دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی زمستان ۱۳۹۸

پاسخ‌نامه تمرین سری اول (اصول موضوعه احتمال، احتمال شرطی و استقلال)

مدرس: نعیمه امیدوار موعد تحویل: یک‌شنبه ۱۸ اسفند ۱۳۹۸

سؤال ۱ فرض کنید یک جایگشت تصادفی از تمام ۲۶ حرف کوچک الفبای انگلیسی تولید می‌کنیم. احتمال هر یک از موارد زیر را به همراه استدلال (راه حل) بیابید.

آ) ترتیب الفبایی تمامی 10 حرف اول الفبا رعایت شده باشد. مثلا a قبل از b آمده باشد؛ اما لزومی ندارد که دقیقا b بلافاصله بعد از a بیاید.

ب) حرف a اولین حرف جایگشت و حرف z آخرین حرف جایگشت باشد.

ج) حروف a و z در کنار هم بیایند. (بدون فاصله)

د) حروف a و b در کنار یکدیگر نیایند.

ه) بین a و z حداقل 23 حرف دیگر قرار داشته باشد.

و) حرف z هم از a و هم از b دیرتر ظاهر بشود.

پاسخ ۱ پیش از حل بخش‌های مختلف توجه کنید که تعداد کل جایگشت‌ها $26!$ است. با توجه به این موضوع سراغ حل سوال می‌رویم.

آ) توجه کنید که 10 حرف اول الفبا در کل $10!$ جایگشت مختلف بین خودشان دارند که تنها در یکی از آن ها ترتیب الفبایی به طور کامل رعایت شده است. از طرفی در این قسمت از سوال، این مسئله که سایر حروف چگونه در میان این 10 حرف ظاهر شوند، اهمیتی ندارد زیرا برای تمامی $10!$ حالت قرارگیری ده حرف اول، تعداد حالات قرارگیری سایر حروف برابر است. پس جواب این بخش $\frac{1}{10!}$ است.

ب) با مشخص کردن جایگاه این دو حرف، برای سایر حروف $24!$ جایگشت وجود دارد. پس جواب این قسمت $\frac{24!}{26!} = \frac{1}{650}$ است.

ج) در این بخش ما می‌توانیم دو حرف a و z را به هم متصل کرده و به عنوان یک واحد در نظر بگیریم و فرض کنیم که میان 25 شی مختلف می‌خواهیم جایگشت بزنیم. فقط باید توجه کنیم که دو حرف گفته شده، خود 2 جایگشت متفاوت az و za دارند پس جواب این قسمت برابر است با: $\frac{2\times 25!}{26!} = \frac{1}{13}$

د) این قسمت سوال در اصل حالت متمم قسمت قبل محسوب می‌شود و تنها تفاوت آن این است که به جای z حرف b نوشته شده که در جواب آن تغییری ایجاد نمی‌کند. جواب این قسمت برابر است با: $1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

ه) شرط گفته شده در سوال به 6 صورت مختلف می‌تواند اتفاق بیفتد. $zx^{23}ax$ - $ax^{23}zx$ - $xzx^{23}a$ - $xax^{23}z$ - $zx^{24}a$ - $ax^{24}z$ که در این جا منظور از x هر یک از حروف دیگر است (طبیعتا هر x هم با سایر x ها فرق دارد). بدین ترتیب در کل $24!$ حالت برای جایگشت‌های سایر حروف داریم و 6 حالت هم برای نحوه قرارگیری آن‌ها، پس جواب این سوال برابر است با: $\frac{6\times 24!}{26!} = \frac{3}{325}$

و) حروف a و b و z کلا 6 جایگشت مختلف دارند که در ۲ تا از آن ها z بعد از دو حرف دیگر ظاهر می‌شود. این که حروف دیگر در میان این سه حرف به چه شکلی ظاهر می شوند، در جواب ما اثرگذار نیست. پس جواب این بخش $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ است.

