



مسئله‌ی ۱. تعداد صفرها [۱۲ نمره]

فرض کنید $H : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ یک تابع درهم‌ساز یکنواخت باشد. برای ورودی x ، عدد z را برابر تعداد صفرهای سمت راست $H(x)$ قرار می‌دهیم. برای عدد $1 \leq c \leq n$ ، احتمال $z \geq c \log n$ از چه مرتبه‌ای است؟ فرض کنید c ثابت است.

مسئله‌ی ۲. رأس برش [۱۳ نمره]

در یک گراف غیرجهت‌دار G ، رأس x را رأس برش گویند اگر $G \setminus x$ ناهمبند باشد. با داشتن یک گراف بدون جهت با n رأس و m یال، چگونه می‌توان تمام رأس‌های برش را پیدا کرد؟ لازم است که الگوریتم شما در زمان $O(n + m)$ اجرا شود.

مسئله‌ی ۳. ساخت مجموعه [۲۰ نمره]

یک ساختمان داده برای یافتن اجتماع مجموعه‌ها را در نظر بگیرید، که از اجتماع‌گیری بوسیله عمق (یا معادل آن، اجتماع‌گیری با مرتبه)، بدون استفاده از فشرده‌سازی مسیر، استفاده می‌کند. به ازای تمامی اعداد صحیح m و n ، طوری که $m \geq 2n$ ، نشان دهید که یک دنباله از n عملیات MakeSet که به دنبالشان m عملیات Union و Find می‌آیند، وجود دارد، که زمان اجرای آن $\Omega(m \log n)$ خواهد بود.

مسئله‌ی ۴. جعبه در گراف [۲۰ نمره]

در یک گراف بدون جهت با نمایش به صورت لیست مجاورت، یک جعبه، دوری به طول ۴ است. الگوریتمی با زمان اجرای $O(V + E)$ طراحی کنید تا با دریافت یک گراف بدون جهت، تعیین کند که آیا این گراف شامل یک جعبه است یا خیر.

مسئله‌ی ۵. مسیر با کمترین تعداد یال [۲۰ نمره]

الگوریتم دایکسترا را به نحوی تغییر دهید که اگر بیش از یک مسیر با کمترین هزینه بین دو رأس وجود دارد، یکی از آن‌ها را که کمترین تعداد یال‌ها را دارد، بازگرداند.

مسئله‌ی ۶. هم‌اتاقی‌ها [۱۵ نمره]

دانشگاه شریف می‌خواهد $2n$ دانشجوی جدید را به n اتاق در خوابگاه اختصاص دهد. هر دانشجوی یک عدد صحیح مثبت به عنوان شناسه خواهد داشت. هیچ دو دانشجویی نمی‌توانند شناسه یکسانی داشته باشند، اما دانشجویان جدید مجازند پس از شروع ترم شناسه‌های خود را انتخاب کنند. دانشگاه قبل از شروع ترم (قبل از اینکه دانشجویان جدید شناسه‌هایشان را انتخاب کنند)، خانواده‌ای از توابع درهم‌سازی مانند H را به صورت آنلاین منتشر و سپس بعد از انتخاب شناسه‌ها توسط دانشجویان، یک تابع درهم‌سازی اتاق را به طور یکنواخت تصادفی از H انتخاب خواهد کرد. دو دانشجوی جدید دانشگاه، قلی و قنبر، می‌خواهند هم‌اتاقی باشند. به ازای خانواده توابع درهم‌سازی H ، نشان دهید که:

- قلی و قنبر می‌توانند شناسه‌های k_1 و k_2 را به گونه‌ای انتخاب کنند که تضمین شود آن‌ها هم‌اتاقی خواهند بود،
- یا ثابت کنید که چنین انتخابی ممکن نیست و بالاترین احتمالی که می‌توانند برای هم‌اتاقی بودن به دست آورند را محاسبه کنید.

به طوری که:

$$H = \{h_{ab}(k) = (ak + b) \bmod n \mid a, b \in \{0, \dots, n-1\} \text{ and } a \neq 0\}$$