موضوع: تحلیل مجانبی و نمادهای O - Ω - Θ - o - ω

عدد صحیح ⇐ طبیعی

مثال ۱)

$T_1(n) = 6n^2 + 21$

$T_2(n) = 4n^2 + 2n + 1$

آیا این گزاره درست است؟ یک مقدار n_0 وجود دارد که به ازای هر $n \geq n_0$،

$$\frac{T_1(n)}{T_2(n)} \leq 3 .$$

$$\frac{6n^2+21}{4n^2+2n+1} \leq 3 \Rightarrow 6n^2+21 \leq 12n^2+6n+3$$

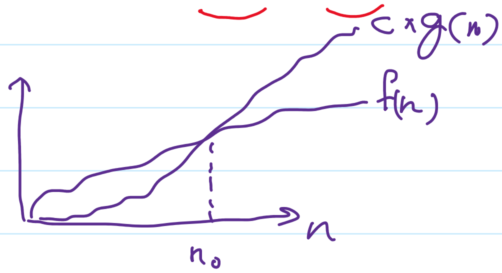
$$18 \leq 6n^2+6n$$

$$3 \leq n^2+n \longrightarrow n \geq 2$$

← n_0، هر مقداری بیشتر از ۲ می‌تواند باشد.

تعریف) دو تابع $f(n)$ و $g(n)$ داده شده است.

$$f(n) = O(g(n)) : \exists \underset{\in N}{n_0} , \underset{>0}{c} \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c\,g(n)$$



مثال ۱) $f(n) = 3n^2 \quad g(n) = n^2$

مثال ۱) $f(n)=3n^2 \quad g(n)=n^2$

می‌خواهیم ثابت کنیم: $f(n)=O(g(n))$

$\exists \underbrace{n_0}_{\in N}, \underbrace{c}_{>0} \quad \forall n \geq n_0 \quad 3n^2 \leq c n^2$

$3n^2 \leq 3n^2$

کافی است $c=3$ و $1=n_0$ ✓

$c=4$ و $1=n_0$ ✓

مثال ۲) $f(n)=3n^3+8 \quad g(n)=n^4$

$f(n)=O(g(n))$

$\exists \underbrace{n_0}_{\in N}, \underbrace{c}_{>0} \quad \forall n \geq n_0 \quad 3n^3+8 \leq c n^4$

$3n^3+8 \leq 3n^3+8n^3 = 11n^3 \leq 11n^4$

$c=11$ و $n_0=1$.

$n_0=c+1 \quad c=2^{3000\ldots 456}$

مثال ۳) $\log n = O(n)$

$\exists n_0, c \quad \forall n \geq n_0 \quad \log n \leq cn$

* قضیه: به ازای هر $n \geq 2$ ، $\boxed{\log_2^n \leq n}$ $\leftarrow$ $n_0=2$ و $c=1$

اثبات با استقرا: پایه: $n=2 \quad \log^2 \leq 2$ ✓

اثبات با استقرا:

پایه: $n=2$ $\quad \overbrace{\log_2 2}^{1} \leq \overbrace{2}^{2}$ ✓

فرض: برای n و مقادیر کمتر از n گزاره برقرار است $\longrightarrow \log_2 n \leq n$

برای $n+1$ ثابت کنیم.

$$n+1 \geq \log_2 n + 1 = \log n + \log 2 = \log 2n \geq \log (n+1) \quad \square$$

مثال ۴: $8n^2+3n = O(n^2)$

$$\exists n_0, c \quad \forall n \geq n_0 \quad 8n^2+3n \leq cn^2$$

$$\underset{\boxed{n \geq 1}}{8n^2+3n \leq 8n^2+3n^2} = 11n^2 \longrightarrow \begin{cases} 11 = c \\ n_0 = 1 \end{cases}$$

مثال ۵: $f(n) = \overbrace{\underset{+}{a_0} + \underset{+}{a_1 n} + \underset{+}{a_2 n^2} + \dots + a_k n^k}^{\text{چندجمله‌ای درجه } k} = O(n^k)$

$$a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k \leq a_0 n^k + a_1 n^k + \dots + a_k n^k$$

$$\leq [a_0 + a_1 + \dots + a_k] n^k$$

کافی است: $n_0 = 1$ و $c = \sum_{i=0}^{k} a_i$ ✓

نماد Ω: توابع $f(n)$ و $g(n)$ را درنظر بگیرید

$$f(n) = \Omega(g(n)) \qquad \exists n_0, c \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \geq c\,g(n)$$

$f(n) = \Omega(g(n))$ $\exists n_0, c$ $\forall n \geq n_0$ $f(n) \geq c\,g(n)$

$n_0 \in \mathbb{N}$, $c > 0$

$c = \frac{1}{۵}$

مثال ۶)

$f(n) = ۳n^۳$

$g(n) = n^۳$ $f(n) = \Omega(g(n))$

$\exists n_0, c \quad \forall n \geq n_0 \quad ۳n^۳ \geq c\, n^۳$

کافی است $۱ = n_0$ و $۳ ، ۲ ، ۱ ، \frac{۱}{۱۰} ، \frac{۱}{۱۰۰} = C$

$g(n) = n^۲$

$g(n) = ۱۰n^۲$ $\exists n_0, c \quad \forall n \geq n_0 \quad ۳n^۳ \geq c \times ۱۰ n^۲$

$۱ = n_0$ و $۰٫۱ ، ۰٫۲$ یا $۰٫۳ = C$

مثال ۷)

