پاسخ‌نامه تمرین اول آمار و احتمال

سوال ۱

A را مجموعه همه دانشجوهای کلاس تعریف می‌کنیم. Ω را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega = \{\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, ..., \{a_{19}, a_{20}\}\} | \forall i : a_i \in A, a_i = a_j \Rightarrow i = j\}$$

F را مجموعه توانی Ω در نظر می‌گیریم. دقت کنید با ریاضیات نسبتا پیشرفته‌تری ثابت می‌شود که این کار برای همه Ω ها ممکن نیست. یعنی برای بعضی از فضاهای نمونه نمی‌توان روی مجموعه توانی تابع احتمال تعریف کرد و فقط روی زیر مجموعه‌ای از مجموعه توانی می‌توان تابع احتمال تعریف کرد.
حالا تابع احتمال را روی F به صورت یکنواخت تعریف می‌کنیم. یعنی به هر پیشامد $X \in F$ احتمال $\frac{|X|}{|\Omega|}$ می‌دهیم. برای محاسبه این احتمال داریم:

$$|\Omega| = \frac{20!}{2^{10}10!} \Rightarrow \forall X \in F : P(X) = \frac{|X| 2^{10} 10!}{20!}$$

دقت کنید این محاسبه با این دید انجام شده که ابتدا تعداد گروه‌های ترتیب‌دار را می‌شماریم و بعد از روی آن تعداد گروه‌ها را محاسبه می کنیم. گروه‌ترتیب‌دار به این صورت است که اگر اعضای گروه یک را به گروه دو و اعضای گروه دو را به گروه یک منتقل کنیم یک گروه‌بندی جدید داریم. برای شمارش تعداد گروه‌های ترتیب دار همه جایگشت‌های ۲۰ نفر را ایجاد می‌کنیم و برای هر جایگشت از اول شروع می‌کنیم و هر دو نفر متوالی را در یک گروه می‌گذاریم. حالا دقت کنید جایگشت داخل هر گروه در نظر گرفته شده و شمرده شده‌است. پس باید $20!$ را بر 2^{10} تقسیم کنیم. حالا کافی است دقت کنیم که تعداد گروه‌های ترتیب دار $10!$ برابر تعداد گروه‌هاست. زیرا به ازای هر گروه‌بندی همه جایگشت‌های گروه‌ها را هم شمرده‌ایم.

ب)

اگر B مجموعه علاقه‌مندان به کار نظری و C مجموعه علاقه‌مندان به کار عملی باشد داریم:

$$X = \{\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, ..., \{a_{19}, a_{20}\}\} |$$
$$\forall i, 1 \le i \le 20 : a_i \in A, a_i = a_j \Rightarrow i = j,$$
$$\forall i, 1 \le i \le 10 : a_i \in B \Rightarrow a_{i+1} \in B, a_i \in C \Rightarrow a_{i+1} \in C\}$$

ج)

همان ایده شمارش $|\Omega|$ را برای شمارش $|X|$ به کار می‌بریم. دقت کنید کافی است تعداد گروه‌بندی‌های روی مجموعه B را در تعداد گروه‌بندی‌های روی مجموعه C ضرب کنیم. پس داریم:

$$P(X) = \frac{2^{10}10!}{20!}(\frac{10!}{2^5 5!})^2 = \frac{(10!)^3}{(5!)^2(20!)}$$

سوال ۲

عدد مضرب ۳ نباید به عنوان a_1 بیاید ولی به جز جایگاه اول هر جای دیگر مضارب ۳ بیایند باقی‌مانده مجموع بر ۳ تغییر نمی‌کند. اگر مضارب ۳ را حذف کنیم بقیه اعداد باید یک در میان باقی‌مانده‌شان بر ۳ باید ۱و۲ باشد. چون تعداد باقی مانده‌های ۱ یکی بیشتر است باید از باقی‌مانده ۱ شروع شود دنباله پس تعداد دنباله‌های درست برابر است با: $\binom{99}{33}33!34!33!$ پس احتمال درست بودن جایگشت تصادفی برابر است با: $\frac{\binom{99}{33}33!34!33!}{100!}$

