

سوال ۱. فرض کنید V یک فضای خطی روی \mathbb{R} است و T تابعی خطی روی V .

الف) فرض کنید $u, v \in V$ و u و v و $u + v$ ویژه بردارهای T هستند. نشان دهید ویژه مقادیرهای متناظر u و v برابرند.

ب) فرض کنید $\text{rank}(T) = r$. نشان دهید T حداکثر $r + 1$ ویژه مقدار متمایز دارد.

ج) فرض کنید هر عضو ناصفر V ویژه بردار T است. نشان دهید T مضرب اسکالر همانی است.

سوال ۲. فرض کنید V فضای خطی متناهی بعد روی \mathbb{R} است، $m \in \mathbb{N}$ و $v_1, \dots, v_m \in V$. نشان دهید v_1, \dots, v_m مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر تابعی مانند T روی V وجود داشته باشد که v_1, \dots, v_m ویژه بردارهای آن هستند و ویژه مقادیرهای متناظرشان متمایزند.

سوال ۳. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $A \in M_n(\mathbb{R})$ و تابع خطی T را روی $M_n(\mathbb{R})$ با $T(X) = AX$ تعریف کنید.

الف) نشان دهید مجموعه ویژه مقادیرهای A با مجموعه ویژه مقادیرهای T برابر است.

ب) چند جمله ای مشخصه T بر حسب چند جمله ای مشخصه A چیست؟

موفق باشید.