دانشکده مهندسی کامپیوتر

آزمون پایان‌ترم

جبر خطی

سمیرا حسین قربان

تاریخ آزمون: ۹۹/۱۱/۰۶

مدت آزمون: ۱۸۰ دقیقه

۱. الف) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

نشان دهید A قطری‌شدنی است اگر و فقط اگر $(a-d)^۲ + ۴bc > ۰$ یا A مضرب همانی باشد. ماتریس P را طوری به‌دست بیاورید که A را قطری کند. (۱۰ نمره)

ب) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و

$$A = \begin{bmatrix} k+۳l+۲m & ۲k-۲m & k-۳l+۲m \\ ۲k-۲m & ۴k+۲m & ۲k-۲m \\ k-۳l+۲m & ۲k-۲m & k+۳l+۲m \end{bmatrix}$$

که در آن k و l و m به‌ترتیب رقم‌های اول، دوم و سوم شمارهٔ دانشجویی شما از راست هستند. A^n را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

---

۲. فرض کنید α یک بردار حقیقی ناصفر با n مؤلفه است و $A \in M_n(\mathbb{R})$. چندجمله‌ای مینیمال α نسبت به A چندجمله‌ایِ حقیقیِ تکینی مانند $q(x)$ است که $q(A)\alpha = ۰$، و $q(x)$ کمترین درجهٔ ممکن را دارد.

الف) فرض کنید $f(x)$ چندجمله‌ای حقیقیِ دلخواهی است که $f(A)\alpha = ۰$. ثابت کنید f بر چندجمله‌ای مینیمال α نسبت به A [در صورت وجود] بخش‌پذیر است. (۵ نمره)

ب) ثابت کنید α چندجمله‌ایِ مینیمال نسبت به A دارد. (۵ نمره)

ج) ثابت کنید چندجمله‌ایِ مینیمال α نسبت به A یکتاست. (۵ نمره)

د) فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای حقیقی هستند که عامل مشترکی ندارند. ثابت کنید (۱۰ نمره)

$$N\big(f(A)\big) \cap N\big(g(A)\big) = \{۰\}.$$

---

۳. الف) فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{R})$، $AB = BA$ و $N(A) \cap N(B) = \{۰\}$. ثابت کنید (۵ نمره)

$$N(A) + N(B) \subseteq N(AB).$$

ب) با مفروضات (الف) ثابت کنید $\dim N(AB) \leq \dim N(A) + \dim N(B)$، و نتیجه بگیرید (۱۰ نمره)

$$N(AB) = N(A) \oplus N(B).$$

(پیشنهاد: با در نظر گرفتن پایه‌ای برای $N(A)$ و گسترش آن به پایه‌ای برای $N(AB)$ شروع کنید.)

ج) فرض کنید $A_۱, \ldots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$ و به‌ازای هر i و j که $۱ \leq i \neq j \leq k$، $N(A_i) \cap N(A_j) = \{۰\}$ و نیز $A_iA_j = A_jA_i$. ثابت کنید (۱۰ نمره)

$$N(A_۱ \cdots A_k) = N(A_۱) \oplus \cdots \oplus N(A_k).$$

(پیشنهاد: با نشان دادن این‌که $A = A_۱ \cdots A_{k-۱}$ و $B = A_k$ در مفروضات (الف) صدق می‌کنند شروع کنید.)

۴. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$.

الف) فرض کنید چندجمله‌ای حقیقی $f(x)$ را به صورت $f = f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k}$ تجزیه کرده‌ایم که در آن f_iهای متمایز عامل مشترکی ندارند. ثابت کنید (۵ نمره)

$$N\big(f(A)\big) = N\Big(\big(f_1(A)\big)^{r_1}\Big) \oplus \cdots \oplus N\Big(\big(f_k(A)\big)^{r_k}\Big).$$

ب) فرض کنید p چندجمله‌ای مینیمال A است و آن را به صورت $p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ تجزیه کرده‌ایم که در آن p_iهای متمایز عامل مشترکی ندارند. ثابت کنید $\mathbb{R}^n$ برابر است با جمع مستقیم $N\Big(\big(p_i(A)\big)^{r_i}\Big)$ها. (۵ نمره)
(این حکم به «قضیهٔ تجزیهٔ اولیه» معروف است.)

---

۵. تابع $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید $f(x, y)$ ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ است اگر و فقط اگر ماتریس مثبت معین $A \in M_n(\mathbb{R})$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$، $f(x, y) = y^\intercal Ax$. (۱۰ نمره)

---

۶. الف) فرض کنید $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$. ثابت کنید

$$\sigma_{\min}(A + B) \leq \sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)$$

که در آن $\sigma_{\min}(M)$ کمترین مقدار تکین ماتریس M است. (۱۰ نمره)

ب) فرض کنید σ_1، ...، σ_n مقادیر تکین $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ هستند، $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ و نیز $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$. ثابت کنید (۵ نمره)

$$\dim N(AA^\intercal) = m - r.$$

ج) فرض کنید U زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است و $\dim U = n - 1$. نشان دهید که برداری یکه مانند x_0 در U وجود دارد که $\|Ax_0\| \geq \sigma_2$ و نتیجه بگیرید که (۵ نمره)

$$\max_{\substack{x \in U \\ \|x\| = 1}} \|Ax\| \geq \sigma_2.$$

(پیشنهاد: به عضوهای مشترک U و زیرفضای تولیدشده با v_1 و v_2 فکر کنید.)

د) فرض کنید $\mathcal{S}$ مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای $n - 1$بعدی $\mathbb{R}^n$ است، و ثابت کنید که (۵ نمره)

$$\sigma_2 = \min_{U \in \mathcal{S}} \left(\max_{\substack{x \in U \\ \|x\| = 1}} \|Ax\| \right).$$

موفق باشید.