



✓ مسئله‌ی ۱. زیر آرایه‌ها [۱۲ نمره]

آرایه‌ای به طول n از اعداد a_1, a_2, \dots, a_n داریم. با استفاده از تقسیم و حل، الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \log^2 n)$ ارائه دهید که تمام زیر آرایه‌های این آرایه با مجموع کمتر از t بیابد. به عبارت دیگر، تمام جفت‌های r, l را بیابد که

$$a_l + a_{l+1} + \dots + a_{r-1} + a_r < t$$

مسئله‌ی ۲. بازگشت عجیب [۱۳ نمره]

فرض کنید تابع $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ با این رابطه داده شده باشد:

$$g(n) = \begin{cases} a & \text{اگر } n = 1 \\ bn^k + ng(n-1) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که a, b اعداد حقیقی و مثبت‌اند.

۷ آ ثابت کنید $g(n) \in \Theta(n!)$.

۶ ب) رابطه‌ی دقیق و صریح $g(n)$ را بیابد. این رابطه را بر حسب a و b و c بنویسید که

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{n!}$$

همچنین بررسی کنید $a \leq c \leq a + 5b$.

✓ مسئله‌ی ۳. n سکه [۲۵ نمره]

الگوریتمی را در نظر بگیرید که یک آرایه از n سکه سالم را شبیه‌سازی می‌کند. عملکرد الگوریتم به این صورت است که هر سکه را آنقدر پرتاب می‌کند که خط (و نه شیر) ظاهر گردد. لازم به ذکر است که هر سکه نهایتاً n بار پرتاب می‌شود. به ازای سکه k ام، متغیر تصدفی X_k ($1 \leq k \leq n$) تعریف می‌شود که نشان دهنده تعداد پرتاب‌های سکه مذکور تا ظاهر شدن خط است. نشان دهید که:

$$\Pr[X_k \geq 2 \log n] \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{آ}$$

$$\Pr[\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 2 \log n] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[X_i \geq 2 \log n] \leq \frac{1}{n} \quad \text{ب}$$

ج) می‌توان با استفاده از دو قسمت آ و ب نشان داد: $E[\max(X_1, X_2, \dots, X_n)] \leq 2 \log n + 1$

✓ مسئله‌ی ۴. ارزیابی بازار بورس [۲۵ نمره]

قیمت سهام یک شرکت در هر روز کاری تهیه می‌شود. هدف ما پیدا کردن دوره آن سهام است. چنانچه قیمت سهام در روز i برابر p_i باشد، دوره سهام در آن روز برابر است با تعداد روزهای قبل از i (شامل i) که قیمت سهام کمتر یا مساوی p_i باشد.

مطلوبست طراحی یک الگوریتم با استفاده از ساختمان داده پشته، که به عنوان ورودی، یک آرایه n تایی به نام P از قیمت یک سهام در روزهای مختلف دریافت کرده و به عنوان خروجی آرایه S را بازگرداند. که در آن، $S[i]$ نشان دهنده دوره سهام در روز i باشد. لازم است تا پیچیدگی زمانی الگوریتم شما از $O(n)$ تجاوز نکند.

مسئله ۵. صف با دو پشته [۲۵ نمره]

فرض کنید که با دو پشته S_1 و S_2 یک صف را پیاده سازی کرده ایم. برای enqueue یک عنصر در صف، آن را در S_1 push می کنیم. برای dequeue آن، ابتدا خالی بودن S_2 را بررسی می کنیم. چنانچه خالی بود، تمامی عناصر S_1 را به ترتیب از آن pop کرده و سپس بلافاصله در S_2 push می کنیم. نهایتاً، عملیات pop روی S_2 اجرا می شود. می دانیم هزینه هر عملیات push و یا pop یک واحد است. برای یک صف مانند Q که به صورت فوق پیاده سازی شده، تابع پتانسیل "تعداد عناصر داخل پشته اول" $\Phi(Q)$ تعریف میشود. با استفاده از این تابع پتانسیل، زمان سرشکن enqueue و dequeue در صف را تحلیل کنید.