سؤال ۲ احتمال این را بیابید که در رشته‌های متشکل از 0 و 1 به طول $n \geq 4$ که به طور تصادفی تولید شده اند، دقیقا دو بار عبارت: 01 قرار داشته باشد. یعنی برای یک n مشخص و ثابت، فرمولی برای محاسبه این احتمال به همراه استدلال درستی آن ارائه بدهید. به عنوان مثال، برای $n = 5$ تعداد این رشته ها برابر 6 است. $10101 - 00101 - 01101 - 01001 - 01011 - 01010$

پاسخ ۲ برای حل این سوال طبیعتا باید تعداد رشته‌هایی که فرم مد نظر ما را دارند، پیدا کنیم.
ایده اصلی حل این سوال در تشخیص نحوه و فرمت خاص عباراتی است که سوال از ما می‌خواهد. با کمی دقت می‌توان فهمید که فرمت این اعداد باید به صورت زیر باشد:

$$\underbrace{111...}_{x_1}\underbrace{000...}_{x_2}\underbrace{111...}_{x_3}\underbrace{000...}_{x_4}\underbrace{111...}_{x_5}\underbrace{000...}_{x_6}$$

که در آن x_i ها بیانگر تعداد ارقام هستند و داریم: $x_1 \geq 0$، $x_2 \geq 1$، $x_3 \geq 1$، $x_4 \geq 1$، $x_5 \geq 1$ و $x_6 \geq 0$
و به عنوان معادله اصلی تعداد آنان هم داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = n$$

با این فرمت گفته شده، دقیقا دو بار عبارت 01 ایجاد شده و امکان سایر تغییرات و آزادی عمل سایر بخش‌ها هم به طور کامل بدون نقض شدن شرط اصلی مسئله برقرار خواهد بود.
با کم کردن ۴ واحد از سمت راست می توانیم این معادله را به فرم زیر در بیاوریم:

$$x_1 + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6 = n - 4$$

که در آن تمامی جملات بزرگتر مساوی ۱ هستند. به نوعی ما $x_i' = x_i - 1$ را به ازای $i = 2, 3, 4, 5$ تعریف کرده ایم.
از ریاضیات گسسته می دانیم که جواب معادله به فرم

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = m$$

که در آن $x_i \geq 0$ برابر $\binom{m+k-1}{k-1}$ است. پس در مورد معادله این سوال جواب

$$\binom{n-4+6-1}{6-1} = \binom{n+1}{5}$$

است.
از آن جایی که این سوال احتمال وقوع این رخداد را از ما می خواهد، باید عدد بدست آمده در بالا را بر تعداد کل رشته‌های n رقمی متشکل از 0 و 1 تقسیم کنیم. پس احتمال مدنظر برابر است با:

$$P(E) = \frac{\binom{n+1}{5}}{2^n}$$

سؤال ۳ از بین تمام اعداد دودویی 8 بیتی یکی را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه دارای سه صفر متوالی و یا چهار یک متوالی باشد را بدست آورید.

پاسخ ۳ به صورت زیر ابتدا تعداد حالاتی که 3 عدد صفر متوالی داشته باشیم را محاسبه می‌کنیم. سپس تعداد حالات داشتن 4 یک متوالی را بدست آورده و با استفاده از اصل شمول و عدم شمول احتمالات خواسته شده را بدست می‌آوریم.
داشتن سه صفر متوالی:
نقطه شروع این سه صفر می‌تواند از بیت اول تا ششم باشد. برای هر حالت بررسی می‌کنیم: بیت اول: به صورت $000xxxxx$ می‌شوند که 32 حالت به وجود می‌آید. بیت دوم: به صورت $1000xxxx$ که 16 حالت به وجود می‌آید. از بیت سوم به بعد هم مانند بیت دوم می‌باشد. $x1000xxx$ که در کل 112 حالت می‌شود که این حالات تکراری هستند: $00010000, 00010001, 00001000, 00011000, 10001000$ و تعداد حالات را به 107 عدد می‌رساند.
برای چهار یک متوالی نیز (مانند روش بالا) 48 حالت به وجود می‌آید که حالات زیر هم شامل سه صفر متوالی و هم چهار یک متوالی می‌باشد که آن‌ها را دو بار شمرده‌ایم:

$$11110000, 11110001, 11111000, 01111000, 00011110, 00011111, 00001111, 10001111$$

و در کل تعداد حالات مطلوب را به $107 + 48 - 8 = 147$ می‌رساند. از آنجایی که تعداد کل حالات برابر با 256 بوده، احتمال این پدیده برابر با $\frac{147}{256}$ است.

