



UCASAL
UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA

Facultad de Artes y Ciencias

Licenciatura en Imagen y Sonido

Filtro Antialiasing

Cátedra: Análisis de Señales

Alumnos:

Delgado, Emmanuel Jesús

Rejala, Victoria F

Profesor: Narvaez, Pablo R.

Ciudad de Salta, 2015

1. La Frecuencia de Nyquist

Cuando el teorema de muestreo se aplica a las señales de audio, éstas se filtran paso-bajo, de tal forma que su respuesta en frecuencia quede limitada en banda y no exceda de la frecuencia Nyquist ($S/2$). Idealmente, el filtro pasa-bajo se diseña de manera que sólo se eliminan las frecuencias que no percibimos. Posteriormente, la señal se muestrea para obtener valores instantáneos de amplitud. La señal muestreada contiene la misma información que la señal analógica filtrada paso-bajo. A la salida del sistema, la señal puede ser reconstruida sin ningún tipo de pérdida de información (debido al muestreo) entre la señal de salida y la señal de entrada (filtrada paso-bajo). Desde el punto de vista del muestreo, la señal de salida no es una aproximación: es sencillamente idéntica a la señal de entrada. La señal limitada en banda se muestra en la Figura 1.1.

Considere una función analógica, continuamente cambiante, que ha sido muestreada para obtener una serie de impulsos de la misma. La amplitud de cada impulso, determinada por la cuantificación, es un número que representa la amplitud de la señal en ese instante. Para poder cuantificar esto, la frecuencia de muestreo se define como el número de muestras por segundo de la señal. El período de muestreo es su recíproco, es decir, el intervalo de tiempo que existe entre muestras. Por ejemplo, a una frecuencia de muestreo de 40.000 muestras por segundo le corresponde un período de muestreo de $1/40.000$ segundos. Una señal con cambios rápidos – es decir, con altas frecuencias – requiere una frecuencia de muestreo más alta. Por tanto, la frecuencia de muestreo determina la frecuencia máxima que puede tener un sistema de digitalización. La selección de la frecuencia de muestreo es uno de los parámetros más importantes en la digitalización, ya que determina el ancho de banda del sistema.

El sistema de muestreo establece el ritmo al que se debe muestrear una señal para asegurar un determinado ancho de banda. Específicamente, como ya se ha señalado anteriormente, una frecuencia de muestreo de S muestras/segundo determina un ancho de banda de $S/2$ Hz. En otras palabras, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la máxima frecuencia de la señal de audio para tener un muestreo sin pérdida de información. Por ejemplo, una señal de audio con una respuesta en frecuencia de 0 a 20 kHz teóricamente necesitaría una frecuencia de muestreo de 40 kHz para que el muestreo fuera correcto. Es importante observar la condición, que impone el teorema de muestreo, de limitar el ancho de banda de señal a la mitad de la frecuencia de muestreo (frecuencia Nyquist). Las frecuencias de la señal superiores a este valor producen una distorsión conocida por aliasing. Con el objeto de eliminar dichas frecuencias se coloca previamente un filtro paso-bajo. También es necesario utilizar un filtro paso-bajo en la salida del sistema para reconstruir, a partir de sus muestras, la señal analógica o, lo que es lo mismo, para eliminar todas las nuevas frecuencias creadas por el sistema en el proceso de digitalización.

La frecuencia de corte de corte del filtro es algo inferior y produce así una atenuación gradual hasta la mitad de la frecuencia de muestreo. Esto asegura que en el proceso de muestreo no entren componentes de frecuencias superiores a la frecuencia Nyquist. A la señal nunca se le aplica un muestreo crítico, siempre hay más de dos muestras por periodo. Además, no existe ninguna relación de fase entre las muestras y la señal de entrada; las señales acústicas no se pueden sincronizar con el proceso de muestreo. En cualquier caso, la señal de salida no se reconstruye muestra a muestra; en realidad, se forma a partir de un conjunto de muestras, de igual forma que lo hace nuestro oído; el sonido lo percibimos promediando su nivel durante un intervalo de tiempo.

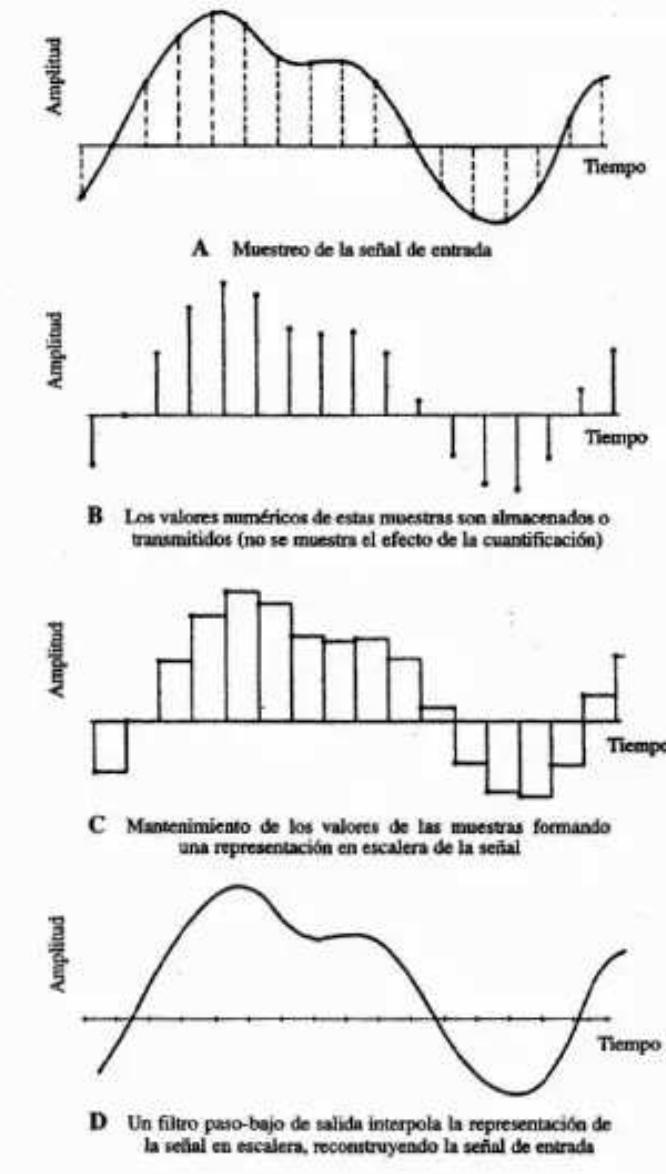


Figura 1.1. Realizando un muestreo discreto, una señal limitada en banda puede ser muestreada y reconstruida sin ningún tipo de pérdidas.

La necesidad de limitar el ancho de banda de la señal no supone ningún perjuicio para la misma, como pudiera parecer a primera vista. La frecuencia límite se puede extender al valor que deseemos, siempre que aumentemos de igual forma la frecuencia de muestreo. Dependiendo de la aplicación, podemos utilizar frecuencias de muestreo desde 8 kHz a 192 kHz. Nada es gratis, y la frecuencia de muestreo también determina las características de los dispositivos electrónicos de muestreo y las demandas de datos en transmisión y almacenamiento. A medida que aumentamos la frecuencia de muestreo

necesitamos dispositivos de muestreo más rápidos y mayores demandas de almacenamiento y transmisión. Existen factores económicos a considerar en el diseño. Los fabricantes seleccionaron la frecuencia de muestreo de 44,10 kHz a raíz del disco compacto, por ejemplo, por el tamaño del soporte, por el tiempo de reproducción y por su coste. Por otro lado, en el disco de audio DVD se utilizan frecuencias de muestreo de hasta 192 kHz.

