

موضوع: تقییه اصلی و روش‌های تقسیم و غلبه

تقسیم: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + c n^k$ $T_1 \leq C_1$

$$k < \log_b a \rightarrow T(n) = \theta(n^{\log_b a})$$

$$k = \log_b a \rightarrow T(n) = \theta(n^{\log_b a} \log n)$$

$$k > \log_b a \rightarrow T(n) = \theta(n^k)$$

تقسیم و غلبه
 ۱. divide: مسئله را به تعدادی زیرمسئله تقسیم می‌کند. [مسئله با اندازه $\frac{n}{b}$]
 ۲. conquer: هر کدام از زیرمسئله‌ها را با استفاده از تقسیم و غلبه به صورت بازگشتی حل کن $\leftarrow aT(\frac{n}{b})$
 ۳. combine: مسئله اصلی را با استفاده از ترکیب زیرمسئله‌ها حل کن $f(n)$

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$$

مثال ۱) آرایه A شامل n عدد داده شده است. عضو بیشینه A را پیدا کنید.

۱. آرایه A را به ۲ زیرآرایه A_1 و A_2 تقسیم کنیم.
۲. عضو بیشینه در A_1 و A_2 را به صورت بازگشتی پیدا کنید (m_1 و m_2)
۳. m_1 و m_2 را مقایسه و مقدار بیشینه را برمی‌گردانیم.

تعداد مقایسه‌ها: $\begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 \\ T(2) = 1 \end{cases}$ $\underline{O(n)}$

تعداد مقایسه‌ها = $n-1$
 استرا: پایه $n=2 \leftarrow$ تعداد مقایسه‌ها = ۱ = $n-1$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$2\left[\frac{n}{2} - 1\right] + 1 = n - 1 \quad \checkmark$$

مسال ۲) آرایه A داده شده است (شامل n عدد). مقدار کمینه و بیشینه A را پیدا کنید.

روش تقسیم و غلبه

۱- آرایه A را به دو آرایه A_1 و A_2 با اندازه برابر تقسیم کنید \max_1, \max_2

۲- مقدار کمینه و بیشینه در A_1 و A_2 را به طریقی حساب کنید $[\min_1, \min_2]$

$$\max = \max[\max_1, \max_2] \quad \min = \min[\min_1, \min_2]$$

نه توانی از ۲

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 2 \quad T(2) = 1$$

$$T(n) = \frac{3n}{2} - 2$$

اثبات: استقرا: $n=2$ ، $T(2) = 1 = \frac{3 \times 2}{2} - 2$ \checkmark
فرض: برای n برقرار است.

$$T(n) = 2\left[\frac{3n}{4} - 2\right] + 2$$

$$= \frac{3n}{2} - 2 \quad \checkmark$$

مسال ۳) ضرب اعداد: آرایه A و B هر کدام شامل n رقم که نشان دهنده یک عدد n رقمی هستند داده شده است. $A \times B$ را حساب کنید.

$$n=2$$

A [۲ | ۵]

B [۴ | ۲]

C [۱ | ۵ | ۵ | ۵]

خروجی

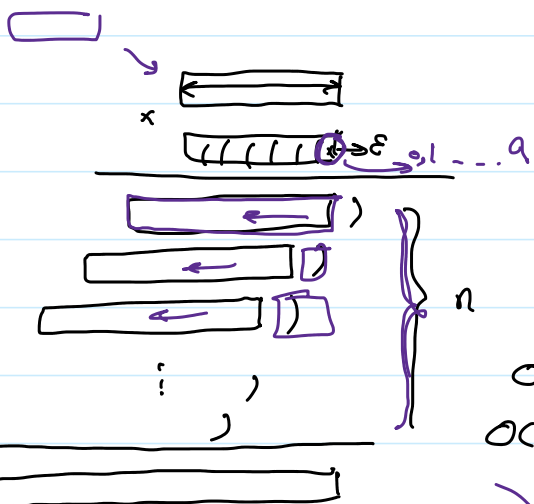
- * ضرب ۲ عدد n رقمی : حداقل $2n$ رقم.
- * جمع ۲ عدد n رقمی : حداقل $n+1$ رقم
- * جمع ۲ عدد n رقمی در چه زمانی؟ $O(n)$

$$\begin{array}{r} ۲۵۸ \\ + ۴۲۵ \\ \hline ۶۸۳ \end{array}$$

carry: ۱ → ۰ ✓

نسبت سازی ضرب ۲ عدد:

$$\begin{array}{r} ۲ \\ \times ۲۵۸ \\ \hline ۱۰۵۰ \\ + ۱۰۰۰ \\ \hline ۱۰۵۰ \end{array}$$



نیم اجرا:

جمع n جمع $O(n)$ $\rightarrow O(n^2)$
 $O(n^2)$ ←
 ضرب $O(n)$ ضرب n $\rightarrow O(n^2)$ ✓

کل الگوریتم $O(n^2)$

روش تقسیم و حل:

