سوال ۱. با استقرا روی n ثابت می‌کنیم که اگر $L \in M_n(\mathbb{R})$ پایین مثلثی باشد و عناصر روی قطر اصلی آن ناصفر باشند، آنگاه L^{-1} وجود دارد و پایین مثلثی است.

اگر $n=2$، $L = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix}$ آنگاه $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ \frac{-c}{ab} & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$.

حال فرض کنید به ازای هر ماتریس $(n-1)$ در $(n-1)$ با شرایط مفروض حکم برقرار است. فرض کنید

$$L = \begin{bmatrix} a & 0 \\ X & A \end{bmatrix}$$

که $A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ با درایه‌های قطر اصلی ناصفر و $a \neq 0$. در این صورت بنا بر فرض استقرا A^{-1} وجود دارد و پایین مثلثی است. قرار دهید

$$S = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{a} & 0 \\ \hline \frac{-1}{a} A^{-1} X & A^{-1} \end{array}\right]$$

S پایین مثلثی است. $LS = I$. بنا به نکته ثابت شده در کلاس $L^{-1} = S$.

سوال ۲. از این نکته استفاده می‌کنیم اگر L ماتریس مربعی و $LS = I$ آنگاه $SL = I$.

$$3A + 4B = AB$$

$$(A-4I)(B-3I) = 12I \Rightarrow (B-3I)(A-4I) = 12I$$

$$\Rightarrow BA = 3A + 4B$$

$$\Rightarrow BA = AB.$$

سوال ۳. فرض کنید J ماتریس n در n با درایه‌های همگی یک است. در این صورت

$$A = (n+1)I - J$$

$$A^{-1} = \frac{1}{n+1}\left((c-1)I + J\right)$$

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \left((n+1)I - J\right)\left((c-1)I + J\right) = (n+1)I$$

$$\Rightarrow \underbrace{-J^2}_{nJ} - (c-1)J + (n+1)J + (n+1)(c-1)I = (n+1)I$$

$$\Rightarrow (2-c)J + (n+1)(c-2)I = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c=2}$$

سوال ۴. الف) فرض کنید $f,g\in V_o$ ، $c\in\mathbb{R}$. در این صورت به ازای هر $x\in\mathbb{R}$

$$(cf+g)(-x) = cf(-x) + g(-x) = -cf(x) - g(x) = -(cf+g)(x);$$

$$\Rightarrow cf+g\in V_o$$

به طور مشابه، به ازای هر $f,g\in V_e$ ، $c\in\mathbb{R}$ و هر $x\in\mathbb{R}$؛

$$(cf+g)(-x) = cf(-x) + g(-x) = cf(x) + g(x) = (cf+g)(x)$$

$$\Rightarrow cf+g\in V_e$$

ب) فرض کنید $f\in V$ ، قرار می‌دهیم

$$g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \Rightarrow g(x) \in V_e$$

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x) \Rightarrow h(x) \in V_o$$

همچنین $f(x) = g(x) + h(x)$. درنتیجه $V = V_o + V_e$.

ج) فرض کنید $f \in V_o \cap V_e$. بنابراین به ازای هر x:

$$\begin{aligned} f \in V_e &\Rightarrow f(-x) = f(x) \\ f \in V_o &\Rightarrow f(-x) = -f(x) \end{aligned} \quad \Rightarrow \forall x \quad f(x) = -f(x) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall x \quad f(x) = 0$$

درنتیجه $\{0\} = V_o \cap V_e$.

