



ساختمان داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۳-۰۴

مدرس: دکتر آبام

زمان آزمون: ۲ دی

درخت دودویی جست‌وجو و مجموعه‌های مجزا

تمرین سری چهارم

مسئله‌ی ۱.

ثابت کنید در زمان $O(n \log n)$ نمی‌توان n عدد را بصورت درخت دودویی جست‌وجو درآورد.

مسئله‌ی ۲.

مسئله درخت دودویی جست‌وجوی (د.د.ج) بهینه با n عدد را در نظر بگیرید. در مسئله د.د.ج بهینه n عدد به همراه تعداد دفعاتی که پرسمان خواهند شد داده می‌شود. هدف ساخت یک د.د.ج است به گونه‌ای که مجموع حاصلضرب پرسمان اعداد در عمق آن‌ها در د.د.ج کمینه شود. الگوریتم حریصانه زیر را در نظر بگیرید. عدد با بیشترین پرسمان را در ریشه درخت قرار می‌دهیم. براساس ریشه مشخص شده اعداد باقی‌ماده براساس خاصیت د.د.ج در یکی از زیردرخت‌های چپ یا راست قرار می‌گیرند. بصورت بازگشتی زیردرخت چپ و راست را می‌سازیم. کوچکترین n که این الگوریتم حریصانه درست کار نمی‌کند چند است.

مسئله‌ی ۳.

چند درخت دودویی جست‌وجوی متفاوت با n گره و برچسب‌های ۱ تا n وجود دارد طوری که پیمایش پیش‌ترتیب و میان‌ترتیب آن‌ها یکسان باشد؟ دلیل خود را ذکر کنید.

مسئله‌ی ۴.

اعداد ۱ تا ۵۰۰ را در یک درخت دودویی جست‌وجو ذخیره کرده‌ایم. می‌خواهیم عدد ۱۹۳ را در این درخت جست‌وجو کنیم. کدام یک از دنباله‌های زیر نمی‌تواند مسیر جست‌وجو برای عدد ۱۹۳ باشد. دلیل خود را ذکر کنید.

۱. ۱۹۳، ۲۰۰، ۱۵۰، ۲۵۰، ۱۰۰، ۳۰۰، ۴۵۴، ۵

۲. ۱۹۳، ۱۵۰، ۱۰۰، ۵۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، ۵۰۰

۳. ۱۹۳، ۱۹۰، ۱۴۳، ۲۰۱، ۲۳۱، ۲۳۷، ۱۵۷، ۴۳۷

۴. ۱۹۳، ۱۷۷، ۱۰۵، ۱۰۲، ۱۰۱، ۵۵، ۳۰، ۲۰، ۴

مسئله‌ی ۵.

فرض کنید یک درخت دودویی جست‌وجو با n گره داریم. به ازای گره v از این درخت وزن آن را تعداد گره‌ها در زیر درخت به ریشه v (شامل v) در نظر بگیرید. می‌دانیم در درخت فوق به ازای هر گره‌ی داخلی v نسبت وزن فرزند چپ و فرزند راست حداقل $\frac{1}{4}$ و حداکثر ۲ است. بهترین کران بالا برای زمان جست‌وجو در این درخت در بدترین را محاسبه کنید.

مسئله ۶.

یک درخت دودویی جست و جو متوازن با n گره داریم که به علت نويز، اعداد ذخیره شده در برخی از گره های آن تغییر کرده است. تنها عملی که می توان برای اصلاح این درخت انجام داد جابه جا کردن مقادیر ذخیره شده در یک گره و یکی از فرزندان آن است. در بدترین حالت با چند عمل فوق می توان درخت را به درخت دودویی جست و جو معتبر تبدیل کرد.

مسئله ۷.

درستی یا نادرستی جملات زیر در مورد درخت دودویی جست و جو (د.د.ج) را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱. اگر یک عنصر موجود در د.د.ج را حذف و بلافاصله درج کنیم، د.د.ج قبل و بعد از دو عمل فوق یکسان است.
۲. هر د.د.ج را می توان با چند عمل چرخش (rotation) به یک د.د.ج متوازن تبدیل کرد.
۳. عدد بلافاصله بعد از x در ترتیب صعودی، لزوما در زیردرخت به ریشه گره ای که x در آن ذخیره شده قرار نمی گیرد.

مسئله ۸.

درستی عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱. گره های هر درخت دودویی جست و جو را می توان با رنگ های قرمز و سیاه رنگ کرد طوری که درخت حاصل قرمز-سیاه شود.
۲. گره های هر درخت دودویی جست و جو با n عنصر و ارتفاع حداکثر $2 \log n$ را می توان با رنگ های قرمز و سیاه رنگ کرد طوری که درخت حاصل قرمز-سیاه شود.
۳. یک درخت دودویی جست و جوی کاملاً متوازن را می توان با رنگ های قرمز و سیاه رنگ کرد طوری که درخت حاصل قرمز-سیاه شود.

مسئله ۹.

در درخت بازه توضیح داده شده در کلاس، فرض کنید می خواهیم به ازای عدد داده شده x تمام بازه هایی که نقطه x را شامل می شوند گزارش دهیم. چه تغییرات در روال پاسخ دهی به پرسمان باید ایجاد کنیم. زمان پاسخگویی به پرسمان را بر حسب k و n مشخص کنید که k به ترتیب تعداد بازه های ذخیره شده در درخت بازه و تعداد بازه هایی که x را شامل می شوند می باشند.

مسئله ۱۰.

اعداد صحیح x_1, \dots, x_n را در یک درخت دودویی جست و جو با ارتفاع h ذخیره کرده ایم. فرض کنید هزینه جستجوی x_i (تعداد مقایسه های لازم در درخت برای پیدا کردن x_i) برابر c_i باش. می دانیم $\sum_{i=1}^n c_i = O(n \log n)$ است. برای درستی و یا نادرستی عبارات زیر دلیل بیاورید.

الف) آیا می توان مثالی زد که $h \in \Omega(n)$

ب) آیا همیشه $h \in O(\log n)$

ج) آیا می توان مثالی زد که $h \in \Omega(\sqrt{n})$

د) آیا همیشه $h \in O(\sqrt{n \log n})$

مسئله ۱۱.

یک درخت دودویی جستجو به ارتفاع h داریم. فرض کنید اعداد $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ در آن ذخیره شده‌اند. می‌خواهیم مقدار عدد x_k را به وسیله‌ی درخت پیدا کنیم. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(h + k)$ ارائه دهید که بتواند مقدار این عدد را به وسیله‌ی درخت پیدا کند. توجه داشته باشید که ما به ازای هر راس فقط به بچه‌ی سمت راست و چپ آن (در صورت وجود) دسترسی داریم و حق نگه‌داری پارامتر دیگری در درخت خود به ازای رئوس مختلف در روند اضافه کردن مقادیر به درخت نداریم.