

* زلف پرت *

برگ حل سؤال ابتدا کنیم است $f(n, r)$ را محاسبه کنیم
 توضیح کنید اگر دقیقاً r نقطه $(r \leq n)$ از یک
 حالت n تایی سرچا خود باشند، هیچ یک از $n-r$
 عضو دیگر در سرچا خود قرار ندارند پس بفرج
 این $n-r$ عضو دیگر، $f(n-r, 0)$ طبق
 می توانند محاسبه شوند. همچنین $\binom{n}{r}$ حالت برگ
 انتخاب r نقطه ثابت وجود دارد.
 بنابر توضیحات فوق و اصل ضرب داریم:

$$f(n, r) = \binom{n}{r} f(n-r, 0)$$

پس محاسبه $f(n, r)$ تقلیل پیدا می کند به
 محاسبه $f(n, 0)$.

* محاسبه $f(n, 0)$: بدست بیایند $f(n, 0)$
 ها / فعل پیش مرتبه n یا عبارت D_n است

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول D_n را محاسبه می کنیم.

نظر کنید A_I ($I \subseteq [n]$) مجموعه ها جابجایی از $n, \dots, 2, 1$ باشد که در اعضا I سر جای خود است.

هستند (ممکن است $A_I \cap A_J \neq \emptyset$)
 مجموع داریم:

$$|A_I| = (n - |I|)!$$

همچنین تعداد A_I که برای $I \subseteq [n]$ با اندازه ثابت

k برابر است با $\binom{n}{|I|}$.

پس اصل شمول و عدم شمول داریم

$$D_n = n_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\substack{|I|=k \\ I \subseteq [n]}} |A_I|$$

$$= n!_0 - \binom{n}{1} (n-1)!_0 + \binom{n}{2} (n-2)!_0 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$= n!_0 \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad \square$$

حال : مثل اولی باز می کردیم .

$$f(n, r) = \binom{n}{r} D_{n-r}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n, r)}{n!_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{(n-r)!_0 r!_0} \times D_{n-r}}{n!_0}$$

$$= \frac{1}{r!_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n-r}}{n!_0}$$

$$= \frac{1}{r!_0} \lim \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{r!_0} \cdot e^{-1} \quad \rightsquigarrow \text{و مثل اولی - می شود!}$$

Q.E.D