A [A_1 | A_2]

$$B = \boxed{B_h \mid B_l}$$

$$A = \underbrace{A_h \times 10^{\frac{n}{r}}}_{\uparrow} + A_l \quad B = \underbrace{B_h \times 10^{\frac{n}{r}}}_{\uparrow} + B_l$$

$$\hookrightarrow A \times B = \underbrace{A_h B_h \times 10^n}_{\substack{\downarrow \\ n \\ T(n)}} + \underbrace{A_l B_h \times 10^{\frac{n}{r}}}_{\substack{\downarrow \\ n}} + \underbrace{A_h B_l \times 10^{\frac{n}{r}}}_{\substack{\downarrow \\ n}} + \underbrace{A_l B_l}_{\substack{\downarrow \\ n}} *$$

۱- A را به A_h و A_l و B را به B_h و B_l تقسیم کنید. $*$
 ۲- مقدار $A_h B_h$ ، $A_l B_h$ ، $A_h B_l$ و $A_l B_l$ را به طور بازگشتی حساب کنید $\rightarrow T(\frac{n}{r})$
 ۳- $A \times B$ را با استفاده از فرمول $*$ حساب کنید $\rightarrow O(n)$

$$T(n) = 4T(\frac{n}{r}) + O(n)$$

$$T(n) = O(n^2)$$

$$\xrightarrow{P_1} (A_h + A_l)(B_h + B_l) \quad \text{ضرب کاراتر است}$$

ایده اصلی: اگر $(A_h + A_l)(B_h + B_l)$ را حساب کنیم و $A_l B_l$ و $A_h B_h$ را P_3 و P_2 هم حساب کنیم، می‌توانیم $A_h B_l + A_l B_h$ را حساب کنیم.

$$= P_1 - P_2 - P_3$$

$$(A_h + A_l)(B_h + B_l) - A_l B_l - A_h B_h = A_h B_l + A_l B_h$$

۱- A و B را به A_h و A_l و B_h و B_l تقسیم کنید

۱، ۵ $\leftarrow O(n)$ $(A_h + A_l)$ و $(B_h + B_l)$ را حساب کنید.

۲ $\leftarrow T(\frac{n}{r})$ $A_h B_h$ و $A_l B_l$ را $(A_h + A_l)(B_h + B_l)$ را به طور بازگشتی حساب کنید.

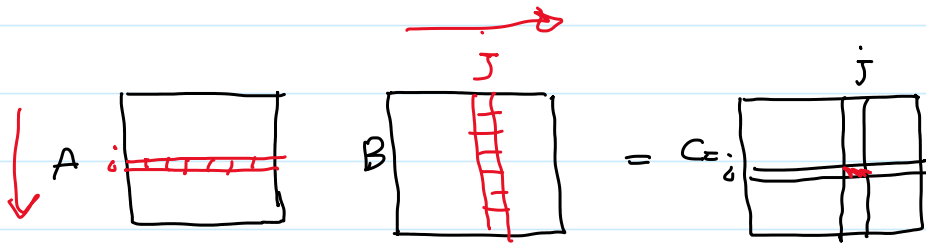
۳ $\leftarrow O(n)$ $A \times B$ را با استفاده از $***$ حساب کنید.

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$T(n) = n^{\log_2 3} = n^{1.5849}$$



مساله ۴ - ضرب ماتریس ها: دو ماتریس $A_{n \times n}$ و $B_{n \times n}$ داده شده است. ماتریس $C = A \times B$ را حساب کنید.



for $i: 1 \rightarrow n$

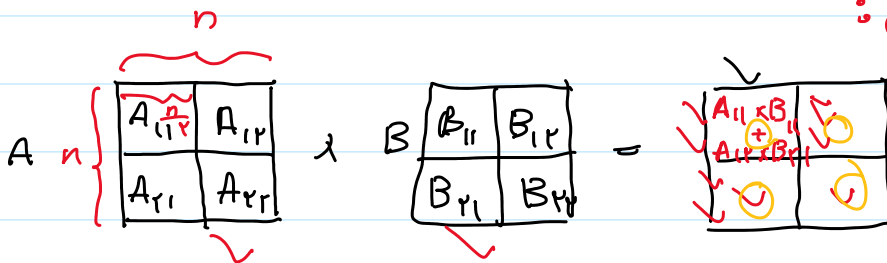
for $j: 1 \rightarrow n$

for $k: 1 \rightarrow n$

$$C[i, j] = A[i, k] \times B[k, j]$$

زمان: $O(n^3)$

روش تقسیم و حل:



$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$$

$$T(n) = O(n^{\log_2 4}) = O(n^2)$$

روش استراس :

$$\begin{aligned}
 P &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\
 Q &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\
 R &= A_{11}(B_{21} - B_{22}) \\
 S &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\
 T &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\
 U &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\
 V &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} P \\ Q \\ R \\ S \\ T \\ U \\ V \end{aligned}} \right\} \quad C = \begin{bmatrix} P+S-T+V & R+T \\ \boxed{Q+S} & P-Q+R+U \end{bmatrix}$$

$$T(n) = V T\left(\frac{n}{r}\right) + O(n^2)$$

$$T(n) = O(n^{\log_r V}) = \underline{\underline{O(n^{2/1})}}$$

$$\text{نرخ پیچیدگی} \leftarrow \underline{\underline{O(n^{\log_r V})}} \leftarrow 2021 \simeq 2020$$