**۱.** فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $V$ فضای پوچ $A$ است.

(الف) پایه‌ای برای $V$ و پایه‌ای برای $V^\perp$ پیدا کنید.

(ب) ماتریس $P_1$ را که افکنش $\mathbb{R}^3$ بر $V^\perp$ است به‌دست بیاورید.

(ج) پایه‌ای متعامد و یکه برای $V$ پیدا کنید، و $P_2$ را که ماتریس افکنش $\mathbb{R}^3$ بر $V$ است به‌دست بیاورید.

**پاسخ.**

(الف) مجموعه‌های $B_1 = \{a, b\}$ و $B_2 = \{c\}$ به‌ترتیب پایه برای $V$ و $V^\perp$ هستند که

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(ب) چون $V$ فضای پوچ $A$ است، $V^\perp$ فضای تولید شده با بردار $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ است. ماتریس افکنش روی خط تولید شده با بردار $c$ برابراست با

$$P_1 = \frac{cc^T}{c^Tc} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج) با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت:

$$q_1 = \frac{1}{||a||}a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = b - (q_1^T b)q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{q_1, q_2\}$ پایه متعامد یکه برای $V^\perp$ است. چون $V = \mathrm{span}(\{q_1, q_2\})$، ماتریس افکنش $\mathbb{R}^3$ بر $V$ برابراست با

$$\begin{aligned} P_2 &= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

---

**۲.** فرض کنید $V$ فضای برداری است و $W$ زیر فضای خطی $V$ است. بردار ثابت $v_0 \in V$ را در نظر بگیرید.

(الف) فرض کنید $w_0 \in W$ پای افکنش $v_0$ روی $W$ است. نشان دهید به‌ازای هر $w \in W$، فاصله‌ی $v_0$ تا $w_0$ از فاصله‌ی $v_0$ تا $w$ بیشتر نیست؛ به عبارت دیگر

$$\|v_0 - w_0\| \leq \|v_0 - w\|.$$

(ب) فرض کنید $w_0 \in W$ برداری است که به‌ازای هر $w \in W$، فاصله‌ی $v_0$ تا $w_0$ از فاصله‌ی $v_0$ تا $w$ بیشتر نیست، و فرض کنید $s_0 \in W$ پای افکنش $v_0$ بر $W$ است. نشان دهید $w_0 = s_0$.

راهنمایی: $\|v_0 - w_0\|^2 = \|v_0 - s_0 + s_0 - w_0\|^2$!

**پاسخ.** توجه کنید که اگر $\alpha \in W$ و $\beta \in W^\perp$ آنگاه

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$$

(الف) می‌دانیم $V = W \oplus W^\perp$. بنابراین $w_1 \in W^\perp$ وجود دارد $v_0 = w_0 + w_1$.
به‌ازای هر $w \in W$،

$$\begin{aligned} \|v_0 - w\|^2 &= \|(w_0 - w) + w_1\|^2 \\ &= \|w_0 - w\|^2 + \|w_1\|^2 + 2\langle w_0 - w, w_1 \rangle \\ &= \|w_0 - w\|^2 + \|w_1\|^2 \\ &= \|w_0 - w\|^2 + \|v_0 - w_0\|^2 \\ &\geq \|v_0 - w_0\|^2. \end{aligned}$$

(چون $w_0 - w \in W$ و $w_1 \in W^\perp$ باید $\langle w_0 - w, w_1 \rangle = 0$.)

(ب) چون $s_۰$ پای افکنش $v_۰$ بر $W$ است، $s_۱ \in W^\perp$ وجود دارد که $v_۰ = s_۰ + s_۱$، و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\|v_۰ - w_۰\|^۲ &= \|v_۰ - s_۰ + s_۰ - w_۰\|^۲ \\
&= \|v_۰ - s_۰\|^۲ + \|s_۰ - w_۰\|^۲ + ۲\langle v_۰ - s_۰, s_۰ - w_۰\rangle \\
&= \|v_۰ - s_۰\|^۲ + \|s_۰ - w_۰\|^۲ \\
&\geq \|v_۰ - s_۰\|^۲.
\end{aligned}$$

از طرفی بنا به فرض $\|v_۰ - w_۰\|^۲ \leq \|v_۰ - s_۰\|^۲$؛ پس $\|s_۰ - w_۰\| = ۰$ یعنی $s_۰ = w_۰$.

---

**۳.** فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تبدیل خطی است و به ازای هر از $\mathbb{R}^n$ مانند $x$ ،

$$\|T(x)\| = \|x\|$$

(الف) نشان دهید به ازای هر دو عضو از $\mathbb{R}^n$ مانند $x$ و $y$ ،

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

(ب) نشان دهید ماتریس نمایش تبدیل خطی $T$ متعامد است.

(الف) میتوانیم بنویسیم

$$\|T(x+y)\|^۲ = \|T(x)\|^۲ + \|T(y)\|^۲ + ۲\langle T(x), T(y)\rangle,$$

و

$$\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ + ۲\langle x, y\rangle,$$

پس $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ .

(ب) ماتریس نمایش تبدیل خطی $T$ بابر است با

$$A = \begin{bmatrix} T(e_۱) & T(e_۲) & \dots & T(e_n) \end{bmatrix}.$$

به ازای $۱ \leq i < j \leq n$ میدانیم که

$$\|T(e_i)\| = \|e_i\| = ۱ ،$$
$$\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = ۰;$$

پس $A$ ماتریس متعامد است.