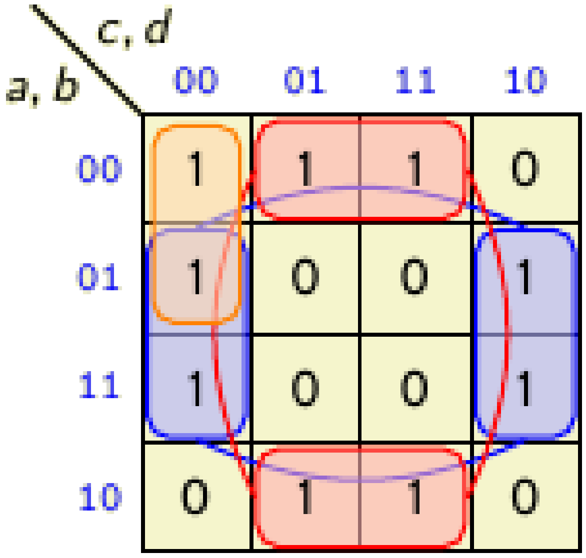
مدارهای منطقی

فصل سوم

ســـــاده سازی



سرفصل مطالب

- نمایش استاندارد
- توابع مینترم و ماکسترم
- نمایش استاندارد متعارف
- تاخیر در انتشار
- پیچیدگی سخت‌افزار
- جدول کارنو

نمایش استاندارد

- حرف (literal): یک متغیر یا نقیض یک متغیر
- عبارت ضربی (Product term):
  - متشکل از یک حرف تنها یا حاصل ضرب کردن (AND) چند حرف
- عبارت جمعی (Sum term):
  - متشکل از یک حرف تنها یا حاصل جمع کردن (OR) چند حرف
- جمع ضرب‌ها (SOP): یک عبارت ضربی تنها یا جمع چند عبارت ضربی
- ضرب جمع‌ها (POS): یک عبارت جمعی تنها یا ضرب چند عبارت جمعی

نمایش استاندارد (ادامه)

- عبارت‌هایی هستند که هیچ‌کدام از موارد بالا نیستند

(a+b’)(c+bd)

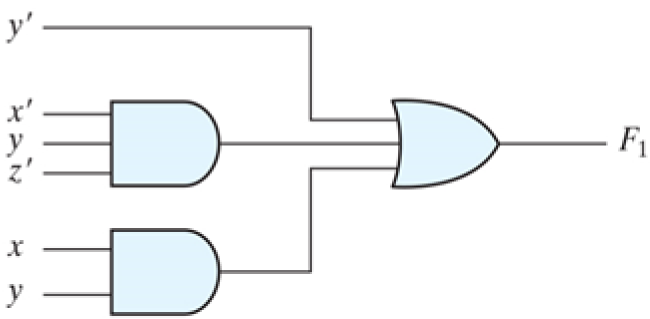
- عبارت‌هایی هم هستند که هم SOP هستند و هم POS

abc’d

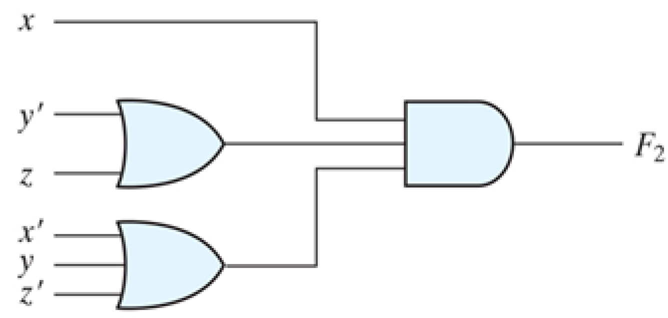
a’+b+c’+d

- نمایش یک تابع با یک عبارت SOP یا POS، نمایش استاندارد نامیده می‌شود
- هر تابعی را می‌توان با یک عبارت جبری استاندارد نمایش داد

مثال



(a) Sum of Products



(b) Product of Sums

$F_1(x,y,z) = y' + x'.y.z' + x.y$

$F_2(x,y,z) = x \,.\, (y' + z) \,.\, (x' + y + z')$

تابع مینترم (minterm)

- یک تابع با n متغیر مستقل، مینترم است، اگر در جدول درستی آن فقط یک سطر «۱» و بقیه «۰» باشند

a	b	c	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

قضیه ۱

- هر تابع مینترم را می‌توان با یک عبارت ضربی نشان داد که در آن هر متغیر مستقل یا نقیض آن، یک بار و فقط یک بار (نه کمتر و نه بیشتر) ظاهر شده باشد و ...
- ... برعکس، هر تابع که با استفاده از یک عبارت ضربی نمایش داده شده باشد که در آن هر متغیر مستقل (به شکل نقیض شده یا نشده) یک بار و فقط یک بار (نه کمتر و نه بیشتر) ظاهر شده باشد، یک تابع مینترم خواهد بود

مثال

	a	b	c	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
$m_0(a,b,c)=a'b'c'$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$m_1(a,b,c)=a'b'c$	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
$m_2(a,b,c)=a'bc'$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$m_3(a,b,c)=a'bc$	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
$m_4(a,b,c)=ab'c'$	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$m_5(a,b,c)=ab'c$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$m_6(a,b,c)=abc'$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$m_7(a,b,c)=abc$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

تابع ماکسترم (Maxterm)

- یک تابع با n متغیر مستقل، ماکسترم است، اگر در جدول درستی آن فقط یک سطر «۰» و بقیه «۱» باشند

a	b	c	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

قضیه ۲

- هر تابع ماکسترم را می‌توان با یک عبارت جمعی نشان داد که در آن هر متغیر مستقل یا نقیض آن، یک بار و فقط یک بار (نه کمتر و نه بیشتر) ظاهر شده باشد و ...
- ... برعکس، هر تابع که با استفاده از یک عبارت جمعی نمایش داده شده باشد که در آن هر متغیر مستقل (به شکل نقیص شده یا نشده) یک بار و فقط یک بار (نه کمتر و نه بیشتر) ظاهر شده باشد، یک تابع ماکسترم خواهد بود

مثال

	a	b	c	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
$M_0(a,b,c)=a+b+c$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$M_1(a,b,c)=a+b+c'$	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$M_2(a,b,c)=a+b'+c$	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
$M_3(a,b,c)=a+b'+c'$	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
$M_4(a,b,c)=a'+b+c$	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
$M_5(a,b,c)=a'+b+c'$	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
$M_6(a,b,c)=a'+b'+c$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
$M_7(a,b,c)=a'+b'+c'$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

