



مسئله ۱. پیوندی دیگر! [۱۲ نمره]

عملیات join دو مجموعه غیر ایستای S_1 و S_2 و عنصر x را در نظر می‌گیرد، به طوری که $\forall x_1 \in S_1$ و $\forall x_2 \in S_2$ داریم که $key[x_1] \leq x \leq key[x_2]$. حاصل این عملیات، مجموعه $S = S_1 \cup \{x\} \cup S_2$ خواهد بود. فرض کنید که یک درخت قرمز-سیاه به نام T داده شده است. همچنین مفروض است که تعداد گره‌های سیاه در هر مسیر از ریشه هر زیر درخت T' به ریشه درخت T در متغیری به نام $bh[T']$ ذخیره شده است. اکنون قصد داریم عملیات $join(T_1, x, T_2)$ را پیاده‌سازی کنیم، به طوری که درخت‌های قرمز-سیاه T_1 و T_2 را منحل کرده و حاصل درخت $T = T_1 \cup \{x\} \cup T_2$ خواهد بود. نیز، n را تعداد گره‌های T در نظر بگیرید.

- ۶ (آ) مفروض است که $bh[T_1] > bh[T_2]$. الگوریتمی با زمان اجرای $O(\log n)$ ارائه دهید که یک گره سیاه به نام y را در T_1 با بزرگترین کلید در میان گره‌هایی پیدا می‌کند که پارامتر bh شان برابر $bh[T_2]$ است.
- ۶ (ب) نشان دهید که چگونه $T_2 \cup \{x\} \cup T_y$ را که در آن T_y زیر درخت با ریشه y است، می‌توان در زمان ثابت جایگزین T_y نمود، بدون آنکه خاصیت درخت دودویی از بین برود.

مسئله ۲. کران پایین مقایسه‌ها [۱۳ نمره]

فرض کنید لیست مرتب شده‌ای از n عدد، به شکل مقابل داریم: $X = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. از ما خواسته شده است الگوریتمی ارائه دهیم که تشخیص دهد آیا عناصر تکراری در لیست وجود دارند؟ اما ما تنها محدود به استفاده از الگوریتم‌هایی هستیم که مقایسه میان یک جفت از عناصر لیست انجام می‌دهند. به این صورت که عملیاتی مانند $COMPARE(i, j)$ فراخوانی می‌شود و بر اساس نسبت میان x_i و x_j یکی از سه مقدار $>$, $<$, $=$ را بر می‌گرداند. الگوریتم باید در صورت یافتن عناصر تکراری، اندیس‌های دو عنصر تکراری را برگرداند و در غیر این صورت گزارش کند که عناصر غیر تکراری هستند. یک الگوریتم با کمترین استفاده از عملیات $COMPARE$ ارائه دهید که در صورت وجود چند عنصر غیر متمایز، یکی را به عنوان پاسخ برگرداند. حد پایین مناسبی برای تعداد فراخوانی عملیات $COMPARE$ پیشنهاد دهید.

مسئله ۳. مرتب‌سازی [۲۵ نمره]

- ۱۲ (آ) یک الگوریتم با زمان $O(n \log k)$ ارائه دهید تا تعداد k لیست مرتب شده را در قالب یک لیست ادغام نماید.
- ۱۳ (ب) فرض کنید یک لیست از n عدد صحیح داریم. ورودی شامل اعداد تکراری زیاد است، به شکلی که تنها $O(\log n)$ عدد متمایز در لیست وجود دارد. الگوریتمی با زمان $O(n \log \log n)$ ارائه کنید تا لیست مذکور را مرتب کند.

مسئله ۴. جستجوی چند رشته [۱۰ نمره]

فرض کنید یک رشته T به طول m شامل یک متن داده شده است. همچنین، یک مجموعه k تایی از رشته‌های ناتهی P_1, P_2, \dots, P_k مفروض اند. فرض کنید که به ازای هر رشته P_i برای $i \in [k]$ ، طول رشته عدد ثابت ۱۰ است. الگوریتمی با زمان اجرای $O(m + k)$ برای یافتن تمامی محل‌های ظاهر شدن k رشته مذکور در T پیشنهاد دهید.

✓ مسئله‌ی ۵. لیست نظرسنجی [۲۰ نمره]

فرض کنید یک نظرسنجی برگزار شده است که در آن n شرکت کننده هر یک عدد صحیح متمایزی در مورد موضوع نظرسنجی ثبت کرده‌اند. می‌خواهیم $O(\log n)$ فرد را به گونه‌ای از لیست انتخاب کنیم که بزرگترین اعداد در لیست را ثبت کرده باشند.

آ) الگوریتمی با زمان $O(n)$ برای انجام این کار ارائه دهید. ۸

ب) فرض کنید محدودیت حافظه داریم. به این نحو که تنها می‌توانیم الگوریتمی با پیچیدگی حافظه‌ای $O(\log n)$ عدد صحیح ارائه دهیم. با این فرض، الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \log \log n)$ ارائه دهید.

۱۲

✓ مسئله‌ی ۶. عملیات در درخت دودویی [۲۰ نمره]

فرض کنید یک درخت دودویی جستجو بر روی n عدد حقیقی متمایز با ارتفاع $O(\log n)$ در اختیار داریم. با ذکر دلیل عنوان کنید کدام یک از پرسمان‌های زیر را بدون پیش‌پردازش و اطلاعات اضافی می‌توان در $O(\log n)$ پاسخ داد؟ در هر گره صرفاً یک کلید، دو اشاره‌گر به فرزندان، و اندازه زیر درخت به ریشه آن گره ذخیره شده است.

آ) محاسبه کوچکترین عدد ۵

ب) محاسبه میانه ۵

ج) تعیین آنکه آیا عدد داده شده x در درخت وجود دارد؟ ۵

د) محاسبه مرتبه عدد x داده شده در بین n عدد ذخیره شده در درخت ۵