دانشکده مهندسی کامپیوتر	آزمون پایان‌ترم **جبر خطی** سمیرا حسین قربان	تاریخ آزمون: ۲۵ دی ۱۴۰۰ مدت آزمون: ۱۵۰ دقیقه صفحهٔ ۱ از ۷

- همهٔ پاسخ‌هایتان را خوانا، با توضیح دقیق و کامل و مستدل بنویسید.
- پاسخ هر سؤال را در برگهٔ مستقل بنویسید.
- جمع نمره‌ها برابر ۱۳۰ است، و نمرهٔ ۱۰۰ نمرهٔ کامل محسوب می‌شود.

۱. فرض کنید $\mathbb{F}$ یکی از $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است، V فضایی خطی روی $\mathbb{F}$ است و T تابعی خطی روی V با چندجمله‌ای مشخصهٔ

$$f(x) = (x - ۳)(x^۲ - x + ۲).$$

(الف) نشان دهید V عضوی مانند v دارد که $f(x)$ چندجمله‌ای مینیمال v نسبت به T است. (۵ نمره)

(ب) به‌ازای $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، فرم ژردان T را بنویسید. (۵ نمره)

(ج) به‌ازای $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ فرم گویای T را بنویسید. (۵ نمره)

(الف) فرض کنید $p(x)$ چند جمله‌ای مینیمال T روی اعداد مختلط است. ثابت شد که مجموعه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $f(x)$ و چندجمله‌ای مینیمال $p(x)$ باهم برابرند؛ پس $p(x) = f(x)$. چون $f(x)$ چندجمله‌ای حقیقی است، $f(x)$ چندجمله‌ای مینیمالT روی اعداد حقیقی نیز هست. بنا به لمی (جلسه بیست و هفتم)، $v \in V$ وجود دارد که چندجمله مینیمال آن نسبت به T برابر با چندجمله‌ای مینیمال تبدیل خطی T یعنی $p(x) = f(x)$ است.

(ب) فرم ژردان T:

$$\begin{bmatrix} ۳ & & \\ & \frac{۱+i\sqrt{۷}}{۲} & \\ & & \frac{۱-i\sqrt{۷}}{۲} \end{bmatrix}$$

(ج) فرم گویای T:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

---

۲. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، و $J \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی است که همهٔ درایه‌هایش ۱ هستند.

(الف) همهٔ ویژه‌مقدارهای J را (با تکرر هرکدام) به‌دست بیاورید. (۵ نمره)

(ب) فرض کنید $B \in M_n(\mathbb{R})$. همهٔ ویژه‌مقدارهای BJ را (با تکرر هرکدام) به‌دست بیاورید. (۵ نمره)

(ج) فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ وارون‌پذیر است. با استفاده از حاصل‌ضرب ویژه‌مقدارهای $I + A^{-۱}J$، نشان دهید $\det(A+J) - \det(A)$ برابر است با حاصل‌جمع همهٔ همسازهای A. (۵ نمره)

(الف) فرض کنید j بردار با درایه‌های همه یک است. پس $Jj = nj$، چون $\operatorname{rank} N(J) = n - ۱$، ویژه‌مقدارهای ماتریس J صفر با تکرر $n - ۱$ و n با تکرر یک است.

(ب) صفر با حداقل $n - ۱$ تکرر، ویژه‌مقدار BJ است زیرا $N(J) \subseteq N(BJ)$.

حالت اول: $N(J) = N(BJ)$ آنگاه ویژه‌مقدار BJ صفر با تکرر n است.

حالت دوم: $N(J) \subsetneq N(BJ)$ آنگاه ماتریس BJ دقیقا یک ویژه‌مقدار ناصفر دارد که حقیقی است زیرا بنابه نکته‌ای در جلسه بیست و چهارم، اگر λ ویژه‌مقدار غیر حقیقی ماتریسی با درایه‌های حقیقی باشد آنگاه $\bar{\lambda}$ نیز ویژه‌مقدار است.

