دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی | بهار ۱۴۰۲

تمرین سری دوم (استقلال، احتمال شرطی، متغیر تصادفی گسسته)

مدرس: مهدی جعفری | موعد تحویل: شنبه ۱۲ فروردین ۱۴۰۲

سؤال ۱ اگر $Y = g(X)$ ثابت کنید:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + ... + \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} + ... = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

در حالی که می‌دانیم x_i ها ریشه هستند یعنی:

$$y = g(x_1) = ... = g(x_i) = ...$$

راه حل:
بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید برای $Y = g(X)$ سه ریشه x_1, x_2, x_3 را پیدا کرده‌ایم. می‌دانستیم

$$f_y(y)dy = P\{y < y \leq y + dy\}$$

پس کافی است مجموعه‌ی x هایی را پیدا کنیم که $y < g(x) \leq y + dy$ و احتمال هر x را در این مجموعه پیدا کنیم. حالا با توجه به شکل، داریم:

$$x_1 < x < x_1 + dx_1$$

$$x_2 + dx_2 < x < x_2$$

$$x_3 < x < x_3 + dx_3$$

چون در این حالت فرض شده داریم:

$$0 < dx_1$$

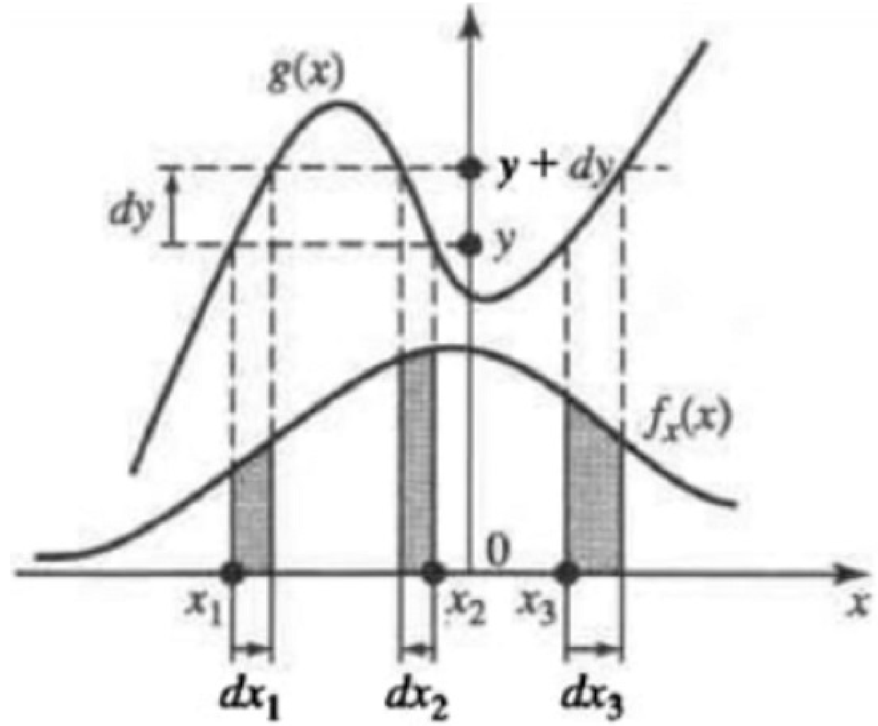
$$0 < dx_2$$

$$0 < dx_3$$

پس:

$$P\{y < y \leq y + dy\} = P\{x_1 < x < x_1 + dx_1\} + P\{x_2 + dx_2 < x < x_2\} + P\{x_3 < x < x_3 + dx_3\}$$

