# آمار و احتمال مهندسی

**نیم‌سال اول ۱۴۰۳ـ۱۴۰۲**

مدرس: دکتر نجفی

**دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر**

تمرین سری چهارم

موعد تحویل: ۱۷ آذر

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

## مسئله‌ی ۱. دست‌گرمی! (۹ نمره)

تابع توزیع توام $X,Y$ به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c(x+y), & 0<y<1, 0<x<1-y \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

**الف.** مقدار c را بیابید.

**ب.** تابع $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را به دست آورید.(تابع چگالی حاشیه ای را برای Y و X پیدا کنید.)

**ج.** آیا Y و X مستقل هستند؟

**د.** $P(X<Y)$ را بیابید.

**حل.** الف.

$$\int_0^1\int_0^{1-y} c(x+y)dxdy = c\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_0^{1-y}dy$$
$$= c\int_0^1\left(\frac{(1-y)^2}{2}+(1-y)y\right)dy = c\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)dy = c\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=1$$
$$\Rightarrow c=3$$

ب. شروط داده شده در تابع را می‌توان به دو صورت نوشت:

$$0<y<1, 0<x<1-y$$

یا

$$0<x<1, 0<y<1-x$$

در نتیجه برای بازه $0<x<1$ داریم:

$$f_X(x) = \int_{۰}^{۱-x}(x+y)dy = (۳xy + \frac{۳y^{۲}}{۲})|_{۰}^{۱-x} = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}x^{۲}$$

و برای بازه ی ۰<y<۱ داریم:

$$f_Y(y) = \int_{۰}^{۱-y}(x+y)dx = (۳xy + \frac{۳x^{۲}}{۲})|_{۰}^{۱-y} = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}y^{۲}$$

پس در کل بازه ی تعریف:

$$f_{X}(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}x^{۲} & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

$$f_{Y}(y) = \begin{cases} \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}y^{۲} & ۰ < y < ۱ \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

ج. $X$ و $Y$ مستقل نیستند چون:

$$f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$$

د. با توجه به شرایط داده شده در تابع احتمال، اگر بخواهیم $P(X<Y)$ را بیابیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(X<Y) &= \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \int_{x}^{۱-x} ۳(x+y)dxdy = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} (۳xy + \frac{۳y^{۲}}{۲})|_{x}^{۱-x}dx \\ &= \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} (\frac{۳}{۲} - ۶x^{۲})dx = (\frac{۳}{۲} - ۲x^{۳})|_{۰}^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

این نتیجه با توجه به تقارن مسئله نیز قابل حدس بود.

$\triangleright$

## مسئله‌ی ۲. آشپزخانه دربار (۱۰ نمره)

دو آشپز به طور مستقل مشغول پخت یک غذا هستند. آشپز اول در $Y_{۱} \sim Exp(\lambda_{۱})$ و آشپز دوم در $Y_{۲} \sim Exp(\lambda_{۲})$ این غذا را می پزند.

**الف.** تابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی $\frac{Y_{۱}}{Y_{۲}}$ را بیابید.

**ب.** به چه احتمالی آشپز اول زودتر از آشپز دوم غذا را آماده می‌کند؟

**حل.** الف.

$$\begin{gathered} Z = \frac{Y_{۱}}{Y_{۲}} \\ F_Z(z) = P(Z<z) = P(\frac{Y_{۱}}{Y_{۲}} < z) = P(Y_{۱} < Y_{۲}z) \\ \Rightarrow = \int_{۰}^{\infty} \int_{\frac{y_{۱}}{z}}^{\infty} f_{Y_{۱}}(y_{۱}) f_{Y_{۲}}(y_{۲}) dy_{۲}dy_{۱} \\ = \int_{۰}^{\infty} \lambda_{۱} e^{-\lambda_{۱}y_{۱}} \int_{\frac{y_{۱}}{z}}^{\infty} \lambda_{۲} e^{\lambda_{۲}y_{۲}} dy_{۲}dy_{۱} \\ = \frac{\lambda_{۱}}{\lambda_{۱} + \frac{\lambda_{۲}}{z}} \end{gathered}$$

حال که تابع توزیع تجمعی را به دست آوردیم، با مشتق گرفتن از آن میتوانیم به تابع چگالی احتمال برسیم:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1 z)^2}$$

ب.

$$P(Y_1 < Y_2) = \int_0^\infty \int_0^{y_2} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) dy_1 dy_2$$

$$= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y_2} \int_0^{y_2} \lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1} dy_1 dy_2$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$\triangleright$

## مسئله‌ی ۳. نقاط بازیگوش! (۱۰ نمره)

فرض کنید $X$ و $Y$ دو نقطه تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه $(0, 1)$ می‌باشند. تابع توزیع احتمال(توزیع تجمعی) و تابع چگالی احتمال $\frac{max(X,Y)}{min(X,Y)}$ را حساب کنید.

