آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر امیر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری پنجم

زمان تحویل: ۴ خرداد

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

بارم‌بندی

بارم سوالات به شکل زیر است: (مجموعا ۱۰۰ نمره)

- سوالات ۱ و ۵: هر کدام ۱۵ نمره
- سوالات ۲، ۳، ۴، ۶ و ۸: هر کدام ۱۰ نمره
- سوال ۷: ۲۰ نمره

مسئله‌ی ۱. (برد و باخت)

در یک بازی برای هر بازیکن احتمال برد و باخت در هر دور با هم برابر و از دورهای دیگر مستقل است. یک بازیکن با هر برد یک امتیاز مثبت و با هر باخت یک امتیاز منفی دریافت میکند.

الف) برای متغیر تصادفی دلخواه X با استفاده از تابع مولد گشتاور [1] و نامساوی مارکوف [2] به ازای $t \geqslant ۰$ یک کران برای $\mathbb{P}(X \geqslant a)$ بدست آورید.

ب) تابع مولد گشتاورِ امتیازی را که یک بازیکن در هر دور کسب می‌کند، بدست آورید؛ سپس با استفاده از آن، یک کران برای تابع مولد گشتاور امتیاز کل یک بازیکن بعد از n دور بازی بدست آورید.

(راهنمایی: از بسط تابع e^x و نامساوی $(۲n)! \geqslant ۲^n n!$ استفاده کنید.)

ج) برای احتمال اینکه امتیاز یک بازیکن بعد از n دور بازی حداقل a باشد، یک کران بیابید و سپس این کران را در حالت $n = ۱۰۰, a = ۶۰$ بدست آورید.

حل.

آ)

$$\mathbb{M}_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

$$X \geqslant a \Leftrightarrow e^{tX} \geqslant e^{ta} \qquad for \;\; t \geqslant ۰$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geqslant a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geqslant e^{ta})$$

$$\mathbb{P}(e^{tX} \geqslant e^{ta}) \leqslant \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} \qquad \text{By Markov's inequlity}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} = \mathbb{M}_X(t) e^{-ta} \qquad for \;\; t \geqslant ۰$$

ب) امتیازی که یک بازیکن در هر دور بدست می آورد را با متغیر تصادفی Y نمایش میدهیم.

$$\mathbb{P}(Y = ۱) = \mathbb{P}(Y = -۱) = \frac{۱}{۲}$$

$$\mathbb{M}_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = e^t \mathbb{P}(Y = ۱) + e^{-t} \mathbb{P}(Y = -۱) = \frac{e^t + e^{-t}}{۲}$$

با استفاده از بسط مکلورن [3] داریم:

$$e^t + e^{-t} = (۱ + t + \frac{t^۲}{۲!} + \frac{t^۳}{۳!} + ...) + (۱ - t + \frac{t^۲}{۲!} - \frac{t^۳}{۳!} + ...)$$

$$= ۲(۱ + \frac{t^۲}{۲!} + \frac{t^۴}{۴!} + ...) = ۲ \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{t^{۲i}}{(۲i)!}$$

$$(۲k)! = (۲k)(۲k-۱)...(۲)(۱) \geqslant (۲)(۲)...(۲)(k)(k-۱)...(۲)(۱) = ۲^k k!$$

---

[1] Moment generating function
[2] Markov's inequality
[3] Maclaurin

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} \leqslant 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{2^i (i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^i}{2^i (i)!}$$

$$\Rightarrow e^t + e^{-t} \leqslant 2e^{t^2/2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{M}_Y(t) \leqslant e^{t^2/2}$$

S_n را متغیر تصادفی امتیاز یک بازیکن بعد از n دور بازی در نظر بگیرید. داریم:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i$$

$$\mathbb{M}_{S_n}(t) = \mathbb{E}(e^{tS_n}) = \sum_{\forall s_n} e^{tS_n} \mathbb{P}_{S_n}(s_n) = \sum_{\forall y_1, \ldots, y_n} e^{t \sum_{i=1}^{n} y_i} \mathbb{P}_{Y_1, \ldots, Y_n}(y_1, \ldots, y_n)$$

