آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۳ـ۱۴۰۲

مدرس: دکتر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین سری سوم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

مسئله‌ی ۱. (۱۰ نمره)

فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda > ۰$ بوده و $F_X(x)$ و $f_X(x)$ به ترتیب تابع توزیع تجمعی و تابع توزیع چگالی احتمال آن باشند. تعریف می‌کنیم $g = \ln x$. حال متغیر تصادفی Y را به شکل زیر از روی X تعریف می‌کنیم.

$$Y = g(f_X(F_X(X)))$$

احتمال اینکه $Y < ۰$ باشد را محاسبه کنید.

حل. تعریف می‌کنیم $U = F_X(X)$. متغیر تصادفی U از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند . بر اساس این تعریف می‌توانیم Y را به شکل زیر بازنویسی کنیم.

$$\begin{aligned} Y = g(f_X(F_X(X))) &= g(f_X(U)) = g(\lambda e^{-\lambda U}) \\ &= \ln \lambda e^{-\lambda U} \\ &= \ln \lambda - \lambda U \end{aligned}$$

حال احتمال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant ۰) = P(\ln \lambda - \lambda U \leqslant ۰) &= P(\lambda U \geqslant \ln \lambda) \\ &= P(U > \frac{\ln \lambda}{\lambda}) \\ &= \min(۱ - \frac{\ln \lambda}{\lambda}, ۱) \end{aligned}$$

▷

مسئله‌ی ۲. (۶ نمره)

حمید یک جعبه جادویی دارد که درون آن کارت تمام اعداد طبیعی وجود دارد. او هر بار به شکل تصادفی یک کارت از درون این جعبه بیرون می‌کشد و پس از دیدن عدد روی آن، کارت را به جعبه برمی‌گرداند. می‌دانیم احتمال بیرون کشیده‌شدن اعداد طبیعی از این جعبه از توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = ۳$ پیروی می‌کند. حمید ۱۰۰ بار این آزمایش را انجام می‌دهد و هر بار که کارت عدد ۶ را از جعبه بیرون می‌کشد یک اسکناس یک دلاری جایزه می‌گیرد. امید ریاضی تعداد اسکناس‌های یک‌دلاری حمید پس از ۱۰۰ بار پرتاب تاس را بدست آورید.

حل. اگر X_i نشان‌دهنده‌ی عدد کارت بیرون‌کشیده‌شده در آزمایش i ام باشد، خواهیم داشت:

$$P(X_i = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

بنابراین احتمال بیرون کشیدن کارت عدد ۶ برابر است با

$$P(X_i = ۶) = \frac{e^{-۳}۳^۶}{۶!} = ۰/۰۵$$

بنابراین داریم:

$$\mathbb{E}(X_۱ + \cdots + X_{۱۰۰}) = \sum_{i=۱}^{۱۰۰} \mathbb{E}(X_i) = ۱۰۰ \times ۰/۰۵ = ۵$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۳. اثبات کنید! (۱۴ نمره)

الف. اگر متغیر تصادفی X از توزیع پواسون با پارامتر λ پیروی کند، اثبات کنید که داریم $E[X^n] = \lambda E[(X+۱)^{n-۱}]$

ب. اگر متغیر تصادفی X از توزیع هندسی با پارامتر p پیروی کند، اثبات کنید که داریم $E[\frac{۱}{X}] = \frac{-p\ln p}{۱-p}$

راهنمایی: در صورتی که به عبارت $\sum_{i=۱}^{\infty} \frac{a^i}{i}$ برخورد کردید، می‌توانید عبارت داخل سیگما را با $\int_۰^a x^{i-۱}dx$ تقریب بزنید.

حل. الف.