فرض کنید β_i مجموعه درایه‌های ستون i ام ماتریس $B = [b_{ij}]$ است. اگر

$$BJx = \begin{bmatrix} \beta_1 j^T \\ \vdots \\ \beta_n j^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i \\ \vdots \\ \beta_n \sum_{i=1}^n x_i \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

قرار دهید $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$. به وضوح $\dim W = n - 1$. پایه استاندارد $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ را نظر بگیرید. $N(J) = \text{span}\Big(\{e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n\}\Big)$ پس $N(J) = W$. بنابراین وجود دارد بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n \setminus W$ که $BJx = \big(\sum_{i,j} b_{ij}\big)x$. در نتیجه در این حالت ویژه‌مقدارهای ماتریس BJ صفر با تکرر $n-1$ و مجموع درایه‌های ماتریس B با تکرر یک است.

(ج) بنابه قضیه‌ای $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$. چون A وارون‌پذیر است، ویژه‌مقدارهای $I + A^{-1}J$ یک با تکرر $n-1$ و یک علاوه مجموع درایه‌های $\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$ یعنی $1 + \frac{1}{\det A}\sum_{i,j} c_{ij}$ با تکرر یک است. نشان دادیم که دترمینان هر ماتریس برابر با حاصلضرب ویژه‌مقدارهایش است و همچنین دترمینان حاصل‌ضرب دو ماتریس برابر باحاصل‌ضرب دترمینان آنهاست، پس

$$\begin{aligned} \det(A+J) - \det A &= \det A(I + A^{-1}J) - \det A \\ &= (\det A)(\det(I + A^{-1}J)) - \det A \\ &= (\det A)\Big((1 + \frac{1}{\det A}\sum_{i,j} c_{ij}) - 1\Big) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij}. \end{aligned}$$

---

۳. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، $n > 2$، و $A \in M_n(\mathbb{R})$. نشان دهید A تکین است اگر و تنها اگر $\operatorname{adj}\big(\operatorname{adj} A\big) = 0$. (۱۰ نمره)

ابتدا نشان می‌دهیم $\operatorname{rank} \operatorname{adj} A \in \{0, 1, n\}$.

- اگر $\operatorname{rank} A = n$ آنگاه $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$ و $\operatorname{rank} \operatorname{adj} A = n$.
- اگر $\operatorname{rank} A = n - 1$ آنگاه دقیقاً $n-1$ سطر مستقل دارد. فرض کنید سطر r ام وابسته است. بنابراین ستون r ام ماتریس $\operatorname{adj} A$ ناصفر و بقیه صفراند؛ پس $\operatorname{rank} \operatorname{adj} A = 1$.
- اگر $\operatorname{rank} \operatorname{adj} A < n - 1$ آنگاه $\operatorname{rank} A(i|j) < n-1$ به ازای هر $1 \le i, j < n$؛ پس $\operatorname{adj} A = 0$.

بنابراین، A تکین است اگر و تنها اگر $\operatorname{rank} \operatorname{adj} A \in \{0, 1\}$. در نتیجه، به ازای $n > 2$، A تکین است اگر و تنها اگر $\operatorname{adj}\big(\operatorname{adj} A\big) = 0$.

به نام خدا

تاریخ آزمون: ۲۵ دی ۱۴۰۰

مدت آزمون: ۱۵۰ دقیقه

آزمون پایان‌ترم

جبر خطی

سمیرا حسین قربان

دانشکده مهندسی کامپیوتر

۴. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، V فضای خطی حقیقی nبعدی است و T تبدیلی خطی روی V که ماتریس نمایش آن در پایهٔ مرتب $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

(الف) $v \in V$ را طوری پیدا کنید که $V = Z(v, T - \lambda I)$. (۵ نمره)

(ب) فرض کنید W زیرفضای V است و تحت T ناورداست. نشان دهید اگر $v_1 \in W$ آنگاه $W = V$. (۵ نمره)

(ج) فرض کنید W زیرفضای سرهٔ V است و تحت T ناورداست. نشان دهید $v_n \in W$. (۵ نمره)

(د) نشان دهید که نمی‌توان V را به‌صورت جمع مستقیم دو زیرفضای سره که تحت T ناوردا هستند نوشت. (۵ نمره)

(ه) همهٔ زیرفضاهایی از V را پیدا کنید که تحت T ناوردا هستند. (۵ نمره)

یادآوری: می‌گوییم زیرفضای $W \subseteq V$ تحت T ناورداست اگر $T(W) \subseteq W$.

