



- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله ۱. (۸ نمره)

- تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید می باشد و تاس B دارای ۲ وجه قرمز و ۴ وجه سفید می باشد. یک سکه را پرتاب می کنیم، اگر شیر ظاهر شود بازی را با تاس A و اگر خط ظاهر شود با تاس B انجام می دهیم.
- الف) نشان دهید که احتمال مشاهده وجه قرمز تاس در هر آزمایش $\frac{1}{2}$ است.
- ب) اگر رنگ وجه تاس در دو آزمایش اول قرمز باشد، احتمال مشاهده وجه قرمز در سومین آزمایش چقدر است؟
- ج) اگر نتیجه دو آزمایش اول وجه قرمز باشد، احتمال اینکه تاس A انتخاب شده باشد چقدر است؟

مسئله ۲. (۱۲ نمره)

آریا و پارسا در حال انجام یک بازی با یک سکه ناعادلانه هستند. شیوه بازی به این صورت است که اگر سکه دوبار متوالی رو بیاید، آریا برنده می شود و اگر دوبار متوالی پشت بیاید، پارسا برنده می شود و بازی تا پیدا شدن برنده ادامه پیدا می کند. اگر احتمال رو آمدن سکه p باشد و بدانیم که آریا برنده شده است، احتمال آنکه بار اول رو آمده باشد چقدر است؟

مسئله ۳. (۱۲ نمره)

ده میلیون نفر در یک قرعه کشی خاص شرکت می کنند. برای هر نفر، احتمال برنده شدن یک در ده میلیون و مستقل از دیگران است.

- آ) یک تقریب ساده و خوب برای توزیع جرم احتمال تعداد افرادی که در قرعه کشی برنده می شوند، پیدا کنید.
- ب) تبریک! شما قرعه کشی را برنده شدید. با این حال، ممکن است برندگان دیگری هم وجود داشته باشند. در نظر بگیرید که تعداد برندگان به جز شما، از توزیع پواسون با پارامتر ۱ نمونه گیری می شود و اگر بیش از یک برنده وجود داشته باشد، جایزه به یکی از برندگان به صورت تصادفی داده می شود. با توجه به این اطلاعات، احتمال برنده شدن خودتان را محاسبه کنید (ساده سازی شود).

مسئله ۴. (۱۲ نمره)

توزیع گامبل، توزیع $-\log X$ با $X \sim \text{Expo}(1)$ است.

الف) تابع توزیع تجمعی (CDF) توزیع گامبل را پیدا کنید.

(ب) فرض کنید X_1, X_2, \dots نمونه‌های مستقل و هم توزیع از توزیع $\text{Expo}(1)$ باشند و $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ باشد. تابع توزیع تجمعی M_n (CDF) را بیابید.
 (ج) نشان دهید که $M_n - \log n$ به توزیع گامبل همگراست، به عبارت دیگر همانطور که $n \rightarrow \infty$ ، تابع توزیع $M_n - \log n$ به تابع توزیع گامبل همگرا می‌شود.

مسئله‌ی ۵. (۱۲ نمره)

علی و حسن یک تورنمنت تنیس روی میز متشکل از تعدادی بازی پشت سر هم انجام می‌دهند. احتمال برنده شدن علی در هر بازی مستقل از بازی‌های دیگر برابر p است (نتیجه‌ی مساوی در بازی‌ها وجود ندارد). آن‌ها با قاعده «برنده با دو اختلاف» بازی می‌کنند. طبق این قاعده اولین بازیکنی که دو بازی بیشتر از حریف خود ببرد، تورنمنت را برنده می‌شود. توزیع آماری تعداد بازی‌های انجام شده در این تورنمنت را بیابید.

مسئله‌ی ۶. (۱۲ نمره)

یک سکه را n بار پرتاب می‌کنیم. اگر احتمال شیر آمدن در پرتاب این سکه p و احتمال خط آمدن $q = 1 - p$ باشد، نشان دهید احتمال زوج بودن تعداد دفعاتی که سکه شیر می‌آید برابر است با:

$$\frac{1}{2} [1 + (q - p)^n]$$

مسئله‌ی ۷. (۱۰ نمره)

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با تابع جرم احتمال یکسان به شکل زیر هستند.

$$P(X = \alpha) = P(Y = \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{for } \alpha = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

فرض کنید متغیر تصادفی Z را به صورت $Z = X - Y$ تعریف کرده‌ایم.

الف) تابع جرم احتمال Z را پیدا کنید.

ب) مقدار $P[X = 3 | Z = 2]$ را بیابید.

مسئله‌ی ۸. (۱۲ نمره)

X و Y متغیرهای برنولی مستقل از هم با پارامتر $\frac{1}{2}$ هستند. متغیر تصادفی جدید Z را به شکل XOR این دو متغیر تصادفی تعریف می‌کنیم.

$$Z = X \oplus Y$$

الف) توزیع متغیر تصادفی Z را بیابید.

ب) آیا X و Z مستقل هستند؟

ج) تحقق $Y = y$ به ما گزارش شده است. (یعنی مقدار $y \in \{0, 1\}$ دانسته فرض شود). آیا X و Z مستقل هستند؟

مسئله ۹. (۱۰ نمره)

دو متغیر تصادفی پیوسته Y و Z را در نظر بگیرید. فرض کنید متغیر تصادفی X به احتمال p برابر با Y و به احتمال $1-p$ برابر با Z است. الف) نشان دهید تابع چگالی احتمال X برابر با عبارت زیر است:

$$f_X(x) = pf_Y(x) + (1-p)f_Z(x)$$

ب) برای متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر CDF را محاسبه نمایید.

$$f_X(x) = \begin{cases} p\lambda e^{\lambda x} & \text{if } x < 0 \\ (1-p)\lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

توجه کنید $0 < p < 1$ و $\lambda > 0$

موفق باشید :