

سوال ۱. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $A \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی متقارن است.

الف) نشان دهید به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ که $\|x\| = 1$ ،

$$\lambda_{\min}(A) \leq x^t A x \leq \lambda_{\max}(A)$$

که در آن $\lambda_{\min}(A)$ و $\lambda_{\max}(A)$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین ویژه‌مقدار A هستند.

ب) فرض کنید $B \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی متقارن است. نشان دهید

$$\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_{\max}(A + B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B)$$

ج) فرض کنید H و K و L ماتریس‌هایی هستند که

$$A = \begin{bmatrix} H & K \\ K^t & L \end{bmatrix}.$$

نشان دهید

$$\lambda_{\min}(A) \leq \lambda_{\min}(H), \quad \lambda_{\max}(H) \leq \lambda_{\max}(A).$$

سوال ۲. فرض کنید $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ ، $m, n \in \mathbb{N}$ نرم فروبنیوس A را با

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید $\|A\|_F^2$ برابر است با حاصل‌جمع مربعات مقادیر تکی A .

ب) فرض کنید $B \in M_m(\mathbb{R})$ و $C \in M_n(\mathbb{R})$ و $B^T B = I_m$ و $C^T C = I_n$. نشان دهید نرم فروبنیوس تحت ضرب این ماتریس‌ها ناورداست؛ یعنی

$$\|BA\|_F = \|AC\|_F = \|A\|_F.$$

سوال ۳.

الف) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و S و T را تبدیل‌های خطی قطری‌شدنی روی فضای خطی n بعدی V بگیرید که $ST = TS$. نشان دهید V پایه‌ای دارد که نمایش هر دوی S و T در آن قطری است.

ب) فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ، $n \in \mathbb{N}$ را ماتریس‌های متقارنی بگیرید که AB هم متقارن است. نشان دهید هر ویژه‌مقدار AB را می‌توان به صورت $\lambda\mu$ نوشت که λ و μ به ترتیب ویژه‌مقداری برای A و B هستند.