دانشکده مهندسی کامپیوتر	به نام خدا آزمون میان‌ترم **جبر خطی** سمیرا حسین قربان	تاریخ آزمون: ۲۷ آبان ۱۴۰۰ مدت آزمون: ۱۵۰ دقیقه صفحهٔ ۱ از ۵

- همهٔ پاسخ‌هایتان را خوانا، با توضیح دقیق و کامل و مستدل بنویسید.
- پاسخ هر سؤال را در برگهٔ مستقل بنویسید.
- جمع نمره‌ها برابر ۱۲۰ است، و نمرهٔ ۱۰۰ نمرهٔ کامل محسوب می‌شود.

۱. فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$، $b \neq 0$، و تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را با ضابطهٔ

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (a+b)x_1 + bx_2 + \cdots + bx_n \\ bx_1 + (a+b)x_2 + \cdots + bx_n \\ \vdots \\ bx_1 + bx_2 + \cdots + (a+b)x_n \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید.

(الف) نمایش T را در پایهٔ استاندارد بنویسید. (۵ نمره)

(ب) نشان دهید به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$،

$$W(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) = \alpha x\}$$

زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است. (۵ نمره)

(ج) پایه‌ای برای $W(a)$ و پایه‌ای برای $W(a+nb)$ پیدا کنید. (۱۰ نمره)

(الف) فرض کنید $J \in M_n(\mathbb{R})$ با درایه‌های همه یک. در این صورت $[T]_E = aI + bJ$.

(ب) واضح است که $0 \in W(\alpha) \neq \varnothing$. فرض کنید $x, y \in W(\alpha)$ و $c \in \mathbb{R}$. چون T تبدیل خطی است، پس

$$T(cx + y) = cT(x) + T(y) = c\alpha x + \alpha y = \alpha(cx + y) \in W(\alpha).$$

(ج)

$$\begin{aligned} W(a) &= N(J) = \operatorname{span}(\{e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n\}), \\ W(a+nb) &= C(J) = \operatorname{span}(\{e_1 + \cdots + e_n\}). \end{aligned}$$

---

۲. (الف) فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$. نشان دهید

$$W(A) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$$

زیرفضای خطی $M_n(\mathbb{R})$ است. (۵ نمره)

(ب) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

و بُعد $W(A)$ را حساب کنید. (۵ نمره)

(ج) نشان دهید (۱۵ نمره)

$$\bigcap_{A\in M_n(\mathbb{R})} W(A)=\{cI \mid c\in\mathbb{R}\}.$$

(الف) واضح است که به ازای هر $A\in M_n(\mathbb{R})$، $\circ\in W(A)\neq\varnothing$. فرض کنید $X,Y\in W(A)$ و $c\in\mathbb{R}$. در این صورت

$$(cX+Y)A=cXA+YA=A(cX)+AY=A(cX+Y).$$

(ب) فرض کنید

$$X=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{bmatrix}.$$

در این صورت

$$XA=\begin{bmatrix}a+۳c&b+c&۲c\\d+۳f&e+f&۲f\\g+۳k&h+k&۲k\end{bmatrix}$$

$$AX=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\۳a+h+۲k&۳b+e+۲h&۳c+f+۲k\end{bmatrix}$$

و در نتیجه $X\in W(A)$ اگروتنهااگر

$$X=\begin{bmatrix}a&b&\circ\\d&e&\circ\\۳a-۳b-e&k-۳b-e&k\end{bmatrix};$$

پس $\dim W(A)=۵$.

(ج) واضح است که

$$\{cI \mid c\in\mathbb{R}\}\subseteq\bigcap_{A\in M_n(\mathbb{R})} W(A).$$

حال فرض کنید $X\in\bigcap_{A\in M_n(\mathbb{R})}W(A)$ و $E_{ij}\in M_n(\mathbb{R})$ که درایه ijام آن یک و بقیه درایه‌های آن صفر است. در این صورت به ازای هر $۱\leq i,j\leq n$ و $i\neq j$ از تساوی $XE_{ij}=E_{ij}X$ به‌دست می‌آید که $x_{ij}=\circ$؛ بنابراین X ماتریسی قطری است. به ازای هر $۱\leq i\leq n$، تساوی $E_{ij}X=XE_{ij}$ نتیجه می‌دهد که همه عناصر روی قطر با هم برابرند.

---

۳. فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ و $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. نشان دهید اگر $A-B$ و $A+B$ وارون‌پذیر باشند، $\begin{bmatrix}A&B\\B&A\end{bmatrix}$ هم وارون‌پذیر است و وارون آن را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

فرض کنید $C=A+B$ و $D=A-B$

$$\begin{bmatrix}A&B\\B&A\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}C^{-۱}+D^{-۱}&C^{-۱}-D^{-۱}\\C^{-۱}-D^{-۱}&C^{-۱}+D^{-۱}\end{bmatrix}$$

۴. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی است، $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهای V هستند و $\dim W_۱ < \dim W_۲$. نشان دهید $W_۲$ زیرفضایی ناصفر مانند W دارد که $W \subseteq W_۱^\perp$. (۱۰ نمره)

$$\begin{aligned}\dim(W_۱^\perp \cap W_۲) &= \dim(W_۱^\perp) + \dim(W_۲) - \dim(W_۱^\perp + W_۲)\\ &= n - \dim(W_۱) + \dim(W_۲) - \dim(W_۱^\perp + W_۲)\\ &= \underbrace{n - \dim(W_۱^\perp + W_۲)}_{\geq ۰} + \underbrace{\dim(W_۲) - \dim(W_۱)}_{> ۰}.\end{aligned}$$

در نتیجه، $W := W_۱^\perp \cap W_۲$ شرایط خواسته شده را دارد.

