



نکات مهم

- پاسخ‌های نظری خود را در قالب یک فایل pdf با اسم `HW#_[STD-Num]` در بخش مختص به خود در کوئرا آپلود کنید. پاسخ‌های عملی را نیز با نامی مشابه، ولی با فرمت zip در بخش مختص خود آپلود کنید.
- تنها سوالات ستاره‌دار تمرین، نیاز به تحویل دارند. نوشتن پاسخ‌های نظری، هم به صورت تایپی و هم دست‌نویس، مقبول است. پاسخ‌های عملی باید در زبان R نوشته شوند.
- سوالات پرسیده شده در خصوص تمرین در شبکه‌های اجتماعی، به هیچ عنوان پاسخ داده نخواهند شد؛ تنها مکان مجاز رفع اشکال در خصوص تمرین، بخش پرسش‌ها و پاسخ‌ها در کوئرا است.
- زمان تحویل تمرین، به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد، بنابراین لازم است که زمان خود را برای انجام تمرین مدیریت کرده و آن را به روزهای پایانی موکول نکنید.
- امکان بارگذاری تمرین در کوئرا تا ۷۲ ساعت پس از ددلاین تمرین وجود دارد، اما به ازای هر ساعت تاخیر، یک درصد از نمره نهایی تمرین را از دست خواهید داد. دقیقه‌ها و ثانیه‌ها، رو به بالا گرد خواهند شد؛ مثلاً، یک ساعت و نیم تاخیر، معادل دو ساعت تاخیر محسوب می‌شود.
- در طول ترم، ۲۴۰ ساعت کوپن تاخیر خواهید داشت و با استفاده از آن‌ها، می‌توانید بدون کسر نمره، از تاخیرها استفاده کنید. جریمه‌ی تاخیرها، از تمرینی محاسبه می‌شوند که در آن، کوپن‌ها به اتمام رسیده باشند. نمره‌ی امتیازی برای اشخاصی که مجموع تاخیرهای ایشان در کل ترم، کم‌تر از ۲۴۰ ساعت باشد، به هیچ عنوان در نظر گرفته نمی‌شود.
- مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه هم می‌شود، اما هر دانش‌جو موظف است تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده، باید توسط خود دانش‌جو نوشته شده باشد. در صورت کشف اولین مورد تقلب هر دانش‌جو، نمره‌ی همان تمرین وی، صفر در نظر گرفته شده و در صورت کشف دومین مورد تقلب هر دانش‌جو، منفی نمره‌ی کل تمرین‌ها به وی تعلق خواهد گرفت. برای کسب اطلاعات بیشتر در خصوص آیین‌نامه‌ی مشورت و تقلب، می‌توانید به بخش مربوطه در ویکی دانشکده مراجعه کنید. لازم به ذکر است که این جرایم به هیچ عنوان بخشیده نخواهند شد.

سوالات نظری

مسئله‌ی ۱. مقاله‌ها *

فرض کنید تعداد مقاله‌های نوشته شده در دانشگاه شریف در یک سال، یک متغیر تصادفی با میانگین ۵۰ و واریانس ۲۵ است.

الف) احتمال این‌که تعداد مقاله‌های نوشته شده امسال در دانشگاه شریف، بیش‌تر از ۷۰ تا باشد، حداکثر چند است؟
ب) احتمال این‌که تعداد مقاله‌های نوشته شده امسال در دانشگاه شریف بین ۳۰ تا ۷۰ تا باشد، حداقل چند است؟

مسئله‌ی ۲. جورج روسی *

جورج که علاقه‌ی زیادی به کدنویسی دارد، به طور میانگین هفته‌ای ۱۳۸۵ خط کد می‌نویسد. مطلوب است:

الف) بازه‌ای برای احتمال این‌که جورج در هفته‌ی آتی حداقل ۱۸۹۰ خط کد بزند.

