

سوال ۱. فرض کنید a_1, \dots, a_n و b_1, \dots, b_n عددهایی حقیقی هستند، و $a_1 \cdots a_n = 1$. نشان دهید

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}.$$

سوال ۲. فرض کنید دنباله عددهای حقیقی a_1, a_2, \dots تصاعدی حسابی با قدر نسبت d تشکیل می دهد. نشان دهید

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} (-nd)^n (a_1 + a_n).$$

سوال ۳. فرض کنید n عددی طبیعی است و $A \in M_n(\mathbb{R})$.

الف) نشان دهید مجموعه اعضای تکین مجموعه

$$\{xI + A \mid x \in \mathbb{R}\}$$

متناهی است.

ب) فرض کنید A ناتکین است، c_{ij} همساز ij ام A است و J ماتریسی n در n است که همه درایه هایش ۱ هستند. نشان دهید

$$\det(A + J) = \det(A) + \sum_{i,j} c_{ij}.$$

ج) آیا فرض ناتکین بودن A در قسمت (ب) لازم است؟

موفق باشید.