سری شماره ۷.

سوال ۱. الف. فرض کنید $Tu=\lambda_1 u$، $Tv=\lambda_2 v$ و $T(u+v)=\lambda_3(u+v)$.

بنابراین

$$\lambda_3(u+v)=T(u+v)=\lambda_1 u+\lambda_2 v$$

$$(\lambda_3-\lambda_1)u+(\lambda_3-\lambda_2)v=0$$

حالت اول: بردارهای u و v مستقل خطی باشند، در این صورت $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$.

حالت دوم: u و v بردارهای وابسته باشند و $\lambda_3-\lambda_1\neq 0$ یا $\lambda_3-\lambda_2\neq 0$. در این صورت بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $\lambda_3-\lambda_1\neq 0$. (توجه کنید که صورتی که $\lambda_3-\lambda_1=0$، و صورت $\lambda_3-\lambda_2$، مشابه حل است)

$$u=\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_1}v$$

$$Tu=\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_1}Tv \Rightarrow u=\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_1}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v$$

بنابراین $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=1$.

ب. اگر $r<n$، آنگاه T، r تا مقدار ویژه ناصفر دارد و $n-r$ تا مقدار ویژه صفر. بنابراین حداکثر $r+1$ تا مقدار ویژه متمایز دارد. اگر $r=n$. حداکثر n تا مقدار ویژه متمایز دارد.

ج. فرض کنید به ازای هر $0\neq v\in V$، $Tv=\lambda v$ به ازای اسکالر $\lambda\in\mathbb{R}$. در این صورت به ازای هر e_i ها داریم $Te_i=\lambda_i e_i$. فرض کنید $v=\sum c_i e_i$، بنابراین

$$Tv=\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n=\lambda v$$

بنابراین $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda)e_i=0$. چون e_i ها مستقل‌اند، پس $\lambda=\lambda_n=\dots=\lambda_1$، در نتیجه $T=\lambda I$.

سوال ۲.

فرض کنید $v_1, \dots, v_m$ مستقل خطی‌اند. $m \leq \dim V = n$. در این صورت $v_1, \dots, v_m$ را با

پایه $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ برای V گسترش می‌دهیم و مقادیر ناصفر متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ حقیقی را در نظر بگیرید

تعریف کنید $T: V \to V$ که $T(v_i) = \lambda_i v_i$ به ازای هر $1 \leq i \leq m$، و $Tv_i = 0$ به ازای

هر $m+1 \leq i \leq n$.

حل فرض کنید $T: V \to V$ که $v_1, \dots, v_m$ به ترتیب بردارهای شاخص با مقدارهای شاخص متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

فرض کنید $\{v_1, \dots, v_m\}$ مستقل نباشد، در این صورت می‌توان فرض کرد که $\{v_1, \dots, v_k\}$ به ازای $k<m$

مستقل خطی است. بنابراین $v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$ که دست کم یکی از c_i ها ناصفر است پس

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = T v_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i T v_i = \sum c_i \lambda_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) v_i = 0 \Rightarrow c_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \quad 1 \leq i \leq k$$

چون دست کم یکی از c_iها ناصفر است ($v_{k+1} \neq 0$) بنابراین موجود است $1 \leq i \leq k$ به طوری که $\lambda_i = \lambda_{k+1}$. تناقض

با تمایز λ_iها. پس $v_1, \dots, v_m$ مستقل خطی است.

سوال ۲. تابع $T: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ با ضابطه $T(X) = AX$ مفروض است.

الف. فرض کنید $X = [X_1 \cdots X_n]$ بنابراین می‌توان فرض کرد که

$$T(X) = T\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_1 \\ \vdots \\ AX_n \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید $T(X) = \lambda X$ ، $X \neq 0$. بنابراین

$$T(X) = \begin{bmatrix} AX_1 \\ \vdots \\ AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda X_1 \\ \vdots \\ \lambda X_n \end{bmatrix} \Rightarrow AX_i = \lambda X_i \quad \forall\ i \le n$$

چون $X \neq 0$، پس ~~...~~ موجود باشد $1 \le i \le n$ ، که $X_i \neq 0$ ، $AX_i = \lambda X_i$ پس λ مقدار ویژه A است.

حال فرض کنید λ مقدار ویژه A است. یعنی $Av = \lambda v$ به ازای $v \neq 0$ قرار می‌دهیم $X = [v \cdots v]$

در این صورت $TX = \lambda X$ و $X \neq 0$. پس λ مقدار ویژه T است.

ب. ماتریس نمایش T در پایه استاندارد $M_n(\mathbb{R})$ برابر با ماتریس قطری $\begin{bmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{bmatrix}$ است بنابراین

$$\det(\lambda I_{n^2} - T) = \det \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda I_n - A \end{bmatrix} = \left(\det(\lambda I_n - A)\right)^n$$

بنابراین اگر چندجمله‌ای مشخصه T و A را به ترتیب با P_T و P_A نشان دهیم آنگاه

$$P_T(x) = \left(P_A(x)\right)^n$$