الف. $V = Z(v_1, T - \lambda I)$.

ب. چون $v_1 \in W$ و $T(W) \subseteq W$، باید $Tv_1 - \lambda v_1 = v_2 \in W$. به استقرا، فرض کنید $v_k \in W$؛ آنگاه $Tv_k - \lambda v_k = v_{k+1} \in W$. پس $v_i \in W$ به‌ازای هر $2 \leq i \leq n$ و در نتیجه $W = V$.

ج. فرض کنید $W \neq 0$ و $0 \neq v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \in W$. پس فرض کنید که i کوچکترین اندیسی است که $a_i \neq 0$. اگر $i = n$ آنگاه حکم بدیهی است. فرض کنید $i < n$. چون W تحت T ناورداست، پس تحت $(T - \lambda I)^{n-i}$ ناورداست و در نتیجه

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)^{n-i} v &= (T - \lambda I)^{n-i} (c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) \\ &= a_i v_n \in W. \end{aligned}$$

د. فرض خلف: فرض کنید W_1 و W_2 دو زیرفضای سره از V هستند که $V = W_1 \oplus W_2$. در نتیجه $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. از طرفی بنا به قسمت (ج)، $v_n \in W_1 \cap W_2$؛ پس $v_n = 0$ که تناقض است.

ه. بنا به قسمت (ج) و (ب) تنها زیر فضاهای ناوردا عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} &W_n = \operatorname{span}\Big(\{v_n\}\Big) \\ &W_{n-1} = \operatorname{span}\Big(\{v_n, v_{n-1}\}\Big) \\ &\vdots \\ &W_1 = \operatorname{span}\Big(\{v_1, \dots, v_n\}\Big) = V \\ &W_0 = \{0\} \end{aligned}$$

۵. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، V فضای خطی حقیقی nبعدی است، و T و S تابع‌هایی خطی روی V هستند که چندجمله‌ای‌های مشخصه‌شان به حاصل‌ضربی از چندجمله‌ای‌های درجه یک تجزیه می‌شود، و $T \circ S = S \circ T$.

(الف) نشان دهید $\mathrm{Im}(T)$ و $\mathrm{N}(T)$ تحت S ناوردا هستند. (۵ نمره)

(ب) فرض کنید λ ویژه‌مقدار T است. نشان دهید

$$W_\lambda = \{x \in V \mid Tx = \lambda x\}$$

تحت S ناورداست. (۵ نمره)

(ج) نشان دهید T و S حداقل یک ویژه‌بردار مشترک دارند. (۵ نمره)

(د) نشان دهید V پایه‌ای دارد که هم ماتریس نمایش T و هم ماتریس نمایش S در آن بالامثلثی هستند. (۱۰ نمره)

(الف) فرض کنید $Tx \in Im(T)$. بنا به فرض، $S(Tx) = T(Sx)$. پس $S(Tx) \in Im(T)$ و $Im(T)$ تحت S ناوردا است.
اگر $x \in N(T)$ بنا به فرض، $S(Tx) = T(Sx) = ۰$. پس $Sx \in N(T)$ و $N(T)$ تحت S ناوردا است.

(ب) فرض کنید $x \in W_\lambda$. آنگاه بنا به فرض، $T(Sx) = S(Tx) = \lambda S(x)$، پس $S(x) \in W_\lambda$.

(ج) بنا به قسمت (ب)، W_λ تحت S ناورداست؛ پس تحدید S روی W_λ تابعی خطی از W_λ به W_λ است. تابع تحدید S روی W_λ حداقل یک ویژه‌بردار در W_λ دارد که حکم را ثابت می‌کند.

(د) با استقرار روی n حکم را ثابت می‌کنیم. بنابه قسمت قبل، فرض کنید $v \in V$ ویژه‌بردار مشترک T و S است. بردار ناصفر v را به پایه $B = \{v, v_۲, \dots, v_n\}$ برای V گسترش می‌دهیم. قرار دهید

$$W = \operatorname{span}(\{v_۲, \dots, v_n\}).$$

فرض کنید T' و S' به‌ترتیب تحدید توابع T و S به W هستند. به وضوح $T' \circ S' = S' \circ T'$. درنتیجه بنا به فرض استقرا پایه‌ای مانند B' برای W وجود دارد که T' و S' در آن پایه بالامثلثی هستند. قرار دهید $B = \{v\} \cup B'$. به‌وضوح T و S در B بالامثلثی هستند.

---

۶. فرض کنید V فضای خطی حقیقی متناهی‌بعد است و T تابعی خطی روی V که چندجمله‌ای مینیمالش روی اعداد حقیقی به حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌های درجه یک تجزیه می‌شود.

(الف) نشان دهید تبدیل خطی قطری‌شدنی D و تبدیل خطی پوچ‌توان N روی V وجود دارند که $T = D + N$ و $DN = ND$. (۵ نمره)

(ب) نشان دهید تبدیل‌های خطی قطری‌شدنی و پوچ‌توان با خاصیت‌های (الف) یکتا هستند. (۵ نمره)

(ج) نشان دهید T قطری‌شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال آن ریشهٔ تکراری نداشته باشد. (۵ نمره)

(د) نشان دهید اگر $\operatorname{rank} T = ۱$ آنگاه T یا قطری‌شدنی است یا پوچ‌توان (و نه هردو). (۵ نمره)

(الف) فرض کنید $p(x) = (x - \lambda_۱)^{n_۱} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$ چندجمله‌ای مینیمال T است که λ_i ها حقیقی و متمایزند. بنابر فرم ژردان منتج شده از قضیه تجزیه دوری، پایه‌ای مانند B برای فضای خطی V وجود دارد که

$$[T]_B = \begin{bmatrix} J_۱ & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix}$$

که در آن

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & & & & \\ ۱ & \lambda_k & & & \\ & ۱ & \lambda_k & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & ۱ & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

قرار دهید

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & & & & \\ & \lambda_k & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

فرض کنید تکرر ویژه‌مقدار λ_k برابر با d_k است؛ پس $N_k^{d_k} = 0$. فرض کنید N و D تبدیل‌هایی خطی هستند که ماتریس نمایش آنها در پایه B به ترتیب

$$\begin{bmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_k \end{bmatrix},$$

و

$$\begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_k \end{bmatrix}$$

هستند. قرار دهید $k = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq k\}$، آنگاه $N^k = 0$ و همچنین $T = D + N$ و $DN = ND$.

(ب) فرض کنید تبدیل خطی قطری‌شدنی D' و تبدیل خطی پوچ‌توان N' روی V وجود دارند که $T = D' + N'$ و $D'N' = N'D'$. در این صورت

$$D' - D = N' - N.$$

چون $N' - N$ پوچ‌توان است، ماتریس قطری $D' - D$ پوچ‌توان است. ماتریس قطری پوچ‌توان است اگر و تنها اگر ماتریس صفر باشد؛ پس $D' - D = 0$. و بنابراین $N' - N = 0$.