Todo el proceso de muestreo (incluida la reconstrucción de la señal a partir de sus muestras) se presenta en la Figura 1.2. En ella aparecen las señales que existen en distintos puntos del proceso. En la parte izquierda de la figura se muestran las señales en el dominio del tiempo y en la parte derecha en el dominio de la frecuencia. En otras palabras, podemos observar las variaciones de amplitud en el dominio del tiempo y su respuesta en frecuencia. Por ejemplo, en las Figuras 1.2A y 1.2B se puede apreciar cómo la señal de audio está limitada en banda, con un filtro paso-bajo, hasta la mitad de la frecuencia de muestreo $S/2$. Este filtro elimina todo el contenido espectral a partir de la frecuencia Nyquist, $S/2$ Hz. La señal de muestreo (Figuras 1.2C y 1.2D) se repite al ritmo marcado por la frecuencia de muestro S , y su espectro está formado por impulsos, situados en las frecuencias 0, S , $2S$, $3S$, etc. Cuando se muestrea una señal de audio, como se muestra en las Figuras 1.2E y 1.2F, lo que se obtiene es la amplitud de la misma en los instantes de muestreo; sin embargo, la respuesta en frecuencia de esta señal muestreada da lugar a réplicas del espectro de la señal original centradas en múltiplos de la frecuencia de muestreo. Para reconstruir la señal, como se muestra en las Figuras 1.2G y 1.2H, las muestras han de pasar por un filtro paso-bajo anti-imagen que elimine todas estas réplicas a partir de la frecuencia $S/2$. Este filtro se encarga de realizar una interpolación entre las muestras, reconstruyendo de esta manera la señal analógica de entrada (limitada

en banda). La respuesta al impulso del filtro de salida transforma los impulsos de entrada en una señal continua.

El teorema de muestreo es inequívoco: una señal limitada en banda puede ser muestreada; almacenada, transmitida o procesada en valores discretos; posteriormente, si se quiere reconstruir la señal analógica en necesario realizar un proceso de interpolación entre las muestras. No hay pérdida de información en el proceso de muestreo. Los teoremas de muestreo, como el teorema de Nyquist, lo prueban de forma concluyente. Por supuesto, después de muestrear la señal, el sistema digital debe asignar valores numéricos a las amplitudes de los impulsos (amplitud de la señal en los instantes de muestreo).

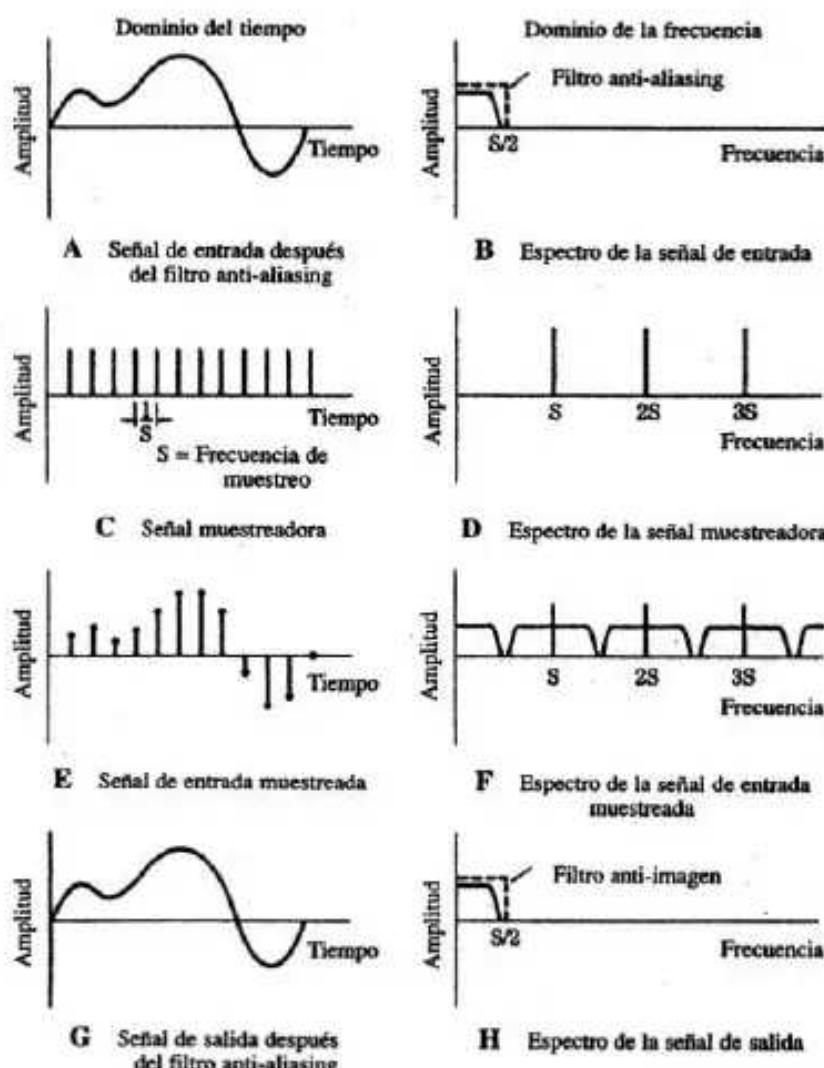


Figura 1.2. Señales en el dominio del tiempo (columna de la izquierda) y en dominio de la frecuencia (columna de la derecha) ilustrando el proceso de muestreo de señales de banda limitada y el proceso de reconstrucción.

2. Aliasing

Aliasing es una especie de confusión de muestreo que pueden originarse en el lado de grabación de la cadena de señal. Del mismo modo que la gente puede tomar diferentes nombres y así confundir su identidad, el aliasing puede crear componentes de señales falsas. Estas señales erróneas pueden aparecer dentro del ancho de banda de audio y son imposibles de distinguir de las señales legítimas. Obviamente, es obligación del diseñador para evitar tal distorsión ocurra siempre. En la práctica, el aliasing no constituye una limitación grave. Simplemente pone de relieve la importancia de la observación de los criterios del teorema de muestreo.

El muestreo es un proceso sin pérdidas bajo ciertas condiciones. La condición más importante es que la señal sea de banda limitada; es decir, debe colocarse un filtro pasa-bajo antes del proceso de muestreo. Si esto no se hace, la señal podría ser submuestreada. Considere otro experimento conceptual: usar su cámara de cine para filmarme mientras conduzco en mi moto. En la película, cuando acelero, los radios de las ruedas giran hacia adelante, parecen ralentizar y detenerse, entonces comienzan a girar hacia atrás, girar más rápido, luego lento y parar, y parecen girar de nuevo hacia delante. Esta acción es un ejemplo de *aliasing*. La cámara de cine, con una velocidad de 24 fotogramas por segundo, no puede capturar el movimiento rápido de los rayos de la rueda.

El aliasing aparece cuando se viola el teorema de muestreo. La frecuencia más alta de una señal de audio debe ser igual o inferior a la frecuencia Nyquist. Si es más grande que la frecuencia de Nyquist aparecerá el fenómeno del aliasing. Cuando la frecuencia de la señal de audio se incrementa, disminuye el número de muestreo por ciclo. Al alcanzar la frecuencia Nyquist, existen dos muestras por ciclo, el mínimo número de muestras para registrar el carácter bipolar de la señal.

Con frecuencias más altas, el proceso de muestreo continuará creando muestras a su ritmo (frecuencia de muestreo), pero estas muestras representan una información errónea de la señal, manifestándose como frecuencia de aliasing. Específicamente, si S es la frecuencia de muestreo, F es una frecuencia mayor que la mitad de la frecuencia de muestreo, y N es un número entero, entonces las frecuencias de aliasing que se crean, F_f , tienen un valor de $F_f = \pm NS \pm F$. En otras palabras, las frecuencias de aliasing aparecen en el ancho de banda de la señal (y en las réplicas de este ancho de banda), plegadas desde la frecuencia de muestreo. Aunque el fenómeno no pueda parecer preocupante, no es sorprendente. El muestreo es realmente una modulación; de hecho, el proceso de muestreo es equivalente a una demodulación heterodina de AM (*amplitude modulation*). La señal de un oscilador se multiplica por la señal de radio para desplazar el espectro a una frecuencia estándar IF (*intermediate frequency*). Aunque éste es el efecto que se desea en un receptor de radio, en el proceso de muestreo no debe aparecer nunca.

Considere un sistema de digitalización que tenga una frecuencia de muestreo de 44kHz. Suponga que una señal de 36 kHz entra en el circuito encargado de realizar el muestreo, tal como se muestra en la Figura 2.1. La primera componente producida por el aliasing corresponde a $S - F = F_f$ o, lo que es lo mismo, a $44 - 36 = 8$ kHz. El circuito muestreador produce muestras incorrectas aunque registre de forma fidedigna los valores de amplitud de la señal en los instantes de muestreo. Dadas estas muestras, no existe ningún dispositivo capaz de determinar cuál es la frecuencia correcta: 36 kHz u 8 kHz. Recuerde además que existe un filtro paso bajo al final del proceso de digitalización, con objeto de suavizar la forma escalonada que presenta la señal, reconstruyendo perfectamente la misma (original). La frecuencia de corte de este filtro es la frecuencia de Nyquist, eliminando todo contenido espectral superior a este valor. En el caso anterior, de acuerdo con las características del filtro paso-bajo de

salida, la componente de 36 kHz desaparece y sólo permanece la componente alias de 8 kHz, como si realmente se tratara de una señal de 8 kHz. Esta componente produce una distorsión en la señal de audio.