ابتدا یک طرف قضیه را اثبات میکنیم:

$$E(X^n) = e^{-\lambda}\sum_{j=۰}^{\infty} j^n\frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\sum_{j=۱}^{\infty} j^{n-۱}\frac{\lambda^j}{(j-۱)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=۱}^{\infty} j^{n-۱}\frac{\lambda^{j-۱}}{(j-۱)!} = \lambda e^{-\lambda}(\sum_{i=۰}^{\infty} (i+۱)^{n-۱}\frac{\lambda^i}{(i)!}) = \lambda E[(X+۱)^{n-۱}]$$

ب.

$$E[\tfrac{۱}{X}] = \sum_{k=۱}^{\infty} \tfrac{۱}{k}p(X=k)$$

$$= \sum_{k=۱}^{\infty} \tfrac{۱}{k}p(۱-p)^(k-۱)p$$

$$= \tfrac{p}{۱-p}\sum_{k=۱}^{\infty} \tfrac{(۱-p)^k}{k}$$

در عبارت $\sum_{i=۱}^{\infty} \frac{a^i}{i}$ می توان از عبارت $\int_۰^a x^{i-۱}dx$ به عنوان جایگزین استفاده کرد و بدین ترتیب داریم:

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \tfrac{(۱-p)^k}{k} = \sum_{k=۱}^{\infty} \int_۰^{۱-p} x^{k-۱}dx = \int_۰^{۱-p} (\sum_{k=۱}^{\infty} x^{k-۱})dx = \int_۰^{۱-p} (\sum_{k=۰}^{\infty} x^k)dx = \int_۰^{۱-p} \tfrac{۱}{۱-x}dx$$

سپس بااستفاده از تغییر متغیر $y = ۱ - x$ داریم:

$$\int_۰^{۱-p} \tfrac{۱}{۱-x}dx = \int_۱^p \tfrac{۱}{y}(-dy) = ln\,۱ - ln\,p = -ln\,p$$

و بدین ترتیب عبارت موردنظر در سوال اثبات می‌شود:

$$E[\tfrac{۱}{X}] = \tfrac{-p\ln p}{۱-p}$$

▷

مسئله‌ی ۴. کارخانه شکلات‌سازی (۱۰ نمره)

چارلی، مدیر کارخانه شکلات‌سازی وانکا، قصد دارد مسابقه جدیدی را ترتیب بدهد. او یک کارت جایزه در درون هر جعبه‌ی شکلات قرار می‌دهد. این کارت ها در کل ۷ مدل دارند و با جمع‌آوری هر ۷ مدل، می‌توان برنده مسابقه شد. تعداد شکلات‌ها نامحدود است و شخصی که می‌خواهد برنده شود باید آنقدر شکلات بخرد که از هر مدل کارت حداقل یکی داشته باشد.

الف) فرض کنید شخصی تا این لحظه i مدل کارت جمع‌آوری کرده است. امید ریاضی تعداد شکلات‌هایی که باید بخرد تا یک کارت از مدل جدید به دست بیاورد چقدر است؟

ب) امید ریاضی تعداد خریدهای لازم برای به دست آوردن تمام ۷ مدل کارت برای هر نفر چقدر است؟

حل. الف) فرض کنیم X متغیر تصادفی برنولی باشد که نشان‌دهنده‌ی دیدن کارت جدید است. برای هر کارت، احتمال اینکه مدل آن کارت جدید باشد، $\frac{7-i}{7}$ است. اگر Y متغیر تصادفی باشد که نشان‌دهنده‌ی تعداد کارت‌های لازم برای دیدن مدل جدید باشد، داریم:

$$Y \sim Geom(\frac{7-i}{7})$$

بنابراین $\mathbb{E}(Y) = \frac{7}{7-i}$

ب) برنده کسی است که تمام ۷ مدل را بیابد. اگر X_i را تعداد خریدهای لازم برای یافتن i امین کارت متفاوت در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$X_i \sim Geometric(p_i) \Rightarrow P_X(k) = (1-p)^{k-1}p, \quad E[X] = \frac{1}{p} \tag{1}$$

همچنین داریم:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_7 = \sum_{i=1}^{7} X_i \tag{2}$$

$$E[X] = E[X_1 + X_2 + \ldots + X_7] \Rightarrow \sum_{i=1}^{7} E[X_i] \tag{3}$$

که در رابطه ۳ از خطی بودن امید ریاضی بهره بردیم.

