



نکات مهم

- پاسخ‌های نظری خود را در قالب یک فایل pdf با اسم `HW#_[STD-Num]` در بخش مختص به خود در کوئرا آپلود کنید. پاسخ‌های عملی را نیز با نامی مشابه، ولی با فرمت zip در بخش مختص خود آپلود کنید.
- تنها سوالات ستاره‌دار تمرین، نیاز به تحویل دارند. نوشتن پاسخ‌های نظری، هم به صورت تایپی و هم دست‌نویس، مقبول است. پاسخ‌های عملی باید در زبان R نوشته شوند.
- سوالات پرسیده شده در خصوص تمرین در شبکه‌های اجتماعی، به هیچ عنوان پاسخ داده نخواهند شد؛ تنها مکان مجاز رفع اشکال در خصوص تمرین، بخش پرسش‌ها و پاسخ‌ها در کوئرا است.
- زمان تحویل تمرین، به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد، بنابراین لازم است که زمان خود را برای انجام تمرین مدیریت کرده و آن را به روزهای پایانی موکول نکنید.
- امکان بارگذاری تمرین در کوئرا تا ۷۲ ساعت پس از ددلاین تمرین وجود دارد، اما به ازای هر ساعت تاخیر، یک درصد از نمره نهایی تمرین را از دست خواهید داد. دقیقه‌ها و ثانیه‌ها، رو به بالا گرد خواهند شد؛ مثلاً، یک ساعت و نیم تاخیر، معادل دو ساعت تاخیر محسوب می‌شود.
- در طول ترم، ۲۴۰ ساعت کوپن تاخیر خواهید داشت و با استفاده از آن‌ها، می‌توانید بدون کسر نمره، از تاخیرها استفاده کنید. جریمه‌ی تاخیرها، از تمرینی محاسبه می‌شوند که در آن، کوپن‌ها به اتمام رسیده باشند. نمره‌ی امتیازی برای اشخاصی که مجموع تاخیرهای ایشان در کل ترم، کمتر از ۲۴۰ ساعت باشد، به هیچ عنوان در نظر گرفته نمی‌شود.
- مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه هم می‌شود، اما هر دانش‌جو موظف است تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده، باید توسط خود دانش‌جو نوشته شده باشد. در صورت کشف اولین مورد تقلب هر دانش‌جو، نمره‌ی همان تمرین وی، صفر در نظر گرفته شده و در صورت کشف دومین مورد تقلب هر دانش‌جو، منفی نمره‌ی کل تمرین‌ها به وی تعلق خواهد گرفت. برای کسب اطلاعات بیشتر در خصوص آیین‌نامه‌ی مشورت و تقلب، می‌توانید به بخش مربوطه در ویکی دانشکده مراجعه کنید. لازم به ذکر است که این جرایم به هیچ عنوان بخشیده نخواهند شد.

سوالات نظری

مسئله‌ی ۱. زنگ اثبات *

با استفاده از اصول موضوعه احتمال، حکم‌های زیر را برای پیشامدهای دلخواه A_1 و \dots و A_n اثبات کنید.

الف) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (ب) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

ج) $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$

مسئله‌ی ۲. به امید مجموعی زوج *

یک کیسه داریم که تعدادی توپ درون آن قرار دارد. روی هر توپ یک عدد n رقمی با ارقام ۲ و ۳ و ۴ نوشته شده است. هر عدد دقیقاً روی یک توپ نوشته شده است. به صورت شانسی یک توپ از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن که مجموع ارقام عدد روی توپ زوج باشد را به دست آورید.

مسئله‌ی ۳. هواپیما

۲۰۰ نفر به ترتیب وارد هواپیمایی با دقیقاً ۲۰۰ صندلی می‌شوند. شماره‌ی صندلی هر نفر، در بلیت آن فرد مشخص شده است. نفر اول بلیت خود را گم کرده است، پس به صورت شانسی بر روی یک صندلی می‌نشیند. افراد بعدی اگر صندلی خودشان خالی باشد، در صندلی خود می‌نشینند و در غیر این صورت، یک صندلی را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنند. احتمال آن که نفر آخر بر روی صندلی خودش بنشیند را بیابید.

