دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	بهار ۱۳۹۹
پاسخنامه تمرین سوم(امید ریاضی)	
مدرس: نعیمه امیدوار	موعد تحویل: ۲۹ فروردین ۱۳۹۹

سؤال ۱. فرض کنید در یک پرواز، موتورهای هواپیما به احتمال $1 - p$ خراب می‌شوند و احتمال خرابی هر موتور از موتورهای دیگر مستقل است. اگر یک هواپیما برای پرواز نیاز داشته باشد تا بیشتر از نصف موتورهایش سالم باشند،

الف) به ازای چه مقادیری از p یک هواپیمای پنج موتوره را به یک هواپیمای سه موتوره ترجیح می‌دهید؟

ب) اگر p را اینفیمم بازه‌ی قسمت قبل بگیریم و چهار هواپیمای دو، سه، چهار و پنج موتوره را بفرستیم امید ریاضی تعداد هواپیماهایی که همه‌ی موتورهایشان سالم بمانند را بدست آورید.

پاسخ.

الف) احتمال سالم ماندن یک هواپیمای پنج موتوره برابر با:

$$\binom{5}{0} * p^5 + \binom{5}{1} * p^4(1-p) + \binom{5}{2} * p^3(1-p)^2$$

احتمال سالم ماندن یک هواپیمای سه موتوره برابر با:

$$\binom{3}{0} * p^3 + \binom{3}{1} * p^2(1-p)$$

با حل نامساوی بالا $p > 0.5$

ب)

$$\sum_{i=2}^{5} ip^i = 1.28$$

سؤال ۲. X را تعداد نقاط ثابت برای یک جایگشت تصادفی از ۱ تا n در نظر بگیرید. با استفاده از امید ریاضی و واریانس X استدلال کنید $x >> 1$ تقریبا غیر ممکن است.
(نقطه‌ی ثابت: $f(x) = x$ مثلا در 321 عدد دو نقطه‌ی ثابت است)

پاسخ. اگر X_i متناظر با نقطه ثابت بودن i در نظر بگیریم داریم:

$$
\begin{aligned}
X_i &= \begin{cases} 1 & f(i) = i \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \Rightarrow P(X_i = 1) = 1/n \\
X &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\
E[x] &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n * \frac{1}{n} = 1 \\
E[X^2] &= E[\sum X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j] \\
E[\sum X_i^2] &= E[\sum X_i] = 1 \\
2E[\sum_{i<j} X_i X_j] &= \frac{n(n-1)}{2} * (\frac{1}{n} * \frac{1}{n-1}) = 2 \\
E[X^2] &= 2 + 1 = 3 \\
Var(x) &= E[x^2] - E[X]^2 = 3 - 1 = 2
\end{aligned}
$$

چون امید ریاضی ۱ است و واریانس هم ۲ است پس احتمال آنکه $x >> 1$ باشد خیلی کم است.

سؤال ۳. برای متغیر تصادفی $X \in N$ است نشان دهید:

$$E[x] = \sum_{i=0}^{\infty} P(x \geq i)$$

پاسخ.

$$
\begin{aligned}
E[x] &= \sum_{i=0}^{\infty} iP(X = i) \\
&= P(X = 1) \\
&+ P(X = 2) + P(X = 2) \\
&+ P(X = 3) + P(X = 3) + P(X = 3) \quad +...
\end{aligned}
$$

که جمع این عبارت همان مطلوب مسئله است.

سؤال ۴. فرض کنید a, b, c اعداد مثبت و حقیقی هستند ثابت کنید.

$$\frac{a}{\sqrt{8bc+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{8ac+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{8ab+c^2}} \geq 1$$

راهنمایی : می‌توانید از نامساوی $Jensen$ استفاده کنید.
پاسخ.
می توانیم سمت چپ مساوی را به صورت زیر بنویسیم.

$$\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{8abc+a^3}} + \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{8abc+b^3}} + \frac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{8abc+c^3}}$$

سپس می‌دانیم

$$\sqrt{\frac{x^3}{8abc+x^3}}$$

مقعر و اکیدا صعودی است.پس بنا به نامساوی $Jensen$ داریم.

$$f(a)+f(b)+f(c) \geq 3f((\frac{1}{3})a+(\frac{1}{3})b+(\frac{1}{3})c) \geq 3f(\sqrt[3]{abc}) \geq 3*\frac{1}{3} = 1$$

سؤال ۵. برای متغیر تصادفی دوجمله‌ای X با پارامترهای (n, p)، نشان دهید:

$$E[\frac{1}{1+X}] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$

حد رابطه بالا را به ازای $n \to \infty$ و $p \to 0$، به طوری که np ثابت بماند، محاسبه کنید. این حد بیانگر چیست؟
(راهنمایی: برای محاسبه حد بالا می توانید از هم‌ارزی برنولی استفاده کنید.)
پاسخ.

