

**مسئله‌ی ۱. مرتب‌سازی بخصوص**

آرایه‌ای از n عدد صحیح در بازه‌ی ۰ تا $n^2 - ۱$ داریم. روشی ارائه دهید که این اعداد را در $O(n)$ مرتب کند.

مسئله‌ی ۲. دانش‌آموزان ناراضی

تعداد n دانش‌آموز در یک صف ایستاده‌اند. میزان ناراضی‌تی هر دانش‌آموز برابر با تعداد نفراتی است که جلوتر ایستاده و قدشان از او بلندتر است.

الف) مجموع ناراضی‌تی دانش‌آموزان در بدترین حالت چقدر خواهد بود؟

ب) با داشتن ترتیب و قد دانش‌آموزان مجموع ناراضی‌تی آن‌ها را در $O(n \log n)$ به دست آورید.

مسئله‌ی ۳. کوچکترین عناصرها

می‌خواهیم از بین n عدد، k امین کوچکترین عنصر، k امین کوچکترین عنصر و به همین ترتیب تا $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ امین کوچکترین عنصر را پیدا کنیم. روشی از $O(n \log \frac{n}{k})$ برای این کار ارائه دهید.

مسئله‌ی ۴. ماتریس بیت‌ها

یک ماتریس ۶۴ در ۶۴ داریم که درایه‌های آن همه ۰ یا ۱ هستند. می‌خواهیم این ماتریس را به صورت مارپیچی مرتب کنیم یعنی اگر در انتها سطر اول را از چپ به راست به سطر دوم از راست به چپ و ... بچسبانیم یک آرایه‌ی ۴۰۹۶ بیتی مرتب از ۰ و ۱ خواهیم داشت. ادعا می‌کنیم که الگوریتم زیر این کار را انجام می‌دهد:

۱. k بار ایت‌های ۲ و ۳ را تکرار کن

۲. همه‌ی سطرها را مستقلاً و در جهت خود مرتب کن. یعنی سطرها‌ی فرد را از چپ به راست، و سطرها‌ی زوج را از راست به چپ مرتب کن.

۳. همه‌ی ستون‌ها را از بالا به پایین مرتب کن.

کم‌ترین مقدار k در بدترین حالت چند است؟ دلیل خود را ذکر کنید.

مسئله‌ی ۵. عمل برگشت

آرایه‌ی A از n عدد دل‌خواه داده شده است. فرض کنید عملیات $reverse(i, j)$ ($۱ \leq i < j \leq n$)، زیرآرایه‌ی $A[i..j]$ را معکوس می‌کند، یعنی به ازای هر $۰ \leq k \leq j - i$ ، $A[j - k]$ را درون $A[i + k]$ قرار می‌دهد. با چند بار استفاده از این عملیات می‌توان آرایه‌ی A را مرتب کرد؟ دلیل خود را ذکر کنید.

مسئله ۶. میانه ها

آرایه A شامل n عدد مختلف است. حال می‌خواهیم آرایه B را به این صورت پر کنیم که به ازای هر i ، $B[i]$ برابر با میانه‌ی اعداد $A[1]$ تا $A[i]$ باشد. الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(n \log n)$ برای این مسئله ارائه دهید.

مسئله ۷. حد پایین مقایسه ها

فرض کنید لیست مرتب شده‌ای از n عدد، به شکل مقابل داریم: $X = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. از ما خواسته شده است که تشخیص دهیم آیا عناصر تکراری در لیست وجود دارند یا خیر. اما ما تنها محدود به استفاده از الگوریتم‌هایی هستیم که مقایسه میان یک جفت از عناصر لیست انجام می‌دهند. به این صورت که عملیاتی مانند $\text{COMPARE}(i, j)$ فراخوانی می‌شود و بر اساس نسبت میان x_i و x_j یکی از سه مقدار $<$, $=$, $>$ را بر می‌گرداند. فرض کنید که در صورت یافتن عناصر تکراری، اندیس‌های i, j گزارش می‌شوند و در غیر این صورت Null، که معادل متمایز بودن همه عناصر است. توجه داشته باشید که در صورت وجود چند عنصر غیر متمایز، هر کدام را می‌توان به عنوان پاسخ برگرداند. حد پایین مناسبی برای تعداد فراخوانی عملیات COMPARE پیشنهاد دهید.

