



به موارد زیر توجه کنید:

- ۱- حتما نام و شماره دانشجویی خود را روی پاسخ نامه بنویسید.
- ۲- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه مراحل میانی را هم بنویسید.
- ۳- کل پاسخ تمرینات را در قالب یک فایل pdf با شماره دانشجویی خود نام گذاری کرده در سامانه CW بارگذاری کنید.
- ۴- این تمرین ۲۲ نمره دارد که معادل ۰,۵۵ نمره از نمره کلی درس است و ۰,۰۵ نمره آن امتیازی است.
- ۵- در صورت مشاهده هر گونه مشابهت نامتعارف هر دو (یا چند) نفر کل نمره این تمرین را از دست خواهند داد.

سوالات:

- ۱- (۵ نمره) اعداد زیر را به مبناهای خواسته شده ببرید.
 

الف- عدد $(A0B.78)_{16}$ به مبنا ۴	ب- عدد $(1110101)_2$ به مبنا ۸
ج- عدد $(110,011)_2$ به مبنا ۱۰	د- عدد $(45,75)_{10}$ به مبنا ۲
ه- عدد $(764)_8$ به مبنا ۱۰	

پاسخ:

الف- ۲۲۰۰۲۳,۲۳۲

ب- ۱۶۵

ج- ۶,۳۷۵

د- ۱۰۱۱۰۱,۱۱

ه- ۵۰۰

- ۲- (۴ نمره) الف- جمع زیر را در مبنا ۲ انجام دهید.

$$100010 + 1101011$$

پاسخ: برای جمع باید عدد اول را در ۷ بیت بنویسیم. می توانیم اعداد را بدون علامت فرض کنیم:

$$\begin{array}{r} 0100010 + \\ \underline{1101011} \\ 10001101 \end{array}$$

می بینیم که اگر اعداد را ۷ بیتی در نظر بگیریم سرریز رخ خواهد داد و نتیجه اشتباه می شود. ولی اگر اعداد را ۸ بیت و یا بالاتر در نظر بگیریم، حاصل جمع درست و برابر با  $10001101$  می شود.

می توانیم اعداد را علامت دار فرض کنیم و در آن صورت بیتی که به سمت چپ عدد اول اضافه می کنیم باید ۱ باشد و پاسخ  $11001101$  به دست می آید که سمت چپ ترین بیتش بیت نقلی اضافه ای است که باید حذف شود

و بنابراین هیچ سرریزی رخ نداده.

هر دو پاسخ قابل قبول است.

ب- تفریق‌های زیر را یک بار در حالت عادی و یک بار با مکمل دو گرفتن از عدد دوم انجام دهید و هر بار مشخص کنید آیا سرریز (overflow) رخ داده یا خیر.

$$10110.0011 - 101.11$$

می‌توانیم دو عدد را بدون علامت فرض کنیم. در این صورت حاصل تفریق (چه با روش عادی و چه با مکمل دو گرفتن از عدد دوم) برابر با  $10000,0111$  خواهد بود و سرریزی هم رخ نمی‌دهد. می‌توانیم فرض کنیم دو عدد در سیستم مکمل دو نمایش داده شده‌اند و منفی هستند، بنابراین باید به سمت راست عدد دوم دو بیت ۱ اضافه کنیم و تفریق را انجام دهیم. تفریق عادی:

$$\begin{array}{r} 10110.0011 - \\ \underline{11101.1100} \\ 11000.0111 \end{array}$$

مکمل دوی عدد دوم  $00010.0100$  است که به این ترتیب با عدد اول جمع می‌شود:

$$\begin{array}{r} 10110.0011 + \\ \underline{00010.0100} \\ 11000.0111 \end{array}$$

در هیچ دو حالت هم سرریزی رخ نخواهد داد، چون در هر دو حالت یک عدد منفی با یک عدد مثبت جمع شده است.

$$-11001 - 010101$$

در این مورد هم می‌توانیم دو عدد را بدون علامت در نظر بگیریم و برای تفریق عادی دو عدد را با هم جمع کنیم و علامت منها را پشت نتیجه قرار بدهیم:

$$\begin{array}{r} 011001 + \\ \underline{010101} \\ 101110 \end{array}$$

با این نتیجه سرریز رخ داده چون جمع دو عدد مثبت منفی شده است. برای نمایش نتیجه درست به ۷ بیت نیاز داریم. اگر نتیجه را با ۷ بیت نشان دهیم پاسخ  $0101110$  - خواهد بود (معادل  $010101$ ) یا مکمل دوی هر دو عدد را به دست آوریم و آنها را با هم جمع کنیم:

$$\begin{array}{r} 100111 + \\ \underline{101011} \\ 010010 \end{array}$$

اینجا هم سرریز رخ داده چون جمع دو عدد منفی مثبت شده است. باز برای رسیدن به نتیجه درست باید اعداد را ۷ بیتی در نظر بگیریم که در آن صورت به همان پاسخ  $010101$  می‌رسیم.

می‌توانیم اعداد را علامت‌دار فرض کنیم. برای تفریق عادی باید به سمت چپ عدد اول یک بیت ۱ اضافه کنیم و دو عدد را با هم جمع کنیم:

$$\begin{array}{r} 111001 + \\ \underline{010101} \\ 001110 \end{array}$$

نتیجه نهایی  $001110$  - خواهد بود (معادل  $14$  - در مبنای ده)

برای تفریق به روش مکمل دو ابتدا مکمل دوی هر دو عدد را به دست آوریم و سپس آنها را با هم جمع کنیم:

$$\begin{array}{r} 000111 + \\ \underline{101011} \\ 110010 \end{array}$$

اینجا هم نتیجه یک عدد منفی است که معادل همان ۱۴- در مبنای ده است. در هیچ کدام از دو حالت هم سرریز رخ نداده چون حاصل جمع یک عدد مثبت و یک عدد منفی هیچ وقت سرریز ندارد.

ج- دو عدد ۴۳۷ و ۸۵۹ را به صورت BCD نمایش دهید و سپس با هم جمع کنید.

$$\begin{array}{r}
 437 \rightarrow 0100\ 0011\ 0111 \\
 859 \rightarrow +1000\ 0101\ 1001 \\
 \hline
 7296
 \end{array}$$

طبق تعریف می‌دانیم که اگر در این نوع جمع، حاصل بخشی از ۱۵ بالاتر شود، باید آن بخش را با ۶ جمع کنیم.

$$\begin{array}{r}
 11001001\ 0000 \\
 0110 \\
 \hline
 1100\ 1001\ 0110 \\
 12\ 9\ 6 \\
 1296
 \end{array}$$

۳- (۳ نمره) در هر بند مبنا را به صورتی مشخص کنید که معادله برقرار باشد.

الف)  $\frac{24}{3} = 6$  (ب)  $12 \times 13 = 222$  (ج)  $15 + 35 = 4A$

در هر مورد فرض کنید معادله در مبنای  $a$  نوشته شده باشد:

الف)

$$(24)_a = 2a + 4 \Rightarrow \frac{2a + 4}{3} = 6 \Rightarrow 2a + 4 = 3 * 6 = 18 \Rightarrow a = 7$$

ب)

$$(12)_a = a + 2, (13)_a = a + 3, (222)_a = 2a^2 + 2a + 2 \Rightarrow (a + 2)(a + 3) = 2a^2 + 2a + 2$$

$$a^2 + 5a + 6 = 2a^2 + 2a + 2 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a - 4)(a + 1) = 0$$

مبنای منفی نداریم، بنابراین  $a = -1$  قابل قبول نیست، بنابراین پاسخ  $a = 4$  است.

ج)

$$(15)_a = a + 5, (35)_a = 3a + 5, (4A)_a = 4a + 10 \Rightarrow a + 5 + 3a + 5 = 4a + 10 \Rightarrow 4a + 10 = 4a + 10$$

معادله بالا همواره درست است. اما در مبنای  $a$  باید تمام ارقام از  $a$  کمتر باشد. چون رقم  $A$  در معادله داریم پس باید  $a > 10$  باشد.

۴- (۲ نمره) می‌دانیم  $x = 4$  و  $x = 6$  جواب‌های معادله زیر است. معادله در چه مبنایی نوشته شده است؟

$$x^2 - 13x + 33 = 0$$

فرض کنید معادله در مبنای  $a$  نوشته شده باشد. چون جمع دو ریشه معادله برابر است با  $(13)_a = a + 3$  پس:

$$6 + 4 = a + 3 \Rightarrow a = 7$$

همچنین  $(33)_7 = 3 * 7 + 3 = 24$  پس معادله اصلی به صورت  $x^2 - 10x + 24 = (x - 4)(x - 6) = 0$

است که در فرض صدق می‌کند پس مبنای معادله ۷ است.

۵- (۴ نمره) فرض کنید در حال مخابره یک پیام با استفاده از سیستم کدگذاری همینگ (با توازن زوج) هستیم. پیامی که به دست ما رسیده است ۰۰۱۰۰۰۱۰۱۱۰۱۰۱۱ است.

الف- توضیح دهید چند بیت توازن (parity) داریم و هر کدام چطور محاسبه می‌شوند.  
ب- فرض کنید که بدانیم حداکثر ۲ بیت از پیام اصلی با پیامی که به ما رسیده است، متفاوت است. همهٔ حالت‌های ممکن پیام اصلی را بیابید و روش خود را برای بازیابی پیام به صورت کامل توضیح دهید. (مشخص کردن حالات بیت‌های مختل شده کافی است و نیازی به نوشتن پیام در هر حالت نیست).

پاسخ: الف- چهار بیت توازن داریم که به این شکل محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} P1 &= \text{XOR}(3,5,7,9,11,13,15) \\ P2 &= \text{XOR}(3,6,7,10,11,14,15) \\ P4 &= \text{XOR}(5,6,7,12,13,14,15) \\ P8 &= \text{XOR}(9,10,11,12,13,14,15) \end{aligned}$$

ب- در پیامی که به ما رسیده مقدار بیت‌های توازن به این شکل خواهند بود:

$$P1=0, P2=1, P4=0, P8=1$$

بنابراین اگر در پیام فقط یک بیت تغییر کرده باشد، بیت شماره ۱۰۱۰ (شماره ۱۰) است که مقدار P2 و P8 را یک کرده ولی مقدار P1 و P4 را تغییر نداده است.

اما اگر دو بیت تغییر کرده باشد، این دو بیت باید یکی از شرایط زیر را داشته باشند:

۱- مقدار P1 اصلاً تغییر نکرده باشد و دو بیت از P4 تغییر کرده باشد که یکی از این دو بیت باعث تغییر P2 شده باشد و دیگری باعث تغییر P8 شده باشد. بنابراین بیت‌های شماره ۱۱۰۰ و ۰۱۱۰ (شماره‌های ۱۲ و ۶) تغییر کرده‌اند.

۲- مقدار P4 اصلاً تغییر نکرده باشد و دو بیت از P1 تغییر کرده باشد که یکی از این دو بیت باعث تغییر P2 شده باشد و دیگری باعث تغییر P8 شده باشد. بنابراین بیت‌های شماره ۱۰۰۱ و ۰۰۱۱ (شماره‌های ۹ و ۳) تغییر کرده‌اند.

۳- دو بیت از P1 تغییر کرده و همان دو بیت هم در P4 تغییر کرده. یکی از اینها در P8 است و یکی دیگر در P2. بنابراین بیت‌های شماره ۰۱۱۱ و ۱۱۰۱ (شماره‌های ۷ و ۱۳) تغییر کرده‌اند.

۴- یک بیت یکسان در P1 و P4 تغییر کرده و یک بیت دیگر در همه بیت‌های توازن، بنابراین بیت‌های شماره ۱۱۱۱ و ۰۱۰۱ (شماره‌های ۱۵ و ۵) تغییر کرده‌اند.

۶- (۴ نمره) مکمل ۶ عدد  $(۵۶۱۳)_۷$  را در یک سیستم ۶ رقمی محاسبه کنید. سپس عدد به دست آمده را به مبنای ۱۰ ببرید و مکمل ۱۰ آن را در یک سیستم ۷ رقمی محاسبه کنید. فرض کنید عدد به دست آمده نشان دهنده یک عدد منفی در سیستم مکمل ۹ باشد، آن عدد منفی را مشخص کنید.

پایخ سزاد ۲-

$(۵۶۱۳)_۷$  در یک سیستم ۶ رقمی همان  $(۰۰۵۶۱۳)_۷$  است. پس  $(۰۰۵۶۱۳)_۷$  برابر  $(۴۴۱۰۵۳)_۷$

$$(۴۴۱۰۵۳)_۷ = ۴ \times ۷^۵ + ۴ \times ۷^۴ + ۱ \times ۷^۳ + ۰ \times ۷^۲ + ۵ \times ۷^۱ + ۳ \times ۷^۰ = (۱۱۵۶۲۹)_{۱۰}$$

که این عدد در یک سیستم ۷ رقمی همان  $(۰۱۱۵۶۲۹)_{۱۰}$  است. پس محاسبه مکمل ۱۰ آن، مکمل ۱۹

حاسب میکنیم و یک به آن اضافه میکنیم: مکمل ۹:  $(۹۸۸۴۳۷۰)_{۱۰} \leftarrow$  مکمل ۱۰:  $(۹۸۸۴۳۷۱)_{۱۰}$

حالا در یک سیستم مکمل ۹،  $(۹۹۹۹۹۹۹)_{۱۰}$  معادل ۰ و  $(۹۹۹۹۹۹۸)_{۱۰}$  معادل ۱- است.

$(۹۹۹۹۹۹۷)_{۱۰}$  معادل ۲- و ... پس است. این  $(۹۸۸۴۳۷۱)_{۱۰}$  معادل چه عددی است؟ خواهیم دید.

معنی ۱- آن ۱ از ۹۹۹۹۹۹۹ کم کنیم،  $۹۹۹۹۹۹۹ - ۹۸۸۴۳۷۱ = ۱۱۵۶۲۸$

که معنی این عدد در یک سیستم مکمل ۹ همان  $۱۱۵۶۲۸$  - خواهد بود.