



## نکات مهم

- پاسخ‌های نظری خود را در قالب یک فایل pdf با اسم `HW#_[STD-Num]` در بخش مختص به خود در کوئرا آپلود کنید. پاسخ‌های عملی را نیز با نامی مشابه، ولی با فرمت zip در بخش مختص خود آپلود کنید.
- تنها سوالات ستاره‌دار تمرین، نیاز به تحویل دارند. نوشتن پاسخ‌های نظری، هم به صورت تایی و هم دست‌نویس، مقبول است. پاسخ‌های عملی باید در زبان R نوشته شوند.
- سوالات پرسیده شده در خصوص تمرین در شبکه‌های اجتماعی، به هیچ عنوان پاسخ داده نخواهند شد؛ تنها مکان مجاز رفع اشکال در خصوص تمرین، بخش پرسش‌ها و پاسخ‌ها در کوئرا است.
- زمان تحویل تمرین، به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد، بنابراین لازم است که زمان خود را برای انجام تمرین مدیریت کرده و آن را به روزهای پایانی موکول نکنید.
- امکان بارگذاری تمرین در کوئرا تا ۷۲ ساعت پس از ددلاین تمرین وجود دارد، اما به ازای هر ساعت تاخیر، یک درصد از نمره‌ی نهایی تمرین را از دست خواهید داد. دقیقه‌ها و ثانیه‌ها، رو به بالا گرد خواهند شد؛ مثلاً، یک ساعت و نیم تاخیر، معادل دو ساعت تاخیر محسوب می‌شود.
- در طول ترم، ۲۴۰ ساعت کوپن تاخیر خواهید داشت و با استفاده از آن‌ها، می‌توانید بدون کسر نمره، از تاخیرها استفاده کنید. جریمه‌ی تاخیرها، از تمرینی محاسبه می‌شوند که در آن، کوپن‌ها به اتمام رسیده باشند. نمره‌ی امتیازی برای اشخاصی که مجموع تاخیرهای ایشان در کل ترم، کم‌تر از ۲۴۰ ساعت باشد، به هیچ عنوان در نظر گرفته نمی‌شود.
- مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه هم می‌شود، اما هر دانش‌جو موظف است تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده، باید توسط خود دانش‌جو نوشته شده باشد. در صورت کشف اولین مورد تقلب هر دانش‌جو، نمره‌ی همان تمرین وی، صفر در نظر گرفته شده و در صورت کشف دومین مورد تقلب هر دانش‌جو، منفی نمره‌ی کل تمرین‌ها به وی تعلق خواهد گرفت. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در خصوص آیین‌نامه‌ی مشورت و تقلب، می‌توانید به بخش مربوطه در ویکی دانشکده مراجعه کنید. لازم به ذکر است که این جرایم به هیچ عنوان بخشیده نخواهند شد.

## سوالات نظری

### مسئله‌ی ۱. بارسا یا پاریس؟\*

فرض کنید در حال بررسی آماری پاس‌های مسی در زمین فوتبال هستیم. موفقیت یک پاس را رسیدن به مقصد (که یکی از هم‌تیمی‌ها است) تعریف می‌کنیم و برای ساده‌تر کردن مساله فرض می‌کنیم هر پاس مسی مستقل از هر شرط دیگری، با احتمال  $r$  که یک عدد ثابت است، به مقصد خواهد رسید.

متغیر تصادفی  $S_k$  را زمان  $k$  امین پاس موفق او در نظر گرفته و هم‌چنین متغیر تصادفی  $Z_k$  را اختلاف زمانی میان  $k$  و  $k-1$  امین پاس موفق او در نظر می‌گیریم (بدیهتاً  $Z_1 = S_1$ ). توزیع prior متغیر  $r$  را توزیعی یکنواخت در بازه‌ی  $[0, 1]$  در نظر بگیرید (توجه کنید که منظور از زمان  $k$  امین پاس موفق مسی، تعداد کل پاس‌هایی است که داده است، به طوری که آخرین پاس او  $k$  امین پاسی باشد که به مقصد مورد نظر می‌رسد).

الف) تابع جرم احتمال متغیر تصادفی  $Z_1$  یعنی  $P(Z_1 = z_1)$  را به دست آورید.

ب) مقدار  $E[R = r | Z_1 = z]$  را محاسبه کنید.

ج) تخمین MAP متغیر  $r$  را با استفاده از  $n$  داده‌ی اول، یعنی  $Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n$  به دست آورید.

### مسئله‌ی ۲. همه چیز نرماله\*

با فرض دانستن واریانس یک توزیع نرمال، ثابت کنید توزیع مزدوج آن نرمال است؛ به عبارت دیگر، با فرض نرمال بودن  $p(X|\theta)$  و  $p(\theta)$  نرمال بودن  $p(\theta|X)$  را نتیجه بگیرید.

### مسئله‌ی ۳. بازگشت

یک مدل رگرسیون خطی ساده را در نظر بگیرید که به صورت زیر است:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

که در آن  $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  و مجموعه‌ی  $(x_i, y_i)$  داده‌ها و خروجی متناظر آن‌ها هستند. تخمین کم‌ترین مربعات آن را  $\beta_i$  در نظر گرفته و نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_i = 0, \quad \sum_{k=1}^n \epsilon_i x_i = 0, \quad \sum_{k=1}^n \epsilon_i \hat{y}_i = 0$$

### مسئله‌ی ۴. نقشه\*

اگر داده‌های

$$X_i, i = 1, \dots, n$$

از توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  باشند و خود پارامتر  $\lambda$  از توزیع گاما با تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

باشد، تخمین‌گر MAP را برای  $\lambda$  با توجه به  $n$  وقوع مستقل  $X_i$  محاسبه کنید. (راهنمایی: پاسخ شما باید بر حسب متغیرهای  $\alpha, \beta, X_i$  باشد)

## مسئله ۵. رادیواکتیو \*

یکی از دانش‌جویان مستعد دانشگاه صنعتی شریف، در زیرزمین خانه‌شان، یک نمایان‌کننده‌ی ذرات کیهانی ساخته است و از آن برای اندازه‌گیری میزان تشعشعات رادیواکتیو ستاره‌های دور استفاده می‌کند. در هر روز، تعداد ذراتی که دستگاه شناسایی می‌کند یعنی ( $Y$ ) از توزیع پواسون با پارامتر  $X$  بوده که خود پارامتر  $X$  از یک توزیع نمایی با پارامتر  $u$  است، یعنی:

$$f_X(x) = \begin{cases} ue^{-ux}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

هم‌چنین، توزیع شرطی تعداد ذرات برخورد کرده با دستگاه به صورت زیر است:

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^y}{y!}, & y = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) تخمین MAP را برای متغیر  $X$ ، با این فرض که  $y$  ذره مشاهده شده، به دست آورید.

ب) نشان دهید که توزیع پسین متغیر  $X$  به شرط  $Y$  به فرم

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\lambda^{y+1}}{y!} x^y e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

بوده و هم‌چنین مقدار  $\lambda$  را بیابید. به عنوان راهنمایی، معادله‌ی زیر می‌تواند کمک‌کننده باشد:

$$\int_0^\infty a^{y+1} x^y e^{-ax} dx = y!, \quad a > 0$$

## سوالات عملی \*

سوالات عملی که تحویل آن‌ها اجباری است، به صورت یک ژوپیترونوت‌بوک در کوئرای درس قرار داده شده‌اند. لازم است این ژوپیترونوت‌بوک را طبق دستورالعمل‌های نوشته شده در آن، تکمیل کرده و در کوئرا آن را آپلود کنید.

موفق باشید! (: