



به موارد زیر توجه کنید:

- ۱- حتما نام و شماره دانشجویی خود را روی پاسخ نامه بنویسید.
- ۲- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه مراحل میانی را هم بنویسید.
- ۳- کل پاسخ تمرینات را در قالب یک فایل pdf با شماره دانشجویی خود نام گذاری کرده در سامانه CW بارگذاری کنید.
- ۴- در صورت مشاهده هر گونه مشابهت نامتعارف هر دو (یا چند) نفر کل نمره این تمرین را از دست خواهند داد.

سوالات:

۱- (۱۵ نمره) دو عدد $A = 928$ و $B = 679$ را در نظر بگیرید:

الف- A و B را به صورت BCD نشان دهید.

پاسخ:

$$A=1000\ 0010\ 1000 \quad B=0110\ 0111\ 1001$$

ب- حاصل $A+B$ را به صورت BCD محاسبه کنید.

پاسخ: اگر حاصل جمع دو رقم بزرگتر از ۹ شود بیت نقلی به رقم بعدی منتقل شده و حاصل با ۶ جمع می شود.

$$\begin{array}{r} 0000^1 1001^1 0010^1 1000 \\ + 0000\ 0110\ 0111\ 1001 \\ \hline 0001\ 0000\ 1010\ 0001 \\ + 0000\ 0110\ 0110\ 0110 \\ \hline 0001\ 0110\ 0000\ 0111 \end{array}$$

ج- حاصل $A-B$ را به صورت BCD محاسبه کنید.

پاسخ: اگر حاصل تفریق دو رقم کمتر از صفر شود بیت قرضی از ارقام بعدی گرفته می شود و حاصل با ۱۰ جمع می شود.

$$\begin{array}{r} 1001^{-1} 0010^{-1} 1000 \\ - 0110\ 0111\ 1001 \\ \hline 0010\ 0100\ 1001 \end{array}$$

د- حاصل $A-B$ را با روش مکمل ۱۰ محاسبه کنید.

پاسخ: ابتدا با کم کردن هر رقم از عدد ۹ و جمع زدن حاصل کل با عدد ۱۰ مکمل ۱۰ عدد B را حساب می کنیم.

$$321 \xrightarrow{10's\ Complement} 679$$

سپس حاصل را با A جمع می کنیم.

$$321 + 928 = 1249$$

از بیت نقلی ایجاد شده صرف نظر می کنیم و به جواب نهایی ۲۴۹ می رسیم.

۲- (۱۲ نمره) در هر قسمت مبنای اعداد را پیدا کنید به صورتی که معادلات زیر برقرار باشند.

a- $826 = 31 \times 26$

پاسخ:

$$(6x^0 + 2x^1 + 8x^2) = (1x^0 + 3x^1) \times (6x^0 + 2x^1)$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 2x + 6 = 6x^2 + 20x + 6$$

$$2x^2 = 18x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 9$$

جواب $x=0$ غیر قابل قبول است و جواب نهایی $x=9$ است.

b- $51D = 860 - 343$

پاسخ:

$$13x^0 + 1x^1 + 5x^2 = (0x^0 + 6x^1 + 8x^2) - (3x^0 + 4x^1 + 3x^2)$$

$$\Rightarrow 13x^0 + x^1 + 5x^2 = -3x^0 + 2x^1 + 5x^2$$

$$\Rightarrow x = 16$$

c- $3^{32} = 21^{13}$

پاسخ:

از آنجایی که ۳ یک عدد اول است پس باید ۲۱ توانی از ۳ باشد. فرض می‌کنیم $21 = 3^n$ باشد. از یکی بودن توان‌ها به معادله زیر می‌رسیم:

$$32 = 13n$$

به سادگی می‌توان دید که $n > 1$ و $n < 3$ پس $n = 2$:

$$21 = 3^2 \Rightarrow 2x + 1 = 9 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow 3^{14} = 9^7$$

۳- (۱۲ نمره)

الف- نمایش‌های زیر از اعداد را به نمایش مبنای ۱۰ تبدیل کنید.

