دانشکده مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی		زمستان ۱۴۰۲
	# تمرین سری دوم	
مدرس درس: مهدی جعفری		سررسید تحویل: جمعه ۱۷ فروردین ۱۴۰۳

سؤال ۱ فرض کنید که X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال زیر باشد:

$$P_X(x) = \begin{cases} ۰٫۱ & for\ x = ۰٫۲ \\ ۰٫۲ & for\ x = ۰٫۴ \\ ۰٫۲ & for\ x = ۰٫۵ \\ ۰٫۳ & for\ x = ۰٫۸ \\ ۰٫۲ & for\ x = ۱ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

الف) پشتیبان (Support) این متغیر تصادفی را مشخص کنید.
ب) موارد زیر را محاسبه کنید:

$P(X \leq ۰٫۵) =?$
$P(۰٫۲۵ < X < ۰٫۷۶) =?$
$P(X = ۰٫۲ \,|\, X < ۰٫۶) =?$

سؤال ۲ یک سکه سالم را ۱۰۰ بار می‌اندازیم. نمودار تابع جرم احتمال و تابع توزیع تجمعی اینکه پرتاب Xام اولین شیر باشد را با نوشتن یک برنامه یا بصورت تقریبی روی کاغذ رسم کنید.

سؤال ۳ امروز توانسته ایم اولین کتاب آمار و احتمال را به کمک همدیگر چاپ کنیم. اگر در این کتاب، تعداد اشتباهات چاپی در هر صفحه را بتوان با یک متغیر تصادفی پوآسون و با پارامتر t مدل کرد و همچنین تعداد این اشتباهات در صفحه‌های مختلف کتاب از یکدیگر مستقل باشند،

الف) احتمال پیش‌آمد این که دومین اشتباه در صفحه k رخ داده باشد را محاسبه کنید.

ب) فرض کنید ویراستار این کتاب، هر کدام از اشتباهات چاپی را به احتمال p و مستقل از سایر اشتباهات بیابد. اگر X تعداد اشتباهاتی باشد که او متوجه آن‌ها شده است و Y تعداد اشتباهات باقی‌مانده باشد، آنگاه توزیع این دو متغیر تصادفی را بیابید و نشان دهید از هم مستقل هستند.

سؤال ۴ الف) در نظر بگیرید که $X \sim Binomial(n,p)$ و $Y \sim Binomial(m,p)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند. یک متغیر تصادفی جدید به شکل $Z = X + Y$ تعریف می‌کنیم. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی Z را بیابید. برای حل این قسمت احتمال زیر را به کمک قانون احتمال کل بیابید.

$$P_Z(k) = P(Z = k) = P(X + Y = k)$$

ب) ثابت کنید اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع $Bernoulli(p)$ باشند، آنگاه متغیر تصادفی X که به صورت $X = X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ تعریف می‌شود، دارای توزیع $Binomial(n,p)$ خواهد بود.

ج) با توجه به قسمت قبل، دیدیم که می‌توان هر متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای را به صورت جمع چند متغیر تصادفی برنولی مستقل از هم نوشت. بدین معنا که مجموع تعداد موفقیت‌ها در n بار آزمایش که متغیر تصادفی دو جمله‌ای را توصیف می‌کند، برابر است با جمع n متغیر تصادفی برنولی مستقل که صفر یا یک شدن آن نشان دهنده‌ی موفقیت در هر بار آزمایش است. با توجه به این نکته که از قسمت ب نتیجه می‌شود، قسمت الف این سوال را دوباره ثابت کنید.

سؤال ۵ پیامی بر یک کانال دارای نویز ارسال شده است. این پیام شامل n بیت $x_۱, x_۲, ..., x_n$ است.
به طوری که $x_i \in \{۰, ۱\}$. از آنجایی که کانال دارای نویز است، شانسی برای تغییر هر یک از بیت‌ها و خراب شدن پیام وجود دارد که منجر به وقوع خطا می‌شود (یعنی تبدیل یک به صفر یا برعکس). فرض کنید رخداد خطاها از یکدیگر مستقل هستند و p احتمال این است که یک بیت دارای خطا باشد به طوری که $۰ < p < ۰٫۵$. حال دنباله $y_۱, y_۲, ..., y_n$ را پیامی در نظر بگیرید که در نهایت به دست ما رسیده است (در این صورت اگر $y_i = x_i$ باشد یعنی خطایی رخ نداده است).
برای یافتن راحت‌تر خطا، بیت n ام را برای بررسی کردن زوجیت در نظر می‌گیریم. بدان معنا که x_n را برابر با صفر در نظر می‌گیریم اگر $x_۱ + x_۲ + ... + x_{n-۱}$ زوج باشد و آن را برابر با یک تعریف می‌کنیم اگر مجموع گفته شده برابر با مقداری فرد باشد. هنگامی که پیام دریافت شد، بررسی می‌کنیم که y_n زوجیت برابری با $y_۱ + y_۲ + ... + y_{n-۱}$ دارد یا خیر. اگر زوجیت یکسان نبود، متوجه می‌شویم که حداقل یک بیت دچار خطا شده است و در غیر این صورت خطایی وجود ندارد.

الف) برای $n = ۵$ و $p = ۰٫۱$، احتمال آن که پیام دریافتی دارای خطا(هایی) است و نتوانسته‌ایم آن(ها) را تشخیص دهیم مشخص کنید.

ب) برای حالت کلی n و p عبارتی (به صورت جمعی) بنویسید که بتواند قسمت الف را محاسبه کند.

ج) یک عبارت ساده شده که شامل جمع تعداد زیادی جمله نمی‌باشد برای قسمت‌های قبل و به صورت عمومی n و p بنویسید.

سؤال ۶ (امتیازی) فرض کنید متحرکی در مبدأ مختصات قرار دارد و سپس به صورت گام به گام شروع به یک حرکت تصادفی (Random Walk) می‌کند. بدین صورت که در هر گام، مستقل از گام‌های پیشین، با احتمال‌های برابر ۰٫۲۵ یک واحد به بالا، پایین، چپ و یا راست حرکت می‌کند. فرض کنید این متحرک k گام تصادفی را برداشته باشد.

الف) احتمال اینکه متحرک در این لحظه، در مختصات (m, n) ایستاده باشد چقدر است؟ (با فرض اینکه $m, n \in \mathbb{Z}$ و $|m| + |n| \leq k$).

ب) احتمال اینکه متحرک صرفاً در نقطه‌ای با $x = m$ (بدون هیچ‌گونه شرط بر y) ایستاده باشد چقدر است؟

ج) در صورتی که بدانیم از k گام برداشته شده، دقیقاً تعداد k' (که $k' \leq k$) گام در راستای محور x، یعنی چپ یا راست بوده‌اند، سوال قسمت ب را مجدد پاسخ دهید.

موفق باشید