دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

مدارهای منطقی

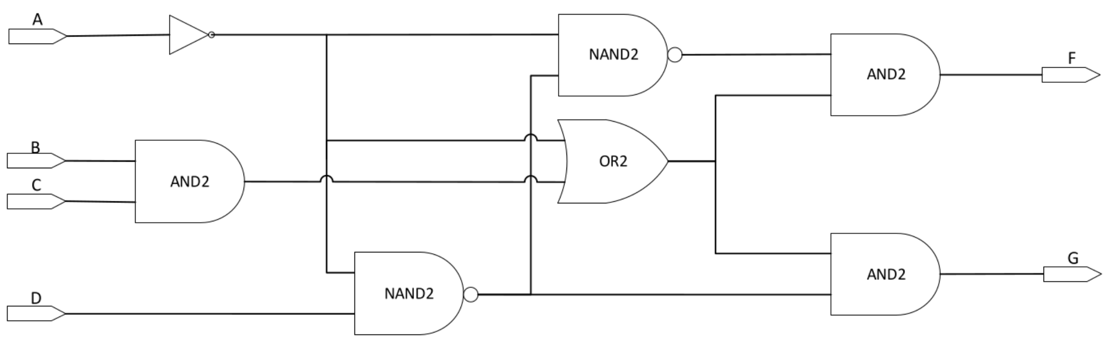
پاییز ۱۴۰۳
استاد: دکتر صدیقی، دکتر صاحب‌الزمانی
تدریس یاران: رضا آدینه پور، مرتضی عادل‌خانی

پاسخ‌نامه تمرین دوم — **ساده‌سازی جدول کارنو** — مهلت ارسال: ۱ آبان

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است. برای انجام تمرین زمان کافی اختصاص داده شده است. انجام آن را به‌هیچ‌وجه به روزهای پایانی موکول نکنید.
- سوالات خود را از طریق ایمیل‌های adinepour@aut.ac.ir و madelkhani@aut.ac.ir و یا در کلاس حل‌تمرین از تدریس‌یاران بپرسید.
- صرفا تمارین آپلود شده در سامانه courses تصحیح می‌شوند.
- حتما در نام‌گذاری فایل‌های آپلودی خود از قالب $\{HWx\}\_\{STD\_Number\}\_\{Name\}$ تبعیت کنید.
- پاسخ‌های ارسالی منحصراً باید حاصل تلاش‌های فردی شما باشد. در صورت استفاده از منابع خارجی یا هم‌فکری، حتماً این موارد را ذکر کنید.
- در صورت مشاهده **هرگونه تقلب**، نمره ۳ سری تمرین برای تمام افراد شرکت‌کننده، **صفر** لحاظ خواهد شد.

سوالات اصلی (۹۰ نمره)

۱. (۱۰ نمره) مدار زیر را با استفاده از جدول کارنو به ساده‌ترین فرم ممکن برای هر دو حالت SoP و PoS در آورید و سپس مدار هر یک از دو حالت را رسم کنید.



حل. ابتدا توابع خروجی F و G را به‌دست می‌آوریم:

- $F = [A' \cdot (A'D)']' \cdot [BC + A'] = [A + (A'D)] \cdot [BC + A'] = ABC + A'BCD + A'D$
- $G = [A'D]' \cdot [A' + BC] = [A + D'] \cdot [A' + BC] = ABC + A'D' + BCD'$

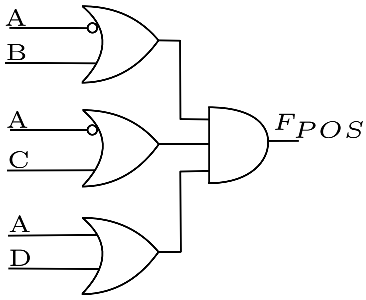
سپس برای هر کدام از توابع F و G جدول کارنو رسم می‌کنیم.
برای تابع F داریم:

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01			0	0
11				0
10	0	0		0

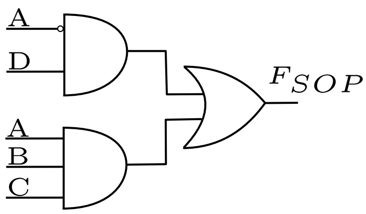
$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11	1	1	1	
10			1	

$(POS): F = (A' + B) \cdot (C + A') \cdot (A + D)$

$(SOP): F = A'D + ABC$



F_{POS} (آ)



F_{SOP} (ب)

شکل ۱: مدار ساده شده تابع F

همچنین برای تابع G داریم:

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00			0	0
01	0	0	0	0
11	0	0		0
10				0

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11			1	
10	1	1	1	

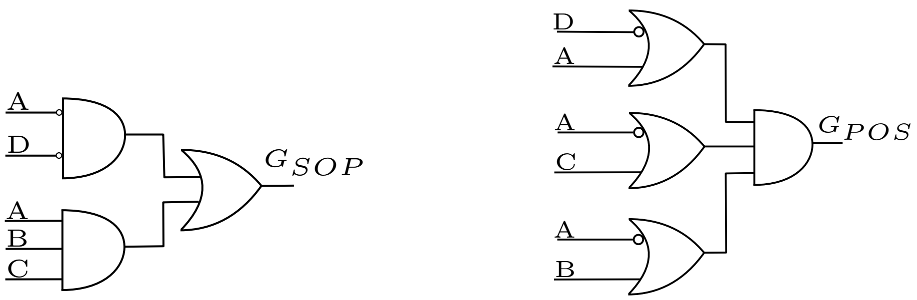
$(POS): G = (A + D') \cdot (A' + C) \cdot (A' + B)$

