

Guía de contenidos Primero medio

Objetivo: Reconocer ecuaciones de segundo grado, encontrar sus soluciones y analizarlas.

Términos de Instrucción:

Determinar: Obtener la única respuesta posible.

Resolver: Obtener la respuesta (o respuestas) utilizando métodos apropiados.

Recordemos factorización

Factoriza las siguientes expresiones, y luego responde:

<p>1. $x + x^2 =$ ¿Qué ocurre si $x = 0$ o bien $x = -1$?</p> <p>2. $x^2 + 2x =$ ¿Qué ocurre si $x = 0$ o bien $x = -2$?</p> <p>3. $x^2 - 8x =$ ¿Qué ocurre si $x = 0$ o bien $x = -8$?</p> <p>4. $x^2 + 3x =$ ¿Qué ocurre si $x = 0$ o bien $x = -3$?</p> <p>5. $10x - 15x^2 =$ ¿Qué ocurre si $x = 0$ o bien $x = \frac{2}{3}$?</p> <p>6. $4x - x^2 =$ ¿Qué valor(es) debe(n) tener x para que la expresión sea cero?</p>	<p>7. $x^2 + 2x + 1 =$ ¿Qué ocurre si $x = -1$? ¿Tendrá otro valor x para que la expresión sea cero?</p> <p>8. $4x^2 + 12x + 9 =$ ¿Qué ocurre si $x = -\frac{3}{2}$? ¿Tendrá otro valor x para que la expresión sea cero?</p> <p>9. $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4 =$ ¿Qué valor debe tener x para que la expresión sea cero? ¿Tendrá otro valor x para que la expresión sea cero?</p>
--	---

¿Qué valor debe tener x para que la expresión sea cero? ¿Tendrá otro valor x para que la expresión sea cero? (responda para 10 hasta la 14)

10. $9x^2 - 12x + 4 =$
11. $x^2 + 3x + 2 =$
12. $x^2 - x - 12 =$
13. $x^2 + x - 12 =$
14. $x^2 - 12x + 35 =$

Resuelva la siguiente ecuación:

$$(x + 2)(x - 3) = 2x$$

¿Cuánto vale x ?

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Con a, b y c coeficientes reales y $a \neq 0$.

Ejercicios:

En cada uno de las siguientes ecuaciones de segundo grado con una incógnita determina los valores de a, b y c .

Ecuación	Escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$x^2 + 1 = 2x$				
$-2x^2 + x = -8$				
$2x^2 = -15x - 1$				
$4x^2 - 7 = 2x$				
$x^2 - 8x = 3$				
$x + 4 = 5x^2$				
$\frac{7}{4}x^2 - 2 + \frac{1}{2} = 0$				
$5(x - 3)^2 = (3 - x)^2 - 1$				
$-10x^2 + 4x - 5 = 10$				
$4x^2 = 3x$				
$-x^2 = x$				
$-2x^2 = 1$				
$10x^2 = 3$				

Clasificación de ecuaciones cuadráticas

Ecuaciones cuadráticas COMPLETAS

Son aquellas ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$

Ejemplos:

- $x^2 + 5x + 4 = 0$
- $x^2 - 5x + 6 = 0$

Ecuaciones cuadráticas INCOMPLETAS

Son aquellas ecuaciones de la forma:

$$1. \quad ax^2 + bx = 0, \text{ donde } c = 0$$

$$2. \quad ax^2 + c = 0, \text{ donde } b = 0$$



Ejemplos:

- $3x^2 - 9x = 0$
- $x^2 = 4$

Ejercicios

I. Clasifica las siguientes ecuaciones cuadráticas.

- $16x^2 - 30 = 0$
- $(x - 4)(x - 3) = 12$
- $x^2 - 14x - 2 = 0$
- $x^2 - 10 = 5$
- $(x - 3)^2 + 5 = 0$
- $(x - 3)(x + 5) = 0$
- $2(x + 8)^2 - 7x^2 = 16$
- $8(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

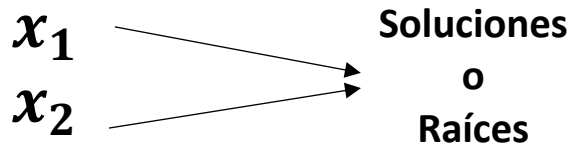
II. Responda

- Para que valores "a" y "b" la ecuación $x^2 - bx + 1 = ax^2 + 3x - 1$ sería de primer grado con incógnita x ? ¿para cuál sería una ecuación de segundo grado completa?
- Para que valores "a" y "b" la ecuación $3x^2 - b^2x + 2 = ax^2 + \frac{4}{3}x - 2$ sería de primer grado con incógnita x ? ¿para cuál sería una ecuación de segundo grado completa?
- Para que valores "a" y "b" la ecuación $bx + c = ax^2 + \sqrt{3}x - 4$ sería de primer grado con incógnita x ? ¿para cuál sería una ecuación de segundo grado completa?

