ساختمان‌داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۳-۰۴

مدرس: دکتر آبام

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

زمان آزمون:۲۴ آبان

تمرین سری اول

مسئله‌ی ۱. رشد توابع

توابع زیر را بر حسب درجه رشدشان مرتب کنید.

$(\sqrt{۲})^{lgn}$	$n^{۲}$	$n!$	$(lgn)!$	$(\frac{۳}{۲})^n$
$lg^{۲}n$	$n^{۳}$	$lg(n!)$	$۲^{۲^n}$	$n^{\frac{۱}{lgn}}$
$lg(lg(n))$	$n۲^n$	$n^{lg(lg(n))}$	lgn	$۲^{۲^{n+۱}}$
۲^{lgn}	$(lgn)^{lgn}$	$nlgn$	$۲^{\sqrt{۲lgn}}$	$\sqrt{lgn}$

مسئله‌ی ۲. مردافکن

دو تابع $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بیابید، که اکیدا صعودی باشند و داشته باشیم:

$$g(n) \notin O(f(n)), f(n) \notin O(g(n))$$

مسئله‌ی ۳.

آرایه‌ی n تایی A داده شده است. می‌خواهیم از آن ماتریس B را بسازیم که در آن $B[i,j] = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ باشد (برای $i \leqslant j$). اگر $i > j$ مقدار $B[i,j]$ مهم نیست.

الف) الگوریتم زیر را برای محاسبه‌ی B پیشنهاد می‌کنیم:

for $i \leftarrow 1$ *to* n **do**
  for $j \leftarrow i$ *to* n **do**
    $B[i,j] = \sum_{k=i}^{j} A[k]$

دقیقا چه تعداد عمل جمع در این الگوریتم انجام می‌شود؟

ب) الگوریتمی با تعداد بهینه جمع ارائه دهید. این تعداد دقیقا چقدر است؟

مسئله‌ی ۴. رشد عجیب

فرض کنید توابع f و g به گونه ای داده شده اند که $f(n) \in O(g(n))$. برای هر یک از گزاره‌های زیر درستی و نادرستی آن‌ها را با دلیل ثابت کنید. (برای اثبات نادرستی، مثال نقض کافی است)

الف) $log(f(n)) \in O(log(g(n)))$

ب) $۲^{f(n)} \in O(۲^{g(n)})$

ج) $f(n)^{۲} \in O(g(n)^{۲})$

مسئله‌ی ۵.

ثابت کنید: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \in \Theta(n\sqrt{n})$

مسئله‌ی ۶. بازگشتی

روابط بازگشتی زیر را حل کنید.

الف) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

ب) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

مسئله‌ی ۷. بازگشتی ۲

رابطه بازگشتی زیر را با توجه به a و b حل کنید.

$$T(n) = T(an) + T(bn) + n$$

الف) $a + b < 1$

ب) $a + b = 1$

مسئله‌ی ۸. حدس پیچیده

در هر قسمت، برای $T(n)$ بهترین مرتبه‌ی ممکن را بیابید.

الف) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$

ب) $T(n) = 2T(\frac{n}{2} + \sqrt{n}) + T(\frac{n}{2}) + 1$

مسئله‌ی ۹. شمارنده دودویی

همان‌طور که قبلاً دیده بودیم هزینه‌ی سرشکن افزایش در یک شمارنده‌ی دودویی از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(1)$ بود. حالا یک شمارنده دودویی در نظر بگیرید که در آن هزینه تغییر iامین بیت برابر i باشد. ثابت کنید در این حالت نیز بازهم هزینه سرشکن عمل افزایش $\mathcal{O}(1)$ است.

مسئله‌ی ۱۰. حذف پر هزینه

فرض کنید n عدد دودویی دارید که در ابتدا همه‌ی آن‌ها برابر یک هستند. در هر مرحله دو عدد دلخواه را انتخاب کرده و از مجموعه حذف می‌کنیم و به جای آن‌ها حاصل جمعشان را قرار می‌دهیم. اگر دو عددی که حذف کردیم b_1 و b_2 بیتی باشند، هزینه‌ی این عمل برابر است با:

$min(b_1, b_2)$ به علاوه‌ی تعداد بیت‌های نقلی در جمع که بعد از بیت سمت چپ عدد کوچکتر به وجود می‌آید. مثلا هزینه‌ی جمع دو عدد ۱۱۰۰ و ۱۰۱۱۰۱۰۰ برابر است با ۷ = ۳ + ۴ و هزینه‌ی جمع دو عدد ۱۰۱ و ۱۰۰۰۰۱ برابر ۳ است. حال ثابت کنید اگر m بار این عمل را انجام دهیم حداکثر از $\mathcal{O}(m)$ هزینه صرف کرده‌ایم.

مسئله‌ی ۱۱. آرایه‌ی جادار

می‌خواهیم n عدد را به ترتیب، در انتهای آرایه‌ای اضافه کنیم. طول آرایه در ابتدا ۱ است. در نوبت اضافه‌کردن یک عدد به انتهای آرایه، اگر آرایه فضای خالی داشت، عدد را در انتها اضافه می‌کنیم. در غیر این صورت، آرایه‌ای جدید به طول دوبرابر آرایه فعلی ایجاد می‌کنیم، عناصر را از آرایه قبلی به آرایه‌ی جدید منتقل می‌کنیم و سپس عنصر جدید را در انتهای آرایه اضافه می‌کنیم. پیچیدگی زمانی هر عمل اضافه کردن را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۱۲. کار و بار

تعداد نامعلومی کار باید انجام شود. اگر i به صورت توانی از ۲ بود، انجام کار iام هزینه‌ای برابر با i خواهد داشت و در غیر این صورت هزینه‌ی آن کار ۱ است. با سه روش الف) انبوهه، ب) حسابداری و ج) تابع پتانسیل ثابت کنید که هزینه‌ی سرشکن هر کار $O(1)$ می‌باشد.

مسئله‌ی ۱۳.

تعداد n دانش‌آموز در یک صف ایستاده‌اند. میزان نارضایتی هر دانش‌آموز برابر با تعداد نفراتی است که جلوتر ایستاده و قدشان از او بلندتر است.

الف) مجموع نارضایتی دانش‌آموزان در بدترین حالت چقدر خواهد بود؟

ب) با داشتن ترتیب و قد دانش‌آموزان مجموع نارضایتی آن‌ها را در $O(n \log n)$ به دست‌آورید.

مسئله‌ی ۱۴. تقسیم و حل

در آرایه $A[1 : n]$ هر خانه برابر ۰ یا ۱ است. یک الگوریتم با زمان اجرای $O(n)$ ارائه دهید که تعداد زوج‌های مرتب (i, j) را بدست آورد که $i < j$ و $(A[i], A[j]) = (1, 0)$.

مسئله‌ی ۱۵. پاره‌خط‌ها

فرض کنید دو مجموعه نقطه داده شده است: یکی مجموعه نقاط $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ روی خط $y = 0$ و دیگر مجموعه نقاط $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ روی خط $y = 1$. هر نقطه p_i را با پاره خطی به نقطه متناظرش q_i وصل می‌کنیم. یک الگوریتم تقسیم و حل با زمان اجرای $O(n\, log\, n)$ ارائه دهید که تعداد تقاطع این n پاره خط را پیدا کند. تحلیل زمان اجرا باید با استفاده از قضیه اصلی صورت گیرد.

مسئله‌ی ۱۶. قضیه اصلی

به ازای چند زوج (a, b) از اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ جواب رابطه بازگشتی $T(n) = aT(n/b) + n^2$ برابر $\Theta(n^2)$ می‌شود؟