

به نام خدا

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها (۴۰۲۵۴)

۳۱ فروردین ۱۴۰۰

دانشگاه صنعتی شریف

مدرس: دکتر محمد قدسی، مهدی صفرنژاد

آزمون میان‌ترم

زمان این امتحان ۸۵ دقیقه است. امتحان از ۱۰۰ نمره است و ۲۰ نمره امتیازی در نظر گرفته شده است. توضیحات ابتدای سؤالات را به دقت بخوانید و پاسخ بخش‌های مختلف سؤال را بنویسید. ۵ دقیقه زمان آپلود در نظر گرفته شده است. امیدوارم تا این جای کلاس با تفکر الگوریتمی آشنا شده باشید و با همین تفکر به سؤالات امتحان به خوبی پاسخ دهید.

سؤال ۱. (۲۵ نمره) مشخص کنید هر یک از موارد زیر را در چه مرتبه‌زمانی می‌توان انجام داد. به صورت خلاصه در حداکثر دو خط توضیح دهید.

آ. (۳ نمره) یک لیست پیوندی دوطرفه با n عنصر داریم. می‌خواهیم عضوی با مقدار مشخص را از آن حذف کنیم یا اگر عنصری با این مقدار وجود نداشت اعلام کنیم که وجود ندارد.

ب. (۴ نمره) یک هرم کمینه با n عنصر داریم و می‌خواهیم بزرگترین عنصر را از آن حذف کنیم.

پ. (۶ نمره) ساختن هرم کمینه با داشتن n عنصر.

ت. (۵ نمره) ساختن یک ددج از روی یک آرایه با n عنصر.

ث. (۷ نمره) ساختن یک ددج از روی ترتیب پس‌ترتیب آن. (در این قسمت شبه کد الگوریتم را هم ذکر نمایید) برای مثال ۲, ۳, ۱ متناظر درختی است که ریشه‌ش برابر دو است و بچه چپی آن برابر یک و بچه راستی آن برابر ۳ است.

سؤال ۲. (۱۰ نمره) شبکه‌کدهای داده‌شده را تحلیل کنید و حد بالا و حد پایین Ω , \mathcal{O} اجرای توابع را برحسب ورودی‌هایشان بیابید.

آ. (۵ نمره) تابع F به صورت زیر است:

Algorithm 1 $F(x, y, n)$ n and x and y are inputs n is a positive integer

```

if  $x < y$  then
    for  $i = 1 \rightarrow n$  do
        for  $j = 0 \rightarrow i \times n$  do
             $print(j)$ 
else
     $print(x)$ 

```

ب. (۵ نمره) تابع G به صورت زیر است:

Algorithm 2 $G(n, m)$ n, m are positive integers

```

if  $n < 1$  then
     $return\ n$ 
if  $n < 1400$  then
     $return\ G(n - m, m)$ 
 $return\ G(n - 1, m)$ 

```

سؤال ۳. (۱۵ نمره) برای توابع زیر مناسب‌ترین مرتبه زمانی یا \mathcal{O} را ارائه دهید.

آ. (۷ نمره) $T(n) = 6T(\frac{n}{6}) + n^{\frac{5}{6}}$

ب. (۸ نمره) $T(n) = \frac{1}{n}(T(0) + T(1) + T(2) + \dots + T(n-1)) + n$

سؤال ۴. (۲۵ نمره) برای هر یک از مسائل زیر الگوریتمی با مرتبه زمانی خواسته شده ارائه کنید.

آ. (۱۰ نمره) آرایه‌ای به طول n به همراه دو عدد x و k به شما داده شده است. الگوریتمی با مرتبه زمانی $(n \log k)$ ارائه کنید که k تا نزدیکترین عدد را در آرایه به x پیدا کند. می‌گوییم عدد a از b به x نزدیکتر است اگر $|x - a| < |x - b|$.

ب. (۱۵ نمره) یک هرم کمینه با n عنصر و دو عدد x و k داده شده است. می‌خواهیم در $O(k)$ بفهمیم آیا k امین کمترین عضو در این درخت کمتر مساوی x هست یا نه.

سؤال ۵. (۱۵ نمره) شهر شنگدباو مثل یک محور مختصات x می‌ماند که خانه‌های مختلف روی نقاط صحیح از آن قرار دارند. شنگدباو خانه‌اش را گم کرده و اکنون در مبدا مختصات ایستاده است. او می‌تواند در یکی از دو جهت حرکت

و هر گاه به خانه‌ای رسید در خانه را می‌زند. اگر مادرش درب را باز کند می‌فهمد به خانه‌اش رسیده و در غیر این صورت باید به گشتن ادامه دهد.

اکنون دیروقت است و شنگدباو توان چندانی برای راه رفتن ندارد. اگر فاصله شنگدباو از خانه‌اش D باشد الگوریتمی پیشنهاد دهید که در آن شنگدباو با پیاده‌روی در مجموع $O(D)$ روی محور مختصات خانه‌اش را پیدا کند.

سؤال ۶. (۳۰ نمره) برای هر یک از مسائل زیر الگوریتمی غیر بازگشتی با مرتبه زمانی خطی ارائه دهید.

آ. (۱۵ نمره) فرض کنید تنها حق ذخیره کردن دو عدد اضافه را در حافظه دارید. در این صورت با ورودی گرفتن یک درخت دودویی جست‌وجو پیمایش پس‌ترتیب آن را ارائه کنید.

ب. (۱۵ نمره) پیمایش پیش‌ترتیب یک درخت دودویی جست‌وجو با n عضو داده شده است. با استفاده از یک پشته و بدون ساختن خود درخت برگ‌های آن را پیدا کنید.

موفق باشید