دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

تمرین سری سوم

مدرس: مهدی جعفری	موعد تحویل: چهارشنبه ۷ اردیبهشت ۱۴۰۱

سؤال ۱ درون یک کیسه ۵ توپ وجود دارد که روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۵ نوشته شده است. شخصی هر بار به صورت تصادفی یکی از توپ‌های داخل کیسه را برداشته، عدد آن را یادداشت کرده و آن را به کیسه برمی‌گرداند. این کار برای n مرحله تکرار می‌شود. امید ریاضی بیشینه اعداد یادداشت شده در این آزمایش را محاسبه کنید.

سؤال ۲ متغیر تصادفی X تعداد آزمایش‌های لازم برای مشاهده‌ی m اُمین موفقیت در یک آزمایشی است که احتمال هر بار موفق شدن آن p گفته می‌شود که این متغیر تصادفی توزیع پاسکال دارد و آن را به صورت $X \sim Pascal(m, p)$ نشان می‌دهند.

الف) توزیع X را بیابید.

ب) در نظر بگیرید $X \sim Pascal(m, p)$ و $Y \sim Pascal(l, p)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند. یک متغیر تصادفی جدید به شکل $Z = X + Y$ تعریف می‌کنیم. *PMF* و همچنین امید ریاضی متغیر تصادفی Z را بیابید.

سؤال ۳ الف) متغیر تصادفی X را درنظر بگیرید. به ازای کدام مقدار c حاصل عبارت $\mathbb{E}[|X - c|]$ کمینه می‌شود؟

ب) دو متغیر تصادفی X و Y با امید ریاضی محدود را در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر بخواهیم مشروط به دانستن $X = x$، تابعی مثل $f(X)$ ارائه کنیم تا امید ریاضی مربع تفاضل Y و $f(X)$ کمینه شود، تابع $\mathbb{E}[Y|X = x]$ بهترین انتخاب برای $f(X)$ خواهد بود.

سؤال ۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی گسسته $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهایی *iid* هستند. همچنین فرض کنید که x یک عدد ثابت است. مطلوب است محاسبه عبارت $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2 + ... + X_n = x]$.

سؤال ۵ عبارات زیر را اثبات کنید:

الف) با فرض مستقل بودن X و Y داریم: $\mathbb{E}[X|Y = y] = \mathbb{E}[X]$

ب) $\mathbb{E}[XY|Y = y] = y\mathbb{E}[X|Y = y]$

ج) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[YE[X|Y]]$

سؤال ۶ می‌دانیم که درون لپ‌لپ جوایز تصادفی قرار دارد. حتما روزی با خود فکر کرده‌اید که چند لپ‌لپ باید تهیه کنید تا از تمامی جوایز ممکن داخل آنها حداقل یکی داشته باشید. فرض کنید تعداد جوایز متمایز شرکت تولیدکننده‌ی این محصول n باشد. همچنین، فرض کنید جوایز با توزیع یکنواخت و به صورت مستقل در محصولات قرار داده شده باشند. به طور متوسط چند لپ‌لپ باید خریداری شود تا از هر یک از انواع جوایز درون آنها یکی داشته باشیم؟

سؤال ۷ در یک لیگ حذفی فوتبال، ۶۴ تیم وجود دارد. این تیم‌ها دو به دو در دور اول با هم مسابقه داده و برندگان به دور دوم مسابقات می‌روند و مجدد دو به دو با هم مسابقه می دهند. به همین ترتیب این مسابقات تا جایی که تنها یک تیم باقی بماند و قهرمان شود، ادامه خواهد داشت.
شخصی در چالشی برای پیش بینی نتایج بازی های این لیگ شرکت کرده است. او باید در ابتدای فصل، پیش بینی خود از برنده‌ی همه بازی ها را ارائه دهد و در انتهای فصل امتیازی بر اساس پیش‌بینی‌هایی که در ابتدای فصل انجام داده بود، می‌گیرد. قانون چالش به این شکل است که به ازای هر پیش‌بینی درست در دور اول، ۱ امتیاز به دست می‌آورد و در هر دور بعدی از مسابقات، امتیاز کسب شده دو برابر دور قبلی می شود. یعنی اگر برنده‌ی مسابقه‌ای در دور دوم را درست پیش‌بینی کرده باشد ۲ امتیاز می‌گیرد و الی اخر. دقت کنید که آنچه اهمیت دارد، پیش‌بینی درست برنده هر بازی است، به این معنی که لزومی ندارد که فرد هر دو تیم رسیده به یک بازی در هر یک از مراحل لیگ را به درستی پیش‌بینی کرده باشد و تنها پیش‌بینی درست برنده هر یک از بازی‌های مراحل برای به دست آوردن امتیاز آن بازی برایش کفایت می‌کند.
از آنجایی که این شخص هیچ شناختی از این تیم‌ها ندارد، تصمیم می گیرد تا با پرتاب یک سکه سالم، تمام بازی‌ها را پیش بینی کند. امید ریاضی امتیاز نهایی وی در انتهای فصل را بدست آورید.

سؤال ۸ فضای نمونه گسسته‌ای با ۱۰۰ عضو $x_1, x_2, ...x_{100}$ را در نظر بگیرید. برای هر متغیر تصادفی X و Y با توابع جرمی احتمال $p_X(x)$ و $p_Y(y)$ توابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(X) = -\sum_{i=1}^{100} [p_X(x_i) \ln(p_X(x_i))]$$

$$g(X, Y) = \mathbb{E}_{p_X}[\ln(\frac{p_X}{p_Y})]$$

کران بالایی برای تابع f به ازای تمام Xهای موجود بیابید و نشان دهید که حالت تساوی این کران برای توزیع یکنواخت روی فضای نمونه رخ می‌دهد. (راهنمایی: برای این کار ابتدا نشان دهید که تابع g همواره نامنفی است، سپس با جایگذاری مناسب در آن، از آن برای تشکیل f و یافتن کران استفاده کنید.)

سؤال ۹ الف) می‌دانیم امید ریاضی متغیر تصادفی X به شرط پیشامد A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_x x\mathbb{P}(X = x|A)$$

حال اگر $A_1, A_2, ..., A_n$ افرازی از فضای نمونه باشند، ثابت کنید:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}[X|A_i]$$

ب) در داخل یک اتاق n نفر حضور دارند. اعداد ۱ تا $2n$ بر روی دست های هر یک از این افراد نوشته می شود به طوری که عدد روی هر دست منحصر به فرد است. در یک آزمایش هر بار دو عدد از بین اعداد موجود انتخاب می‌شود و دست‌های مربوط به این دو عدد یکدیگر را می‌گیرند و آن اعداد از لیست اعداد حذف می‌شوند. این کار تا جایی که تمام اعداد حذف شوند و افراد با گرفتن دست‌هایشان تشکیل تعدای حلقه دهند، ادامه پیدا می‌کند. امید ریاضی تعداد حلقه‌های ایجاد شده را بیابید. (دقت کنید که ممکن است دو عدد انتخاب شده مربوط به دست‌های یک نفر باشند و تشکیل حلقه دهند.)

سؤال ۱۰ عدد ۵۱۰۵۱۰ را داریم. در هر مرحله، اگر عددمان برابر k باشد، یکی از مقسوم‌علیه‌های k مثل d (شامل ۱ و k) را به تصادف انتخاب کرده، به جای k عدد $\frac{k}{d}$ را نگه می‌داریم. امید ریاضی عددی که بعد از ۱۰ مرحله داریم را محاسبه کنید.

موفق باشید