



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

بهار ۱۳۹۹

آمار و احتمال مهندسی

تمرین سری ششم (محاسبه توزیع یک (یا چند) تابع از چند متغیر تصادفی، توزیع گاوسی چندمتغیره و متغیرهای مشترک گاوسی)

موعده تحویل: دوشنبه ۱۲ خرداد ۱۳۹۹

مدرس: نعیمه امیدوار

توجه: از بین سوالات زیر، سوال‌های ۱، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۹ تحویلی هستند و بقیه سوالات برای تمرین بیشتر شماسه و نیازی به تحویل آنها نیست.

سؤال ۱ فرض کنید تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 به صورت زیر باشد:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

و فرض کنید دو متغیر Y_1 و Y_2 به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$Y_1 = X_1 + X_2$$

$$Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

تابع چگالی توزیع توام Y_1 و Y_2 و همین طور تابع چگالی حاشیه‌ای Y_1 (Marginal) و Y_2 را بیابید.

سؤال ۲ سه متغیر تصادفی X, Y, Z پیوسته با چگالی توام زیر را در نظر بگیرید:

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} c(x + 2y + 3z) & 0 \leq x, y, z \leq 1 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

(آ) ثابت c را بیابید.

(ب) تابع چگالی احتمال X و چگالی توام YZ را بیابید.

سؤال ۳ فرض کنید X و Y دو تابع توزیع گاوسی (نرمال) مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشند. تعریف می‌کنیم: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ که $|\theta| < \pi$ تابع توزیع توام r و θ را بدست آورده و نشان دهید که این دو از یکدیگر مستقل هستند.

سؤال ۴ دو متغیر تصادفی X و Y مستقل و با توزیع نمایی با میانگین λ هستند. تابع چگالی احتمال متغیرهای زیر را بیابید. (هر کدام به صورت مجزا، نیازی به محاسبه توزیع توأم نیست)

(آ)

$$Z = \frac{Y}{\max(X, Y)}$$

(ب)

$$W = \frac{X}{\min(X, 2Y)}$$

سؤال ۵ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نرمال مستقل با میانگین 0 و واریانس σ^2 باشند. دو متغیر U و V را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$U = \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad V = \frac{XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

(آ) تابع چگالی احتمال توأم $f_{U,V}(u, v)$ را بیابید.

(ب) نشان دهید که U و V هم متغیرهای تصادفی نرمال مستقل هستند.

(ج) نشان دهید: $\frac{(X-Y)^2 - 2Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ هم یک متغیر تصادفی نرمال است. این نشان می‌دهد که به جز ترکیب خطی متغیرهای نرمال، ممکن است توابع دیگری از آن‌ها هم نرمال بشود.

(راهنمایی: برای این سوال، می‌توانید تا حدی از سوال ۴ کمک بگیرید)

سؤال ۶ فرض کنید X و Y مشترکا نرمال باشند و همچنین $Var(X) = Var(Y)$. نشان دهید دو متغیر تصادفی $X + Y$ و $X - Y$ از هم مستقل هستند.

سؤال ۷ فرض کنید X و Y مشترکا نرمال باشند و پارامترهایشان به صورت زیر باشد:

$$\mu_X = 0, Var(X) = 1, \mu_Y = -1, Var(Y) = 4, \rho = -\frac{1}{2}$$

(آ) احتمال $P(X + Y > 0)$ باشد را محاسبه کنید.

(ب) متغیر a را طوری بیابید که $aX + Y$ و $X + 2Y$ نسبت به هم مستقل باشند.

سؤال ۸ فرض کنید چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}$$

و همچنین تابع مولد گشتاور X و Y به صورت زیر است:

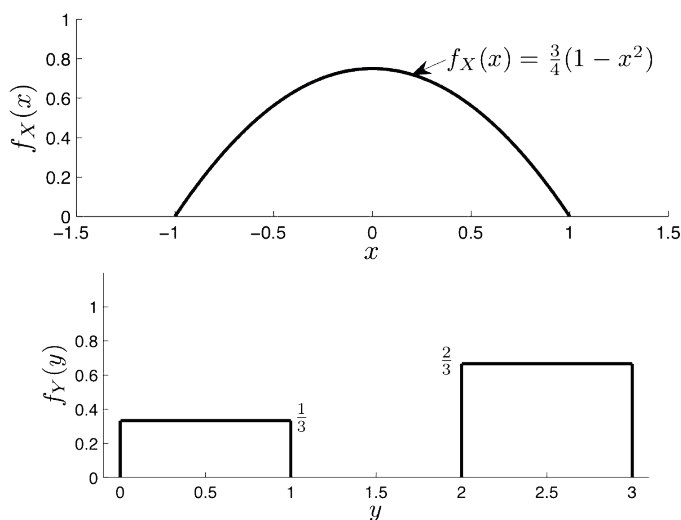
$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = \exp[t_1\mu_X + t_2\mu_Y + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_X^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_X \sigma_Y + t_2^2\sigma_Y^2)]$$

(آ) چگالی احتمال مارجینال X و Y را محاسبه کنید.

(ب) تابع توزیع $Z = X + Y$ را به دست آورید.

(ج) توزیع چگالی احتمال شرطی $p(X = x | Y = y)$ و $p(Y = y | X = x)$ را به دست آورید.

سؤال ۹ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. نمودار تابع توزیع چگالی احتمال آن‌ها در دو شکل زیر آمده است. اگر $Z = X + Y$ باشد چگالی احتمال متغیر تصادفی Z را بیابید.



سؤال ۱۰ فرض کنید U متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[0, 2\pi]$ و Z متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر 1 است. با فرض اینکه Z و U از هم مستقل باشند دو متغیر تصادفی X و Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \sqrt{2Z}\cos(U), Y = \sqrt{2Z}\sin(U)$$

نشان دهید توزیع چگالی احتمال توام $f_{XY}(x, y)$ از توزیع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد تبعیت می‌کند.

موفق باشید