سوال ۳

تعداد جایگشت‌های دوری کلمه $probability$ برابر است با:

$$\frac{10!}{2!2!}$$

تعداد جایگشت‌های دوری که دو b کنار همند برابر است با:

$$\frac{9!}{2!}$$

پس تعداد جایگشت‌های دوری که دو b کنار هم نیستند برابر است با:

$$2 \times 9!$$

و تعداد کلیدهای ۳۲ بیتی 2^{32} است. پس برای این که با احتمال $\frac{1}{2}$ رمز را بیابیم باید نصف رمزها را چک کنیم و تعداد کل رمزهای ممکن حاصل‌ضرب این دو عدد است. پس تعداد رمزهایی که باید بررسی شوند برابر است با:

$$2^{32} \times 9!$$

. پس زمان مورد نیاز برای پیدا کردن رمز

$$\frac{2^{32} \times 9!}{10^5} \approx 1.6 \times 10^{10}$$

تقریبا ۵ قرن!!!

سوال ٤

الف)

این گزاره درست است. برای اثبات داریم:

$$P(A|B\cap C)=\frac{P(A\cap(B\cap C))}{P(B\cap C)}=\frac{P((A\cap B)\cap C))}{P(B\cap C)}$$
$$=\frac{P(A\cap B|C)P(C)}{P(B|C)P(C)}=\frac{P(A\cap B|C)}{P(B|C)}$$

دقت کنید در مرحله اول از تعریف احتمال شرطی استفاده شده‌است.
اما در حالت کلی شهود این گزاره این است:
در واقع شرطی سازی به شرط یک پیشامد A، یعنی یک فضای نمونه جدید داریم که A است و می‌خواهیم یک تابع احتمال جدید روی پیشامدهای فضای نمونه جدید تعریف کنیم. این تابع احتمال جدید از روی تعریف احتمال شرطی تعریف شده‌است. یعنی برای هر پیشامد تابع احتمال جدیدی که تعریف می‌کنیم، احتمال اشتراک آن پیشامد با A در فضای نمونه قبلی، تقسیم بر، احتمال A در فضای نمونه قبلی، است. در این گزاره اگر فضای نمونه را به پیشامد C محدود کنیم باز هم احتمال پیشامد A به شرط B در فضای احتمال جدید، برابر است با احتمال اشتراک پیشامدهای A و B در فضای احتمال جدید، تقسیم‌بر احتمال B در فضای احتمال جدید.

ب)

$$P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\cap ...\cap A_n|A_1)$$

حالا $P(A_2\cap ...\cap A_n|A_1)$ را طور مشابه می‌نویسیم که اثبات درستی این کار در قسمت الف آمده‌است:

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3\cap ...\cap A_n|A_1\cap A_2)$$

در مرحله بعدی باید $P(A_3\cap ...\cap A_n|A_1\cap A_2)$ را به طور مشابه بازنویسی کنیم. در نهایت با ادامه دادن همین روند داریم:

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)...P(A_n|A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{n-1})$$

ج)

این گزاره درست نیست. هیچ دلیلی ندارد استقلال دو پیشامد در فضای نمونه اولیه استقلال دو پیشامد را وقتی فضای نمونه را به یک پیشامد دلخواه محدود می‌کنیم نتیجه بدهد. یک مثال نقض اینست که یک فضای نمونه با n عضو در نظر بگیرید و تابع احتمال را یکنواخت در نظر بگیرید. برای دو پیشامد A و B که مجزا از هم نیستند و احتمال مثبت دارند، C را برابر با $(A-B)\cup(B-A)$ بگیرید. حالا احتمال $A\cap B$ در فضای احتمال جدید ۰ است در حالی که ضرب احتمال‌ها در فضای احتمال جدید عددی مثبت است.
در واقع در این مثال کاری که به صورت شهودی کردیم این بود که با شرطی‌سازی فضای احتمال جدید را جوری تعریف کردیم که امکان رخ دادن همزمان A و B وجود نداشته باشد. ولی امکان رخ دادن هر کدام وجود داشته باشد. شهودا چنین کاری استقلال دو پیشامد از هم را می‌گیرد. زیرا اگر یکی رخ دهد می‌دانیم دیگری رخ نداده است. با شهودی که از این مثال کسب کردید باید بتوانید تصور کنید که چطور مثال‌های زیادی وجود دارد که گزاره را نقض می‌کنند.

