



به موارد زیر توجه کنید:

- ۱- حتما نام و شماره دانشجویی خود را روی پاسخنامه بنویسید.
- ۲- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه مراحل میانی را هم بنویسید.
- ۳- کل پاسخ تمرینات را در قالب یک فایل pdf با شماره دانشجویی خود نام گذاری کرده در سامانه CW بارگذاری کنید.
- ۴- در صورت مشاهده هر گونه مشابهت نامتعارف هر دو (یا چند) نفر کل نمره این تمرین را از دست خواهند داد.

### سوالات:

۱- (۲۰ نمره) عبارت‌های زیر را با استفاده از قوانین جبر بول ساده کنید.

- a.  $(AB + C + D)(\bar{C} + D)(\bar{C} + D + E)$
- b.  $\overline{(\bar{x}\bar{y} + z) + z + xy + wz}$
- c.  $abc + \bar{a}\bar{b} + a\bar{b}c$
- d.  $AB(C \oplus D) + A\bar{B}(C \odot D) + AB$

پاسخ:

- a.  $(AB + C + D)(\bar{C} + D)(\bar{C} + D + E) = (AB + C + D)(\bar{C} + D(D + E)) = (AB + C + D)(\bar{C} + D) = (AB + C)\bar{C} + D = A\bar{B}\bar{C} + D$
- b.  $\overline{(\bar{x}\bar{y} + z) + z + xy + wz} = \overline{\bar{x}\bar{y} + z + xy + wz} = \overline{\bar{x}\bar{y} + z + xy} = \overline{(x\bar{z} + y\bar{z})(\bar{x} + \bar{y})} = \overline{xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}}$
- c.  $abc + \bar{a}\bar{b} + a\bar{b}c = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(a + b)(\bar{a} + b + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{c})(a + b) = \bar{a}b + a\bar{c} + b\bar{c} = \bar{a}b + a\bar{c} + ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = (\bar{a}b + \bar{a}b\bar{c}) + (a\bar{c} + ab\bar{c}) = \bar{a}b + a\bar{c}$
- d.  $AB(C \oplus D) + A\bar{B}(C \odot D) + AB = AB(C \oplus D) + A\bar{B}(C \odot D) + AB + AB = AB((C \oplus D) + 1) + A(\bar{B}(C \odot D) + B) = AB + A(B + (C \odot D)) = AB + A(CD + \bar{C}\bar{D}) = AB + ACD + A\bar{C}\bar{D}$

۲- (۲۰ نمره) تابع رو به رو را به سه روش خواسته شده بسازید.

$$F(A, B, C) = (\bar{A}\bar{B} + AB) \oplus C$$

الف- فقط با استفاده از ۳ گیت XOR دو ورودی (استفاده از NOT مجاز نیست)

ب- فقط با استفاده از ۳ گیت XNOR دو ورودی (استفاده از NOT مجاز نیست)

ج- فقط با استفاده از گیت‌های NAND (تعداد گیت‌ها محدودیت ندارد)

پاسخ:

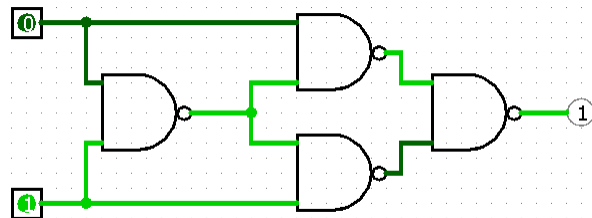
الف- می‌دانیم  $\bar{A}\bar{B} + AB = A \odot B$  و  $1 \oplus X = \bar{X}$  در نتیجه تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$F(A, B, C) = ((A \odot B) \oplus 1) \oplus C$$

