



## ساختمان داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۳-۰۴

مدرس: دکتر آبام

تمرین سری دوم

تصادفی، مرتب‌سازی

زمان آزمون: ۲۴ آبان

## مسئله‌ی ۱.

آرایه‌ای از  $n$  عدد صحیح در بازه‌ی  $۰$  تا  $n^2 - ۱$  داریم. روشی ارائه دهید که این اعداد را در  $O(n)$  مرتب کند.

## مسئله‌ی ۲.

تعداد  $n$  چاه نفت در یک نقشه‌ی دوبعدی داریم. چاه نفت  $i$ ام در مختصات  $x_i$  و  $y_i$  قرار دارد. می‌خواهیم یک لوله‌ی افقی اصلی با مختصات  $y = c$  از بین این چاه‌ها بگذرانیم و هر چاه را با یک لوله‌ی عمودی به این لوله‌ی افقی متصل کنیم. در زمان  $O(n)$  مقدار  $c$  را طوری تعیین کنید که مجموع طول لوله‌های عمودی کمینه شود.

## مسئله‌ی ۳.

دانش‌آموزان یک کلاس را می‌خواهیم با توجه به قدشان به دو گروه تقسیم کنیم به طوری که اعضای گروه اول از همه‌ی اعضای گروه دوم کوتاه‌قدتر باشند. می‌خواهیم گروه اول تا جای ممکن کوچک باشد ولی از طرفی می‌خواهیم مجموع قد افراد گروه اول حداقل برابر نصف مجموع قد همه‌ی افراد باشد. روشی ارائه دهید که در  $O(n)$  این کار را انجام دهد.

## مسئله‌ی ۴.

می‌خواهیم از بین  $n$  عدد،  $k$  امین کوچکترین عنصر،  $2k$  امین کوچکترین عنصر و به همین ترتیب تا  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \cdot k$  امین کوچکترین عنصر را پیدا کنیم. روشی از  $O(n \log \frac{n}{k})$  برای این کار ارائه دهید.

## مسئله‌ی ۵.

یک آرایه‌ی  $n$  عضوی از اعداد صحیح داده شده است. در زمان  $O(n)$  عضوی را در صورت وجود پیدا کنید که بیش از  $n/3$  بار تکرار شده باشد.

## مسئله‌ی ۶.

یک ماتریس  $۶۴$  در  $۶۴$  داریم که درایه‌های آن همه  $۰$  یا  $۱$  هستند. می‌خواهیم این ماتریس را به صورت مارپیچی مرتب کنیم یعنی اگر در انتها سطر اول را از چپ به راست به سطر دوم از راست به چپ و ... بچسبانیم یک آرایه‌ی  $۴۰۹۶$  بیتی مرتب از  $۰$  و  $۱$  خواهیم داشت. ادعا می‌کنیم که الگوریتم زیر این کار را انجام می‌دهد:

۱.  $k$  بار ایتیم‌های  $۲$  و  $۳$  را تکرار کن.

۲. همه‌ی سطرها را مستقلاً و در جهت خود مرتب کن. یعنی سطرها را از چپ به راست، و سطرها را از راست به چپ مرتب کن.

۳. همه‌ی ستون‌ها را از بالا به پایین مرتب کن.

کمترین مقدار  $k$  در بدترین حالت چند است؟ دلیل خود را ذکر کنید.

### مسئله ۷.

آرایه‌ی  $A$  از  $n$  عدد دلخواه داده شده است. فرض کنید عملیات  $reverse(i, j)$  ( $1 \leq i < j \leq n$ )، زیرآرایه‌ی  $A[i..j]$  را معکوس می‌کند، یعنی به ازای هر  $0 \leq k \leq j - i$ ،  $A[j - k]$  را درون  $A[i + k]$  قرار می‌دهد. با چند بار استفاده از این عملیات می‌توان آرایه‌ی  $A$  را مرتب کرد؟ دلیل خود را ذکر کنید.

### مسئله ۸.

آرایه  $A$  شامل  $n$  عدد مختلف است. حال می‌خواهیم آرایه  $B$  را به این صورت پر کنیم که به ازای هر  $i$ ،  $B[i]$  برابر با میانه‌ی اعداد  $A[1]$  تا  $A[i]$  باشد. الگوریتمی از مرتبه‌ی  $O(n \log n)$  برای این مسئله ارائه دهید.

### مسئله ۹.

یک دایره به شعاع واحد داریم.  $n$  نقطه به صورت کاملاً تصادفی در داخل دایره انتخاب می‌کنیم. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n)$  ارائه دهید که بتوان به کمک آن، تمام نقاط را بر حسب فاصله تا مرکز دایره مرتبط نمود.

### مسئله ۱۰.

یک جدول  $n \times m$  داریم که در هر خانه‌ی آن یک عدد دلخواه وجود دارد. در ابتدا اعداد داخل هر سطر را مرتب می‌کنیم، طوری که هر سطر از چپ به راست به صورت صعودی مرتب شود. سپس اعداد داخل هر ستون را نیز از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. ثابت کنید بعد از پایان این مرحله، اعداد داخل هر سطر از چپ به راست به صورت صعودی باقی می‌مانند.