سمت راست تساوی بالا همان قسمت هاشورخورده در شکل زیر است:



$$P\{x_1 < x < x_1 + dx_1\} = f_x(x_1)dx_1 \qquad dx_1 = \frac{dy}{g'(x_1)}$$

$$P\{x_2 + dx_2 < x < x_2\} = f_x(x_2)|dx_2| \qquad dx_2 = \frac{dy}{g'(x_2)}$$

$$P\{x_3 < x < x_3 + dx_3\} = f_x(x_3)dx_3 \qquad dx_3 = \frac{dy}{g'(x_3)}$$

پس در نهایت خواهیم داشت:

$$f_y(y)dy = \frac{f_x(x_1)}{g'(x_1)}dy + \frac{f_x(x_2)}{|g'(x_2)|}dy + \frac{f_x(x_3)}{g'(x_3)}dy$$

واضح است که با استقرا می‌توان مطالب بالاتر را به حالت کلی تعمیم داد و حکم سوال، اثبات می‌شود.

سؤال ۲ مصیب در حال رقابت با ایلان ماسک برای خرید توئیتر است. در این رقابت، پول اولیه‌ی ایلان ماسک برای خرید توئیتر، بی‌نهایت است و پول اولیه‌ی مصیب، n دلار. مصیب یک بازی مطرح می‌کند، به این شکل که در هر مرحله یا یک دلار می‌برد، یا یک دلار می‌بازد. در این بازی، احتمال بردن یک دلار در هر مرحله، p و احتمال از دست دادن ۱ دلار، $1 - p$ است. شرط برد مصیب در این بازی نیز این است که m دلار پول جمع‌آوری کنید و شرط باختن وی، این است که همه‌ی پول خودش را از دست دهد. احتمال برد و باخت مصیب را وقتی که m بسیار بزرگ باشد، محاسبه کنید.

راه حل:
برای حل سوال ابتدا این نمادها را تعریف می‌کنیم:
P_i احتمال برد کل بازی به ازای شروع بازی با i تومان است. بدیهی‌ست که P_0 برابر با صفر و P_N برابر با یک است. همچنین q را احتمال باخت در هر مرحله در نظر می‌گیریم.
حل سوال: قانون احتمال کل را برای اولین مرحله از بازی می‌نویسیم.

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$$

از آن‌جا که این رابطه از هر دو سمت بازگشتی‌ست، انتهایی ندارد. حال سعی می‌کنیم آن را به یک فرم مشخص درآوریم.

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1})$$

و در ادامه داریم:

$$i = 1 \Rightarrow P_2 - P_1 = \frac{q}{p}P_1 \Rightarrow P_2 = P_1 \sum_{k=0}^{1} (\frac{q}{p})^k$$

$$i = k \Rightarrow P_{k+1} - P_k = \frac{q}{p}(P_k - P_{k-1}) = \frac{q}{p}(P_1(\frac{q}{p})^{k-1})$$

$$\Rightarrow P_{k+1} = P_1(\frac{q}{p})^k + P_1 \sum_{u=0}^{k-1} (\frac{q}{p})^u = P_1 \sum_{u=0}^{k} (\frac{q}{p})^u$$

با استفاده از محاسبه‌ی این دنباله‌ی هندسی جواب‌های زیر به دست می‌آید:

$$P_{i+1} = \begin{cases} P_1 \frac{1-(\frac{q}{p})^{i+1}}{1-\frac{q}{p}}, & p \neq q \\ P_1(i+1), & p = q = 0.5 \end{cases}$$

حال مقدار $i = m - 1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$i = P_m = \begin{cases} P_1 \frac{1-(\frac{q}{p})^{m}}{1-\frac{q}{p}}, & p \neq q \\ P_1 m, & p = q = 0.5 \end{cases}$$

و حالا مقدار P_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})}{1-\frac{q}{p}^m}, & p \neq q \\ \frac{1}{m}, & p = q = 0.5 \end{cases}$$

در نتیجه مقدار P_n یا همان احتمال برد (رسیدن مقدار پول به m) برابر است با:

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^n}{1-\frac{q}{p}^m}, & p \neq q \\ \frac{n}{m}, & p = q = 0.5 \end{cases}$$