د)

این گزاره درست نیست. یک مثال نقض اینست که فرض کنید A و B دو چراغ هستند که به طور کاملا تصادفی روشن یا خاموش هستند و C جواب xor این دو چراغ است. یعنی اگر یکی خاموش و دیگری روشن باشد روشن است و در غیر این‌صورت خاموش است. با تعریف فضای احتمال می‌توانید بررسی کنید که احتمال روشن بودن هر چراغ به شرط روشن بودن هر چراغ دیگر برابر با $\frac{1}{2}$ است پس پیشامد روشن بودن A از پیشامد روشن بودن B مستقل است و از پیشامد روشن بودن C هم مستقل است. اما اشتراک این سه پیشامد احتمال ۰ دارد زیرا یک زیرمجموعه تهی از فضای نمونه است.
دقت کنید این که این گزاره درست نیست انگیزه اینست که استقلال n پیشامد را به صورتی تعریف کنیم که شهود ما را ارضا کند. آیا می‌دانید استقلال برای n پیشامد چطور تعریف می‌شود؟

ه)

$$(X \perp W | Z \cap Y), (X \perp Y | Z) \Rightarrow (X \perp (Y \cap W) | Z)$$

باید ثابت کنیم با داشتن فرض‌ها می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$P(X | (Y \cap W) \cap Z) = P(X|Z)$$

طبق گزاره الف داریم:

$$\frac{P(X \cap W | Z \cap Y)}{P(W | Z \cap Y)} = P(X | Y \cap W \cap Z)$$

که با استفاده از فرض اول سمت چپ عبارت بالا برابر است با $P(X|Z \cap W)$. پس داریم:

$$P(X|Z \cap Y) = P(X|Y \cap W \cap Z)$$

حالا طبق فرض دوم می‌توانیم استدلال کنیم که $P(X|Z \cap Y)$ برابر است با $P(X|Z)$. پس حکم ثابت می‌شود.

سوال ۵

این مسئله که به نام $MontyHall$ شناخته می‌شود تاریخچه‌ی جالبی دارد. خیلی از افراد جواب آن را تا قبل از دیدن شبیه سازی کامپیوتری قبول نکرده‌اند. جواب مسئله به این صورت است که اگر فرد انتخابش را تغییر ندهد با احتمال $\frac{1}{3}$ جایزه را برنده می‌شود و اگر انتخابش را تغییر دهد احتمال برنده شدن $\frac{2}{3}$ می‌شود. اگر این جواب برای شما هم غیرشهودی است می‌توانید یک شبیه‌سازی را در ذهن خود تصور کنید. یعنی فرض کنید به تعداد زیادی این آزمایش را با شرایط اولیه تصادفی تکرار می‌کنیم. با شهود آماری سازگار است که اگر مسابقه صرفا انتخاب یک جعبه بود و بعد بلافاصله در جعبه باز می‌شد در حدود یک سوم تست‌ها جعبه حاوی جایزه باشد. حالا فرض کنید بعد از انتخاب، یک گزینه از بین دو تای باقی‌مانده پوچ شود و امکان تغییر انتخاب باشد ولی انتخاب را تغییر ندهیم و همین آزمایش را برای شرایط اولیه تصادفی تکرار کنیم. خروجی شبیه‌سازی هیچ فرقی با حالت اول ندارد. همیشه یک جعبه انتخاب می‌شود و جایزه‌دار بودن آن بررسی می‌شود. پس به نظر می‌رسد تغییر ندادن انتخاب در حدود یک سوم موارد باعث برنده شدن می‌شود پس تغییر دادن انتخاب باید در دو سوم موارد باعث برنده شدن شود. اما حالا به صورت ریاضی سوال را حل می‌کنیم:
در این سوال باید یک مدل‌سازی خوب ریاضی انجام دهیم. فرض می‌کنیم فضای نمونه شامل سه‌تایی‌هایی

