دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی		بهار ۱۴۰۱
	تمرین سری چهارم	
مدرس: مهدی جعفری		موعد تحویل: جمعه ۳۰ اردیبهشت ۱۴۰۱

سؤال ۱ فرض کنید که X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x) = cx^2 \sin \pi x \qquad x \in [0,1] \tag{۱}$$

الف) مقدار c را بدست آورید.

ب) تابع توزیع تجمعی X را بدست آورید.

سؤال ۲ یک ایستگاه فضایی را روی کره ماه در نظر بگیرید. مجید یک فضانورد است که در کره ماه قرار دارد. در این ایستگاه دو خط فضایی وجود دارد که یکی به مقصد مریخ و دیگری به مقصد زمین میرود. خط مربوط به مریخ از ساعت ۵ صبح شروع به کار میکند و هر ۱۵ دقیقه یکبار یک سفینه از ایسگاه فضایی به مقصد مریخ راهی میشود. به طور مشابه خط مربوط به زمین هم از ساعت ۵:۰۵ دقیقه شروع کرده و هر ۱۵ دقیقه یکبار یک سفینه از ایستگاه فضایی به مقصد زمین حرکت میکند.

الف) اگر زمان رسیدن مجید به ایستگاه از یک توزیع یکنواخت بین ۵ و ۶ صبح پیروی کند و او سوار اولین قطاری بشود که در زمان حضور او وارد ایستگاه شود. احتمال اینکه او به مریخ برود چقدر است؟

ب) اگر مجید بصورت یکنواخت بین ۵:۱۰ تا ۶:۱۰ برسد چطور؟

سؤال ۳ اگر تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی را F بنامیم. آنگاه میانه آن میشود نقطه ای مثل m که $F(m) = \frac{1}{2}$ که معنی آن این است که احتمال اینکه یک متغیر تصادفی بزرگتر یا کوچک تر میانه خود باشد با هم برابر است. در هرکدام از حالت های زیر میانه توزیع را بدست اورید.

الف) توزیع یکنواخت در بازه (a,b) باشد.

ب) توزیع نمایی با نرخ λ باشد.

سؤال ۴ دو بیمار برای ملاقات با پزشک از منشی میخواهند که زمانی برای آنها مشخص کند. منشی حواس پرت به اشتباه برای هر دو زمان یکسانی را تنظیم میکند اما دکتر در هر زمان فقط میتواند یک بیمار را معاینه کند. مدت زمان معاینه دو بیمار مستقل از یکدیگرو دارای توزیع نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه است. امید ریاضی فاصله زمانی بین ورود بیمار اول و خروج بیمار دوم را در دو حالت زیر بیابید.

الف) بیمار اول سر وقت حاضر میشود ولی بیمار دوم ۵ دقیقه دیر میرسد.

ب) بیمار اول سر وقت حاضر میشود ولی بیمار دوم X دقیقه دیر میرسد. به طوری که X دارای توزیع نمایی با میانگین ۵ دقیقه است.

سؤال ۵ ابتدا نقطه Y را از فاصله $(0,1)$ به تصادف به طور یکنواخت انتخاب کرده و سپس نقطه دیگر X را به تصادف به طور یکنواخت از فاصله $(0,Y^2)$ انتخاب میکنیم. تابع چگالی احتمال X و میانگین و واریانس آن را بیابید.

سؤال ۶ فرض کنید که X یک متغیر تصادفی باشد که مقادیر ممکن برای آن در بازه ۰ تا c قرار دارند. بنابراین:

$$P\{0 \leq X \leq c\} = 1$$

نشان دهید:

$$Var(X) \leq \frac{c^2}{4}$$

سؤال ۷ کوواریانس شرطی X و Y به صورت زیر تعریف میشود:

$$Cov(X,Y|Z) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Z])(Y-\mathbb{E}[Y|Z])|Z]$$

با توجه به تعریف فوق گزاره های زیر را اثبات کنید:

الف)

$$Cov(X,Y|Z) = \mathbb{E}[XY|Z] - \mathbb{E}[X|Z]\mathbb{E}[Y|Z]$$

ب)

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[Cov(X,Y|Z)] + Cov(\mathbb{E}[X|Z], E[Y|Z])$$

ج)

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var(\mathbb{E}[X|Y])$$

سؤال ۸ فرض کنید متغیرهای $X_1, X_2, \dots, X_n$ از توزیع برنولی با احتمال p پیروی می‌کنند. متغیر تصادفی S را به صورت زیر تعریف کنید.

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{۲}$$

نشان دهید که

$$m_S(t) = \left(p\exp\left(\sqrt{t}n\alpha\right) + (1-p)\exp\left(-\sqrt{t}n\alpha^{-1}\right)\right)^n \tag{۳}$$

است و سپس α را بدست آورید.

سؤال ۹ (امتیازی) یک متغیر تصادفی X با میانگین $\mu = \mathbb{E}[X]$ را زیر گاوسی مینامیم اگر یک عدد مثبت σ وجود داشته باشد که به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\mathbb{E}[e^{\lambda(X-\mu)}] \leq e^{\sigma^2\lambda^2/2}$$

حال یک متغیر تصادفی X با میانگین $\mu = \mathbb{E}[X]$ را در نظر بگیرید بطوریکه صرفا مقادیر بازه $[a,b]$ را اخذ کند.

الف) تابع $\Psi(\lambda) = \log\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ را درنظر بگیرید. نشان دهید $\Psi(0) = 0$ و $\Psi'(0) = \mu$ میباشد.

ب) نشان دهید $\Psi"(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda[X^2] - (\mathbb{E}_\lambda[X])^2$ ، که $\mathbb{E}_\lambda[f(X)] := \frac{\mathbb{E}[f(X)e^{\lambda X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}$.
از این نتیجه استفاده کنید تا یک حد بالا برای

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |\Psi"(\lambda)|$$

بیابید.

ج) از دو بخش قبلی استفاده کنید تا نشان دهید که X یک زیر گاوسی است با پارامتر σ که حداکثر $\frac{b-a}{2}$ است.