



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

بهار ۱۴۰۲

آمار و احتمال مهندسی

تمرین سری دوم (استقلال، احتمال شرطی، متغیر تصادفی گسسته)

موعده تحویل: دوشنبه ۱۴ فروردین ۱۴۰۲

مدرس: مهدی جعفری

سؤال ۱ اگر $Y = g(X)$ ثابت کنید:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} + \dots = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

در حالی که می‌دانیم x_i ها ریشه هستند یعنی:

$$y = g(x_1) = \dots = g(x_i) = \dots$$

سؤال ۲ مصیب در حال رقابت با ایلان ماسک برای خرید توئیتراست. در این رقابت، پول اولیه‌ی ایلان ماسک برای خرید توئیترا، بی‌نهایت است و پول اولیه‌ی مصیب، n دلار. مصیب یک بازی مطرح می‌کند، به این شکل که در هر مرحله یا یک دلار می‌برد، یا یک دلار می‌بازد. در این بازی، احتمال بردن یک دلار در هر مرحله، p و احتمال از دست دادن ۱ دلار، $1 - p$ است. شرط برد مصیب در این بازی نیز این است که m دلار پول جمع‌آوری کنید و شرط باختن وی، این است که همه‌ی پول خودش را از دست دهد. احتمال برد و باخت مصیب را وقتی که m بسیار بزرگ باشد، محاسبه کنید.

سؤال ۳ پس از رقابت قبلی، این بار کاپیتان هم به جمع مصیب و ایلان ماسک برای رقابت پیوست، اما این بار مصیب یک بازی متفاوت تعریف می‌کند. در این بازی، هر بار ۲ نفر از ۳ نفر انتخاب می‌شوند تا یک مسابقه انجام بدن در راند اول. سپس در راند دوم، برنده‌ی راند اول با نفر سومی که انتخاب نشده بود برای راند قبل، رقابت می‌کند. برنده‌ی راند دوم بازی، برنده‌ی کل است. با توجه به این که همه‌ی مسابقه‌ها مستقل هستند و بازیکن i با احتمال $\frac{2}{i+j}$ در یک راند مسابقه مقابل بازیکن j برنده می‌شود،

الف

احتمال این که کاپیتان برنده‌ی بازی شود را محاسبه کنید.

ب

حالا با فرض این که کاپیتان برنده‌ی بازی شده است، احتمال این که کاپیتان در راند اول بازی رقابت نکرده است را محاسبه کنید.

سؤال ۴ بعضی وقت‌ها حساب کردن مقدار احتمال با استفاده از رابطه‌ی اصلی توزیع از نظر محاسباتی کاری سخت و غیرممکن است. برای همین بعضی وقت‌ها نیاز داریم تا تقریب‌هایی از احتمال مورد نظر را به‌گونه‌ای بدست آوریم تا هم محاسبات کمتری انجام داده و هم این که مقدار تقریب زده شده از مقدار واقعی دور نباشد. در این سوال می‌خواهیم توزیع دو جمله‌ای را با یکی از توزیع‌های نرمال و پواسون تقریب بزنیم. توضیح دهید در چه مواقعی می‌توانیم از هر کدام از این دو توزیع برای تقریب مورد بحث استفاده کرد. سپس سوالات بخش الف و ب، از این تقریب‌ها استفاده کنید و دلیل انتخاب تقریبی که به کار بردید را نیز شرح دهید.

الف

یک شیرینی‌پز برای تهیه‌ی شیرینی گردویی ۵۰۰ قطعه گردو را با خمیر مخلوط می‌کند و به این ترتیب ۱۰۰ شیرینی گردویی می‌پزد. اگر به صورت رندوم یک شیرینی را برداریم، چقدر احتمال دارد در این شیرینی بیش از ۴ قطعه گردو وجود داشته باشد؟

ب

با توجه به آمارهای جهانی، تعداد خانم‌ها و آقایان کل کشور برابر است. حالا احتمال‌های زیر را با استفاده از تخمین مناسب، حساب کنید.

i

فرض کنید $n = 10$ آدم در یک خیابان هستند. احتمال این‌که حداقل ۶ نفر از آن‌ها خانم باشند، چقدر است؟

ii

اگر $n = 1000$ باشد، احتمال این‌که حداقل ۶۰۰ نفر از آن‌ها آقا باشند، چقدر است؟

iii

اگر بخواهیم n نمونه بگیریم که در آن‌ها به احتمال ۰.۹۵، ۱۵ آقا وجود دارند، n مورد نظر باید چند باشد؟

سؤال ۵ دو سکه داریم که با پرتاب اولی به احتمال ۰.۵ شیر و به احتمال ۰.۵ خط می‌آید و با پرتاب دومی به احتمال ۰.۶ شیر ظاهر می‌شود و به احتمال ۰.۴ خط. یک سکه را شانسی برداشته‌ایم و پس از ۳ بار پرتاب کردن آن، به ترتیب به نتایج خط-شیر-شیر دست یافته‌ایم. احتمال این‌که پرتاب چهارم خط بیاید چقدر است؟

سؤال ۶ در یک بازی، شهلا و مهلا هر کدام به صورت نوبتی یک جفت تاس می‌اندازند. شهلا در صورتی برنده می‌شود که در یکی از این پرتاب‌ها، مجموع اعداد دو تاسش ۶ شود قبل از این‌که مهلا به مجموع ۷ برسد. مهلا هم وقتی برنده می‌شود که به مجموع ۷ برسد، قبل از اینکه شهلا به مجموع ۶ برسد. اگر شهلا بازی را شروع کند، کدام گزینه درست است؟ (شماره گزینه مورد نظر را بنویسید کافی است).

۱. احتمال برنده شدن شهلا بیشتر است.
۲. احتمال برنده شدن مهلا بیشتر است.
۳. احتمال برد هر دو برابر است.

سؤال ۷ طراح سوال قبل، می‌خواهد بداند با توجه به تستی بودن آن سوال، چقدر احتمال دارد فردی که جواب درست را انتخاب کرده است، واقعا سوال را فهمیده باشد و جواب را بداند. با توجه به تعطیلات عید و هوای خواب‌آور بهاری، وی احتمال می‌دهد یک دانشجو با احتمال ۰.۵ واقعا وقت گذاشته و سوال را فهمیده و حل کرده است. حالت دوم این است که با احتمال ۰.۲ یکی از ۳ گزینه را حذف کرده است و بین دو گزینه باقی‌مانده سکه انداخته است. در غیر این صورت ممکن است هر کدام از سه گزینه را با احتمال برابر حدس بزند. از آنجایی که طراح می‌خواهد دانسته‌های دانشجو را بسنجد نه قدرت حدس زدنشان را، به وی کمک کنید که جواب سوالش را پیدا کند. (اینکه اگر فردی جواب درست را انتخاب کرده است، احتمال اینکه واقعا جواب را بداند چقدر است؟)

سؤال ۸ از آن‌جایی که احتمال بدست آمده در سوال قبل چندان مورد قبول نبود، طراحان تمرین از خیر تستی بودن سوال گذشتند. لطفا راه حل کامل خود برای سوال ۶ را بنویسید!

سؤال ۹ سکه‌ای را در نظر بگیرید که با احتمال p رو و با احتمال $1 - p$ پشت می‌آید. q_n را احتمال زوج بار رو آمدن در n پرتاب مستقل از هم این سکه در نظر بگیرید. q_n را بدست آورید. (راهنمایی: ابتدا فرمولی بازگشتی برای q_n برحسب p و q_{n-1} بدست آورید.)

موفق باشید