$(SOP): G = A'D' + ABC$

۲. (۱۰ نمره) تابع‌های بولی ۴ متغیری زیر را در نظر بگیرید:

(a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(1, 3, 4, 5, 9, 13, 15) + d(7, 11, 12, 14)$

(b) $f(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 4, 7, 11) + d(5, 12, 13, 14, 15)$



(آ) G_{POS} (ب) G_{SOP}

شکل ۲: مدار ساده شده تابع G

(آ) تمام PI ها و EPI های جدول کارنو تولید شده برای هر تابع را نشان دهید.

(ب) با استفاده از جدول کارنو یک عبارت SOP برای هر تابع به‌دست آورید.

حل. ابتدا جدول کارنو این دو تابع را رسم می‌کنیم:

CD \ AB	00	01	11	10
00		1	-	
01	1	-	-	
11	1	1	-	1
10			-	

$$f = C'B + DA' + CD$$
$$PIs = C'B, DA', CD$$
$$EPIs = PIs$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		1	-	
01	1	1	1	1
11	1	-	1	-
10			-	

$$f = x_4 + x2x_3'$$
$$PIs = x_4, x_2x_3'$$
$$EPIs = PIs$$

۳. (۱۵ نمره) مدار زیر با ۴ ورودی، IN۱، IN۲، IN۳، IN۴ و ۴ خروجی OUT۱، OUT۲، OUT۳، OUT۴ را در نظر بگیرید.

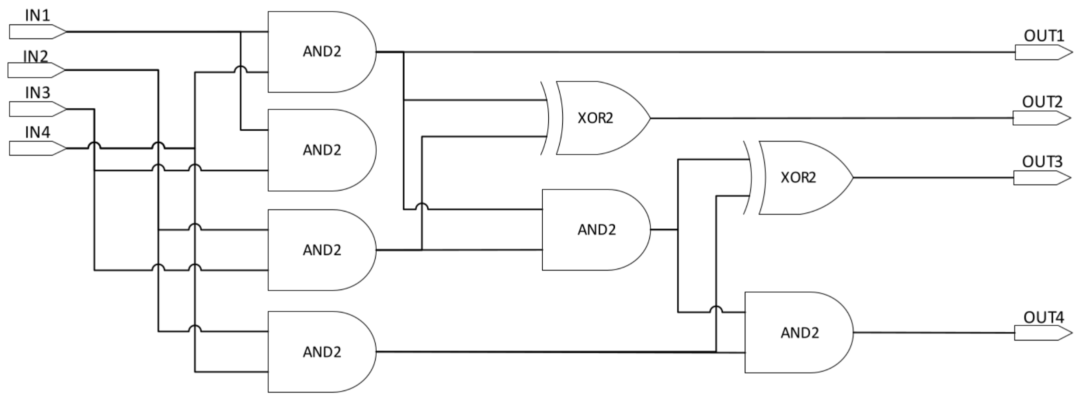
(آ) جدول صحت[۱] این مدار را استخراج کنید.

(ب) با استفاده از جدول کارنو مدار را برای پیاده‌سازی POS مستقیماً ساده کنید و سپس آن را دوباره بکشید.

حل.

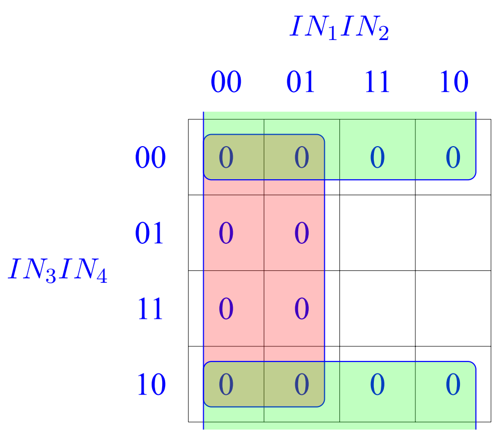
(الف) جدول درستی مدار به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

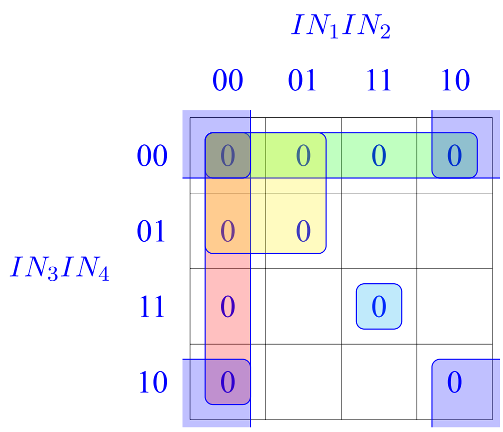
[۱] Truth Table



IN_1	IN_2	IN_3	IN_4	OUT_1	OUT_2	OUT_3	OUT_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1

