دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی — زمستان ۱۳۹۸

پاسخ‌نامه تمرین سری دوم (احتمال شرطی و استقلال، آزمایش‌های ترکیبی، متغیرهای تصادفی گسسته)

مدرس: نعیمه امیدوار — موعد تحویل: ۷ فروردین ۱۳۹۹

پاسخ ۱ آ)

$$P(A \mid B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \mid C)P(C)} = \frac{P(A \cap B \mid C)}{P(B \mid C)}$$

ب) سمت راست تساوی را S در نظر می‌گیریم. شروع به ساده‌سازی جملات می‌کنیم و هر بار احتمال‌های باقی‌مانده را با R نمایش می‌دهیم. یعنی در هر بار محاسبه R به روز رسانی می‌شود تا مرحله‌ی آخر که جمله‌ای باقی نماند.

$$S = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)R = P(A_1 \cap A_2)R$$

$$S = P(A_1 \cap A_2)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)R = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)R$$

$$...$$

$$S = P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1})P(A_n \mid A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) = P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

ج)

$$P(A \mid B \cup C) = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B \cup C)} = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(B) + P(C) - P(B \cap C)}$$

$$= \frac{P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C)}{P(B) + P(C) - P(B)P(C)} = P(A)$$

د)

$$P(X \mid W \cap Z \cap Y) = P(X \mid Z \cap Y) \Rightarrow \frac{P(X \cap W \cap Y \cap Z)}{P(W \cap Y \cap Z)} = \frac{P(X \cap Z \cap Y)}{P(Z \cap Y)} \qquad (1)$$

$$P(X \mid Y \cap Z) = P(X \mid Z) \Rightarrow \frac{P(X \cap Y \cap Z)}{P(Y \cap Z)} = \frac{P(X \cap Z)}{P(Z)} \qquad (2)$$

$$(1),\ (2) \Longrightarrow P(X \mid Y \cap W \cap Z) = \frac{P(X \cap Y \cap W \cap Z)}{P(Y \cap W \cap Z)} = \frac{P(X \cap Y \cap Z)}{P(Y \cap Z)}$$

$$= \frac{P(X \cap Z)}{P(Z)} = P(X \mid Z)$$

ه)

$$\Rightarrow: \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} \Rightarrow \frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B^c\mid A)P(A)}{P(B^c)}$$
$$\Rightarrow \frac{P(B\mid A)}{P(B)} = \frac{1-P(B\mid A)}{1-P(B)} \Rightarrow P(B\mid A) = P(B)$$

$$\Leftarrow: P(B\mid A) = P(B\mid A) \Rightarrow P(B\mid A) = 1 - P(B^c\mid A)$$
$$\Rightarrow \frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A\mid B^c)P(B^c)}{P(A)}$$
$$\Rightarrow P(A\mid B)P(B) = P(A) - P(A\mid B^c)(1-P(B))$$
$$\Rightarrow P(B)P(A) = P(A) - P(A\mid B^c) + P(A\mid B^c)P(B)$$
$$\Rightarrow P(A)(P(B)-1) = P(A\mid B^c)(P(B)-1)$$
$$\Rightarrow P(A) = P(A\mid B^c) \Rightarrow P(A\mid B) = P(A\mid B^c)$$

و) فضای نمونه را اعداد یک تا دوازده در نظر بگیرید به طوریکه احتمال رخ دادن هر کدام یکسان باشد. حال پیشامدها را اینطور تعریف می‌کنیم

$$A = \{1,2,3\} \quad B = \{1,4,5,6\} \quad C = \{2,1,7,8,9\}$$

ز)

$$P(A^c\cap B^c) = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A)P(B)) =$$
$$P(A^c) + P(B)(P(A)-1) = P(A^c)P(B^c)$$

ح) در مثال آمده در قسمت «و» پیشامد سوم را اعداد زوج در نظر بگیرید.

پاسخ ۲ برای حل سؤال ابتدا این نمادها را تعریف می‌کنیم:
P_i احتمال برد کل بازی به ازای شروع بازی با i تومان است. بدیهی‌ست که P_0 برابر با صفر و P_N برابر با یک است. همچنین q را احتمال باخت در هر مرحله در نظر بگیرید.
حل سؤال: قانون احتمال کل را برای اولین مرحله از بازی می‌نویسیم.

$$P_i = p\,P_{i+1} + q\,P_{i-1}$$

از آنجا که این رابطه از هر دو سمت بازگشتی‌ست، انتهایی ندارد. حال سعی می‌کنیم آن را به یک فرم مشخص در بیاوریم:

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1})$$

و در ادامه داریم:

$$i=1 \Rightarrow P_2 - P_1 = \frac{q}{p}P_1 \Rightarrow P_2 = P_1\sum_{k=0}^{1}(\frac{q}{p})^k$$
$$i=n \Rightarrow P_{n+1} - P_n = \frac{q}{p}(P_n - P_{n-1}) = \frac{q}{p}(P_1(\frac{q}{p})^{n-1})$$
$$\Rightarrow P_{n+1} = P_1(\frac{q}{p})^n + P_1\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{q}{p})^k = P_1\sum_{k=0}^{n}(\frac{q}{p})^k$$