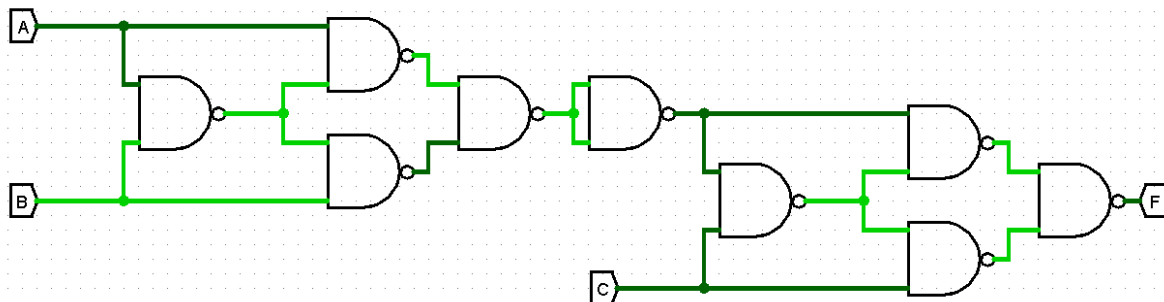
ب- می‌دانیم  $A \oplus B = \overline{A \odot B}$  و  $X \odot 0 = \bar{X}$  در نتیجه تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$((A \odot B) \odot C) \odot 0$$

ج- این سوال را می‌توان به روش‌های مختلف حل کرد، از جمله این که می‌دانیم XOR را می‌توان به شکل زیر با استفاده از چهار گیت NAND ساخت:



و سپس با توجه به این که XOR و XNOR مکمل هم هستند، تابع اصلی را می‌توانیم به این صورت بسازیم:

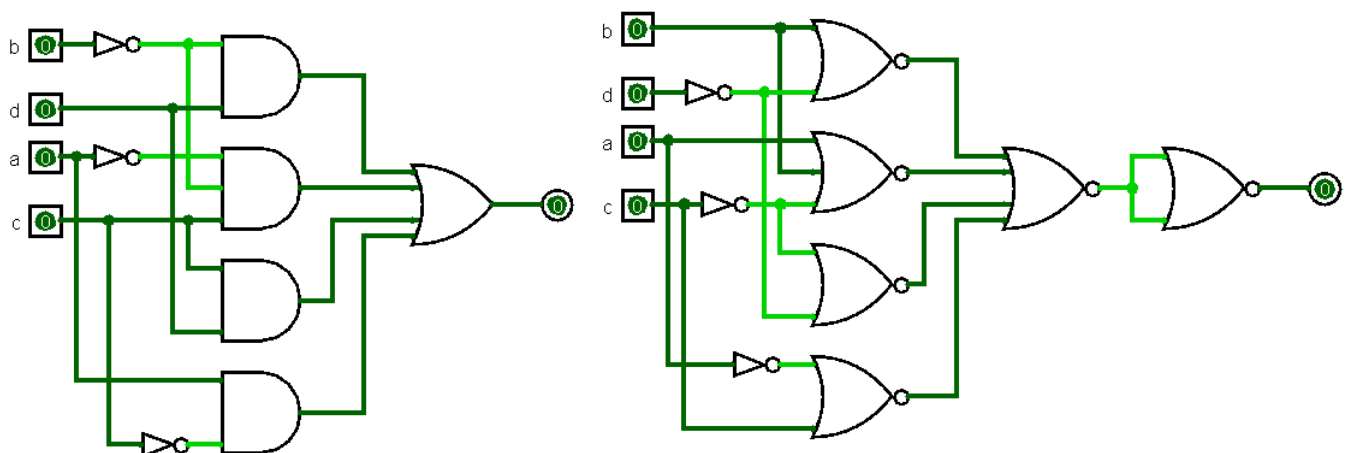


۳- (۱۰ نمره) تابع زیر را تنها با استفاده از گیت NOR بسازید.

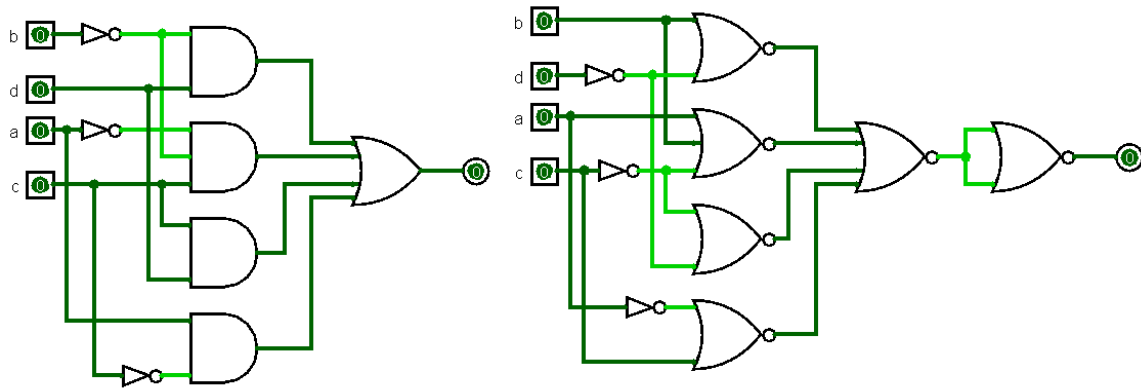
$$f(a, b, c, d) = \bar{b}d + \bar{a}\bar{b}c + cd + a\bar{c}$$

