



ساختمان داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳

مدرس: آبام- کاظمی

زمان آزمون: ۲۸ فروردین

لیست- صف- پشته، تصادفی

تمرین سری دوم

مسئله‌ی ۱. بیت های بدون بایاس

فرض کنید به منبعی از بیت های بدون بایاس دسترسی داریم.

الف) نشان دهید چگونه می توان با امید ریاضی تنها $O(1)$ بیت تصادفی یک متغیر تصادفی با بایاس ساخت، که با احتمال p یک و با احتمال $1-p$ صفر خواهد شد. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید چگونه چنین متغیری را می توان با تعداد دلخواه بیت تصادفی ساخت. سپس نشان دهید امید ریاضی تعداد بیت های مذکور مقداری کوچک است.)

ب) نشان دهید چگونه می توان از بازه $[n]$ نمونه برداری کرد، با احتمال های p_1, p_2, \dots, p_n ، تنها با امید ریاضی تعداد $O(\log n)$ بیت تصادفی.

مسئله‌ی ۲. درخت ترنری

یک درخت ریشه دار متوازن را در نظر بگیرید که در آن فاصله هر برگ از ریشه h است. ریشه و هر گره داخلی، سه فرزند دارد. هر برگ یکی از مقادیر بولی ۰ یا ۱ را می تواند داشته باشد. و هر گره داخلی مقداری را بر می گرداند که اکثریت فرزندانش مشخص کنند. مسئله اصلی تعیین مقدار ریشه بوده و یک الگوریتم برای حل آن، مجاز است تا در هر گام، برگی را برای خواندن مقدارش برگزیند.

الف) نشان دهید که برای هر الگوریتم قطعی، مقدار دهی ای برای برگ ها وجود دارد که آن الگوریتم را مجبور به خواندن مقدار همه $n = 3^h$ برگ می کند.

ب) نشان دهید که یک الگوریتم غیر قطعی وجود دارد که می تواند مقدار ریشه را با خواندن حداکثر $2 \log n$ برگ تعیین کند. به عبارت دیگر، نشان دهید که می توان مجموعه ای از این تعداد برگ را ارائه داد که با کمک آنها تعیین مقدار ریشه میسر شود.

ج) یک الگوریتم تصادفی بازگشتی را در نظر بگیرید که دو زیر درخت ریشه را به طور تصادفی بررسی می کند. چنانچه مقادیر بازگشتی یکسان نبوند، زیر درخت سوم هم بررسی خواهد شد. نشان دهید که امید ریاضی تعداد برگ هایی که بررسی می شوند، حداکثر $n^{2/9}$ است.

مسئله‌ی ۳. جمع آوری کوپن ها

محمدحسین جعبه ای دارد که شامل n توپ بوده، به نحوی که هر توپ برچسبی از ۱ تا n دارد. او هر بار یک توپ را به صورت تصادفی و با احتمال یکسان بیرون می آورد، سپس آن را به داخل جعبه باز می گرداند. او این کار را تا جایی که همه توپ ها را دیده باشد، تکرار می کند. مطلوب است محاسبه امید ریاضی تعداد برچسب هایی که محمدحسین تنها یک بار دیده است.

مسئله‌ی ۴. انداختن سکه

فرض کنید که یک سکه را n بار می اندازیم تا n بیت تصادفی حاصل شود. همچنین سکه را منصفانه فرض کنید. تمامی جفت های ممکن از بیت ها را که تعدادشان $m = \binom{n}{2}$ است در نظر بگیرید. Y_i را برابر با XOR جفت بیت های i ام تصور کنید. نشان دهید که هر Y_i با احتمال برابر یک یا صفر خواهد شد. همچنین نشان دهید که Y_i ها دو به دو مستقل نیستند.

مسئله ۵. یافتن k امین عنصر بزرگ

الگوریتم تصادفی یافتن میانه را برای پیدا کردن k امین عنصر بزرگ در یک مجموعه n تایی از اعداد برای هر k دلخواه، عمومیت ببخشید. ثابت کنید که الگوریتم شما صحیح است و زمان اجرای آن را نیز تعیین نمایید.

مسئله ۶. مرتب سازی حبابی

یک لیست n تایی از اعداد متمایز به صورت a_1, a_2, \dots, a_n در نظر بگیرید. می گوییم a_i و a_j به صورت نابجا قرار گرفته اند، اگر $j < i$ ولی $a_i > a_j$ باشد. الگوریتم مرتب سازی حبابی، دو به دو اعداد نابجا قرار گرفته را جابجا می کند تا زمانی که هیچ نابجایی ای باقی نمانده باشد. فرض کنید که ورودی الگوریتم مرتب سازی حبابی یک جایگشت تصادفی از اعداد باشد. طوری که هر جایگشت با احتمال یکسانی ظاهر شود. امید ریاضی تعداد نابجایی هایی را که مرتب سازی حبابی می بایست تصحیح کند، بیابید. همچنین، واریانس تعداد نابجایی ها را تعیین نمایید.