نکته

$$m_i = M'_i$$

x	y	z	Minterms Term	Minterms Designation	Maxterms Term	Maxterms Designation
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

قضیه ۳

- در جبر بول، هر تابعی را می‌توان به شکل جمع مینترم‌ها نمایش داد.
- این روش را نمایش SOP متعارف (Canonical SOP) می‌نامند

مثال

$$f(a,b,c) = \sum(m_2, m_3, m_6)$$

a	b	c	$f(a,b,c)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\rightarrow m_2 = a'.b.c'$
0	1	1	1	$\rightarrow m_3 = a'.b.c$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$\rightarrow m_6 = a.b.c'$
1	1	1	0	

قضیه ۴

- در جبر بول، هر تابعی را می‌توان به شکل ضرب ماکسترم‌ها نمایش داد.
- این روش را نمایش POS متعارف (Canonical POS) می‌نامند

مثال

$$f(a,b,c) = \prod(M_0,M_3,M_4,M_5,M_7) =$$
$$(a+b+c)(a+b'+c')(a'+b+c)(a'+b+c')(a'+b'+c')$$

a	b	c	f	M_0	M_3	M_4	M_5	M_7
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0

نکته: مقایسه شماره مینترم‌ها و ماکسترم‌ها

$$f(x,y,z) = \prod(M_0,M_2,M_4,M_5) = \sum(m_1,m_3,m_6,m_7)$$

$$=(x+y+z)(x+y'+z')(x'+y+z)(x'+y+z')=(x'y'z)+(x'yz)+(xyz')+(xyz)$$

x	*y*	*z*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Minterms

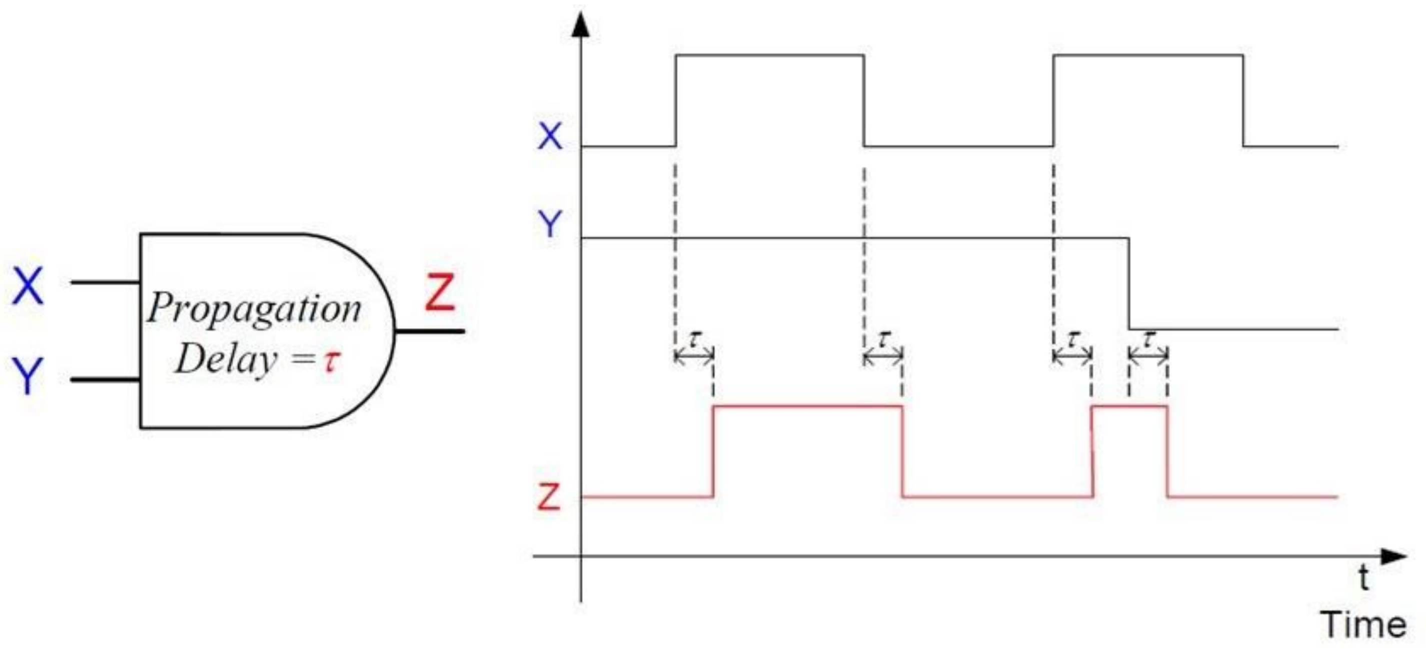
Maxterms

جمع‌بندی

- طبق قضیه‌های ۳ و ۴ هر تابع بولی می‌توانیم به صورت استاندارد متعارف (جمع مین‌ترم‌ها یا ضرب ماکسترم‌ها) بنویسیم.
- به کمک اتحادها و اصول موضوعه جبر بول می‌توانیم یک تابع استاندارد متعارف را به صورت جمع ضرب‌ها (SOP) یا ضرب جمع‌ها (POS) ساده کنیم.
- تابع ساده شده را می‌توانیم با مداری بسازیم که نسبت به مدار متناظر تابع اولیه تاخیر و پیچیدگی کمتری دارد.

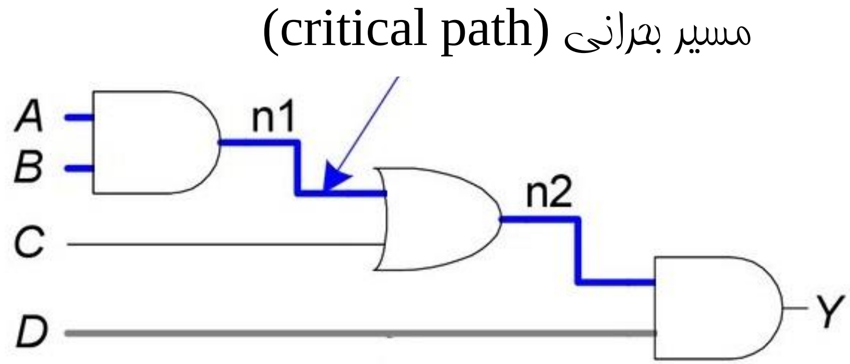
تاخیر در انتشار

زمان بین تغییر در ورودی تا تغییر در خروجی ناشی از آن



مسیر بحرانی

- مسیری که بیشترین تاخیر را دارد
- مسیر بحرانی را گاهی بر حسب جمع تاخیرهای هر گیت و اغلب برحسب تعداد گیت‌های مسیر بیان می‌کنیم

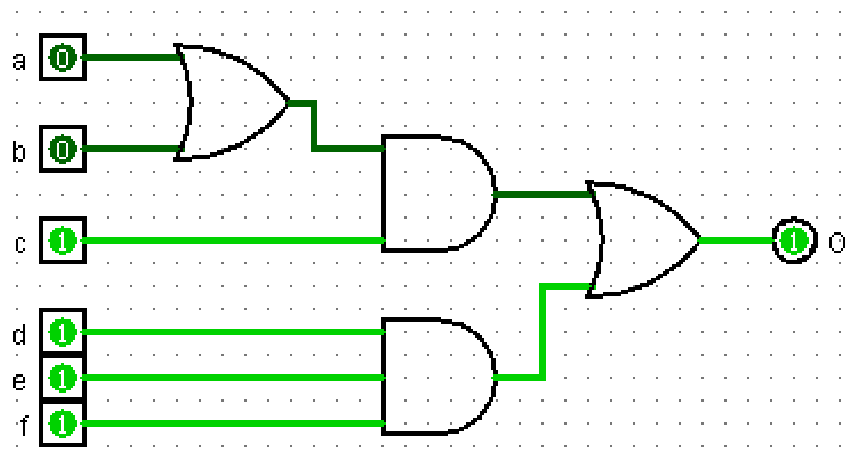


پیچیدگی سخت‌افزار

- چه مقدار تجهیزات باید صرف ساخت مدار شود؟
- روش دقیق:
  - شمارش قطعات الکتریکی و الکترونیکی (ترانزیستور، مقاومت ...)
- روش بهتر:
  - شمارش تعداد گیت‌ها، بدون توجه به تعداد ورودی
- روش متداول:
  - شمارش تعداد ورودی گیت‌ها (GI)

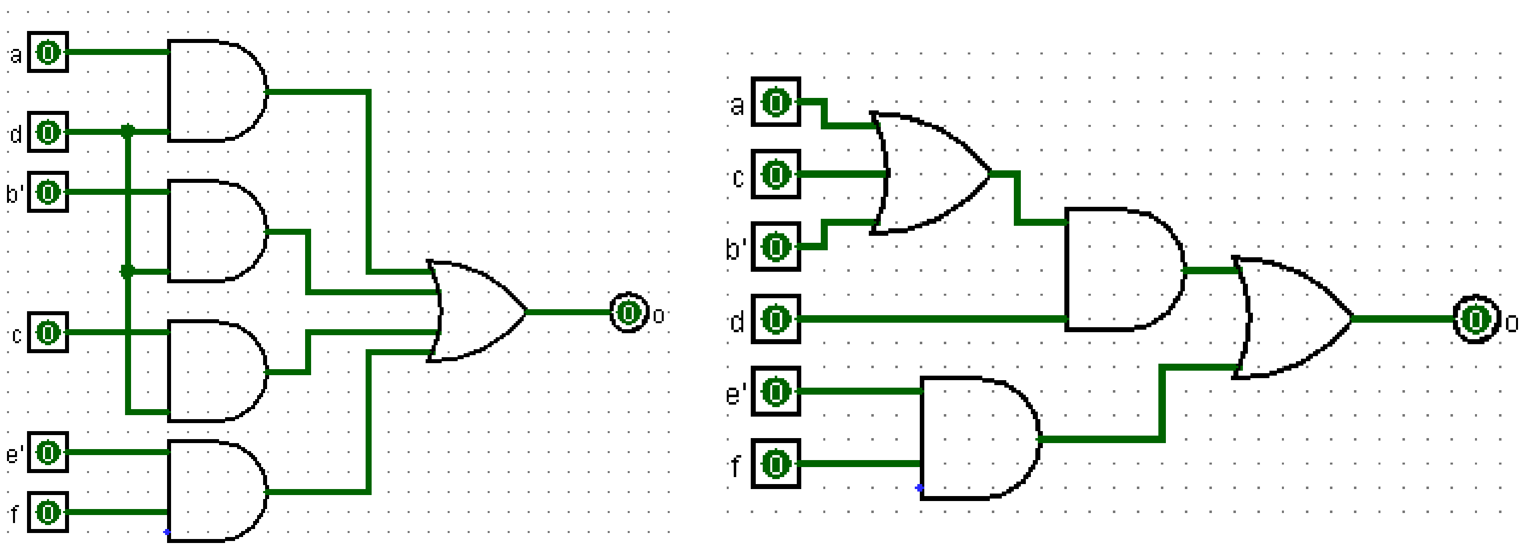
مثال

- در این مدار ۴ گیت داریم اما با تعداد ورودی متفاوت
- بنابراین می‌گوییم پیچیدگی این مدار 9GI است



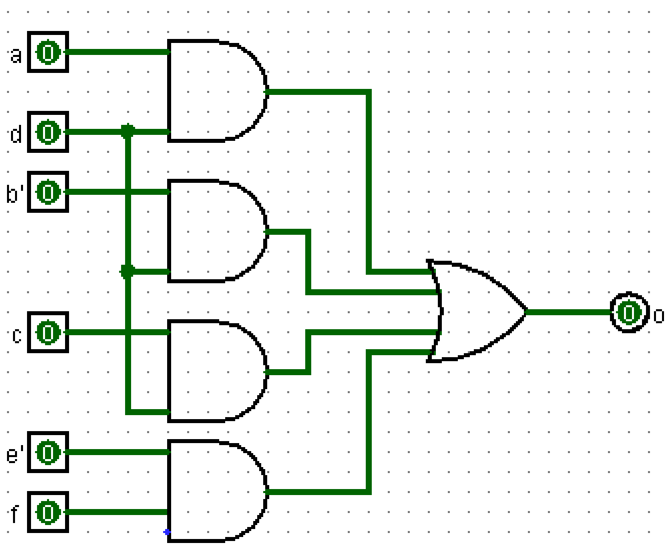
مدارهای منطقی متعدد مربوط به یک تابع از نظر سرعت و پیچیدگی سخت‌افزاری متفاوت هستند:

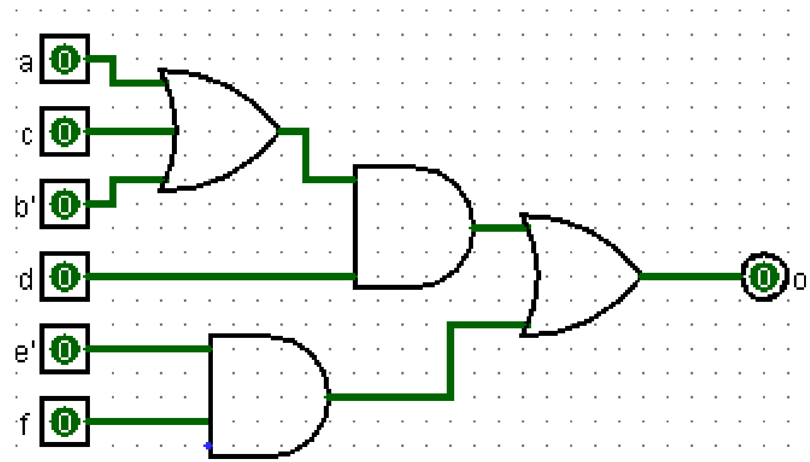
$$o = ad + b'd + cd + e'f = (a+b'+c)d + e'f$$



برای بهبود سرعت و سادگی مدارهای منطقی، می‌توانیم عبارت جبری متناظر آنها را با استفاده از روش‌های جبری ساده کنیم:

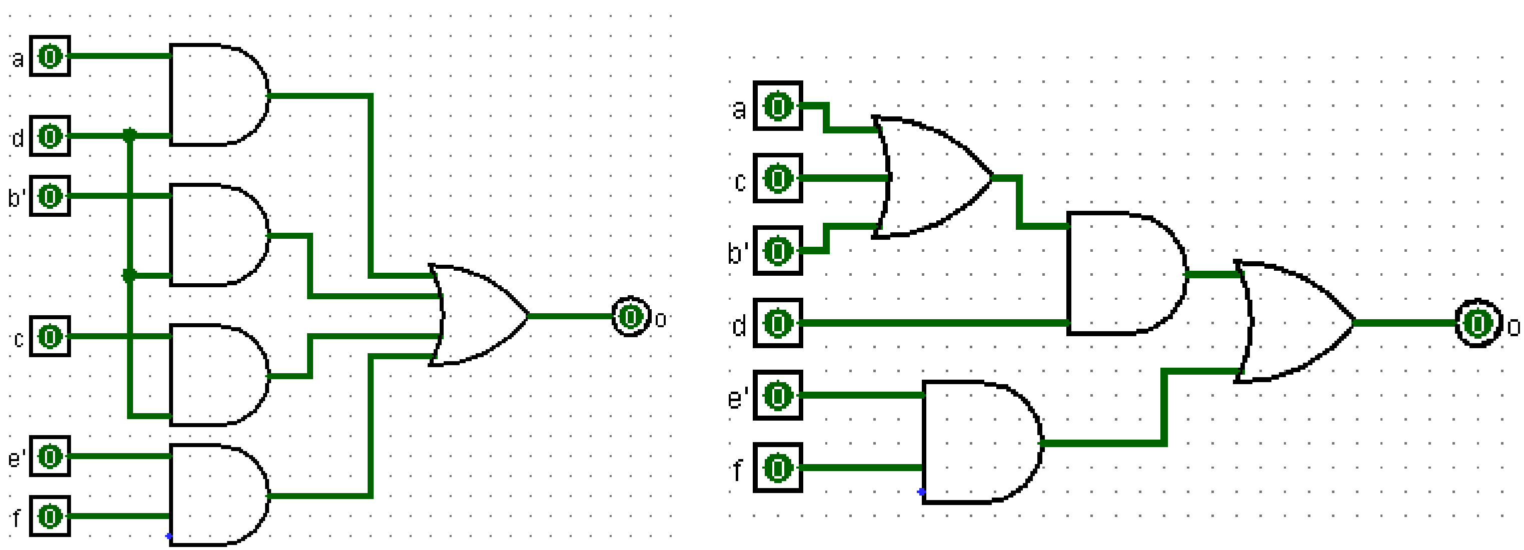
$$o = ad + b'd + cd + e'f = (a+b'+c)d + e'f$$





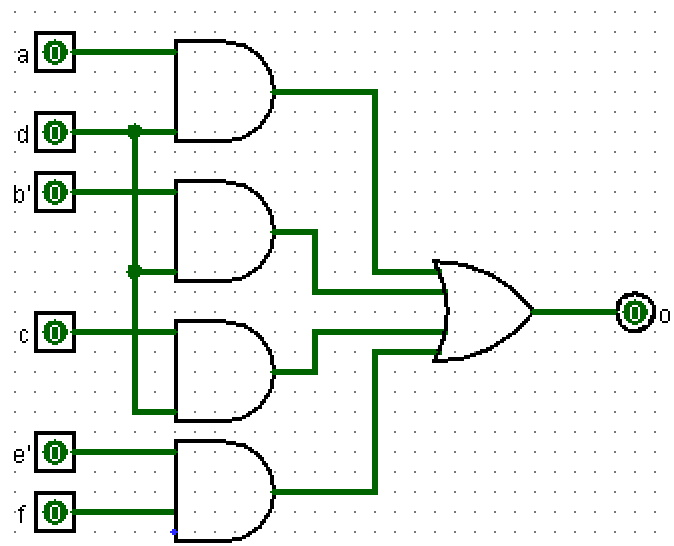
اغلب باید بین سرعت و سادگی مصالحه کنیم:

$$o = ad + b'd + cd + e'f = (a+b'+c)d + e'f$$



اولویت ما در درس مدار منطقی با سرعت است:

$$o = ad + b'd + cd + e'f = (a+b'+c)d + e'f$$



ساده‌سازی

- برای نمایش جبری یک تابع عبارت‌های متعددی وجود دارد
- هر عبارت جبری فقط و فقط معادل یک مدار منطقی است
- نتیجه اینکه هر تابع مدارهای منطقی متعددی دارد
- مدارهای منطقی متعدد مربوط به یک تابع از نظر سرعت و پیچیدگی سخت‌افزاری متفاوت هستند
- برای بهبود سرعت و سادگی مدارهای منطقی، می‌توانیم عبارت جبری متناظر آنها را با استفاده از روش‌های جبری ساده کنیم.
- اغلب باید بین سرعت و سادگی مصالحه کنیم
- در روش‌های ساده‌سازی که در درس مدار منطقی به کار می‌گیریم، اولویت با سرعت است
- بنابراین ما به دنبال ساده‌ترین مدار در میان سریع‌ترین مدارها هستیم

سریع‌ترین مدارها

- فرض:
  - همه ورودی‌های مدار، هم خودشان موجود هستند و هم نقیضشان
  - برای ساخت مدار فقط از گیت‌های AND و OR استفاده می‌کنیم
- در این صورت سریع‌ترین مدارها
  - بر پایه SOP یا POS ساخته می‌شوند
  - و حداکثر دو طبقه دارند
- بنابراین ما به دنبال ساده‌ترین SOP یا POS هستیم

قواعد ساده‌سازی کواین-مک‌کلاسکی

قاعده همجواری منطقی در عبارت‌های ضربی

- دو PT همجوار منطقی در تمامی حروف با یکدیگر مشترک هستند و فقط یک حرف در یکی به شکل نقیض و در دیگری نقیض نشده ظاهر شده است
- اگر دو PT همجوار منطقی با هم جمع شوند، حاصل برابر با ضرب حروف مشترک خواهد بود

$$abcd + abcd' = abc$$

$$xy'z' + x'y'z' = y'z'$$

قواعد ساده‌سازی کواین-مک‌کلاسکی

قاعده **همجواری منطقی** در عبارت‌های جمعی

- دو ST همجوار منطقی در تمامی حروف با یکدیگر مشترک هستند و فقط یک حرف در یکی به شکل نقیض و در دیگری نقیض نشده ظاهر شده است
- اگر دو ST همجوار منطقی در هم ضرب شوند، حاصل برابر با جمع حروف مشترک خواهد بود

$$(a+b+c+d)(a'+b+c+d) = b+c+d$$

$$(x'+y'+z')(x'+y+z') = x'+z'$$

قواعد ساده‌سازی کواین-مک‌کلاسکی

قاعده تکرار

- تکرار یک PT به هر تعداد دلخواه در یک SOP اثری بر ارزش آن ندارد

$$xyz+xyz'+x'yz' = (\underline{xy}z+\underline{xy}z')+(x'\underline{yz'}+x\underline{yz'}) = xy+yz'$$

- تکرار یک ST به هر تعداد دلخواه در یک POS اثری بر ارزش آن ندارد

$$(x+y+z)(x+y+z')(x'+y+z') =$$

$$[(\underline{x+y}+z)(\underline{x+y}+z')][(x'+\underline{y+z'})(x+\underline{y+z'})] =$$

$$(x+y)(y+z')$$

قواعد ساده‌سازی کواین-مک‌کلاسکی

- شکل SOP (یا POS) متعارف یک تابع از روی جدول درستی آن به دست می‌آید
- به کمک قواعد همجواری منطقی و تکرار می‌توانیم SOP (یا POS) متعارف را به ساده‌ترین SOP (یا POS) تبدیل کنیم
- برای به‌کارگیری این قواعد از جدول کارنو (K-map) استفاده می‌کنیم

جدول کارنو (K-map)

B \ A	0	1
0	0	2
1	1	3

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

جدول کارنوی دو متغیره

m_0	m_2
m_1	m_3

B \ A	0	1 (A)
0	$A'B'$	AB'
1 (B)	$A'B$	AB

جدول کارنوی سه متغیره

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

A

B

C

جدول کارنوی چهار متغیره

A

CD \ AB	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

C

D

B

مثال ۱

$$f(A,B,C) = A'.B.C + A.B'.C' + A.B.C' + A.B.C$$

C \ AB	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	

$$f(A,B,C) = \sum(m_3, m_4, m_6, m_7) = B.C + A.C'$$

مثال ۲

$$f(A,B,C) = A'.B'.C' + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C' + A.B.C$$

مثال ۲

$$f(A,B,C) = A'.B'.C' + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C' + A.B.C$$

$$f(A,B,C) = \sum(m_0,m_2,m_4,m_6,m_7)$$

مثال ۲

$$f(A,B,C) = A'.B'.C' + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C' + A.B.C$$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	

$$f(A,B,C) = \sum(m_0,m_2,m_4,m_6,m_7) = A.B + C'$$

مثال ۳

$$f(A,B,C,D) = \sum(m_0,m_1,m_2,m_5,m_8,m_9,m_{10})$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11				
10	1			1

$$f(A,B,C,D) = ?$$

مثال ۳

$$f(A,B,C,D) = \sum(m_0,m_1,m_2,m_5,m_8,m_9,m_{10})$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11				
10	1			1

$$f(A,B,C,D) = B'.D' + \ldots$$

مثال ۳

$$f(A,B,C,D) = \sum(m_0,m_1,m_2,m_5,m_8,m_9,m_{10})$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11				
10	1			1

$$f(A,B,C,D) = B'.D' + B'C' + \ldots$$

مثال ۳

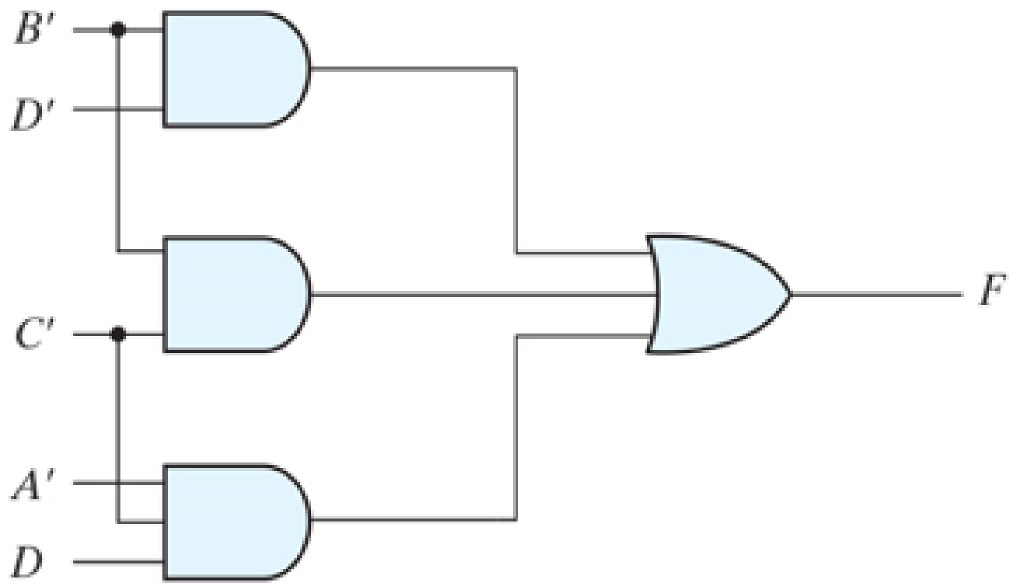
$$f(A,B,C,D) = \sum(m_0,m_1,m_2,m_5,m_8,m_9,m_{10})$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11				
10	1			1

