

# مدارهای منطقی

## فصل اول

### نمایش اعداد در سیستم‌های دودویی

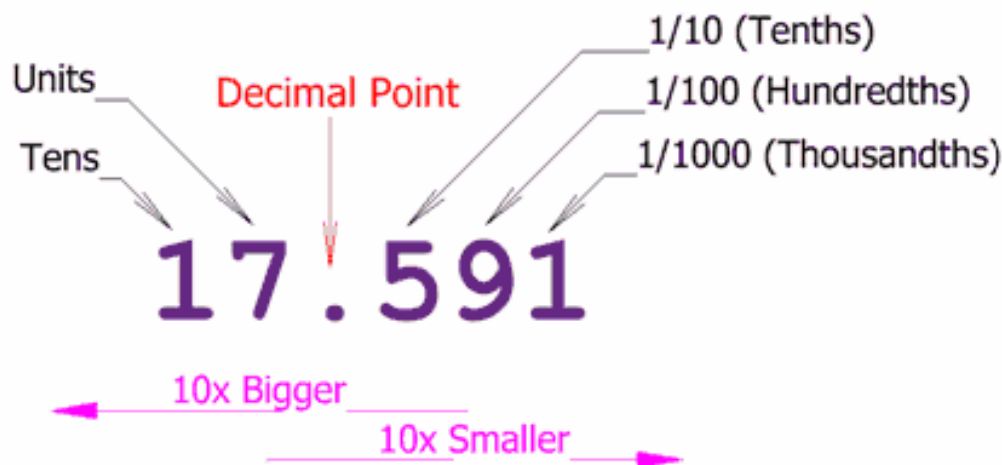
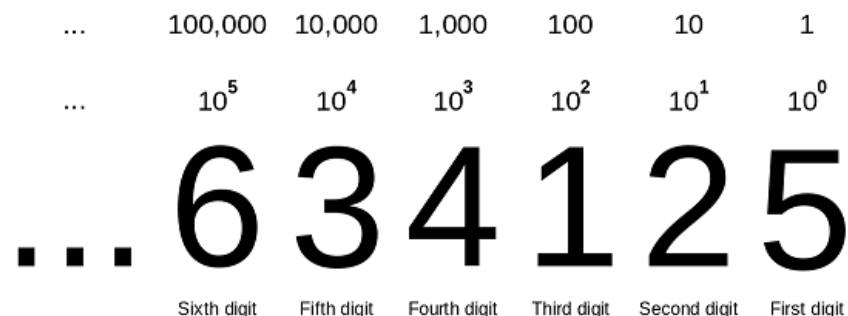
...	32	16	8	4	2	1
...	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
■ ■ ■	1	0	1	0	1	0
	Sixth digit	Fifth digit	Fourth digit	Third digit	Second digit	First digit

## سرفصل مطالب

- نمایش اعداد در مبنای دو
- نمایش اعداد در سایر مبناها
- نمایش اعداد علامت‌دار
- جمع و تفریق اعداد علامت‌دار



# نمایش دهنده اعداد (مبنای ۱۰)



# نمایش دودویی اعداد (مبتای ۲)

MSB	Representation of a Binary Number						LSB
	Binary Digit						
$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
128	64	32	16	8	4	2	1

0	1	0	0	0	1	1	0
$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
x128	x64	x32	x16	x8	x4	x2	x1
	64	+			4	+	2
<hr/>							
70							



# نمایش اعداد در مبنای ۸

$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
0	0	1	0	0	0	1	1	0
$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
	1			0			6	

00106

$70_{10}$      $106_8$



## نمایش اعداد در مبنای ۱۶

**16 (hex)**

```
// Base
```

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	// Symbol
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	// Decimal

// Symbol

```
// Decimal
```

3	C	A	F
3	2	1	0

// Value

// Exponent

value	x	base	exponent	
15	x	16	0	= 15
10	x	16	1	= 160
12	x	16	2	= 3,072
3	x	16	3	= 12,288

**= 15,535**



## سایر مبناها

Ternary (base-3) numbers

Quaternary (base-4) numbers

Quinary (base-5) numbers

$$\begin{aligned}
 (211)_3 &= 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0 \\
 &= 18 + 3 + 1 \\
 &= (22)_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (211)_4 &= 2 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 1 \times 4^0 \\
 &= 32 + 4 + 1 \\
 &= (37)_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (211)_5 &= 2 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 1 \times 5^0 \\
 &= 50 + 5 + 1 \\
 &= (56)_{10}
 \end{aligned}$$