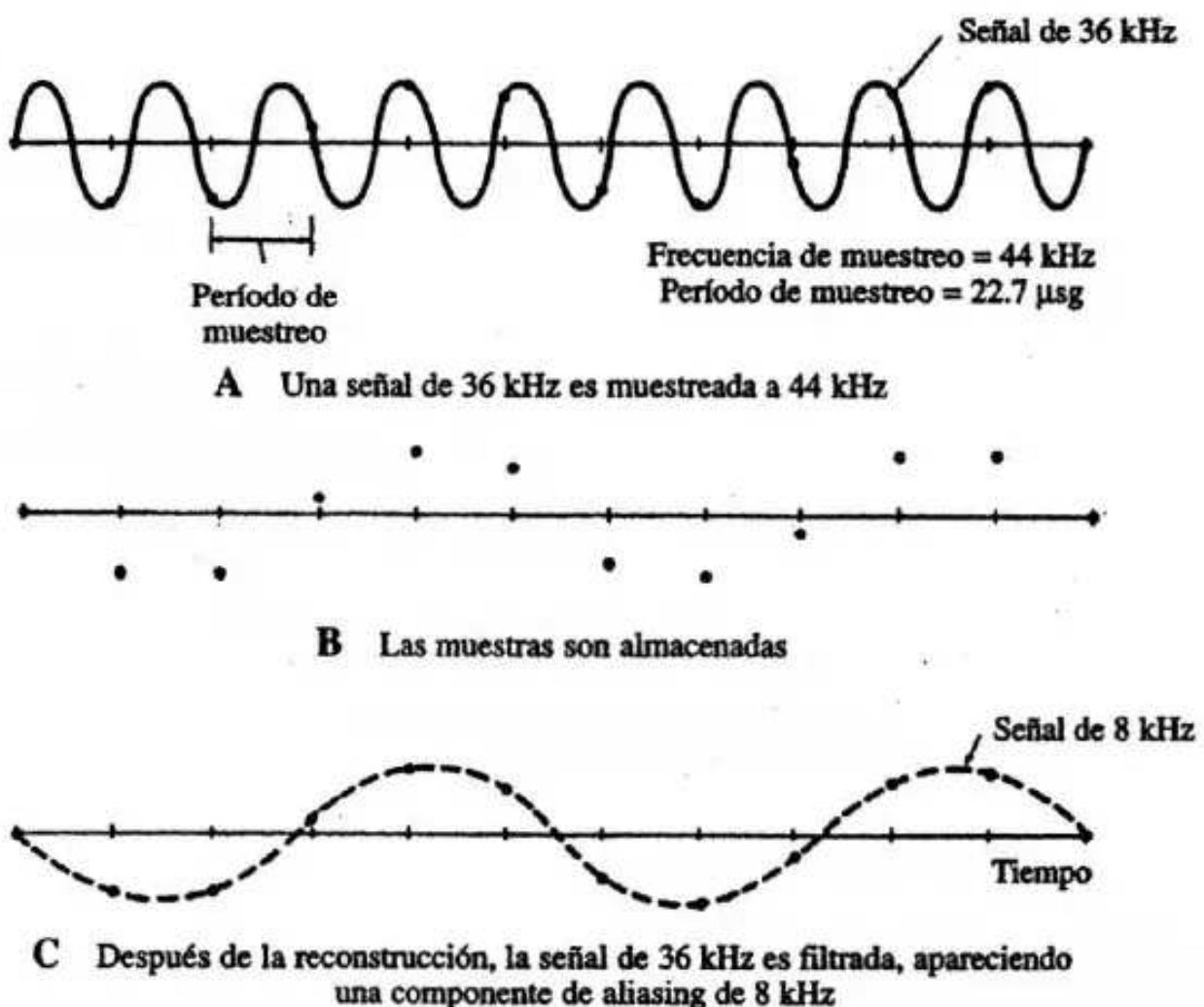


Figura 2.1 Una señal de entrada con una frecuencia superior a la mitad de la frecuencia de muestreo generará un componente de aliasing, de menor frecuencia.

Existen otras manifestaciones del aliasing. Aunque en el margen de frecuencias de audio sólo aparece una componente interferente de valor $S - F$, siempre aparecerá una componente alias, independientemente de lo grande que sea F . Considere una frecuencia de muestreo de 44 kHz, pero en el intervalo 22-44 kHz el aliasing producirá una sinusoides cuya frecuencia desciende desde 22 a 0

kHz. Si la sinusoide varía 44 y 66 kHz, el sonido resultante equivale a una sinusoide entre 0 y 22 kHz, y así sucesivamente.

Las componentes de aliasing no sólo ocurren alrededor de la frecuencia de muestreo, sino también de múltiplos de la misma (ver figura x.x Y). Cuando se cumple el teorema de muestreo, la banda de audio y todas sus infinitas imágenes están completamente separadas entre sí, tal como se muestra en la Figura 2.2A y 2.2B. Sin embargo, cuando la banda de audio supera la frecuencia Nyquist, las bandas de imagen se solapan, apareciendo el fenómeno del aliasing, tal como se muestra en la Figura 2.2C y 2.2D. Todas estas componentes producirían valores $\pm S \pm F$, $\pm 2S \pm F$, $\pm 3S \pm F$, etc. Por ejemplo, dada una frecuencia de muestreo de 44 kHz y una señal de entrada de 27 kHz, algunas componentes de aliasing serían: 17, 61, 71, 105, 115, 149, 159 kHz, tal como se muestra en la Figura 2.2D.

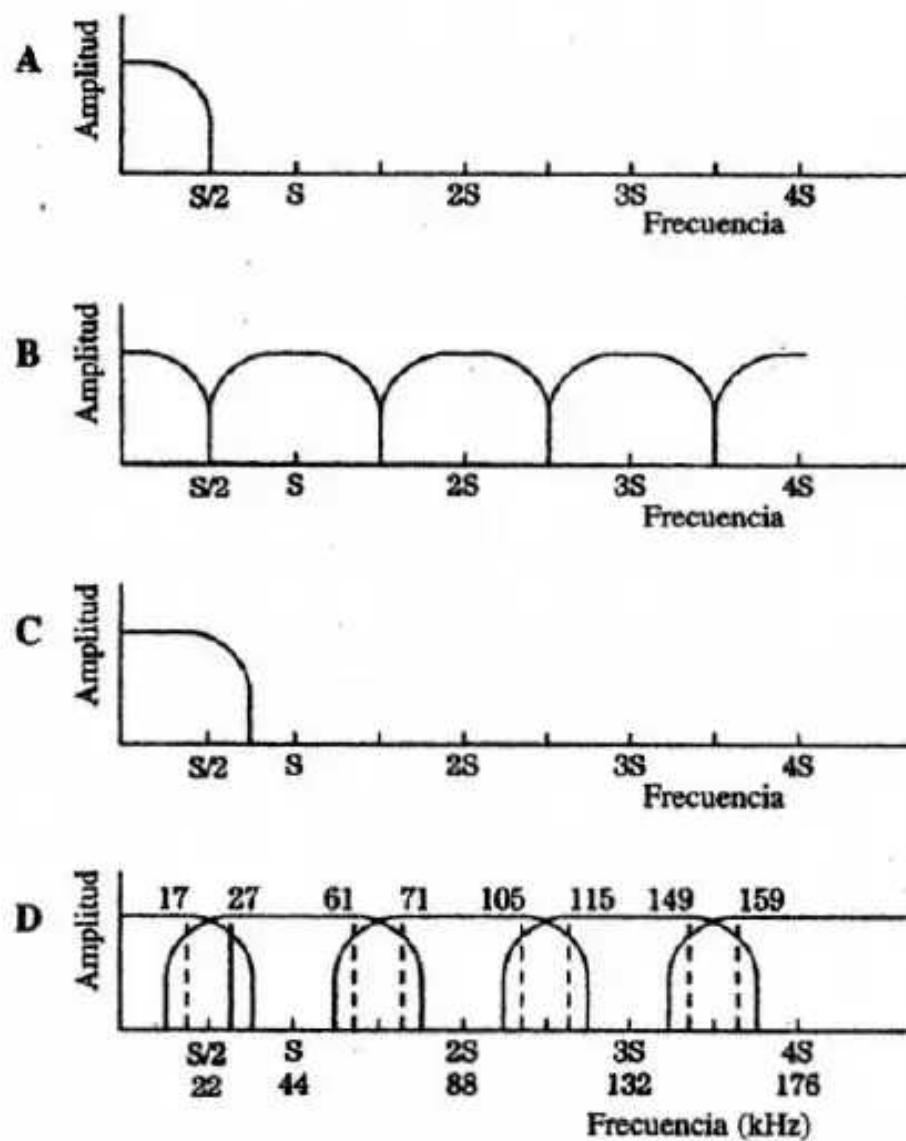


Figura 2.2. Representación espectral del muestreo y del aliasing. **A.** La señal de entrada se limita en banda hasta la frecuencia de Nyquist. **B.** Después de la reconstrucción, aparecen imágenes del espectro en múltiplos de la frecuencia Nyquist. **C.** La señal de entrada no está limitada en banda. **D.** Después de la reconstrucción, las imágenes del espectro están fuera de los múltiplos de la frecuencia Nyquist; este solapamiento espectral es de aliasing, por ejemplo, una señal de 27 kHz producirá componentes de aliasing en un circuito muestreador que trabaje con una frecuencia de muestreo de 44 kHz.