(ب) جداول کارنو برای چهار خروجی به‌صورت زیر می‌شود:





$$OUT_1 = IN_4 \cdot IN_1$$

$$OUT_2 = (IN_3 + IN_4) \cdot (IN_1 + IN_2) \cdot (IN_2 + IN_4) \cdot (IN_1' + IN_2' + IN_3' + IN_4')$$

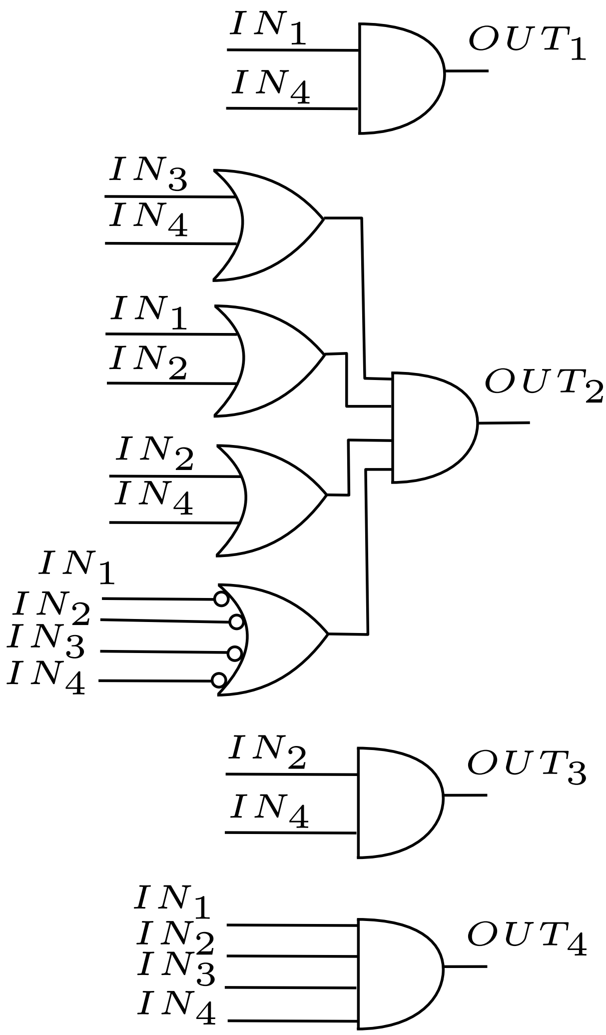
IN_3IN_4 \ IN_1IN_2	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0			0
11	0		0	0
10	0	0	0	0

$$OUT_3 = IN_4 \cdot IN_2$$

IN_3IN_4 \ IN_1IN_2	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0		0
10	0	0	0	0

$$OUT_4 = IN_1 \cdot IN_2 \cdot IN_3 \cdot IN_4$$

همچنین مدار ساده شده به‌صورت زیر رسم می‌شود:



شکل ۳: مدار ساده شده

۴. (۲۰ نمره) می‌خواهیم با استفاده از چهار ورودی (A, B, C, D) و یک نمایشگر هفت قطعه‌ای (7 Segment)

خروجی‌هایی مطابق جدول زیر مشاهده کنیم (به عبارت دیگر، می‌خواهیم یک Binary-to-7-Segment Decoder طراحی کنیم).

A	B	C	D	Display
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	A
0	1	0	0	3
0	1	0	1	4
0	1	1	0	P
0	1	1	1	5
1	0	0	0	6
1	0	0	1	C
1	0	1	0	7
1	0	1	1	8
1	1	0	0	U
1	1	0	1	9
1	1	1	0	E
1	1	1	1	F

(آ) جدول صحت برای نمایش وضعیت تمامی خروجی‌ها (وضعیت هر قطعه از 7segment) را بر اساس اسم‌گذاری‌های اسلاید ۱۸ از مجموعه اسلاید ۶ رسم کنید. راهنمایی: این جدول باید مشابه جدول اسلاید ۱۹ از همان مجموعه اسلاید باشد.

(ب) با استفاده از جدول کارنو توابع ساده شده هر یک از خروجی‌های هفت‌گانه را تعیین کنید (مشابه اسلاید ۲۰).

حل.

(آ) جدول درستی این طراحی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

A	B	C	D	$Display$	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	2	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	A	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	3	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	4	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	P	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	5	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	6	X	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	C	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	7	1	1	1	0	0	X	0
1	0	1	1	8	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	U	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	9	1	1	1	X	0	1	1
1	1	1	0	E	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	F	1	0	0	0	1	1	1

(ب) سپس برای هر یک از خروجی‌های (هر Digit از 7-Seg) این جدول، جدول کارنو رسم می‌کنیم و معادله آن را به‌دست می‌آوریم. (پاسخ‌های این سوال Unique نمی‌باشد)

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1	1		-
01			1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$a = C + AD + A'D'$

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1	1	1	
11	1			1
10	1	1		1

$b = A'B' + BC' + A'D' + B'C$

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	
11	1	1		1
10				1

$c = C'D' + A'D + BC' + AB'C$

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			-	1
11		1		1
10	1		1	

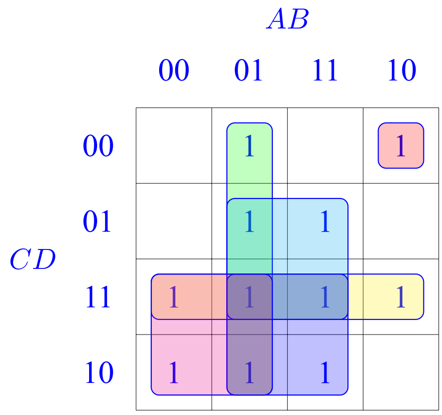
$d = D'C' + AB'D + ABD' + A'B'D' + A'BCD$