Ex.

$$(211)_6 = (?)_{10}$$

$$(211)_7 = (?)_{10}$$

$$(211)_{13} = (?)_{10}$$

$$(211)_{20} = (?)_{10}$$



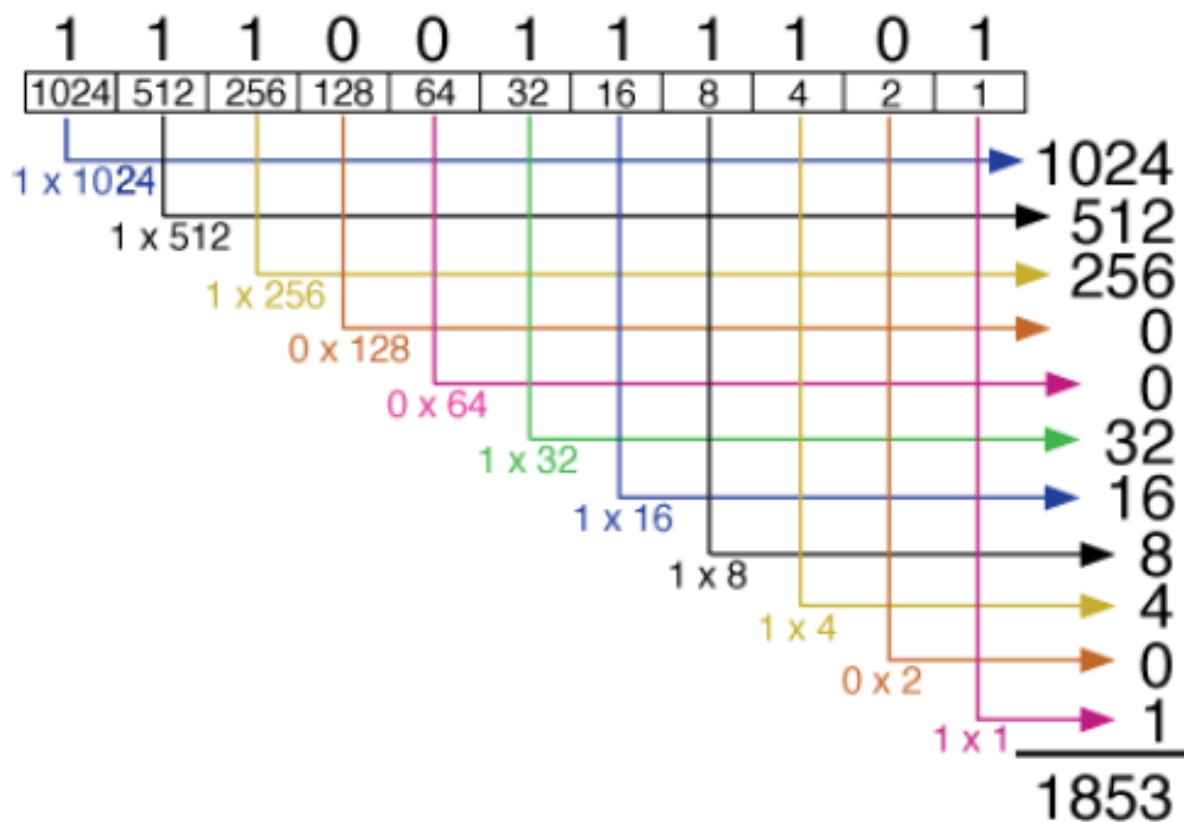
# حالت کلی

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\
 (a & b & c & . & d & e)
 \end{array} x \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\
 (ax^2 + bx^1 + cx^0 + dx^{-1} + ex^{-2})_{10}
 \end{array}$$





# تبدیل مبنا (۲ به ۱۰)



## تبدیل مبنا (۱۰ به ۲)

$$1864 = 2 \times 932 + 0$$

$$932 = 2 \times 466 + 0$$

$$466 = 2 \times 233 + 0$$

$$233 = 2 \times 116 + 1$$

$$116 = 2 \times 58 + 0$$

$$58 = 2 \times 29 + 0$$

$$29 = 2 \times 14 + 1$$

$$14 = 2 \times 7 + 0$$

$$7 = 2 \times 3 + 1$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$1 = 2 \times 0 + 1$$

$$(1864)_{10} = (11101001000)_2$$



## تبدیل کسرها

$$(0.4304)_{10} = (?)_5$$

0.2034

.4304	0.7600
$\times \quad 5$	$\times \quad 5$
<u>2.1520</u>	<u>3.8000</u>
.1520	.8000
$\times \quad 5$	$\times \quad 5$
<u>0.7600</u>	<u>4.0000</u>

$$(0.34375)_{10} = (0.01011)_2$$



## توان‌های دو

$n$	$2^n$	$n$	$2^n$	$n$	$2^n$
0	1	8	256	16	65,536
1	2	9	512	17	131,072
2	4	10	1,024 (1K)	18	262,144
3	8	11	2,048	19	524,288
4	16	12	4,096 (4K)	20	1,048,576 (1M)
5	32	13	8,192	21	2,097,152
6	64	14	16,384	22	4,194,304
7	128	15	32,768	23	8,388,608

Digital Design, Table 1.1 – Powers of Two



# مقایسه مبناها

Decimal (base 10)	Binary (base 2)	Octal (base 8)	Hexadecimal (base 16)
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Digital Design, Table 1.2 - Numbers with Different Bases.

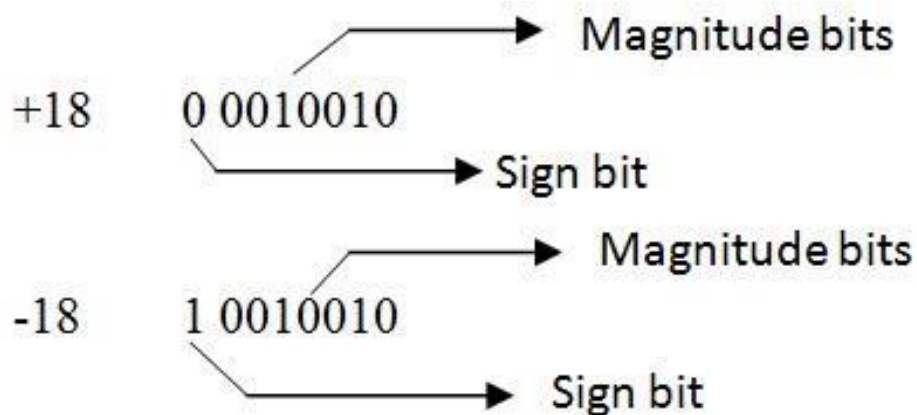
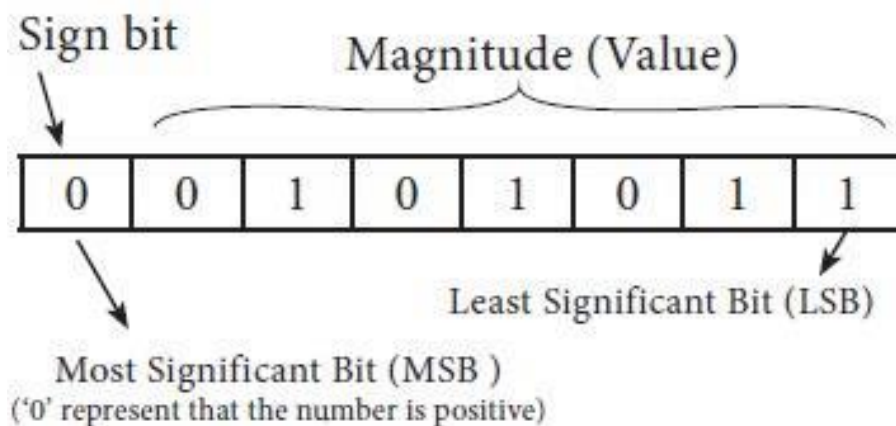


# روش‌های نمایش اعداد علامت‌دار

- مقدار-علامت (Signed-Magnitude)
- مکمل یک (Ones' Complement)
- مکمل دو (Two's Complement)

