۱. (الف) فرض کنید T تبدیلی خطی روی $\mathbb{R}^۴$ است که هر بردار مانند (a, b, c, d) را به $(a+b-c, c-d, ۲a+c, a-b+d)$ می‌برد. پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۴$ انتخاب کنید و ماتریس نمایش T را در آن پایه بنویسید. (۵ نمره)

(ب) فرض کنید T تبدیلی خطی روی $\mathbb{R}^۳$ است که هر بردار مانند (u, v, w) را به $(u+v+w, u+v, u)$ می‌برد. اثر $T^{-۱}$ روی (x, y, z) را توصیف کنید و ماتریس نمایش $T^{-۱}$ را در پایه استاندارد محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ.

(الف) پایهٔ استاندارد $E = \{e_۱, \dots, e_۴\}$ را برای $\mathbb{R}^۴$ در نظر بگیرید. ماتریس نمایش T در این پایه برابر است با

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

(ب) ماتریس نمایش T در پایهٔ استاندارد $E = \{e_۱, e_۲, e_۳\}$ برابر است با

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس وارون A به روش گاوس ـ ژوردان برابر است با

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین $T^{-۱} : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ برداری مانند (x, y, z) را به $(x, y-z, x-y)$ می‌برد.

---

۲. فرض کنید A یک ماتریس ۴×۳ است، $\operatorname{rank}(A) = ۲$ و

$$x_۱ = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad x_۲ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

جواب‌های $Ax = ۰$ هستند.

(الف) ماتریس تحویل یافته سطری ـ پلکانی R را برای ماتریس A به‌دست بیاورید. (۱۴ نمره)

(ب) بُعد فضاهای بنیادی $N(A)$، $C(A^{\text{۲}})$ و $N(A^{\text{۲}})$ را حساب کنید. (۶ نمره)

پاسخ.

(الف) بردارهای $x_{۱}$ و $x_{۲}$ مستقل خطی‌اند؛ بنابراین ماتریس سطری ـ پلکانی R متناظر با A دو ستون محوری دارد. ابتدا فرض کنید اولین ستون محوری آن ستون اول است؛ پس

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & a & d & g \\ ۰ & b & e & h \\ ۰ & c & f & i \end{bmatrix}, \qquad Rx_{۱} = ۰.$$

و در نتیجه

$$Rx_{۱} = \begin{bmatrix} -۲+a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}.$$

پس $a = ۲$ و $c = b = ۰$. بنابراین

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & d & g \\ ۰ & ۰ & e & h \\ ۰ & ۰ & f & i \end{bmatrix}.$$

پس ستون دوم نمی‌تواند محوری باشد و دومین ستون محوری ستون سوم است. لذا

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & g \\ ۰ & ۰ & ۱ & h \\ ۰ & ۰ & ۰ & i \end{bmatrix}.$$

حال، با استفاده از $Rx_{۲} = ۰$ ،

$$R = \begin{bmatrix} ۲+g \\ -۲+h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix},$$

پس $g = -۲$، $h = ۲$، و $i = ۰$ و در نتیجه

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

(ب) با توجه به ماتریس R، $\dim(N(A)) = ۲$ از طرفی چون

$$\dim(C(A^{\text{۲}})) = \dim(C(A))$$

و

$$\dim N(A^T) + \dim C(A^T) = ۳$$

باید $\dim N(A^T) = ۱$.

---

۳. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

(الف) به ازای چه مقادیری از $\lambda \in \mathbb{R}$ ماتریس $A + \lambda I$ وارون‌پذیر است؟ (۱۲ نمره)

(ب) قرار دهید

$$B = \begin{bmatrix} A \\ ۲A \end{bmatrix}$$

و

$$C = \begin{bmatrix} A & ۲A \end{bmatrix}.$$

فضای پوچ ماتریس‌های A، B و C را پیدا کنید. (۸ نمره)

پاسخ.

(الف) فرض کنید $(A + I\lambda)x = ۰$، و $x \neq ۰$ ؛ بنابراین

$$\begin{cases} (۱-\lambda)x_۱ + x_۲ = ۰ \\ -۵x_۱ + (۷-\lambda)x_۲ = ۰ \end{cases}$$

و در نتیجه $((۷-\lambda)(۱-\lambda)+۵)x_۲ = ۰$. اگر $x_۲ = ۰$ آنگاه $x_۱ = ۰$؛ پس باید $x_۲ \neq ۰$ در نتیجه $(۷-\lambda)(۱-\lambda)+۵ = ۰$، که یعنی $\lambda = ۶$ یا $\lambda = ۲$. درنتیجه ماتریس $A + \lambda I$ به ازای $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{۲, ۶\}$ وارون‌پذیر است.

(ب) از حل دستگاه متناظر با $Ax = ۰$ به‌سادگی به‌دست می‌آید که $x = ۰$؛ پس $N(A) = \{۰\}$. می‌دانیم که

$$\operatorname{rank}(N(B)) + \operatorname{rank}(C(B)) = ۲$$

و $\operatorname{rank}(C(B)) = ۲$؛ بنابراین $\operatorname{rank}(N(B)) = ۰$ و در نتیجه $N(B) = \{۰\}$. ماتریس سطری- پلکانی C که در آن

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۲ \\ -۵ & ۷ & -۱۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

است به‌صورت زیر است:

$$U = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱۲ & ۰ & ۲۴ \end{bmatrix}.$$

قرار دهید

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

چون ستون اول و دوم محوری هستند، $Uv_1 = 0$ و $Uv_2 = 0$. پس $N(C) = \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$

۴.(الف) فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $A^T = -A$. نشان دهید $I + A$ وارون‌پذیر است. (۵ نمره)

(ب) فرض کنید $J, A \in M_n(\mathbb{R})$ و همهٔ درایه‌های J برابر یک است. نشان دهید (۵ نمره)

$$\operatorname{rank}(A - J) \geq \operatorname{rank}(A) - 1.$$

(ج) فرض کنید $M \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی با درایه‌های صفر و یک است که درایه‌های روی قطر آن صفر است و همچنین به ازای هر $1 \leq i < j \leq n$، $M_{ij} = 0$ اگر و تنها اگر $M_{ji} = 1$. نشان دهید $\operatorname{rank}(M) \geq n - 1$. (۵ نمره)

پاسخ.

(الف) فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$ و $(I + A)x = 0$؛ پس $x = -Ax = A^T x$ و در نتیجه $x^T = x^T A$. بنابراین

$$x^T x = x^T(A^T x) = -(x^T A)x = -x^T x,$$

پس $x^T x = 0$. اگر

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

آنگاه $x^T x = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$؛ پس $x = 0$ که یعنی $N(I + A) = \{0\}$ و در نتیجه $I + A$ وارون‌پذیر است.

(ب) بنا به تمرین ۱۸، به‌ازای هر $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$،

$$\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

چون $A = (A - J) + J$،

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}((A - J) + J) \leq \operatorname{rank}(A - J) + \operatorname{rank}(J).$$

از طرفی $\mathrm{rank}(J) = 1$؛ پس

$$\mathrm{rank}(A) - 1 \leq \mathrm{rank}(A - J).$$

(ج) با توجه به تعریف M، $M + M^T = J - I$. از طرفی $(M - M^T)^T = M^T - M = -(M - M^T)$، پس ماتریس $A = I + M - M^T$ وارون‌پذیر است و درنتیجه بنا به قسمت (ب)،

$$n - 1 \leq \mathrm{rank}(A - J).$$

از طرفی $A - J = -2M^T$، پس $\mathrm{rank}(A - J) = \mathrm{rank}(M^T)$. چون رتبهٔ فضای سطری و ستونی یکسان است، پس $\mathrm{rank}(M^T) = \mathrm{rank}(M)$ و در نتیجه $n - 1 \leq \mathrm{rank}(M)$.

۵.(الف) فرض کنید

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و $V = \mathrm{span}(\{v_1, \ldots, v_5\})$. بُعد فضای V را حساب کنید. (۵ نمره)

(ب) فرض کنید $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ بردارهای ناصفر باشند. قرار دهید

$$w_1 = v_1 + k_1 v_m, \ w_2 = v_2 + k_2 v_m, \ \ldots, \ w_{m-1} = v_{m-1} + k_{m-1} v_m.$$

نشان دهید w_1، ...، w_{m-1} به ازای هر $k_1, \ldots, k_{m-1} \in \mathbb{R}$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر v_1، ...، v_m مستقل خطی باشند. (۱۰ نمره)

پاسخ.

(الف) v_1، v_2، v_3، v_4 و v_5 را ستون‌های ماتریس A در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری ـ پلکانی آن به‌صورت

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

است؛ پس $V=\mathbb{R}^4$ و بُعد آن ۴ است.

(ب) فرض کنید $w_1,\ldots,w_{m-1}$ به ازای هر $k_1,\ldots,k_{m-1}$ حقیقی مستقل خطی است. چون $w_1,\cdots,w_m$ به ازای همه $k_1,\cdots,k_{m-1}$ ها واز جمله

$$k_1=\cdots=k_{m-1}=0$$

مستقل خطی‌اند، پس $v_1,\cdots,v_{m-1}$ مستقل خطی‌اند. پس فرض وابسته خطی بودن $v_1,\cdots,v_m$ منجر به وجود $c_1,\cdots,c_{m-1}$ می‌شود که

$$v_m=c_1v_1+\cdots+c_{m-1}v_{m-1} \tag{1}$$

که حداقل یکی از c_iها $1\le i\le m-1$ ناصفر است. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $c_1\neq 0$. قرار دهید $k_1=\frac{1}{c_1}$ و $k_2=\cdots=k_{m-1}=0$. بنا به (۱) $w_1,\cdots,w_{m-1}$

$$\begin{aligned} w_1&=v_1-\frac{1}{c_1}v_m\\ &=v_1-\frac{1}{c_1}(c_1v_1+\cdots+c_{m-1}v_{m-1})\\ &=-\frac{1}{c_1}(c_2v_2+\cdots+c_{m-1}v_{m-1})\\ &=-\frac{c_2}{c_1}v_2-\cdots-\frac{c_{m-1}}{c_1}v_{m-1}\\ &=-\frac{c_2}{c_1}w_2-\cdots-\frac{c_{m-1}}{c_1}w_{m-1}\end{aligned}$$

که ممکن نیست؛ پس $v_1,\ldots,v_m$ مستقل خطی‌اند.

حال فرض کنید $v_1,\ldots,v_m$ مستقل خطی هستند. ثابت می‌کنیم که $w_1,\ldots,w_{m-1}$ نیز مستقل خطی‌اند.اگر $c_1w_1+\ldots+c_{m-1}w_{m-1}$ آنگاه

$$c_1v_1+\cdots+c_{m-1}v_{m-1}+(c_1k_1+\cdots+c_{m-1}k_{m-1})v_m=0$$

و

$$c_1=\cdots=c_{m-1}=0,\quad c_1k_1+\cdots+c_{m-1}k_{m-1}=0$$

پس $w_1,\ldots,w_{m-1}$ مستقل خطی هستند.

---

۶. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با رتبهٔ $n-m$ است، L ماتریسی $m \times n$ است که سطرهای آن پایه‌ای برای فضای پوچ چپ A هستند، و R ماتریسی $n \times m$ است که ستون‌های آن پایه‌ای برای فضای پوچ A هستند. قرار دهید $Z = L^\intercal R^\intercal$ و $M = A + Z$.

(الف) نشان دهید که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $A^\intercal x = 0$ اگر و تنها اگر $x = L^\intercal y$ به‌ازای yای در $\mathbb{R}^m$. (۵ نمره)

(ب) نشان دهید که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $Ax = 0$ اگر و تنها اگر $x = Ry$ به‌ازای yای در $\mathbb{R}^m$. (۵ نمره)

(ج) نشان دهید که رتبهٔ ماتریس Z برابر m است و

$$MM^\intercal = AA^\intercal + ZZ^\intercal.$$

(۱۰ نمره)

(د) نشان دهید M وارون‌پذیر است. (۱۵ نمره)

پاسخ.