### مسئله ۱۱.

یک جدول  $n \times n$  داریم که اعداد داخل هر سطر به صورت صعودی از چپ به راست و اعداد داخل هر ستون به صورت صعودی از بالا به پایین نوشته شده‌اند.

الف) الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(n)$  ارائه دهید که اندیس یک خانه در جدول که برابر با  $x$  باشد را پیدا کند (در صورت عدم وجود نیز این موضوع اطلاع‌رسانی شود).

ب) الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(n)$  ارائه دهید که تعداد خانه‌های جدول که مقدار آن‌ها کم‌تر مساوی  $x$  است را بشمارد.

### مسئله ۱۲.

دستگاه «مجیک‌سورت» یک دستگاه مرتب‌سازی است که حداکثر  $n$  توپ در ورودی خود دریافت کرده و می‌تواند در  $O(1)$  سنگین‌ترین توپ از بین  $n$  توپ داده شده را پیدا کرده و آن را خروجی دهد.

الف) فرض کنید یک «مجیک‌سورت» و  $n^2$  توپ با وزن نامشخص به شما داده می‌شود. الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(n^2)$  ارائه دهید که تمام توپ‌ها را بر حسب وزنشان از کم به زیاد مرتب کند.

ب) فرض کنید یک «مجیک‌سورت» و  $n^k$  توپ با وزن نامشخص به شما داده می‌شود. الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(k \times n^k)$  ارائه دهید که تمام توپ‌ها را بر حسب وزنشان از کم به زیاد مرتب کند.

### مسئله ۱۳.

آرایه‌ی  $A$  از  $n$  عدد دلخواه متمایز داده شده است و  $k$  یک عدد از پیش مشخص است. فرض کنید عملیات  $sort(i)$  به ازای  $1 \leq i \leq n - k + 1$ ، زیرآرایه‌ی  $A[i..i + k - 1]$  را مرتب می‌کند. در بدترین حالت چند عملیات  $sort$  برای مرتب کردن آرایه‌ی  $A$  لازم است؟

### مسئله ۱۴. نقطه ثابت

فرض کنید  $\sigma$  یک جایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا  $n$  باشد. امیدریاضی تعداد  $i$  هایی را بدست آورید که  $\sigma(i) = i$ .

### مسئله ۱۵. امید ریاضی وارونه ها

فرض کنید  $\sigma$  یک جایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا  $n$  باشد. امیدریاضی تعداد وارونه ها را بدست آورید. یک وارونه، یک زوج  $(i, j)$  است به طوری که  $i < j$  اما  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

### مسئله ۱۶. انتخاب تصادفی

الگوریتمی را در نظر بگیرید که ورودی  $a_1, \dots, a_n$  شامل  $n$  عدد مجزا را به ترتیب داده شده می خواند و هنگام خواندن  $a_i$  مقدار متغیر  $x$  به احتمال  $1/i$  برابر  $a_i$  قرار می دهد. الگوریتم در پایان مقدار  $x$  را به عنوان خروجی گزارش می کند. با چه احتمالی خروجی الگوریتم برابر  $a_i$  است؟

### مسئله ۱۷. ارتفاع د.د.ج تصادفی

اگر اعداد ۱ تا  $n$  را به ترتیب تصادفی در یک درخت دودویی جست و جو درج کنیم، رابطه بازگشتی امید ریاضی ارتفاع این درخت را بدست آورید.

### مسئله ۱۸. گراف تصادفی

متوسط و واریانس تعداد یال‌های یک گراف تصادفی در فضای احتمالاتی  $G(n, p)$  را محاسبه کنید. اگر بخواهیم متوسط تعداد یال‌ها خطی برحسب تعداد رئوس باشد  $p$  چقدر باید باشد.

### مسئله ۱۹. میانه تقریبی

فرض کنید  $X$  زمان اجرای الگوریتم ApproxMedian باشد. احتمال  $X \geq n^2, X \geq n\sqrt{n}$  و  $X \geq n \log n$  را جداگانه محاسبه کنید.

### مسئله ۲۰. جایگشت تصادفی

فرض کنید می‌خواهیم از بین جایگشت‌های ۱ تا  $n$  که ۱ در یکی از خانه‌های ۱ تا  $k$  قرار دارد ( $k$  یک عدد داده شده است)، یکی را بصورت تصادفی یکنواخت تولید کنیم. برنامه‌ای بنویسید که این کار را انجام دهد و ثابت کنید که برنامه شما با احتمال یکنواخت خروجی را تولید می‌کند. اگر یک جایگشت تصادفی از ۱ تا  $n$  تولید کنیم آیا  $k$  جمله اول آن یک جایگشت تصادفی  $k$  تایی است؟ چرا؟