**حل.** $G$ را توزیع احتمال و $g$ را چگالی احتمال در نظر می‌گیریم. داریم:

$$G(t) = 0, \quad if \quad t < 0$$

برای $t \geqslant 1$ داریم:

$$\begin{aligned} G(t) &= P\left(\frac{max(X,Y)}{min(X,Y)} \leqslant t\right) \\ &= P\Big(max(X,Y) \leqslant min(X,Y)\, t\Big) \\ &= P\Big(X \leqslant min(X,Y)\, t,\ Y \leqslant min(X,Y)\, t\Big) \\ &= P\Big(min(X,Y) \geqslant \frac{X}{t},\ min(X,Y) \geqslant \frac{Y}{t}\Big) \\ &= P\Big(X \geqslant \frac{X}{t},\ Y \geqslant \frac{X}{t},\ X \geqslant \frac{Y}{t},\ Y \geqslant \frac{Y}{t}\Big) \\ &= P\Big(X \geqslant \frac{Y}{t},\ Y \geqslant \frac{X}{t}\Big) \\ &= P\Big(\frac{X}{t} \leqslant Y \leqslant tX\Big) \end{aligned}$$

این مقدار برابر با مساحت ناحیه زیر می‌باشد:

$$\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \tfrac{x}{t} \leqslant y \leqslant tx\}$$

که برابر است با $\frac{t-1}{t}$. بنابراین:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{t-1}{t} & t \geqslant 1, \end{cases}$$

در نتیجه:

$$g(t) = G'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & t \geqslant 1 \\ 0 & elsewhere. \end{cases}$$

$\triangleright$

### مسئله‌ی ۴. پرتاب ۳ امتیازی! (۱۴ نمره)

امیررضا که یک بازیکن بسکتبال است، روزی $N \sim Poisson(\lambda)$ بار اقدام به پرتاب ۳ امتیازی می کند که هر پرتاب به طور مستقل به احتمال $p$ تبدیل به امتیاز می شود. تعداد پرتاب های منجر به امتیاز را با $X$ نمایش می‌دهیم.

**الف.** تابع جرم احتمال $X$ را به دست آورید.

**ب.** اگر $Y$ متغیر تصادفی نشان‌دهنده تعداد پرتاب‌های ناموفق باشد، تابع توزیع توام $Y$ و $X$ را بیابید. آیا $Y$ و $X$ از یکدیگر مستقل هستند؟

**حل.** الف.

$$P(X=i)=\sum_{n=i}^{\infty}P(X=i|N=n)P(N=n)=\sum_{n=i}^{\infty}\binom{n}{i}p^i(۱-p)^{n-i}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=$$
$$\frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda}}{i!}\sum_{t=۰}^{\infty}\frac{((۱-p)\lambda)^{n-i}}{(n-i)!}=\frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda}}{i!}e^{(۱-p)\lambda}=\frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda p}}{i!}\Rightarrow X\sim Poisson(\lambda p)$$

ب. طبق توضیحات سوال: $N=X+Y$ پس یکی از روش های محاسبه تابع توزیع توام این دو به این شکل است:

$$P(X=i,Y=j)=\Sigma P(X=i,Y=j|N=n)P(N=n)=$$
$$P(X=i,Y=j|N=i+j)P(N=i+j)$$

میدانیم که اگر $X=i$ و $N=i+j$ پس به طور خودکار $Y=j$. پس اگر احتمال موفقیت آمیز نبودن پرتاب را $q=۱-p$ درنظر بگیریم داریم:

$$P(X=i,Y=j|N=i+j)P(N=i+j)=P(X=i|N=i+j)P(N=i+j)$$
$$=\binom{i+j}{i}p^i q^i\frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+j}}{(i+j)!}=\frac{(i+j)!}{i!j!}p^i q^j\frac{e^{-\lambda(p+q)}\lambda^{(i+j)}}{(i+j)!}$$
$$=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}\frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^j}{j!}$$

بنابراین توزیع توام X و Y به شکل زیر خواهد بود:

$$P(X=i,Y=j)=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}\frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^j}{j!}$$

به شکل مشابه میتوان نشان داد: $Y\sim Poisson(\lambda q)$

$$P(X=i,Y=j)=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}\frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^j}{j!}=P(X=i)P(Y=j)$$

پس X و Y مستقل اند!