سؤال ۴ یک تاس داریم که با احتمال برابر اعداد یک تا شش را نمایش می‌دهد. همچنین یک تاس دیگر داریم که شماره i را با احتمال $\frac{i}{21}$ نمایش می‌دهد. ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) یکی از آنها را به صورت رندم انتخاب می‌کنیم و 2 بار پرتاب می‌کنیم. هر یک از وقایع زیر را در نظر بگیرید:

آ) دو بار یک می‌آید.

ب) یک بار 2 و یک بار 4 می‌آید.

در هر کدام از دو حالت بالا مشخص کنید اگر تاس را یکبار دیگر پرتاب کنیم، با چه احتمالی 6 می‌آید؟

پاسخ ۴ آ) واقعه C را شش آمدن در پرتاب سوم تاس، واقعه B را دوبار یک آمدن در دو پرتاب اول تاس و واقعه A را انتخاب تاس اول تعریف می‌کنیم:

$$P(C|B) \overset{\text{قانون احتمال کل}}{=} P(C\cap A|B)+P(C\cap A'|B) \overset{\text{احتمال شرطی}}{=} P(C|A\cap B)P(A|B)+P(C|A'\cap B)P(A'|B) = \frac{1}{6}\times P(A|B)+\frac{6}{21}\times P(A'|B)$$

$$P(A|B) \overset{\text{قضیه بیز}}{=} \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}\times 0.5}{P(B|A)*P(A)+P(B|A')*P(A')} = \frac{\frac{1}{36}\times 0.5}{\frac{1}{36}\times 0.5+\frac{1}{21\times 21}\times 0.5} = 0.9245$$

$$P(A'|B) \overset{\text{قضیه بیز}}{=} \frac{P(B|A')P(A')}{P(B)} = \frac{\frac{1}{21\times 21}\times 0.5}{P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')} = \frac{\frac{1}{21\times 21}\times 0.5}{\frac{1}{36}\times 0.5+\frac{1}{21\times 21}\times 0.5} = 0.0754$$

$$\Rightarrow P(C|B) = \frac{1}{6}\times 0.9245+\frac{6}{21}\times 0.0754 = 0.1756$$

ب) مانند بالا حل شده و مقدار آن برابر 0.21 می‌شود.

سؤال ۵ .

آ) در یک کارخانه لامپ سازی 2 بسته لامپ 50 تایی وجود دارد که بسته اول دارای 5 لامپ سوخته و بسته دوم دارای 7 لامپ سوخته است. هر بار با احتمال برابر یکی از 2 بسته را انتخاب می‌کنیم و یک لامپ را انتخاب کرده و خارج می‌سازیم. این فرایند را 3 بار تکرار می‌کنیم. با چه احتمالی هر سه لامپ سالم‌اند؟

ب) در کارخانه مثال قبل اگر یک لامپ را انتخاب کنیم و سالم باشد؛ احتمال اینکه برای هر کدام از بسته‌ها باشد را بدست آورید.

پاسخ ۵ .

آ) برای هر بار انتخاب لامپ، باید حالت های مختلف را محاسبه کنیم.

A را پدیده‌ی سالم بودن هر سه در نظر می‌گیریم.

B_1 را تعداد لامپ‌های انتخاب شده از بسته‌ی اول در نظر می‌گیریم.

B_2 را تعداد لامپ‌های انتخاب شده از بسته‌ی دوم در نظر می‌گیریم.