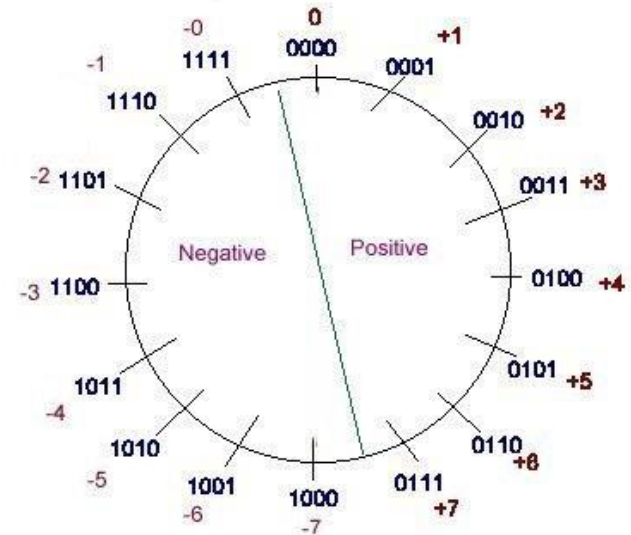


# روش نمایش مقدار-علامت



# روش مکمل یک

Original Value		One's Complement
0	→	1
1	→	0
1010	→	0101
1111	→	0000
11110000	→	00001111
10100011	→	01011100
11110000 10100101	→	00001111 01011010





## روش مکمل دو

0 1 1 0 1 1 1 0 ← Original binary value

1 0 0 1 0 0 0 1 ← 1's complement

1 0 0 1 0 0 0 1
+ 1
1 0 0 1 0 0 1 0

← 2's complement

# روش‌های مختلف نمایش اعداد منفی

Decimal	Signed-2's Complement	Signed-1's Complement	Signed Magnitude
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
-0	—	1111	1000
-1	1111	1110	1001
-2	1110	1101	1010
-3	1101	1100	1011
-4	1100	1011	1100
-5	1011	1010	1101
-6	1010	1001	1110
-7	1001	1000	1111
-8	1000	—	—

Digital Design, Table 1.3 - Signed Binary Numbers.



# جمع و تفریق اعداد علامت‌دار

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0000000000010000000

00000000000101010

000000000001101010

64

+ 42

106

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0

0000000000010000000

11111111111010110

00000000000010110

64

- 42

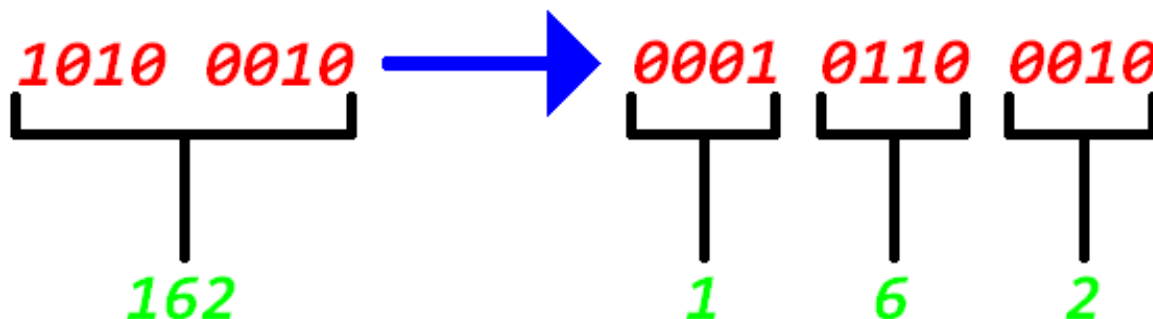
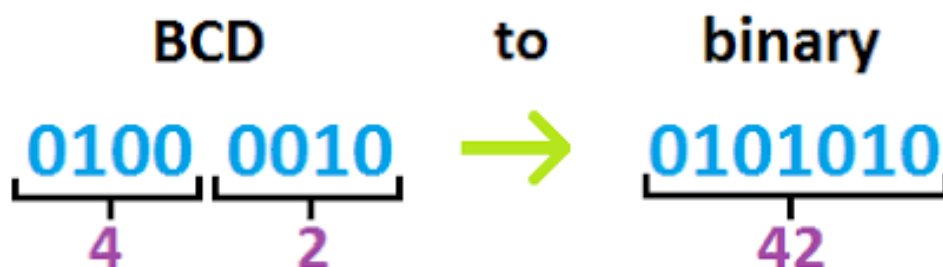
22

2's  
complement



# نمایش دهنده ارقام دودویی

(Binary Coded Decimal)



## جمع دو رقم BCD

- دو رقم BCD را به روال عادی جمع اعداد دودویی با هم جمع کنید.
- اگر حاصل جمع کمتر از ۱۰ بود، جمع دو رقم به دست آمده است.
- اگر حاصل جمع بزرگتر یا مساوی ۱۰ است، حاصل جمع را با ۶ جمع کنید و بیت نقلی را به رقم بعد انتقال دهید.



