

سوال ۱:

n نفر قصد دارند تا به یک اتاق وارد شده و پس از مدتی از آن خارج شوند. هر نفر با شماره‌ی i در زمان a_i وارد و در زمان b_i خارج می‌شود. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که بتواند تشخیص دهد چه افرادی در بازه‌ی زمانی $[f, q]$ به طور کامل در اتاق قرار داشته‌اند (افراد داخل اتاق را با شماره‌هایشان مشخص کنید و افراد به ترتیب شماره‌هایشان وارد اتاق نمی‌شوند).

پاسخ

فرض کنید آرایه‌های دارای زمان ورود و خروج A و B باشد. آرایه‌های زیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$B[i] = (P_b[i])$ (زمان خروج فرد شماره‌ی i)

$A[i] = (P_a[i])$ (زمان خروج فرد شماره‌ی i)

سپس با استفاده از روش مرتب‌سازی ادغامی دو آرایه A و B را مرتب می‌کنیم. در حین مرتب‌سازی، در صورت تغییر خانه‌ی شماره‌ی i آرایه A ، خانه‌ی i ام آرایه P_a را نیز تغییر می‌دهیم تا رابطه‌ی تعریف شده بین اعضای P_a و A پایدار باقی بماند. برای آرایه B و P_b نیز به همین صورت عمل خواهیم کرد. در نتیجه بعد از مرتب‌سازی می‌دانیم هر عضوی از آرایه B و A مربوط به چه شخصی است.

در نهایت اولین عضو بزرگ‌تر از q را در آرایه B و اولین عضو کوچک‌تر از f را درون A تعیین می‌کنیم. فرض کنید شماره‌خانه‌های بدست آمده B_i و A_i باشند. با توجه به تعاریف صورت گرفته، شماره اشخاصی که قبل از زمان تعیین شده وارد اتاق شده‌اند برابر

$$\{P_a[i] \mid 0 < i < A_i\}$$

و افرادی که قبل از زمان تعیین شده از اتاق خارج شده‌اند برابر

$$\{P_b[i] \mid 0 < i < B_i\}$$

است. تفریق دو مجموعه‌ی بالا برابر پاسخ نهایی خواهد بود.

سوال ۲:

رشته‌های متقارن، رشته‌هایی هستند که از دو طرف به یک شکل خوانده می‌شوند. با استفاده از داده ساختار صف و استک و عملیات مربوط به آن، الگوریتمی ارائه کنید که در زمان خطی متقارن بودن رشته ورودی را تعیین کند (نیازی به حفظ ورودی ندارید).

پاسخ

ابتدا کاراکترهای رشته را درون صف و استک میریزیم. سپس تا زمانی که به انتهای استک و صف برسیم، یک عضو از صف $deque$ و یک عضو از استک pop می‌کنیم. برابری دو عضو بدست آمده بررسی شده و در صورتی که تا انتهای صف و استک این برابری برقرار باشد آنگاه رشته‌ی ورودی متقارن است.