پاسخ:

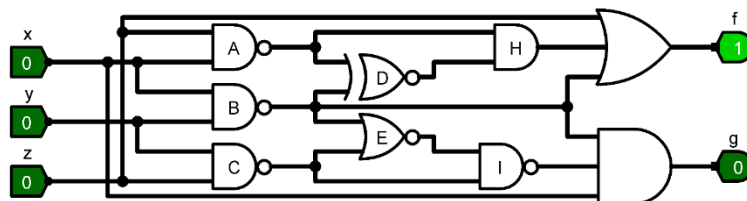
برای ساخت یک مدار با گیت NOR، بهترین کار این است که شکل مدار را رسم کنیم و سپس از سمت راست به چپ گیت‌ها را به گیت NOR تبدیل کنیم.



بنابراین، شکل سمت چپ به شکل سمت راست تبدیل می‌شود. البته در پاسخ نهایی باید گیت‌های NOT را هم با NOR بسازیم.



۴- (۲۰ نمره) مدار زیر را در نظر بگیرید:



الف- توابع f و g را به دست آورید.

ب- آیا ممکن است f و g هر دو صفر باشند؟

ج- آیا ممکن است  $fg = 01$  باشد؟ ادعای خود را بدون جدول درستی ثابت کنید.

پاسخ:

الف- ابتدا مدار را به صورتی که در شکل دیده می‌شود، نام‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 f &= z + H + B = z + AD + x \uparrow y = z + x \uparrow y + (x \uparrow z)(A \odot B) = \\
 f &= z + x \uparrow y + (x \uparrow z)((x \uparrow z) \odot (x \uparrow y)) \\
 f &= z + x' + y' + (x' + z')((xy)' \odot (xz)') = z + x' + y' + (x' + z')((xy)'(xz)' + (xy)(xz)) \\
 f &= z + x' + y' + (x' + z')((x' + y')(x' + z') + xyz) \\
 f &= z + x' + y' + (x' + z')(x' + x'y' + x'z' + y'z' + xyz)
 \end{aligned}$$

با قانون جذب داریم:

$$\begin{aligned}
 f &= z + x' + y' + (x' + z')(x' + y'z' + xyz) \\
 f &= z + x' + y' + x' + x'y'z' + x'xyz + x'z' + y'z' + xyz z' = z + x' + y' + x'y'z'
 \end{aligned}$$

باز هم با قانون جذب:

$$f = x' + y' + z$$

برای g:

$$\begin{aligned}
 g &= xIB = x(E \uparrow C)(x \uparrow y) = x(x \uparrow y)((B \downarrow C) \uparrow C) = x(x' + y')((B \downarrow C)' + C') \\
 g &= x(x' + y')(((B + C)')' + C') = x(x' + y')(B + C + C') = x(x' + y')B \\
 g &= x(x' + y')(x \uparrow y) = x(x' + y')(x' + y') = x(x' + y') = xx' + xy' \\
 \rightarrow g &= xy'
 \end{aligned}$$

ب- تابع f فقط در صورتی صفر است که  $xyz = 110$  باشد. در این صورت g هم صفر می‌شود، پس f و g می‌توانند همزمان صفر باشند.

ج-  $fg = 01$  هرگز اتفاق نمی‌افتد به این دلیل که زمانی که  $f = 0$  حتماً g هم صفر خواهد بود.

۵- (۲۰ نمره)

الف- نشان دهید دو تابع زیر با یکدیگر منطق کامل می‌سازند.

$$f(a, b, c) = a + \bar{b}\bar{c}$$

$$g(a, b, c) = a\bar{b}\bar{c}$$

ب- نشان دهید اگر یکی از جملات تابع  $f$  را  $\text{not}$  کنیم، این تابع به تنهایی یک منطق کامل می‌شود.

