

کدهای تشخیص و تصحیح خطا (error detecting/correcting codes)

فاصله همنگ: تعداد بیت‌های متفاوت بین دو کلمه

0111 → d = 2
0010
↑ ↑

دو بیت برای نمایش
خطا 0 → 1
10 یا 01 → خطا یک بیت
00 یا 11 → کدهای مجاز

یک بیت خطا قابل کشف است $d=2 \Rightarrow$

+ اگر فاصله d باشد تا d-1 بیت خطا قابل کشف است

بیت برای نمایش
0 = 000 → اصلاح: 001, 010, 100 → 000
تصحیح: 011, 101, 110 → 000
1 = 111

کدهای مجاز

اصلاح به صورت استثنای انجام می‌گیرد
111 x

تا 2 بیت خطا کشف می‌شود $d=3 \Rightarrow$

0000 → 0011
1111

+ اگر فاصله d باشد تا $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ بیت خطا قابل تصحیح کردن است

روسی برای تشخیص خطای تک بیتی: parity check (بررسی بیت توازن)

parity { even: زوج
odd: فرد

$$P \quad X_1 X_2 \dots X_7 \quad P = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_7$$

(even parity)

تشخیص خطا: تک بیتی (تعداد فرد)

$$C = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{درست} \\ 1 \rightarrow \text{خطا} \end{cases} \Leftrightarrow C = P_1 \oplus X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_7$$

$$\left. \begin{array}{l} 1010 \\ 0000 \end{array} \right\} d=2$$

برای تصحیح یک بیت خطا، فاصله باید حداقل $d=3$ باشد.

کد متداول با $d=3$: کد هینگ (Hamming code)

اندیس‌هایی که توان دو هستند (2^i) برای parity در نظر گرفته می‌شوند و بقیه بیت‌ها مربوط

$$P_1 P_2 X_3 P_4 X_5 X_6 X_7 P_8 X_9 X_{10} \dots X_{15}$$

به عدد اولیه هستند

Parity: P

X : عدد اصلی

م برای عدد خارجی $X_3 X_5 X_6 X_7$ که مینگ را تولید کنند.

$$P_1: \text{even parity with bits } (3, 5, 7) \rightarrow P_1 \oplus X_3 \oplus X_5 \oplus X_7 = 0$$

$$P_2: \quad \quad \quad \text{bits } (3, 6, 7) \rightarrow P_2 \oplus X_3 \oplus X_6 \oplus X_7 = 0$$

$$P_4: \quad \quad \quad \text{bits } (5, 6, 7) \rightarrow P_4 \oplus X_5 \oplus X_6 \oplus X_7 = 0$$

مثال: برای کد 1010

$$\begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & X_3 & P_4 & X_5 & X_6 & X_7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

برای تشخیص (و تصحیح) خطا (یک بیت)

$$C_1 = P_1 \oplus X_3 \oplus X_5 \oplus X_7$$

$$C_2 = P_2 \oplus X_3 \oplus X_6 \oplus X_7$$

$$C_4 = P_4 \oplus X_5 \oplus X_6 \oplus X_7$$

$$C_4: \quad \quad \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

$$C_2: \quad 2 \quad 3 \quad \quad \quad 6 \quad 7$$

$$C_1: \quad 1 \quad \quad 3 \quad \quad \quad 5 \quad \quad 7$$

$$\begin{array}{ccc} C_4 & C_2 & C_1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$P_1 P_2 X_3 P_4 X_5 X_6 X_7 P_8 X_9 X_{10} X_{11} X_{12} X_{13} X_{14} X_{15}$

Parity: 4 bits
original: 11 bits

C_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
C_4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
C_2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
C_1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
سواء نظ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		P_1	P_2	X_3												

$C_8 C_4 C_2 C_1$
تأثيرات
نظ

$$C_8 = P_8 \oplus X_9 \oplus X_{10} \oplus X_{11} \oplus X_{12} \oplus X_{13} \oplus X_{14} \oplus X_{15} \rightarrow P_8 = X_9 \oplus \dots \oplus X_{15}$$

$$C_4 = P_4 \oplus X_5 \oplus X_6 \oplus X_7 \oplus X_{12} \oplus X_{13} \oplus X_{14} \oplus X_{15} \rightarrow P_4 = \dots$$

$$C_2 = P_2 \oplus X_3 \oplus X_6 \oplus X_7 \oplus X_{10} \oplus X_{11} \oplus X_{14} \oplus X_{15}$$

$$C_1 = P_1 \oplus X_3 \oplus X_5 \oplus X_7 \oplus X_9 \oplus X_{11} \oplus X_{13} \oplus X_{15}$$