است که به ترتیب نشان می‌دهد که کدام جعبه حاوی جایزه است و کدام جعبه توسط شرکت‌کننده انتخاب می‌شود و کدام جعبه توسط مجری پوچ می‌شود . اولا پیشامد وجود جایزه در جعبه iاُم را A_i و پیشامد اینکه انتخاب اولیه شرکت‌کننده جعبه jاُم باشد را B_j می‌نامیم. از خواص مسئله به نظر می‌رسد که احتمال باید به صورت یکنواخت روی پیشامدهایی به شکل $A_i \cap B_j$ پخش شود زیرا همه به یک اندازه محتملند. پس هر کدام احتمال $\frac{1}{9}$ را دارد.
اگر C_i پیشامد پوچ شدن جعبه iاُم باشد برای به دست آوردن احتمال برد در صورت تغییر انتخاب، باید بدون از دست رفتن کلیت مسئله احتمال‌های زیر را حساب کنیم:

$$P(A_2|C_3 \cap B_1), P(A_1|C_3 \cap B_1)$$

حالا داریم:

$$P(A_2|C_3 \cap B_1) = \frac{P(A_2 \cap B_1 \cap C_3)}{P(C_3 \cap B_1)} = \frac{P(C_3|A_2 \cap B_1)P(B_1 \cap A_2)}{P(C_3|B_1)P(B_1)}$$

$$\frac{P(C_3|A_2 \cap B_1)P(B_1 \cap A_2)}{P(B_1)(P(C_3|B_1 \cap A_1)P(A_1|B_1) + P(C_3|B_1 \cap A_2)P(A_2|B_1) + P(C_3|B_1 \cap A_3)P(A_3|B_1))}$$

$$= \frac{1 \times \frac{1}{9}}{\frac{1}{3}(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0)} = \frac{2}{3}$$

به طور مشابه می‌توان احتمال دیگر را هم محاسبه کرد.
دقت کنید مسئله را از راه‌های دیگر هم می‌توان حل کرد. ما با فرض گرفتن مقدار احتمال برای بعضی از پیشامدهای خاص که احتمالشان توسط خواص مسئله مشخص‌تر بود احتمال دلخواهمان را محاسبه کردیم.
یک راه دیگر اینست که تلاش کنید تابع احتمال را برای همه پیشامدهای تک عضوی با استفاده از خواص مسئله به دست بیاورید و بعد به راحتی می‌توانید هر احتمال شرطی را از جمله احتمال های شرطی دلخواهمان در این مسئله محاسبه کنید.

سوال ۶

پیشامد انتخاب iاُمین سکه به عنوان سکه ی اولیه را S_i می نامیم ، پیشامد شیر بودن n پرتاب اول را G می نامیم و پیشامد شیر آمدن پرتاب $n+1$اُم را H می نامیم. در ابتدا با قانون احتمال کل داریم:

$$P(H|G) = \sum_{i=0}^{k} P(H|S_i, G)p(S_i|G)$$

با دانستن نوع سکه احتمال پیشامد های H و G از هم مستقل میشود بنابراین:

$$P(H|S_i, G) = p(H|S_i) = \frac{i}{k}$$

همچنین :

$$P(S_i|G) = \frac{P(S_i \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G|S_i)P(S_i)}{\sum_{j=0}^{k} P(G|S_j)P(S_j)} = \frac{(\frac{i}{k})^n(\frac{1}{k+1})}{\sum_{j=0}^{k} (\frac{j}{k})^n(\frac{1}{k+1})}$$

$$= \frac{(\frac{i}{k})^n}{\sum_{j=0}^{k} (\frac{j}{k})^n}$$

بنابراین با جایگذاری در عبارت اولیه جواب نهایی به صورت زیر است:

$$P(H|G) = \frac{\sum_{i=0}^{k} (\frac{i}{k})^{n+1}}{\sum_{j=0}^{k} (\frac{j}{k})^n}$$