پاسخ:

الف- باید نشان دهیم می‌توانیم با ترکیب این دو تابع، AND و OR و NOT را بسازیم. اگر برای ساختن هر کدام از این توابع به صفر یا یک نیاز داشتیم، باید بتوانیم آنها را هم بسازیم.

Zero:  $g(a, a, a) = a \cdot \bar{a} \cdot \bar{a} = 0$

NOT:  $f(0, b, b) = 0 + \bar{b} \cdot \bar{b} = \bar{b}$

OR:  $f(a, \bar{b}, \bar{b}) = a + b$

AND:  $g(a, \bar{b}, \bar{b}) = a \cdot b$

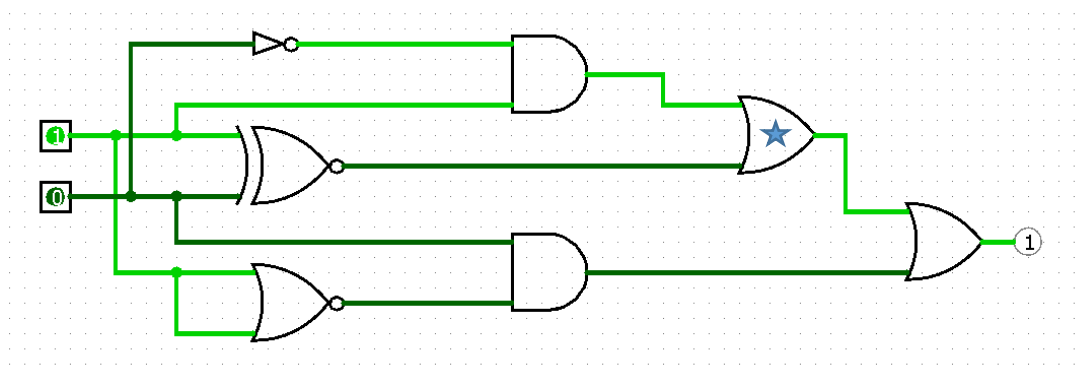
ب- در صورتی که  $f$  را به صورت  $f(a, b, c) = \bar{a} + \bar{b}\bar{c}$  تعریف کنیم، می‌توانیم نشان دهیم که  $f$  منطق کامل است:

NOT:  $f(a, a, a) = \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}$

OR:  $f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}) = a + b \cdot b = a + b$

AND:  $f(a, b, b) = \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} = \bar{a} + \bar{b}$ ,  $f(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) = \overline{\bar{a} + \bar{b}} = a \cdot b$

۶- (۱۰ نمره) مدار زیر را در نظر بگیرید:



الف- تابع خروجی مدار چیست؟

ب- در صورتی که گیت مشخص شده با ستاره خراب شده و با یک گیت NAND تعویض شود، با تغییر حداقل چند گیت دیگر در مدار می‌توانیم خروجی یکسان با مدار اولیه دریافت کنیم؟ تغییر گیت تنها می‌تواند از طریق جدول زیر انجام شود و هر گیتی را نمی‌توان با هر گیت دلخواهی جایگزین کرد.

گیت‌هایی که می‌توان جایگزین کرد	گیت موجود در مدار
NAND, NOR	AND
OR, AND	NOR
NOR, NAND	OR
XOR	XNOR
غیرقابل جایگزینی	NOT

پاسخ:

الف- مقدار  $f$  به این صورت به دست می‌آید:

$$f = ((y'x) + (x \odot y)) + (y(x + x)') = (y'x) + (x \odot y) + (yx')$$

$$f = (y'x) + (x'y' + xy) + (yx') = y'x + x'y' + xy + yx' = x(y' + y) + x'(y' + y) = x + x' = 1$$

ب- با توجه به قانون دمورگان داریم:

$$(ab)' = a' + b'$$

پس باید دو گیت قبلی به NOT|شان تغییر پیدا کنند. یعنی XNOR به XOR و AND به NAND. که طبق جدول امکان پذیر هست. پس با تغییر حداقل دو گیت می‌توان همان خروجی قبلی را گرفت.