Resolución de ecuaciones

Resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita consiste **en determinar los valores** de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Estas soluciones se denominan como **raíces de la ecuación** pueden ser iguales o distintas y se denotan por x_1 y x_2 si la incógnita está representada por x .

$$ax^2 + bx + c = 0$$



Ejemplo:

Dada la ecuación

$$x^2 = -x$$

¿Cuándo podemos decir que esa expresión es igual a cero?

$$x^2 + x = 0$$

Podemos factorizar

$$x(x + 1) = 0$$



Para que esa expresión de cero (0):

$$x = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 1 = 0$$

Entonces podemos decir que x tendrá dos valores

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = -1$$

A estas las llamaremos raíces o soluciones de la ecuación

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = -1$$

Luego el conjunto solución:

$$S = \{0, -1\}$$

Ejemplo 2: Dada la ecuación cuadrática, encuentre las raíces:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Podemos factorizar

$$(x \quad \quad)(x \quad \quad) = 0$$

Para que ésta igualdad se cumpla debemos inferir:

$$(x \quad \quad) = 0 \quad \quad \text{o} \quad \quad (x \quad \quad) = 0$$

$$x_1 = \quad \quad \quad \text{o} \quad \quad x_2 = \quad \quad \quad$$

¿Cuáles son las raíces? ¿Son iguales sus soluciones?

Luego el conjunto solución:

$$S = \{ \quad , \quad \}$$

Ejercicios:

I.- Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado de la misma forma en las que se analizaron los ejemplos anteriores.

1. $x^2 - 9x - 36 = 0$

2. $x^2 + 8x + 16 = 0$

3. $x^2 - 5x = 0$

4. $x^2 - 13x = -40$

5. $x^2 + 16x + 64 = 0$

6. $x^2 + 6x + 9 = 0$

7. $10x - 5x^2 = 0$

8. $x^2 - \frac{25}{49} = 0$

9. $14x - x^2 = 49$

10. $2(x-3)^2 = x(x-1)$

11. $(x+2)^2 + (x-3)^2 = 13$

12. $-10x + 25 = -x^2$

13. $x^2 - 200 = 0$

14. $x^2 + 23 = 145$

15. $234 - x^2 = 34$

16. $x^2 - \frac{1}{4} = 0$

17. $200 - 2x^2 = 0$

18. $4x^2 + 100 = 0$

19. $x^2 + \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$

II. Resuelve las siguientes ecuaciones

1. $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{6}$
2. $1 - \frac{x-2}{10} = \frac{2x-3}{x+5}$
3. $\frac{(x+5)}{(x-1)} = \frac{9x+45}{x}$
4. $\frac{1}{x-3} - 1 = \frac{1}{3-x}$
5. $2 + \frac{1}{x^2+1} = -\frac{7x}{x^2+1}$
6. $\frac{3x}{x-1} = \frac{3}{x+1} + \frac{6}{x^2-1}$

7. $1 + \frac{2}{x+1} = x - 6$
8. $\frac{x+3}{x+2} = \frac{x-6}{x+4}$
9. $\frac{x(x+2)}{3} = -x$
10. $\frac{1}{x-2} - 1 = \frac{1}{2-x}$
11. $2 - \frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x^2-1}$
12. $\frac{4+x}{3-6x} + 1 = \frac{2-x}{3}$

No todas las ecuaciones cuadráticas **son simples** de factorizar, por lo que es necesario utilizar la siguiente expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. La cantidad subradical $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante** y se le asigna la letra griega Δ (Delta).

Ejercicios

III. Determina las raíces o soluciones de cada ecuación de segundo grado utilizando la formula general.

1. $3x^2 - 2x - 5 = 0$
2. $5x^2 + 10x + 1 = 0$
3. $x^2 + 5 = 0$
4. $-x^2 + 2x + 48 = 0$
5. $x^2 = 12x$
6. $x^2 + 2x\sqrt{5} = 4$

7. $x^2 + 29 = 2(2 - 5x)$
8. $2(x^2 + 6x + 6) = (x+4)(x-3)$
9. $x(3x-4) + 5(2+x) = 2(3x+4)$
10. $5x(x-2) = 3(30-x)$
11. $\frac{x}{x-2} - \frac{5}{2} = \frac{x-2}{x}$
12. $\frac{3x-1}{x} - \frac{2x}{2x-1} = \frac{7}{6}$

Discriminante

Calcule el discriminante y luego analice sus soluciones:

$3x^2 + 6x + 3 = 0$ $\Delta =$	$x^2 + 5x - 14 = 0$	$2x^2 + x - 1 = 0$
Soluciones: $x_1 =$ $x_2 =$	Soluciones:	Soluciones:

¿Qué relación ves tú que existe entre las soluciones y el discriminante?