سوال ۵. از فرض مسئله به دست می‌آید

$$(AB^T)^T = AB^T \Rightarrow BA^T = AB^T \Rightarrow BA^T - AB^T = 0$$

$$(CD^T)^T = DC^T \Rightarrow DC^T = CD^T \Rightarrow CD^T - DC^T = 0$$

$$AD^T - BC^T = I_n \Rightarrow DA^T - CB^T = I_n$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD^T - BC^T & -AB^T + BA^T \\ CD^T - DC^T & -CB^T + DA^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}.$$

و درنتیجه

$$\begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = I_{2n} \Rightarrow I_{2n} = \begin{bmatrix} D^TA - B^TC & D^TB - B^TD \\ -C^TA + A^TC & -C^TB + A^TD \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^TD - C^TB = I_n$$

سوال ۶. الف) چون $\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}$ مجموعه‌ای از n بردار مستقل خطی‌اند، پس

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}).$$

از طرفی $B \in M_n(\mathbb{R})$، $Bv \in \mathbb{R}^n$. بنابراین عددهای حقیقی $a_0, \dots, a_{n-1}$ وجود دارند که

$$Bv = a_0 v + a_1 Av + \dots + a_{n-1}A^{n-1}v \qquad (*)$$

ب) فرض کنید $1 \le i \le n$.

$$CA^iv = (a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} - B)A^iv$$

$$= (a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1}A^{n-1})A^iv - BA^iv$$

$$= A^i(a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1}A^{n-1})v - BA^iv$$

$$= A^i(a_0 v + a_1 Av + \dots + a_{n-1}A^{n-1}v) - BA^iv$$

$$\overset{(*)}{=} A^iBv - BA^iv$$

$$\overset{AB=BA}{=} A^iBv - A^iBv$$

$$= 0$$

ج) فرض کنید $w \in \mathbb{R}^n$. بنابراین عددهای حقیقی d_0، d_1، ...، d_{n-1} وجود دارند که

$$w = d_0 v + d_1 A v + \cdots + d_{n-1} A^{n-1} v$$

$$\Rightarrow Cw = d_0 Cv + d_1 CAv + \cdots + d_{n-1} CA^{n-1} v$$

بنا به قسمت (ب) $Cv = CAv = \cdots = CA^{n-1} v = 0$. بنابراین، به ازاء هر بردار $w \in \mathbb{R}^n$

$Cw = 0$. پس $C = 0$ که حکم ثابت می‌شود.

سوال ۷. فرض کنید c_1، ...، c_n عددهای حقیقی هستند که

$$c_1(w+v_1) + \cdots + c_n(w+v_n) = 0$$

بنابراین

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) w + \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$$

اگر $\sum_{i=1}^{n} c_i \neq 0$، آنگاه w ترکیب خطی از v_1، ...، v_n است؛ پس $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$ و

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$$

از آنجا که v_1، ...، v_n مستقل اند، پس $c_1 = \cdots = c_n = 0$. در نتیجه $w+v_1$، ...، $w+v_n$

مستقل خطی اند.

سوال ۸. می‌دانیم که ماتریس های وارون پذیر P_1، ...، P_k وجود دارند که ماتریس $P_k \cdots P_1 A$ ماتریس

تحویل شده سطری پلکانی است. قرار دهید $P = P_k \cdots P_1$. پس P وارون پذیر است، و

$$PA = R$$

که در آن

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & k_1 & & & k_2 & & & & k_r & \\
 & & & \downarrow & & & \downarrow & & & & \downarrow &
\end{array}\\
R = \left[\begin{array}{cccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * & 0 & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & 0 & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

و $\text{Rank}(A) = r$. به طوری که با اعمال ستونی مقدماتی، ماتریس های وارون پذیر $Q_1, \dots, Q_s$ موجود

دارد ستون های $k_1, \dots, k_r$ را به r ستون اول منتقل و با اضافه کردن مضربی از این ستونها به ستون های دیگر خواهیم

داشت

$$RQ_1 \cdots Q_s = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

قرار دهید $Q = Q_1 \cdots Q_s$ بنابراین

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

سوال ۹. الف.

$$0 = AB = A\left[B_1 \cdots B_n\right] = \left[AB_1 \ \cdots \ AB_n\right] = 0$$

$$\Rightarrow AB_1 = \cdots = AB_n = 0 \quad \Rightarrow C(B) \subseteq N(A)$$

$$\Rightarrow \text{Rank}\, B \le \dim N(A)$$

بنابر قضیه رتبه $\dim N(A) = n - \text{rank}(A)$. پس $\text{rank}\, B \le n - \text{rank}\, A$