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1		1	1
01				1
11	1		1	1
10	1	1	1	

$e = A'B'C + BCD' + ACD + AB'C' + AC'D' + B'C'D'$

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	1
11	1	1	1	1
10		1	1	-

$f = A + BD + BC + CD + B'C'D'$



$$g = CD + A'C + BA' + BC + BD + AB'C'D'$$

۵. (۱۵ نمره) سوال‌های ۵.۵۰ و ۵.۴۵ واقع در صفحه ۱۶۵ و ۱۶۶ کتاب مرجع درس مدارهای منطقی را حل کرده و پاسخ آن را بنویسید. حل. متن سوال ۵.۴۵ به‌صورت زیر است:

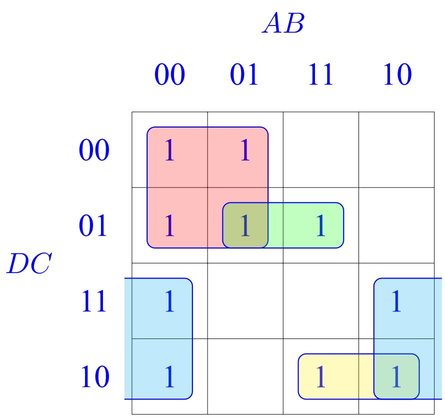
5.45. Find the minimum sum of products for each function. Then, make the specified minterm a don't-care and verify that the minimum sum of products is unchanged. Now, start again with the original expression and find each minterm which could individually be made a don't-care, without changing the minimum sum of products.

(a) $F(A, B, C, D) = A'C' + A'B' + ACD' + BC'D, minterm2$

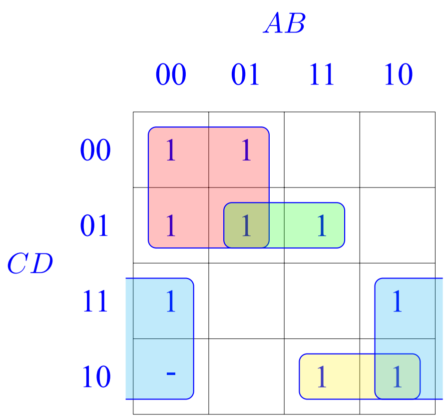
(b) $F(A, B, C, D) = A'BD + AC'D + AB' + BCD + A'C'D, minterm7$

برای قسمت (a) مطابق با دو جدول کارنو زیر مشاهده می‌شود که اگر مینترم ۲ را به عنوان حالت Dont Care درنظر بگیریم، تفاوتی در حاصل خروجی ایجاد نمی‌شود. در ادامه سوال گفته شده است که به‌ترتیب اگر هرکدام از مینترم‌های جدول را به عنوان DC درنظر بگیریم، آیا حاصل تابع خروجی تغییر می‌کند یا خیر؟

با بررسی تک به تک این حالات مشخص می‌شود که مینترم‌های ۴، ۱۳ و ۱۴ اگر به‌عنوان DC درنظر گرفته شوند، حاصل تابع را تغییر می‌دهند و به ترتیب ترم‌های $A'C'$ و $BC'D$ یا ACD' را به‌ترتیب حذف می‌کنند.

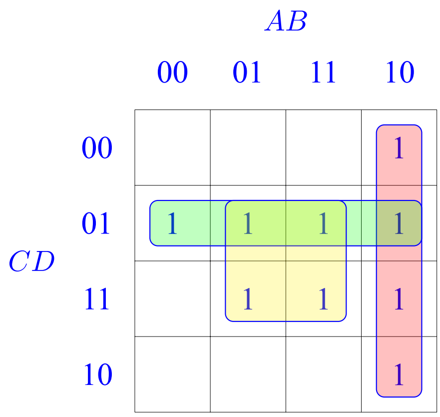


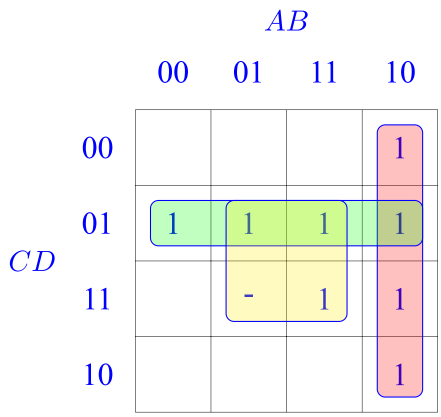
$$F = A'B' + A'C' + BC'D + ACD'$$



$$F = A'B' + A'C' + BC'D + ACD'$$

همچنین برای قسمت (b) سوال نیز مطابق با قسمت قبل عمل می‌کنیم.





$F = C'D + AB' + BD$ $\qquad$ $F = C'D + AB' + BD$

بنابراین با درنظر گرفتن مینترم شماره ۷ به‌عنوان جالت DC، تابع خروجی تغییری نمیکند. همانند قسمت قبل این کار را برای سایر مینترم‌ها نیز تکرار می‌کنیم. فقط مینترم شماره ۱ است که حاصل خروجی را تغییر می‌دهد و ترم $C'D$ را حذف می‌کند.