$f(n) = \underbrace{a_0}_{۰} + \underbrace{a_1}_{۰} n + \underbrace{a_2}_{\text{مثبت}} n^۲ + \dots + a_k n^k = \Omega(n^k)$

؟ C و n_0

$a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k \geq a_k n^k \longrightarrow$ $C = a_k$, $n_0 = ۱$

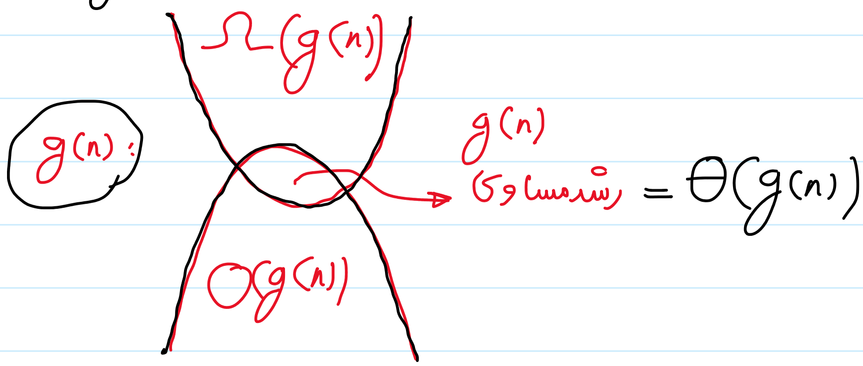
$۹n^۵ + ۱۰n^۲ + ۴۵۵۳۴$ $f(n) = O(n^۵)$ $O(n^۶)$ ✗

$f(n) = O(g(n))$

$O(g(n))$: مجموعه تمام توابعی است که رشد کمتر مساوی $g(n)$ دارند.

$f(n) \in O(g(n))$

=



برای دو تابع $f(n), g(n)$ اگر $f(n) = \Theta(g(n))$ ← $f(n) = \Theta(g(n))$

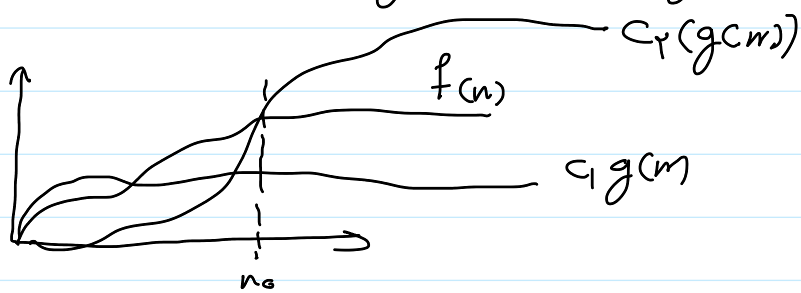
اگر و تنها اگر

$f(n) = O(g(n))$

و

$f(n) = \Omega(g(n))$

$\exists n_0, c_1, c_2 \quad \forall n \geq n_0 \quad c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$



مثال: $\underbrace{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots + a_k n^k}_{f(n)} = \Theta(\underbrace{n^k}_{g(n)})$

در مثال ۷ : $f(n) = \Omega(g(n))$

در مثال ۴ : $f(n) = O(g(n))$

$\Downarrow$

$f(n) = \Theta(g(n))$

مثال: $5n^2 + 6n = \Theta(9n^2 + 7n) = \Theta(n^2)$

مثال:

$$5n^2+6n = \Theta(\underline{9n^2+7n}) = \Theta(n^2)$$

مثال:

$$\log_x^n = \Theta(\log_2^n) \quad \boxed{x \geq 2}$$

$$\exists n_0, c_1, c_2 \quad \forall n \geq n_0 \quad c_1 \log_2^n \leq \log_x^n \leq \underline{c_2} \log_2^n$$

$$c_2 = 1$$

$$c_1 = ?$$

$$\left(\log_x^n = \log_2^n \times \log_x^2\right) \longrightarrow c_1 = \log_x^2$$

$$c_2 = 1$$

$$n_0 = 1$$

$$\log_2^n = \Theta(\log_5^n) = \Theta(\ln n) \quad \square$$

مثال:

$$\log n! = \Theta(n \log n)$$

$$\log^{n!} = \log^{\overline{n \times n-1 \times n-2 \times \cdots \times 1}}$$

$$= \underbrace{\log^n + \log^{n-1} + \cdots + \log^1}_{\text{n جمله}} \leq n \log^n \quad \boxed{c_2 = 1}$$

$$\log n! = \log^n + \cdots + \log^1 \geq \underbrace{\log^n + \log^{n-1} + \cdots + \log^{\frac{n}{2}+1}}_{\text{n/2 جمله}}$$

n/2 جمله

$$\geq \frac{n}{2}\log\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left[\log n - 1\right]$$

$\frac{x}{2} \leq x-1 \Leftarrow x \geq 2$

با فرض $\boxed{\log n \geq 2}$

$$\geq \frac{n}{2}\left[\frac{\log n}{2}\right]$$

$$= \frac{n}{4}\log n$$

کافی $\frac{1}{4} = c_1$ ، $1 = c_2$ ، $4 = n_0$

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n)) \quad *$$

$$\exists n_0, c \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c\,g(n)$$

$$\Downarrow$$

$$g(n) \geq \frac{1}{c} \times f(n)$$

$$\Downarrow$$

□