آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین سری دوم

موعد تحویل: ۱۳ آبان

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله‌ی ۱. (۸ نمره)

تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید می باشد و تاس B دارای ۲ وجه قرمز و ۴ وجه سفید می باشد. یک سکه را پرتاب می کنیم، اگر شیر ظاهر شود بازی را با تاس A و اگر خط ظاهر شود با تاس B انجام می دهیم.

الف) نشان دهید که احتمال مشاهده وجه قرمز تاس در هر آزمایش $\frac{1}{2}$ است.

ب) اگر رنگ وجه تاس در دو آزمایش اول قرمز باشد، احتمال مشاهده وجه قرمز در سومین آزمایش چقدر است؟

ج) اگر نتیجه دو آزمایش اول وجه قرمز باشد، احتمال اینکه تاس A انتخاب شده باشد چقدر است؟

حل.

الف) R_i: پیشامد قرمز آمدن در پرتاب i م و A: پیشامد انتخاب تاس A و B: پیشامد انتخاب تاس B

$$P(R_i) = P(R_i|A) + P(R_i|B) = \frac{1}{2} * \frac{4}{6} + \frac{1}{2} * \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

ب) کافی است احتمال اینکه سه پرتاب اول قرمز باشند را به شرط قرمز بودن دو پرتاب اول محاسبه نماییم:

R_2: پیشامد قرمز آمدن در دو پرتاب اول و R_3: پیشامد قرمز آمدن در سه پرتاب اول

$$P(R_2) = \frac{1}{2} * \frac{4}{6}^2 + \frac{1}{2} * \frac{2}{6}^2 = \frac{5}{18}$$

$$P(R_3) = \frac{1}{2} * (\frac{4}{6})^3 + \frac{1}{2} * (\frac{2}{6})^3 = \frac{1}{6}$$

$$P(R_3|R_2) = \frac{P(R_3 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_3)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}$$

ج) کافی است احتمال شرطی انتخاب تاس A به شرط آمدن قرمز در دو پرتاب اول را محاسبه نماییم:

$$P(A|R_2) = \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)}$$

$$P(A \cap R_2) = \frac{1}{2} * \frac{4}{6}^2 = \frac{2}{9}$$

$$P(A|R_2) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{18}} = \frac{4}{5}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۲. (۱۲ نمره)

آریا و پارسا در حال انجام یک بازی با یک سکه ناعادلانه هستند. شیوه بازی به این صورت است که اگر سکه دوبار متوالی رو بیاید، آریا برنده می شود و اگر دوبار متوالی پشت بیاید، پارسا برنده می شود و بازی تا پیدا شدن برنده ادامه پیدا می کند. اگر احتمال رو آمدن سکه p باشد و بدانیم که آریا برنده شده است، احتمال آنکه بار اول رو آمده باشد چقدر است؟

حل.
اگر A را رویداد برنده شدن آریا، H را رویداد رو آمدن سکه، T را رویداد پشت آمدن سکه و X_i را وضعیت سکه در پرتاب iام در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{\alpha,\beta \in \{H,T\}} P(X_1 = \alpha, X_2 = \beta) P(A|X_1 = \alpha, X_2 = \beta) \\ &= \underbrace{p^2}_{X_1=H,X_2=H} + \underbrace{p * q * P(A|X_1 = H, X_2 = T)}_{X_1=H,X_2=T} + \underbrace{q * p * P(A|X_1 = T, X_2 = H)}_{X_1=T,X_2=H} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P(A|X_1 = H, X_2 = T) = \\ & P(A|X_1 = H, X_2 = T, X_3 = H)P(X_3 = H) \\ & + P(A|X_1 = H, X_2 = T, X_3 = T)P(X_3 = T) \\ & = P(A|X_1 = T, X_2 = H) \times p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A|X_1 = T, X_2 = H) = \\ & P(A|X_1 = T, X_2 = H, X_3 = H)P(X_3 = H) \\ & + P(A|X_1 = T, X_2 = H, X_3 = T)P(X_3 = T) \\ & = p + P(A|X_1 = H, X_2 = T) \times q \end{aligned}$$