احتمال باخت شما برای مقادیر بسیار بزرگ m برابر است با:

$$\begin{cases} (\frac{1-p}{p})^n, & p > \frac{1}{2} \\ 1, & p \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

سؤال ۳ پس از رقابت قبلی، این بار کاپیتان هم به جمع مصیب و ایلان ماسک برای رقابت پیوست، اما این بار مصیب یک بازی متفاوت تعریف می‌کنه. در این بازی، هر بار ۲ نفر از ۳ نفر انتخاب می‌شن تا یک مسابقه انجام بدن در راند اول. سپس در راند دوم، برنده‌ی راند اول با نفر سومی که انتخاب نشده بود برای راند قبل، رقابت می‌کند. برنده‌ی راند دوم بازی، برنده‌ی کل است. با توجه به این‌که همه‌ی مسابقه‌ها مستقل هستند و بازیکن i با احتمال $\frac{i}{i+j}$ در یک راند مسابقه مقابل بازیکن j برنده می‌شود،

الف

احتمال این‌که کاپیتان برنده‌ی بازی شود را محاسبه کنید.

ب

حالا با فرض این‌که کاپیتان برنده‌ی بازی شده است، احتمال این‌که کاپیتان در راند اول بازی رقابت نکرده است را محاسبه کنید.

راه حل:
در این‌جا، W_1 را پیشامد این‌که کاپیتان به عنوان بازیکن اول، برنده‌ی مسابقه شود، در نظر می‌گیریم. همچنین Q را پیشامدی این‌که کاپیتان در بازی اول بازی نکند، در نظر می‌گیریم. حالا برحسب رخ دادن یا رخ ندادن پیشامد Q محاسبات لازم برای بدست آوردن مقدار W_1 را می‌نویسیم.

$$P(W_1) = P(W_1|Q)P(Q) + P(W_1|Q^c)P(Q^c) = P(W_1|Q)\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{2}{3}$$

که در این‌جا اگر پیشامد Q^c رخ دهد، کاپیتان باید هر دو بازیکن دیگر را ببرد تا برنده‌ی مسابقه شود. حالا برای محاسبه‌ی احتمال پیشامد $P(W_1|Q)$ برحسب این‌که کدام یک از دو بازیکن دیگر، بازی اول را می‌برد، پیشامد را حساب می‌کنیم. این‌جا B_1 را پیشامد این‌که بازیکن اول (کاپیتان) بازی را ببرد، در نظر می‌گیریم.

$$P(W_1|Q) = P(W_1|Q, B_2)P(B2|Q) + P(W_1|Q, B_3)P(B3|Q) = \frac{1}{3}\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\frac{3}{5} = 17.60$$

بنابراین داریم:

$$P(W_1) = 3.20$$

$$P(Q|W_1) = \frac{P(W_1|Q)P(Q)}{P(W_1)} = \frac{(17.60)(1.3)}{3.20} = 17.27$$

سؤال ۴ بعضی وقت‌ها حساب کردن مقدار احتمال با استفاده از رابطه‌ی اصلی توزیع از نظر محاسباتی کاری سخت و غیرممکن است. برای همین بعضی وقت‌ها نیاز داریم تا تقریب‌هایی از احتمال مورد نظر را به‌گونه‌ای بدست آوریم تا هم محاسبات کمتری انجام داده و هم این‌که مقدار تقریب زده شده از مقدار واقعی دور نباشد. در این سوال می‌خواهیم توزیع دو جمله‌ای را با یکی از توزیع‌های نرمال و پوآسون تقریب بزنیم. توضیح دهید در چه مواقعی می‌توانیم از هر کدام از این دو توزیع برای تقریب مورد بحث استفاده کرد. سپس سوالات بخش الف و ب، از این تقریب‌ها استفاده کنید و دلیل انتخاب تقریبی که به کار بردید را نیز شرح دهید.