متن سوال ۵.۵۰ به‌صورت زیر است:

5.50. Four of the minterms of an incompletely specified function $f(a,b,c,d)$ are m_0, m_1, m_4, and m_5.

(a) Specify additional minterms and don't-cares for f so that f has five prime implicants with two literals and no other prime implicants and, in addition, f has one prime implicate with one literal and two prime implicates with two literals

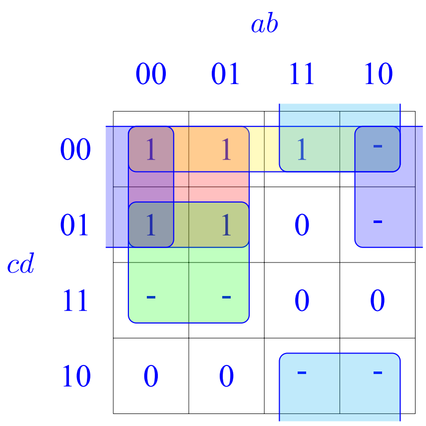
(b) For each prime implicant, give its algebraic representation and specify whether it is an essential prime implicant.

(c) Determine all minimum sum-of-products expressions for f .

(d) For each prime implicate, give its algebraic representation and specify whether it is an essential prime implicate.

(e) Determine all minimum product-of-sums expressions for f .

(آ) یکی از حالت‌هایی که شرایط گفته شده در این قسمت را رعایت می‌کند به‌صورت زیر است.



$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,4,5,12) + d(3,7,8,9,10,14)$$

(ب) Nonessentials: $a'd, c'd', a'c', b'c', ad'$

(ج)
- $f = a'd + c'd'$
- $f = a'c' + c'd'$
- $f = a'c' + ad'$

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	1	1	1	-
01	1	1	0	-
11	-	-	0	0
10	0	0	-	-

(د) Essentials: $c', a' + d'$ and Nonessential:$a' + b$

(ه) $f = (c') \cdot (a' + d')$

۶. (۱۰ نمره) توابع زیر را از فرم استاندارد به فرم کاننیکال تبدیل کنید:

(a) $f(A, B, C) = AC' + BC' + ABC$

(b) $f(A, B, C) = (C + A')(B + C')(A + B + C)(A' + B')$

(c) $f(A, B, C, D, E) = B \cdot D' \cdot E + A \cdot B' \cdot D + A \cdot C \cdot D' \cdot E + A \cdot C' \cdot E$

حل.

برای حل این سوال می‌توان از دو روش:

(آ) جبر بول

(ب) جدول کارنو

استفاده کرد که هردوی آن صحیح است. ما در این سوال از جدول کارنو استفاده می‌کنیم. تنها کافیست مینترم/ماکسترم متناظر با تابع داده را پیدا کنیم:

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0		1	1	1
1			1	

$f(A, B, C) = AB + AC' + BC'$ or

$f(A, B, C) = \sum m(2, 4, 6, 7)$ or

$f(A, B, C) = (A + B) \cdot (B + C') \cdot C'$ or

$f(A, B, C) = \prod M(0, 4, 5, 6)$

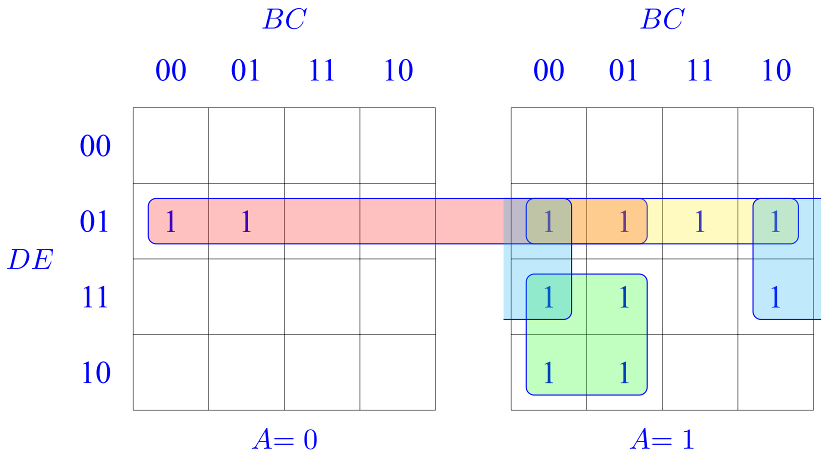
$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	0		0	0
1	0		0	0