بنابراین برای یافتن امید ریاضی خواسته شده بایست مقادیر پارامترهای این متغیرها را یا همان p_i ها را بیابیم.

در نظر داشته باشید که p_i برابر با احتمال یافتن i امین کارت متفاوت می‌باشد. بنابراین واضح است که داریم:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{6}{7}, \quad \ldots$$
$$\Rightarrow p_i = \frac{7-(i-1)}{7}$$

در نتیجه به کمک روابط ۱ و ۳ ،امید ریاضی را به دست خواهیم آورد:

$$E[X] = \frac{7}{7} + \frac{7}{6} + \ldots + \frac{7}{1} = 18/15$$

▷

مسئله‌ی ۵. دانشگاه شریف (۱۰ نمره)

می‌دانیم این روزها تنها از طریق درهای مرکزی و انرژی می‌توان وارد دانشگاه شریف شد. فرض کنید تعداد دانشجویانی که از در مرکزی داخل می‌شوند از توزیع پوآسون با پارامتر λ_1 و همچنین تعداد دانشجویانی که از در انرژی داخل می‌شوند نیز از توزیع پوآسون با پارامتر λ_2 پیروی می‌کنند و این دو مقدار مستقل از یکدیگرند.
الف) ثابت کنید تعداد دانشجویان وارد شده به دانشگاه در هر لحظه از توزیع پواسون با پارامتر $\lambda_1+\lambda_2$ پیروی می‌کند.
ب) اگر تعداد دانشجویان وارد شده به دانشگاه در زمانی خاص، برابر با n نفر باشد، احتمال اینکه k نفر از در مرکزی وارد شده باشند، چقدر است؟

حل. در حل سوال M را متغیر مرکزی و E را متغیر انرژی می‌دانیم. همچنین $X = M + E$ داریم.
الف)

$$P(X=x) = P(M+E=x) = \sum_{i=0}^{x} P(M=i, M+E=x)$$

$$= \sum_{i=0}^{x} P(M=i, E=x-i) = \sum_{i=0}^{x} P(M=i)P(E=x-i)$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{x-i}}{i!(x-i)!}$$

صورت و مخرج کسر داخل سیگما را در $x!$ ضرب می‌کنیم:

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{x-i}}{x!}$$

به کمک بسط دو جمله‌ای داریم:

$$P(M+E=x) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^x}{x!}$$

که نشانگر توزیع پواسون با پارامتر $\lambda_1 + \lambda_2$ است.
ب)

$$P(M=k|M+E=n) = \frac{P(M=k, M+E=n)}{P(M+E=n)}$$

با توجه به پاسخ قسمت الف خواهیم داشت:

$$\frac{P(M=k, M+E=n)}{P(X=n)} = \frac{P(M=k)P(E=n-k)}{P(X=n)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

▷

مسئله‌ی ۶. استخراج واریانس (۶ نمره)

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر بدانیم که $Var(2X+3Y) = 17$ و $Var(X-2Y) = 6$، مقدار واریانس X و Y را بیابید.

حل.

$$Var(۲X+۳Y) = Var(۲X) + Var(۳Y) = ۴Var(X) + ۹Var(Y) = ۱۷$$
$$Var(X-۲Y) = Var(X) + Var(-۲Y) = Var(X) + ۴Var(Y) = ۶$$

که خواهیم داشت:

$Var(X) = ۲$ و $Var(Y) = ۱$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۷. توزیع نمایی (۱۴ نمره)

در نظر بگیرید W از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda > ۰$ پیروی می‌کند. حال دو متغیر X,Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X := \lfloor W \rfloor, \qquad Y := W - X$$

به سوالات زیر پاسخ دهید

الف. تابع جرم احتمال (PMF) را برای متغیر X بدست آورید.