ب) بازه‌ای برای احتمال این‌که جورج در هفته‌ی آتی حداکثر ۱۴۹۰ خط کد بزند.

مسئله‌ی ۳. جورج بورسی

فرض کنید در هر روز کاری، ارزش سهام بورس با احتمال مساوی و مستقل از نوسانات روزهای گذشته یا آینده، ۳۰٪ ترقی یا ۲۵٪ تنزل می‌کند. هم‌چنین، در نظر بگیرید

$$r_i = \begin{cases} 0.30 & \text{با احتمال } \frac{1}{4} \\ -0.25 & \text{با احتمال } \frac{1}{4} \end{cases}$$

که r_i نرخ برگشت سود در i امین روز کاری است؛ به عنوان مثال، اگر سرمایه‌ی وی قبل از شروع روز اول x باشد، سرمایه‌ی او در انتهای روز، برابر $x(1 + r_1)$ خواهد شد.

جورج تصمیم دارد وارد سرمایه‌گذاری در بازار بورس شود. او فکر می‌کند که اگر A دلار در بورس سرمایه‌گذاری کند، به طور میانگین، ارزش سرمایه‌اش نسبت به روز قبل $2/5$ درصد بیشتر می‌شود، زیرا:

$$E[r_i] = 0.30 \times \frac{1}{4} + (-0.25) \times \frac{1}{4} = 0.025$$

و با این منطق حس می‌کند در طولانی مدت کلی سود خواهد کرد. ثابت کنید که او اشتباه می‌کند و در تقریباً ۵۰ روز سرمایه‌اش با احتمال 0.99 به 10% مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد.

مسئله‌ی ۴. همگرا

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی و با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. تعریف کنید:

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{if } X > 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

ثابت کنید Y_n در احتمال به ۰ همگراست؛ به عبارت دیگر، نشان دهید حد $P(|Y_n - 0| > \epsilon)$ به ازای $0 < \epsilon < 1$ میل دادن n به سمت بی‌نهایت، برابر صفر می‌شود.

مسئله ۵. چه قدر طول می کشه *

زمان لازم برای این که دانش آموزی یک مبحث جدید را بفهمد (بر حسب ساعت) دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$\begin{cases} 6(x-1)(2-x) & \text{if } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

مطلوب است تعیین احتمال این که متوسط زمان لازم برای فهم موضوع جدید در یک نمونه ی تصادفی شامل ۱۵ دانش آموز، از یک ساعت و ۲۵ دقیقه کم تر شود.

مسئله ۶. به شرط آن که *

فرض کنید:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } \frac{1}{8} \\ 2 & \text{با احتمال } \frac{7}{8} \end{cases}$$

هم چنین:

$$X|Y = \begin{cases} 2Y & \text{با احتمال } \frac{1}{4} \\ 3Y & \text{با احتمال } \frac{3}{4} \end{cases}$$

مقدار $E[X|Y]$ را به دست آورید.

مسئله ۷. دو اثبات

با فرض متناهی بودن امید ریاضی X و Y :

الف) نشان دهید:

$$E[X] = E_Y[E_X[Y|X]]$$

این بخش، حالت خاصی از بخش ب است که برای سادگی سیر اثبات جدا شده است؛ در نتیجه، می توانید مستقیما بخش "ب" را ثابت کنید.

ب) برای هر تابع $g(X)$ نشان دهید:

$$E[g(X)] = E_Y[E_X[g(X)|Y]]$$

ج) نشان دهید:

$$Var(X) = E_Y[Var(X|Y)] + Var_Y(E[X|Y])$$

سوالات عملی *

سوالات عملی که تحویل آن ها اجباری است، به صورت یک ژوپیترونوت بوک در کوئرای درس قرار داده شده اند. لازم است این ژوپیترونوت بوک را طبق دستورالعمل های نوشته شده در آن، تکمیل کرده و در کوئرا آن را آپلود کنید.

موفق باشید! (: