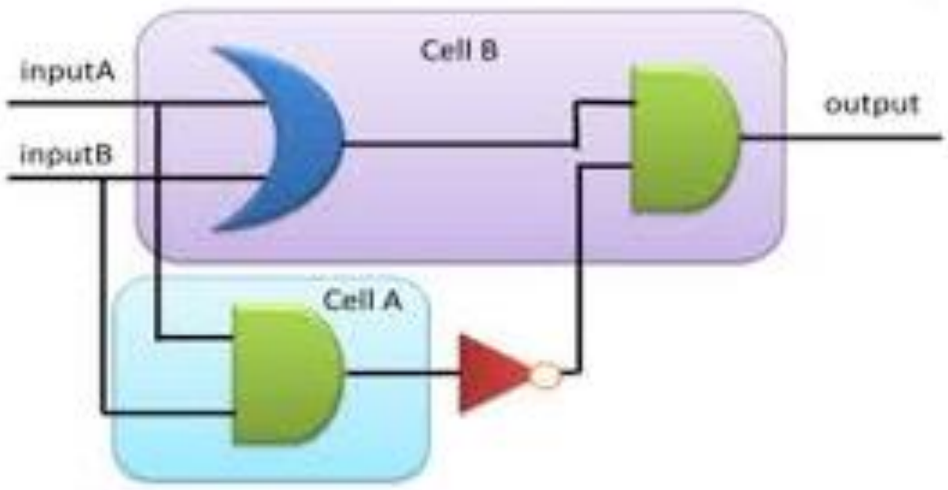
مدارهای منطقی

فصل دوم

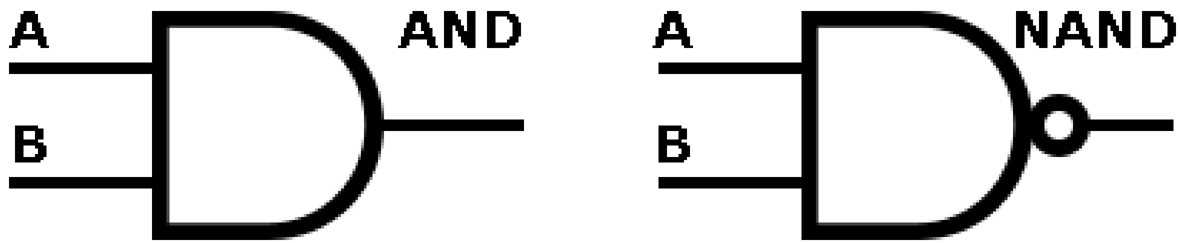
گیت‌های منطقی و جبر بول



سرفصل مطالب

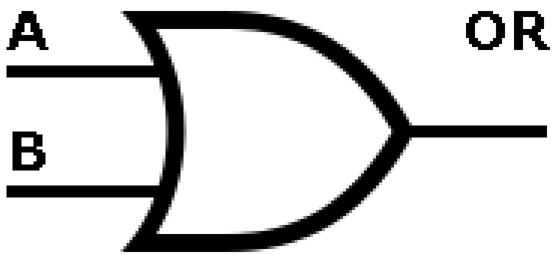
- معرفی گیت‌های منطقی
- معرفی جبر بول و اصول موضوعه و اتحادهای آن
- منطق کامل

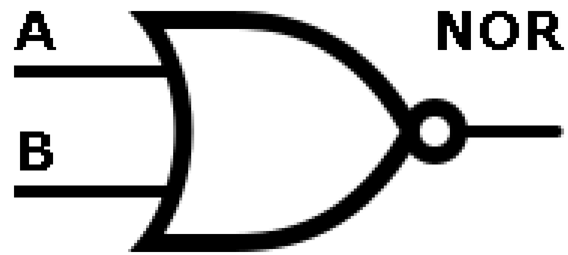
AND/NAND Gates



A	B	A.B	$\overline{A.B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

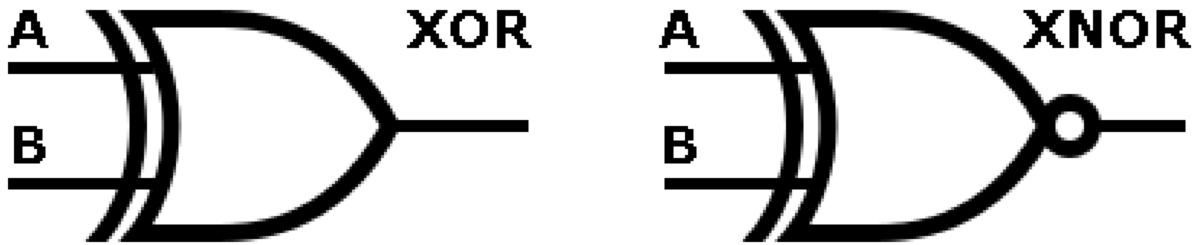
OR/NOR Gates





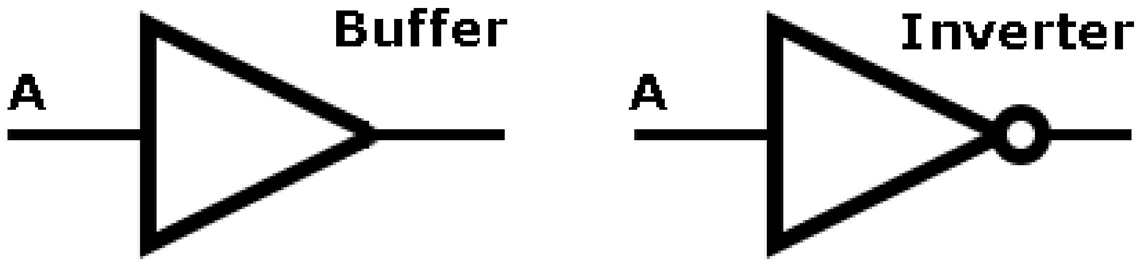
A	B	A+B	$\overline{A+B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

XOR/XNOR Gates



A	B	$A \oplus B$	$\overline{A \oplus B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Buffer / NOT Gate



A	A	$\bar{A}$
0	0	1
1	1	0

Boolean Algebra

- An algebra that deals with
  - binary variables (A, B, x, y, …)
  - logic operations
    - AND (.)
    - OR (+)
    - Complement (’)
- A Boolean Function F is defined as:
  - $F(x_1,x_2,\ldots,x_n): \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$

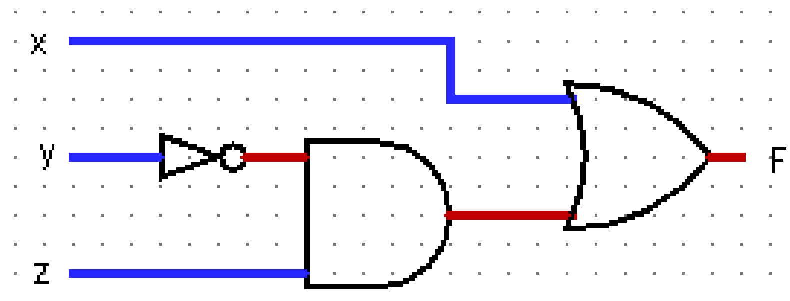
مثال

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

جدول درستی

(Truth table)

$$F = x + y'.z$$



نمودار منطقی

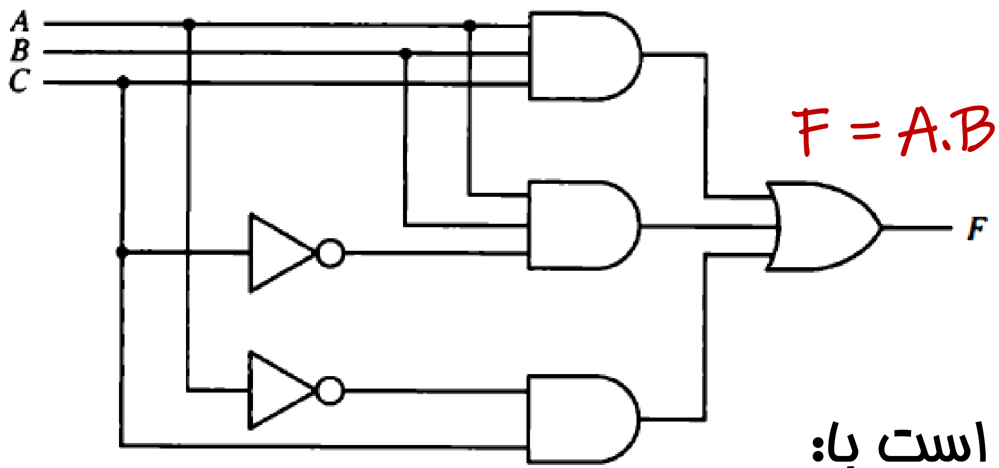
(Logic diagram)

اتحادها و اصول موضوعه مهم در جبر بول

Postulate 2	(a)	$x + 0 = x$	(b)	$x \cdot 1 = x$
Postulate 5	(a)	$x + x' = 1$	(b)	$x \cdot x' = 0$
Theorem 1	(a)	$x + x = x$	(b)	$x \cdot x = x$
Theorem 2	(a)	$x + 1 = 1$	(b)	$x \cdot 0 = 0$
Theorem 3, involution		$(x')' = x$		
Postulate 3, commutative	(a)	$x + y = y + x$	(b)	$xy = yx$
Theorem 4, associative	(a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	(b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulate 4, distributive	(a)	$x(y + z) = xy + xz$	(b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Theorem 5, DeMorgan	(a)	$(x + y)' = x'y'$	(b)	$(xy)' = x' + y'$
Theorem 6, absorption	(a)	$x + xy = x$	(b)	$x(x + y) = x$

Digital Design: Table 2.1 - Postulates and Theorems of Boolean Algebra.

کاربرد اتحادهای جبر بول

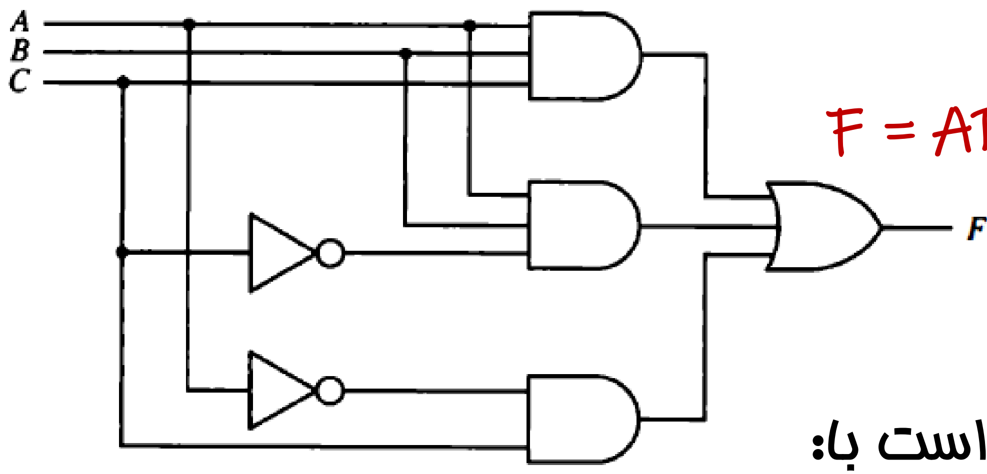


$F = A.B.C + A.B.C' + A'.C$

معادل است با:

?

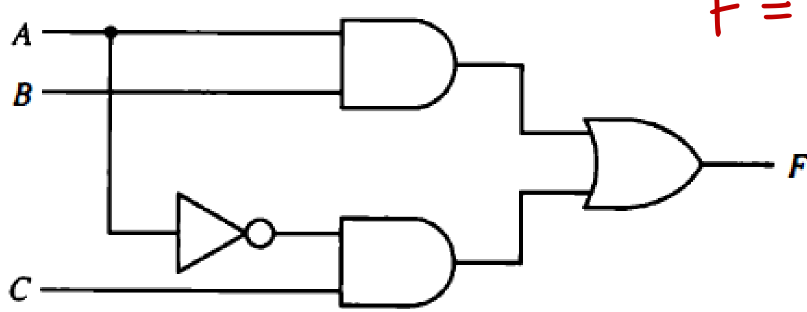
کاربرد



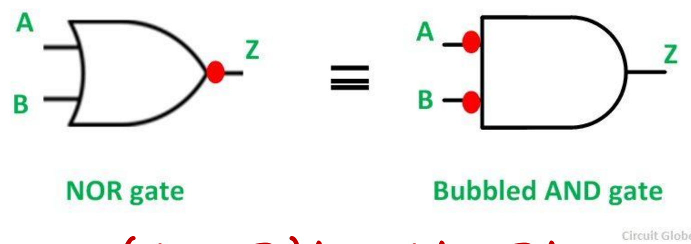
$F = ABC + ABC' + A'C$

معادل است با:

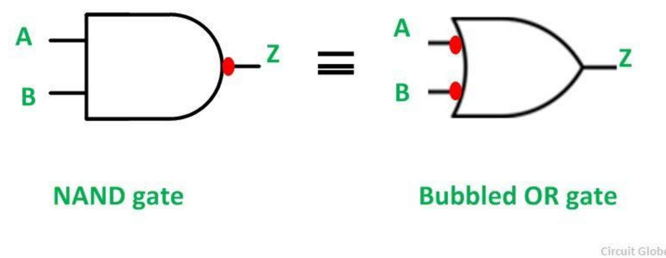
$F = AB + A'C$



قانون دمرگان



$$(A+B)' = A' . B'$$



$$(A . B)' = A' + B'$$

مثال

$$F = A \,.\, (B' + C.D)' + A'.B$$

معادل است با:

مثال

$$F = A \cdot (B' + C.D)' + A'.B$$

معادل است با:

$$F = A'.B + B.C' + B.D'$$

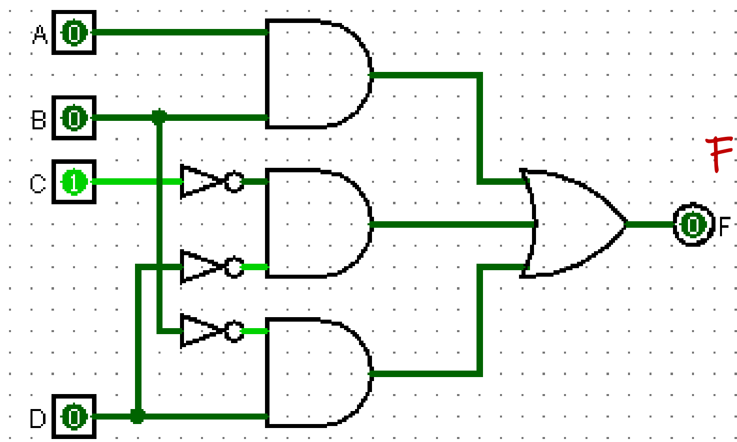
تعمیم قانون دمرگان

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)' = a_1' \cdot a_2' \cdot \ldots \cdot a_n'$$

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)' = a_1' + a_2' + \ldots + a_n'$$

The complement of an expression F is obtained by interchanging AND & OR operations and complementing each individual variable

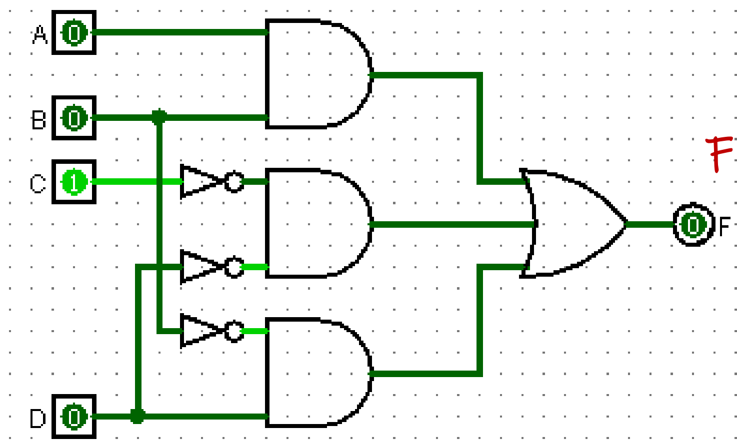
مثال



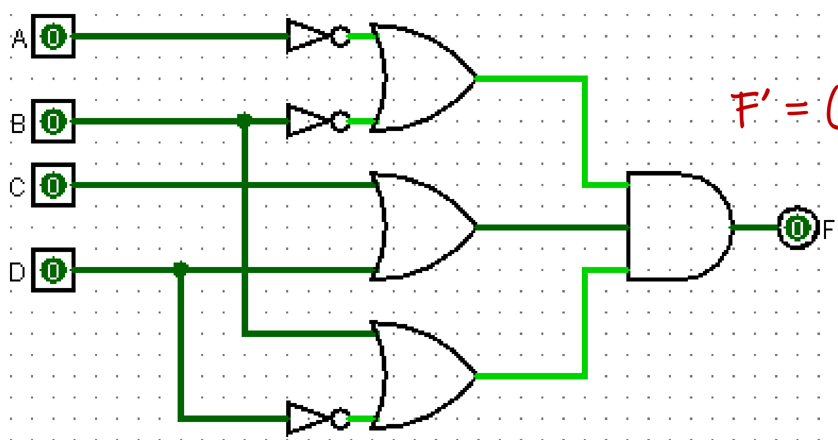
$F = A.B + C'.D' + B'.D$

$F' = ?$

مثال



$F = A.B + C'.D' + B'.D$



$F' = (A' + B') . (C + D) . (B + D')$

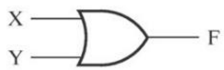
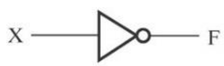
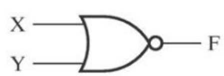
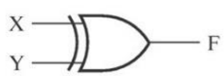
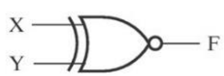
منطق کامل

- مجموعه کاملی از اعمال منطقی که می‌توان هر تابع منطقی را با آنها ساخت، منطق کامل می‌نامیم.
- در درس‌های آینده نشان خواهیم داد مجموعه {AND, OR, NOT} یک منطق کامل است.
- برای اثبات اینکه یک مجموعه منطق کامل است، کافی است نشان دهیم تابع صفر (یا یک) و یک منطق کامل دیگر از روی آن قابل ساخت است.

منطق کامل (مثال‌ها)

- {NOT, OR}
  - $1 = (a' + a)$
  - $a . b = (a' + b')'$
- {NOT, AND}
  - $0 = (a' . a)$
  - $a + b = (a' . b')'$
- {NOR}
  - $0 = (a \downarrow a')$
  - $a' = a \downarrow a$
  - $a + b = ((a + b)')' = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$
  - $a . b = (a' + b')' = ((a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b))$
- {NAND} ?

گیت‌های منطقی متداول

Name	Distinctive-Shape Graphics Symbol	Algebraic Equation	Truth Table
AND		$F = XY$	X Y F 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
OR		$F = X + Y$	X Y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
NOT (inverter)		$F = \overline{X}$	X F 0 1 1 0
NAND		$F = \overline{X \cdot Y}$	X Y F 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NOR		$F = \overline{X + Y}$	X Y F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
Exclusive-OR (XOR)		$F = X\overline{Y} + \overline{X}Y$ $= X \oplus Y$	X Y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
Exclusive-NOR (XNOR)		$F = XY + \overline{X}\,\overline{Y}$ $= \overline{X \oplus Y}$	X Y F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1