

سوال ۱

فرض کنید V فضای برداری تمام توابع حقیقی است، و V_o و V_e را به ترتیب مجموعه تابع های حقیقی زوج (یعنی تابع های حقیقی مانند f که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = f(x)$) و مجموعه تابع های حقیقی فرد (یعنی تابع های حقیقی مانند f که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$) بگیرید.

(آ) نشان دهید V_o و V_e زیر فضای V هستند.

(ب) نشان دهید $V_e + V_o = V$.

(ج) نشان دهید $V_e \cap V_o = \{0_V\}$ (0_V تابع ثابت صفر است).

سوال ۲

فرض کنید n عددی طبیعی است، A و B و C و D ماتریس های n در n با درایه های حقیقی هستند، AB^T و CD^T متقارن اند و نیز $AD^T - BC^T = I$. نشان دهید $A^T D - C^T B = I$.

راهنمایی: وارون ماتریس بلوکی $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

سوال ۳

فرض کنید n عددی طبیعی است، A و B ماتریس هایی n در n با درایه های حقیقی هستند که $AB = BA$ و نیز v یک بردار ستونی در \mathbb{R}^n است که بردارهای $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ مستقل خطی هستند.

(آ) نشان دهید عددهای حقیقی a_0, \dots, a_{n-1} وجود دارند که

$$Bv = a_0 v + a_1 Av + \dots + a_{n-1} A^{n-1} v.$$

(ب) فرض کنید

$$C = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} - B.$$

نشان دهید به ازای هر عدد صحیح نامنفی مانند i که $0 \leq i < n$ ، $CA^i v = 0$.

(ج) نشان دهید

$$B = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$