---

۵. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و T تابعی خطی روی فضای ضرب داخلی nبعدی V است. نشان دهید حکم‌های زیر دوبه‌دو معادل هستند. (۱۵ نمره)

(i) به‌ازای هر $x \in V$، $\|T(x)\| = \|x\|$.

(ii) به‌ازای هر $x, y \in V$، $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(iii) اگر $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای متعامد و یکه برای V باشد، $\{T(v_۱), \ldots, T(v_n)\}$ هم پایه‌ای متعامد و یکه برای V است.

(i) $\Leftarrow$ **(ii)** به‌ازای هر $x, y \in V$،

$$\begin{aligned}\|T(x+y)\|^۲ &= \langle T(x+y), T(x+y)\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle + ۲\langle T(x), T(y)\rangle + \langle T(y), T(y)\rangle\\ &= \|T(x)\|^۲ + ۲\langle T(x), T(y)\rangle + \|T(y)\|^۲\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\|x+y\|^۲ &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + ۲\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle\\ &= \|x\|^۲ + ۲\langle x, y\rangle + \|y\|^۲.\end{aligned}$$

از $\|T(x)\| = \|x\|$، $\|T(y)\| = \|y\|$ و $\|T(x+y)\| = \|x+y\|$، نتیجه می‌شود $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(ii) $\Leftarrow$ **(iii)** چون T ضرب داخلی را حفظ می‌کند، پس مجموعه $\{T(v_۱), \ldots, T(v_n)\}$ متعامد و یکه است. از طرفی چون $\dim V = n$ پس این مجموعه پایه است.

(iii) $\Leftarrow$ **(i)** به ازای $x \in V$، عددهای حقیقی $c_۱, \ldots, c_n$ وجود دارند که $x = \sum_{i=۱}^n c_i v_i$. در این صورت $T(x) = \sum_{i=۱}^n c_i T(v_i)$ و در نتیجه

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=۱}^n c_i^۲ = \langle T(x), T(x)\rangle.$$

۶. فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$، $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ و $\operatorname{rank}(A) = r$. نشان دهید ماتریس‌های B و C به‌ترتیب در $M_{mr}(\mathbb{R})$ و $M_{rn}(\mathbb{R})$ وجود دارند که $A = BC$. (۱۰ نمره)

می‌دانیم ماتریس‌های وارون‌پذیر $P \in M_m(\mathbb{R})$ و $Q \in M_n(\mathbb{R})$ وجود دارند که

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = \left(P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q\right).$$

فرض کنید B و C به ترتیب r ستون اول P و r سطر اول Q هستند. در این صورت

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} = BC.$$

---

۷. فرض کنید $m, n, p \in \mathbb{N}$، $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ و $B \in M_{np}(\mathbb{R})$.

(الف) نشان دهید (۵ نمره)

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix}\right).$$

(ب) نشان دهید (۱۰ نمره)

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -AB \end{bmatrix},$$

و نتیجه بگیرید

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(AB) + n.$$

(ج) فرض کنید $C \in M_{pq}(\mathbb{R})$، و نشان دهید (۱۵ نمره)

$$\operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B) \geq \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC).$$

(الف) فرض کنید رتبه‌های A و B به‌ترتیب r و s هستند و A_{j_1}، …، A_{j_r} و B_{k_1}، …، B_{k_s} به ترتیب ستون‌های مستقل A و B هستند. اگر

$$c_1\begin{bmatrix} e_{j_1} \\ A_{j_1} \end{bmatrix} + \cdots + c_r\begin{bmatrix} e_{j_r} \\ A_{j_r} \end{bmatrix} + d_1\begin{bmatrix} B_{k_1} \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + d_s\begin{bmatrix} B_{k_s} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

آنگاه

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{r} c_i e_{j_i} + \sum_{i=1}^{s} d_i B_{k_i} \\ \sum_{i=1}^{r} c_i A_{j_i} \end{bmatrix} = 0;$$

در نتیجه $c_1 = \cdots = c_r = 0$ و به تبع آن $d_1 = \cdots = d_s = 0$.

(ب)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & -AB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -AB \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

چون هردوی

$$\begin{bmatrix} I_n & \circ \\ -A & I_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} I_n & -B \\ \circ & I_p \end{bmatrix}$$

مثلثی با قطر ناصفر و در نتیجه وارون‌پذیر هستند،

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} I_n & \circ \\ \circ & -AB \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & \circ \end{bmatrix}\right);$$

پس

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) &\leq \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & \circ \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} I_n & \circ \\ \circ & -AB \end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{rank}(AB) + n. \end{aligned}$$

(ج) فرض کنید $\operatorname{rank} B = r$. بنا به سوال ۶، ماتریس‌های $E \in M_{nr}(\mathbb{R})$ و $F \in M_{rp}(\mathbb{R})$ وجود دارند که $B = EF$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(ABC) + r &= \operatorname{rank}(AEFC) + r \\ &\geq \operatorname{rank}(AE) + \operatorname{rank}(FC) \\ &\geq \operatorname{rank}(AEF) + \operatorname{rank}(EFC) \\ &= \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC). \end{aligned}$$

موفق باشید.