مسئله‌ی ۴. صحیح یا غلط *

صحیح یا غلط بودن عبارات زیر را مشخص کنید، موارد صحیح را اثبات کرده و برای موارد نادرست، مثال نقضی مناسب بیاورید.

الف) هر پیشامدی به خود وابسته است.

ب) اگر پیشامدهای M و N مستقل بوده و پیشامدهای M و O نیز مستقل باشند، آن‌گاه پیشامدهای M و $O \cup N$ مستقل خواهند بود.

پ) اگر پیشامدهای M و N مستقل بوده و پیشامدهای N و O نیز مستقل باشند، آن‌گاه پیشامدهای M و O مستقل خواهند بود.

مسئله‌ی ۵. هوشمندترین ساعت *

یکی از شرکت‌های مشهور بین‌المللی در حوزه‌ی فناوری، به تازگی اقدام به معرفی هفتمین سری از ساعت‌های هوشمند محبوب خود کرده است. حسن که اهل شهر «فن‌آباد» است، بعد از مشاهده‌ی رویداد آنلاین رونمایی از این ساعت هوشمند (و نیز تعدادی دستگاه جذاب دیگر)، بسیار به آن علاقه‌مند شد و تصمیم به خرید آن گرفت. اما پس از چک کردن وب‌سایت شرکت، متوجه شد که به دلیل تقاضای بالای خریداران، تمام ساعت‌های مچی هوشمند وارد شده از آن نوع به نمایندگی‌های فن‌آباد، به مردم فروخته شده‌اند و تنها یک عدد از آن باقی مانده است. شرکت مذکور، دو نمایندگی در شهر فن‌آباد دارد. فرض کنید احتمال آن که آن یک عدد ساعت هوشمند در نمایندگی دوم باشد، سه برابر احتمال وجود آن در نمایندگی اول است.

مشکل دیگر پیش روی حسن، آن است که افراد دیگری نیز مشابه او، متوجهی وجود تنها آن یک ساعت هوشمند در فن‌آباد شده‌اند و به سرعت در حال آمدن به نمایندگی‌ها هستند! از این رو، فرض کنید اگر حسن به نمایندگی اول برود، تنها به احتمال $\frac{1}{4}$ و اگر به نمایندگی دوم برود، تنها به احتمال $\frac{1}{8}$ موفق به خریداری تنها موجودی باقی‌مانده‌ی این ساعت هوشمند خواهد شد.

الف) برای آن‌که احتمال موفقیت حسن در خریداری این ساعت هوشمند بیش‌تر باشد، توصیه می‌کنید حسن به کدام نمایندگی شرکت مراجعه کند؟ (فرض کنید حسن تنها وقت کافی برای مراجعه به یکی از نمایندگی‌ها را دارد)

ب) اگر حسن به نمایندگی دوم رفته و موفق به خریداری این دستگاه نشود، چه قدر احتمال داشته که این دستگاه در نمایندگی دوم موجود بوده و فرد خوش‌شانسی قبل از حسن توانسته باشد آن را بخرد؟

مسئله‌ی ۶. یازدهمین پنجره

ویندوز ۱۱ به تازگی عرضه شده و شرکت تولیدکننده، شما را استخدام کرده است تا در تحلیل داده‌های مربوط به میزان به‌روزرسانی کاربران به این نسخه از ویندوز، به واحد بازاریابی شرکت کمک کنید. یکی از نیازمندی‌های ویندوز ۱۱ برای نصب شدن، وجود ماژول TPM 2.0 در دستگاه است که متأسفانه سبب شده است تا تعداد زیادی از کاربران نتوانند به روش معمول، سیستم عامل خود را به ویندوز ۱۱ ارتقا دهند و مجبور شوند از روش‌های جایگزین سخت‌تر استفاده کرده و یک clean install از ویندوز انجام دهند (برای کسب اطلاعات بیش‌تر در خصوص این تصمیم، می‌توانید به این لینک مراجعه کنید).