(الف) به ازای $x \in \mathbb{R}^n$، اگر $A^\intercal x = 0$ آنگاه $x \in N(A^\intercal)$؛ پس x ترکیبی خطی از سطرهای L است. اگر سطرهای L را با $L_1, \ldots, L_m$ نشان بدهیم، $y \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد که

$$\begin{aligned} x &= y_1 L_1 + \cdots + y_m L_m \\ &= \begin{bmatrix} L_1^\intercal & \cdots & L_m^\intercal \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = L^\intercal y. \end{aligned}$$

حال فرض کنید که yای وجود داشته باشد که $x = L^\intercal y$؛ پس x ترکیب خطی از ستون‌های L است، یعنی

$$x = y_1 L_1 + \cdots + y_m L_m$$

و در نتیجه $x \in N(A^\intercal)$.

(ب) اگر $Ax = 0$ آنگاه $x \in N(A)$ و در نتیجه x ترکیبی خطی از ستون‌های R است؛ یعنی $x \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $x = y_1 R_1 + \cdots + y_m R_m$ و R_i ستون iاُم ماتریس R است، پس $x = Ry$. مشابهاً، اگر $x = Ry$ آنگاه x ترکیب خطی از ستون‌های R است؛ پس $x \in N(A)$.

(ج)

$$\begin{aligned} MM^\intercal &= (A+Z)(A^\intercal + Z^\intercal) \\ &= AA^\intercal + AZ^\intercal + ZA^\intercal + ZZ^\intercal \\ &= AA^\intercal + ARL + L^\intercal R^\intercal A^\intercal + ZZ^\intercal. \end{aligned}$$

$AR = 0$ چون ستون‌های R پایه‌ي فضای پوچ A است،

$$AR = A\begin{bmatrix} R_1 & \cdots & R_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AR_1 & \cdots & AR_m = 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه $AZ^\intercal = 0$. پس $ZA^\intercal = 0$ و در نتیجه $MM^\intercal = AA^\intercal + ZZ^\intercal$.

(د) فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$ و $Mx = 0$؛ پس $Ax + Zx = 0$ و در نتیجه $Ax + L^\intercal R^\intercal x = 0$. طرفین تساوی را در $A^\intercal$ ضرب می‌کنیم، پس $A^\intercal Ax + A^\intercal L^\intercal R^\intercal x = 0$. چون سطرهای L پایهٔ فضای پوچ چپ A هستند،

$$A^\intercal L^\intercal = A^\intercal \begin{bmatrix} L_1^\intercal & \cdots & L_N^\intercal \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\intercal L_1^\intercal & \cdots A_1^\intercal L_n^\intercal \end{bmatrix} = 0$$

در نتیجه $A^\intercal Ax = 0$؛ پس $x^\intercal A^\intercal Ax = 0$. اگر بردار

$$Ax = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیریم، $x^\intercal A^\intercal Ax = b_1^2 + \cdots + b_n^2 = 0$؛ پس به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $b_i = 0$، و بنابراین $Ax = 0$. حال با توجه به قسمت (ب) ii، $y \in \mathbb{R}$ای وجود دارد که $x = Ry$، پس

$$Mx = Ax + Zx = 0 + L^\intercal R^\intercal x$$

پس $L^\intercal R^\intercal x = 0$ و $L^\intercal R^\intercal Ry = 0$، در نتیجه $LL^\intercal R^\intercal Ry = 0$. چون سطرهای L پایه‌ای برای فضای پوچ راست تشکیل می‌دهند، در نتیجه $\operatorname{rank}(L) = m$. از طرفی با توجه به تمرین ۱۹، $\operatorname{rank}(L) = \operatorname{rank}(L^\intercal L)$؛ پس $\operatorname{rank}(LL^\intercal) = m$ و بهمین ترتیب، چون سطرهای R نیز پایه‌ای برای فضای پوچ A تشکیل می‌دهند،

$$\operatorname{rank}(R^\intercal R) = \operatorname{rank}(R) = m.$$

در نتیجه $R^\intercal R$ و $LL^\intercal$ وارون‌پذیر هستند و از $LL^\intercal R^\intercal Ry = 0$ نتیجه می‌شود که $y = 0$؛ بنابراین $x = 0$. وبه‌این ترتیب $N(M) = \{0\}$ و درنتیجه M وارون‌پذیر است.

موفق باشید.