$(666)_7 = \underline{\hspace{2cm}}$

$(3.41)_5 = \underline{\hspace{2cm}}$

پاسخ:

$$(666)_7 = (1000)_7 - 1 = 7^3 - 1 = 342$$

$$(3.41)_5 = 3 \times 5^0 + 4 \times 5^{-1} + 1 \times 5^{-2} = 3 + 0.8 + 0.04 = 3.84$$

ب- جاهای خالی را با ارقام مناسب $(0, 1, 2, \dots, F)$ پر کنید:

$$(\underline{\hspace{1cm}})_{16} = (2213)_4 = (\underline{\hspace{2cm}})_2 = (\underline{\hspace{1cm}})_8$$

$$(2111022121110211211102)_3 = (\underline{\hspace{2cm}})_9$$

پاسخ:

$$\left(\begin{smallmatrix} 22 & 13 \\ \underline{\tilde{A}} & \underline{\tilde{7}} \end{smallmatrix} \right)_{16} = (2213)_4 = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 10 & 01 & 11 \\ \underline{\tilde{2}} & \underline{\tilde{2}} & \underline{\tilde{1}} & \underline{\tilde{3}} \end{smallmatrix} \right)_2 = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 100 & 111 \\ \underline{\tilde{2}} & \underline{\tilde{4}} & \underline{\tilde{7}} \end{smallmatrix} \right)_8$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 21 & 11 & 02 & 21 & 21 & 11 & 02 & 11 & 21 & 11 & 02 \\ \underline{\tilde{7}} & \underline{\tilde{4}} & \underline{\tilde{2}} & \underline{\tilde{7}} & \underline{\tilde{7}} & \underline{\tilde{4}} & \underline{\tilde{2}} & \underline{\tilde{4}} & \underline{\tilde{7}} & \underline{\tilde{4}} & \underline{\tilde{2}} \end{smallmatrix} \right)_3 = (74277424742)_9$$

۴- (۲۰ نمره)

الف) کد همینگ ۱۵ رقمی 100011001101011 دریافت شده است. بیت‌های توازن و نحوه محاسبه‌شان را نشان دهید و با فرض اینکه نهایتاً یکی از بیت‌ها دچار خطا شده باشد، پیام را بازیابی کنید. (مراحل را کامل بنویسید)

پاسخ: بیت‌هایی که با P_i نمایش می‌دهیم بیت توازن هستند و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$P_1 P_2 X_3 P_4 X_5 X_6 X_7 P_8 X_9 X_{10} X_{11} X_{12} X_{13} X_{14} X_{15}$$

$$P_1 = X_3 \oplus X_5 \oplus X_7 \oplus X_9 \oplus X_{11} \oplus X_{13} \oplus X_{15}$$

$$P_2 = X_3 \oplus X_6 \oplus X_7 \oplus X_{10} \oplus X_{11} \oplus X_{14} \oplus X_{15}$$

$$P_4 = X_5 \oplus X_6 \oplus X_7 \oplus X_{12} \oplus X_{13} \oplus X_{14} \oplus X_{15}$$

$$P_8 = X_9 \oplus X_{10} \oplus X_{11} \oplus X_{12} \oplus X_{13} \oplus X_{14} \oplus X_{15}$$

معادله‌های مربوط به P_1, P_2, P_4, P_8 به ترتیب در زیر آمده‌اند (مقادیر X_i ها و P_i ها جایگذاری شده)

$$P_1: 1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \rightarrow \text{درست}$$

$$P_2: 0 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \rightarrow \text{درست}$$

$$P_4: 0 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \rightarrow \text{غلط}$$

$$P_8: 0 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \rightarrow \text{غلط}$$

در نتیجه بیت خطا $(1100)_2$ است، یعنی X_{12} . بنابراین پیام 100011001100011 بوده است.