$f(A, B, C) = A'B$ or

$f(A, B, C) = \sum m(1, 5)$ or

$f(A, B, C) = (A) \cdot (B)$ or

$f(A, B, C) = \prod M(0, 2, 3, 4, 6, 7)$



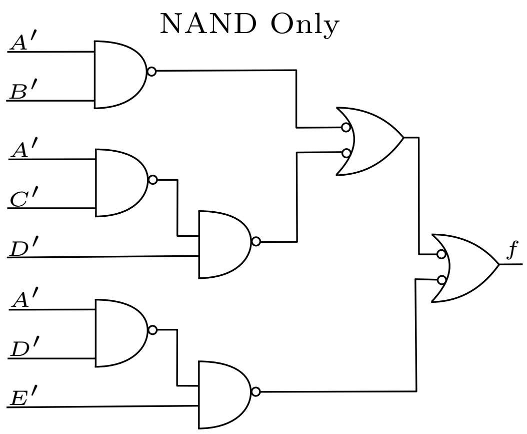
$$f(A,B,C) = AD'E + ADB' + AEC' + D'EB' \text{ or}$$
$$f(A,B,C) = \sum m(1,5,17,18,19,21,22,23,25,27,29) \text{ or}$$
$$f(A,B,C) = (A'+D+E')\cdot(A'+D'+B)\cdot(A'+E'+C)\cdot(D+E'+B) \text{ or}$$
$$f(A,B,C) = \prod M(0,2,3,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,20,24,26,28,30)$$

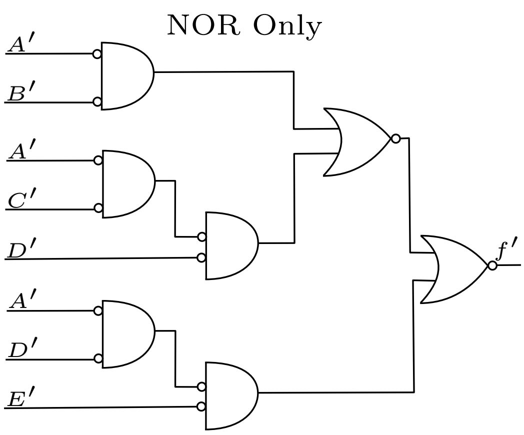
۷. (۱۰ نمره) توابع زیر را بدون ساده‌سازی یک بار فقط با استفاده از NANDهای ۲ـورودی و یک بار فقط با استفاده از NORهای ۲ـورودی پیاده‌سازی کنید:

(a) $F = A'[B' + C'D' + DE]$

(b) $F = A + BCD' + BCE' + BDE'$

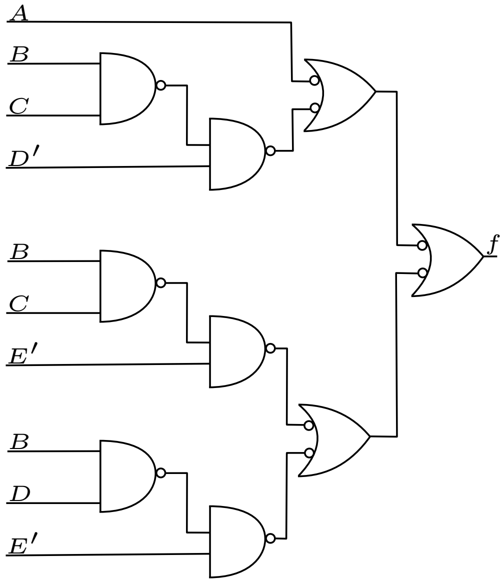
حل. برای قسمت (a) داریم:



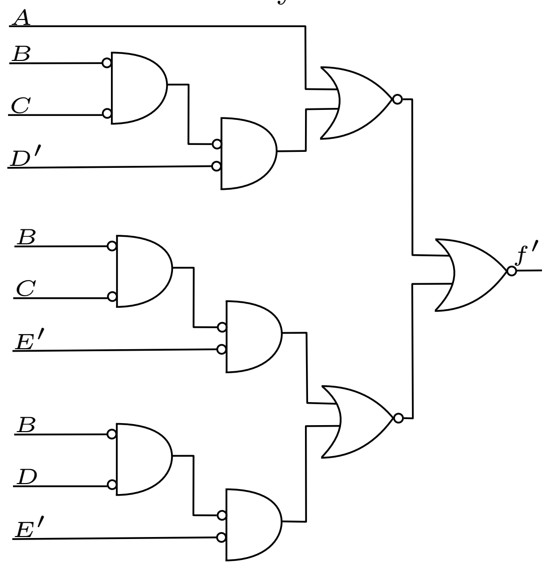


برای قسمت (b) داریم:

NAND Only



NOR Only



سوالات امتیازی (۴۰ نمره)

۱. (۲۵ نمره) یک تصویر ۴ × ۴ با ۱۶ پیکسل را در نظر بگیرید. هر پیکسل می‌تواند یکی از دو حالت سیاه (۱) یا سفید (۰) باشد (تصویر به صورت سیاه و سفید است). در این تصویر یک مربع ۲ × ۲ وجود دارد که می‌خواهیم آن را تشخیص دهیم.

همان‌طور که گفته شد، تصویر سیاه و سفید است و مربع ایجاد می‌شود که ۴ پیکسل در کنار هم یک مقدار (۰ یا ۱) داشته باشند و دیگر پیکسل‌ها مقدار دیگری داشته باشند. با توجه به این موضوع می‌توان دریافت که در حالتی که بیشتر از یک مربع در تصویر ایجاد شود، مربع تشخیص داده نمی‌شود. نمونه‌های حضور مربع در زیر نمایش داده شده است:

تصویر از ۴ بلوک ۲ × ۲ تشکیل شده است که هر کدام از این بلوک‌ها تنها می‌توانند یکی از چهار حالت زیر را داشته باشند.

