

سؤال ۱. فرض کنید m و n عددهایی طبیعی هستند و $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. نشان دهید

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(AA^T) = \text{rank}(A^T A).$$

سؤال ۲. فرض کنید n عددی طبیعی است و A ماتریسی $n \times n$ است که $A^2 = A$. نشان دهید

$$\text{rank}(A - I) + \text{rank}(A) = n.$$

سؤال ۳. فرض کنید m و p و q عددهایی طبیعی هستند و ماتریس‌های A و B به ترتیب $m \times p$ و $m \times q$ هستند. نشان دهید گزاره‌های زیر دوه‌دو معادل هستند.

الف) $C(A) \subseteq C(B)$ ؛

ب) هر ستون A ترکیبی خطی از ستون‌های B است؛

ج) ماتریسی $q \times p$ مانند C وجود دارد که $A = BC$.

موفق باشید.