



دانشکده مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

زمستان ۱۴۰۲

### تمرین سری اول

مدرس درس: مهدی جعفری

سررسید تحویل: جمعه ۲۵ اسفند ۱۴۰۲

**سؤال ۱** فرض کنید دو سکه داریم که یکی از آن‌ها سالم و دیگری هر دو طرفش شیر است. به تصادف یک سکه را انتخاب می‌کنیم و آن را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر ۵ بار شیر مشاهده شود، احتمال آن را بیابید که سکه انتخاب شده سکه سالم باشد.

**سؤال ۲**  $n$  ریسمان در نظر بگیرید. در هر مرحله، دو سر را از بین سرهای آزاد این ریسمان‌ها انتخاب می‌کنیم و به هم گره می‌زنیم. این کار را تا زمانی تکرار می‌کنیم که سر گره نخورده‌ای باقی نماند. احتمال آن را پیدا کنید که در نهایت یک حلقه بزرگ به طول  $n$  تشکیل شود.

**سؤال ۳** علی و محمد به نوبت به یک سری سوال پاسخ می‌دهند و علی با احتمال  $P_1$  و محمد با احتمال  $P_2$  به سوالات پاسخ صحیح می‌دهند.

- الف) برای پاسخ‌های علی به  $m$  سوال رابطه‌ای برای احتمال صحیح بودن بیابید. به این رابطه تابع جرم احتمال می‌گوییم.
- ب) اگر علی به  $m$  سوال و محمد به  $n$  سوال پاسخ داده باشند، تابع جرم احتمال برای تعداد پاسخ‌های صحیح هر دو را بیابید.
- پ) اگر یک نفر زودتر اولین پاسخ صحیح به یک سوال را بدهد برنده می‌شود. احتمال برنده شدن علی را بیابید.

**سؤال ۴** فرض کنید  $n$  مسافر، به ترتیب از شماره ۱ تا  $n$  وارد یک قطار می‌شوند. نفر اول بلیتش را گم کرده است، پس به صورت تصادفی روی یکی از صندلی‌ها می‌نشیند. پس از او، مسافران دیگر به ترتیب وارد قطار می‌شوند و اگر صندلی متناظر با شماره آنها خالی باشد روی آن می‌نشینند و اگر هم صندلی‌شان پر باشد، به صورت کاملاً تصادفی روی یکی از صندلی‌های خالی می‌نشینند. احتمال آن را بیابید که نفر آخر روی صندلی خودش بنشیند. (نکته: جواب فرم بسته دارد)

**سؤال ۵** در یک اتاق ۳۰ نفر حضور دارند. احتمال آنکه حداقل دو نفر روز تولد یکسانی داشته باشند چقدر است؟ فرض کنید که روزهای تولد اشخاص به صورت یکنواخت هستند. یعنی احتمال تولد بودن همه روزها برای یک شخص یکسان است.

**سؤال ۶** دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آنکه یکی از اعداد به دست آمده شمارنده دیگری باشد چقدر است؟

سؤال ۷ موارد زیر را اثبات کنید:

$$\text{الف) } P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$\text{ب) } P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j)$$

سؤال ۸ به یک خانواده از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی  $\Omega$  یک میدان سیگما روی  $\Omega$  گفته می‌شود اگر:

$$(۱) \quad \Omega \in \mathcal{F}$$

$$(۲) \quad A \in \mathcal{F} \rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$$

$$(۳) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

حال به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) فرض کنید  $\mathcal{F}$  یک میدان سیگما روی  $\Omega = [0, 1]$  باشد، به گونه‌ای که  $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$  به ازای  $n = 1, 2, \dots$  نشان دهید:

$$(۱) \quad \{0\} \in \mathcal{F}$$

$$(۲) \quad \forall n \in \mathbb{N} : [\frac{1}{n}, 1] \in \mathcal{F}$$

$$(۳) \quad \{\frac{1}{n} : n = 2, 3, \dots\} \in \mathcal{F}$$

$$(۴) \quad \forall n \in \mathbb{N} : (0, \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}$$

ب) فرض کنید  $\mathcal{F}$  یک میدان سیگما باشد و داشته باشیم  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ . نشان دهید:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

پ) نشان دهید اگر  $\mathcal{F}_1$  و  $\mathcal{F}_2$  میدان‌های سیگما روی  $\Omega$  باشند، آنگاه  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  هم یک میدان سیگما است.

ت) در قسمت قبل، آیا  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  لزوماً یک میدان سیگما است؟ ادعایتان را ثابت کنید.

سؤال ۹ یک کشوی قدیمی حاوی چند جوراب به دو رنگ قرمز و سیاه است. اگر دو جوراب بصورت تصادفی از کشو بیرون کشیده شود، احتمال آنکه این دو جوراب، قرمز رنگ باشند  $\frac{1}{4}$  است.

الف) حداقل تعداد جوراب‌های داخل کشو چقدر باید باشد؟

ب) اگر بدانیم که تعداد جوراب‌های سیاه زوج است، حداقل تعداد جوراب‌ها چقدر باید باشد؟

سؤال ۱۰ (امتیازی) برای تشویق Francisco Ruiz پس از قهرمانی او در مسابقات 8 Ball Pool 2022، برای تکرار قهرمانی به او دو برنامه پیشنهاد شده است. هدف Francisco این است که ۲ برد پیاپی (متوالی) کسب کند. تنها در این صورت است که به جایزه نقدی دست پیدا می‌کند. او در این دو برنامه، با یک رقیب ساده (که رقیب تمرینی او است و آن را با  $S$  نشان می‌دهیم) و یک رقیب حرفه‌ای (که آن را با  $P$  نمایش می‌دهیم) روبرو می‌شود. بدیهی است که احتمال برد او در هر بازی مقابل رقیب تمرینی، از رقیب حرفه‌ای بیشتر است. یک برنامه پیش روی او، برنامه بازی  $SPS$  است و برنامه دیگر  $PSP$  است. (مجدداً اشاره می‌شود که Francisco باید از این ۳ بازی پیش رو، ۲ برد متوالی کسب کند). به نظر شما، Francisco باید کدام برنامه بازی را برای مسابقات پیش روی خود انتخاب کند؟ برای انتخاب خود دلیل بیاورید و ثابت کنید.

موفق باشید