای آنها ساندویچ تهیه کنید. شما می‌دانید که هر مهمان برای سیر شدن باید ۰، ۱ و یا ۲ ساندویچ به ترتیب با احتمال های $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$ بخورد. با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی تعداد ساندویچ‌های مورد نیاز را در حالتی تخمین بزنید که با احتمال حداقل ۹۵ درصد همه‌ی مهمان‌ها سیر شوند.

راهنمایی: $\Phi^{-۱}(۰/۹۵) = ۱/۶۴۴۹$

موفق باشید :)