در نتیجه

$$\text{rank}\, B + \text{rank}\, A \le n$$

ب- می دانیم که اگر V فضای خطی و W_1, W_2 زیرفضاهای با بعد متناهی V باشند، آنگاه

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

قرار دهید $W_1 = C(A)$, $W_2 = C(B)$. بنابراین

$$\dim\big(C(A)+C(B)\big) = \dim C(A) + \dim C(B) - \dim C(A)\cap C(B).$$

از طرفی $C(A+B) \subseteq C(A)+C(B)$. بنابراین

$$\dim C(A+B) \leq \dim C(A) + \dim C(B) - \dim\big(C(A)\cap C(B)\big)$$

$$\leq \dim C(A) + \dim C(B)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim C(A+B)}_{\operatorname{rank}(A+B)} \leq \underbrace{\dim C(A)}_{\operatorname{rank} A} + \underbrace{\dim C(B)}_{\operatorname{rank} B}$$

ج- بنابر قسمت ب:

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - \dim\big(C(A)\cap C(B)\big)$$

ادعا می‌کنیم $C(AB) \subseteq C(A)\cap C(B)$.

فرض کنید $y \in C(AB)$. بنابراین بردار $x \in \mathbb{R}^n$ موجود است که $y = ABx = A(Bx)$ پس $y \in C(A)$

از طرفی $AB = BA$، پس $y = BAx = B(Ax)$ در نتیجه $y \in C(B)$

بنابراین $y \in C(A)\cap C(B)$. در نتیجه

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(B) - \underbrace{\dim C(AB)}_{\operatorname{rank} AB}.$$

سوال ۱۰. بعد فضای سطری و بعد فضای ستونی A برابر است. $C(A^T)$ فضای تولید شده توسط ستون‌های A است، بنابراین $\dim C(A) = \dim C(A^T)$ در نتیجه

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T. \quad (*)$$

ادعا می‌کنیم $N(A^TA) = N(A)$.

$$\forall x \quad x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^TAx = 0 \Rightarrow x \in N(A^TA)$$

$$\forall x \quad x \in N(A^TA) \Rightarrow A^TAx = 0 \Rightarrow x^TA^TAx = 0 \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle = 0$$

$$\Rightarrow Ax = 0$$

$$\Rightarrow x \in N(A).$$

بنابر قضیه رتبه

$$\operatorname{rank}(A) = n - \dim N(A) = n - \dim N(A^TA) = \operatorname{rank}(A^TA).$$

چون $(A^TA)^T = AA^T$. پس

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A^TA) = \operatorname{rank}(AA^T).$$

سوال ۱۱. از $A^2 - A = 0$، پس $A(A-I) = 0$؛ در نتیجه

$$C(A-I) \subseteq N(A).$$

بنابر قضیه رتبه

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A-I) \leq \operatorname{rank} A + \dim N(A) = n. \quad (*)$$

از طرفی

$$n = \operatorname{rank}(A + I - A) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(I-A)$$

در نتیجه
$$n \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(I-A) \quad (**)$$

پس از $(*)$، $(**)$ تساوی برقرار است.

سوال ۱۲. فرض کنید $A=[A_1 \cdots A_p]$ ، $B=[B_1 \cdots B_q]$. نشان می‌دهیم

الف $\Rightarrow$ ب

ب $\Rightarrow$ ج

ج $\Rightarrow$ الف

(الف $\Rightarrow$ ب)

با توجه به فرض $C(A)\subseteq C(B)$ ، به ازای هر $1\le i\le p$ ، $A_i \in C(B)$؛ بنابراین اسکالرهای

حقیقی $c_1, \dots, c_q$ موجود هستند که $A_i = c_1B_1+\cdots+c_qB_q$

در نتیجه هر ستون A ترکیبی خطی از ستون‌های B است.

