

سوال ۱. دنباله فیبوناچی را با

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. تابع خطی T را با ضابطه $T(x, y) = (y, x + y)$ در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی مانند n ، $T^n(0, 1) = (F_n, F_{n+1})$.

ب) ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای T را پیدا کنید.

ج) با استفاده از (ب) و محاسبه $T^n(0, 1)$ نشان دهید

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

د) نتیجه بگیرید که F_n نزدیک‌ترین عدد صحیح به

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

است.

سوال ۲. فرض کنید T تابعی خطی روی \mathbb{R}^n است، چند جمله‌ای مشخصه آن به چند جمله‌ای‌های درجه یک تجزیه می‌شود، و $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ همه ویژه‌مقدارهای آن هستند. نشان دهید T قطری شدنی است اگر و فقط اگر به ازای هر $1 \leq i \leq k$

$$N(T - \lambda_i I) = N((T - \lambda_i I)^2).$$

سوال ۳. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $B \in M_m(\mathbb{R})$ و به علاوه، چند جمله‌ای‌های مشخصه هر دوی A و B به چند جمله‌ای‌های درجه یک تجزیه می‌شوند. نشان دهید اگر A و B ویژه‌مقدار مشترکی نداشته باشند، معادله $AX = XB$ جوابی بجز $X = 0$ ندارد.

موفق باشید.