اگر هر سه از بسته اول باشند:

$$P(A|B_1=3,B_2=0)=\frac{45}{50}\times\frac{44}{49}\times\frac{43}{48}=0.724$$

اگر دوتا از بسته اول و یکی از بسته دوم باشند:

$$P(A|B_1=2,B_2=1)=\frac{45}{50}\times\frac{44}{49}\times\frac{43}{50}=0.695$$

اگر یکی از بسته اول و دوتا از بسته دوم باشند:

$$P(A|B_1=1,B_2=2)=\frac{45}{50}\times\frac{43}{50}\times\frac{42}{49}=0.6634$$

اگر هر سه از بسته دوم باشند:

$$P(A|B_1=0,B_2=3)=\frac{43}{50}\times\frac{42}{49}\times\frac{41}{48}=0.629$$

پس جواب نهایی:

$$P(A)=P(A|B_1=3,B_2=0)\times P(B_1=3,B_2=0)+...+P(A|B_1=0,B_2=3)\times P(B1=0,B2=3)$$
$$=0.724\times\frac{1}{2^3}+0.695\times\frac{3}{2^3}+0.6634\times\frac{3}{2^3}+0.629\times\frac{1}{2^3}=0.678$$

ب) پدیده A را سالم بودن لامپ و پدیده B_1 را بسته اول بودن و پدیده B_2 را بسته دوم بودن تعریف می‌کنیم:

$$P(B1|A)=\frac{P(A|B1)P(B1)}{P(A)}=\frac{0.9\times 0.5}{0.88}=0.511$$
$$P(A)=P(A|B1)P(B1)+P(A|B2)P(B2)=0.5\times 0.9+0.5\times 0.86=0.88$$
$$P(B2|A)=\frac{P(A|B2)P(B2)}{P(A)}=\frac{0.86\times 0.5}{0.88}=0.488$$

سؤال ۶ در یک شهر صد تاکسی با رنگ های سبز و زرد وجود دارد. 1 درصد تاکسی‌های این شهر سبز و 99 درصد آنان زرد هستند. در یک شب یکی از این تاکسی‌ها با فردی تصادف کرده و از صحنه حادثه می گریزد. شاهدی که در صحنه بوده، ادعا می‌کند که تاکسی که دیده، سبز رنگ بوده است. پلیس هم راننده‌ای را که تاکسی سبز داشته و در آن شب شیفت بوده است، دستگیر می‌کند. این راننده با توجه به توانایی بالای شما در احتمال، شما را به عنوان وکیل خود استخدام کرده تا نشان بدهید که برخلاف تصور عامه، احتمال این که او واقعا آن شب تصادف کرده باشد، خیلی زیاد نیست. نکته مهمی که شما باید بدانید، این است که طبق تحقیقات علمی این شهر خاص، احتمال این که در تاریکی شب یک نفر تاکسی سبز رنگ را سبز ببیند 99 درصد و احتمال این که تاکسی زرد رنگ را سبز ببیند، 2 درصد است. شما به عنوان وکیل این فرد، باید استدلال مناسبی بیاورید که نشان بدهد احتمال این که موکل شما مجرم باشد، خیلی کمتر از 99 درصد است. (راهنمایی: شما باید در واقع احتمال این که تاکسی سبز باشد به شرطی که شاهد آن را سبز دیده باشد را بدست بیاورید.)

پاسخ ۶ ابتدا باید مسئله را به صورت ریاضیاتی مدل‌سازی کنیم و نمادهای مربوط به رویدادها را تعریف کنیم.

۱. نماد T_Y بیانگر رویداد زرد بودن تاکسی است.

۲. نماد T_G بیانگر رویداد سبز بودن تاکسی است.

۳. نماد W_Y بیانگر رویداد زرد دیدن تاکسی توسط شاهد است.

۴. نماد W_G بیانگر رویداد سبز دیدن تاکسی توسط شاهد است.

خواسته سوال پیدا کردن $P(T_G|W_G)$ است.
از داده‌های سوال این احتمال را مستقیما بدست نمی‌آوریم؛ اما باید توجه کنیم که احتمال $P(W_G|T_G)$ و یکسری احتمالات پایه‌ای‌تر نظیر احتمال زرد بودن و سبز بودن تاکسی را داریم. این موضوع به ما شهود می‌دهد که باید از قاعده بیز استفاده کنیم.

$$P(T_G|W_G) = \frac{P(W_G|T_G) \times P(T_G)}{P(W_G)}$$

حال داده‌های سوال را به طور دقیق می‌نویسیم:

