



## مسئله ۱. میزبانی جام ملت‌های آسیا [۱۳ نمره]

قرار است میزبان جام ملت‌های آسیای دوره‌ی بعد بزودی مشخص شود. لیست نامزدها مشخص است و کنفدراسیون فوتبال آسیا (ای‌اف‌سی) بررسی‌های لازم خود را از کشورهای نامزد انجام داده است. با توجه به بررسی‌های انجام شده، در حال حاضر مشخص است اگر ای‌اف‌سی بخواهد بین دو کشور نامزد  $A$  و  $B$  یکی را انتخاب کند کدام کشور را انتخاب خواهد کرد. سیستم انتخاب میزبان توسط ای‌اف‌سی بدین شکل است. در هر مرحله از بین نامزدهای باقی‌مانده، دو نامزد را بطور کاملاً تصادفی انتخاب می‌کند و نامزدی که رای ای‌اف‌سی با او نیست را حذف می‌کند. با فرض آنکه نظر ای‌اف‌سی را در مورد هر دو کشور نامزد می‌دانیم، می‌خواهیم کشورهایی که شانس کسب میزبانی را دارند را پیدا کنیم. برای این کار یک گراف جهت‌دار  $n$  راسی می‌سازیم که  $n$  تعداد کشورهای نامزد است و هر راس متناظر با یک کشور نامزد است. برای هر دو راس  $A$  و  $B$  یک یال بین آن‌ها می‌گذاریم و جهت یال را به سمت کشوری می‌گذاریم که نظر ای‌اف‌سی با آن کشور است.

۱. نشان دهید کشور  $A$  شانس میزبانی دارد اگر و فقط اگر از همه‌ی رئوس به راس  $A$  مسیر وجود داشته باشد. (۶ نمره)

۲. الگوریتمی با زمان اجرای  $\Theta(n^2)$  ارائه دهید که تمام کشورهایی که شانس میزبانی را دارند را پیدا کند. دقت کنید که تعداد یال‌های گراف از  $\Theta(n^2)$  است. (۷ نمره)

## مسئله ۲. واریسی خطی [۱۲ نمره]

فرض کنید از آدرس‌دهی باز و واریسی خطی برای درهم‌سازی استفاده شده و تابع درهم‌سازی  $z^2$  به پیمانه ۷ است. بعد از دریافت همه اعداد  $\{0, \dots, 6\}$  می‌دانیم نحوه‌ی قرارگیری اعداد در جدول درهم‌ساز به صورت زیر است:

$$A[0, \dots, 6] = 0, 6, 4, 3, 1, 5, 2$$

به ازای چند جایگشت ورودی وضعیت جدول درهم‌ساز به شکل بالا خواهد بود.

## مسئله ۳. ظرفیت درهم‌سازی [۲۰ نمره]

$\mathcal{H}$  یک خانواده‌ی درهم‌ساز ۲-فراگیر است (2-Universal Hash Family) اگر برای هر دو عدد متمایز  $x_1$  و  $x_2$  داشته باشیم  $Pr[h(x_1) = h(x_2)] \leq \frac{1}{n}$  که  $h$  به صورت تصادفی یکنواخت از  $\mathcal{H}$  انتخاب می‌شود. حال فرض کنید  $\mathcal{H} = \{h_1, h_2\}$  که  $h_1, h_2 : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, m\}$  می‌باشند.

(آ) اگر  $m = 1$  باشد، حداکثر مقدار عدد  $n$  برای آنکه این خانواده ۲-فراگیر باشد چند است؟ (۱۲ نمره)

(ب) حداکثر مقدار عدد  $n$  بر حسب  $m$  برای آنکه این خانواده ۲-فراگیر باشد چند است؟ (۸ نمره)

#### مسئله ۴. مسیر صحیح [۲۰ نمره]

در این سوال قصد داریم مسئله کوتاهترین مسیر را برای گراف‌هایی که وزن یال‌هایشان صحیح است بررسی کنیم. به این صورت که وزن یال‌های گراف از مجموعه  $\{1, \dots, I\}$  انتخاب شده است.

- (آ) نشان دهید حداکثر فاصله‌ی میان دو رأس یا بی‌نهایت ( $\infty$ ) است و یا حداکثر  $I(n-1)$ . (۳ نمره)
- (ب) در صورت استفاده از الگوریتم دایکسترا، ثابت کنید فاصله‌ی رأس‌های اضافه شده به درخت کوتاهترین مسیر تا مبدأ در هر مرحله (Extract-Min خروجی) غیر نزولی است. (۵ نمره)
- (ج) الگوریتم دایکسترا را طوری تغییر دهید که کوتاهترین مسیر را در زمان  $O(IV + E)$  محاسبه کند. (۱۲ نمره)

#### مسئله ۵. مجزا بازی [۱۵ نمره]

- (آ) داده ساختار جنگل مجموعه‌های مجزا با استفاده از Union By Rank و Path Compression و عناصر اولیه‌ی  $\{1\}, \{2\}, \dots, \{10\}$  داده شده است. پس از انجام اعمال زیر وضعیت این داده ساختار را با رسم شکل نشان دهید (هنگام استفاده از Union By Rank در صورت تساوی عدد کوچکتر را ریشه قرار دهید). (۵ نمره)
- $\text{union}(1, 2), \text{union}(3, 4), \text{union}(5, 6), \text{union}(7, 8), \text{union}(1, 4),$   
 $\text{union}(6, 7), \text{union}(4, 5), \text{find}(1), \text{union}(9, 8), \text{union}(10, 3), \text{find}(3)$
- (ب) فرض کنید مجموعه‌های مجزا را به کمک Union By Rank و بدون Path Compression پیاده‌سازی کردیم. دنباله‌ای از  $m$  عمل  $\text{union}$  و  $\text{find}$  بر روی  $n$  عنصر ارائه دهید که زمان اجرای آن‌ها  $\Omega(m \log n)$  باشد. (۱۰ نمره)

#### مسئله ۶. تک درخت [۲۰ نمره]

- گراف هم‌بند و بدون جهت  $G = (V, E)$  و رأس  $v \in V$  از آن داده شده است. می‌دانیم BFS و DFS با شروع از رأس  $v$  وجود دارد که درخت‌های ریشه‌دار BFS و DFS یکسان شده است. درستی گزاره‌های زیر را رد یا اثبات کنید.
- (آ) حداکثر تعداد رئوس  $G$  برابر ۳ است. (۱۰ نمره)
- (ب)  $G$  یک درخت است. (۱۰ نمره)