



دانشکده مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

بهار ۱۴۰۳

تمرین سری چهارم

مدرس درس: مهدی جعفری

سررسید تحویل: سه‌شنبه ۱۵ خرداد ۱۴۰۳

سؤال ۱ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} cx^\gamma \sin(\pi x) & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

الف) مقدار c را بدست آورید.

ب) تابع توزیع تجمعی X را بدست آورید.

سؤال ۲ متغیر تصادفی پیوسته X را در نظر بگیرید که پشتیبان^۱ آن بازه $[0, c]$ است. نشان دهید:

$$\text{Var}[X] \leq \frac{c^2}{4}$$

سؤال ۳ اگر مقدار X که یک متغیر تصادفی پیوسته است، از یک توزیع یکنواخت به صورت $\text{uniform}(-2, 2)$ پیروی کند، و داشته باشیم که $Y = g(X)$ که تابع g به صورت زیر است:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

تابع توزیع تجمعی^۲ و تابع چگالی احتمال^۳ را برای Y پیدا کنید.

سؤال ۴ فرض کنید تعداد مشتریانی که وارد یک فروشگاه می‌شوند از توزیع $Poisson$ با میانگین λ مشتری در واحد زمان پیروی می‌کند. یعنی، اگر Y تعداد مشتریانی باشد که در یک بازه زمانی به طول t وارد می‌شوند، آنگاه $Y \sim Poisson(t)$ خواهد بود. فرض کنید که فروشگاه در زمان $t = 0$ باز می‌شود. اگر X زمان ورود اولین مشتری باشد، نشان دهید که $X \sim Exponential(\lambda)$ است.

^۱Support

^۲CDF - Cumulative distribution function

^۳PDF - Probability density function

سؤال ۵ فرض کنید که X و Y هر دو متغیرهای تصادفی پیوسته باشند که توزیع احتمالی مشترک دارند. تابع چگالی احتمال این دو مقدار تصادفی به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx + 1 & x, y \geq 0, x + y < 1 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

الف) مقدار c را پیدا کنید.

ب) برای هر کدام از X و Y توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای^۴ را پیدا کنید.

پ) مقدار احتمال مقابل را حساب کنید: $P(Y < 2X)$

سؤال ۶ تابع توزیع تجمعی برای متغیر تصادفی X به شکل زیر است:

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & b < 1 \\ (1/3)b & 1 \leq b < 2 \\ 1 & 2 \leq b \end{cases}$$

الف) این تابع را رسم کنید.

ب) $E[X]$ را پیدا کنید.

پ) احتمال آن را پیدا کنید که: $|X - 1| < 1$

ت) احتمال $|X - 1| < 1$ به شرطی که $1 < X \leq 2$ باشد را بیابید.

سؤال ۷ عمر یک باتری از متغیر تصادفی نمایی X با میانگین ۱۰۰۰ ساعت پیروی می‌کند. با دانستن اینکه این باتری تا کنون ۱۰۰۰ ساعت کار کرده است، احتمال اینکه ۱۰۰۰ ساعت دیگر هم کار کند چقدر است؟

سؤال ۸ فرض کنید که X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه (a, b) باشند.

$$X \sim \text{Uniform}(a, b) \quad a < b$$

الف) اگر $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ باشد، تابع توزیع چگالی Y را بیابید.

ب) امید ریاضی متغیر تصادفی Y را محاسبه کنید.

سؤال ۹ دو نفر توافق کرده‌اند که بین ساعت ۲ و ۳ بعدازظهر همدیگر را ملاقات کنند، با این دانش که هیچ‌کدام بیش از ۱۵ دقیقه برای طرف مقابل منتظر نخواهد ایستاد. احتمال اینکه این دو نفر یکدیگر را ملاقات کنند را بدست آورید.

سؤال ۱۰ (امتیازی) فرض کنید یک کاغذ خط‌کشی شده داریم که روی آن خطوطی موازی با فاصله d کشیده شده است. یک سوزن با طول L در اختیار داریم. سوزن را به صورت کاملاً تصادفی بر روی کاغذ می‌اندازیم. این سوزن با چه احتمالی خطی را قطع می‌کند؟ (کاغذ را نامتناهی در نظر بگیرید)

مسئله را در دو حالت $d > L$ و $d \leq L$ حل کنید.

موفق باشید