حال اگر فرض کنیم $P(A|X_1 = T, X_2 = H) = \alpha$ و $P(A|X_1 = H, X_2 = T) = \beta$ دستگاه معادله زیر را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \alpha &= p\beta \\ \beta &= p + q\alpha \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\alpha = p\beta = p(p + q\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{p^2}{1 - pq} \\ &\beta = p + q\alpha = \frac{p}{1 - pq} \end{aligned}$$

حال براساس ۱ داریم

$$P(A) = p^{۲} + \frac{p^{۳}q}{۱ - pq} + \frac{p^{۲}q}{۱ - pq} = p^{۲}(\frac{۱ + q}{۱ - pq})$$

همچنین

$$\begin{aligned} P(A|X_{۱} = H) &= P(A|X_{۱} = H, X_{۲} = H)P(X_{۲} = H|X_{۱} = H) \\ &+ P(A|X_{۱} = H, X_{۲} = T)P(X_{۲} = T|X_{۱} = H) \\ &= p + \frac{p^{۲}q}{۱ - pq} = \frac{p}{۱ - pq} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} P(X_{۱} = H|A) &= \frac{P(A|X_{۱} = H)P(X_{۱} = H)}{P(A)} \\ &= \frac{(\frac{p}{۱-pq})p}{p^{۲}(\frac{۱+q}{۱-pq})} \\ &= \frac{۱}{۱ + q} \end{aligned}$$

▷

مسئله‌ی ۳. (۱۲ نمره)

ده میلیون نفر در یک قرعه‌کشی خاص شرکت می‌کنند. برای هر نفر، احتمال برنده شدن یک در ده میلیون و مستقل از دیگران است.

آ) یک تقریب ساده و خوب برای توزیع جرم احتمال تعداد افرادی که در قرعه‌کشی برنده می‌شوند، پیدا کنید.

ب) تبریک! شما قرعه‌کشی را برنده شدید. با این حال، ممکن است برندگان دیگری هم وجود داشته باشند. در نظر بگیرید که تعداد برندگان به جز شما، از توزیع پوآسون با پارامتر ۱ نمونه‌گیری می‌شود و اگر بیش از یک برنده وجود داشته باشد، جایزه به یکی از برندگان به صورت تصادفی داده می‌شود. با توجه به این اطلاعات، احتمال برنده شدن خودتان را محاسبه کنید (ساده‌سازی شود).

حل.

آ) مجموع متوسط تعداد افرادی که برنده می‌شوند، را برابر با یک می‌یابیم:

$$E(X) = ۱۰^{۷} \cdot \frac{۱}{۱۰^{۷}} = ۱.$$

در اینجا تقریب پوآسون بسیار مناسب است چرا که X تعداد "موفقیت‌ها" برای تعداد بسیار زیادی از آزمایش‌های مستقل است که احتمال موفقیت در هر آزمایش بسیار پایین است. بنابراین، X تقریباً از توزیع پوآسون با پارامتر ۱ است و برای عدد صحیح غیرمنفی k داریم:

$$P(X = k) \approx \frac{۱}{e} \cdot \frac{۱}{k!}.$$

ب) اگر A رویداد برنده شدن شما و W تعداد برندگان دیگر (به جز شما) باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=۰}^{\infty} P(A|W=k)P(W=k) \\ &= \frac{۱}{e}\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k+۱}\cdot\frac{۱}{k!} \\ &= \frac{۱}{e}\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{(k+۱)!} \\ &= \frac{e-۱}{e} = ۱-\frac{۱}{e}. \end{aligned}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۴. (۱۲ نمره)

توزیع گامبل، توزیع $-\log X$ با $X \sim \mathrm{Expo}(۱)$ است.
(الف) تابع توزیع تجمعی (CDF) توزیع گامبل را پیدا کنید.

(ب) فرض کنید $X_۱X_۲\ldots$ نمونه‌های مستقل و هم توزیع از توزیع $\mathrm{Expo}(۱)$ باشند و $M_n = \max(X_۱\ldots X_n)$ باشد. تابع توزیع تجمعی (CDF) M_n را بیابید.
(ج) نشان دهید که $M_n - \log n$ به توزیع گامبل همگراست، به عبارت دیگر همانطور که $n \to \infty$، تابع توزیع $M_n - \log n$ به تابع توزیع گامبل همگرا می‌شود.