2.2 Prevención

En la práctica, el problema del aliasing es fácilmente superable. De hecho, en un sistema de digitalización nunca ocurre. La solución es inmediata: la señal de entrada ha de limitarse en banda con un filtro paso-bajo (filtro antialiasing), que proporcione una atenuación significativa a partir de la frecuencia de Nyquist, para

asegurar que el contenido espectral de la señal que se muestrea nunca supere este valor. Un filtro ideal antialiasing producirá una atenuación infinita en la banda atenuada y de forma instantánea. En la práctica, los filtros antialiasing tienen una banda de transición por encima de la frecuencia Nyquist y una atenuación en la banda atenuada suficiente para que las componentes de aliasing sean inferiores a la resolución del convertidor A/D. Realmente la mayoría de los sistemas utilizan un convertidor A/D con sobremuestreo, con un filtro paso-bajo de característica poco exigentes, una frecuencia de muestreo es muy alta y un posterior proceso de diezmado para eliminar el aliasing. Con este proceso se asegura que el sistema cumpla el teorema de muestreo. De esta forma, el problema del aliasing nunca llega a aparecer.

El teorema de muestreo y el filtrado paso-bajo de la señal de entrada deben cumplirse siempre en cualquier caso. Si se permite que aparezca el fenómeno del aliasing, no habrá forma alguna de eliminar las componentes interferentes que se hayan introducido en la banda de audio.

3. Filtro Paso Bajo

En un grabador digital clásico (sin sobremuestreo) la señal de entrada se filtra con un filtro paso bajo con una gran pendiente de caída en la banda de transición: esto limita el ancho de banda de la señal a un valor igual o inferior a la frecuencia Nyquist. Por ejemplo, en un grabador digital con una frecuencia de muestreo de 48 kHz, la frecuencia de corte debe estar en torno a los 22 kHz para permitir una atenuación máxima en la mitad de la frecuencia de muestreo. Al filtro de entrada se le conoce habitualmente por el nombre de filtro antialiasing.

El filtro paso bajo de entrada debe atenuar todas las señales de frecuencias superiores a la mitad de la frecuencia de muestreo, sin afectar a las señales en la banda de audio. Un filtro paso bajo ideal debe tener una banda de paso plana,

una banda de transición instantánea y una banda de atenuación infinita, tal como se muestra en la Figura 3.1A. Además de estas características de respuesta en frecuencia, un filtro ideal no debe alterar la fase de la señal. Aunque en la práctica el filtro se puede aproximar a uno ideal, su implementación lleva aparejado una serie de problemas. Una banda de transición extremadamente estrecha impide cumplir otras especificaciones, como por ejemplo una respuesta plana en la banda de paso y una baja distorsión de fase. Por tanto, en el diseño del filtro se permite un determinado margen de frecuencias en la banda de transición y así reducir los problemas de distorsión de fase. Sin embargo, un filtro paso bajo de orden reducido, con una determinada banda de transición, debe tener una frecuencia de corte mayor para impedir que introduzcan frecuencias indeseadas por aliasing. Para evitar el aliasing, la frecuencia de muestreo debe ser lo suficientemente alta para tener una gran atenuación en la mitad de la frecuencia de muestreo (frecuencia Nyquist). Una frecuencia de muestreo mayor, tal vez tres veces el valor de la frecuencia de corte del filtro ideal, es necesaria para cumplir las especificaciones de ancho de banda de la señal de audio. La frecuencia de muestreo mínima, dejando pasar todas las componentes de la señal por debajo de la frecuencia Nyquist, sólo puede utilizarse con un filtro paso bajo ideal. Es irónico que este filtro presente problemas de implementación, ya que su diseño es analógico. Después del convertidor A/D, este mismo filtro puede implementarse digitalmente de una manera extremadamente sencilla.

En los grabadores digitales sin sobremuestreo con una frecuencia de muestreo de 48 kHz, los filtros de entrada se diseñan con una respuesta plana desde la componente continua de (*direct current*) hasta los 22 kHz. Este margen proporciona una banda de guarda de 2 kHz que permite una suficiente atenuación. La banda de paso debe tener una respuesta plana; en la práctica existen algunas irregularidades (rizado en torno a los 0.1 dB de variación

máxima). La banda atenuada se diseña con una atenuación que sea igual o mayor que el margen dinámico del sistema, determinado por el número de bits de los datos. Por ejemplo, en un sistema de 16 bits se requiere una atenuación mínima de 95 dB. Una atenuación de 80 dB produce, en el peor de los casos, una distorsión por aliasing del 0,001 por 100. En la figura 3.1B se muestran características de un filtro paso bajo.

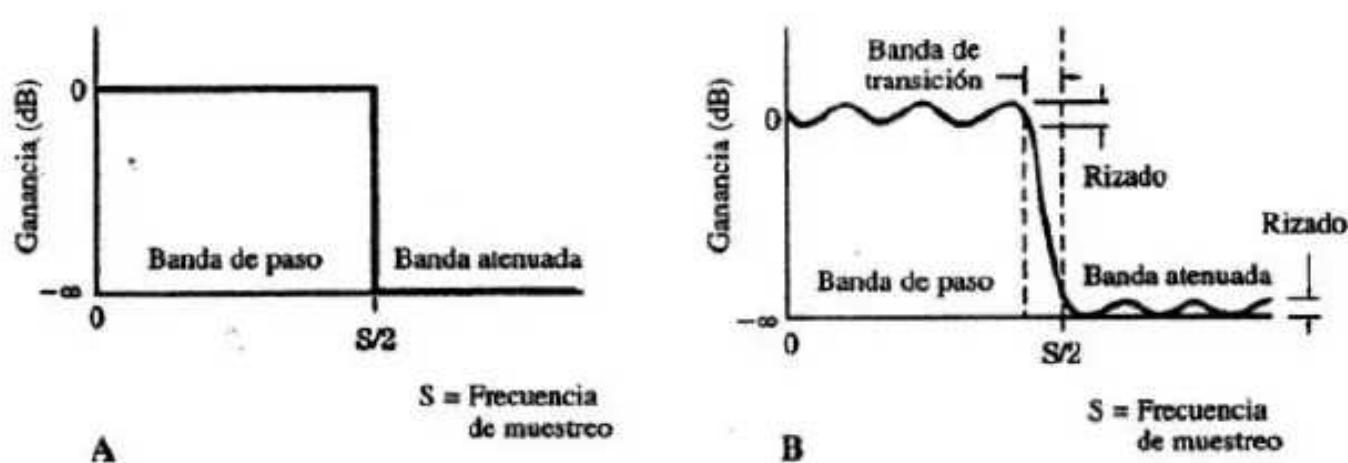


Figura 3.1. Características de un filtro paso bajo. **A.** Un filtro ideal paso bajo tiene una respuesta plana en la banda de paso y una frecuencia de corte instantánea. **B.** En la práctica, los filtros presentan un rizado en la banda de paso y en la banda atenuada, así como una banda de transición entre ambas.

