



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

۱ تیر ۱۴۰۰

آمار و احتمال مهندسی

امتحان پایان ترم

استاد: نعیمه امیدوار

- وقت امتحان ۱:۴۵ ساعت است.
- امتحان کتاب‌باز، جزوه‌باز، اینترنت‌بسته و مشورت‌بسته است! (:
- تمام پاسخ‌ها باید همراه با استدلال باشد. آنچه در کلاس اثبات شده نیاز به اثبات ندارد.
- امتحان ۲۱ نمره دارد که ۱ نمره‌ی آن اضافه است.

سؤال ۱ اگر X_1, X_2 و X_3 سه متغیر تصادفی مستقل با توزیع برنولی با پارامتر p باشند، متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}Y_1 &= \min(X_1, X_2), \\Y_2 &= \min(X_1, X_3), \\Y_3 &= \min(X_2, X_3), \\Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3\end{aligned}$$

میانگین و واریانس متغیر Y را بیابید.

بارم: ۳ نمره

سؤال ۲ تابع توزیع توأم چگالی احتمال دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+2y) & x \in [0, 1], y \in [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

۱. مقدار ثابت k را حساب کنید.

۲. توزیع حاشیه‌ای X و Y را به دست آورید. آیا این دو متغیر تصادفی از هم مستقل‌اند؟

۳. احتمال $X < \frac{1}{2}$ به شرط $y = \frac{1}{2}$ را به دست آورید.

۴. امید ریاضی و واریانس X را به شرط $Y = y$ محاسبه کنید.

بارم: ۶ نمره

سؤال ۳ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با ضریب همبستگی ρ باشند. نشان دهید

$$\mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)] \leq (1 - \rho^2)\text{Var}(Y).$$

بارم: ۴ نمره

سؤال ۴ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نرمال مستقل باشند: $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ و $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$. دو متغیر تصادفی Z و W را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $Z = X + Y$ و $W = X - Y$.

الف) تابع چگالی احتمال مشترک Z و W را محاسبه کنید.

ب) با توجه به قسمت قبل، شرایطی را برای امیدریاضی و واریانس متغیرهای تصادفی X و Y بیابید که Z و W مستقل از هم شوند.

بارم: ۴ نمره

سؤال ۵ علی در خانه اشباح گیر افتاده است! این خانه در کل n اتاق دارد و اتاق i ام دارای 2^i در می‌باشد. وقتی علی در اتاق i باشد، با احتمال برابر یک در را باز می‌کند و داخل آن می‌رود. اما از بخت بد علی، تنها یکی از این درها به اتاق $i + 1$ ختم می‌شوند و بقیه درها او را به اتاق i باز می‌گردانند. علی در ابتدا در اتاق 1 قرار دارد و برای خارج شدن از خانه باید از اتاق n خارج شود. به طور متوسط او باید چند در را باز کند تا از این خانه خارج شود؟

بارم: ۴ نمره

موفق باشید