ب) کد همینگ ۱۵ رقمی زیر دریافت شده که بیت‌های X آن قابل فهم نبوده‌اند! با فرض اینکه بیت‌های غیر X به درستی دریافت شده باشند، پیام را بازیابی کنید. (مراحل را کامل بنویسید)

$$11011X_6X_71100X_{12}00X_{15}$$

پاسخ: مشابه بخش الف معادله‌های P_i ها را در نظر می‌گیریم و جاگذاری می‌کنیم:

$$P_1: 1 = 0 \oplus 1 \oplus X_7 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus X_{15} \rightarrow X_7 \oplus X_{15} = 1 \quad (i)$$

$$P_2: 1 = 0 \oplus X_6 \oplus X_7 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus X_{15} \rightarrow X_6 \oplus X_7 \oplus X_{15} = 1 \quad (ii)$$

$$P_4: 1 = 1 \oplus X_6 \oplus X_7 \oplus X_{12} \oplus 0 \oplus 0 \oplus X_{15} \rightarrow X_6 \oplus X_7 \oplus X_{12} \oplus X_{15} = 0 \quad (iii)$$

$$P_8: 1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus X_{12} \oplus 0 \oplus 0 \oplus X_{15} \rightarrow X_{12} \oplus X_{15} = 0 \quad (iv)$$

$$(i), (ii) \rightarrow X_6 = 0$$

$$(ii), (iii) \rightarrow X_{12} = 1 \xrightarrow{(iv)} X_{15} = 1 \xrightarrow{(i)} X_7 = 0$$

پیام 110110011001001 بوده است.

۵- (۶ نمره) مکمل ۱۵ و ۱۶ اعداد زیر که همگی در مبنای ۱۶ با ۶ رقم نوشته شده‌اند را حساب کنید.

ج- $(000396)_{16}$

ب- $(0AEDDB)_{16}$

الف- $(00A840)_{16}$

پاسخ: برای محاسبه مکمل ۱۵ هر رقم را از ۱۵ کم می‌کنیم یا به عبارتی عدد را از $(FFFFFF)_{16}$ کم می‌کنیم.

$$(FFFFFF)_{16} - (396)_{16} = (FFFC69)_{16}$$

$$(FFFFFF)_{16} - (AEDDB)_{16} = (F51224)_{16}$$

$$(FFFFFF)_{16} - (A840)_{16} = (FF57BF)_{16}$$

و برای حساب کردن مکمل ۱۶ اعداد قسمت قبل را با $(1)_{16}$ جمع می‌کنیم.

$$(FFFC69)_{16} + (1)_{16} = (FFFC6A)_{16}$$

$$(F51224)_{16} + (1)_{16} = (FD51225)_{16}$$

$$(FF57BF)_{16} + (1)_{16} = (FF57C0)_{16}$$

۶- (۱۵ نمره) برای هر یک از اعداد زیر با توجه به ظرفیت حافظه‌ای که در آن ذخیره شده، نزدیک‌ترین عددی که در جمع با آن باعث سرریز می‌شود را بیابید و جواب را در مبنای خود عدد و مبنای ۲ بنویسید. (توجه کنید اعداد به صورت مکمل دو نمایش داده شده‌اند)

الف- $(10100)_2$ در ۵ بیت ب- $(C2)_{16}$ در ۹ بیت ج- $(-42)_{10}$ در ۷ بیت

پاسخ: برای حل این سوال می‌توانیم ابتدا اعداد را به مبنای مناسب برده و سپس با توجه به تعداد بیت عددی را که باعث ایجاد سرریز می‌شود پیدا کنیم. می‌دانیم که با n بیت می‌توانیم اعداد را در بازه $2^{n-1} - 1$ to $2^n - 1$ نمایش دهیم.