Otras características importantes del filtro son: la respuesta temporal (*overshoot*), el rizado y la linealidad de fase. Pendientes elevadas en la banda de transición producen resonancias alrededor de la frecuencia de corte y el rizado puede causar alguna <<coloración>> en la respuesta en frecuencia. Cuanto menor sea la banda de transición mayor será el rizado. No obstante, algunos tipos de filtros tienen un rizado mínimo. La respuesta en fase también es un parámetro a considerar. Los sistemas de grabaciones magnéticas analógicas, los micrófonos y los altavoces siempre introducen distorsión de fase; los filtros paso bajo analógicos presentan un retardo en función de la frecuencia, denominado retardo

de grupo, en las cercanías de la frecuencia de corte, produciendo una distorsión de fase. Este problema puede corregirse con un circuito analógico, antes o después del filtro, que compense el retardo y consiga una linealidad de fase en el sistema, es decir, un retardo constante con la frecuencia (inaudible). No se sabe a ciencia cierta cuál es el umbral de audición a partir del cual se detectan los efectos rizado y del retardo de grupo de los filtros.

Los filtros analógicos se clasifican en función del polinomio matemático que determina sus características. Existen varios tipos; los más utilizados son los filtros de *Bessel*, *Butterworth* y *Chebyshev*. En cada caso, para incrementar el orden del filtro y obtener una banda de transición más estrecha, hay que implementar estructuras básicas en cascada, propias de cada tipo de filtro. A medida que se aumente el orden del filtro, éste se aproximará más a la respuesta de un filtro ideal, con una banda de transición mínima. En la Figura 3.2 se presenta un filtro *Chebyshev*; la pendiente de la banda de transición se acentúa a medida que se incrementa el orden del filtro, es decir, añadiendo estructuras básicas en cascada, tal como aparece en la figura. Sin embargo, la distorsión de fase también aumenta proporcionalmente con el orden. El filtro paso bajo más sencillo está constituido por una de las secciones RC (resistencia-condensador) dispuestas en cascada según la figura; cada sección produce un incremento en la pendiente de caída (banda de transición) de 6 dB/octava. Aunque el filtro no presente ni *overshoot* ni rizado, siempre existen anomalías en la respuesta en frecuencia de la banda de paso.

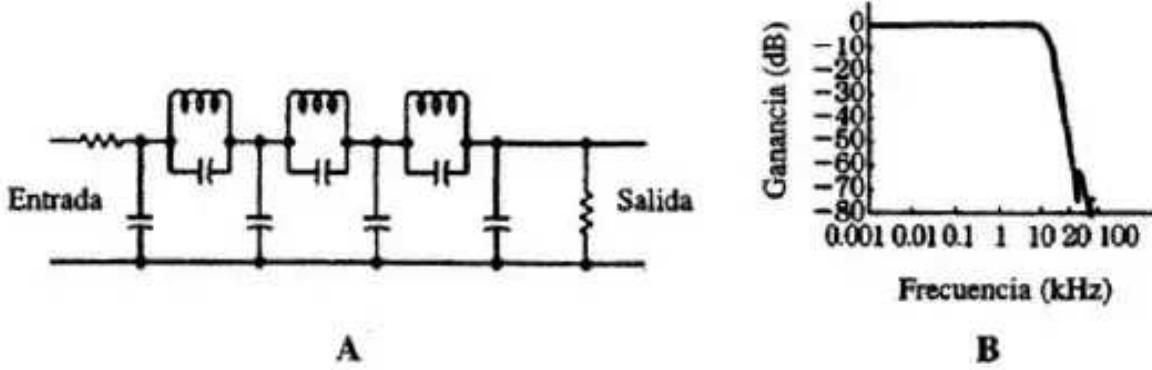


Figura 3.2. Ejemplo de un filtro paso bajo tipo Chebyshev y su respuesta en frecuencia. **A.** Esquema de un filtro paso bajo pasivo. **B.** Respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo en la que se muestra la pendiente de caída en la banda de transición.

En la banda de paso, en las proximidades de la frecuencia de corte, se puede colocar pequeñas resonancias con el objeto de suavizar la pendiente de la banda de transición. Estas resonancias no influyen en el valor de la pendiente, ya que ésta sólo depende del orden del filtro; éste es el caso de los filtros de *Butterworth*. Estos filtros requieren un elevado orden para conseguir una banda de transición mínima y una gran atenuación en la banda atenuada. Por ejemplo, para obtener una banda de transición de 0,4 octavas y una atenuación de 80 dB es necesario un filtro de orden 33.

Se puede diseñar un filtro con una menor banda de transición a expensas de modificar la respuesta en frecuencia de la banda de paso, introduciendo resonancias de magnitud mayor a las introducidas en un diseño *Butterworth*. El tipo de filtro que realiza esta aproximación es el filtro *Chebyshev*. Con un filtro de noveno orden se puede conseguir un rizado máximo de 0,1 dB has los 20 kHz, y una atenuación de 70 dB a partir de los 25 kHz.

La mayoría de los filtros producen una atenuación mayor que la requerida, a partir de la mitad de la frecuencia de muestreo. Esto sucede con curvas de atenuación monótonas. La banda de transición puede reducirse, colocando anti-

resonancias en banda atenuada. Además, los elementos reactivos del filtro (bobinas y condensadores) pueden producir a un mismo tiempo resonancias y anti-resonancias. Esto reduce la complejidad electrónica del filtro al utilizarse un menor número de componentes. El resultado es un filtro elíptico, también denominado filtro *Cauer*. Un filtro elíptico es el que menor banda de transición produce dado un determinado orden. Por ejemplo, un filtro elíptico de séptimo orden produce un rizado de 0,25 dB en la banda de paso, una banda de transición de 0,4 octavas y una atenuación de 80 dB. En la práctica, estos requisitos sólo se cumplen con un diseño de 13 polos.

En general, dado un determinado orden, los filtros paso bajo *Chebyshev* y *Cauer* se aproximan mejor a la respuesta ideal que los filtros *Bessel* o *Butterworth*; sin embargo, los filtros *Chebyshev* pueden producir un rizado acusado en la banda de paso y los filtros elípticos pueden provocar grandes distorsiones de fase. Los filtros según la aproximación de *Bessel* son los que mejor respuesta en fase presentan; prácticamente el retardo en función de la frecuencia es constante. Por el contrario, es necesario un orden elevado para producir una gran atenuación. Los filtros de *Butterworth* son monótonos en la banda de paso, aunque pueden introducir pequeñas respuestas transitorias. Generalmente no existe un filtro ideal, siempre hay un compromiso entre la atenuación y la respuesta en tiempo. En la práctica, debido a los problemas inherentes que presentan los filtros analógicos de elevado orden, los diseñadores han optado por técnicas de conversión sigma-delta. En cualquier caso, siempre es necesario colocar un filtro paso bajo que impida el aliasing de frecuencias superiores a la frecuencia Nyquist (mitad de la frecuencia de muestreo).

4.1 Filtro recuperador

Los circuitos primero y último en una cadena de digitalización de audio son el filtro antialiasing, o filtro paso bajo de entrada, y el filtro recuperador, o filtro paso bajo de salida. Aunque su diseño desde el punto de vista analógico es casi idéntico, sus funciones son completamente distintas. Hoy en día, en lugar de usar los tradicionales filtros recuperadores analógicos de levado orden, empleamos filtros digitales con técnicas de sobremuestreo.

Dado el criterio de Nyquist para la elección de la frecuencia de muestreo, la función del filtro antialiasing es muy clara: debe eliminar todas las señales de frecuencia superior a la mitad de la frecuencia de muestreo, para evitar precisamente este efecto de aliasing. De forma similar, el filtro paso bajo de la salida debe eliminar todo el contenido de señal de frecuencia superior a la mitad de la frecuencia de muestreo. De forma intuitiva, este filtro debe convertir la salida <>escalonada>> del D/A en la suave envolvente propia de la señal analógica, recuperando la forma de onda original. Matemáticamente, la salida del D/A contiene el espectro original (banda base) y las bandas superiores generadas en el proceso de muestreo, siendo estas últimas las que corresponden a las transiciones bruscas de nivel, propias de la señal escalonada del D/A. El filtro recuperador debe eliminar estas bandas superiores, redondeando o suavizando la señal escalonada hasta convertirla en la forma de onda original (véase Figura 1.2)

Los criterios de diseño para un filtro recuperador analógico son similares a los del filtro antialiasing. La banda de paso debe mantenerse plana, y a partir de la frecuencia de corte introducir una atenuación elevada. Esto implica que la pendiente debe ser muy abrupta, y como a medida que ésta crece, las variaciones de fase alrededor de la frecuencia de corte se acentúan, puede aparecer lo que se denomina distorsión de fase. Consiste en la falta de linealidad (proporcionalidad)

entre la fase y la frecuencia dentro de ese margen de frecuencia, lo que provoca que el retardo introducido por el filtro a todas las frecuencias no sea el mismo. Este hecho puede producir efectos audibles, por lo que se debe subsanar mediante circuitos específicos de corrección de fase. Pueden disponerse en cualquier etapa de la cadena de conversión, tanto en la entrada como en la salida. Su misión es corregir la falta de linealidad de la fase, consiguiendo un retardo constante para todas las frecuencias y, por tanto, unos defectos auditivos mínimos. Otra consideración en lo que se refiere al filtro recuperador es su respuesta transitoria, ya que a diferencia del filtro de entrada, debe procesar una señal con unos cambios de nivel muy acentuados (los escalones de salida del D/A). Otro hecho, poco considerado en la mayoría de los casos, es la aparición en la entrada del filtro de componentes de frecuencia del orden de los megahercios. Los filtros analógicos no están diseñados para trabajar correctamente con señales de tan alta frecuencia, con lo que el resultado puede ser la aparición de dichas señales en la salida, ante la imposibilidad de atenuarlas.