$$E[\frac{1}{1+X}] = \sum_{k=0}^{n} \frac{C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}}{1+k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C(n+1,k+1)p^{k+1}(1-p)^{n-k}}{p(n+1)}$$

حال با توجه به بسط دوجمله‌ای خیام-پاسکال می‌دانیم صورت کسر بالا درواقع بسط $((1-p)+p)^{n+1}$ است و فقط یکی از جملات بسط آن موجود نیست. که با کمی دقت متوجه می شویم که چون مقدار k از ۰ تا n تغییر می‌کند، پس $k+1$ نمی‌تواند مقدار ۰ به خود بگیرد و در واقع اولین جمله‌ی این بسط موجود نیست. پس داریم:

$$E[\frac{1}{1+X}] = \frac{(p+(1-p))^{n+1}-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)} = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$

و برای محاسبه حد با شرایط ذکر شده نیز داریم:

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0} \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)} = \frac{1-(1-p(n+1))}{p(n+1)} = 1$$

مقدار ۱ برای این حد بدین معناست که در شرایط ذکر شده عبارت $\frac{1}{1+X}$ بصورت میانگین برابر ۱ خواهد بود پس مخرج آن نیز با صورت برابر بوده و برابر ۱ است و این بدان معناست که X مقدار صفر به خود می‌گیرد که با توجه به میل کردن p به صفر منطقی به نظر می‌رسد.

سؤال ۶. در کیسه‌ای تعداد برابری گوی با رنگ‌های آبی و زرد موجود است. دقت کنید که برداشتن گوی از درون این کیسه با جایگذاری همراه است. می‌خواهیم به قدری از این کیسه گوی خارج کنیم تا حداقل یک‌بار گوی به رنگ آبی و حداقل یک‌بار گوی به رنگ زرد مشاهده کرده‌باشیم. امید ریاضی تعداد دفعاتی که از این کیسه گوی خارج می‌کنیم چقدر است؟

پاسخ:

اولین گوی را برمی‌داریم. هر رنگی که بیرون آمد باید در دفعات بعد تلاش کنیم که گوی بارنگ متفاوت را بیرون آوریم لذا متغیر تصادفی X را برابر تعداد دفعاتی که از بار دوم به بعد باید گوی از کیسه خارج کنیم تا گوی با رنگ متفاوت از گوی اول به دست آید در نظر می‌گیریم. داریم:

$$E[X] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(E[X] + 1)$$

$$E[X] = 2$$

از آن‌جایی که دفعه اولی که گوی برداشته‌ایم را در نظر نگرفته‌ایم امید ریاضی تعداد دفعاتی که از کیسه گوی خارج می‌کنیم تا حداقل یک گوی از هر رنگ دیده باشیم برابر ۳ می‌باشد.

سؤال ۷. ۶ پسر و ۱۰ دختر می‌خواهند در یک صف بایستند. متغیر تصادفی X را تعداد مکان‌هایی در نظربگیرید که یک پسر و یک دختر کنار هم قرار گرفته باشند. اگر تمام حالات قرارگیری این ۱۶ نفر کنار هم را درنظر بگیریم، امید ریاضی متغیر X را به‌دست‌آورید.

(برای مثال مقدار متغیر X در جایگشت روبه‌رو برابر ۱۱ است. $GGBGGBGBGBGGBGGB$)

پاسخ.

دختر i و پسر j را درنظرمی‌گیریم. ۱۵ جا برای کنار هم قرار گرفتن آن‌ها وجود دارد که در هریک از این جایگاه‌ها دو حالت قرارگیری برای آن‌ها وجود دارد. حال، ۱۴ جای خالی وجود دارد که به $14!$ حالت، سایر افراد در آن‌ها قرار می‌گیرند حال اگر بخواهیم تمام این جفت دختر و پسرهای مختلف را درنظر بگیریم، ۱۰ حالت برای انتخاب دختر و ۶ حالت برای انتخاب پسر خواهیم داشت. از طرفی می‌دانیم که کل حالات ممکن برای قرارگیری این ۱۶ نفر در یک صف برابر است با $16!$. پس داریم:

$$E[X] = \frac{15 * 2 * 14! * 10 * 6}{16!} = 7.5$$

سؤال ۸. کلاسی دارای n دانش‌آموز است که هیچ دونفری از آن‌ها قد یکسانی ندارند. از آن‌جایی که مدیر این مدرسه از وسواس شدیدی رنج می‌برد از دانش‌آموزان می‌خواهد که به‌ترتیب قد در صف کلاس خود بایستند. اما دانش‌آموزان طبق معمول همیشه قصد دارند به‌صورت کاملا تصادفی به صف شوند، پس از این‌که دانش‌آموزان به صف شدند:

الف) به طور میانگین چند نفر در جایگاهی ایستاده‌اند که باعث آرامش روان مدیر می شود؟

ب) امید ریاضی جفت دانش‌آموزانی که اگر جای خود را با هم عوض کنند هریک سر جای خود (از نظر مدیر) قرار می‌گیرند، چه‌قدر است؟

پاسخ.

