۱. دستگاه

$$\begin{cases} (k+1)x + 2ky - z = 1 \\ x - 2y + kz = -k \\ y + z = k \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) دستگاه به‌ازای کدام مقدارهای حقیقی k جواب یکتا دارد؟ (۷ نمره)

(ب) دستگاه به‌ازای کدام مقدارهای حقیقی k ناسازگار است؟ (۳ نمره)

(ج) به‌ازای $k=-2$ پایه‌ای برای فضای ستونی ماتریس ضرایب (که آن را با A نشان می‌دهیم) پیدا کنید و رتبهٔ A^{2} را در این حالت تعیین کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ.

صورت ماتریسی دستگاه به فرم $Ax=b$ است که در آن

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ k+1 & 2k & -1 \end{bmatrix}, \qquad x=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} -k \\ k \\ 1 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از حذف گاوسی:

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ k+1 & 2k & -1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_3 \leftarrow R_3-(k+1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 4k+2 & -k^2-k-1 & k^2+k+1 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{R_3 \leftarrow R_3-(4k+2)R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & -k^2-5k-3 & -3k^2-k+1 \end{bmatrix}$$

(الف) دستگاه جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر A وارون پذیر باشد، ماتریس A وارون پذیر است اگر و تنها اگر در حذف گاوسی، محورها ناصفر باشند. در نتیجه دستگاه به ازای اعداد حقیقی k که $k^2+5k+3 \neq 0$ جواب یکتا دارد، یعنی $k \neq \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

(ب) چون

$$\left\{k \in \mathbb{R} \mid 3k^2+k+1=0\right\} \cap \left\{k \in \mathbb{R} \mid k^2+5k+3=0\right\}=\varnothing$$

در نتیجه به ازای اعداد حقیقی

$$\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$$

دستگاه ناسازگار است.

(ج) به ازای $k=-2$ ماتریس ضرایب برابر است با

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

بنا به قسمت (الف)، ماتریس A وارون پذیر است؛ پس ستونهای A پایه‌ای برای فضای ستونی آن، $C(A)$، تشکیل می‌دهند.
چون بعد فضای سطری و ستونی A با هم برابراند،

$$\dim C(A)=\dim C(A^T)=\operatorname{rank}(A^{2})=3.$$

---

۲. فرض کنید $V = P_{۲}(x)$. پایه‌های مرتب $B = \{۱, x, x^{۲}\}$ و $B' = \{۱, x, x^{۲} - \frac{۱}{۳}\}$ را برای V و نیز تبدیل خطی $T : V \longrightarrow V$ را با ضابطهٔ

$$T\big(f(x)\big) = f(x) + \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}f(x)$$

در نظر بگیرید.

(الف) ماتریس نمایش T در پایهٔ B (یعنی $[T]_B$) را به‌دست بیاورید. (۵ نمره)

(ب) ماتریس نمایش T در پایهٔ B' (یعنی $[T]_{B'}$) را به‌دست بیاورید. (۵ نمره)

(ج) ماتریس وارون‌پذیر P را طوری پیدا کنید که $[T]_B P = P[T]_{B'}$. (۷ نمره)

پاسخ.

(الف)

$$[T]_B = \big[[T(۱)]_B \quad [T(x)]_B \quad [T(x^{۲})]_B\big]$$

بنابراین

$$T(۱) = ۱ + \frac{d}{dx}۱ + \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}۱ = ۱ \times ۱ + ۰ \times x + ۰ \times x^{۲} \Rightarrow [T(۱)]_B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$T(x) = x + \frac{d}{dx}x + \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}x = ۱ \times ۱ + ۱ \times x + ۰ \times x^{۲} \Rightarrow [T(x)]_B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$T(x^{۲}) = x^{۲} + \frac{d}{dx}x^{۲} + \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}x^{۲} = ۲ \times ۱ + ۲ \times x + ۱ \times x^{۲} \Rightarrow [T(x^{۲})]_B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$[T]_B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(ب)

$$[T]_{B'} = \big[[T(۱)]_{B'} \quad [T(x)]_{B'} \quad [T\big((x^{۲} - \tfrac{۱}{۳})\big)]_{B'}\big]$$

بنابراین

$$T(۱) = ۱ + \frac{d}{dx}۱ + \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}۱ = ۱ \times ۱ + ۰ \times x + ۰ \times (x^{۲} - \frac{۱}{۳}) \Rightarrow [T(۱)]_{B'} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$T(x) = x + \frac{d}{dx}x + \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}x = ۱ \times ۱ + ۱ \times x + ۰ \times (x^{۲} - \frac{۱}{۳}) \Rightarrow [T(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$T\big((x^{۲} - \frac{۱}{۳})\big) = (x^{۲} - \frac{۱}{۳}) + \frac{d}{dx}(x^{۲} - \frac{۱}{۳}) + \frac{d^{۲}}{dx^{۲}}(x^{۲} - \frac{۱}{۳}) = ۲ \times ۱ + ۲ \times x + ۱ \times (x^{۲} - \frac{۱}{۳}) \Rightarrow [T(x^{۲} - \frac{۱}{۳})]_{B'} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(ج) رابطه ماتریس نمایش T برای هر دو پایه مرتب $B = \{v_۱, \dots, v_n\}$ و $B' = \{v'_۱, \dots, v'_n\}$ به صورت

$$[T]_{B'} = P[T]_{B'}P^{-۱}$$

است که در آن ستون j ام مختصات بردار v'_j در پایه B است. بنابراین نسبت به پایه‌های مرتب داده شده، $P = I$.

---

۳. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}.$$

(الف) پایه‌ای متعامد و یکه برای $C(A)$ بیابید. (۵ نمره)

(ب) ماتریس Q را با ستون‌های متعامد و ماتریس بالامثلثی R را طوری تعیین کنید که $A = QR$. (۵ نمره)

(ج) تصویر متعامد بردار $y = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را روی $C(A)$ بیابید. (۵ نمره)

پاسخ.

(الف) بنا به فرایند گرام اشمیت، اگر $B = \{v_۱, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای فضای خطی V باشد، آنگاه پایه ای از بردارهای متعامد یکه $B' = \{q_۱, \dots, q_n\}$ وجود دارد که در آن

$$q_۱ = \frac{v_۱}{\|v_۱\|}$$

و به ازای هر $۲ \le i \le n$،

$$\begin{aligned} Q_i &= v_i - \langle v_i, q_۱\rangle q_۱ - \cdots - \langle v_i, q_n\rangle q_n, \\ q_i &= \frac{Q_i}{\|Q_i\|}. \end{aligned}$$

چون سه سطر اول A مستقل هستند و رتبه فضای سطری و فضای ستونی برابرند،

$$\operatorname{rank}(A) = ۳.$$

در نتیجه ستون‌های ماتریس A پایه ای برای فضای ستونی، $C(A)$، است. ستون‌های A را به ترتیب با $v_۱$ ، $v_۲$ و $v_۳$ نمایش دهیم.

بنابراین

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = v_2 - \langle v_2, q_1 \rangle q_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{Q_2}{\|Q_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = v_3 - \langle v_3, q_1 \rangle q_1 - \langle v_3, q_2 \rangle q_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \frac{Q_3}{\|Q_3\|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$B' = \{q_1, q_2, q_3\}$ یک پایه متعامد و یکه برای $C(A)$ است.

(ب) $A = QR$ که در آن

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

و

$$R = \begin{bmatrix} \langle v_1, q_1 \rangle & \langle v_2, q_1 \rangle & \langle v_3, q_1 \rangle \\ 0 & \langle v_2, q_2 \rangle & \langle v_3, q_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle v_3, q_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \frac{4}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ج) چون $y = v_1 - v_2$ تصویر متعامد آن روی $C(A)$ خودش است. توجه کنید که در حالت کلی، تصویر متعامد برداری مانند y روی $C(A)$ برابر است با

$$\langle y, q_1 \rangle q_1 + \langle y, q_2 \rangle q_2 + \langle y, q_3 \rangle q_3.$$

---

۴. (الف) فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$. نشان دهید اگر $x = 0$ تنها جواب دستگاه $Ax = 0$ باشد، آنگاه ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری‌پلکانی A ماتریس همانی است. (۱۰ نمره)

(ب) نشان دهید اگر R و R' ماتریس‌های تحویل‌شدهٔ سطری‌پلکانی باشند و مجموعهٔ جواب‌های دستگاه‌های $Rx = 0$ و $R'x = 0$ یکسان باشند، آنگاه $R' = R$. (۱۰ نمره)

پاسخ.

(الف) فرض کنید R ماتریس تحویل شده سطری پلکانی A چون A وارون‌پذیر است، R باید n محور داشته باشد و چون تحویل شده سطری پلکانی است باید $R = I$.