الف

یک شیرینی‌پز برای تهیه‌ی شیرینی گردویی ۵۰۰ قطعه گردو را با خمیر مخلوط می‌کند و به این ترتیب ۱۰۰ شیرینی گردویی می‌پزد. اگر به صورت رندوم یک شیرینی را برداریم، چقدر احتمال دارد در این شیرینی بیش از ۴ قطعه گردو وجود داشته باشد؟

ب

با توجه به آمارهای جهانی، تعداد خانم‌ها و آقایان کل کشور برابر است. حالا احتمال‌های زیر را با استفاده از تخمین مناسب، حساب کنید.

i

فرض کنید $n = 10$ آدم در یک خیابان هستند. احتمال این‌که حداقل ۶ نفر از آن‌ها خانم باشند، چقدر است؟

ii

اگر $n = 1000$ باشد، احتمال این‌که حداقل ۶۰۰ نفر از آن‌ها آقا باشند، چقدر است؟

iii

اگر بخواهیم n نمونه بگیریم که در آن‌ها به احتمال 0.95، ۱۵ آقا وجود دارند، n مورد نظر باید چند باشد؟

راه حل:

الف

دقت کنید که در اصل توزیع احتمال تعداد گردوهای موجود در یک شیرینی توضیع دو جمله‌ای دارد ولی با توجه به این که محاسیه این توزیع بسیار سخت است و چون p عدد کوچکی است در حد $\frac{1}{100}$ و چون n بسیار بزرگ است و در حد ۵۰۰ است، پس می‌توان از تقریب پوآسون برای این توزیع استفاده کرد. پس اگر تعداد گردوهای یک شیرینی x باشد. باید از توزیع پوآسونی استفاده کنیم که امید ریاضی آن برابر امید ریاضی x باشد. پس:

$$\lambda = n \times p = 5 \rightarrow P(X = k) = e^{-5} \times \frac{5^k}{k!}$$

حال داریم:

$$P(X > 5) = 1 - e^{-5} \times (\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!}) = 0.5595$$

ب

زمانی که n بزرگ باشد و p خیلی به ۰ و ۱ نزدیک نباشد، از تقریب نرمال استفاده می‌شود. این شرایط در این مسائل برقرار است. در تترتیب نرمال از تابع چگالی احتمال توزیع نومال با امید و واریانس مشابه متغیری که داریم استفاده می‌کنیم. احتمال $X = k$ را با انتگرال تابع چگالی در بازه‌ی $(k-0.5, k+0.5)$ تقریب می‌زنیم.

i

چون p کم نیست نمی‌توان از تقریب پوآسون استفاده کرد. برای استفاده از تقریب نرمال باید از توزیع نرمالی با واریانس و امید ریاضی مشابه متغیری که داریم استفاده کنیم، داریم:

$$\mu = np = 5, \sigma^2 = np(1-p) = 2.5$$

پس اگر X متغیر تصادفی تعداد خانم‌ها باشد از توزیعی شبیه توزیع نرمال با واریانس و امید ریاضی بالا پیروی می‌کند. X' را متغیری با این توزیع در نظر می‌گیریم. مقدار احتمال برابر است با:

$$Pr(X \geq 6) \approx Pr(5.5 < X' < 10.5) = \int_{5.5}^{10.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2.5}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\times 2.5}}\, dx$$

که با نرم‌افزار به جواب 0.375 می‌رسیم. راه دیگر استفاده از جدول توزیع نرمال است. برای این کار متغیر تصادفی زیر وا تعریف می کنیم:

$$Y = \frac{X' - 5}{\sqrt{2.5}}$$

با توجه به اینکه Y ترکیب خطی‌ای از X است و X از توزیع نرمال پیروی می‌کند، پس Y هم از توزیع نرمال پیروی می‌کند، از طرفی واریانس این متغیر تصادفی برابر ۱ و امید ریاضی آن برابر صفر است. به این توزیع، توزیع نومال استاندارد می‌گویند. حال:

$$P(5.5 < X' < 10.5) \approx Pr(5.5 < X') = P(Y > 0.3162) = 1 - P(Y < 0.3162)$$

جمله عمومی تابع $F(x)$ برای توزیع نرمال غیرقابل بدست آوردن است اما مقدار این تابع برای توزیع نرمال استاندارد در جدول‌هایی قابل دستیابی‌ست که برای این مقدار که با $Z_{3162} = 0.6241$ نشان می‌دهند. با این روش به همان مقدار $1 - 0.6241 = 0.375$ می‌رسیم.