ب. برای $x \in \mathbb{Z}$, $y \in (۰,۱)$. مقدار $\mathbb{P}(Y \leqslant y \mid X = x)$ و مقدار CDF برای Y را بدست آورید.

ج. $\mathbb{E}[Y], \mathrm{Var}(Y)$ را بدست آورید.

حل.

الف.

$$P(X=k) = P(\lfloor W \rfloor) = P(k \leqslant w < k+۱) = F_W(k+۱) - F_W(k)$$

با توجه به اینکه $W \sim Exp(\lambda)$ داریم که

$$F_W(w) = ۱ - e^{-\lambda w} \Longrightarrow P(X=k) = (۱-e^{-\lambda(k+۱)}) - (۱-e^{-\lambda k}) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+۱)}$$

ب.

$$P(Y \leqslant y \mid X=x) = P(W-X \leqslant y \mid X=x) = P(۰ \leqslant W-x \leqslant y) = P(x \leqslant W \leqslant x+y) = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(x+y)}$$

همچنین برای بدست آوردن CDF(Y) به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$P(Y \leqslant y) = \sum_{x=۰}^{\infty} P(Y \leqslant y \mid X=x) \times P(X=x) = \sum_{x=۰}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(x+۱)}} \times \left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(x+۱)}\right)$$
$$= (۱-e^{-\lambda y}) \sum_{x=۰}^{\infty} e^{-\lambda x} = \frac{۱-e^{-\lambda y}}{۱-e^{-\lambda}} = \frac{۱-e^{-\lambda y}}{۱-e^{-\lambda}}$$

ج.

$$P_Y(y) = CDF(y)' = \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{۱-e^{-\lambda}}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 yP_Y(y)\,dy = \int_0^1 y \times \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{1-e^{-\lambda}}dy = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\int_0^1 ye^{-\lambda y}dy$$
$$= \frac{1-(\lambda+1)\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \times \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$$

$$var[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$$
$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 y^2 P_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2 \times \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{1-e^{-\lambda}}dy = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\int_0^1 y^2 e^{-\lambda y}dy$$
$$= \frac{2-(\lambda^2+2\lambda+2)\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda^2} \times \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۸. رادماخر (۸ نمره)

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی از توزیع گسسته رادماخر باشند. به عبارت دیگر

$$P(X_i = \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \alpha = -1 \\ \frac{1}{2}, & \alpha = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) ثابت کنید $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = 0$

ب) فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ دوبه‌دو مستقل باشند. $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ را بیابید.

ج) تمام حالت‌های ممکن برای مستقل بودن یا نبودن دو به دو متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ را در نظر بگیرید(n عددی زوج است). کمترین واریانس ممکن برای $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ بین این حالت‌ها چقدر است؟

د) تمام حالت‌های ممکن برای مستقل بودن یا نبودن دو به دو متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ را در نظر بگیرید. به نظر شما بیشترین واریانس ممکن برای $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ بین این حالت‌ها چقدر است؟

حل.

الف)

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = n(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(+1)) = 0$$

ب)

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = n(\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1)) = n$$

ج) برای هر $1 \leqslant k \leqslant n$ قرار دهید $X_{2k} = X_{2k-1}$. خواهیم داشت:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0$$

بنابراین می‌توانیم به واریانس 0 دست پیدا کنیم که کمترین واریانس ممکن است.

د) بیشترین واریانس زمانی رخ می‌دهد که تمام X_iها با هم برابر شوند. در این حالت داریم:

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(nX_1) = n^2\mathrm{Var}(X_1) = n^2$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۹. توزیع شرطی (۸ نمره)

فرض کنید $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. با فرض $a > 0$ در قسمت‌های الف و ب توزیع Z را بیابید.

الف)

$$Z = \begin{cases} X & \text{if } Y \geqslant 0 \\ -X & \text{if } Y < 0 \end{cases}$$

ب)

$$Z = \begin{cases} X & \text{if } Y \geqslant a \\ -X & \text{if } Y < a \end{cases}$$

حل.