# جمع اعداد BCD - مثال

$$\begin{array}{r}
 0100 \ 0011 \\
 + 0011 \ 0101 \\
 \hline
 0111 \ 1000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 43 \\
 + 35 \\
 \hline
 78
 \end{array}$$

[www.vlsifacts.com](http://www.vlsifacts.com)

$$\begin{array}{r}
 0111 \ 0101 \\
 + 0011 \ 0101 \\
 \hline
 1010 \ 1010 \\
 + 0110 \ + 0110 \\
 \hline
 0001 \ 0001 \ 0000 \\
 \underbrace{\phantom{0001}}_1 \quad \underbrace{\phantom{0001}}_1 \quad \underbrace{\phantom{0000}}_0
 \end{array}$$

Both left and right BCD numbers are invalid. So we would add 6 to both the BCD numbers.

$$\begin{array}{r}
 75 \\
 + 35 \\
 \hline
 110
 \end{array}$$

[www.vlsifacts.com](http://www.vlsifacts.com)



# تفریق مستقیم دو رقم BCD

○ مناسبه  $A-B$  با این فرض که  $A$  و  $B$  ارقام BCD هستند:

$$\begin{array}{r} 0100 \\ - 0011 \\ \hline 0001 \end{array}$$

○ اگر  $A > B$ :

• تفریق را به روال عادی تفریق دو عدد دودویی انجام دهید

○ اگر  $A < B$ :

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \cancel{0011} \\ - 0101 \\ \hline 1000 \end{array}$$

•  $A$  را با ۱۰ جمع کنید

• یک رقم قرضی (borrow) در ستون بعدی در نظر بگیرید



# تفریق اعداد BCD به کمک جمع - مثال

$$\begin{array}{r} 43 \\ - 35 \\ \hline 08 \end{array}$$

استفاده از روش مکمل ۱۰

$$\begin{array}{r} 0000 \ 0100 \ 0011 \\ - 0000 \ 0011 \ 0101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0000 \ 0100 \ 0011 \\ + 1001 \ 0110 \ 0101 \\ \hline 1001 \ 1010 \ 1000 \\ 1010 \ 0000 \ 1000 \\ 0000 \ 0000 \ 1000 \end{array}$$





# روش‌های مختلف نمایش BCD

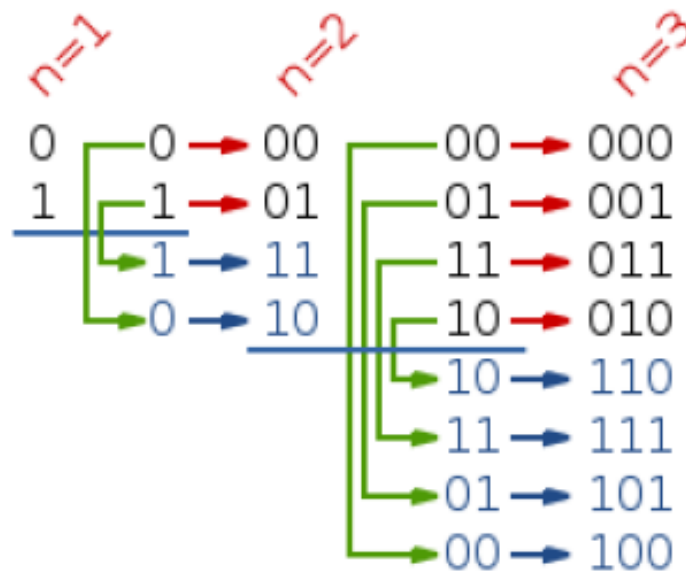
Decimal Digit	BCD 8421	2421	Excess-3	8, 4, -2, -1
0	0000	0000	0011	0000
1	0001	0001	0100	0111
2	0010	0010	0101	0110
3	0011	0011	0110	0101
4	0100	0100	0111	0100
5	0101	1011	1000	1011
6	0110	1100	1001	1010
7	0111	1101	1010	1001
8	1000	1110	1011	1000
9	1001	1111	1100	1111
	1010	0101	0000	0001
Unused bit combinations	1011	0110	0001	0010
	1100	0111	0010	0011
	1101	1000	1101	1100
	1110	1001	1110	1101
	1111	1010	1111	1110

Digital Design, Table 1.5 - Four Different Binary Codes for the Decimal Digits.