الف) متغیر تصادفی X را تعداد افرادی که در جایگاه درستی ایستاده‌اند در نظر می‌گیریم و متغیر تصادفی A_i را

بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر فرد } i \text{ ام در جایگاه درست باشد } p = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases} \tag{۱}$$

پس داریم:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} A_i\right] = n * \frac{1}{n} = 1$$

ب) متغیر تصادفی Y را تعداد جفت دانش‌آموزانی در نظر می‌گیریم که هر یک در جایگاه دیگری قرار گرفته‌اند. متغیر تصادفی شاخص A_{ij} را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر فرد } i \text{ ام در جایگاه فرد } j \text{ ام باشد و بالعکس } p = \frac{1}{n(n-1)} \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases} \tag{۲}$$

برای توجیه احتمال بالا می توان گفت که چون ما به $\frac{n(n-1)}{2}$ حالت می‌توانیم دو جایگاه را انتخاب کنیم و هریک از این جفت خانه‌های متمایز دو حالت برای قرارگیری دو فرد در آن‌ها وجود دارد پس کل حالات برابر $n(n-1)$ است و از بین این حالات تنها یک حالت مطلوب است.
پس داریم:

$$E[Y] = E\left[\sum_{i!=j} A_{ij}\right] = \frac{n(n-1)}{2} * \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$$

سؤال ۹. دو متغیر تصادفی مستقل X و Y داریم که هریک از مقادیر طبیعی $1, 2, ..., n$ را با احتمال مساوی به خود می‌گیرند. ثابت کنید:

$$E[|X-Y|] = \frac{n^2-1}{3n}$$

پاسخ.

$$E[|X-Y|] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{i-j}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{j-i}{n^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{i-j}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j-i}{n^2} - \sum_{j=1}^{i}\frac{j-i}{n^2}\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{i-j}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j-i}{n^2}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{i(i+1)}{2n^2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{ni}{n^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^2} - \frac{n(n+1)}{4n^2}\right) + \left(\frac{n^2(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)}{2n^2}\right)$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{6n} - \frac{n+1}{2n} = \frac{n^2-1}{3n}$$

سؤال ۱۰. روز تولد ۹۸ نفر را در هفته درنظر بگیرید. فرض کنید روزهای تولد این افراد از هم مستقل اند و با احتمال برابری هریک از هفت روز هفته می‌توانند باشند. کوواریانس تعداد افرادی که در یکشنبه به دنیا آمده‌اند و تعداد افرادی که در پنجشنبه به دنیا آمده‌اند را به دست‌آورید. از این حاصل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ.
متغیر تصادفی X_1 و X_5 را به ترتیب تعداد افرادی که در روز یکشنبه و پنجشنبه به دنیا آمده‌اند در نظر بگیرید.
پس باید حاصل $Cov(X_1, X_5)$ را محاسبه کنیم:
متغیر تصادفی های شاخص A_i, B_j را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر فرد } i \text{ ام در روز یکشنبه به دنیا آمده‌باشد } p = \frac{1}{7} \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases} \tag{۳}$$

$$B_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر فرد } j \text{ ام در روز پنجشنبه به دنیا آمده‌باشد } p = \frac{1}{7} \\ 0 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases} \tag{۴}$$

پس داریم:

$$E[X_1 = \sum_{i=1}^{98} A_i] = E[X_5 = \sum_{j=1}^{98} B_j] = 98 * \frac{1}{7} = 14$$

$$E[X_1X_5] = E[\sum_{i\neq j} A_iB_j] = 98 * 97 * \frac{1}{7^2} = 194$$

توجه کنید در رابطه بالا از i, j های برابر صرف نظر شده چون یک نفر نمی‌تواند هم در روز پنجشنبه به دنیا آمده‌باشد و هم در یکشنبه. پس در واقع باید از ۹۸ نفر، دو نفر را انتخاب کنیم و برای هر یک از این انتخاب های دو نفره، دو حالت داریم .

$$Cov(X_1, X_5) = E[X_1X_5] - E[X_1]E[X_5] = 194 - 196 = -2$$

از مقدار کوواریانس نمی‌توان نتیجه‌ی خاصی گرفت اما علامت آن ما را به این نتیجه می‌رساند که اگر تعداد افرادی که در یکی از این دو روز به دنیا آمده‌باشند افزایش یابد، تعداد متولدین در روز دیگر کاهش می‌یابد که با درک طبیعی ما نیز همخوانی دارد.

سؤال ۱۱. سوال عملی

موفق باشید