ii

مشابه بخش قبل عمل می‌کنیم و داریم:

$$\mu = np = 500, \sigma^2 = np(1-p) = 250$$

پس اگر X متغیر تصادفی تعداد آقایان باشد، از توزیعی شبیه توزیع نرمال با واریانس و امید ریاضی بالا پیروی می‌کند. X' را متغیری با این توزیع در نظر می‌گیریم. مقدار احتمال برابر است با:

$$Pr(X \geq 600) \approx Pr(599.5 < X' < 1000.5) = \int_{599.5}^{1000.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 250}} e^{-\frac{(x-500)^2}{2\times 250}}\, dx$$

که با نرم‌افزار به جواب 1.56×10^{-10} می‌رسیم. همچنین برای استفاده از جدول توزیع نرمال تعریف می‌کنیم:

$$Y = \frac{X' - 500}{\sqrt{250}}$$

حالا داریم:

$$P(X \geq 600) \approx Pr(599.5 < X' < 1000.5) \approx Pr(599.5 < X') = Pr(Y > 6.293) = 1 - Pr(Y < 6.293)$$

مقدار $Pr(Y < 6.293)$ تقریبا برابر با ۱ است پس جواب ما تقریبا برابر با صفر می‌شود.

در این سوال باید n را بیابیم که به ازای آن به احتمال 0.95 حداقل ۱۵ آقا ببینیم. باید داشته باشیم:

$$\int_{14.5}^{n+0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0.25}} e^{-\frac{(x-0.5n)^2}{2\times 0.25n}}\, dx \geq 0.95$$

که اگر مقدار آن را با نرم‌افزار حساب کنیم می‌بینیم کوچک‌ترین n برابر ۴۰ است. راه دیگر که به نرم‌افزاری نیاز ندارد، استفاده از جدول است. روند سوال قبل را تکرار می‌کنیم با این تفاوت که این بار n مجهول است. حال

$$P[X' > 14.5] = P[\frac{X' - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} = Y > \frac{14.5 - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}] \geq 0.95 = 1 - Z_{-1.645}$$

$$\rightarrow \frac{14.5 - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} \leq -1.645 \rightarrow n \geq 39.314 \rightarrow n = 40$$

دقت کید که در این‌جا ما احتمال $X > n + 0.5$ را هم در 0.95 حساب کردیم که با توجه به بسیار کوچک بودن آن با توجه به بخش قبل، تاثیری ندارد.

سؤال ۵ دو سکه داریم که با پرتاب اولی به احتمال 0.5 شیر و به احتمال 0.5 خط میاید و با پرتاب دومی به احتمال 0.6 شیر ظاهر می شود و به احتمال 0.4 خط. یک سکه را شانسی برداشته‌ایم و پس از ۳ بار پرتاب کردن آن، به ترتیب به نتایج خط-شیر-شیر دست یافته‌ایم. احتمال این‌که پرتاب چهارم خط بیاید چقدر است؟

راه حل:
واقعه‌ی خط شدن پرتاب چهارم را T_4 در نظر می‌گیریم. داده‌های مشاهده شده یعنی ۳ پرتاب اول را D در نظر می‌گیریم. پیشامد A را هم این‌که سکه‌ی اولی دستمان است یا سکه‌ی دوم می‌نامیم. بنابراین داریم:

$$P(T_4|D) = P(T_4, A = 1|D) + P(T_4, A = 2|D) =$$

$$P(T_4|A = 1, D) \times P(A = 1|D) + P(T_4|A = 2, D) \times P(A = 2|D) = 0.5P(A = 1|D) + 0.4P(A = 2|D)$$