## کد انعکاسی

Gray Code	Decimal Equivalent
0000	0
0001	1
0011	2
0010	3
0110	4
0111	5
0101	6
0100	7
1100	8
1101	9
1111	10
1110	11
1010	12
1011	13
1001	14
1000	15



Digital Design: Table 1.6 – Gray Code



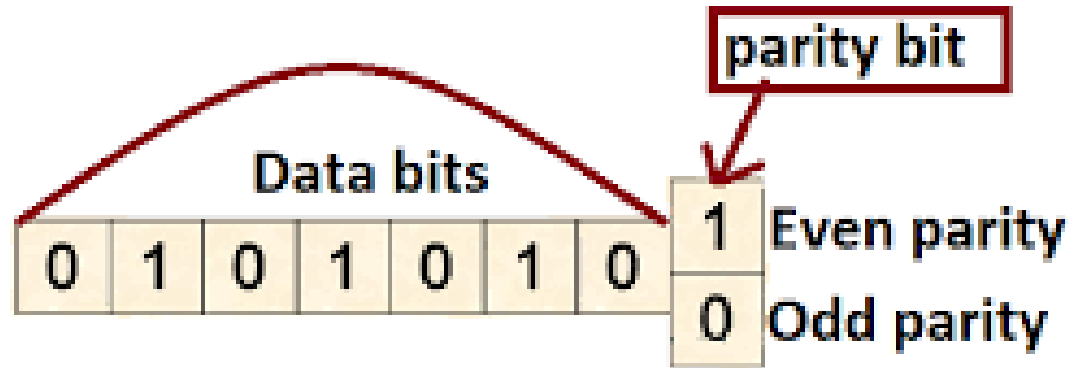
# نمایش حروف با کد ASCII

(American Standard Code for Information Interchange)

Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char
0	0	[NULL]	32	20	[SPACE]	64	40	@	96	60	`
1	1	[START OF HEADING]	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	2	[START OF TEXT]	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	3	[END OF TEXT]	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	4	[END OF TRANSMISSION]	36	24	\$	68	44	D	100	64	d
5	5	[ENQUIRY]	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	6	[ACKNOWLEDGE]	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	7	[BELL]	39	27	'	71	47	G	103	67	g
8	8	[BACKSPACE]	40	28	(	72	48	H	104	68	h
9	9	[HORIZONTAL TAB]	41	29	)	73	49	I	105	69	i
10	A	[LINE FEED]	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	B	[VERTICAL TAB]	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	C	[FORM FEED]	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	D	[CARRIAGE RETURN]	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	E	[SHIFT OUT]	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	F	[SHIFT IN]	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	[DATA LINK ESCAPE]	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	[DEVICE CONTROL 1]	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	[DEVICE CONTROL 2]	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	[DEVICE CONTROL 3]	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	[DEVICE CONTROL 4]	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	[NEGATIVE ACKNOWLEDGE]	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	[SYNCHRONOUS IDLE]	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	[ENG OF TRANS. BLOCK]	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	[CANCEL]	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	[END OF MEDIUM]	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	[SUBSTITUTE]	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	[ESCAPE]	59	3B	;	91	5B	[	123	7B	{
28	1C	[FILE SEPARATOR]	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	
29	1D	[GROUP SEPARATOR]	61	3D	=	93	5D	]	125	7D	}
30	1E	[RECORD SEPARATOR]	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	[UNIT SEPARATOR]	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	[DEL]