با توجه به توضیحات داده شده مداری طراحی کنید که حالات موجود در تصویر را دریافت کند بتواند مربع تولید شده در تصویر را تشخیص دهد. در صورت وجود یک مربع مقدار یک در خروجی ایجاد کند و در غیر این صورت مقدار صفر تولید کند.

برای این کار مراحل زیر را انجام داده و گزارش دهید:

(آ) ابتدا جدول صحت مدار مورد نظر را بنویسید.

(ب) تابع بولی به دست آمده از جدول صحت را بنویسید (بدون ساده‌سازی).

(ج) با استفاده از جدول کارنو تابع را ساده کنید.

(د) مدار متناظر با تابع ساده شده را رسم کنید.

✓

۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۱

✓

۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱

✓

۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱

✗

۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱

✗

۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰

✗

۱	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۱

۰	۰
۰	۰

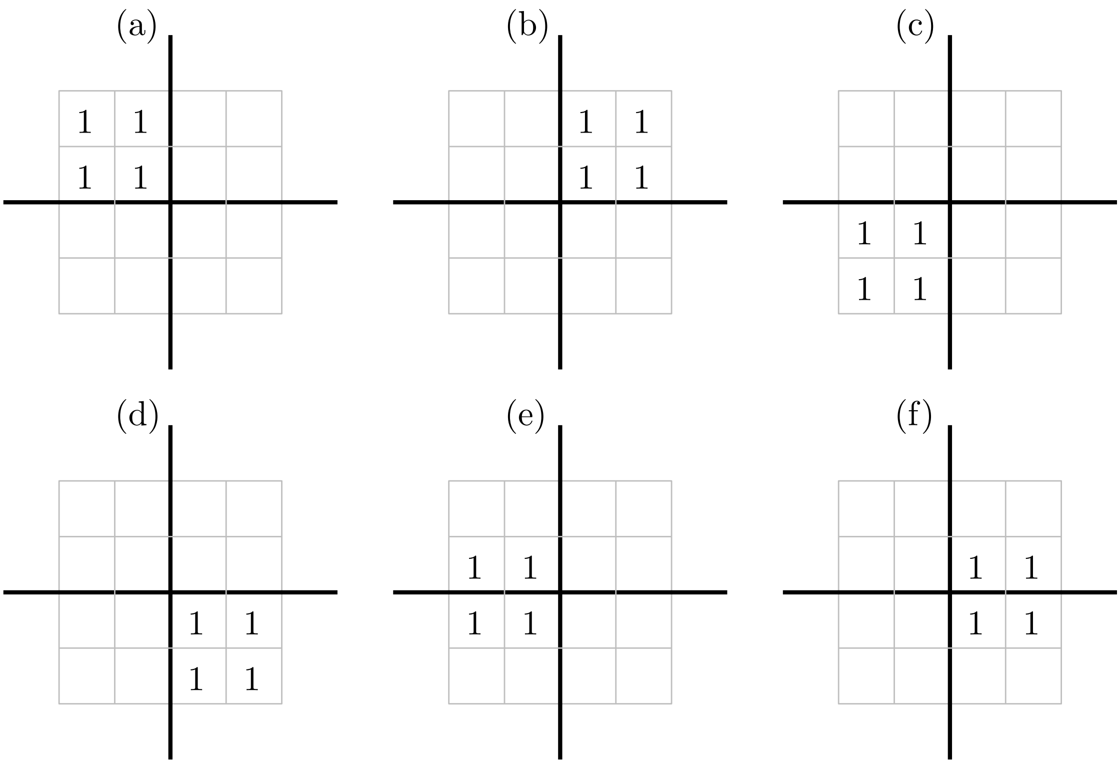
۱	۱
۱	۱

۰	۰
۱	۱

۱	۱
۰	۰

حل. حالت‌های مجازی که می‌تواند در تصویر ۴ × ۴ مربع تشکیل شود به‌صورت زیر است:

حالا هرکدام از این حالت‌ها را به عنوان یک تابع درنظر می‌گیریم و برای قسمت (آ) جدول درستی آن را می‌نویسیم:



A	B	C	D	f_a	f_b	f_c	f_d	f_e	f_f
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1

خروجی ساده نشده توابع به‌صورت زیر می‌شود:

(a) $f_a = A'B'C'D' + A'B'C'D + A'BC'D' + A'BC'D$

(b) $f_b = AB'C'D' + AB'C'D + ABC'D' + ABC'D$

(c) $f_c = A'B'CD' + A'B'CD + A'BCD' + A'BCD$

(d) $f_d = AB'CD' + AB'CD + ABCD' + ABCD$

(e) $f_e = A'B'C'D + A'B'CD + A'BC'D + A'BCD$

(f) $f_f = AB'C'D + AB'CD + ABC'D + ABCD$

حالا هرکدام از این حالت‌ها را به‌عنوان یک جدول کارنو ۴ ورودی با ورودی‌های A و B و C و D درنظر می‌گیریم. و تابع ساده شده برای هریک را به‌دست می‌آوریم:

(a) $f_a = A'C'$

(b) $f_b = AC'$

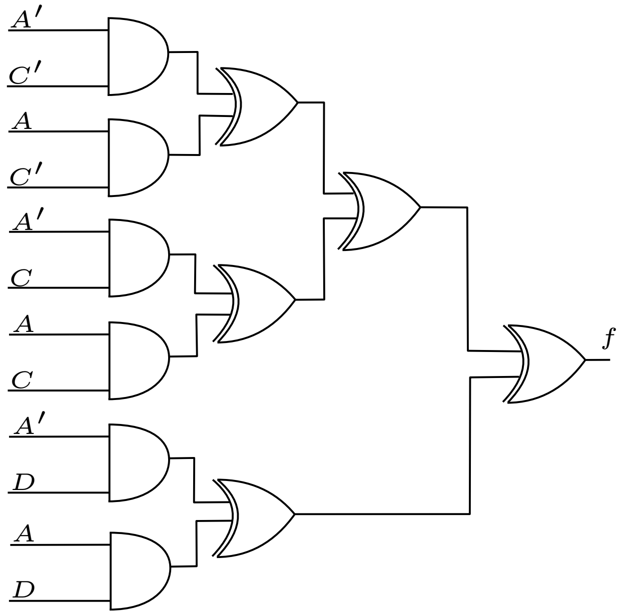
(c) $f_c = A'C$

(d) $f_d = AC$

(e) $f_e = A'D$

(f) $f_f = AD$

و درنهایت یکی از مدارهای ممکن برای این سوال را می‌توان به‌صورت زیر رسم نمود:



این مدار صرفا یک مربع را در تصویر تشخیص می‌دهد، اما نمی‌تواند محل مربع را تعیین کند. درصورت اینکه نیاز به تعیین محل مربع داشتیم، می‌بایست در خروجی گیت‌های AND از یک Decoder استفاده کنیم.

توضیحات داده شده برای زمانی بود که مربع‌ها را با ۱ تشخیث بدهیم. در صورت سوال گفته شده است مربع‌ها را با مقدار پیکسل ۰ هم باید قابل تشخیص باشند. برای حل این قسمت تنها کافیست مراحل گفته شده را با مقدار صفر برای هر پیکسل (از بین ۶ حالت مجاز) تکرار کنید.

۲. (۱۵ نمره)

Given $F_1 = \prod M(0,4,5,6)$ and $F_2 = \prod M(0,3,4,6,7)$, find the maxterm expansion for F_1F_2. State a general rule for finding the maxterm expansion of F_1F_2 given the maxterm expansion of F_1 and F_2. Prove your answer by using the general form of the maxterm expansion.

حل. حاصل $F_۲ \cdot F_۱$ برابر است با اجتماع هر دو:

$F_1 \cdot F_2 = \pi M(0,3,4,5,6,7)$

برای اثباط این قضیه درحالت کلی می‌توان گفت:

$$F_1 = \prod(a_i + M_i); \quad F_2 = \prod(b_j + M_j); \quad F_1F_2 = \prod(a_i + M_i)\prod(b_j + M_j)$$
$$= (a_0+M_0)(b_0+M_0)(a_1+M_1)(b_1+M_1)(a_2+M_2)(b_2+M_2)\cdots = (a_0b_0+M_0)(a_1b_1+M_1)(a_2b_2+M_2)\dots$$
$$= \prod(a_ib_i + M_i)$$

ماکسترم M_i در $F_۱F_۲$ حضور دارد اگر و تنها اگر $a_ib_i = ۰$ باشد، به عبارت دیگر، اگر $a_i = ۰$ یا $b_i = ۰$ باشد. ماکسترم M_i در $F_۱$ حضور دارد اگر و تنها اگر $a_i = ۰$ باشد. ماکسترم M_i در $F_۲$ حضور دارد اگر و تنها اگر $b_i = ۰$ باشد. بنابراین، ماکسترم M_i در $F_۱F_۲$ حضور دارد اگر و تنها اگر در $F_۱$ یا $F_۲$ حضور داشته باشد.

درمورد $F_۱ + F_۲$ چه می‌توان گفت؟

حاصل این عبارت برابر است با مشترکات دو ماکسترم. یعنی:

$F_1 + F_2 = (0, 4, 6)$

و برای اثباط آن می‌توان نوشت:

$$F_1 = \sum_{i=0}^{2^n-1}(a_im_i); \quad F_2 = \sum_{i=0}^{2^n-1}(b_im_i); \quad F_1 + F_2 = \sum_{i=0}^{2^n-1}(a_im_i) + \sum_{i=0}^{2^n-1}(b_im_i)$$
$$= a_0m_0+b_0m_0+a_1m_1+b_1m_1+a_2m_2+b_2m_2+\cdots = (a_0+b_0)m_0+(a_1+b_1)m_1+(a_2+b_2)m_2+\dots$$
$$= \sum_{i=0}^{2^n-1}(a_i + b_i)m_i$$

مین‌ترم m_i در $F_۱ + F_۲$ حضور دارد اگر و تنها اگر $a_i + b_i = ۱$ باشد، به عبارت دیگر، اگر $a_i = ۱$ یا $b_i = ۱$ باشد، بنابراین ماکسترم M_i در $F_۱ + F_۲$ حضور دارد اگر $a_i = ۰$ و $b_i = ۰$ باشد. بنابراین، ماکسترم M_i در $F_۱ + F_۲$ حضور دارد اگر و تنها اگر در هر دو $F_۱$ و $F_۲$ حضور داشته باشد.