از استقلال امتیاز دریافتی در هر دور بازی داریم:

$$\mathbb{P}_{Y_1, \ldots, Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{Y_i}(y_i)$$

$$\Rightarrow \mathbb{M}_{S_n}(t) = \sum_{\forall y_1, \ldots, y_n} \prod_{i=1}^{n} e^{ty_i} \mathbb{P}_{Y_i}(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{\forall y_1, \ldots, y_n} e^{ty_i} \mathbb{P}_{Y_i}(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{Y_i}(t)$$

$$\mathbb{M}_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{Y_i} = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^t + e^{-t}}{2} = (\frac{e^t + e^{-t}}{2})^n$$

$$\Rightarrow \mathbb{M}_{S_n}(t) \leqslant (e^{t^2/2})^n = e^{nt^2/2}$$

ج) از بخش آ داریم:

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \mathbb{M}_{S_n}(t) e^{-ta} \qquad for\ \ t \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{nt^2/2} e^{-ta} = e^{\frac{nt^2}{2} - ta}$$

از آنجایی که $n > 0$ تابع $f(t) = \frac{nt^2}{2} - ta$ در $+\infty$ و $-\infty$ به سمت $+\infty$ میل میکند، درنتیجه داری کمینه است.

$$f'(t_0) = nt_0 - a = 0 \Rightarrow t_0 = a/n$$

$$\Rightarrow min(f(t)) = f(t_0) = -\frac{a^2}{2n}$$

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{\frac{nt^2}{2} - ta} \qquad for\ \ t \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant min(e^{\frac{nt^2}{2} - ta}) = e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

به ازای $n = 100, a = 60$ داریم:

$$\mathbb{P}(S_{100} \geqslant 60) \leqslant e^{-\frac{60^2}{200}} \approx 1/52 \times 10^{-8}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۲. (تخمین پارامتر)

متغیر تصادفی گسسته X را با تابع جرم احتمال زیر و شرط $\theta \in [۰, ۱]$ در نظر بگیرید:

$$P(X) = \begin{cases} \frac{۲\theta}{۳} & X = ۰ \\ \frac{\theta}{۳} & X = ۱ \\ \frac{۲-۲\theta}{۳} & X = ۲ \\ \frac{۱-\theta}{۳} & X = ۳ \end{cases}$$

۱۰ مشاهده مستقل از این توزیع به دست آمده‌اند:

$$(۱, ۲, ۰, ۱, ۲, ۳, ۱, ۲, ۰, ۳)$$

با توجه به این مشاهدات، تخمین بیشینه درست‌نمایی[۴] را برای θ به دست آورید.

حل. با توجه به مشاهدات تابع درست‌نمایی (likelihood) برابر است با:

$$\begin{aligned} L(\theta) = P(X = ۳) \cdot P(X = ۰) \cdot P(X = ۲) \cdot P(X = ۱) \cdot P(X = ۳) \\ \cdot P(X = ۲) \cdot P(X = ۱) \cdot P(X = ۰) \cdot P(X = ۲) \cdot P(X = ۱) \end{aligned}$$

با استفاده از تابع جرم احتمال توزیع داده شده داریم:

$$L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} P(X_i|\theta) = (\frac{۲\theta}{۳})^۲ \cdot (\frac{\theta}{۳})^۳ \cdot (\frac{۲-۲\theta}{۳})^۳ \cdot (\frac{۱-\theta}{۳})^۲$$

مشخص است که بیشینه کردن خود این تابع عملیات بسیار دشواری است، پس از لگاریتم آن استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \log L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} \log P(X_i|\theta) \\ &= ۲(\log \frac{۲}{۳} + \log \theta) + ۳(\log \frac{۱}{۳} + \log \theta) + ۳(\log \frac{۲}{۳} + \log (۱ - \theta)) + ۲(\log \frac{۱}{۳} + \log (۱ - \theta)) \\ &= C + ۵ \log \theta + ۵ \log (۱ - \theta) \end{aligned}$$

در معادله بالا C جمع ثابت‌هایی است که θ در آن ها نقشی ندارد. زمانی که از این عبارت نسبت به θ مشتق بگیریم

[۴] Maximum Likelihood Estimation

صفر می‌شوند. حالا مشتق $l(\theta)$ نسبت به θ را باید برابر صفر قرار دهیم تا تابع درست‌نمایی ما بیشینه شود :

$$\frac{dl(\theta)}{d\theta} = \frac{۵}{\theta} - \frac{۵}{۱ - \theta} = ۰$$

محاسبه این معادله به ما $\hat{\theta} = ۰/۵$ را می‌دهد که همان MLE ما است.

▷

مسئله‌ی ۳. (تخمین‌گر سازگار)

اگر $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $\text{Bernoulli}(p)$ باشد، ثابت کنید که $\bar{X} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n}$ یک تخمین‌گر سازگار برای p است.

حل.

