



آمار و احتمال مهندسی

نیم سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰
مدرس: سید ابوالفضل مطهری

تمرین ششم

زمان تحویل: تا آخر روز پنجشنبه ۲۵ دی.
لطفا پاسخها به همراه نام و شماره دانشجویی در کونرا آپلود شوند.

سوال اول (۱۵ نمره)

بچه مهندس!

مهندس جوادی میخواهد مقدار q را اندازه گیری کند. از آن جایی که می داند هر اندازه گیری مقداری خطای تصادفی دارد، این کار را n بار انجام خواهد داد و میانگین این اندازه گیری ها را به عنوان تخمینی از مقدار q گزارش خواهد کرد. به طور مشخص اگر Y_i نتیجه اندازه گیری i ام باشد، فرض بر این است که داریم:

$$Y_i = q + X_i$$

که در آن X_i خطای اندازه گیری i ام است.

فرض کنید X_i ها مستقل از هم و گوسی هستند و داریم:

$$\mathbb{E}[X_i] = 0, \text{Var}[X_i] = 4$$

مهندس جوادی چند بار اندازه گیری را انجام دهد تا ۹۵٪ اطمینان داشته باشد که خطای مقدار گزارش شده، کمتر از ۰٫۱ است؟

سوال دوم (۱۵ نمره)

گوسی به امید گوسی!

فرض کنید (X_1, X_2, \dots, X_n) متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع $\mathcal{N}(\mu, \sigma_v^2)$ باشند. همچنین σ_v عددی دانسته است، اما از مقدار دقیق μ اطلاعی نداریم و تنها می دانیم که μ متغیری تصادفی با توزیع $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_m^2)$ است که پارامترهای آن، دانسته اند. تخمین ML کمیت μ را به دست آورید.

سوال سوم (۱۰ نمره)

دستگاه آبغوره گیری!

دستگاهی داریم که به ما از یک توزیع نامشخص، نمونه می دهد. از این دستگاه ۱۰۰ عدد نمونه می گیریم. بعد از مشاهده نمونه ها دیدیم که میانگین و واریانس این اعداد به صورت زیر می باشد:

$$\bar{X} = 21.32, S^2 = 27.6$$

آزمون فرضی طراحی کردیم که در آن $\alpha = 0.05$ و داریم:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20, \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$

حال به نظر شما H_0 رد می شود یا تایید می شود؟

سوال چهارم (۱۵ نمره)

نسبت بخت!

تست نسبت بخت را برای

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0, \\ H_1 : p = p_1 \end{cases}$$

و با توجه به نمونه های مستقل $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$ و این فرض که $p_0 < p_1$ در نظر بگیرید.

نشان دهید که نسبت بخت، تابعی نزولی از $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ است و به کمک آن، استدلال کنید که در هر $\text{Significance level}$ دلخواه، اگر این آزمون H_0 را برای یک سطح مشاهده شده ی Y مثلا y رد کند، آن گاه برای تمام $Y > y$ نیز رد خواهد کرد.

سوال پنجم (۱۵ نمره)

Estimation! Point

فرض کنید Y_1, Y_2, \dots, Y_n نمونه هایی از متغیر تصادفی $X \sim \text{Uniform}(\cdot, \theta)$ باشند. دو تخمین گر زیر را در نظر بگیرید:

$$\theta_1 = 2\bar{Y},$$

$$\theta_2 = \frac{n+1}{n} Y_{(n)} \quad Y_{(n)} = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

مقدار bias این دو تخمین گر را بدست آورید.
مقدار واریانس این دو تخمین گر را نیز بدست آورید.

سوال ششم (۱۵ نمره)

قلی خان بیچاره!

بیمارستانی شکایت شده است که کیفیت درمان در دو بخش از آن به شدت متفاوت است و آمار گزارش شده مبنی بر این است که میانگین حضور بیمار در بیمارستان تا بهبودی اش برای ۱۰ بیمار بررسی شده در بخش اول، ۱۲ روز است و واریانس این متغیر در نمونه بررسی شده برابر ۱ است و

میانگین این مقدار برای نمونه ۲۰ تایی از بیماران بخش دوم برابر ۱۳/۳ روز با واریانس ۳ است. مدیر بیمارستان، قلی خان، قصد ندارد این شکایت را بپذیرد. شکایت کننده از قلی خان را در فرایند شکایت یاری کنید.

- الف) مدیر برای نشان دادن یکسان بودن عملکرد دو بخش باید از چه آزمونی استفاده کند؟ این آزمون یکطرفه است یا دوطرفه؟ چرا؟
- ب) شاکی قلی خان را یاری کنید که با سطح اهمیت ۹۵٪ فرض خود را بیازماید.
- پ) شکایت کننده از بیمارستان قلی خان حداکثر با چه دقتی می تواند ادعا کند که کیفیت در درمان دو بخش یکسان نیست؟

موفق باشید.