

کلیل سرسختن : Amortized

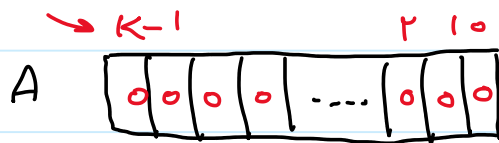
worstcase \*

فرض کنید هزینه [زمان - تعداد عملیات] انجام  $m$  بار عمل  $X$  در بدترین حالت، برابر با  $T(m)$  باشد. در این صورت هزینه سرسختن هر بار عمل  $X$  برابر با  $\frac{T(m)}{m}$  است.

$$\underbrace{2 \quad 2 \quad 2 \quad 2}_{4 \text{ times}} \quad 8 \rightarrow 2$$

$$\underbrace{1 \quad 100 \quad 1 \quad 2}_{4 \text{ times}} \quad 104 \rightarrow 26$$

مثال (شمارنده دودویی: فرض کنید یک شمارنده دودویی با استفاده از آرایه  $A$  پیاده شده است).



0 0 0 0 ... 0 0 1  
0 0 0 0 ... 0 1 0  
0 0 0 0 ... 0 1 1

inc(A)

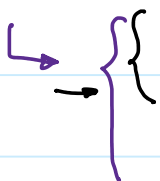
⋮  
0 1 1 1 1  
1 0 0 0 0

inc(A) {

$i = 0$

while( $A[i] == 1$ ) {

$A[i] = 0$  }  $\overline{0(1)}$   
 $i++$



$$\{ \\ A[i] = 1 \\ \}$$

زمانه عملیات در صورتی که  $m$  بار عمل  $inc$  را انجام دهیم چقدر است؟  
 ↓  
 تبدیل صفر به یک یا یک به صفر

\*  $while$  حادکده  $k$  بار اجرای شود:  $O(mk)$ .  
 \*  $while$  در هر  $inc$  حادکده  $m$  بار اجرای شود:  $O(m \log m)$  +

کلیل سرشکلن مساله شما رنده دودومی  
 روش جمع: کل عملیات انجام شده را حساب کنید.

\* بیت اول چند بار تغییر می کند؟  $m$  بار  
 \* " دوم " " " "  $\frac{m}{2}$  ؟  
 \* " چهارم " " " "  $\frac{m}{4}$  ؟  
 \* " " " " "  $\frac{m}{8}$  ؟

$$m + \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \dots + 1 \quad \text{کل تغییرات}$$

$$m \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right] \leq \underline{\underline{2m}}$$

$\leq 2$

پس هزینه سرشکلن هر بار عمل  $inc$  برابر با  $2 = O(1) = \frac{2m}{m}$  است.

روش ۲: حسابداری یا Accounting: فرض کنید به ازای هر تغییر بیت باید  
 ۱ ریال بپردازیم.  $m \leftarrow T(m)$  ریال

به ازای هر بار که بیت از ۰ به ۱ تبدیل می‌شود، ۱ ریال پرداخت می‌کنیم و  
 ۱ ریال هم در حساب ذخیره می‌کنیم.

\* به ازای هر بار که بیت از ۱ به ۰ تبدیل می‌شود، ۱ ریال از حساب  
 پرداخت می‌کنیم.

\* همیشه در حساب پول کافی وجود دارد: هر بیتی قرار است از ۱ به صفر  
 تبدیل شود، قبلاً یک بار از ۰ به ۱ تبدیل شده و به ازای آن ۱ ریال در  
 صندوق ذخیره شده

کل هزینه ای که انجام می‌دهیم:

در هر  $\epsilon \ln c$  ... بیت از صفر به یک تبدیل می‌شود.

$\begin{array}{c} \text{111111} \\ \leftarrow \\ \text{100000} \end{array}$

کل پول: به ازای هر  $\epsilon \ln c$  ۲ ریال صرف می‌کنیم

$$m \times 2 = 2m \rightarrow \frac{2m}{m} = 2 = O(1)$$

روش ۳ - روش تابع پتانسیل

$\phi(0) = 0$   $A_0 : 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0$

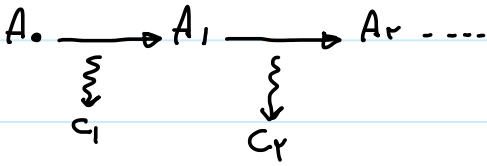
۱. ... ۰.  $A_1: \phi(1)=1$   $A_i$ :  $i$  رايه  $A$  بعد از انجام عمل  $i$  ام

$A_i$ : تعداد ۱ های آرایه  $\Phi$ ;  $\Phi(r) = A_r$  ... ۱

$c_i$  : هزینه انجام عمل  $i$  ام

$$\left\{ \sum_{i=1}^m C_i \right\} =$$

$$\rightarrow \hat{C}_i = C_i + \phi_i - \phi_{i-1}$$



$$\sum_{i=1}^m \hat{C}_i = C_1 + \underbrace{\phi_1 - \phi_0}_{\substack{\downarrow \\ \cancel{\phi_0}}} + C_2 + \underbrace{\phi_2 - \phi_1}_{\substack{\downarrow \\ \phi_1}} + \dots$$

$$\sum_{i=1}^m c_i^* \geq \sum_{i=1}^m c_i$$

به ازای هر  $n$ ، مقدار  $C_n$  ؟

$$\hat{C}_i = C_i + \phi_i - \phi_{i-1}$$

$$C_i = C_i + \psi_i - \psi_{i-1}$$

↓  
تکامل داشته است.

$$\begin{array}{l} A_{i-1} \quad \boxed{\phantom{00000}} \quad \overbrace{0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^r \\ A_i \quad \boxed{\phantom{00000}} \quad 1 \quad 0 \quad \dots \end{array} \quad \text{تفسیر } C_i = r+1$$

$$\phi_i - \phi_{i-1} = -r+1 = 1-r$$

$$\hat{C}_i = 1-r + r+1 = 2$$

$$\sum_{i=1}^m \hat{C}_i = 2m \rightarrow \sum_{i=1}^m C_i \Rightarrow O(1) \text{ هزینه سرسختی}$$

فرم کلی روش تابع پتانسیل

فرض کنید داده ساختار  $D$  داریم که طی  $m$  عملیات به این صورت تغییر می‌کند

$$D_0 \xrightarrow{\quad} D_1 \xrightarrow{\quad} D_2 \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} D_m$$

$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ C_1 & C_2 & C_m \end{array}$

$C_i$ : هزینه عملیات  $i$ ام

$$\sum_{i=1}^m C_i \text{ کل هزینه}$$

فرض کنید تابع پتانسیل  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$  به طوری که:

$$\forall i \quad \phi(D_i) \geq \phi(D_0) \quad *$$

$$\forall i \quad \phi(D_i) \geq \phi(D_0) \quad *$$

$$\hat{c}_i = c_i + \underbrace{\phi(D_i) - \phi(D_{i-1})}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^m \hat{c}_i = \sum_{i=1}^m c_i + \phi(D_m) - \phi(D_0)$$

$$\checkmark \quad \sum_{i=1}^m \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^m c_i$$

↓  
آثار به راحتی حساب شود

\* روش تابع پتانسیل فرم رسمی روش حساب داری.

□