یک نمونه تصادفی با سایز n از یک توزیع برنولی با پارامتر p هر نمونه دارای میانگین p و واریانس $p(۱ - p)$ است.

$$\bar{X} = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} X_i$$

امید ریاضی $\bar{X}$ برابر است با:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} X_i\right) = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{۱}{n} \cdot n \cdot p = p$$

اکنون از Chebyshev's inequality برای اثبات سازگاری استفاده می‌کنیم:

$$P(|Y - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{۱}{k^۲}$$

در سوال ما، $Y = \bar{X}$، $\mu = p$، و $\sigma^۲ = \frac{p(۱-p)}{n}$. پس نامساوی ما برابر است با:

$$P(|\bar{X} - p| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{p(۱ - p)}{n\epsilon^۲}$$

حال زمانی که n به بینهایت میل می‌کند صورت کسر سمت راست ثابت می‌ماند در نتیجه این عبارت به صفر میل می‌کند. پس $\bar{X}$ زمانی که n به اندازه کافی بزرگ شود به p همگرا می‌شود. در نتیجه ثابت شد که $\bar{X}$ یک برآوردگر سازگار برای p است.

▷

مسئله‌ی ۴. (سکه)

سارا یک سکه را سه بار پرتاب می‌کند. سکه هر سه بار خط می‌آید. سپس او سکه را به شادی می‌دهد. شادی تا زمانی که اولین شیر را ببیند، سکه را پرتاپ می‌کند. در مجموع سکه ۴ بار پرتاب می‌شود. اگر θ را احتمال شیر آمدن سکه در نظر بگیریم، تخمین‌گر بیشینه درست‌نمایی را برای θ محاسبه کنید.

حل. اگر X_1 و X_2 و X_3 حاصل ۳ بار پرتاب سکه‌ی سارا باشد، (شیر = ۰ و خط = ۱) و Y تعداد دفعه‌های پرتاب سکه توسط شادی باشد:

1. X_1 و X_2 و X_3 دارای توزیع برنولی(θ) می‌باشند.
2. Y مستقل از X_1 و X_2 و X_3 می‌باشد و از توزیع هندسی با پارامتر $p = \theta$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} like(\theta) &= f(x_1, x_2, x_3, y|\theta) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)f(x_3|\theta)f(y|\theta) \\ &= [\prod_{i=1}^{3} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}] \times [\theta(1-\theta)^{y-1}] = \theta(1-\theta)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} 0 = l'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\log[like(\theta)] = \frac{d}{d\theta}(\ln[\theta] + 3\ln[1-\theta]) = \frac{1}{\theta} - \frac{3}{1-\theta} \\ \Rightarrow 1 - \theta = 3\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{4} \end{gathered}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۵. (میانگین مربعات)

متغیرهای تصادفی X، Y و W را در نظر بگیرید. فرض کنید داریم:

$$X \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad W \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad Y = X + W$$

اگر بدانیم که W مستقل از X است،

الف) کمینه میانگین مربعات خطا [5] تخمین‌گر X را به شرط داشتن Y بیابید. در بخش بعدی سوال، این مقدار را با $\hat{X}_M$ نشان خواهیم داد.

ب) میانگین مربعات خطا [6] را برای این تخمین‌گر محاسبه کنید. (راهنمایی: $\text{MSE} = \mathbb{E}[(X - \hat{X}_M)^2]$)

ج) فرض کنید $\tilde{X}$ نشان دهنده‌ی خطای بین مقدار واقعی X و تخمینگر MMSE آن، $\hat{X}_M$ باشد. به عبارت دیگر:

$$\tilde{X} = X - \hat{X}_M$$

---

[5] MMSE
[6] MSE

نشان دهید رابطه‌ی $\mathbb{E}[X^۲] = \mathbb{E}[\hat{X}_M^۲] + \mathbb{E}[\tilde{X}^۲]$ برقرار است.

حل.

از آنجایی که X و W مستقل و از توزیع نرمال هستند، Y نیز از توزیع نرمال پیروی می‌کند. همچنین، X و Y نیز به طور اشتراکی نرمال هستند، چرا که برای همه $a, b \in \mathbb{R}$، داریم:

$$aX + bY = (a+b)X + bW$$

که این نیز یک متغیر تصادفی نرمال است. همچنین توجه کنید که:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, X+W) = \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,W) = \mathrm{Var}(X) = ۱$$

بنابراین:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{۱}{۱ \cdot \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

الف. برآوردگر MMSE X با توجه به Y برابر است با:

$$\hat{X}_M = \mathbb{E}[X|Y] = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - \mu_Y) = \frac{Y}{۲}$$

