$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 1 - 1/x & x > 1 \\ 0 & x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(3X^2 + a \leqslant y)$$

$$= P\left(X^2 \leqslant \frac{y-a}{3}\right) = \begin{cases} P\left(-\sqrt{\frac{y-a}{3}} \leqslant X \leqslant \sqrt{\frac{y-a}{3}}\right) & y \geqslant a \\ 0 & y < a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_X\left(\sqrt{\frac{y-a}{3}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-a}{3}}\right) & y \geqslant a \\ 0 & y < a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{3}{y-a}} & y > a+3 \\ 0 & y \leqslant a+3 \end{cases} & y \geqslant a \\ 0 & y \leqslant a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{3}{y-a}} & y > a+3 \\ 0 & y \leqslant a+3 \end{cases}$$

$$\rightarrow f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \partial/\partial y \left(1 + (-\sqrt{3})(y-a)^{-1/2}\right)$$

$$= \begin{cases} (\sqrt{3}/2)(y-a)^{-3/2} & y > a+3 \\ 0 & y \leqslant a+3 \end{cases}$$

الف)

$$E\left[\frac{1}{Y}\right] = E\left[\frac{1}{g(x)}\right] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{g(x)} \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3x^2} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{3x^4}\,dx = \left[-\frac{1}{9}x^{-3}\right]_1^{+\infty} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

ب)

$$E\left[\frac{1}{Y}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y} \cdot f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{y}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(y)^{-3/2}\,dy$$

$$= \int_{3}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y^{-5/2}\,dy = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y^{-3/2}\right]_3^{+\infty}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times 3^{-3/2} = \boxed{1/9}$$

اگر رقم پیشنهادی را x در نظر بگیریم، x باید بین ۱۸۰ تا ۲۳۰ میلیون باشد.

حال ۲ حالت وجود دارد: ۱) شما برنده شوید ← سود شما: $x-200$

احتمال: $\dfrac{230-x}{230-180}$

۲) بازنده شوید ← سود: ۰

$\longrightarrow$ امید ریاضی سود: $(x-200)\cdot\dfrac{230-x}{50}=\dfrac{1}{50}\left(-x^2+430x-46000\right)=g(x)$

مشتق‌گیری از g و برابر گذاشتن با صفر:

$$g'(x)=\frac{1}{50}\left(-2x+430\right)=0$$

$$\longrightarrow \underline{x=215}$$

$$g(x)=(215-200)\cdot\frac{(230-215)}{50}=\underline{4/5}$$

۴

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \infty \rightarrow$$ نیست.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot e^{-|x|}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$ هست.

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{+x}}{2}\,dx + \int_0^{x} \frac{e^{-x}}{2}\,dx, & x \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{+x}}{2}\,dx, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-e^{-x})\Big|_0^{x}, & x \geq 0 \\ e^{x}/2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad = \begin{cases} 1 - e^{-x}/2 & x \geq 0 \\ e^{x}/2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = \int_1^{e} \frac{1}{x}\cdot dx = \ln(x)\Big|_1^{e} = 1 \rightarrow$$ هست

$$H_X(x) = \int_{-\infty}^{x} h_X(t)\,dt = \begin{cases} 1 & x > e \\ \ln(x) & e > x > 1 \\ 0 & 1 > x \end{cases}$$

X : تعداد دفعات لازم تاس انداختن برای آنکه یا ۲ شیر بیاید یا ۲ خط .

$P(X=0)=0$

$P(X=1)=0$

$P(X=2)=0.4^2+0.6^2=0.52$

$P(X=3)=1-P(X=2)$ $\rightarrow$ اگر با $X=2$ شرط لازم برقرار نشده باشد قطعا در $X=3$ برآورده می‌شود . چون در این حالت حتماً یا از شیر ۲ تا داریم یا از خط (به صورت متوالی)

$=0.48$

$\rightarrow E[X]=2\times 0.52+3\times 0.48$

$= \underline{\underline{2.48}}$

الف) کمترین مقدار T ← 0

بیشترین مقدار T ← $\binom{n}{3}$

(در صورتی که همه با هم دست داده باشند)

البته همه اعداد این بین قابل دستیابی نیستند؛

← به طور مثال اگر $T=\binom{n}{3}=m$ باشد، دیگر امکان ندارد $T=m-1$.

به دلیل وابستگی مثلث ها به همدیگر.

ب) متغیر تصادفی $X_{i,j,k}$ را تعریف می‌کنیم که در صورتی که h_i, h_j, h_k یک سه تایی باشند، 1 است و در غیر این صورت صفر است.

طبق تعریف → $$T=\sum_{1\le i<j<k\le n} X_{i,j,k}$$

$$E[T] = E\left[\sum_{1\le i<j<k\le n} X_{i,j,k}\right]$$

خطی بودن امید ریاضی $$= \sum_{1\le i<j<k\le n} E[X_{i,j,k}]$$

امید ریاضی هرکدام از $X_{i,j,k}$ ها، برابر است با:

$$P(X_{i,j,k}=1) = \underline{0.6^3}$$

$$\rightarrow \underline{E[T]=\binom{n}{3}\times 0.6^3}$$

* نکته: متغیرهای $X_{i,j,k}$ به هم وابستگی دارند، اما به دلیل اینکه امید ریاضی در جمع می‌تواند پخش شود، می‌توانند از هم جدا شوند و به راحتی محاسبه شوند.