برای محاسبه‌ی $P(A = 1|D)$ به این‌گونه عمل می‌کنیم:

$$P(A = 1|D) = \frac{P(D|A = 1) \times P(A = 1)}{P(D)} =$$

$$\frac{P(D|A = 1) \times P(A = 1)}{P(D|A = 1) \times P(A = 1) + P(D|A = 2) \times P(A = 2)} =$$

$$\frac{\frac{1}{8} \times 0.5}{\frac{1}{8} \times 0.5 + 0.144 \times 0.5} = \frac{0.125}{0.269} = 0.46$$

بنابراین

$$P(A = 2|D) = 0.54$$

و در نتیجه داریم:

$$P(T_4|D) = 0.5 \times 0.46 + 0.4 \times 0.54 = 0.446$$

سؤال ۶ در یک بازی، شهلا و مهلا هر کدام به صورت نوبتی یک جفت تاس می‌اندازند. شهلا در صورتی برنده می‌شود که در یکی از این پرتاب‌ها، مجموع اعداد دو تاسش ۶ شود قبل از این‌که مهلا به مجموع ۷ برسد. مهلا هم وقتی برنده می‌شود که به مجموع ۷ برسد، قبل از اینکه شهلا به مجموع ۶ برسد. اگر شهلا بازی را شروع کند، کدام گزینه درست است؟ (شماره‌ی گزینه مورد نظر را بنویسید کافی است.)

۱. احتمال برنده شدن شهلا بیشتر است.
۲. احتمال برنده شدن مهلا بیشتر است.
۳. احتمال برد هر دو برابر است.

راه حل:
گزینه ۲

سؤال ۷ طراح سوال قبل، می‌خواهد بداند با توجه به تستی بودن آن سوال، چقدر احتمال دارد فردی که جواب درست را انتخاب کرده است، واقعا سوال را فهمیده باشد و جواب را بداند. با توجه به تعطیلات عید و هوای خواب‌آور بهاری، وی احتمال می‌دهد یک دانشجو با احتمال 0.5 واقعا وقت گذاشته و سوال را فهمیده و حل کرده است. حالت دوم این است که با احتمال 0.2 یکی از ۳ گزینه را حذف کرده است و بین دو گزینه باقی‌مانده سکه انداخته است. در غیر این صورت ممکن است هر کدام از سه گزینه را با احتمال برابر حدس بزند. از آنجایی که طراح می‌خواهد دانسته‌های دانشجو را بسنجد نه قدرت حدس زدنشان را، به وی کمک کنید که جواب سوالش را پیدا کند. (اینکه اگر فردی جواب درست را انتخاب کرده است، احتمال اینکه واقعا جواب را بداند چقدر است؟)

راه حل:
واقعه انتخاب جواب درست در سه حالت باید بررسی شود. وقتی با احتمال 0.5 فرد جواب درست را می‌دانسته و انتخاب کرده، حالتی که با احتمال 0.2 یکی از سه گزینه را حذف کرده و بعد سکه می‌اندازد، و نهایتا حالتی که با احتمال 0.3 به شکل شانسی یکی از سه گزینه را انتخاب می‌کند.
توجه کنید درحالت دوم، وقتی ممکن است گزینه درست انتخاب شود که اولا یکی از گزینه‌های غلط حذف شود (که احتمال آن $\frac{1}{3}$ است) و دوم اینکه وقتی سکه می‌اندازیم، گزینه درست انتخاب شود (که احتمال آن $\frac{1}{2}$ است). توجه کنید که ۲ تا گزینه غلط وجود دارد.
بنابراین می‌توان احتمال خواسته شده را به شکل زیر بدست آورد:

$$P(knows\ the\ right\ answer \mid chooses\ the\ right\ answer) =$$

$$\frac{0.5}{0.5 + 2 \times (0.2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}) + 0.3 \times \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

سؤال ۸ از آن‌جایی که احتمال بدست آمده در سوال قبل چندان مورد قبول نبود، طراحان تمرین از خیر تستی بودن سوال گذشتند. لطفا راه حل کامل خود برای سوال ۶ را بنویسید!