حل.
(الف) فرض کنید G توزیع گامبل و $X \sim \mathrm{Expo}(۱)$ باشد. تابع توزیع به صورت زیر می‌شود:

$$P(G \leqslant t) = P(-\log X \leqslant t) = P(X \geqslant e^{-t}) = e^{-e^{-t}} \text{ برای همه اعداد حقیقی } t.$$

(ب) تابع توزیع تجمعی M_n به صورت زیر خواهد بود:

$$P(M_n \leqslant t) = P(X_۱ \leqslant t, \ldots, X_n \leqslant t) = P(X_۱ \leqslant t)^n.$$

با استفاده از CDF توزیع نمایی این تابع به صورت زیر می‌شود:

$$\left(۱-e^{-t}\right)^n$$

(ج) تابع توزیج $M_n - \log n$ به صورت زیر می‌شود:

$$P(M_n - \log n \leqslant t) = P(X_۱ \leqslant t+\log n, \ldots, X_n \leqslant t+\log n) = P(X_۱ \leqslant t+\log n)^n.$$

با استفاده از CDF توزیع نمایی و $\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ باشد، این تابع به صورت زیر می‌شود:

$$\left(۱-e^{-(t+\log n)}\right)^n = \left(۱-\frac{e^{-t}}{n}\right)^n \to e^{-e^{-t}}.$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۵. (۱۲ نمره)

علی و حسن یک تورنمنت تنیس روی میز متشکل از تعدادی بازی پشت سر هم انجام می‌دهند. احتمال برنده شدن علی در هر بازی مستقل از بازی‌های دیگر برابر p است(نتیجه‌ی مساوی در بازی‌ها وجود ندارد). آن‌ها با قاعده «برنده

با دو اختلاف» بازی می‌کنند. طبق این قاعده اولین بازیکنی که دو بازی بیشتر از حریف خود ببرد، تورنمنت را برنده می‌شود. توزیع آماری تعداد بازی‌های انجام شده در این تورنمنت را بیابید.

حل.
به دو بازی اول، دو بازی دوم، دو بازی سوم و ... به عنوان "مسابقات کوچک" فکر کنید. مسابقه به محض اینکه یک بازیکن در هر دو بازی یک مسابقه کوچک برنده شود به اتمام می‌رسد. احتمال اینکه هر دو بازی یک مسابقه کوچک با برد یک نفر به اتمام برسد برابر با $p^۲ + q^۲$ است، بنابراین تعداد مسابقات کوچک مورد نیاز یک متغیر تصادفی $\mathrm{Geom}(p^۲ + q^۲)$ است. پس، تعداد مورد انتظار بازی‌ها برابر دو برابر مقدار مورد انتظار این متغیر تصادفی می‌باشد که معادل $\frac{۲}{p^۲+q^۲}$ است.
▷

مسئله‌ی ۶. (۱۲ نمره)

یک سکه را n بار پرتاب می‌کنیم. اگر احتمال شیر آمدن در پرتاب این سکه p و احتمال خط آمدن $q = ۱ - p$ باشد، نشان دهید احتمال زوج بودن تعداد دفعاتی که سکه شیر می‌آید برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}[۱ + (q-p)^n]$$

حل.
اگر k تعداد سکه‌هایی باشد که شیر آمده است خواهیم داشت:

$$P\{even\} = P\{k=۰\} + P\{k=۲\} + ... = q^n + \binom{n}{۲} p^۲ q^{n-۲} + \binom{n}{۴} p^۴ q^{n-۴} + \dots \qquad (۱)$$

$$۱ = (p+q)^n = q^n + \binom{n}{۱} p q^{n-۱} + \binom{n}{۲} p^۲ q^{n-۲} + \dots \qquad (۱)$$

$$(q-p)^n = q^n - \binom{n}{۱} p q^{n-۱} + \binom{n}{۲} p^۲ q^{n-۲} - \dots \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow ۱ + (q-p)^n = ۲P\{even\} \rightarrow P\{even\} = \frac{۱ + (q-p)^n}{۲} \qquad (۲)$$

▷

مسئله‌ی ۷. (۱۰ نمره)

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با تابع جرم احتمال یکسان به شکل زیر هستند.

$$P(X=\alpha) = P(Y=\alpha) = \begin{cases} \frac{۱}{۵} & for\ \alpha = ۱,۲,۳,۴,۵ \\ ۰ & otherwise. \end{cases} \qquad (۳)$$

فرض کنید متغیر تصادفی Z را به صورت $Z = X - Y$ تعریف کرده‌ایم.

