

سوال ۱. فرض کنید  $V$  یک فضای خطی حقیقی با بعد متناهی است.

(آ) فرض کنید  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  یک ضرب داخلی روی  $V$  است، و  $T$  تابعی خطی از  $V$  به  $\mathbb{R}$  است. آیا می توان عضوی از  $V$  مانند  $v$  را طوری پیدا کرد که به ازای هر عضو از  $V$  مانند  $x$ ،  $T(x) = \langle v, x \rangle$ ؟

(ب) فرض کنید  $V$  مجهز به نُرم است؛ یعنی تابعی مانند  $\|\cdot\|$  از  $V$  به  $\mathbb{R}$  وجود دارد که به ازای هر  $x \in V$ ،  $\|x\| \geq 0$  و نیز  $\|x\| = 0$  اگر و تنها اگر  $x = 0$ ، به ازای هر  $c \in \mathbb{R}$ ،  $\|cx\| = |c|\|x\|$  و به ازای هر  $y \in V$ ،  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . نشان دهید تابع  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  که با

$$f(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2},$$

تعریف شده، یک ضرب داخلی روی  $V$  است.

سوال ۲. فرض کنید  $V$  یک فضای خطی حقیقی با بعد متناهی مجهز به ضرب داخلی است، و  $\{v_1, \dots, v_m\}$  زیرمجموعه ای متعامد و یکه از  $V$  است.

(آ) نشان دهید به ازای هر عضو از  $V$  مانند  $x$ ،

$$\sum_{i=1}^m \langle x, v_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

(ب) فرض کنید به ازای هر عضو از  $V$  مانند  $x$ ،

$$\sum_{i=1}^m \langle x, v_i \rangle^2 = \|x\|^2,$$

نشان دهید  $\{v_1, \dots, v_m\}$  پایه ای برای  $V$  است.

سوال ۳. خوش بگذرد!

موفق باشید.