

بسمه تعالی



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

جبر خطی

۲ آذر ماه ۱۴۰۰

زمان: ۱:۳۰ ساعت

امتحان میان ترم

امتیاز: ۱۰۰

توضیحات:

- لطفا پاسخ‌ها را خوانا بنویسید.
- به توضیحات ابتدای هر سوال توجه نمایید.
- اگر در سوالی مستقیم اشاره نشده باشد که همه چیز نیاز به اثبات دارد، می‌توانید از قضایا یا خواص مطرح شده در کلاس (نه هر منبعی) بدون اثبات استفاده نمایید.
- استفاده از اسلاید درس یا منابع اینترنتی یا صحبت با دوستانتان چه شفاهی چه کتبی در طول زمان امتحان مجاز نیست!

بخش اول- سوالات کوتاه پاسخ (۲۷ نمره) [زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه]

۱. (۸ نمره) مقدار نرم‌های $\|x\|_2$ و $\|x\|_\infty$ را برای بردارهای زیر محاسبه نمایید. پاسخ‌های نهایی لطفاً تا آخرین حد ساده شده باشد.

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{11}}{2} \end{bmatrix} \quad (a)$$

ب) $y = \begin{bmatrix} 2^t \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$ به طوری که t مقادیر مثبت صحیح دارد.

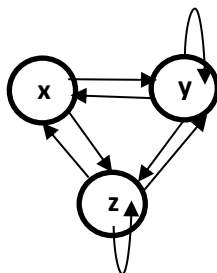
۲. (۵ نمره) اگر مجموعه برداری‌هایی در فضای R^2 به این صورت $M = \{(0,0), (2,0), (0,3), (1,1)\}$ داشته باشیم، آیا این مجموعه مستقل افاین (affine independent) هستند؟ دلیل آن را توضیح دهید.

۳. (۴ نمره) سه ماتریس $A_{10 \times 2}$ ، $B_{2 \times 10}$ ، $C_{10 \times 10}$ داریم. برای محاسبه بهینه ABC با چه ترتیبی ماتریس‌ها را در هم ضرب می‌کنید؟ (راهنمایی: از نظر تعداد flop و حافظه بررسی نمایید)

۴. (۵ نمره) پوش محدب (Convex hull) مجموعه $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} : 0 \leq y < 1 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ در فضای دوبعدی را توصیف نمایید. (توصیف: یعنی رسم و توضیح دهید)

۵. (۵ نمره) ضرب داخلی دو بردار با اندازه یکسان را بر حسب ضرب خارجی آن‌ها به دست آورید.

۶. (۵ نمره) با روش‌های خوانده شده در جبر خطی تعداد مسیرها به طول پنج از x به z را در شکل زیر به دست آورید.



بخش دوم - درست/نادرست (۱۸ نمره) [زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه]

مواردی که درست هستند: حل آن را بنویسید یا دلیلی برای درستی ذکر نمایید.

مواردی که نادرست هستند: یا یک مثال نقض بنویسید یا جمله‌ی آن را به شیوه منطقی (!) اصلاح نمایید.

در کل نشان دهید که با دلیل جملات را قبول یا رد می‌کنید نه تصادفی!

۱. مجموعه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب اعداد حقیقی یک فیلد هستند.

۲. A یک ماتریس پادمتقارن است، برای هر ستون x این ماتریس داریم: $x^T A x = 0$

۳. تبدیل خطی که ماتریس استاندارد آن مربعی باشد، پوشاست (onto) است اگر و فقط اگر یک به یک (one to one) باشد.

۴. ماتریس (A) با ۵ سطر و ۳ ستون که $Ax = 0$ فقط در حالت $x = 0$ برقرار باشد، full rank است.

۵. ترکیب affine دو نقطه در فضای دوبعدی، فضایی ایجاد شده بین بردارهای گذرنده از مبدا تا این نقاط است.

(راهنمایی: اگر جمله ناواضح است، برای اینکه اشتباه نکنید تصویر روبرو را ببینید!)

۶. اگر A و B دو ماتریس هم ارز سطری باشند، آنگاه فضای ستونی‌شان باهم برابر است.



بخش سوم - سوالات محاسباتی (۵۵ نمره) [زمان پیشنهادی: ۴۰ دقیقه]

۱. (۱۰ نمره) مجموعه داده‌های جدول زیر حاصل مشاهدات یک آزمایش هستند. ادعا می‌کنیم که این داده‌ها با یک چندجمله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ مدل‌سازی می‌شوند. با استفاده از روش row reduced echelon form (RREF) پارامترهای این مدل را به دست آورید.

y	x
5	-2
2	-1
0	1
3	2

۲. (۲۰ نمره) یک تصویر داریم که هر پیکسل آن با یک بردار RGB نمایش داده می‌شود. ما بردارهای scaled شده‌ی چهار تا از پیکسل‌های این تصویر را به اسم u, v, u_2 و u_1 داریم که یکی از آن‌ها تخریب شده و مقادیر آن خالی است! ولی طبق دانش پیشین می‌دانیم که بردارهایی که اسم u دارند، باهم یک مجموعه متعامد (orthogonal) هستند. (ا) ابتدا بردار تخریبی را تخمین بزنید. سپس با استفاده از مجموعه بردارهای u پایه‌های یک متعامد (orthonormal) برای فضای R^3 به دست آورید.

ب) زاویه‌ی (angle) پایه‌های یک متعامد به دست آمده از قسمت قبل را با بردار $[1,0,0]^T$ به دست آورید. آنگاه برحسب زاویه‌شان مرتب کرده و اسم آن‌ها را t_i به ترتیب از $i = 1, 2, \dots$ بگذارید (راهنمایی: مسلماً i تعدادش محدوده اما ننوشتیم که خودتون از قسمت اول در بیارین!)

ج) زیرفضای W ای را در نظر بگیرید که با $\{t_1, t_2\}$ اسپن (span) شده است. فاصله‌ی (distance) بردار v را از زیرفضای W به دست آورید.

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۳. (۵ نمره) اگر ماتریس A مربعی باشد و بدانیم که عدد طبیعی وجود دارد که با توان رساندن این ماتریس با آن عدد به ماتریس پوچ (null matrix) برسیم، آنگاه $(I - A)^{-1}$ را حساب نمایید. (راهنمایی: اگر اسم ماتریس پوچ برایتان عجیب است، در کلاس صحبت کرده بودیم.)

۴. (۲۰ نمره) اگر $A, B \in R^{n \times n}$ و $AB = 0$. ثابت کنید که $\dim(\ker(A)) + \dim(\ker(B)) \geq n$. (راهنمایی:)

- در طی حل سوال اگر از لم‌های مختلف استفاده می‌کنید، اثباتشان کنید.
- می‌دانیم که \ker یا هسته همان فضای پوچ (null space) است.

موفق باشید