با استفاده از محاسبه‌ی این دنباله‌ی هندسی جواب‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$P_{i+1} = \begin{cases} P_1\dfrac{1-(\frac{q}{p})^{i+1}}{1-(\frac{q}{p})}, & if\ p\neq q \\ \\ P_1(i+1), & if\ p=q=0.5 \end{cases}$$

حال مقدار $i = N - 1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$1 = P_N = \begin{cases} P_1 \dfrac{1-(\frac{q}{p})^N}{1-(\frac{q}{p})}, & if\ p \neq q \\ \\ P_1 N, & if\ p = q = 0.5 \end{cases}$$

و از آن مقدار P_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$P_1 = \begin{cases} \dfrac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N}, & if\ p \neq q \\ \\ \dfrac{1}{N}, & if\ p = q = 0.5 \end{cases}$$

حال مقدار P_m یا همان احتمال برد (رسیدن مقدار پولتان به مقدارN) برابر است با:

$$P_m = \begin{cases} \dfrac{1-(\frac{q}{p})^m}{1-(\frac{q}{p})^N}, & if\ p \neq q \\ \\ \dfrac{m}{N}, & if\ p = q = 0.5 \end{cases}$$

احتمال باخت شما برای مقادیر بسیار بزرگ N برابر است با:

$$\begin{cases} (\frac{1-p}{p})^m, & if\ p > \frac{1}{2} \\ 1, & if\ p \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

پاسخ ۳ آ)

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r \, (1-p)^{k-r}$$

ب) متغیر تصادفی N_i را تعداد پرتاب‌های لازم برای دیدن iمین شیر بعد از دیدن $i-1$ شیر اول تعریف می‌کنیم. به این ترتیب داریم: $N = \sum_{i=1}^{r} N_i$

ج)

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{k-11}{r-6} p^{r-5} \, (1-p)^{k-5-r}$$

پاسخ ۴ آ) از توزیع هندسی تبعیت می‌کند. لذا داریم:

$$P(X = 3) = p\,(1-p)^2 = 0.3 \times 0.49 = 0.147$$

ب) احتمال شرطی با همان توزیع هندسی.

$$P(X = 13 \mid X > 10) = \frac{P(X = 13, X > 10)}{P(X > 10)} = \frac{P(X = 13)}{P(X > 10)} = \frac{p\,(1-p)^{12}}{(1-p)^{10}} = p(1-p)^2 = 0.147$$

ج) پیشامد خرید از داروخانه iام را با A_i نشان می‌دهیم. همچنین اگر داروخانه پلمپ شده باشد آن را با O_i نمایش می‌دهیم. بدیهی‌ست که $P(A_i \mid O_i) = 0$ است. حال می‌دانیم سه $i \neq j,\ j \neq k,\ i \neq k\,; 1 \leq i,\ j,\ k \leq 100$ وجود دارند داروخانه با آن شماره‌ها پلمپ شده‌اند. این پیشامد (وجود این سه اندیس) را Z نام‌گذاری می‌کنیم. حال از اصل سوم کولموگروف استفاده می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
P(A_3 \cap Z) &= P(A_3 \cap O_1 \cap O_2 \cap O_k)_{(k>3)} + P(A_3 \cap O_1 \cap O_2^c \cap O_j \cap O_k)_{(j,\,k>3)} \\
&+ P(A_3 \cap O_1^c \cap O_2 \cap O_j \cap O_k)_{(j,\,k>3)} + P(A_3 \cap O_1^c \cap O_2^c \cap O_i \cap O_j \cap O_k)_{(i,j,k>3)} \\
&= P(A_3)P(O_1 \cap O_2 \cap O_k)_{(k>3)} + P(A_3)P(O_1 \cap O_2^c \cap O_j \cap O_k)_{(j,\,k>3)} \\
&+ P(A_3)P(O_1^c \cap O_2 \cap O_j \cap O_k)_{(j,\,k>3)} + P(A_3)P(O_1^c \cap O_2^c \cap O_i \cap O_j \cap O_k)_{(i,j,k>3)} \\
&= \frac{\binom{97}{1}p}{\binom{100}{3}} + \frac{\binom{97}{2}p(1-p)}{\binom{100}{3}} + \frac{\binom{97}{2}p(1-p)}{\binom{100}{3}} + \frac{\binom{97}{3}p(1-p)^2}{\binom{100}{3}} \approxeq 0.146
\end{aligned}
$$

پاسخ ۵ آ) احتمال انتخاب فرزند ارشد که آن را با رویداد A نمایش می‌دهیم در روش اول برابرست با:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(A) &= \sum_{F \in families} \mathbb{P}_1(A|F)\,\mathbb{P}_1(F) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{i}\,\frac{1}{m} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{i}\,\frac{1}{m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} n_j}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{i}
\end{aligned}
$$

ب) احتمال انتخاب فرزند ارشد در روش دوم برابرست با:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_2(A) &= \sum_{F \in families} \mathbb{P}_2(A|F)\,\mathbb{P}_2(F) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{i}\,\frac{i}{\sum_{l=1}^{k} l\,n_l} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sum_{l=1}^{k} l\,n_l} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j}{\sum_{i=1}^{k} i\,n_i}
\end{aligned}
$$

