دانشکده مهندسی کامپیوتر

مدارهای منطقی

آزمون میان‌ترم اول - آذر ۱۴۰۲

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه

۱- (۳ نمره) فرض کنید A=01000101 و B=10010111. در هر یک از سه حالت زیر، A+B را محاسبه کنید و نتیجه را در مبنای ده نمایش دهید.

الف- اگر دو عدد بدون علامت باشند.

پاسخ:

$$A = (01000101)_2 = (1 + 4 + 64)_{10} = (69)_{10}$$
$$B = (10010111)_2 = (1 + 2 + 4 + 16 + 128)_{10} = (151)_{10}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 01000101 + \\ \underline{10010111} \\ 11011100 \end{array}$$

$$A + B = (11011100)_2 = (220)_{10} = (69 + 151)_{10} \checkmark$$

ب- اگر دو عدد به صورت مکمل دو نمایش داده شده باشند.

پاسخ:

$$A = (01000101)_2 = (1 + 4 + 64)_{10} = (69)_{10}$$
$$B = (10010111)_2 = -(01101001)_2 = -(105)_{10}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 01000101 + \\ \underline{10010111} \\ 11011100 \end{array}$$

$$A + B = (11011100)_2 = -(00100100)_2 = -(36)_{10}$$
$$= (69 - 105)_{10} \checkmark$$

ج- اگر دو عدد به صورت BCD نمایش داده شده باشند.

$$A = (0100\ 0101)_2 = (45)_{BCD}$$
$$B = (1001\ 0111)_2 = (97)_{BCD}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 0100\ 0101 + \\ \underline{1001\ 0111} \\ 1101\ 1100 + \\ \underline{0110} \\ 1\ 0010 \\ \underline{0110} \\ 1\ 0100 \end{array}$$

$$A + B = (1\ 0100\ 0010)_2 = (142)_{BCD} = (45 + 97)_{BCD} \checkmark$$

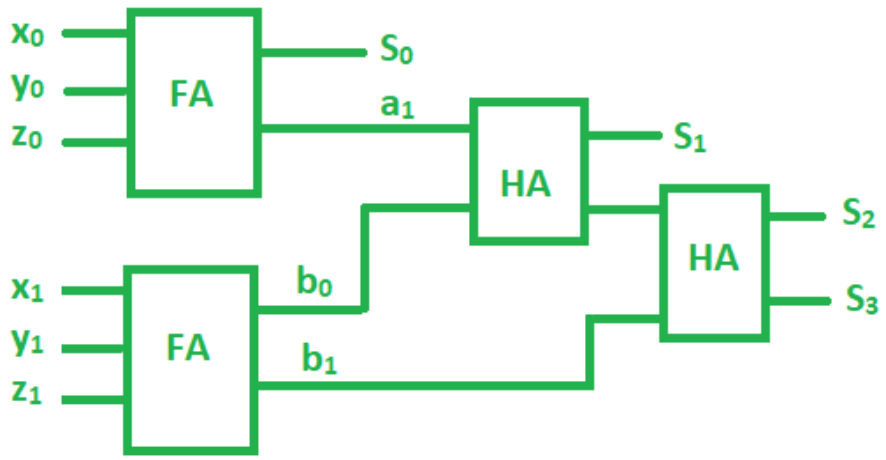
بارم‌بندی:

عملیات درست در هر بخش: ۰٫۵ نمره، تعبیر پاسخ صحیح در هر بخش: ۰٫۵ نمره

اشتباه در تبدیل دودویی به دهدهی یا برعکس: کسر ۰٫۲۵

۲- (۳ نمره) با استفاده از حداقل تعداد تمام‌افزا (Full Adder) و نیم‌افزا (Half Adder)، مداری بسازید که سه عددِ دو بیتیِ x_1x_0 و y_1y_0 و z_1z_0 با هم جمع کند.

پاسخ:



$$\begin{array}{rr} x_1 & x_0 + \\ y_1 & y_0 \\ z_1 & z_0 \\ \hline b_1 b_0 & a_1 S_0 \\ & b_0 \\ \hline & C_1 S_1 \\ b_1 & \\ \hline S_3 S_2 & \end{array}$$

۳- (۳ نمره) تابع زیر را ساده کنید و تابع ساده‌شده را فقط با گیت‌های NOR بسازید.

$$f(a,b,c,d) = (a+b)'(c \oplus d) + (a \oplus c)(b \oplus d) + (a+bc)'d + a(c+d)'$$

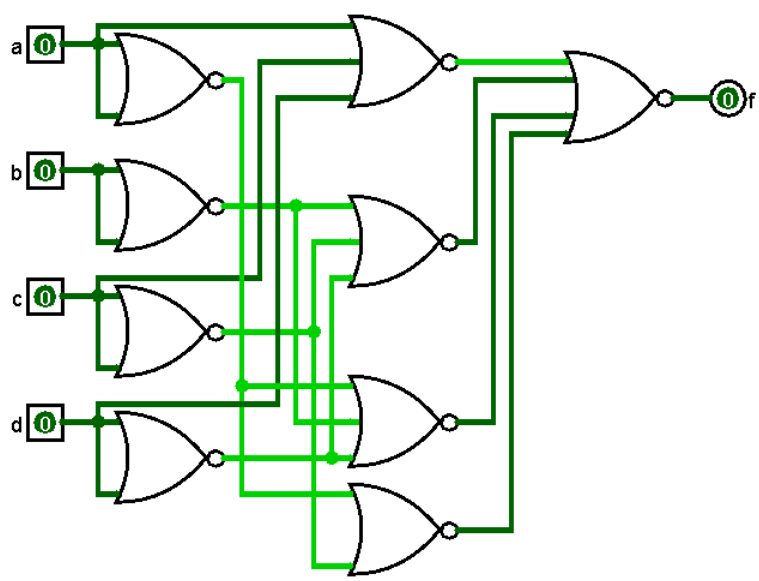
پاسخ:

برای این که در نهایت بتوانیم این تابع را فقط با گیت‌های NOR بسازیم، بهتر است آن را به صورت POS ساده کنیم. ابتدا آن را با قواعد جبری به صورت جمله‌هایی ساده می‌کنیم که بتوانیم در جدول کارنو وارد کنیم و سپس جدول کارنو را به صورت POS ساده می‌کنیم و درنهایت تابع را با گیت‌های NOR می‌سازیم.

$$\begin{aligned} f &= a'b'(cd' + c'd) + (ac' + a'c)(bd' + b'd) + a'(b' + c')d + ac'd' \\ &= a'b'cd' + a'b'c'd + abc'd' + ab'c'd + a'bcd' + a'b'cd + a'b'd' \\ &\quad + a'c'd + ac'd' \end{aligned}$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	1
11	1	0	0	0
10	1	1	0	0

$$f = (a+c+d)(b'+c'+d')(a'+b'+d')(a'+c')$$



بارم‌بندی: ساده‌کردن درست: ۲ نمره، رسم شکل: ۰٫۵ نمره، استفاده از حداقل گیت‌ها: ۰٫۵ نمره

۴- (۲ نمره) تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(a,b,c,d) = \prod M(0,1,4,5,10,11) \,.\, \prod D(3,8,12,14)$$

الف- آن را به صورت SOP ساده کنید.

ب- آن را به کمک یک مولتی‌پلکسر یک به چهار و حداقل گیت‌های اضافه بسازید.

پاسخ:

در بند ب، می‌بینیم تفاوتی ندارد که متغیرهای a و b را به ورودی‌های select بدهیم یا متغیرهای c و d را.

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	x	x
01	0	0	1	1
11	x	1	1	0
10	1	1	x	0

$$f = a'c + bc + ac'$$

cd \ ab	00	01	11	10	
00	0	0	x	x	$I_0=0$
01	0	0	1	1	$I_1=a$
11	x	1	1	0	$I_3=b$
10	1	1	x	0	$I_2=a'$
	$I_0=c$	$I_1=c$	$I_3=1$	$I_2=c'$	

بارم‌بندی: بند الف: یک نمره، بند ب: هر جمله ۰٫۲۵ نمره

اگر جدول اشتباه پر شده، اما درست ساده شده: کسر ۰٫۵ نمره

در بند ب اگر جای I_2 و I_3 اشتباه شده: کسر ۰٫۲۵

۵- (۳ نمره) با استفاده از یک دیکودر ۴ به ۱۶ و حداقل گیت‌های اضافه، یک ضرب‌کنندهٔ دوبیت در دوبیت بسازید.

پاسخ:

ابتدا جدول درستی را رسم می‌کنیم و بیت‌های خروجی را به‌دست می‌آوریم. هر خروجی را برحسب جمع مین‌ترم‌ها (یا ضرب ماکسترم‌ها) می‌نویسیم. اگر تعداد مین‌ترم‌ها کمتر بود خروجی را با OR کردن مین‌ترم‌ها می‌سازیم و اگر تعداد ماکسترم‌ها بیشتر بود، خروجی را با NOR کردن ماکسترم‌ها می‌سازیم. در این سوال حالت دوم هیچگاه رخ نمی‌دهد، بنابراین همه خروجی‌ها را فقط با OR کردن مین‌ترم‌ها می‌سازیم.

a	b	c	d	w	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1

$$w = m_{15}$$

$$x = \sum m(10,11,14)$$

$$y = \sum m(6,7,9,11,13,14)$$

$$z = \sum m(5,7,13,15)$$

بارم‌بندی:

رسم درست جدول یک نمره

ساخت هر خروجی: ۰٫۵ نمره

۶- (۳ نمره) یک مدار ترکیبی بسازید که یک عدد ورودی ۵ بیتی بگیرد و خروجی آن وقتی یک شود که عدد ورودی بر ۴، ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشد.

پاسخ:

این مسئله را می‌توانیم با رسم یک جدول کارنوی ۵ متغیره و ساده کردن آن حل کنیم. در شکل‌های زیر جدول کارنو را مرحله به مرحله ساده کرده‌ایم.

a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11		1	1	
10			1	1

a=1

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		1
11				
10			1	

$$f = bce' + \cdots$$

a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11		1	1	
10			1	1

a=1

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		1
11				
10			1	

$$f = bce' + a'be' + \cdots$$

a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11		1	1	
10			1	1

a=1

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		1
11				
10			1	

$$f = bce' + a'be' + a'cde + \cdots$$

a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11		1	1	
10			1	1

a=1

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		1
11				
10			1	

$$f = bce' + a'be' + a'cde + b'cd' + \cdots$$

a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11		1	1	
10			1	1

a=1

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		1
11				
10			1	

$$f = bce' + a'be' + a'cde + b'cd' + d'e + \cdots$$

a=0

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11		1	1	
10			1	1

a=1

de \ bc	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		1
11				
10			1	

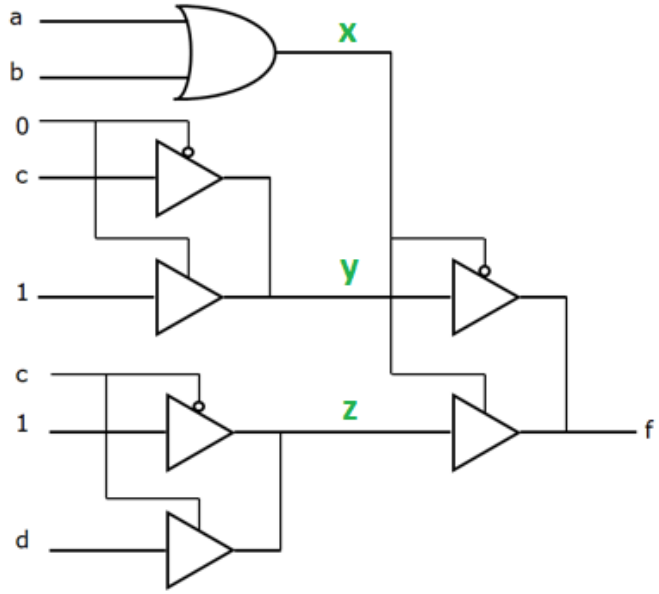
$$f = bce' + a'be' + a'cde + b'cd' + d'e + abc'd'$$

بارم‌بندی:

هر جمله ۰٫۵ نمره، در هر مورد که جمله‌ای ساده‌تر میشده: کسر ۰٫۲۵ نمره

۷- (۳ نمره) خروجی مدار شکل زیر را به دست آورید.

پاسخ:



$$x = a + b$$
$$y = c$$
$$z = c' + cd = c' + d$$

$$\begin{aligned} f = x'y + xz &= a'b'c + (a+b)(c'+d) \\ &= a'b'c + ac' + ad + bc' + bd \\ &= a'b'c + cd + ac' + bc' \end{aligned}$$

بارم‌بندی:

تشخیص درست y و z و f هر کدام ۰٫۷۵ نمره و ساده کردن f هم ۰٫۷۵ نمره

موفق باشید