به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

پاسخ تمرین سری دوم
متغیرهای تصادفی
نیم‌سال اول ۹۷-۹۶
مدرس: دکتر مطهری

۱ سوال اول

ابتدا توزیع گسسته مورد سوال را پیدا می‌کنیم و سپس امیدریاضی را محاسبه می‌کنیم. در n بار پرتاب تاس به i^n حالت ممکن است اعداد کمتر یا مساوی i ظاهر شوند. حال برای این‌که بیشینه این اعداد i باشد لازم است این حالت که همه اعداد کمتر از i بیایند را حذف کنیم. یعنی به $i^n - (i-1)^n$ حالت می‌تواند حداکثر اعداد ظاهر شده در پرتاب تاس‌ها i باشد. پس احتمال این‌که در پرتاب n بار یک تاس بیشینه اعداد ظاهر شده i باشد برابر است با: $\frac{i^n-(i-1)^n}{6^n}$ پس توزیع به این شکل است:

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{i^n-(i-1)^n}{6^n} & 0<x<7\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

حال امید ریاضی را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{i=6}\left(\frac{i^n-(i-1)^n}{6^n}\right)i=\frac{6(6^n-5^n)+5(5^n-4^n)+4(4^n-3^n)+3(3^n-2^n)+(2^n-1^n)+(1^n-0^n)}{6^n}$$

$$=6-\frac{5^n+4^n+3^n+2^n+1}{6^n}$$

۲ سوال دوم

متغیر تصادفی مورد سوال را به صورت جمعی از متغیرهای تصادفی درنظر می‌گیریم. X_i را تعریف می‌کنیم تعداد مهره‌هایی که از این به بعد باید از سبد دربیاوریم تا شماره‌ی جدیدی ببینیم با این فرض که تاکنون i شماره مجزا را دیده‌ایم. در این صورت:

$$X=X_0+X_1+...+X_{n-1}$$

حال X_i را درنظر بگیرید. اگر بدانیم تاکنون i شماره را دیده‌ایم، احتمال این‌که بعد از k بار خارج کردن مهره شماره جدید بعدی را ببینیم برابراست با:

$$P(X_i=k)=\left(\frac{n-i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{k-1}$$

به عبارت دیگر X_i هااز توزیع هندسی آمده‌اند. پس می‌دانیم

$$E[x_i] = \frac{n}{n-i}$$

و می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$E[x] = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + ... + \frac{n}{1} = n(1 + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n})$$

۳ سوال سوم

الف)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} Pr(A_i)E[X|A_i] &= \sum_{i=1}^{n}[\sum_{x} xPr(A_i)Pr(X=x|A_i)] \\
&= \sum_{x} x \sum_{i=1}^{n} Pr(X=x|A_i)Pr(A_i) \\
&= \sum_{x} xPr(X=x) \\
&= E[X]
\end{aligned}$$

ب)

در هر مرحله از این فرآیند دو اتفاق ممکن است بیفتد:

- دو سر یک طناب را به هم وصل کنیم. در این صورت به امیدریاضی تعداد حلقه‌ها یکی اضافه می‌شود و از تعداد طناب‌ها هم یکی کم می‌شود زیرا آن طنابی که دو سرش را به هم وصل کردیم دیگر کاربری برایمان ندارد
- دو طناب مختلف را به هم وصل می‌کنیم. در این صورت یک طناب بزرگ‌تر خواهیم داشت. هیچ حلقه‌ای اضافه نمی‌شود و باز هم از تعداد طناب‌ها یکی کم می‌شود.

راه اول:

فرض کنید $f(n)$ برابر امید ریاضی تعداد دورها باشد اگر در ابتدا n طناب داشته باشیم. اگر A اتفاق اول ذکر شده باشد و B اتفاق دوم باشد، در این صورت طبق بخش الف:

$$\begin{aligned}
f(n) = E[X] &= E[X|A]Pr(A) + E[X|B]Pr(B) \\
&= (f(n-1)+1)\frac{1}{2n-1} + f(n-1)(1-\frac{1}{2n-1}) \\
&= f(n-1) + \frac{1}{2n-1}
\end{aligned}$$

توجه کنید که ما $2n$ تا سر آزاد داریم که درکل به $\frac{2n(2n-1)}{2}$ روش می‌توانیم از بین آن‌ها سر انتخاب کنیم که n تای آن‌ها مربوط به وقتی است که دوسر یک طناب را انتخاب می‌کنیم. پس احتمال پیشامد A برابر است با: $\frac{n}{\frac{2n(2n-1)}{2}}$