$$f(A,B,C,D) = B'.D' + B'C' + A'.C'.D$$

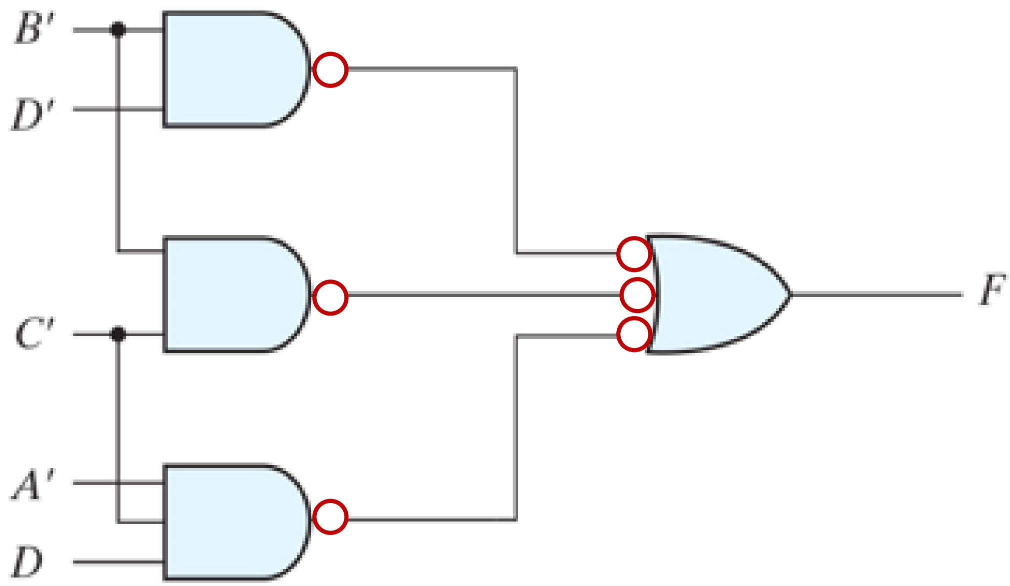
مثال ۳

$$f(A,B,C) = B'.D' + B'.C' + A'.C'.D$$



مثال ۳

$$f(A,B,C) = B'.D' + B'.C' + A'.C'.D$$



مثال ۴

$$f(A,B,C,D) = \sum(m_0, m_1, m_2, m_5, m_8, m_9, m_{10})$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$$f(A,B,C,D) = \text{POS} \ ?$$

مثال ۴

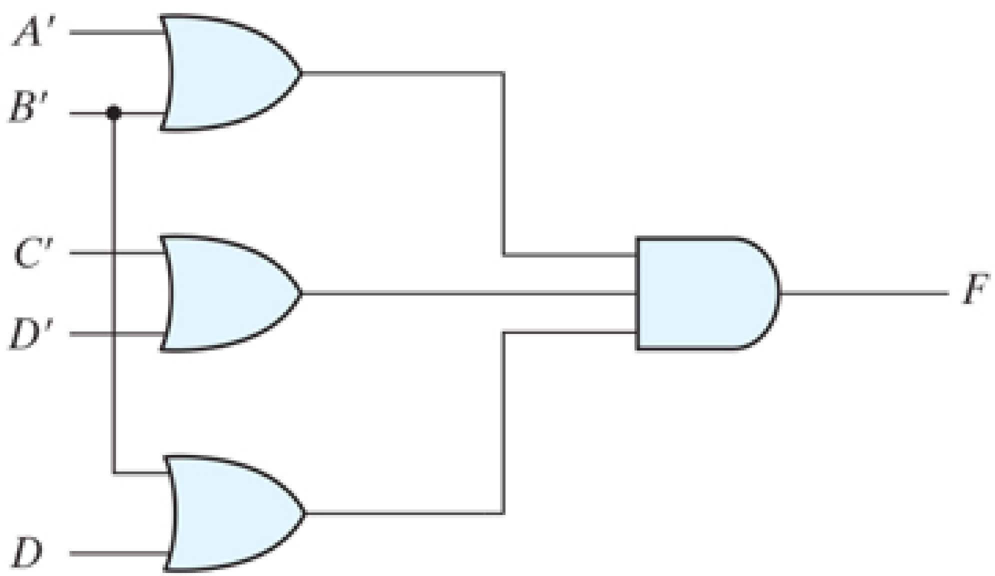
$$f(A,B,C,D) = \sum(m_0, m_1, m_2, m_5, m_8, m_9, m_{10})$$

CD \ AB	00	01	11	10
00		0	0	
01			0	
11	0	0	0	0
10		0	0	

$$f(A,B,C) = (A'+B')\ (B'+D)(C'+D')$$

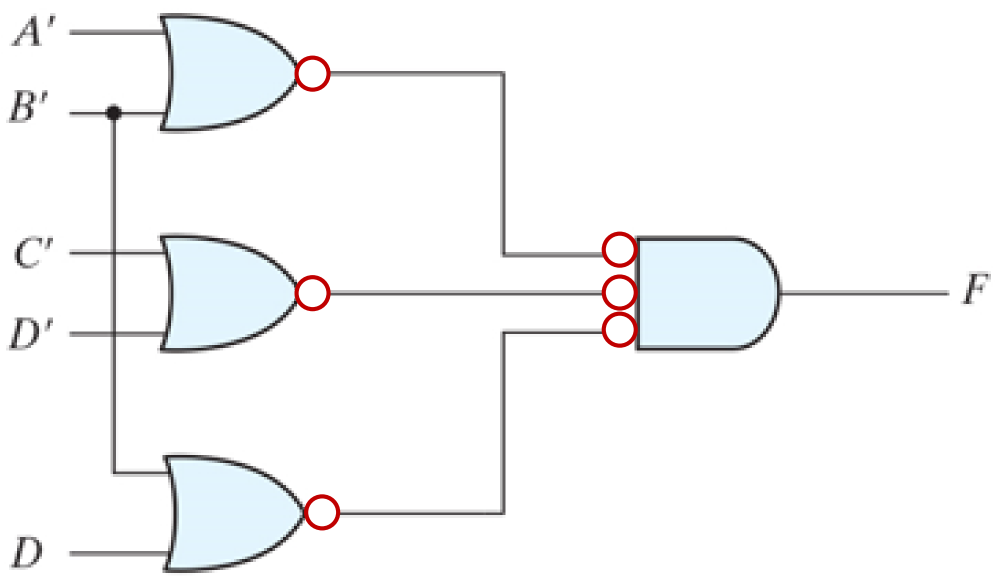
مثال ۴

$$f(A,B,C) = (A'+B')(C'+D')(B'+D)$$



مثال ۴

$$f(A,B,C) = (A'+B')(C'+D')(B'+D)$$



مثال ۵

$$f(A,B,C,D,E) = \sum m(1,3,4,5,7,16,17,18,19,21,23,24,26)$$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00		1		
01	1	1		
11	1	1		
10				

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		
11	1	1		
10	1			1

$$f(A,B,C,D,E) = ?$$

مثال ۵

$$f(A,B,C,D,E) = \sum m(1,3,4,5,7,16,17,18,19,21,23,24,26)$$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00		1		
01	1	1		
11	1	1		
10				

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		
11	1	1		
10	1			1

$$f(A,B,C,D,E) = A'B'CD' + \ldots$$

مثال ۵

$$f(A,B,C,D,E) = \sum m(1,3,4,5,7,16,17,18,19,21,23,24,26)$$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00		1		
01	1	1		
11	1	1		
10				

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		
11	1	1		
10	1			1

$$f(A,B,C,D,E) = A'B'CD' + AC'E' + \ldots$$

مثال ۵

$$f(A,B,C,D,E) = \sum m(1,3,4,5,7,16,17,18,19,21,23,24,26)$$

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00		1		
01	1	1		
11	1	1		
10				

A=1

DE \ BC	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		
11	1	1		
10	1			1

$$f(A,B,C,D,E) = A'B'CD' + AC'E' + B'E$$

مثال ۶ – توابع چند خروجی

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01		1	1	
11			1	1
10				

$f_1 = ?$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		1	1
01				
11				
10				

$f_2 = ?$

مثال ۶ – توابع چند خروجی

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01		1	1	
11			1	1
10				

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		1	1
01				
11				
10				

$f_1 = BC'D + ACD + A'B'C'D'$

$f_2 = AC'D' + A'B'C'D'$

حالت‌های بی‌اهمیت (Don’t Care)

- گاهی مهم نیست خروجی مدار برای ترکیب خاصی از ورودی، صفر باشد یا یک
- گاهی ترکیب خاصی از ورودی‌ها هرگز رخ نمی‌دهند یا رخ دادنشان ممنوع است
- در چنین مواردی می‌توان مینترم متناظر با این ترکیب ورودی را به دلخواه صفر یا یک در نظر گرفت، طوری که عبارت جبری حاصل، بهینه شود

مثال ۱

$$F(A,B,C) = \sum m(0,2,6) + d(1,3,5)$$

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	x
0	1	0	1
0	1	1	x
1	0	0	0
1	0	1	x
1	1	0	1
1	1	1	0

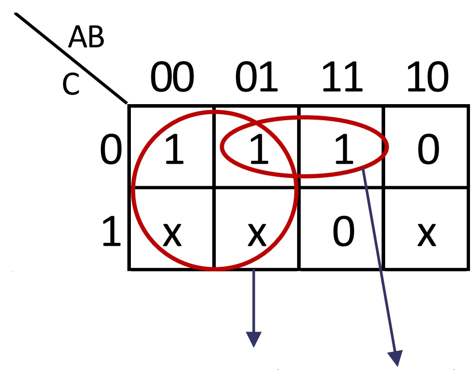
C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	x	x	0	x

F = ?

مثال ۱

$$F(A,B,C) = \sum m(0,2,6) + d(1,3,5)$$

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	x
0	1	0	1
0	1	1	x
1	0	0	0
1	0	1	x
1	1	0	1
1	1	1	0



$$F = A' + B.C'$$

مثال ۲- استفاده از XOR

$A \oplus B$

CD \ AB	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11		1		1
10		1		1

$C \oplus D$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11				
10	1	1	1	1

$A \oplus C$

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11	1	1		
10	1	1		

$A \oplus D$

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01	1	1		
11	1	1		
10			1	1

مثال ۲

$$f(A,B,C,D) = \sum m(0,2,3,6,7,8,9,10,12,13)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		1	1
01			1	1
11	1	1		
10	1	1		1

$$f(A,B,C,D) = ?$$

مثال ۲

$$f(A,B,C,D) = \sum m(0,2,3,6,7,8,9,10,12,13)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	x		1	1
01			1	1
11	1	1		
10	1	1		x

+

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		x	x
01			x	x
11	x	x		
10	x	x		1

$$f(A,B,C,D,E) = A \oplus C + B'D'$$

مثال ۳

مداری طرح کنید که اگر ورودی X=abcd، عدد یک یا یک عدد دودویی اول باشد، خروجی یک شود.

مثال ۳

مداری طرح کنید که اگر ورودی X=abcd، عدد یک یا یک عدد دودویی اول باشد، خروجی یک شود.

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	
11	1	1		1
10	1			

$$f(a,b,c,d) = b'cd + a'b'c + bc'd + a'd$$

مثال ۴

مداری طرح کنید که اگر ورودی X=abcd، عدد یک یا یک عدد BCD اول باشد، خروجی یک شود.

مثال ۴

مداری طرح کنید که اگر ورودی X=abcd، عدد یک یا یک عدد BCD اول باشد، خروجی یک شود.

cd \ ab	00	01	11	10
00			x	
01	1	1	x	
11	1	1	x	x
10	1		x	x

$$f(a,b,c,d) = b'c + b'd$$

مثال ۵

مداری طرح کنید که اگر ورودی X=abcd، عدد یک یا یک عدد BCD اول باشد، خروجی یک شود.

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	x	0
01	1	1	x	0
11	1	1	x	x
10	1	0	x	x

$f(a,b,c,d) = \text{POS}$?

مثال ۵

مداری طرح کنید که اگر ورودی X=abcd، عدد یک یا یک عدد BCD اول باشد،

خروجی یک شود.

