

سوال ۱. فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$ ،  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ماتریسی است که  $n$  ویژه مقدار متمایز ناصفر دارد و  $B \in M_n(\mathbb{R})$ .

الف) نشان دهید اگر  $AB = BA$  آنگاه  $B$  قطری شدنی است.

ب) نشان دهید اگر  $AB = BA^{-1}$  آنگاه  $B^2$  قطری شدنی است.

سوال ۲. فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$ .

الف) فرض کنید  $N \in M_n(\mathbb{R})$  ماتریسی پوچ توان است. نشان دهید  $I + N$  ریشه دوم دارد.

ب) فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ماتریسی است که چندجمله‌ای مشخصه‌اش به عامل‌های درجه یک تجزیه می‌شود و همه ویژه مقدارهای مثبت هستند. نشان دهید  $A$  ریشه دوم دارد.

ج) آیا حکم (ب) با تغییر «ریشه دوم» به «ریشه  $k$ ام» به ازای عدد طبیعی دلخواه  $k$  درست است؟

سوال ۳. فرض کنید  $p(x)$  و  $f(x)$  چندجمله‌ای‌های حقیقی هستند که عامل‌های اول یکسان دارند و  $f$  بر  $p$  بخش پذیر است. آیا لزوماً می‌توان ماتریس حقیقی  $A$  را طوری پیدا کرد که  $f$  و  $p$  به ترتیب چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای مینیمال  $A$  باشند؟

موفق باشید.