مسئله ۷. درخت و هرم به طور همزمان

فرض کنید جایگشت دلخواهی از اعداد ۱ تا n را در اختیار داریم. جدای مقدار اعداد، به صورت تصادفی، یک اولویت به هر عدد نسبت می دهیم. می توانید فرض کنید که هیچ دو عددی اولویت یکسان ندارند. سپس هر یک از اعداد را در یک درخت جستجوی دودویی درج می کنیم. به ازای هر درج، همچنین اطمینان حاصل می کنیم که اولویت عدد درج شده از اجدادش کمتر باشد. چنانچه این خاصیت برقرار نبود، عمل چرخش را روی عدد درج شده اجرا می کنیم. به این نحو که اگر فرزند راست پدر خود بود، پدرش به فرزند چپش تبدیل خواهد شد. در غیر این صورت پدرش فرزند راست عدد درج شده خواهد شد. از آنجا که ممکن است در این جابجایی زیر درخت هایی چه برای عدد درج شده و چه پدرش وجود داشته باشد، این زیر درخت ها را در جایگاه مناسب قرار می دهیم. مثلاً اگر عدد درج شده یک زیر درخت راست داشت و خود فرزند چپ پدرش بود، زیر درخت مذکور تبدیل به زیر درخت چپ پدر عدد درج شده خواهد شد. نشان دهید که امید ریاضی ارتفاع این درخت $O(\log n)$ است.

مسئله ۸. اسپین چپ و راست

اسپین چپ یک درخت ریشه دار را یک مسیر از ریشه به برگ تعریف می کنیم، به نحوی که تنها از فرزندان سمت چپ عبور کند. به طور مشابه، اسپین راست تعریف می شود. یک گره مانند u در ساختمان داده سوال قبل در نظر بگیرید. R_u عبارتست از تعداد گره های اسپین راست زیر درخت چپ گره u . نیز، L_u را تعداد گره های اسپین چپ زیر درخت راست u در نظر بگیرید. می دانیم که برای حذف یک گره از ساختمان داده مورد بحث در سوال قبل، می بایست ابتدا آن را با استفاده از چرخش، به یک گره برگ تبدیل کنیم. نشان دهید که تعداد چرخش ها برای این امر برابر است با $R_u + L_u$. راهنمایی: استقرای ریاضی کار را برای شما آسان تر خواهد کرد.

مسئله ۹. امید ریاضی تعداد گره های اسپین

برای ساختمان داده سوال قبل و به ازای یک گره دلخواه مانند u ، نشان دهید که چنانچه مقدار ذخیره شده در گره (نه اولویت آن) k امین مقدار کوچک در میان تمامی مقادیر باشد:

$$E[R_u] = 1 - \frac{1}{k}$$

$$E[L_u] = 1 - \frac{1}{n - k + 1}$$

که در آن n تعداد کلیه مقادیر ذخیره شده در ساختمان داده است.

مسئله ۱۰. زیر مجموعه یال ها

یک گراف $G(V, E)$ را دوبخشی می نامیم اگر V را بتوان به دو زیرمجموعه V_1 و V_2 افراز کرد، به نحوی که به ازای هر یال $(v, w) \in E$ یا $v \in V_1$ و $w \in V_2$ برقرار باشد و یا بالعکس. در این صورت هیچ یالی میان اعضای داخل هر یک از زیرمجموعه های V_1 و V_2 وجود نخواهد داشت. الگوریتم تصادفی ساده ای ارائه دهید که امید ریاضی زمان اجرای آن $O(|V| + |E|)$ بوده و زیرمجموعه $E' \subset E$ را به نوعی بیابد که $|E'| > |E|/4$ و $G'(V, E')$ دوبخشی باشد.

مسئله ۱۱. پشته متفاوت

منظور از عمل getMin برگرداندن کوچکترین عنصر و getMax برگرداندن بزرگترین عنصر در داده ساختار است.

الف) داده ساختاری شبیه پشته ارائه دهید که اعمال Push و Pop و getMin و getMax را در زمان سرشکن $O(1)$ انجام دهد.

ب) داده ساختاری شبیه صف ارائه دهید که اعمال enqueue و dequeue و getMin و getMax را در زمان سرشکن $O(1)$ انجام دهد.

مسئله ۱۲. دو پشته

نشان دهید می توان با استفاده از یک آرایه و حافظه ی اضافی $O(1)$ دو پشته را پیاده سازی کرد. (توجه کنید که زمانی یک پشته نمی تواند عمل Push را انجام دهد که کل آرایه پر شده باشد)

مسئله ۱۳. صف با پشته

فرض کنید که یک پشته دارید و عملیات های درج و حذف از سر آن، نیز بررسی خالی بودنش قابل انجام است. نشان دهید چگونه می توان یک صف را با داشتن این عملیات ها شبیه سازی کرد، به عبارتی عملیات های درج و حذف در صف.

مسئله ۱۴. لیست پیوندی سریع

یک لیست پیوندی را در نظر بگیرید که اعداد صحیح را در آن می توان نگهداری کرد. عملیات درج و جستجوی عناصر در این لیست پیوندی همانند حالت عادی است، با این تفاوت که هرگاه یک عنصر درج یا جستجو شود، به ابتدای لیست آورده خواهد شد. نشان دهید که استفاده از این ساختمان داده، هزینه ای حداکثر برابر با دو برابر یک ساختمان داده بهینه خواهد داشت.