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	x	0
01	1	1	x	0
11	1	1	x	x
10	1	0	x	x

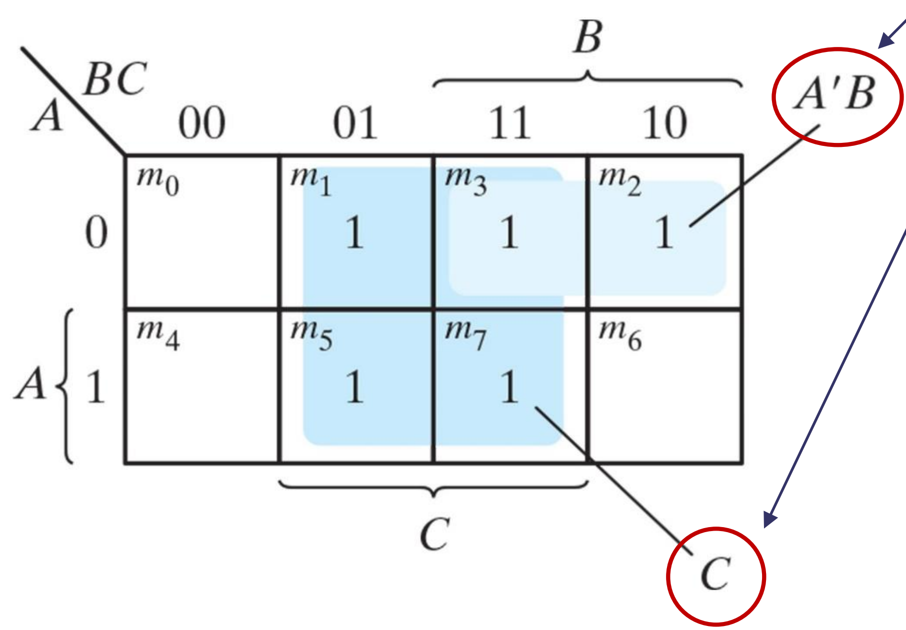
$$f(a,b,c,d) = (c+d)\,(b'+d)\,a'$$

قوانین ساده‌سازی با جدول کارنو

- هر مینترم باید حداقل یک بار پوشش داده شده باشد
- محدوده پوشش باید تا حد امکان بزرگ باشد
- تعداد پوشش‌ها باید تا حد امکان کم باشد
- ساده‌سازی باید از مینترم‌های منزوی شروع شود و به سمت پوشش دادن مینترم‌های کمتر منزوی پیش رود

عامل اولیه (Prime Implicant)

عامل اولیه به مجموعه مربعاتی گفته می‌شود که در درون هیچ مجموعه مربع بزرگ‌تر از خود جا نشود



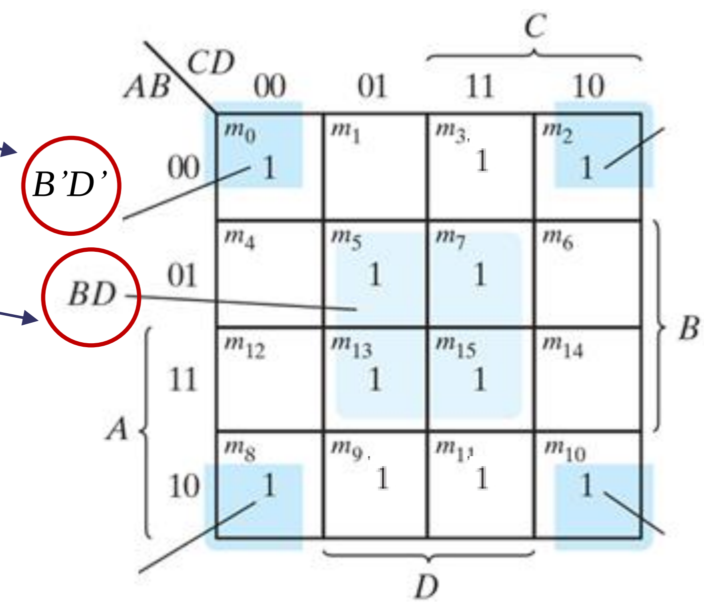
عامل اولیه اساسی (Essential Prime Implicant)

گاهی یک مینترم (یا ماکسترم) تنها در یک عامل اولیه جا می‌گیرد، در آن صورت آن

عامل اولیه را عامل اولیه اساسی می‌نامیم

تنها عامل اولیه‌ای که m_0 را پوشش می‌دهد، B’D’ است

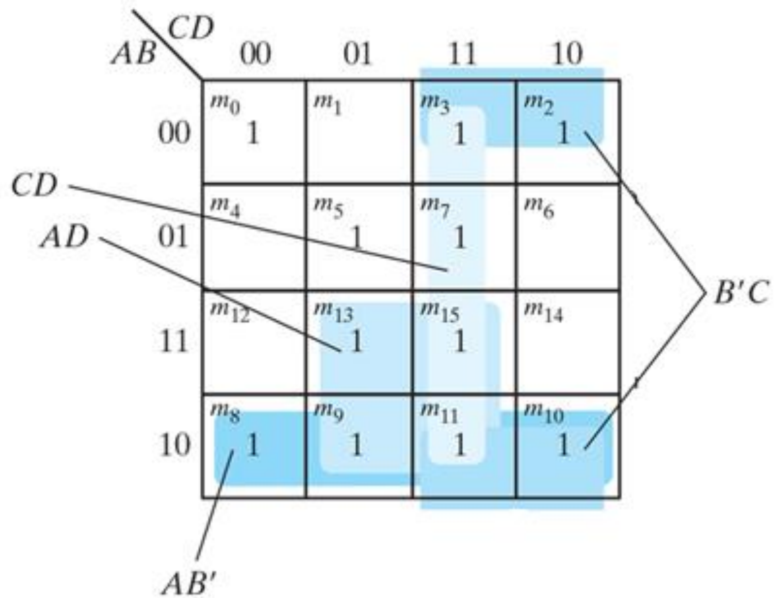
تنها عامل اولیه‌ای که m_5 را پوشش می‌دهد، BD است



بنابراین BD و B’D’ عامل‌های اولیه اساسی هستند

مثال

عبارت ساده‌شده یک تابع جبری ترکیبی از عامل‌های اولیه اساسی و عامل‌های اولیه‌ای است که لزوما اساسی نیستند.



$$f(A,B,C,D) = B'D' + BD + CD + AB'$$

جمع‌بندی

- هر تابع بولی می‌توانیم به صورت استاندارد متعارف (جمع مین‌ترم‌ها یا ضرب ماکسترم‌ها) بنویسیم.
- به کمک اتحادها و اصول موضوعه جبر بول می‌توانیم یک تابع استاندارد متعارف را به صورت جمع ضرب‌ها (SOP) یا ضرب جمع‌ها (POS) ساده کنیم.
- تابع ساده شده را می‌توانیم با مداری بسازیم که نسبت به مدار متناظر تابع اولیه پیچیدگی و تاخیر کمتری دارد.