۱. $P(T_G) = 0.01$

۲. $P(T_Y) = 0.99$

۳. $P(W_G|T_G) = 0.99$

۴. $P(W_G|T_Y) = 0.02$

از کسر اصلی که باید آن را محاسبه کنیم تنها $P(W_G)$ را مستقیما نداریم که برای محاسبه آن از قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم.
$P(W_G) = P(W_G|T_G) \times P(T_G) + P(W_G|T_Y) \times P(T_Y) = 0.99 \times 0.01 + 0.02 \times 0.99 = 0.0297$
پس برای جواب این سوال داریم:

$$P(T_G|W_G) = \frac{0.99 \times 0.01}{0.0297} = \frac{1}{3}$$

پس مشخص شد که احتمال این که براساس حرف شاهد که گفته تاکسی سبز است، تاکسی واقعا سبز بوده باشد، یک سوم است که بسیار کمتر از 99 درصد است. در اصل البته در قضاوت واقعی این پرونده موارد دیگری هم دخیل خواهند بود؛ اما به هر حال ما خواسته سوال را بدست آوردیم.

سؤال ۷ با استفاده از قوانین مجموعه‌ها و اصول کولموگروف ثابت کنید:
نامساوی بونفرونی (`Bonferroni 's Inequality`): اگر E_i ها رویدادهای احتمالاتی باشند (بدون هیچ شرط خاصی در مورد روابط بین آن‌ها)، نشان دهید:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + ...P(E_n) - (n-1)$$

راهنمایی: ابتدا این موضوع را برای دو رویداد نشان داده و سپس از استقرا کمک بگیرید.

پاسخ ۷ .
ابتدا این موضوع را برای دو رویداد نشان می‌دهیم. داریم:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

از طرفی

$$P(E_1\ cup E_2) \leq 1$$

بنابراین:

$$1 \geq P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

پس:

$$P(E_1 \cap E_2) \geq P(E_1) + P(E_2) - 1$$

پس برای دو رویداد یعنی $n = 2$ ثابت کردیم و برای $n = 1$ هم بدیهی است. حال فرض کنید که برای n رویداد رابطه صورت سوال برقرار است و می‌خواهیم برای $n + 1$ رویداد اثبات کنیم. داریم:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + ...P(E_n) - (n-1)$$

همچنین با استفاده از حالت دوتایی این قضیه داریم:

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n \cap E_{n+1}) &= P((E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) \cap E_{n+1}) \\
&\geq P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) + P(E_{n+1}) - 1 \\
&\geq P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n) - (n-1) + P(E_{n+1}) - 1 \\
&= P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n) + P(E_{n+1}) - n \\
&= P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n) + P(E_{n+1}) - ((n+1) - 1)
\end{aligned}$$

یعنی برای $n + 1$ رویداد هم ثابت شد. پس طبق استقرای ریاضی این رابطه برقرار است.

■

سؤال ۸ به سوالات زیر در مورد رویدادهای مستقل پاسخ بدهید.

آ) اگر $A_1, A_2, ..., A_n$ رویدادهای دو به دو مستقلی باشند، ثابت کنید:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))...(1 - P(A_n))$$

ب) خانواده‌ای n فرزند دارد. اگر بدانیم در این خانواده دو رویداد A: وجود فرزند از هر دو جنسیت و B: وجود حداکثر یک فرزند دختر مستقل از هم باشند، آن گاه n را بیابید.

پاسخ ۸ آ) با توجه به تعمیم قانون دمورگان که به راحتی با استقرا قابل اثبات است، داریم:

$$(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap ... \cap A_n'$$

پس داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = 1 - P(A_1' \cap A_2' \cap ... \cap A_n')$$
$$= 1 - P(A_1' \cap ... \cap A_{n-1}')P(A_n') = ... = 1 - P(A_1')P(A_2')...P(A_n')$$
$$= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))...(1 - P(A_n))$$

■

ب) ابتدا توجه کنید که قطعا با توجه به شرایط سوال n از 1 بزرگ‌تر است. از طرف دیگر رویداد $A \cap B$ به معنی وجود دقیقا ۱ دختر در فرزندان است. با توجه به نحوه بیان سوال، به نظر می‌رسد که باید حالت‌های مختلف تعداد دختران را بررسی کنیم. اگر تعداد دختران را با X نشان بدهیم، به راحتی می‌توان گفت احتمال این که X برابر 0 باشد برابر احتمال این است که X برابر n باشد و این احتمال برابر 2^{-n} است.