Viendo todo el proceso desde un punto de vista matemático, podemos observar cómo el muestreo crea la necesidad del filtro recuperador. El proceso del muestreo visto en el dominio del tiempo consiste en la multiplicación de la señal de audio (señal muestreada) por un tren de pulsos (señal muestreadora). En el dominio de la frecuencia, el espectro resultante se obtiene mediante la convulsión de los espectros de las señales (el audio y el tren de pulsos). El resultado es el mantenimiento del espectro de audio original y la aparición de unos espectros adicionales (espectros imagen), que son la repetición del espectro de audio alrededor de los múltiplos de la frecuencia de muestreo. Por ejemplo, una señal de 1 kHz muestreada a 44 kHz provoca la aparición de componentes adicionales a 43, 45, 87, 89 kHz, etc. Aunque la utilización de un circuito de muestreo y retención reduce fuertemente la amplitud de los espectros adicionales, en la salida

del muestreador el nivel de estas señales es elevado, creciendo a medida que nos aproximamos a la banda original (véase Fig. 4.1). Para convertir la señal muestreada de nuevo en la información original, los espectros imagen deben ser eliminados, debiendo dejar únicamente la banda base original. Esto se tiene que realizar mediante un filtro paso bajo.

Alguien podría cuestionar la necesidad de filtrar (eliminar) unas señales por encima de la frecuencia de Nyquist, argumentando que superan el límite de audición del oído humano, pero este razonamiento es fácilmente refutable. Si la señal no se filtrara, podríamos escucharla perfectamente, pero los espectros imagen que atravesaran otros equipos podrían provocar efectos imprevisibles. En equipos analógicos, como magnetófonos o transmisores, los osciladores intermodularían con los espectros imagen, pudiendo caer dichas componentes perfectamente dentro de la banda de audio. Los equipos digitales filtran la señal (en su entrada analógica, claro está), pero los filtros antialiasing no están diseñados para eliminar componentes de frecuencias ni tan elevadas ni de nivel tan alto. Por otro lado, un sistema trabajando con frecuencias de muestreo baja (por ejemplo, 8 kHz) genera espectros imagen que puedan llegar a ser audibles, razón de más para eliminarlos con el filtro recuperador.

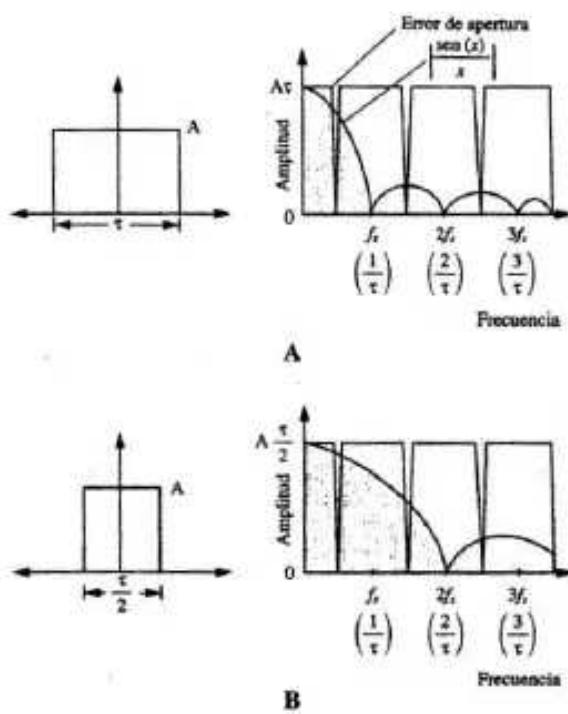


Figura 4.1. El error de apertura puede ser minimizado disminuyendo la anchura del pulso de salida. **A.** Un pulso de anchura igual a un período de muestreo produce una atenuación en alta frecuencia dentro de la banda de audio. **B.** La respuesta en alta frecuencia de la banda base mejora cuando la anchura del pulso es la mitad del período de la frecuencia de muestreo.

4.2 Respuesta al impulso

Lógicamente, cuando un impulso es aplicado a un dispositivo como un filtro paso bajo, a la salida del filtro se le denomina respuesta al impulso. La respuesta al impulso puede caracterizar completamente un sistema. Un filtro puede ser descrito perfectamente por su respuesta al impulso (en el dominio del tiempo) o por su respuesta en frecuencia, las cuales están relacionadas por la transformada de Fourier. Por otro lado, obsérvese que multiplicar el espectro de la señal de entrada por la función de transferencia del filtro (en el dominio de la frecuencia) es equivalente (en el dominio del tiempo) a la convolución de la señal de entrada con respuesta al impulso del filtro. La acción del filtrado paso-bajo y la de la respuesta al impulso son mostradas en la Figura 4.2.1. En el ejemplo, la señal de entrada está formada por dos sinusoides de frecuencias diferentes (A), estando su espectro (B) formado por dos rayas espectrales (f_1 y f_2). Supongamos que queremos eliminar la componente de alta frecuencia mediante un filtro paso-

tiempo) o por su respuesta en frecuencia, las cuales están relacionadas por la transformada de Fourier. Por otro lado, obsérvese que multiplicar el espectro de la señal de entrada por la función de transferencia del filtro (en el dominio de la frecuencia) es equivalente (en el dominio del tiempo) a la convolución de la señal de entrada con respuesta al impulso del filtro. La acción del filtrado paso-bajo y la de la respuesta al impulso son mostradas en la Figura 4.2.1. En el ejemplo, la señal de entrada está formada por dos sinusoides de frecuencias diferentes (A), estando su espectro (B) formado por dos rayas espectrales (f_1 y f_2). Supongamos que queremos eliminar la componente de alta frecuencia mediante un filtro paso-

bajo ideal con la respuesta muestreada en D, con lo que obtenemos en la salida una sola componente espectral (F). La respuesta al impulso del filtro ideal citado tiene forma $\text{sen}(x)/x$, tal y como se muestra en C; si la señal de entrada en el dominio del tiempo es convolucionada con la función $\text{sen}(x)/x$, el resultado en el dominio del tiempo es la salida filtrada mostrada en E. En otras palabras, en el dominio del tiempo, la señal muestreada puede ser filtrada aplicándole la respuesta al impulso que describe las características del filtro. En sistemas digitales, tanto la señal como la respuesta al impulso son representadas por valores discretos, siendo la respuesta al impulso de un filtro paso-bajo ideal cero en todas las muestras excepto en una, en el punto central.