$\triangleright$

## مسئله‌ی ۵.   حد مرکزی (۱۰ نمره)

با استفاده از قضیه حد مرکزی ثابت کنید:

$$\lim_n \frac{۱}{e^n} \sum_{k=۰}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

**راهنمایی: جمع $n$ توزیع پوآسون مستقل با پارامترهای $\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n$ از یک توزیع پوآسون با پارامتر $\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i$ پیروی میکند.**

**حل.** از قضیه حد مرکزی داریم:

$$\lim_n P(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant z) \to \Phi(z)$$

و همینطور میدانیم $\Phi(۰) = \frac{۱}{۲}$ بنابراین:

$$\frac{۱}{۲} = \Phi(۰) \overset{CLT}{=} \lim_n P(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant ۰) = \lim_n P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n}}) = \lim_n P(S_n \leqslant n).$$

از آنجایی که جمع n توزیع پوآسون همچنان از توزیع پوآسون پیروی میکند، $S_n$ نیز از توزیع پوآسون با $\lambda = n$ پیروی میکند. بنابراین:

$$P(S_n \leqslant n) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{e^{-n} n^k}{k!}.$$

▷

## مسئله‌ی ۶.   ملاقات (۱۰ نمره)

دو نفر هر یک در زمان تصادفی بین ۵ تا ۶ عصر به ایستگاه میرسند.(زمان رسیدن از توزیع یکنواخت بین ۵ تا ۶ پیروی میکنند). هر یک ۵ دقیقه در ایستگاه توقف میکنند و بعد آنجا را ترک میکنند. چقدر احتمال دارد که این دو نفر همدیگر را در ایستگاه ملاقات کنند؟

**حل.** اگر زمان رسیدن نفر اول از توزیع X و زمان رسیدن فرد دوم به ایستگاه از توزیع Y پیروی کند، احتمال مورد نظر ما عبارت است از:

$$P(|X - Y| < ۵)$$

بنابراین:

$$\int_۰^{۶۰} \int_{\max\{۰, x-۵\}}^{\min\{۶۰, x+۵\}} f_{X,Y}(x,y) dy dx.$$

که

$$f_{X,Y} = \frac{۱}{۶۰} \frac{۱}{۶۰}$$

پس:

$$\int_۰^{۶۰} \frac{[min(۶۰, x+۵) - max(۰, x-۵)]}{۳۶۰۰} dx =$$
$$\int_۰^{۵} \frac{x+۵-۰}{۳۶۰۰} dx + \int_۵^{۵۵} \frac{x+۵-x+۵}{۳۶۰۰} dx + \int_{۵۵}^{۶۰} \frac{۶۰-x+۵}{۳۶۰۰} dx$$
$$= \frac{\int_۰^۵ (x+۵) dx + \int_۵^{۵۵} ۱۰ dx + \int_{۵۵}^{۶۰} (۶۵ - x) dx}{۳۶۰۰} = \frac{۲۳}{۱۴۴}$$

$\triangleright$

## مسئله‌ی ۷. توزیع توام (۱۵ نمره)

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} e^x & 0 \leqslant x \leqslant c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

باشد. میدانیم که با دانستن $X = x$، متغیر تصادفی Y روی بازه $[-x^2, x^2]$ از توزیع یکنواخت پیروی میکند.

**الف.** مقدار c را بیابید.

**ب.** تابع چگالی احتمال توام $f_{XY}(x, y)$ را بیابید.

**ج.** $f_Y(y)$ را بیابید.

**د.** $P(|Y| < X^3)$ را بیابید.

**حل.**

**الف.**

$$1 = \int_0^c e^x \, dx = e^c - e^0$$

$$c = \ln 2$$

**ب.** در ابتدا میدانیم:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & -x^2 \leqslant y \leqslant x^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2x^2} & 0 \leqslant x \leqslant \ln 2, -x^2 \leqslant y \leqslant x^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

پس:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x}{2x^2} & \sqrt{|y|} \leqslant x \leqslant ln 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ج.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$$
$$= \int_{\sqrt{|y|}}^{ln ۲} \frac{e^x}{۲x^۲}dx$$

د. برای یافتن این احتمال از قانون زنجیری استفاده میکنیم:

$$P(|Y| < X^۳) = \int_۰^{\ln ۲} P(|Y| < X^۳ | X = x) f_X(x)dx$$
$$= \int_۰^{\ln ۲} P(|Y| < x^۳ | X = x) e^x dx$$
$$= \int_۰^{\ln ۲} \left(\frac{۲x^۳}{۲x^۲}\right) ۲xdx \qquad \text{since} Y|X = x \quad \sim \ Uniform(-x^۲, x^۲)$$
$$= \frac{۲}{۳}(\ln ۲)^۳.$$

▷

## مسئله‌ی ۸. قضیه حد مرکزی (۱۰ نمره)

فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_{۲۵}$ متغیرهای تصادفی iid باشند

$$P_X(k) = \begin{cases} ۰/۶ & k = ۱ \\ ۰/۴ & k = -۱ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

و همچنین فرض کنید $Y = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$. با استفاده از قضیه حد مرکزی مقدار $P(۴ \leqslant Y \leqslant ۶)$ را تخمین بزنید.

