ساختمان‌داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳

مدرس: آبام_ کاظمی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری اول | زمان اجرا، تقسیم و حل | زمان آزمون: ۲۸ فروردین

مسئله‌ی ۱. رشد توابع

توابع زیر را بر حسب درجه رشدشان مرتب کنید.

$(\sqrt{2})^{\lg(n)}$	n^2	$n!$	$(\lg(n))!$	$(\frac{3}{2})^n$
$\lg^2 n$	n^3	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{\frac{1}{\lg n}}$
$\lg(\lg(n))$	$n2^n$	$n^{\lg(\lg(n))}$	$\lg n$	$2^{2^{n+1}}$
$2^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	$n \lg n$	$2^{\sqrt{2\lg n}}$	$\sqrt{\lg n}$

مسئله‌ی ۲. تحلیل شبه کد

پیچیدگی قطعه کدهای زیر را حساب کنید.

الف)

```
for i from 1 to n do
    for j = 0, j ← j + i to n do
        // O(1)
```

ب)

```
int i = 0, j = 1;
while (i < n){
    // O(1)
    i += j;
    j ++;
}
```

مسئله‌ی ۳. رشد عجیب

زمان اجرای الگوریتمی با $T(n, n)$ را پیدا کنید، به طوری که:

$T(x, c) = \Theta(x)$ برای $c \leqslant 2$

$T(c, y) = \Theta(y)$ برای $c \leqslant 2$

$T(x, y) = \Theta(x + y) + T(x/2, y/2)$ برای کلیه حالات.

مسئله‌ی ۴. سری‌ها

ثابت کنید:

الف) $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \in \Theta(n\sqrt{n})$

ب) $\sum_{i=0}^{\lceil \log n \rceil} 2^i \log 2^i \in \Theta(n \log n)$

مسئله‌ی ۵. بازگشتی

- روابط بازگشتی زیر را حل کنید.

الف) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

ب) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

ج) $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \log^5 n$

د) $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \log^2 n$

ه) $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + 5$

و) $T(n) = (\frac{2}{n})(T(0) + \cdots + T(n-1)) + c,\ T(0) = 0$

- رابطه بازگشتی مربوط به تکه کد زیر را پیدا کنید و سپس با روشی دلخواه پیچیدگی زمانی آن را بدست آورید.

```
1. int gcd(int a, int b){
2.     if(a == b) return a;
3.     if(a > b) gcd(a % b, b);
4.     gcd(a, b % a);
5. }
```

مسئله‌ی ۶. بازگشت عجیب

تابع $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ توسط رابطه‌ی بازگشتی زیر داده شده است:

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{اگر } n = 1 \\ bn^2 + nT(n-1) & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

که a, b اعداد حقیقی و مثبت‌اند.

الف) ثابت کنید $T(n) \in \Theta(n!)$.

ب) رابطه‌ی دقیق و صریح $T(n)$ را بیابید. این رابطه را برحسب a و b و c بنویسید که

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n!}$$

همچنین بررسی کنید $a \leqslant c \leqslant a + 5b$.

ج) فرض کنید تابع $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ با این رابطه داده شده باشد:

$$g(n) = \begin{cases} a & \text{اگر } n = 1 \\ bn^k + ng(n-1) & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

ثابت کنید $g(n) \in \Theta(n!)$.

مسئله‌ی ۷. حدس پیچیده

در هر قسمت، بهترین مرتبه‌ی ممکن را برای $T_۱(n,n)$ و $T_۲(n)$ بیابید.

الف) $T_۱(x,c) = \Theta(x)$ برای $c \leqslant ۲$
$T_۱(c,y) = \Theta(y)$ برای $c \leqslant ۲$
$T_۱(x,y) = \Theta(x) + T_۱(x, y/۲)$ برای کلیه حالات.

ب) $T_۲(n) = ۲T_۲(\frac{n}{۲} + \sqrt{n}) + T_۲(\frac{n}{۲}) + ۱$

مسئله‌ی ۸. لیست پیوندی سریع

یک لیست پیوندی را در نظر بگیرید که اعداد صحیح را در آن می‌توان نگهداری کرد. عملیات درج و جستجوی عناصر در این لیست پینوی همانند حالت عادی است، با این تفاوت که هرگاه یک عنصر درج یا جستجو شود، به ابتدای لیست آورده خواهد شد. با سه روش الف) انبوهه، ب) حسابداری و ج) تابع پتانسیل، تحلیل کنید که هزینه سرشکن هر عملیات درج و جستجو در این لیست از چه مرتبه‌ای خواهد بود.