فرض کنید می‌دانیم تنها ۱۰ درصد کاربران ویندوز در جهان، رایانه‌ای مجهز به TPM 2.0 دارند. از تحلیل داده‌های گردآوری شده توسط شرکت تولیدکننده، به دست آمده است که احتمال موفقیت کاربران دارای رایانه‌ی مجهز به TPM 2.0 در نصب ویندوز ۱۱ برابر ۹۵ درصد و احتمال موفقیت کاربران دارای رایانه‌ی فاقد TPM 2.0 در نصب ویندوز ۱۱ برابر ۱۰ درصد است. اگر کاربری موفق به نصب ویندوز ۱۱ شده باشد، با چه احتمالی، رایانه‌ای مجهز به TPM 2.0 داشته است؟

سوالات عملی

مسئله ۷. گرفتن جایزه *

شما در یک بازی شرکت کرده‌اید؛ در این بازی، سه عدد در، در مقابل شما وجود دارد. پشت یک در، جایزه است و پشت درهای دیگر خالی است. شما یک در را انتخاب می‌کنید - به طور مثال، در شماره ۱ - و می‌زبان که می‌داند پشت درها چه چیزی وجود دارد، در دیگری را باز می‌کند - مثلاً شماره ۳ - که پشتش خالی است؛ سپس، وی به شما می‌گوید: «آیا می‌خواهید در شماره ۲ را انتخاب کنید؟» اگر از استراتژی انتخاب اولین در تصادفی و سپس تعویض هر باره‌ی در استفاده کنید، احتمال برنده شدن جایزه چه قدر است؟ توجه داشته باشید که می‌زبان همیشه دری را باز می‌کند که شما انتخاب نکرده‌اید و همیشه یک در که پشتش خالی است را نشان می‌دهد. این مسئله را به کمک زبان R شبیه‌سازی کرده و پاسخ را به کمک برنامه‌نویسی بیابید.

مسئله ۸. کار با داده و نمودار *

برای این سوال یک فایل cars در اختیارتان قرار گرفته است که اطلاعاتی مانند MPG (مسافت طی شده با یک گالن بنزین)، Cylinders (تعداد سیلندرها)، Displacement (حجم موتور)، Horsepower (اسب بخار)، Weight (وزن)، Automatic (اتوماتیک بودن)، Acceleration (شتاب)، Model (مدل) و Origin (اصالت) ماشین‌ها را در اختیار شما قرار می‌دهد. هر سطر از این داده، شامل اطلاعات یک ماشین است. با استفاده از این مجموعه داده، موارد خواسته شده را بیابید.

الف) پنج تا از سبک‌ترین ماشین‌ها را به ترتیب چاپ کنید.

ب) احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$$p(\text{Origin} = \text{US})$$

$$p(\text{Cylinders} = 6)$$

$$p(\text{Weight} > 3500)$$

$$p(\text{Cylinders} = 6 | \text{Origin} = \text{US})$$

$$p(\text{Weight} > 3500 | \text{MPG} = 14)$$

ج) نموداری رسم کنید که ستون عمودی آن نشان‌دهنده‌ی اسب بخار (Horsepower) و ستون افقی آن نشان‌دهنده‌ی مسافت طی شده با یک گالن بنزین (MPG) باشد، به طوری که رنگ در نظر گرفته شده برای هر ماشین دنده‌ای (Manual) در نمودار، قرمز و برای هر ماشین اتوماتیک (Automatic) در نمودار، آبی باشد.

موفق باشید! (: