بسمه‌تعالی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

جبرخطی		۲۸ دی ماه ۱۴۰۰
	امتحان پایان‌ترم	زمان: ۲:۴۵ ساعت
امتیاز: ۱۰+۱۰۰		

توجه:

- **لطفا پاسخ‌ها را خوانا و در صورت امکان به ترتیب بنویسید.**
- **فایل ارسالی به نام شماره دانشجویی‌تان بدون توضیح اضافه‌ای باشد.**
- **به توضیحات ابتدای هر سوال توجه نمایید.**
- **می‌توانید از قضایا یا خواص مطرح شده در کلاس (نه هر منبعی) بدون اثبات استفاده نمایید.**
- **تلاش برای پیدا کردن پاسخ در اینترنت یا صحبت با دوستانتان چه شفاهی چه کتبی در طول زمان امتحان مجاز نیست!**

بخش اول- سوالات پاسخ کوتاه (۱۵ نمره) [زمان پیشنهادی: ۱۰ دقیقه]

۱. (۱ نمره) شماره‌ی ماتریس‌های پادمتقارن را بنویسید. (این سوال به خاطر اشتباهات زیاد در میان‌ترم آمده است. انتظار می‌رود کسی این سوال را اشتباه جواب ندهد!)

۱) $\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$	۲) $\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$	۳) $\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$	٤) $\begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$	٥) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$
٦) $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$	۷) $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$	۸) $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$	۹) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	۱۰) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

۲. (۸ نمره) برای ماتریس $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ مشخص کنید که کدام (کدام‌ها) از ویژگی‌های زیر برقرار است؟

۱) مثبت معین است.	۲) فاکتورگیری LU برای آن پیدا می‌شود.
۳) مقدار دترمینان آن از مقدار trace آن بیشتر است.	٤) یک ماتریس پروجکشن است.

۳. (٦ نمره) دو تنسور A و B با اندازه‌های زیر درنظر بگیرید. اندازه‌ی تنسور حاصل جمع‌شان را با ذکر دلیل حساب نمایید.

أ) $A: (5,4)\ B: (1)$

ب) $A: (4)\ \ B: (5)$

ج) $A: (15,3,5)\ \ B: (15,1,5)$

د) $A: (2,1)\ \ B: (8,4,3)$

بخش دوم- سوالات صحیح و غلط (۳۵ نمره) [زمان پیشنهادی: ۵۵ دقیقه]

درستی و نادرستی جملات را با اثبات یا مثال نقض یا اصلاح جمله مشخص نمایید.

۱. (۸ نمره) اگر مجموعه بردارها $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ وابسته خطی باشند، آن‌گاه وابسته افاین[1] نیز هستند.

۲. (۸ نمره) هر ماتریس متعامد[2] مانند $A_{2\times 2}$ را می‌توان به صورت ماتریس دورانی[3] یا انعکاسی[4] نوشت.

۳. (٤ نمره) در ماتریس A، بردار غیرصفر $v \in R^n$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ است، اگر و فقط اگر $v \in Null(A - \lambda I)$

۴. (۵ نمره) بردارهایی به فرم $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$ که $a, b \in R$، یک زیرفضا[5] در R^4 تشکیل می‌دهند.

۵. (۵ نمره) ماتریس مربعی A با خاصیت $A^2 = 3A$ فقط دارای مقادیر ویژه صفر و سه است.

۶. (۵ نمره) ماتریس A با فرم quadratic $Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$، یک ماتریس مثبت معین[6] است.

بخش سوم- سوالات محاسباتی (۳۲ نمره) [زمان پیشنهادی: ۶۰ دقیقه]

۱. (٦ نمره) ماتریس $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. X^{150} را حساب کنید (جواب را به صورت ماتریس با درایه‌های عدد توانی (مانند 4^7) بنویسید و نیازی به محاسبه توان‌ها نیست.)

۲. (٦ نمره) بین a و b رابطه‌ی $a^2 + b^2 = 2$ وجود دارد. کمترین و بیشترین مقدار عبارت ae^b را به دست آورید.

۳. (۱۰ نمره) ماتریس $A_{4\times 4}$ با چندجمله‌ای مشخصه $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2$ حداقل و حداکثر چند بردار ویژه مستقل از هم دارد؟

۴. (۱۰ نمره) ماتریس متعامد[7] $A = [A_1\ A_2\ A_3]$ را درنظر بگیرید. ماتریس B از ستون‌های ماتریس A به این شکل تعریف می شود: $B = [A_1 + A_2 \quad A_2 + A_3 \quad A_1 + A_3]$. تمام مقادیری که دترمینان B می‌تواند داشته باشد را محاسبه نمایید.

بخش چهارم- سوالات اثباتی (۲۸ نمره) [زمان پیشنهادی: ۴۰ دقیقه]

۱. (۱۸ نمره) x_0 برداری با m درایه و z برداری با n درایه است. بردار $y = Wx_0 + z$ را درنظر بگیرید که ماتریس $W \in R^{n\times m}$ دارای مرتبه[8] m است. فرض کنید که $n \geq m$ هست.

أ) x ای پیدا کنید که عبارت $||Wx - y||^2$ را کمینه نماید و آن را x^* بنامید.

ب) اگر بزرگترین مقدار تکین[9] ماتریس W را σ_m بنامیم، نشان دهید که $||x^* - x_0|| \leq \frac{1}{\sigma_m}||z||$

۲. (۱۰ نمره) ماتریس متقارن $A \in R^{n\times n}$ دارای مقادیر ویژه‌ای است که قدرمطلق تمامی آن‌ها کمتر از یک است. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} ||A^n||_2 = 0$.

موفق باشید

---

[1] Affine
[2] Orthogonal Matrix
[3] Rotation
[4] Reflection
[5] Subspace
[6] Positive Definite
[7] Orthogonal Matrix
[8] Rank
[9] Singular value