که همان $\frac{۱}{۲n-۱}$ ای است که در بالا نوشته شده. از طرفی $E[X|A]$ یعنی امید ریاضی تعداد دورها به شرط این که در حرکت اول دو سر یک طناب را به هم وصل کنیم، برابر امیدریاضی برای حالت $n-۱$ طناب است به علاوه‌ی ۱ (دوری که در حرکت اول ایجاد شده‌است). حال چون $f(۱)=۱$ داریم:

$$f(n)=E[X]=\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۲n-۳}+...+\frac{۱}{۳}+۱=H_{۲n}-\frac{H_n}{۲}$$

راه دوم:

در مرحله اول با n طناب کار را شروع کرده‌ایم. به طور متوسط تعداد حلقه‌های افزوده شده در این مرحله برابر است با:

$$\frac{۱}{۲n-۱}\times ۱+(۱-\frac{۱}{۲n-۱})\times ۰$$

تتوجه کنید که ما $۲n$ تا سر آزاد داریم که درکل به $\frac{۲n(۲n-۱)}{۲}$ روش می‌توانیم از بین آن‌ها سر انتخاب کنیم که n تای آن‌ها مربوط به وقتی است که دوسر یک طناب را انتخاب می‌کنیم. پس احتمال پیشامد A برابر است با: $\frac{n}{\frac{۲n(۲n-۱)}{۲}}$
که همان $\frac{۱}{۲n-۱}$ ای است که در بالا نوشته شده..
پس از طی کردن این مرحله $n-۱$ طناب خواهیم داشت و همین روند را ادامه می‌دهیم. با توجه به جمعی بودن امیدریاضی، امید ریاضی تعداد دورها برابر مجموع امیدریاضی تعداد دورهای ایجاد شده در مراحل است. پس در نهایت امیدریاضی تعداد حلقه‌ها برابر است با:

$$\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۲n-۳}+...+\frac{۱}{۳}+۱=H_{۲n}-\frac{H_n}{۲}$$

۴ سوال چهارم

(آ) با توجه به تعریف توزیع نمایی می دانیم:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\Rightarrow Pr(X>s)=1-Pr(X<s)=e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow Pr(X>s+t\mid X>s)=\frac{Pr(X>s+t)}{Pr(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=Pr(X>t)$$

(ب) اگر طول عمر این دستگاه را X می دانیم احتمال اینکه این دستگاه تا یک سال دیگر خراب نشود برابر $Pr(X>۶\mid X>۵)$ است که بنابر بند بالا برابر $Pr(X>۱)$ است.حال:

$$Pr(X>۱)=۱-Pr(X<۱)=e^{-\lambda}=e^{-۰/۱}$$

۵ سوال پنجم

راه اول:

دقت کنید برای این که x بار خط بیاید باید در کل $x+۱۰$ بار سکه انداخته شده باشد و به علاوه سکه آخر حتما شیر باشد. احتمال هر یک از حالت‌ها برابر $(\frac{۱}{۲})^{۱۰}$ است و $\binom{x+۹}{x}$ تا از این حالت‌ها دو شرط ۱۰ بار شیر آمدن و

شیر بودن آخرین پرتاب را دارند. پس احتمال x بار خط آمدن برابر زیر است.

$$Pr(X=x) = \binom{x+۹}{x} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x+۱۰}$$

راه دوم:

فرض کنید X_i برابر تعداد پرتاب‌ها بین آمدن شیر iم و $i-۱$م باشد. X_i ها نسبت به هم مستقل هستند و از توزیع هندسی با ثابت $p=\frac{۱}{۲}$ پیروی می‌کنند. حال می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} Pr(X=x) &= \sum_{a_۱+\ldots+a_{۱۰}=x, a_i \geq ۰} Pr(X_۱=a_۱, \ldots, X_{۱۰}=a_{۱۰}) \\ &= \sum_{a_۱+\ldots+a_{۱۰}=x, a_i \geq ۰} \prod_i Pr(X_i=a_i) \\ &= \sum_{a_۱+\ldots+a_{۱۰}=x, a_i \geq ۰} \prod_i (\frac{۱}{۲})^{a_i+۱} \\ &= \sum_{a_۱+\ldots+a_{۱۰}=x, a_i \geq ۰} (\frac{۱}{۲})^{\sum(a_i+۱)} \\ &= \sum_{a_۱+\ldots+a_{۱۰}=x, a_i \geq ۰} (\frac{۱}{۲})^{x+۱۰} \\ &= \binom{x+۹}{x} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x+۱۰} \end{aligned}$$