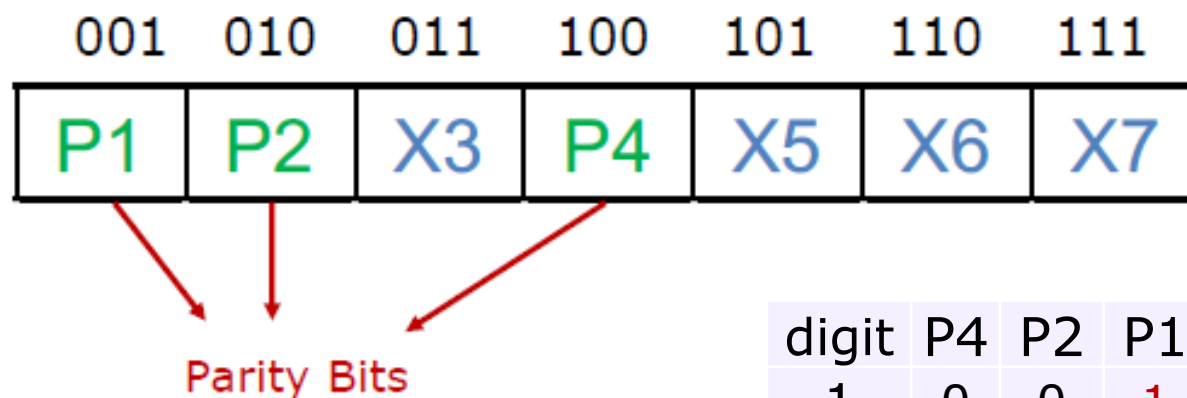


# بیت توازن (Parity) برای کشف خطا



parity bit = 1 (in case of even parity setting)  
parity bit = 0 ( in case of odd parity setting)