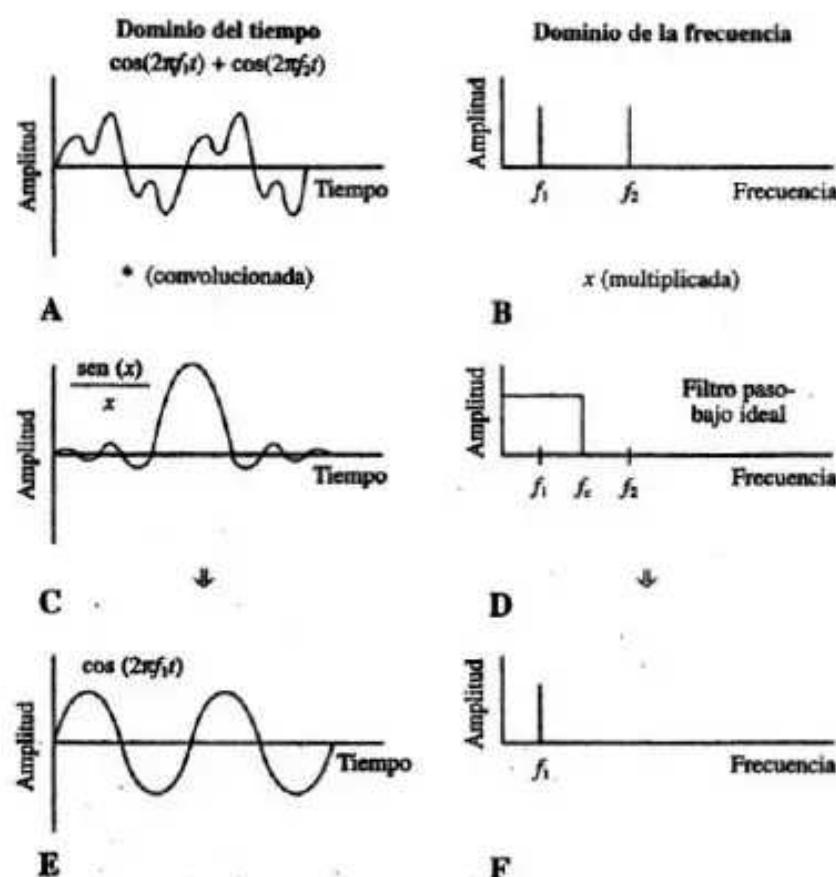


Figura 4.2.1 Ejemplo de filtrado paso bajo tanto en el dominio del tiempo (columna izquierda) como en el dominio de la frecuencia (columna derecha). **A.** La señal de entrada comprende dos ondas sinusoidales. **B.** Espectro de la señal de entrada. **C.** La respuesta al impulso del filtro paso bajo es una función $\text{sen}(x)/(x)$. **D.** Función de transferencia del filtro paso bajo deseado. **E.** La salida filtrada de la señal es la convulsión de la señal de entrada con la respuesta al impulso. **F.** El espectro de la señal de salida filtrada es la multiplicación de la señal de entrada por la función de transferencia del filtro.

Veamos la función del filtro recuperador. Aunque en esencia la idea de <<redondear>> la salida del muestreador para eliminar los espectros imagen es correcta, un estudio analítico muestra exactamente cómo la reconstrucción de las muestras es efectuada mediante el filtro paso-bajo recuperador. El teorema del muestreo impone que un filtro paso-bajo ideal es el necesario para reconstruir exactamente la forma de onda de la señal a partir de sus muestras. Nótese que un filtro ideal tiene una respuesta al impulso de la forma $\text{sen}(x)/x$. El teorema del muestro garantiza que, cuando las muestras de una señal limitada en banda son convolucionadas con la función $\text{sen}(x)/x$, la señal de entrada es reproducida de forma exacta. Específicamente, y como se muestra en la Figura 4.2.2A, cuando una simple muestra de audio pasa a través de un filtro paso-bajo ideal, transcurrido el retardo propio del filtro sale con una respuesta de la forma $\text{sen}(x)/x$.

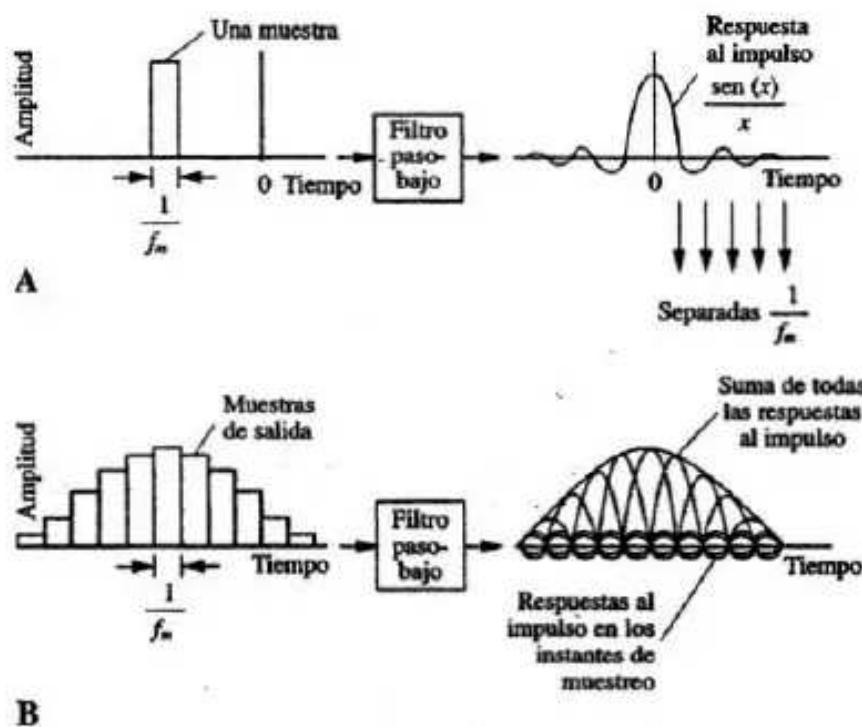


Figura 4.2.2 La respuesta al impulso de un filtro paso bajo ideal reconstruye la forma de onda analógica de la señal en la salida. **A.** La respuesta al impulso de un filtro paso bajo ideal es una función $\text{sen}(x)/x$, presentándose truncada en este dibujo. **B.** Cuando una serie de impulsos (muestras) pasan a través de un filtro paso bajo, se suman las respuestas al impulso individualmente formando la onda

Si el filtro tiene como frecuencia de corte la mitad de la frecuencia de muestreo ($f_m/2$), entonces la curva $\sin(x)/x$ pasa por cero múltiplos de $1/f_m$. Cuando una serie de muestras consecutivas pasan a través del filtro, la forma de onda resultante es la suma retardada de las componentes $\sin(x)/x$ asociadas a cada una de las muestras, como se puede apreciar en la Figura 4.3B. Cada respuesta al impulso de una muestra es cero justo en $1/f_m$ posición de máxima respuesta de otra de las muestras. Así, una vez sumadas las contribuciones de las diferentes respuestas al de todas las muestras, la forma de onda de la salida resultante adquiere el valor de cada muestra justo en el instante asociado a ella misma. Esta suma, o superposición, de las respuestas al impulso individuales de cada muestra reconstruye todos los puntos intermedios de la forma de onda de la señal.

De esta forma, es el filtrado de salida con un filtro paso-bajo ideal el proceso que origina una forma de onda de salida que permite reproducir la señal original. O dicho en otras palabras, es la respuesta al impulso del filtro aplicada a las muestras de audio lo que reconstruye la señal original.

4.3 Filtro Recuperador Digital

Debido a la distorsión de fase que introducen los filtros analógicos de elevado orden, han sido abandonados por los fabricantes de equipos de audio en favor de los filtros digitales. Un filtro digital es un circuito (un algoritmo) que procesa muestras de audio, y modificando sus valores produce una alteración del espectro (filtrado) de la señal. En el caso que nos ocupa, el filtro digital debe simular el proceso de filtro paso bajo ideal y producir la recuperación de la forma de onda original. En vez de suprimir los espectros imagen después de que la señal haya pasado por la etapa de conversión, los filtros digitales realizan las misma

función en el dominio digital, y por tanto, antes de aplicar las muestras al convertidor D/A. Después de éste, un filtro paso bajo de pequeño orden es suficiente para eliminar los espectros imágenes que quedan, ya que éstos aparecen ahora en frecuencias muy alejadas de la banda base. En la mayoría de los casos, se utilizan filtros de respuesta finita al impulso (FIR, «finite impulse response») conjuntamente con técnicas de sobremuestreo, permitiendo un filtro cuyo diseño es de baja complejidad. Con el sobremuestreo se obtiene muestras adicionales (al fin y al cabo, valores) mediante interpolación entre las muestras existentes. Puesto que por cada muestra real se generan muestras adicionales (quizás dos, cuatro u ocho por cada una), la frecuencia de muestreo de la señal de salida resulta (en la proporción anterior) más elevada que la original de la entrada. La estructura de filtros empleada habitualmente es la transversal, estando formada por una serie de retardos, multiplicadores y sumadores.