ب. MSE این برآوردگر برابر است با:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X - \hat{X}_M)^۲] &= \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{Y}{۲}\right)^۲\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^۲ - XY + \frac{Y^۲}{۴}\right] \\
&= \mathbb{E}[X^۲] - \mathbb{E}[X(X+W)] + \frac{\mathbb{E}[Y^۲]}{۴} \\
&= \mathrm{Var}(Y) + \frac{(\mathbb{E}[Y])^۲}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

ج. توجه کنید که $\mathbb{E}[X^۲] = ۱$. همچنین:

$$\mathbb{E}[\hat{X}_M^۲] = \mathbb{E}\left[\frac{Y^۲}{۴}\right] = \frac{۱}{۲}$$

در بالا، ما همچنین MSE را پیدا کردیم که برابر است با $\mathbb{E}[\tilde{X}^۲] = \frac{۱}{۲}$. بنابراین داریم:

$$\mathbb{E}[X^۲] = \mathbb{E}[\hat{X}_M^۲] + \mathbb{E}[\tilde{X}^۲]$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۶. (برنولی)

یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p را در نظر بگیرید. p نامشخص است؛ اما می‌دانیم $p \in [\frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۵}]$. فرض کنید که می‌توانیم این آزمایش را به تعداد دلخواه انجام دهیم و آزمایش‌ها دو به دو مستقل از یکدیگر هستند. تخمین‌گر زیر را برای پارامتر p در نظر بگیرید:

$$\hat{p} = \frac{\text{تعداد آزمایش‌های موفق}}{\text{تعداد کل آزمایش‌ها}}$$

حداقل چند آزمایش باید انجام دهیم تا مطمئن شویم که انحراف معیار تخمین‌گر مورد نظر کمتر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ خواهد بود؟

حل.

برآوردگر p را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\hat{p} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{N} X_i$$

n تعداد آزمایش‌ها و $X_۱, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم هستند که توزیع برنولی با پارامتر p را دارند. بنابراین، $\hat{p}$ میانگین نمونه n متغیر تصادفی برنولی مستقل با امید ریاضی p است. به دلیل مستقل بودن متغیرهای تصادفی، داریم:

$$\begin{aligned}
Var[\hat{p}] &= \frac{Var[X_i]}{n} \\
&= \frac{p(۱-p)}{n} && \text{صورت کسر برابر واریانس متغیر تصادفی برنولی است} \\
&\leqslant \frac{p(۱-p)}{n} && \max(p \in [\frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۵}]) \\
&= \frac{\frac{۱}{۵}(۱-\frac{۱}{۵})}{n} \\
&= \frac{۴}{۲۵n}
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\text{Var}[\hat{p}] \leqslant \frac{۴}{۲۵n}$$

حال با توجه به صورت سوال داریم:

$$\text{Std}[\hat{p}] = \sqrt{\text{Var}[\hat{p}]} \leqslant \frac{۱}{۱۰۰}$$

به عبارتی دیگر:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\hat{p}] &\leqslant \frac{۱}{۱۰۰۰۰} \\
\frac{۴}{۲۵n} &\leqslant \frac{۱}{۱۰۰۰۰} \\
\frac{۴۰۰۰۰}{۲۵} &\leqslant n \\
۱۶۰۰ &\leqslant n
\end{aligned}
$$

پس حداقل تعداد آزمایش‌ها باید برابر ۱۶۰۰ باشد.

▷

مسئله‌ی ۷. (آهن و بتن)

X و Y دو متغیر تصادفی مستقل هستند که به ترتیب مقاومت تیرهای آهنی و ستون‌های بتنی را نشان می‌دهند. داده‌های زیر پس از مشاهدات مختلف حاصل شده است:

$$
\begin{aligned}
X: &۵/۹,\ ۷/۲,\ ۷/۳,\ ۶/۳,\ ۸/۱,\ ۶/۸,\ ۷,\ ۷/۶,\ ۶/۸,\ ۶/۵, \\
&۷,\ ۶/۳,\ ۷/۹,\ ۹,\ ۸/۲,\ ۸/۷,\ ۷/۸,\ ۹/۷,\ ۷/۴,\ ۷/۷, \\
&۹/۷,\ ۷/۸,\ ۷/۷,\ ۱۱/۶,\ ۱۱/۳,\ ۱۱/۸,\ ۱۰/۷
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y: &۶/۱,\ ۵/۸,\ ۷/۸,\ ۷/۱,\ ۷/۲,\ ۹/۲,\ ۶/۶,\ ۸/۳,\ ۷,\ ۸/۳,\ ۷/۸, \\
&۸/۱,\ ۷/۴,\ ۸/۵,\ ۸/۹,\ ۹/۸,\ ۹/۷,\ ۱۴/۱,\ ۱۲/۶,\ ۱۱/۲
\end{aligned}
$$

حال فرض کنید داریم: $\mathbb{E}[X] = \mu_۱$، $\mathrm{Var}[X] = \sigma_۱^۲$، $\mathbb{E}[Y] = \mu_۲$ و $\mathrm{Var}[Y] = \sigma_۲^۲$.