**اگر $\Phi$ نشان‌دهنده‌ی تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشد، در صورت مشاهده‌ی $\Phi(۰/۳۰۶۲)$ در راه‌حل خود، آن را با ۰/۶۲ جایگزین کنید.**

**حل.**

$$E(X_i) = (۰/۶)(۱) + (۰/۴)(-۱) = \frac{۱}{۵},$$

$$E(X_i^۲) = ۰/۶ + ۰/۴ = ۱.$$

بنابراین

$$\text{Var}(X_i) = E(X_i^۲) - (E(X_i))^۲ = \frac{۲۴}{۲۵},$$

$$\sigma_{X_i} = \sqrt{\text{Var}(X_i)} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۵}.$$

همچنین:

$$E(Y)=nE(X_i)=۲۵(۰/۲)=۵,$$

$$\mathrm{Var}(Y)=n\mathrm{Var}(X_i)=۲۵(\frac{۲۴}{۲۵})=۲۴,$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}=۲\sqrt{۶}.$$

در نهایت داریم:

$$\begin{aligned}P(۴\leqslant Y\leqslant ۶)&=P(۳/۵\leqslant Y\leqslant ۶/۵)\\&=P\left(\frac{۳/۵-۵}{\sigma_Y}\leqslant Z\leqslant \frac{۶/۵-۵}{\sigma_Y}\right)\\&=P(-۰/۳۰۶۲\leqslant Z\leqslant +۰/۳۰۶۲)\\&\approx\Phi(۰/۳۰۶۲)-\Phi(-۰/۳۰۶۲)\\&=۲\Phi(۰/۳۰۶۲)-۱\\&\approx ۰/۲۴۰۵.\end{aligned}$$

▷

## مسئله‌ی ۹. مهمانی (۱۲ نمره)

۶۴ مهمان دعوت کرده اید و باید برای آنها ساندویچ تهیه کنید. شما می‌دانید که هر مهمان برای سیر شدن باید ۰، ۱ و یا ۲ ساندویچ به ترتیب با احتمال های $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$ بخورد. با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی تعداد ساندویچ‌های مورد نیاز را در حالتی تخمین بزنید که با احتمال حداقل ۹۵ درصد همه‌ی مهمان‌ها سیر شوند.

**راهنمایی:** $\Phi^{-۱}(۰/۹۵)=۱/۶۴۴۹$

**حل.** فرض کنید $X_i$ تعداد ساندویچ های مورد نیاز برای نفر $i$ام باشد، $Y=X_۱+X_۲+\cdots+X_{۶۴}$. مقدار $y$ را چنان پیدا می کنیم که $P(Y\leqslant y)\geqslant ۰/۹۵$.

$$E(X_i)=\frac{۱}{۴}(۰)+\frac{۱}{۲}(۱)+\frac{۱}{۴}(۲)=۱,$$

$$E(X_i^۲)=\frac{۱}{۴}(۰^۲)+\frac{۱}{۲}(۱^۲)+\frac{۱}{۴}(۲^۲)=\frac{۳}{۲}.$$

$$\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^۲)-(E(X_i))^۲=\frac{۱}{۲},$$

$$\sigma_{X_i}=\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}.$$

$$E(Y)=nE(X_i)=۶۴(۱)=۶۴,$$

$$\mathrm{Var}(Y)=n\mathrm{Var}(X_i)=۶۴\left(\frac{۱}{۲}\right)=۳۲,$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}=۴\sqrt{۲}.$$

با استفاده از قضیه حد مرکزی

$$P(Y \leqslant y) = P(\frac{Y-۶۴}{۴\sqrt{۲}} \leqslant \frac{y-۶۴}{۴\sqrt{۲}}) = \Phi(\frac{y-۶۴}{۴\sqrt{۲}}) = ۰/۹۵$$

$$\frac{y-۶۴}{۴\sqrt{۲}} = \Phi^{-۱}(۰/۹۵) \approx ۱/۶۴۴۹ y = ۷۳/۳.$$

بنابراین به ۷۴ ساندویچ نیاز دارد ▷

موفق باشید :)