مسئله ۸. حد پایین ادغام لیست های مرتب شده

حد پایینی بر روی ادغام دو لیست مرتب شده $A = A_1 < A_2 < \dots < A_n$ و $B = B_1 < B_2 < \dots < B_n$ ارائه دهید.

مسئله ۹. میانه دو لیست ادغام شده

فرض کنید که دو لیست از اعداد صحیح با نام‌های A و B داریم که هر یک از لیست‌ها مرتب شده است. الگوریتمی از زمان $O(\log n)$ ارائه کنید تا میانه را در $A \cup B$ بیابد.

مسئله ۱۰. کران پایین مرتب سازی مقایسه محور تصادفی

نشان دهید که برای هر الگوریتم تصادفی مرتب سازی مبتنی بر مقایسه، تعداد مقایسه‌ها در حالت متوسط^۱ $\Omega(\log(n!))$ است. یعنی تعداد متوسط مقایسه‌ها، بر روی یک جایگشت از ورودی که با احتمال یکسان از میان همه جایگشت‌های ممکن انتخاب شده است.

مسئله ۱۱. بلندترین پیشوند مشترک

دو رشته s و t داده شده است. الگوریتمی ارائه کنید تا بلندترین زیر رشته‌ای را که در آغاز هر دو رشته ظاهر می‌شود، بیابد.

مسئله ۱۲. جستجو در آرایه

فرض کنید یک آرایه مرتب شده $X = x_1 < x_2 < \dots < x_n$. می‌خواهیم در لیست عنصر مشخصی مانند y را جستجو کنیم. خروجی مورد انتظار چنانچه y در لیست باشد، x_i و در غیر اینصورت صفر خواهد بود. اما، تنها راه دسترسی به X استفاده از تابعی به نام $\text{TEST}(i, j, i, k, y)$ است به طوری که $0 < i < j < k \leq n$ و یکی از خروجی‌های زیر را بر می‌گرداند:

$$y < x_i \bullet$$

$$y = x_i \bullet$$

$$x_i < y < x_j \bullet$$

Average-case^۱

$$y = x_j \bullet$$

$$x_j < y < x_k \bullet$$

$$y = x_k \bullet$$

$$y > x_k \bullet$$

با استفاده از درخت تصمیم‌گیری، کران پایین تعداد فراخوانی‌های تابع فوق‌الذکر را برای پیدا کردن y در آرایه و بازگرداندن یک اندیس در صورت وجود آن در آرایه، تعیین کنید.

مسئله‌ی ۱۳. میانه دو لیست

فرض کنید دو آرایه هر یک به اندازه n از اعداد صحیح و به صورت مرتب شده، داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که میانه اجتماع عناصر دو آرایه را در زمان $O(\log n)$ بیابد.

مسئله‌ی ۱۴. روشن شدن چراغ‌ها

n نفر قصد دارند وارد یک اتاق شده و پس از مدتی خارج گردند. فرد i ام در زمان e_i وارد و در زمان l_i آن را ترک می‌کند. فرض کنید تمامی زمان‌های ورود و خروج متمایزند. در ابتدا تمامی چراغ‌های اتاق خاموش‌اند. اولین نفری که وارد اتاق می‌شود، چراغ‌ها را روشن می‌کند. چنانچه هر نفر در زمان خروج خود اتاق را خالی ببیند، چراغ‌ها را خاموش می‌کند. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \log n)$ ارائه کنید که دفعات روشن شدن چراغ‌ها را به دست آورد.

مسئله‌ی ۱۵. آرایه با اعداد زوج درهم

یک آرایه را k درهم زوج می‌نامیم چنانچه به تعداد k عنصر زوج در آن باشند و عناصر فرد مشخصاً به صورت مرتب شده قرار گرفته باشند. برای چنین آرایه‌ای با n عنصر و پارامتر $k = \lceil n / \log n \rceil$ ، الگوریتمی ارائه دهید که آرایه را در مرتبه زمانی $O(n)$ مرتب کند.