$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n \\ -\lambda_2^n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\lambda_1^n - \lambda_2^n \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

چون $2 < \sqrt{5} < 3$، می‌توانیم بنویسیم

$$\left| F_n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$$

$$< \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{2}\right)^n = 1/2$$

پس اختلاف $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$ و F_n از $1/2$ کمتر است

و در نتیجه، F_n نزدیک‌ترین عدد طبیعی به $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$ است.

سوال ۲.

فرض کنید T قطری شده است. به وضوح $N(T-\lambda_i I) \subseteq N((T-\lambda_i I)^2)$. فرض کنید $x \in N((T-\lambda_i I)^2)$.

فرض کنید T در پایه B ماتریس قطری دارد و $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ مقدار ویژه‌های متمایز با تکرر $d_1, \dots, d_k$ است.

درنتیجه:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k I_{d_k} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \quad x_i \in \mathbb{R}^{d_i}$$

به ازای هر $1 \le i \le k$، $(T-\lambda_i I)^2 x = 0$. درنتیجه به ازای هر $1 \le j \le n$، $(\lambda_j - \lambda_i)^2 x_j = 0$

به ازای $j \neq i$، $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$، پس $x_j = 0$. بنابراین $(T-\lambda_i I)x = 0$.

حال فرض کنید

$$N(T-\lambda_i I) = N((T-\lambda_i I)^2)$$

فرض کنید $p(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k}$ چندجمله‌ای مینیمال T است. بنابر قضیه تجزیه اولیه

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

که در آن $W_i = N((T-\lambda_i I)^{n_i})$. نشان می‌دهیم که $W_i = N((T-\lambda_i I)^{n_i}) = N(T-\lambda_i I)$

در این صورت بنابر قضیه قطری شدنی، T قطری شده است. به وضوح $N(T-\lambda_i I) \subseteq N((T-\lambda_i I)^{n_i})$.

فرض کنید $x \in N((T-\lambda_i I)^{n_i})$ و $n_i \ge 3$. بنابراین $(T-\lambda_i I)^2 (T-\lambda_i I)^{n_i-2} x = 0$

بنابر فرض $(T-\lambda_i I)^{n_i-2} x \in N(T-\lambda_i I)$. بنابراین

$$(T-\lambda_i I)^2 (T-\lambda_i I)^{n_i-3} x = 0 \Rightarrow (T-\lambda_i I)^{n_i-3} x \in N(T-\lambda_i I)$$

3 - 8

از $AX=XB$ نتیجه می‌گیریم

$$A^2X = AXB = XB^2$$

به همین ترتیب، $A^iX = XB^i$ که یعنی به ازای هر چندجمله‌ای مانند $f(x)$،

$$f(A)X = Xf(B).$$

فرض کنید

$$f_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n), \quad f_B(x) = (x-\mu_1)\cdots(x-\mu_m)$$

به ترتیب چندجمله‌ای‌های مشخصه A و B باشند. چون هیچ‌یک از μ_i ها ویژه‌مقدار A نیستند، $A-\mu_iI$ ها و در نتیجه $f_B(A)$ وارون‌پذیرند:

پس از

$$f_B(A)X = Xf_B(B) = 0$$

نتیجه می‌گیریم $X=0$.