



## آمار و احتمال مهندسی

نیم سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰  
مدرس: سید ابوالفضل مطهری

## تمرین پنجم

زمان تحویل: تا آخر روز دوشنبه ۸ دی.

لطفا پاسخها به همراه نام و شماره دانشجویی در کونرا آپلود شوند.

## سوال اول (۲۰ نمره)

تابع توزیع توأم  $X$  و  $Y$  به شرح زیر داده شده است. توزیع متغیرهای خواسته شده را بیابید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف)  $X + Y$

ب)  $XY$

ج)  $Y/X$

د)  $Y - X$

## سوال دوم (۱۵ نمره)

سه متغیر تصادفی  $Y_1, Y_2$  و  $Y_3$  از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ پیروی می کنند. اگر این سه متغیر هر کدام طول یک چوب را نشان دهند، احتمال ساخت مثلث با این سه قطعه چوب را بیابید.

## سوال سوم (۱۵ نمره)

سه متغیر تصادفی مستقل  $X_1, X_2$  و  $X_3$  از توزیع نمایی با میانگین  $\frac{1}{\lambda_i}$  پیروی می کنند.

الف)  $E[X_1 + X_2 + X_3 | X_1 > 1, X_2 > 2, X_3 > 3]$  را بر حسب  $\lambda_i$  ها بیابید.

ب) ثابت کنید  $Pr(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ .

ج)  $Pr(X_1 = \min(X_1, X_2, X_3))$  را بیابید.

راهنمایی: سعی کنید احتمال خواسته شده را با استفاده از  $X_1$  و  $\min(X_2, X_3)$  بیان کنید. توزیع کمینه ی چند متغیر نمایی را به

### سوال چهارم (۱۰ نمره)

فراندومی برگزار شده و می دانیم رای هر فرد به احتمال  $p$  آری است.

الف) اگر فرض کنیم  $p = 0.5$ ، با استفاده از قضیه ی حد مرکزی تخمین بزنید از بین ۲۵ نفر، با چه احتمالی حداقل ۱۴ نفر رای آری می دهند؟

ب) اگر  $p$  مجهول و  $n$  تعداد افراد رای دهنده باشد،  $\bar{X}_n$  را نسبت افراد موافق به کل افراد در نظر بگیرید. کمترین تعداد  $n$  چقدر باشد تا ۹۰٪ اطمینان داشته باشیم که اختلاف  $\bar{X}_n$  از مقدار واقعی  $p$  به اندازه ی ۰.۰۱ است؟

---

### سوال پنجم (۱۵ نمره)

دو متغیر تصادفی و مستقل  $X$  و  $Y$  از توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  پیروی می کنند. مقادیر  $cov(Y, \max(X, Y))$  و  $cov(Y, \min(X, Y))$  را محاسبه کنید.

---

### سوال ششم (۱۰ نمره)

مهندسين عمران بر این باورند که  $W$ ، وزنی که یک پل می تواند تحمل کند بدون آن که دچار آسیب شود، از توزیع نرمال با میانگین ۴۰۰ و انحراف معیار ۴۰ پیروی می کند. اگر وزن یک ماشین یک متغیر تصادفی با میانگین ۳ و انحراف معیار ۳ باشد، چند ماشین روی پل قرار گیرند تا احتمال خراب شدن آن حداقل ۰.۱ باشد؟ (واحد وزن ۵۰۰ کیلوگرم است.)

---

موفق باشید.