(ب $\Rightarrow$ ج) فرض کنید به ازای هر $1\le i\le p$ ، $A_i = c_{1i}B_1+\cdots+c_{qi}B_q$

بردار $\begin{bmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{qi} \end{bmatrix}$ را به عنوان ستون iام ماتریس C به ازای هر $1\le i\le p$ در نظر بگیرید. در این صورت

$$BC=[B_1 \cdots B_q]\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & \cdots & c_{qp} \end{bmatrix}$$

$$=\left[c_{11}B_1+\cdots+c_{q1}B_q \mid \cdots \mid c_{1p}B_1+\cdots+c_{qp}B_q\right]$$

$$=[A_1|\cdots|A_p]=A$$

(ج $\Rightarrow$ الف)

فرض کنید $A=BC$. اگر $y\in C(A)$، آنگاه $x\in \mathbb{R}^p$ موجود است که $y=Ax$. چون $A=BC$،

پس $y=BCx$ و در نتیجه $C(A)\subseteq C(B)$.

سوال ۱۳ . فرض کنید $\dim V = n$ ، $T: V \to \mathbb{R}$ تبدیل خطی است.

پایه متعامد یکه $\{q_1, \dots, q_n\}$ را برای V در نظر بگیرید. ادعا: $v \in V$ را می‌خواهیم طوری بیابیم که به ازای هر

$x \in V$ ، $T(x) = \langle v, x \rangle$. به عبارتی می‌خواهیم اسکالرهای مختلط $c_1, \dots, c_n$ را طوری بیابیم که

$$v = c_1 q_1 + \dots + c_n q_n$$

در این صورت $T(x) = \langle v, x \rangle$. به ازای هر $1 \le i \le n$

$$T(q_i) = \langle \sum_{j=1}^{n} c_j q_j , q_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle q_j, q_i \rangle = c_i$$

زیرا به ازای هر $i \neq j$ ، $\langle q_j, q_i \rangle = 0$ و $\langle q_i, q_i \rangle = 1$.

بنابراین کافیست $v = \sum_{i=1}^{n} T(q_i) q_i$. به ازای هر $x \in V$ چون $V = \operatorname{span}(\{q_1, \dots, q_n\})$

بنابراین $x = \sum_{i=1}^{n} d_i q_i$. بنابراین

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i T(q_i) = \langle v, x \rangle .$$

سوال ۱۴ . فرض کنید $\dim V = n$

الف - $\{v_1, \dots, v_m\}$ را متعامد یکه با استفاده از فرایند گرام اشمیت گسترش می‌دهیم فرض کنید

$$V = \operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\})$$

که $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V است. در این صورت به ازای هر $x \in V$ ، اسکالرهای مختلط

$d_1, \dots, d_n$ موجودند که

$$x = \sum_{i=1}^{m} d_i v_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i v_i$$

برای هر $1 \le i \le m$ ، داریم $\langle x, v_i\rangle = d_i$ در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{m} \langle x, v_i\rangle^2 = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 \le \sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} d_i^2 = \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \langle x, v_i\rangle^2 \le \|x\|^2 .$$

ب) برهان خلف. فرض کنید $\{v_1, \dots, v_m\}$ پایه‌ای برای V نباشد. قرار دهید

$$W = \operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_m\}) \subsetneq V.$$

چون $V = W \oplus W^\perp$ ، $W \subsetneq V$ ، بنابراین $W^\perp \neq 0$: $0 \neq q \in W^\perp$ $\{v_1, \dots, v_m, q\}$

را ~~[illegible]~~ به یک پایه برای V گسترش دهید بنابراین

$$\sum_{i=1}^{m} \langle q, v_i\rangle^2 = 0 \neq 1 = \|q\|^2$$

تناقض با فرض. نشان دادیم $W = V$ ، حکم ثابت می‌شود.