مسئله‌ی ۹. زیر آرایه ها

آرایه‌ای به طول n از اعداد $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ داریم. با استفاده از تقسیم و حل، الگوریتمی از مرتبه زمانی $\mathcal{O}(n \log^۲ n)$ ارائه دهید که تمام زیر آرایه‌های این آرایه با مجموع کمتر از t بیابد. به عبارت دیگر، تمام جفت‌های r, l را بیابید که

$$a_l + a_{l+۱} + \cdots + a_{r-۱} + a_r < t$$

مسئله‌ی ۱۰. مقایسه رشد

ثابت کنید $n^\varepsilon \in \Omega(\log n)$ که در آن $۰ < \varepsilon < ۱$

مسئله‌ی ۱۱. پاره خط‌های موازی محورها

تعدادی پاره خط موازی محور x و تعدادی پاره خط موازی محور y داده شده است. مطلوب است پیدا کردن الگوریتمی که تمامی نقاط برخورد پاره خط ها را گزارش کند. می توانید تعداد پاره خط ها را n و تعداد نقاط گزارش شده را k در نظر بگیرید. الگوریتم شما باید در زمان $\mathcal{O}(n \log n + k)$ مسئله را حل کند.

مسئله‌ی ۱۲. پشته متفاوت

نوعی از پشته را در نظر بگیرید که عملیاتی به نام $push\text{-}and\text{-}pop(x,p)$ را پشتیبانی می‌کند که در آن، ابتدا به تعداد p بار عملیات $pop()$ را فراخوانی کرده و سپس عنصر x را در پشته درج می‌کند. در نتیجه، هنگامی که $p = ۰$، صرفا عنصر x درج خواهد شد.

الف) هزینه واقعی عملیات $push\text{-}and\text{-}pop(x,p)$ چه خواهد بود؟

ب) با استفاده از روش حسابداری نشان دهید که هزینه سرشکن عملیات $push\text{-}and\text{-}pop(x,p)$ رشدی فراتر از $\mathcal{O}(۱)$ نخواهد داشت.

ج) نتیجه مشابه را با استفاده از روش تابع پتانسیل هم نشان دهید.

د) با استفاده از تکنیک *تبدیل سرشکن به بدترین حالت* [۱]، زمان ثابت سرشکن بالا را به بدترین حالت تبدیل کنید.

---

[۱] De-amortized

مسئله‌ی ۱۳. شماره ستون

آرایه دو بعدی A از اعداد حقیقی با ابعاد $m \times n$ داده شده است. می دانیم برای هر $1 \leqslant i < k \leqslant m$ و $1 \leqslant j < l \leqslant n$:

$$A[i, j] + A[k, l] \leqslant A[i, l] + A[k, j]$$

به ازای هر i، در میان اعدادی از سطر iام که کم‌ترین مقدار را دارند، شماره ستون سمت چپ ترین عدد را $f(i)$ می نامیم. الگوریتمی از مرتبه $\mathcal{O}(m + n \log m)$ ارائه دهید که برای هر سطر $1 \leqslant i \leqslant m$، $f(i)$ را پیدا کند.

مسئله‌ی ۱۴. تعداد یک‌ها

آرایه‌ای مرتب شده از n عدد صحیح داده شده است. الگوریتمی از مرتبه $\mathcal{O}(\log n)$ پیدا کنید که تعداد یک‌های این آرایه را بشمارد.

مسئله‌ی ۱۵. وصل کردن نقطه‌ها

فرض کنید که دو مجموعه از نقاط با نام های $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ داده شده است. مجموعه نخست عبارت است از $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ که تمام اعضای آن روی خط $y = 0$ قرار گرفته اند. مجموعه دیگر نیز شامل نقاط $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ بوده که تمامی آن‌ها روی خط $y = 1$ واقع شده اند. به ازای هر p_i، به طوری که $1 \leqslant i \leqslant n$، پاره خطی به اندیس مشابه روی مجموعه $\mathcal{Q}$ وصل می‌کنیم. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $\mathcal{O}(n \log n)$ تعیین کند چند جفت از این پاره خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.