الف) تابع چگالی توزیع نرمال استاندارد را ϕ و توزیع تجمعی آن را Φ می‌نامیم. داریم:

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z \leqslant z) &= P(Z \leqslant z | Y \geqslant 0)P(Y \geqslant 0) + P(Z \leqslant z | Y < 0)P(Y < 0) \\ &= P(Z \leqslant z | Z = X)P(Y \geqslant 0) + P(Z \leqslant z | Z = -X)P(Y < 0) \\ &= \Phi(0)P(X \leqslant z) + (1 - \Phi(0))P(-X \leqslant z) \\ &= \frac{1}{2}P(X \leqslant z) + \frac{1}{2}P(-X \leqslant z) \\ &= \frac{1}{2}\Phi(z) + \frac{1}{2}\Phi(z) \qquad = \Phi(z) \end{aligned}$$

بنابراین $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

ب)

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z \leqslant z) &= P(Z \leqslant z | Y \geqslant a)P(Y \geqslant a) + P(Z \leqslant z | Y < a)P(Y < a) \\ &= P(Z \leqslant z | Z = X)P(Y \geqslant a) + P(Z \leqslant z | Z = -X)P(Y < a) \\ &= P(X \leqslant z)(1 - F_Y(a)) + P(-X \leqslant z)F_Y(a) \\ &= \Phi(z)(1 - \Phi(a)) + \Phi(z)\Phi(a) \\ &= \Phi(z) \end{aligned}$$

بنابراین $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ $\triangleright$

مسئله‌ی ۱۰. کشیدگی! (۱۴ نمره)

برای متغیر تصادفی X، $\mathrm{Kurt}[X]$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{Kurt}[X] = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{\mathrm{E}\left[(X - \mu)^4\right]}{\left(\mathrm{E}\left[(X - \mu)^2\right]\right)^2}$$

نشان دهید در صورتی که $X \sim \mathcal{N}(۰, \sigma^۲)$ ، خواهیم داشت $\mathrm{Kurt}[X] = ۳$

راهنمایی: $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲}$

حل.

▷

۱۵

می‌دانیم :

$$X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \qquad \mu = 0 \qquad E[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \Big|_{t=0}$$

با توجه به اینکه در این سوال $M_X(t) = \underbrace{e^{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}}_{M}$ است، پس:

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = (\mu + \sigma^2 t) M$$

$$\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} = \sigma^2 M + (\mu + \sigma^2 t)^2 M = \left(\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2\right) M = A(t)$$

$$\xrightarrow{\mu = 0} E[X^2] = A(0) = \sigma^2 M = \boxed{\sigma^2}$$

$$\frac{d^3 M_X(t)}{dt^3} = 2\sigma^2 (\mu + \sigma^2 t) M + \left(\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2\right)(\mu + \sigma^2 t) M$$

$$= \left(3\sigma^2(\mu + \sigma^2 t) + (\mu + \sigma^2 t)^3\right) M$$

$$\frac{d^4 M_X(t)}{dt^4} = \left(3\sigma^4 + 3\sigma^2(\mu + \sigma^2 t)^2\right) M + \left(3\sigma^2(\mu + \sigma^2 t) + (\mu + \sigma^2 t)^3\right)(\mu + \sigma^2 t) M = B(t)$$

$$\xrightarrow{\mu = 0} E[X^4] = B(0) = \boxed{3\sigma^4}$$

$$\mathrm{Kurt}[X] = \frac{E\left[(X - \mu)^4\right]}{\left(E\left[(X - \mu)^2\right]\right)^2} \overset{\mu = 0}{=\!=} \frac{E[X^4]}{\left(E[X^2]\right)^2} = \frac{3\sigma^4}{(\sigma^2)^2} = 3 \longrightarrow$$ ثابت شد □

موفق باشید :)