(ب) بنا به فرض $N(R) = N(R')$، بنابراین طبق قضیه رتبه

$$\dim C(R) = \dim C(R') = r$$

در نتیجه تعداد ستونهای R و R' که حاوی محور هستند با هم برابر و برابر با r است. فرض کنید این ستون‌ها در R بااندیس‌های

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_r$$

و در R' با اندیس‌های

$$k'_1 < k'_2 < \cdots < k'_r$$

مشخص شده‌اند. پایه ای برای فضای پوچ ماتریس‌ها در نظر می‌گیریم و آن را به یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ گسترش می‌دهیم (توجه کنید که فرض شده است $R, R' \in M_{mn}(\mathbb{R})$). فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ است که در آن $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای فضای پوچ است. به وضوح $\{Rv_1, \ldots, Rv_r\}$ پایه‌ای برای $C(R)$ است. به طریق مشابه، $\{R'v_1, \ldots, R'v_r\}$ پایه‌ای برای $C(R')$ است.

به ازای هر $1 \leq i \leq r$ قراردهید $w_i = Rv_i$ و $w'_i = R'v_i$. هرکدام از پایه‌های $\{w_1, \ldots, w_r\}$ و $\{w'_1, \ldots, w'_r\}$ را به پایه ای برای $\mathbb{R}^m$ گسترش می‌دهیم. پایه‌های گسترش یافته را

$$B_1 = \{w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_n\}$$

و

$$B_2 = \{w'_1, \ldots, w'_r, w'_{r+1}, \ldots, w'_n\}$$

در نظر می‌گیریم. تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ با ضابطه $T(w_i) = w'_i$ وارون‌پذیر است؛ زیرا اگر $T(v) = 0$ آنگاه

$$T(v) = T\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i w_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} c_i T(w_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i w'_i = 0$$

چون B_2 پایه است، پس

$$c_1 = \cdots = c_m = 0.$$

قراردهید $P = [T]_{B_1, B_2}$. ماتریس P وارون‌پذیر است و

$$R' = PR.$$

فرض کنید ماتریس‌های S و S' به ترتیب از r سطر اول R و R' تشکیل شده‌اند، و Q زیرماتریس r در r بالا چپ از P است؛ پس $S' = QS$. فرض کنید $S = \begin{bmatrix} S_1 & \cdots & S_n \end{bmatrix}$ و $S' = \begin{bmatrix} S'_1 & \cdots & S'_n \end{bmatrix}$ ؛ پس به ازای هر $1 \leq i \leq n$ باید $S'_i = QS_i$. S_{k_1} اولین ستون ناصفر S است؛ پس S'_{k_1} اولین ستون ناصفر S' است و $k_1 = k'_1$. چون هر دوی S و S' تحویل یافته سطری پلکانی هستند، پس $S'_{k_1} = S_{k_1} = e_1$. به ازای هر j که $k_1 < j < k_2$ ، S_j مضربی از S_{k_1} است، فرض کنید

$$S_j = \alpha_j S_{k_1} = \alpha_j e_1$$

و در نتیجه

$$S'_j = QS_j = \alpha_j QS_{k_1} = \alpha_j S'_{k_1} = \alpha_j e_1 = S_j.$$

چون رتبه S برابر r است، باید $S_{k_2} = e_2$. چون S_{k_2} مضرب S_{k_1} نیست، S'_{k_2} هم مضرب S'_{k_1} نیست و در نتیجه باید e_2 باشد. به همین ترتیب، معلوم می‌شود که $S'_{k_i} = S_{k_i} = e_i$ پس $Qe_i = e_i$ و در نتیجه $Q = I_r$ که یعنی $S' = S$ و در نتیجه $R' = R$.

۵. فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(الف) نشان دهید $C(A) \cap C(B) = \{0\}$ اگر و فقط اگر $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. (۰ نمره)

(ب) نشان دهید اگر $B^{\intercal}A = 0$ آنگاه $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. (۰ نمره)

پاسخ. مثال نقض: قرار دهید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابرین

$$C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

بنابراین $C(A) \cap C(B) = \{0\}$. در حالیکه

$$\operatorname{rank}(A+B) = 2$$
$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) = 4$$

از طرفی $B^{\intercal}A = 0$ ولی

$$\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

توجه کنید که از هر کدام از

$$\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

و

$$B^{\intercal}A = 0$$

نتیجه می‌شود

$$C(A) \cap C(B) = \{0\}.$$

۶. فرض کنید V فضای ضرب داخلی است. بردارهای ناصفر و متعامد $v_۱$، …، v_n را در V در نظر بگیرید، و فرض کنید

$$W = \mathrm{span}(\{v_۱, \dots, v_n\}).$$

(الف) فرض کنید $b \in V$، و تصویر متعامد b روی W را بیابید. (۸ نمره)

(ب) نشان دهید که

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{\langle b, v_k\rangle^۲}{\|v_k\|^۲} \le \|b\|^۲.$$

(۱۰ نمره)

(ج) نشان دهید که $W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = ۰$ به‌ازای هر w در $W\}$، زیرفضای V است. (۵ نمره)

(د) فرض کنید بعد V متناهی است، و پایه‌ای برای $W^{\perp}$ معرفی کنید. (۵ نمره)

پاسخ.

(الف) چون $\{v_۱, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای W است، تصویر متعامد b روی W برابر با

$$\langle b, q_۱\rangle q_۱ - \dots - \langle b, q_n\rangle q_n$$

است که $q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

(ب) قرار دهید

$$w = \sum_{k=۱}^{n} \frac{\langle b, v_k\rangle}{\|v_k\|^۲} v_k$$

دراین صورت $b - w$ تصویر متعامد b روی W است؛ پس $b - w$ بر W عمود است و در نتیجه

$$\|b\|^۲ = \|w\|^۲ + \|b - w\|^۲.$$

در نتیجه

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{\langle b, v_k\rangle^۲}{\|v_k\|^۲} = \|w\|^۲ \le \|b\|^۲$$

(ج) $W^{\perp} \neq \varnothing$ زیرا $۰ \in W^{\perp}$. فرض کنید $w_۱$ و $w_۲$ دو بردار در $W^{\perp}$ هستند و $c \in \mathbb{R}$. بنابراین به ازای هر بردار $w \in W$ ، $\langle w, w_i\rangle = ۰$ به ازای $i = ۱, ۲$. بنابراین

$$\langle w_۱ + cw_۲, w\rangle = \langle w_۱, w\rangle + c\langle w_۲, w\rangle = ۰$$

در نتیجه $w_۱ + cw_۲ \in W^{\perp}$ که یعنی $W^{\perp}$ زیر فضاست.

(د) فرض کنید $\dim V = m$. چون $V = W \oplus W^{\perp}$ و مجموعه $\{v_۱, \dots, v_n\}$ پایه متعامد برای W است، با استفاده از فرآیند گرام اشمیت پایه‌ای متعامد برای $W^{\perp}$ می سازیم.

اگر $n = m$، آنگاه $W^{\perp} = \{۰\}$ پس فرض کنید $n < m$ و بردار $w_۱ \in V \setminus \mathrm{span}(\{v_۱, \dots, v_n\})$ را در نظر بگیرید. قرار دهید

$$v_{n+۱} = w_۱ - \sum_{k=۱}^{n} \frac{\langle w_۱, v_k\rangle^۲}{\|v_k\|^۲} v_k$$

بنابراین $v_{n+۱} \in W^{\perp}$. اگر $m = n + ۱$ که $\{v_{n+۱}\}$ پایه‌ای برای $W^{\perp}$ است وگرنه فرایند فوق را تا $m - n$ مرحله ادامه می دهیم؛ یعنی بردار $w_۲ \in V \setminus \mathrm{span}(\{v_۱, \dots, v_n, v_{n+۱}\})$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$v_{n+۲} = w_۲ - \sum_{k=۱}^{n+۱} \frac{\langle w_۱, v_k\rangle^۲}{\|v_k\|^۲} v_k$$

بنابراین $v_{n+۲} \in W^{\perp}$. اگر $m = n + ۲$ ، $\{v_{n+۱}, v_{n+۲}\}$ پایه‌ای برای $W^{\perp}$ است و در غیر این صورت فرایند ادامه پیدا می کند.

---

۷. ثابت کنید نمی‌توان $\mathbb{R}^n$ را به‌صورت اجتماع تعدادی متناهی از زیرفضاهای سره‌اش نوشت.

پاسخ. به ازای هر n عدد حقیقی متمایز x_1 ، … ، x_n ماتریس

$$\begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

که به ماتریس وندرموند معروف است وارون‌پذیر است زیرا فرض کنید

$$c_1 \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_1^1 \\ \vdots \\ x_1^{n-1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_2^0 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_2^{n-1} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} x_n^0 \\ x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^{n-1} \end{bmatrix} = 0 \tag{1}$$

قرار دهید

$$p(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{n-1}$$

بنابه معادله (۱) همه n عدد حقیقی x_1 ، … ، x_n ریشه‌های چند جمله‌ای $p(x)$ با درجه $n-1$ هستند؛ پس $p(x) \equiv 0$ و در نتیجه

$$c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

قراردهید

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

بنابراین ثابت کردیم که هر n بردار از مجموعه نامتناهی S مستقل خطی اند.

فرض خلف: فرض کنید

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$$

که در آن W_i زیرفضاهای سره هستند. پس

$$|S \cap W_i| < n$$

بنابراین

$$|S| = \left| \left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i \right) \cap S \right| \le \sum_{i=1}^{k} |W_i \cap S| < kn$$

پس S مجموعه‌ای متناهی است که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است.

موفق باشید.