الف) تابع جرم احتمال Z را پیدا کنید.

ب) مقدار $P[X=۳|Z=۲]$ را بیابید.

حل.
الف)

$$X \in \{۱,۲,...,۵\},\ Y \in \{۱,۲,...,۵\} \rightarrow Z = X - Y \in \{-۴,-۳,-۲,...,۳,۴\}$$

$$\begin{aligned}
P_Z(z) = P(Z=z) = P(X-Y=z) &= P(X=Y+z) \\
&= \sum_{y=۱}^{۵} P(X=Y+z|Y=y)P(Y=y) \\
&= \sum_{y=۱}^{۵} P(X=y+z)P(Y=y) \\
&= \sum_{y=۱}^{۵} P_X(y+z)P_Y(y) = \frac{۱}{۵}\sum_{y=۱}^{۵} P_X(y+z)
\end{aligned}$$

$$Z=۰ \to P_Z(۰) = \frac{۱}{۵}\sum_{y=۱}^{۵} P_X(y) = \frac{۱}{۵}(P_X(۱)+P_X(۲)+P_X(۳)+P_X(۴)+P_X(۵)) = \frac{۱}{۵}$$
$$|Z|=۱ \to P_Z(۱) = P_Z(-۱) = \frac{۱}{۵}(P_X(۲)+P_X(۳)+P_X(۴)+P_X(۵)+P_X(۶)) = \frac{۴}{۲۵}$$

$$\vdots$$

$$P_Z(z) = \begin{cases} \frac{۵-|z|}{۲۵} & |z| \leqslant ۴ \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

ب)

$$\begin{aligned}
P[X=۳|Z=۲] = P[X=۳|X=Y+۲] &= \frac{P[X=۳, X=Y+۲]}{P[Z=۲]} \\
&= \frac{P[X=۳]P[X=Y+۲|X=۳]}{P_Z(۲)} = \frac{P[X=۳]P[۳=Y+۲]}{P_Z(۲)}
\end{aligned}$$

حال از استقلال متغیرهای X و Y استفاده می‌کنیم.

$$P[X=۳|Z=۲] = \frac{P[X=۳]P[Y=۱]}{P_Z(۲)} = \frac{P_X(۳)*P_Y(۱)}{P_Z(۲)} = \frac{\frac{۱}{۵}\frac{۱}{۵}}{\frac{۳}{۲۵}} = \frac{۱}{۳}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۸. (۱۲ نمره)

X و Y متغیرهای برنولی مستقل از هم با پارامتر $\frac{۱}{۲}$ هستند. متغیر تصادفی جدید Z را به شکل XOR این دو متغیر تصادفی تعریف می‌کنیم.

$$Z = X \oplus Y$$

الف) توزیع متغیر تصادفی Z را بیابید.

ب) آیا Z و X مستقل هستند؟

ج) تحقق $Y=y$ به ما گزارش شده است.(یعنی مقدار $y \in \{۰,۱\}$ دانسته فرض شود). آیا Z و X مستقل هستند؟

حل.
الف)

$$Z = X \oplus Y \rightarrow Z \in \{0, 1\} \rightarrow Z \sim Bernoulli(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= P_Z(1) = P(Z = 1) \\
&= P(X \oplus Y = 1) \\
&= P(Y = 0)P(X \oplus Y = 1 | Y = 0) + P(Y = 1)P(X \oplus Y = 1 | Y = 1) \\
&= P(Y = 0)P(X \oplus 0 = 1 | Y = 0) + P(Y = 1)P(X \oplus 1 = 1 | Y = 1) \\
&= P(Y = 0)P(X = 1 | Y = 0) + P(Y = 1)P(X = 0 | Y = 1) \\
&= P(Y = 0)P(X = 1) + P(Y = 1)P(X = 0) \\
&= \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow Z \sim Bernoulli(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

ب) باید تحقیق کنیم که آیا $P(X = x, Z = z) = P(X = x)P(Z = z)$ برای هر x و z برقرار است یا معادلا $P(Z = z | X = x) = P(Z = z)$ برای هر x و z برقرار است.