El valor del **discriminante** (Δ) de una ecuación de segundo grado permite determinar la naturaleza de sus raíces.

- Si $\Delta > 0$, las raíces de la ecuación son números reales y **distintos**.
- Si $\Delta = 0$, las raíces de la ecuación son números reales **iguales**.
- Si $\Delta < 0$, las raíces de la ecuación **no** pertenecen al conjunto de los números reales. ¿a qué conjunto pertenecerían las raíces???

Las propiedades que cumplen las raíces x_1 y x_2 de la ecuación de segundo grado con una incógnita $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

La ecuación de segundo grado con una incógnita se puede obtener mediante la expresión:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

IV.- Resuelve los siguientes problemas:

1. Si el discriminante de la ecuación $3x^2 - 2x + q = 0$ es 64, ¿Cuál es el valor de q ?
2. Si el discriminante de la ecuación $x^2 + 10x + q = 0$ es 36, ¿Cuál es el valor de q ?
3. Si el discriminante de la ecuación $px^2 + 9x - 3 = 0$ es 105, ¿Cuál es el valor de q ?
4. Si los coeficientes numéricos a, b y c de una ecuación de segundo grado con una incógnita son iguales, ¿Qué características tienen sus raíces? ¿siempre ocurre lo mismo?

5. Determina una ecuación de segundo grado que cumpla con que: $\Delta = 30$, $a = 3$ y $b = 7$.
6. ¿Cuál es el valor de c para que la ecuación $3x^2 - 3x + c = 0$ tenga raíces reales e iguales?
7. Si en una ecuación de segundo grado con una incógnita el valor de b es 10 y $\Delta = 60$, determina los posibles valores de a y c para que tengan soluciones reales.
8. Si en una ecuación de segundo grado con una incógnita el valor de $a \cdot c = 5$ y el $\Delta = 60$, ¿cuál es el valor de b ?
9. Verifica las propiedades de las raíces en la ecuación $x^2 + 9x + 14 = 0$
10. ¿Qué ocurrirá con la suma y el producto de las raíces si la ecuación de segundo grado con una incógnita es incompleta?
11. ¿Qué ocurrirá con la suma y el producto de las raíces si la ecuación de segundo grado con una incógnita es incompleta?
12. Si las soluciones de una ecuación de segundo grado con una incógnita son 2 y $\frac{7}{4}$, ¿cuál es la ecuación?
13. Determina el valor de q en la ecuación $5x^2 - (3q + 2)x + (7q - 5) = 22$ para que el producto de sus raíces sea 20
14. Determina el valor de t para que en la ecuación $3x^2 - 2tx + 3 = 0$ la suma y la multiplicación de sus raíces sea igual.
15. Determina la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos.
16. Rebeca es 8 años mayor que Lorena. Si el producto de sus edades es 20, ¿cuál es la edad de Lorena?
17. Determinar tres números impares consecutivos, tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 7.
18. David saco cierta cantidad de fotocopias por \$240. Si hubiera sacado 3 fotocopias más por el mismo dinero, cada una habría costado \$4 menos. ¿Cuántas fotocopias sacó y a que precio cada una?
19. La suma de los cuadrados de dos números positivos es 730 y su diferencia es 4. ¿Cuál es el doble del número mayor?

Ecuaciones bicuadráticas (Avanzado)

- Las ecuaciones de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se denominan **ecuaciones bicuadráticas**. Para resolverlas se debe realizar un cambio de variable, por ejemplo, $u = x^2$, tal que la ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se pueda resolver mediante la ecuación de segundo grado con una variable $au^2 + bu + c = 0$
- Al resolver la ecuación bicuadrática, son 4 las raíces que se deben encontrar.



V.- Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadráticas.

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

2. $x^4 + x^2 - 2 = 0$

3. $x^4 - 7x^2 + 12 = 8$

4. $x^4 + 6x^2 = -1 + 12x^2$

5. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

6. $2x^4 - 6x^2 - 8 = 0$

7. $(x^2 - 4)(x^2 - 16) - 20x^2 = 0$

8. $2x^4 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{6}{4} = 0$