الف. نشان دهید که $\bar{X} - \bar{Y}$ یک تخمین‌گر ناااریب برای $\mu_۱ - \mu_۲$ است و آن را برای داده‌های بدست آمده محاسبه کنید.

ب. واریانس و انحراف معیار تخمین‌گر بخش (الف) را بدست آورده و مقدار انحراف معیار را برای داده‌های بدست آمده محاسبه کنید.

ج. تخمینی از نسبت $\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲}$ بدست آورید.

د. یک تیرآهن با مقاومت X و یک ستون بتنی با مقاومت Y را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. تخمینی برای واریانس اختلاف Y از X ($X - Y$) بدست آورید.

حل.

الف.

$$\mathbb{E}[\bar{X}-\bar{Y}] = \mathbb{E}[\bar{X}] - \mathbb{E}[\bar{Y}] = \mu_۱ - \mu_۲$$

بنابراین این برآوردگر نااریب است و مقدار آن برای داده‌های داده شده برابر است با:

$$\bar{x} - \bar{y} = ۸/۱۴۱ - ۸/۵۷۵ = -۰/۴۳۴$$

ب. داریم:

$$\mathrm{Var}(\bar{X}-\bar{Y}) = \mathrm{Var}(\bar{X}) + \mathrm{Var}(\bar{Y}) = \sigma_{\bar{X}}^۲ + \sigma_{\bar{Y}}^۲ = \frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}$$
$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X}-\bar{Y})} = \sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}$$

حال مقدار واریانس را تخمین می‌زنیم:

$$S_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{S_۱^۲}{n_۱} + \frac{S_۲^۲}{n_۲}} = \sqrt{\frac{(۱/۶۶۶)^۲}{۲۷} + \frac{(۲/۱۰۴)^۲}{۲۰}} = ۰/۵۶۸۷$$

ج. با توجه به داده‌های موجود در مسئله تخمین زیر را برای عبارت صورت سوال محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۱/۶۶۶}{۲/۱۰۴} = ۰/۷۹۱۸$$

د. داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X-Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \sigma_۱^۲ + \sigma_۲^۲\\ &= \hat{\sigma}_۱^۲ + \hat{\sigma}_۲^۲ = S_۱^۲ + S_۲^۲\\ &= (۱/۶۶۶)^۲ + (۲/۱۰۴)^۲\\ &= ۷/۲۰۲۳\end{aligned}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۸. (میانگین یا میانه)

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \frac{\lambda}{۲}\exp(-\lambda|x-\mu|)\,, \qquad -\infty < x < \infty$$

پارامتر های λ و μ نامعلوم هستند. امید ریاضی متغیر تصادفی X برابر با μ و توزیع آن نسبت به $x = \mu$ متقارن است؛ بنابراین میانه نیز همان μ می‌باشد.

ما یک نمونه تصادفی $X_۱, \cdots, X_n$ به بزرگی n داریم. تعیین کنید که میانگین نمونه، تخمین‌گر بهتری برای μ است یا میانه نمونه؟ توجه کنید در اینجا منظور از بهتر بودن، میزان واریانس کمتر است.

حل.

ابتدا واریانس جمعیت را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{\lambda}{۲}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^۲ e^{-\lambda|x-\mu|}dx\\ &= \frac{\lambda}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} x^۲ e^{-\lambda|x|}dx\\ &= \lambda\int_{۰}^{\infty} x^۲ e^{-\lambda x}dx\\ &= \frac{۲}{\lambda^۲}\end{aligned}$$

بنابراین، واریانس میانگین نمونه که $\frac{\sigma^۲}{n}$ است برابر است با:

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{۲}{\lambda^۲ n}$$

برای میانه نمونه، واریانس برابر است با:

$$\mathrm{Var}(M_n) = \frac{۱}{۴f^۲(\mu)n} = \frac{۱}{\lambda^۲ n}$$

بنابراین، میانه نمونه برآوردگر بهتری است.

▷