دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی — زمستان ۱۳۹۸

تمرین سری دوم (احتمال شرطی و استقلال، آزمایش‌های ترکیبی، متغیرهای تصادفی گسسته)

مدرس: نعیمه امیدوار — موعد تحویل: ۷ فروردین ۱۳۹۹

توجه: همه سوالات تحویلی هستند.

سؤال ۱ هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با یک مثال نقض رد کنید. دقت کنید که $A \perp\!\!\!\perp B$ یعنی دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند.

آ)

$$P(A \mid B \cap C) = \frac{P(A \cap B \mid C)}{P(B \mid C)}$$

ب)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)...P(An \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

ج)

$$A, B, C \; are \; independent \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp (B \cup C)$$

د)

$$(X \perp\!\!\!\perp W \mid Z \cap Y), (X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z) \Rightarrow (X \perp\!\!\!\perp (Y \cap W) \mid Z)$$

ه)

$$P(A \mid B) = P(A \mid B^c) \Leftrightarrow A \perp\!\!\!\perp B$$

و)

$$A \perp\!\!\!\perp B, P(A \mid B) = P(A \mid B \cup C) \Rightarrow P(A \mid B) = P(A \mid B \cap C)$$

ز)

$$A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B^c$$

ح)

$$A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow (A \perp\!\!\!\perp B) \mid C$$

ط)

$$A \perp\!\!\!\perp B, B \perp\!\!\!\perp C, A \perp\!\!\!\perp C \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

ی)

$$P(A \mid B) = 1 \Rightarrow P(B^c \mid A^c) = 1$$

سؤال ۲ فرض کنید که شما در حال انجام یک بازی تصادفی با یک حریف بسیار (بی‌نهایت) پولدار هستید و میزان پول اولیه‌ی شما برابر با m تومان است. در هر مرحله یک تومان می‌برید یا می‌بازید. احتمال بردن یک تومان در هر مرحله برابر p و احتمال از دست دادن آن برابر $1-p$ است. شما زمانی برنده‌ی بازی هستید که به میزان N تومان پول جمع‌آوری کنید و زمانی بازنده‌ی بازی هستید که تمام پول خود را از دست بدهید. احتمال برد و باخت خود، هنگامی که N بسیار بزرگ است را بیابید.

سؤال ۳ سکه‌ای که احتمال شیر آمدن آن p است را آنقدر می‌اندازیم تا r بار شیر بیاید. فرض کنید N نشان‌دهنده‌ی تعداد کل پرتاب‌های لازم باشد:

آ) مقدار $P(N = k)$ را به دست آورید.

ب) متغیر N را به صورت جمع r متغیر تصادفی بنویسید.

ج) مقدار $P(N = k)$ را به شرط آن که در 10 پرتاب اول 5 بار شیر آمده باشد به دست آورید (فرض کنید $r > 5$).

سؤال ۴ برای خریدن دستکش، شروع به سر زدن به داروخانه‌های شهر می‌کنیم تا از اولین داروخانه‌ای که موجود داشت، دستکش بخریم. بنا به آمارگیری که قبلا انجام داده‌ایم، هر داروخانه به احتمال 0.3 دستکش موجود دارد.

آ) با چه احتمالی از داروخانه سوم خرید می‌کنیم؟

ب) اگر ۱۰ داروخانه اول دستکش نداشته باشند با چه احتمالی از داروخانه ۱۳م خرید می‌کنیم؟

ج) حال اگر بدانیم از ۱۰۰ داروخانه شهر، ۳ داروخانه پلمپ شده اند، با چه احتمالی از داروخانه سوم دستکش می‌خریم؟

سؤال ۵ مدرسه‌ای را در نظر بگیرید که m خانواده فرزند(ان) خود را در آن ثبت‌نام کرده‌اند که n_iتا از آن‌ها i فرزند دارند $(i = 1, ..., k, \sum_{i=1}^{k} n_i = m)$. این دو روش برای انتخاب یکی از بچه‌ها را در نظر بگیرید:

آ) ابتدا یکی از m خانواده را به صورت رندوم انتخاب کنیم و سپس یکی از فرزندانشان را به صورت رندوم انتخاب کنیم.

ب) از میان $\sum_{i=1}^{k} in_i$ یکی را به صورت رندوم انتخاب کنیم.

نشان دهید احتمال انتخاب فرزند ارشد با روش اول بیشتر از روش دوم است.

سؤال ۶ فرض کنید یک کیسه پر از توپ داریم اما از تعداد توپ‌های داخل آن(N) بی‌خبریم. برای تقریب زدن N یک مشت توپ (n توپ) از داخل آن بیرون می‌کشیم، آن‌ها را علامت می‌زنیم و به داخل کیسه برمی‌گردانیم. حال کیسه را خوب تکان می‌دهیم و بعد دوباره n توپ از داخل آن به شکل تصادفی بیرون می‌کشیم. می‌خواهیم از روی تعداد توپ‌های علامت زده شده در بین این n توپ مقدار N را تخمین بزنیم. برای این منظور مقداری از N که احتمال انتخاب شدن k توپ از n توپ علامت‌دار داخل یک کیسه با N توپ را بیشینه کند اعلام می‌کنیم. این مقدار را به دست آورید.

سؤال ۷ گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

آ) اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند که $X \sim Binomial(n, p)$ و $Y \sim Binomial(m, p)$ آنگاه $X + Y \sim Binomial(n + m, p)$.

ب) اگر k متغیر تصادفی مشترکاً مستقل $X_1, X_2, ..., X_k$ داشته باشیم که $X_i \sim Geometric(p_i)$ و $Y = \min_{i=1}^{k}(X_i)$، آنگاه $Y \sim Geometric$ (پارامتر آن را بیابید).

سؤال ۸ برای تقریب تابع توزیع جرم احتمال متغیر تصادفی دوجمله‌ای در شرایطی که n مقدار بزرگی داشته باشد و p کوچک باشد به طوری که مقدار np متعادل باشد، می‌توان از تابع توزیع جرم احتمال متغیر تصادفی پوآسن با پارامتر $\lambda = np$ استفاده کرد.

آ) به شکل ریاضی معتبر بودن این تقریب را نشان دهید.

ب) اگر هر کدام از کلمات تمرینی که پیش روی شماست به احتمال 0.015 غلط املایی داشته باشد، با استفاده از تقریب فوق احتمال اینکه در این تمرین دقیقا ۷ کلمه با غلط املایی وجود داشته باشد را تقریب بزنید. فرض کنید این تمرین از ۱۰۰۰ کلمه تشکیل شده است.

سؤال ۹ برای تهیه‌ی تعداد ۱۰۰ قطعه گز، ۳۰۰ عدد پسته و ۲۰۰ عدد بادام را با مواد اولیه کاملا ترکیب می‌نماییم به طوریکه هر پسته و یا بادام مستقل از بقیه به احتمال برابر داخل یکی از گزها می‌رود.

آ) اگر ۵ گز را به صورت تصادفی انتخاب نماییم، با چه احتمالی حداقل ۳ گز دارای بیش از ۲ عدد پسته است؟

ب) اگر یک گز را به صورت تصادفی انتخاب نماییم، با چه احتمالی هیچ پسته و بادامی در آن یافت نمی‌شود؟ :)

موفق باشید