حال مقدار توزیع تجمعی را محاسبه می‌کنیم:

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \sum_{i=۰}^{\lfloor x \rfloor} \binom{i+۹}{i} \times (\frac{۱}{۲})^{i+۱۰} & x \geq ۰ \end{cases}$$

۶ سوال ششم

(آ) دقت کنید که در اصل توزیع احتمال تعداد گردو های موجود در یک شیرینی توضیع دو جمله ای دارد ولی با توجه به این که محاسبه این توزیع بسیار سخت است و چون p عددی کوچک (در حد $\frac{۱}{۱۰۰}$ است) و چون n بسیار بزرگ و در حد ۵۰۰ است پس می توان از تقریب پوآسن برای این توزیع استفاده کرد.پس اگر تعداد گردو های یک شیرینی X باشد. باید از توزیع پواسونی استفاده کنیم امید ریاضی آن برابر امید ریاضی X باشد. پس:

$$\lambda = n \times p = ۵ \Rightarrow P(X=k) = e^{-۵} \times \frac{۵^k}{k!}$$

حال داریم:

$$P(X>۵) = ۱ - e^{-۵} \times (\frac{۵^۰}{۰!} + \frac{۵^۱}{۱!} + \frac{۵^۲}{۲!} + \frac{۵^۳}{۳!} + \frac{۵^۴}{۴!}) = ۰/۵۵۹۵$$

(ب) زمانی که n بزرگ باشد و p خیلی به ۰ و ۱ نزدیک نباشد، از تقریب نرمال استفاده می‌شود. این شرایط در این مسائل برقرار است. در تقریب نرمال از تابع چگالی احتمال توزیع نرمال با امید و واریانس مشابه متغیری که داریم استفاده می‌کنیم. احتمال $X=k$ را با انتگرال تابع چگالی در در بازه‌ی $(k-۰/۵, k+۰/۵)$ تقریب می‌زنیم.

i چون p کم نیست نمی‌توان از تقریب پواسون استفاده کرد. برای استفاده از تقریب نرمال باید از توزیع نرمالی با واریانس و امید مشابه متغیری که داریم استفاده کنیم. داریم:

$$\mu = np = ۵, \sigma^{۲} = np(۱-p) = ۲/۵$$

پس اگر X متغیر تصادفی تعداد پسرها باشد از توزیعی شبیه توزیع نرمال با واریانس و امید ریاضی بالا پیروی می کند. X' را متغیری با این توزیع در نظر می‌گیریم. مقدار احتمال برابر است با:

$$Pr(X \geq ۶) \approx Pr(۵/۵ < X' < ۱۰/۵) = \int_{۵/۵}^{۱۰/۵} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi \times ۲/۵}} e^{-\frac{(x-۵)^{۲}}{۲\times ۲/۵}} dx$$

که با نرم‌افزار به جواب ۰/۳۷۵ می‌رسیم. راه دیگر استفاده از جدول توزیع نرمال است. برای این کار متغیر تصادفی زیر را تعریف می کنیم:

$$Y = \frac{X' - ۵}{\sqrt{۲/۵}}$$

با توجه به اینکه Y ترکیب خطی ای از X است و X از توزیع نرمال پیروی می کند پس Y هم از توزیع نرمال پیروی می کند از طرفی واریانس این متغیر تصادفی برابر ۱ و امید ریاضی اش برابر صفر است.به این توزیع ، توزیع نرمال استاندارد می گویند.حال:

$$P(۵/۵ < X' < ۱۰/۵) \approx Pr(۵/۵ < X') = P(Y > ۰/۳۱۶۲) = ۱ - P(Y < ۰/۳۱۶۲)$$

جمله عمومی تابع $F(x)$ برای توزیع نرمال غیر قابل بدست آوردن است اما مقدار این تابع برای توزیع نرمال استاندارد در جدول هایی قابل دستیابیست که برای این مقدار که با $Z_{۰/۳۱۶۲} = ۰/۶۲۴۱$ نشان می دهند. با این روش به همان مقدار $۱ - ۰/۶۲۴۱ = ۰/۳۷۵$ می‌رسیم.