الف- ۵ بیت، بازه ۱۶- تا ۱۵

$$(10100)_2 = -(01100)_2 = -(12)_{10} \rightarrow -(17)_{10} + (12)_{10} = -(5)_{10} = -(00101)_2 = (11011)_2$$

ب- ۹ بیت، بازه ۲۵۶- تا ۲۵۵

$$(C2)_{16} = (194)_{10} \rightarrow (256)_{10} - (194)_{10} = (62)_{10} = (3E)_{16} = (0000111110)_2$$

ج- ۷ بیت، بازه ۶۴- تا ۶۳

$$-(65)_{10} + (42)_{10} = -(23)_{10} = -(0010111)_2 = (1101001)_2$$

۷- (۵ نمره) می‌دانیم ریشه‌های معادله زیر عدددهای ۳ و ۴ هستند. معادله در چه مبنایی صادق است؟

$$x^2 - 12x + 22 = 0$$

پاسخ: فرض کنید این معادله در مبنای a نوشته شده باشد در این صورت:

$$(12)_a = a + 2, \quad (22)_a = 2a + 2 \rightarrow x^2 - (a + 2)x + (2a + 2) = 0$$

در این صورت با جاگذاری یکی از جواب‌ها در معادله a را به دست می‌آوریم.

$$x = 3: \quad 3^2 - (a + 2) \times 3 + 2a + 2 = 0 \rightarrow -a + 5 = 0 \rightarrow a = 5$$

و از آنجا که $(x - 3)(x - 4) = 0$ که می‌شود $x^2 - 7x + 12 = 0$ که برابر نمایش مبنای ده معادله بالا است.

۸- (۱۵ نمره)

الف- جمع دو عدد زیر را در مبنای دو یک بار با فرض علامت‌دار بودن اعداد و یک بار با فرض بدون علامت بودن اعداد انجام دهید.

$$1100111 + 101110$$

پاسخ: اگر اعداد را علامت‌دار در نظر بگیریم چون عدد سمت راست تعداد بیت کمتری دارد باید به سمت چپ آن یک بیت ۱ اضافه کنیم سپس اعداد را با هم جمع بزنیم.

$$\begin{array}{r}
 1\ 111 \\
 1100111 \\
 +\ 1101110 \\
 \hline
 11010101
 \end{array}$$

از بیت نقلی نهایی صرف نظر می کنیم، بنابراین جواب نهایی برابر ۱۰۱۰۱۰۱ است و هیچ سرریزی رخ نداده است.

اگر اعداد را بدون علامت در نظر بگیریم کافی است برای یکی شدن تعداد بیت ها به سمت چپ عدد دوم بیت صفر اضافه کنیم.

$$\begin{array}{r}
 1\ 111 \\
 1100111 \\
 +\ 0101110 \\
 \hline
 10010101
 \end{array}$$

که در اینجا سرریز رخ داده است.

ب- تفریق زیرا با فرض علامت دار بودن اعداد به روش بیت به بیت انجام دهید.

$$101001 - 10111$$

پاسخ: چون اعداد علامت دار هستند به سمت چپ عدد دوم بیت ۱ اضافه می کنیم سپس تفریق را به روش بیت به بیت انجام می دهیم.

$$\begin{array}{r}
 101001 \\
 -\ 110111 \\
 \hline
 110010
 \end{array}$$

سرریزی هم رخ نداده است.

ج- تفریق زیرا با فرض علامت دار نبودن اعداد به روش مکمل دو حساب کنید.

$$-1001 - 101110$$

پاسخ: در اینجا هم چون اعداد بدون علامت هستند ابتدا به سمت چپ عدد اول دو بیت صفر اضافه می کنیم. در گام بعدی دو عدد را با هم جمع می کنیم و جواب نهایی را منفی می کنیم.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 001001 \\
 +\ 101110 \\
 \hline
 110111
 \end{array}$$

جواب نهایی (110111)- است که اگر بخواهیم آن را به صورت مکمل دو نمایش دهیم باید یک بیت اضافه برای نمایش در نظر بگیریم. در این صورت پاسخ ما 1001001 است، که البته باید علامت دار تعبیر شود.