$$\begin{gathered}
P_Z(0) = \tfrac{1}{2}, P_Z(1) = \tfrac{1}{2} \\
P_{Z|X}(0|0) = P(Z = 0 | X = 0) = P(X \oplus Y = 0 | X = 0) = P(Y = 0 | X = 0) = P(Y = 0) = \tfrac{1}{2} \\
P_{Z|X}(0|1) = P(Z = 0 | X = 1) = P(X \oplus Y = 0 | X = 1) = P(Y = 1 | X = 1) = P(Y = 1) = \tfrac{1}{2} \\
P(Z = 0) = P(Z = 0 | X = x) = \tfrac{1}{2} \ \ \forall x \in \{0, 1\}
\end{gathered}$$

برای $P(Z = 1)$ نیز به تساوی مشابهی می‌رسیم:

$$P(Z = 1) = P(Z = 1 | X = x) = \tfrac{1}{2} \ \ \forall x \in \{0, 1\}$$

بنابراین:

$$\rightarrow \forall x, z \ \ P(Z = z | X = x) = P(Z = z)$$

ج) در صورت دانستن $Y = y$ به وضوح X و Z از هم مستقل نیستند چون z بصورت یکتا از روی x تعیین می‌شود و بالعکس.

$$\begin{gathered}
P(Z = 0 | Y = 0) = \tfrac{1}{2} \\
P(Z = 0 | Y = 0, X = 0) = 1 \\
P(Z = 0 | Y = 0, X = 1) = 0 \\
\rightarrow P(Z = 0 | Y = 0) \neq P(Z = 0 | Y = 0, X = x) \ \ x \in \{0, 1\}
\end{gathered}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۹. (۱۰ نمره)

دو متغیر تصادفی پیوسته Y و Z را در نظر بگیرید. فرض کنید متغیر تصادفی X به احتمال p برابر با Y و به احتمال $1 - p$ برابر با Z است.
الف) نشان دهید تابع چگالی احتمال X برابر با عبارت زیر است:

$$f_X(x) = p f_Y(x) + (1 - p) f_Z(x)$$

ب) برای متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر CDF را محاسبه نمایید.

$$f_X(x) = \begin{cases} p\lambda e^{\lambda x} & if\ x < ۰ \\ (۱-p)\lambda e^{-\lambda x} & if\ x \geqslant ۰ \end{cases}$$

توجه کنید $۰ < \lambda$ و $۰ < p < ۱$

حل.
الف)

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = p\mathbf{P}(Y \leqslant x) + (۱-p)\mathbf{P}(Z \leqslant x) = pF_Y(x) + (۱-p)F_Z(x)$$
$$\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} f_X(x) = pf_Y(x) + (۱-p)f_Z(x)$$

ب) متغیرهای تصادفی Y و Z را با تابع‌های چگالی احتمال زیر در نظر بگیرید.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda y}, & if\ y < ۰ \\ ۰, & O.W \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z}, & if\ y \geqslant ۰ \\ ۰, & O.W \end{cases}$$

با توجه به اینکه $-Y$ و Z نمایی هستند، با استفاده از CDF متغیر تصادفی نمایی متغیرهای Y و Z بصورت زیر بدست می‌آید:

$$F_Y(y) = \begin{cases} e^{\lambda y}, & if\ y < ۰, \\ ۱, & if\ y \geqslant ۰, \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} ۰, & if\ z < ۰, \\ ۱ - e^{-\lambda z}, & if\ z \geqslant ۰, \end{cases}$$

$$f_X(x) = pf_Y(x) + (۱-p)f_Z(x) \to F_X(x) = pF_Y(x) + (۱-p)F_Z(x)$$
$$F_X(x) = \begin{cases} pe^{\lambda x}, & if\ x < ۰, \\ p + (۱-p)(۱ - e^{-\lambda x}), & if\ x \geqslant ۰, \end{cases}$$
$$F_X(x) = \begin{cases} pe^{\lambda x}, & if\ x < ۰, \\ ۱ - (۱-p)e^{-\lambda x}, & if\ x \geqslant ۰, \end{cases}$$

$\triangleright$

موفق باشید :)