La tarea del filtro de sobremuestreo es doble; primero aplicar el sobremuestreo, y luego, mediante interpolación, filtrar la señal. La señal de entrada al filtro fue muestrada a f_m , tal y como aparece representado en la Figura 4.3.1A y B. El sobremuestreo comienza con el incremento de la frecuencia de muestreo multiplicándola por un factor denominado factor de sobremuestreo. Se realiza intercalando un determinado número de muestras nulas por cada muestra real; por ejemplo, un sobremuestreo cuádruple se consigue insertando tres muestras nulas por cada muestra original. La frecuencia de sobremuestreo es igual al factor de sobremuestreo por la frecuencia de muestreo original, pero el espectro de la señal sobremuestreada es el mismo que el espectro original, tal y como se muestra en la Figura 4.3.1 C y D. En nuestro ejemplo, la frecuencia de muestreo de 44,1 kHz se convierte en una frecuencia de muestreo de 176,4 kHz. Los datos entran en un filtro paso-bajo digital con una frecuencia de corte de $f_m/2$, pero que funciona a una frecuencia de 176,4 kHz. Aunque los datos

originales fueron muestreados a 44,1 kHz, con el sobremuestreo son indistinguibles de que hubiera sido muestreada a 176,4 kHz. La salida del filtro (véase Figs. 4.3.1E y F) es una señal ya interpolada, con los espectros imagen centrados alrededor de los múltiplos de la frecuencia de sobremuestreo. Esta interpolación se efectúa mediante un filtro paso bajo, cuya respuesta al impulso (véase Fig. 4.3.1G) comprende los coeficientes del filtro transversal, y cuyo espectro aparece en la Figura 4.3.1H.

Recapitulando, la interpolación es utilizada para crear muestras intermedias entre las reales. En un filtro de sobremuestreo cuádruple, el filtro entrega cuatro muestras por cada una de entrada. Sin embargo, para que puedan ser utilizables, sus valores deben ser calculados a partir de un cierto algoritmo. Específicamente, cada muestra intermedia debe ser multiplicada por el coeficiente apropiado de $\sin(x)/x$, que corresponde a su contribución a la respuesta al impulso total del filtro paso bajo en el dominio del tiempo (ver Figura 4.2.2.B). La función $\sin(x)/x$ en el dominio del tiempo tiene sus ceros alineados exactamente con todas las muestras de la señal, excepto la que está interpolando en ese instante. Así, cada muestra interpolada es una combinación lineal del resto de muestras, ponderadas todas con la función $\sin(x)/x$. Los resultados de todas las multiplicaciones son sumados, obteniendo la salida de la muestra filtrada. Conceptualmente, la operación del filtro digital corresponde exactamente a la suma de las respuestas al impulso de un filtro paso bajo ideal. Los espectros imagen aparecen a los múltiplos de la frecuencia de muestreo, y puesto que la separación entre la banda base y los espectros imagen es muy grande, un filtro analógico de bajo orden es suficiente para eliminar las componentes imagen sin provocar alteraciones de fase ni otras alteraciones de la señal.

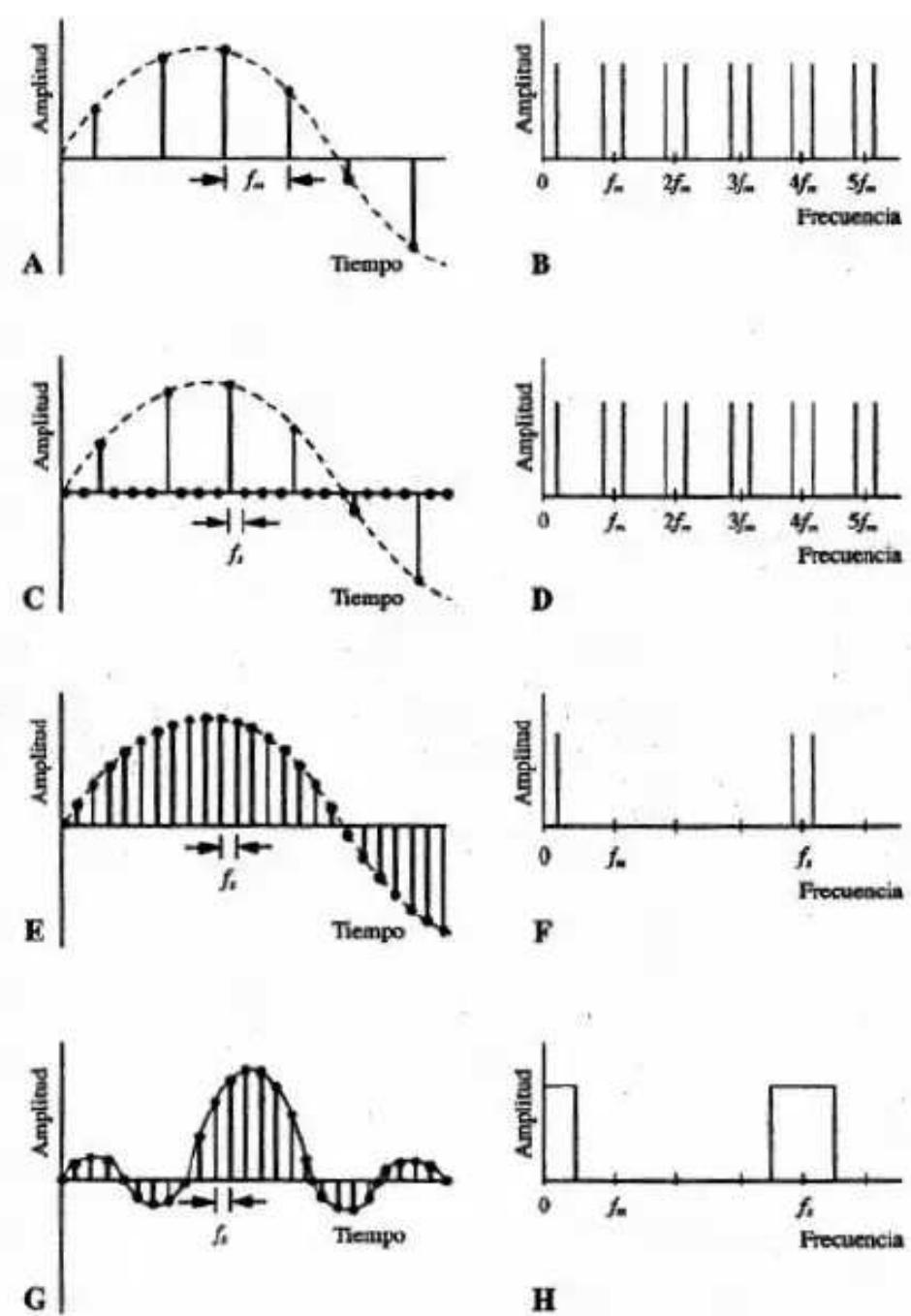


Figura 4.3.1. Un filtro de sobremuestreo remuestra e interpola la señal usando respuesta al impulso. Esto se muestra en el dominio del tiempo (columna izquierda) y en el dominio de la frecuencia (columna derecha). **A.** La señal de entrada es muestreada a f_m . **B.** Los espectros imagen aparecen centrados alrededor de los múltiplos de f_m . **C.** Con el remuestreo, muestras de valor nulo se disponen entre las muestras originales a alguna relación de interpolación. **D.** El espectro de la señal sobremuestreada es el mismo que el original. **E.** El filtro digital realiza la interpolación para generar valores nuevos a las muestras. **F.** La señal de salida filtrada tiene imágenes centradas alrededor de los múltiplos de la frecuencia de sobremuestreo f_s . **G.** Los valores de una respuesta al impulso muestreada corresponden a los coeficientes del filtro digital utilizado para generar los valores interpolados de las muestras. **H.** La función de transferencia del filtro muestra una banda de paso en la banda de audio y la banda centrada en la frecuencia de sobremuestreo.

El factor de sobremuestreo se define como:

$$R = \frac{f_s}{f_m}$$

Dónde:

f_s = es la frecuencia de sobremuestreo.

f_m = es la frecuencia de muestreo original.

El sobremuestreo requiere la inserción de $(R - 1)$ muestras nulas (ceros) por cada muestra de entrada; debiendo, además, quedar dispuestas de forma simétrica con respecto a las muestras reales. Un filtro paso-bajo es utilizado para limitar en banda ($f_m/2$) los datos de entrada, apareciendo entonces los espectros imagen sólo en los múltiplos enteros de $(R \times f_m)$. Además, el filtro paso-bajo establece nuevos valores en las muestras nulas, actuando como interpolador. Así, mejor que efectuar multiplicaciones con las muestras nulas, la potencia de cálculo economizada puede emplearse para diseñar un filtro más eficiente.

Bibliografía.

- Pohlmann, K. (2002) *Principios de audio digital*. USA