

سوال ۱. فرض کنید V فضای خطی است، n عددی طبیعی است و $w, v_1, \dots, v_n \in V$. نشان دهید اگر v_1, \dots, v_n مستقل خطی باشند و w ترکیبی خطی از آنها نباشد آنگاه $w + v_1, \dots, w + v_n$ هم مستقل خطی هستند.

سوال ۲. فرض کنید m و n عددهایی طبیعی هستند، $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ و $r = \text{rank}(A)$. نشان دهید ماتریس‌های وارون‌پذیر P و Q وجود دارند که

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} Q.$$

سوال ۳. فرض کنید n عددی طبیعی است و $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

الف) نشان دهید اگر $AB = 0$ آنگاه

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n.$$

ب) نشان دهید همواره

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

ج) نشان دهید اگر $AB = BA$ آنگاه

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB).$$

موفق باشید.