حال توجه کنید که رویداد A به این معناست که تعداد دختران برابر 0 یا n نباشد. یعنی
$P(A) = 1 - P(X = 0) - P(X = n) = 1 - \frac{2}{2^n}$

از طرف دیگر رویداد B به معنی این است که تعداد دختران 0 یا 1 باشد. $P(B) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n}$

و همچنین داریم: $P(A \cap B) = P(X = 1) = \frac{n}{2^n}$

با توجه به صورت سوال و مستقل بودن A و B داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{n}{2^n} = (1 - \frac{2}{2^n})(\frac{n+1}{2^n})$$

$$n = (1 - \frac{2}{2^n})(n + 1)$$

$$n = n + 1 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

$$2^{n-1} = n + 1$$

به راحتی با چک کردن اعداد کوچک مشخص می‌شود که جواب این سوال $n = 3$ است.

سؤال ۹ با استفاده از قوانین مربوط به سیگما فیلد ثابت کنید:

آ)

$$A, B \in F \Rightarrow A - B \in F$$

ب)

$$A, B, C \in F \Rightarrow A\Delta B\Delta C \in F$$

منظور از $A\Delta B$ تفاضل متقارن A و B است که به صورت $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ تعریف می‌شود.

پاسخ ۹ منظور از $\wedge$ و ریاضی است.

آ)

$$A \in F \Rightarrow A' \in F \wedge B \in F \Rightarrow (A' \cup B) \in F$$

$$\Rightarrow (A' \cup B)' \in F \Rightarrow (A \cap B') \in F \Rightarrow (A - B) \in F$$

■

ب) ابتدا توجه کنید که به راحتی می‌توان نشان داد: $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ طبق آ داریم:

$$A - B \in F \wedge B - A \in F \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) \in F \Rightarrow A\Delta B \in F$$

با توجه به همین قسمت و با نامیدن $A\Delta B = D$ داریم: $D\Delta C \in F$

پس

$$A\Delta B\Delta C \in F$$

■

سؤال ۱۰ سه کارت رنگی داریم. هر دو روی کارت اول قرمز است. هر دو روی کارت دوم آبی است. کارت سوم دو رنگ دارد و یک طرف آن قرمز و سمت دیگر آن آبی است. این کارت‌ها درون جعبه‌ای هستند که درون آن را نمی‌بینیم. یک کارت را به طور تصادفی بر می‌داریم و رنگی که مشاهده می‌کنیم آبی است. چقدر احتمال دارد که روی دیگر آن نیز آبی باشد؟

پاسخ ۱۰ شاید در ابتدا جواب درست $\frac{1}{2}$ به نظر برسد؛ اما در اصل جواب صحیح این سوال $\frac{2}{3}$ است.
برای حل این سوال رویداد X را انتخاب کارت تماما آبی در نظر گرفته و رویداد Y را آبی بودن سمتی که دیده‌ایم، در نظر بگیرید. بدیهی است که چون تعداد سمت‌های آبی با تعداد سمت‌های قرمز برابر است، $P(Y) = \frac{1}{2}$ است. از طرفی احتمال برداشتن کارت تماما آبی هم به وضوح $P(X) = \frac{1}{3}$ است. خواسته سوال که بدانیم طرف دیگر آبی باشد، معادل این است که بدانیم کارت تماما آبی را انتخاب کرده‌ایم، به شرطی که سمت دیده شده آبی باشد.

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(X)}{P(Y)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

توجه کنید که $P(X \cap Y) = P(X)$ است؛ زیرا احتمال این که کارت هر دو طرفش آبی باشد و ما سمتی که دیده‌ایم آبی باشد، برابر احتمال این است که کارت هر دو طرفش آبی باشد $X \subset Y$.
این مسئله معروف به پارادوکس جعبه برتراند است.

موفق باشید