# کد همینگ برای اصلاح خطا



$$P1 = \text{XOR}(X3, X5, X7)$$

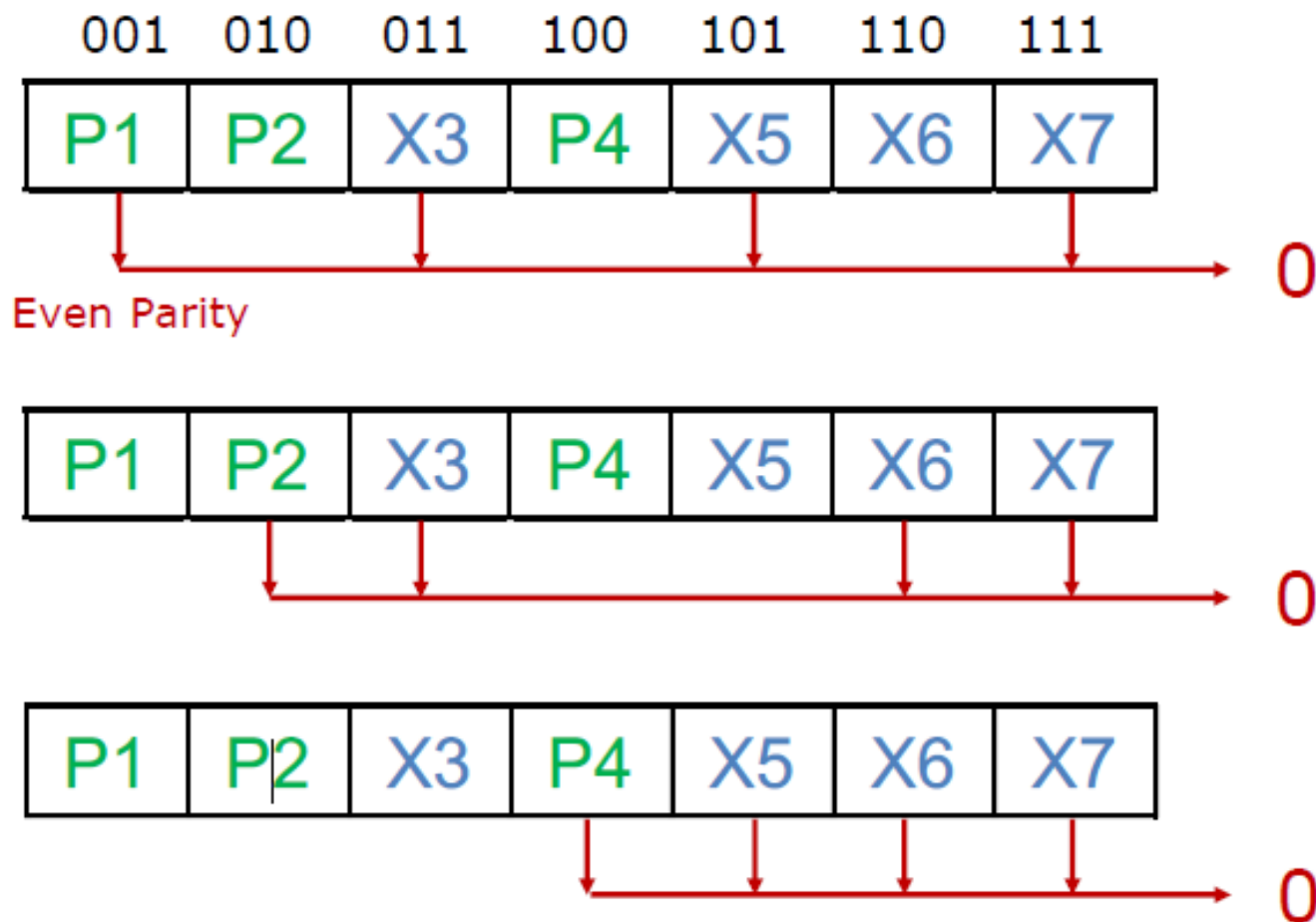
$$P2 = \text{XOR}(X3, X6, X7)$$

$$P4 = \text{XOR}(X5, X6, X7)$$

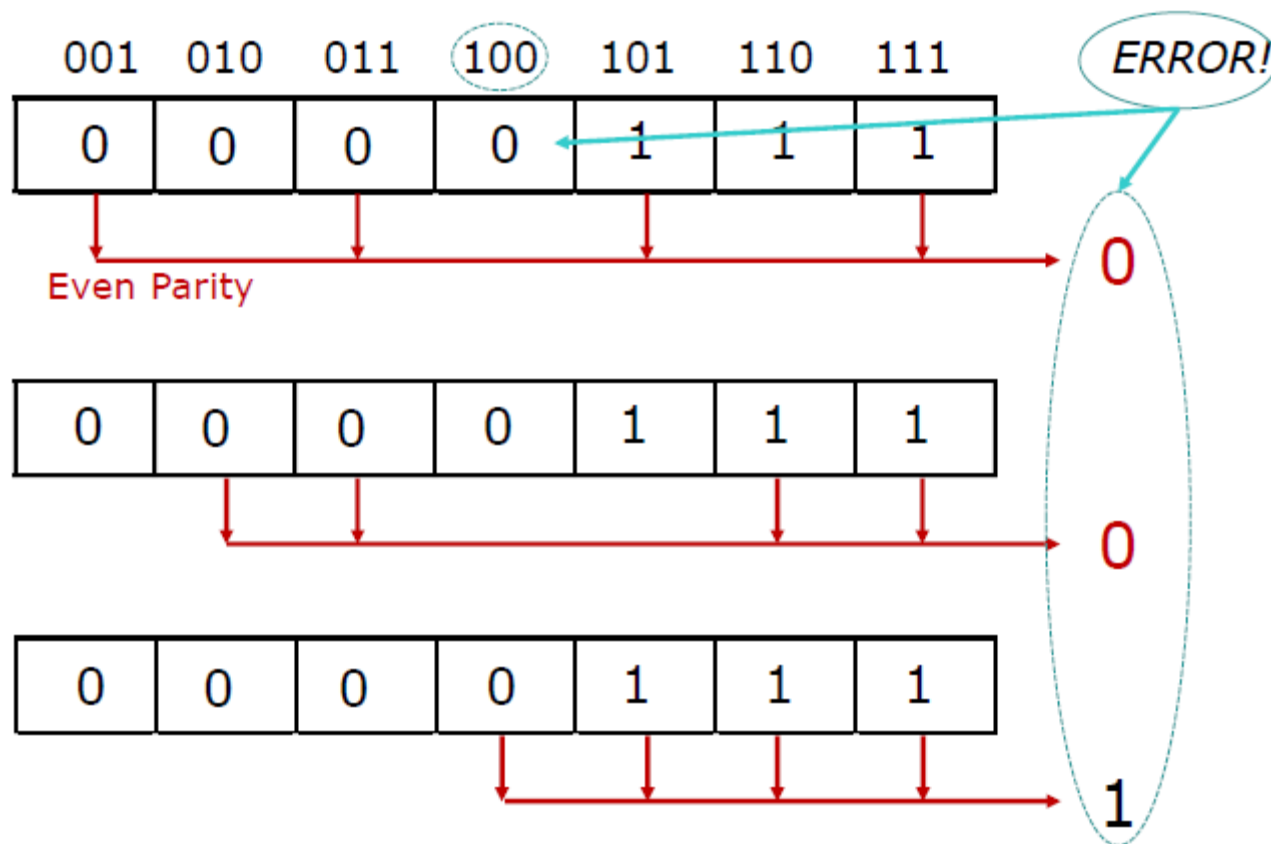
digit	P4	P2	P1
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1



# کد همینگ برای اصلاح خطا (واریسی)



# کد همینگ برای اصلاح خطا (مثال)



There are only 10 types of  
people in this world;  
those who understand binary  
and those who don't.