



دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام خدا

آزمون میان‌ترم دوم

جبر خطی

سمیرا حسین قربان

تاریخ آزمون: ۹۹/۹/۲۸

مدت آزمون: ۱۵۰ دقیقه

صفحه ۱ از ۲

- پاسخ‌هایتان را خوانا، با توضیح کامل و مستدل بنویسید.
- پاسخ هر سؤال را در برگه مستقل بنویسید.

۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ و V فضای پوچ A است.

- (الف) پایه‌ای برای V و پایه‌ای برای V^\perp پیدا کنید. (۵ نمره)
- (ب) ماتریس P_1 را که افکنش \mathbb{R}^3 بر V^\perp است به دست بیاورید. (۵ نمره)
- (ج) پایه‌ای متعامد و یک‌پایه برای V پیدا کنید، و P_2 را که ماتریس افکنش \mathbb{R}^3 بر V است به دست بیاورید. (۱۰ نمره)

۲. فرض کنید q_1, \dots, q_n به ازای $n \geq 3$ بردارهای متعامد و یک‌پایه در \mathbb{R}^n هستند. دترمینان هرکدام از ماتریس‌های زیر را حساب کنید.

- (الف) $\begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix}$ (۵ نمره)
- (ب) $\begin{bmatrix} q_1 + q_2 & q_2 + q_3 & \dots & q_{n-1} + q_n & q_n + q_1 \end{bmatrix}$ (۱۰ نمره)

۳. فرض کنید V فضای برداری است و W زیر فضای خطی V است. بردار ثابت $v_0 \in V$ را در نظر بگیرید.

- (الف) فرض کنید $w_0 \in W$ پای افکنش v_0 روی W است. نشان دهید به ازای هر $w \in W$ ، فاصله v_0 تا w_0 از فاصله v_0 تا w بیشتر نیست؛ به عبارت دیگر (۱۰ نمره)

$$\|v_0 - w_0\| \leq \|v_0 - w\|.$$

- (ب) فرض کنید $w_0 \in W$ برداری است که به ازای هر $w \in W$ ، فاصله v_0 تا w_0 از فاصله v_0 تا w بیشتر نیست، و فرض کنید $s_0 \in W$ پای افکنش v_0 بر W است. نشان دهید $w_0 = s_0$. (۱۰ نمره)
- راهنمایی: $\|v_0 - w_0\|^2 = \|v_0 - s_0 + s_0 - w_0\|^2$

۴. فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تبدیل خطی است و به ازای هر عضو از \mathbb{R}^n مانند x ، (۱۰ نمره)

$$\|T(x)\| = \|x\|.$$

- (الف) نشان دهید به ازای هر دو عضو از \mathbb{R}^n مانند x و y ،

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

- (ب) نشان دهید ماتریس نمایش تبدیل خطی T متعامد است. (۱۰ نمره)



دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام خدا

آزمون میان‌ترم دوم

جبر خطی

سمیرا حسین قربان

تاریخ آزمون: ۹۹/۹/۲۸

مدت آزمون: ۱۵۰ دقیقه

صفحه ۲ از ۲

۵. فرض کنید $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ ، ماتریس D وارون‌پذیر است و رتبه ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

برابر است با n .

(الف) حاصلضرب ماتریس P در

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix}$$

(۱۰ نمره)

را به دست بیاورید، و نشان دهید $A = BD^{-1}C$.

(۵ نمره)

(ب) نشان دهید

$$\begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix} = 0.$$

(۱۰ نمره)

(ج) آیا اگر D وارون‌پذیر نباشد، حکم قسمت قبل درست است؟ (ثابت کنید یا مثال نقض بیاورید).

موفق باشید.