(ج) اگر T قطری‌شدنی باشد، آنگاه پایه‌ای مانند B وجود دارد که

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{d_k} \end{bmatrix}$$

که در آن λ_i ها متمایزند. در این صورت چند جمله مینیمال آن $p(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ است.
برعکس، فرض کنید $p(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$. در قضیه تجزیه اولیه، $W_i = N(T - \lambda_i I)$ اگر چندجمله‌ای مشخصه $f(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_k)^{d_k}$ باشد. بنابراین $\dim W_i = d_i$ و اگر B_i پایه ای برای W_i باشد آنگاه

$$[T]_{\cup_{i=1}^k B_i} = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{d_k} \end{bmatrix}.$$

(د) چون $\operatorname{rank} N(T) = n - 1$ پس T حداقل $n - 1$ ویژه‌مقدار صفر دارد. پس چندجمله‌ای مشخصه آن $f(x) = x^n$ است که در این صورت T پوچ‌توان است و مسئله حل است و یا $f(x) = (x - \lambda)x^{n-1}$ که $\lambda \neq 0$. توجه کنید که ویژه‌مقدار غیر صفر آن حقیقی است؛ بنابراین بنا به قضیه تجزیه اولیه، پایه‌ای وجود دارد که

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

---

۷. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $A \in M_n(\mathbb{R})$، و فرض کنید σ_1 بزرگ‌ترین مقدار تکین A است.

(الف) نشان دهید بیشترین مقدار $\|Ax\|$ روی بردارهای یکهٔ $\mathbb{R}^n$ برابر است با σ_1. (۵ نمره)

(ب) فرض کنید λ ویژه‌مقدار A است. نشان دهید $|\lambda| \leq \sigma_1$. (۵ نمره)

(الف) بنابه قضیه SVD می‌توانیم بنویسیم

$$A = U\Sigma V^T$$

که ماتریس‌های U و V یکانی هستند و Σ ماتریسی قطری است که r درایه قطری اول آن ناصفر و برابر با مقدارهای تکین A هستند. پس

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

که در آن u_i و v_i به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ستون‌های ماتریس U و V هستند. چون ستون‌های ماتریس V پایه متعامد برای فضای $\mathbb{R}^n$ هستند،

$$x = \langle v_1, x\rangle v_1 + \cdots + \langle v_n, x\rangle v_n;$$

پس

$$\|x\| = \langle v_1, x\rangle^2 + \cdots + \langle v_n, x\rangle^2,$$

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ax\rangle &= \sigma_1^2\langle v_1, x\rangle^2 + \cdots + \sigma_r^2\langle v_r, x\rangle^2\\ &\leq \sigma_1^2\Big(\langle v_1, x\rangle^2 + \cdots + \langle v_r, x\rangle^2\Big)\\ &\leq \sigma_1\|x\| = \sigma_1\end{aligned}$$

(ب) فرض کنید v ویژه‌بردار متناظر λ است. پس $Av = \lambda v$ و در نتیجه

$$\|Av\|^2 = |\lambda|^2\|v\|^2 = |\lambda|^2 \leq \sigma_1.$$

---

۸. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، $B \in M_n(\mathbb{R})$ متقارن است و

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B & I \end{bmatrix}.$$

نشان دهید A مثبت‌معین است اگر و تنها اگر هردوی $I + B$ و $I - B$ مثبت معین باشند. (۱۰ نمره)

چون

$$xI - A = \begin{bmatrix} (x-1)I & B \\ B & (x-1)I \end{bmatrix}$$

و $(1-x)IB = B(1-x)I$،

$$\begin{aligned}\det(xI-A) &= \det\Big((x-۱)^{۲}I-B^{۲}\Big)\\ &= \det\Big(((x-۱)I-B)((x-۱)I+B)\Big)\\ &= \det(xI-(I+B))\det(xI-(I-B));\end{aligned}$$

بنابراین

$$f_A(x)=f_{I+B}(x)f_{I-B}(x).$$

در نتیجه مجموعهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه A اجتماع مجموعه‌های ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $I-B$ و $I+B$ است. اگر $I-B$ و $I+B$ مثبت معین باشند، آنگاه ویژه‌مقدارهای آنها مثبت هستند؛ پس ویژه‌مقدارهای A مثبت و در نتیجه ماتریس A مثبت معین است. اگر A مثبت معین باشد، آنگاه همه ویژه‌مقدارهای $I-B$ و $I+B$ نیز مثبت هستند و بنابراین ماتریس‌های مثبت معین هستند.

موفق باشید.