راه حل:

$$\mathbb{P}\left(\text{بردن شهلا}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\text{بردن شهلا در } n^{th} \text{ تلاش}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

$$p_n = \mathbb{P}\left(\text{در } n-1 \text{ تلاش قبلی، شهلا مجموع ۶ و مهلا مجموع ۷ نیاورد}\right)$$

$$p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} q^{n-1} \left(1-p\right)$$

که p احتمال مجموع ۶ نیامدن و q احتمال مجموع ۷ نیامدن است یعنی می‌توان گفت $p = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$ و $q = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$ بنابراین احتمال بالا یعنی احتمال برد شهلا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{31}{36}\right)^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{155}{216}} = \frac{30}{61}$$

پس در مقابل احتمال برد مهلا برابر با $\frac{31}{61}$ و بیشتر از احتمال برد شهلا خواهد شد.

سؤال ۹ سکه‌ای را درنظر بگیرید که با احتمال p رو و با احتمال $1-p$ پشت می‌آید. q_n را احتمال زوج بار رو آمدن در n پرتاب مستقل از هم این سکه در نظر بگیرید. q_n را بدست آورید. (راهنمایی: ابتدا فرمولی بازگشتی برای q_n برحسب p و q_{n-1} بدست آورید.)

راه حل:
روی پرتاب n^{th} به شکل زیر شرط می‌گذاریم:

$$\begin{aligned} q_n &= \mathbb{P}\left(\text{زوج بودن تعداد رو ها در } n \text{ پرتاب مستقل} \mid \text{رو بودن آخرین پرتاب}\right) \mathbb{P}\left(\text{رو بودن آخرین پرتاب}\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(\text{زوج بودن تعداد رو ها در } n \text{ پرتاب مستقل} \mid \text{پشت بودن آخرین پرتاب}\right) \mathbb{P}\left(\text{پشت بودن آخرین پرتاب}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\text{فرد بودن تعداد رو ها در } n-1 \text{ پرتاب مستقل}\right) \mathbb{P}\left(\text{رو بودن آخرین پرتاب}\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(\text{زوج بودن تعداد رو ها در } n-1 \text{ پرتاب مستقل}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\text{پشت بودن آخرین پرتاب}\right) \\ &= \left(1-q_{n-1}\right) p + q_{n-1}\left(1-p\right) = p + \left(1-2p\right) q_{n-1} \end{aligned}$$

توجه کنید که $q_1 = 1-p$. بنابراین:

$$\begin{aligned} q_n &= p + (1-2p)\left(p + (1-2p)\, q_{n-2}\right) = p + p\,(1-2p) + (1-2p)^2\, q_{n-2} \\ &= p + p\,(1-2p) + p\,(1-2p)^2 + p\,(1-2p)^3 + \cdots + (1-2p)^{n-1}\, q_1 \\ &= p \sum_{k=0}^{n-2} (1-2p)^k + (1-p)\,(1-2p)^{n-1} \\ &= p\left(\frac{1-(1-2p)^{n-1}}{2p}\right) + (1-p)\,(1-2p)^{n-1} \\ &= \frac{1-(1-2p)^{n-1}}{2} + \frac{2\,(1-p)\,(1-2p)^{n-1}}{2} \\ &= \frac{1+(1-2p)^{n-1}\,(2-2p-1)}{2} \\ &= \frac{1+(1-2p)^{n}}{2} \end{aligned}$$

موفق باشید