ii مشابه بخش قبل عمل می‌کنیم. داریم:

$$\mu = np = ۵۰۰, \sigma^{۲} = np(۱-p) = ۲۵۰$$

پس اگر X متغیر تصادفی تعداد دختر ها باشد از توزیعی شبیه توزیع نرمال با واریانس و امید ریاضی بالا پیروی می کند.X' را متغیری با این توزیع در نظر می‌گیریم. مقدار احتمال برابر است با:

$$Pr(X \geq ۶۰۰) \approx Pr(۵۹۹/۵ < X' < ۱۰۰۰/۵) = \int_{۵۹۹/۵}^{۱۰۰۰/۵} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi \times ۲۵۰}} e^{-\frac{(x-۵۰۰)^{۲}}{۲\times ۲۵۰}} dx$$

که با نرم‌افزار به جواب $۱/۵۶ \times ۱۰^{-۱۰}$ می‌رسیم. همچنین برای استفاده از جدول توزیع نرمال تعریف می‌کنیم:

$$Y = \frac{X' - ۵۰۰}{\sqrt{۲۵۰}}$$

حال:

$$\begin{aligned} Pr(X \geq ۶۰۰) &\approx Pr(۵۹۹/۵ < X' < ۱۰۰۰/۵) \approx Pr(X' > ۵۹۹/۵) \\ &= Pr(Y > ۶/۲۹۳) = ۱ - Pr(Y < ۶/۲۹۳) \end{aligned}$$

مقدار $Pr(Y < ۶/۲۹۳)$ در جدول قابل مشاهده است که تقریبا برابر ۱ است.پس جواب تقریبا برابر صفر است.

iii در این سوال باید n را بیابیم که به ازای آن به احتمال ۰/۹۵ حداقل ۱۵ پسر ببینیم . باید داشته باشیم:

$$\int_{14/5}^{n+0/5} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0/25n}} e^{-\frac{(x-0/5n)^2}{2\times 0/25n}} dx \geq 0/95$$

که اگر مقدار آن را با نرم‌افزار حساب کنیم می‌بینیم کوچک ترین n برابر ۴۰ است. راه دیگر که به نرم‌افزاری نیاز ندارد استفاده از جدول است. روند سوال قبل را تکرار می کنیم با این تفاوت که این بار n مجهول است.حال

$$P[X' > 14/5] = P[\frac{X' - 0/5n}{\sqrt{0/25n}} = Y > \frac{14/5 - 0/5n}{\sqrt{0/25n}}] \geq 0/95 = 1 - Z_{-1/645}$$
$$\Rightarrow \frac{14/5 - 0/5n}{\sqrt{0/25n}} \leq -1/645 \Rightarrow n \geq 39/314 \Rightarrow n = 40$$

دقت کنید که در اینجا ما احتمال $X > n + 0/5$ را هم در ۰/۹۵ حساب کردیم که با توجه به بسیار کوچک بودن آن (بخش ii را ببینید)تاثیری ندارد.

۷ سوال هفتم

(آ)

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} iP(X=i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} P(X=i) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} P(X=i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X \geq j)$$

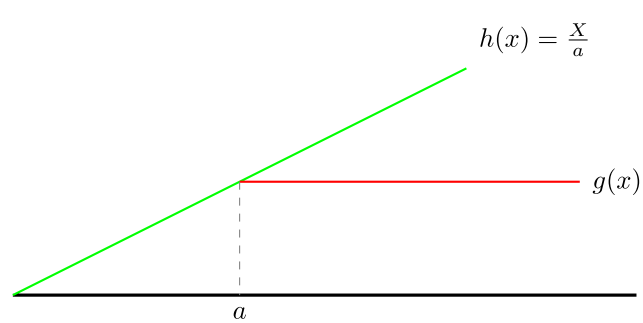
(ب) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته و همواره نامنفی باشد:

$$E[X] = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty}\int_0^{x} f(x)dydx = \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} f(x)dxdy = \int_0^{\infty} (1 - F(y))dy$$

(ج) دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases} , f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{a} & x \geq 0 \end{cases}$$

حال داریم:



$$E[g(X)] = \int_a^{\infty} g(x).f(x).dx = P(X \geqslant a)$$
$$E[h(X)] = \frac{E[X]}{a}$$
$$g(x) \leqslant h(x) \Rightarrow E[g(X)] \leqslant E[h(X)] \Rightarrow P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E[X]}{a}$$