



## ساختمان داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳

مدرس: آدام- کاظمی

تمرین سری ششم

گراف

زمان آزمون: ۲۲ خرداد

## مسئله‌ی ۱. پالیندروم

به شما یک اتوماتای متناهی قطعی (DFA) داده شده که با الفبای  $\Sigma$  و فضای حالت  $V$  مشخص شده است. این DFA با استفاده از نمودار گذار آن مشخص می‌شود که یک گراف جهت‌دار بوده و در آن هر گره  $v \in V$  دارای دقیقاً یک یال خروجی با برچسب  $\sigma \in \Sigma$  است. همچنین یک گره شروع  $s$  و مجموعه‌ای از گره‌های پذیرش  $T \subset V$  داده شده است. کلمه‌ای مانند  $w \in \Sigma^*$  توسط این DFA پذیرفته می‌شود اگر و تنها اگر مسیر شروع شده از  $s$  با برچسب‌گذاری  $w$  به یکی از گره‌های  $T$  ختم شود. یک پالیندروم یک کلمه است که به همان صورت از راست به چپ هم خوانده می‌شود.

الگوریتمی ارائه دهید که تشخیص دهد آیا این DFA هیچ پالیندرومی را می‌پذیرد یا خیر. زمان اجرای این الگوریتم را بر حسب  $|V|$  و  $|\Sigma|$  تحلیل کنید.

## مسئله‌ی ۲. مجموعه مستقل

به شما یک گراف مسیر با  $n$  گره داده شده است، که در آن به هر گره  $i$ ،  $1 \leq i \leq n$  یک وزن مثبت  $w_i$  اختصاص داده شده است. مسئله این است که یک مجموعه مستقل  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  را پیدا کنید که مجموع وزن‌های گره‌های آن  $(\sum_{i \in S} w_i)$  حداکثر شود.

(برای مثال، اگر مسیری با ۵ گره ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ با وزن‌های متناظر ۱، ۸، ۶، ۳، ۶ داشته باشیم، مجموعه مستقل با حداکثر وزن  $S = \{2, 5\}$  با مجموع وزن  $8 + 6 = 14$  است. بنابراین الگوریتم شما باید  $S = \{2, 5\}$  را بازگرداند.)

## مسئله‌ی ۳. گراف جهت دار

الف) نشان دهید که یک گراف جهت‌دار  $G$  دارای یک دور اویلری است اگر و تنها اگر برای هر راس، درجه ورودی و درجه خروجی آن برابر باشند.

ب) الگوریتمی با زمان اجرای  $O(m + n)$  ارائه دهید تا یک تور اویلری را در یک گراف جهت‌دار که در آن درجه ورودی و خروجی هر راس برابر است، پیدا کند.

## مسئله‌ی ۴. راس برش

الف) در یک گراف غیرجهت‌دار  $G$ ، راس  $x$  را راس برش گویند اگر  $G \setminus x$  ناهمبند باشد. با داشتن یک گراف بدون جهت با  $n$  راس و  $m$  یال، چگونه می‌توان تمام راس‌های برش را پیدا کرد؟ الگوریتم شما چه زمانی اجرا می‌شود؟

ب) فرض کنید گراف هیچ راس برشی ندارد و درخت جست‌وجوی عمیق اول (DFS) آن را در نظر بگیرید. نشان دهید که ریشه درخت نمی‌تواند بیش از یک فرزند داشته باشد.

## مسئله‌ی ۵. پل گراف

الف) در یک گراف همبند بدون جهت، یک یال پل است اگر و تنها اگر هیچ دوری آن یال را شامل نشود. این ادعا را اثبات کنید.

ب) با استفاده از جست‌وجوی عمیق اول (DFS) الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n + m)$  ارائه دهید تا تمام پل‌های یک گراف همبند بدون جهت را پیدا کند.

#### مسئله ۶. روش جستجو

در درخت جستجوی عرض اول (BFS) ویژگی‌های یال‌های خارج از درخت حاصل جستجو چیست؟ در درخت جستجوی عمق اول (DFS) چگونه است؟ به عنوان مثال، نشان دهید که دو برگ درخت DFS در گراف به هم متصل نیستند.

#### مسئله ۷. کوتاهترین مسیر

فرض کنید که یک ساختمان داده  $A$  به عنوان یک جعبه سیاه در اختیار داریم که قادر به نگهداری درخت کوتاهترین مسیرها از یک مبدا در گراف‌های جهت‌دار وزن‌دار (با وزن‌های غیرمنفی) است و به پرسش‌های مربوط به فاصله از مبدا به هر رأس دیگر در گراف پاسخ می‌دهد. الگوریتمی ارائه دهید که تنها با استفاده از ساختمان داده  $A$ ، ماتریس فاصله در گراف وزن‌دار جهت‌دار و بدون دور  $G = (V, E)$  را محاسبه کند.

#### مسئله ۸. دسترسی در گراف بدون دور

فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف جهت‌دار بدون دور است و  $v \in V$ . درخت دسترسی  $v$  درختی شامل مسیرهایی به همه رأس‌هایی است که از  $v$  در  $G$  قابل دسترسی هستند. برای نگهداری یک درخت دسترسی کم‌شونده (decremental) از  $v$  ساختمان داده‌ای ارائه دهید که زمان به‌روزرسانی کل آن  $O(|E|)$  باشد.

#### مسئله ۹. دسترسی در گراف

فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف جهت‌دار (که ممکن است دارای دور باشد) است. برای نگهداری یک درخت دسترسی کم‌شونده از رأسی مانند  $v \in V$  ساختمان داده‌ای ارائه دهید که زمان به‌روزرسانی کل آن  $O(|E| \cdot |V|)$  باشد.