در ادامه نشان داده شده است که مقدار به دست آمده در بخش آ از مقدار به دست آمده از بخش ب بیشتر است:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sum_{j=1}^{k} n_j}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{i} \geq \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j}{\sum_{i=1}^{k} i\,n_i} \iff (\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{i})\,(\sum_{j=1}^{k} j\,n_j) \geq (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 \\
&\iff \frac{n_i}{i}\cdot j\,n_j + \frac{n_j}{j}\cdot i\,n_i \geq 2\,n_i\,n_j \iff \frac{j}{i} + \frac{i}{j} >= 2
\end{aligned}
$$

پاسخ ۶ اگر X تعداد توپ‌های علامت‌دار انتخاب شده باشد، داریم:

$$
P_N(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{n-k}}{\binom{N}{n}}
$$

حال با مقایسه $P_N(k)$ با $P_{N-1}(k)$ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\frac{P_N(k)}{P_{N-1}(k)} = \frac{(N-n)(N-n)}{(N-2n+k)N} \geq 1 &\iff (N-n)^2 \geq (N-2n+k)N \\
&\iff \frac{n^2}{k} \geq N
\end{aligned}
$$

بنابراین مقدار $P_N(X = k)$ به ازای $N = \lfloor \frac{n^2}{k} \rfloor$ بیشینه می‌شود.

پاسخ ۷ آ) به ازای $0 \le k \le n+m$ داریم:

$$\mathbb{P}(X+Y <= k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k-i)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i\,(1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i}\,(1-p)^{m-k+i}$$
$$p^k\,(1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \;=\; \binom{n+m}{k} p^k\,(1-p)^{n+m-k}$$
$$\Rightarrow X+Y \sim Binomial(n+m, p)$$

ب)

$$\mathbb{P}(Y <= y) = 1 - \mathbb{P}(Y > y) = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1-p_i)^y = 1 - (\prod_{i=1}^{k}(1-p_i))^y$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(Y <= y) - \mathbb{P}(Y < y)$$
$$= 1 - (\prod_{i=1}^{k}(1-p_i))^y - (1 - (\prod_{i=1}^{k}(1-p_i))^{y-1}) = (\prod_{i=1}^{k}(1-p_i))^{y-1}(1 - \prod_{i=1}^{k}(1-p_i))$$
$$\Rightarrow Y \sim Geometric(1 - \prod_{i=1}^{k}(1-p_i))$$

پاسخ ۸ آ) اگر داشته باشیم $X \sim Binomial(n,p)$ و $\lambda = np$ توزیع جرم احتمال X به این شکل در می‌آید:

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,(\frac{\lambda}{n})^k\,(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{n^k}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k}$$

و با توجه به بزرگ بودن مقدار n و مقدار متعادل λ داریم:

$$\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{n^k} \approxeq 1 \quad (1-\frac{\lambda}{n})^n \approxeq e^{-\lambda} \quad (1-\frac{\lambda}{n})^k \approxeq 1$$

و در نتیجه برای مقدار بزرگ n و مقدار متعادل $\lambda = np$ در توزیع دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$\mathbb{P}(X=k) \approxeq e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

ب) با توجه به بزرگ بودن تعداد کلمات و کوچک بودن احتمال برابر غلط املایی در هر کدام می‌توانیم از توزیع پوآسن برای تقریب این توزیع دوجمله‌ای $X \sim Binomial(1000, 0.015)$ استفاده کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lambda = np = 15 \quad \mathbb{P}(X=7) \approxeq e^{-15}\,\frac{15^7}{7!} = 0.01037029351$$

پاسخ ۹ از آن‌جا که تعداد گزها، پسته‌ها و بادام‌ها زیاد است از توزیع پواسون برای احتمال وجود پسته‌ها و بادام‌ها در گزها استفاده می‌کنیم.

آ) ابتدا احتمال اینکه یک گز بیش از ۲ پسته داشته باشد را حساب می‌کنیم. از آنجا که احتمال آمدن پسته در این گز یک صدم و تعداد پسته‌ها ۳۰۰تا است در نتیجه مؤلفه‌ی این توزیع پواسون برابر با $np = 300 \times 0.01 = 3$ است. حال داریم:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$
$$= 1 - e^{-3}(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!}) = 1 - \frac{17e^{-3}}{2}$$

قرار می‌دهیم $p = P(X > 2), q = 1 - p$ و حال احتمال خواسته شده در سؤال که از توزیع دوجمله‌ای تبعیت می‌کند را حساب می‌کنیم:

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - (P(Y = 2) + P(Y = 1) + P(Y = 0))$$
$$= 1 - (\binom{5}{2}p^2q^3 + \binom{5}{1}pq^4 + \binom{5}{0}q^5) \approxeq 0.642$$

ب) از آنجایی که توزیع بادام و پسته‌ها در گزها مستقل از یکدیگرند داریم:

$$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} \times e^{-3}\frac{3^0}{0!} = e^{-5} \approxeq 0.007$$

موفق باشید