Algortimo de Deutsh-Joza

Naomi Itzel Reyes Granados[1]

[1]Universidad Nacional Autonoma de México. PCIC

07 de Agosto de 2025

Contenido

Contenido

Phase kickback

Analicemos rápidamente el comportamiento de la compuerta $CNOT$ en el estado particular $|1\rangle |-\rangle$.

Phase kickback

Analicemos rápidamente el comportamiento de la compuerta $CNOT$ en el estado particular $|1\rangle |-\rangle$.

Recordemos que $|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

Phase kickback

Analicemos rápidamente el comportamiento de la compuerta $CNOT$ en el estado particular $|1\rangle |-\rangle$.

$$\text{Recordemos que, } |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Así $(|1\rangle |-\rangle) = \frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$

Phase kickback

Entonces,

$$CNOT(|1\rangle\,|-\rangle) = CNOT\left(\frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Phase kickback

Entonces,

$$
\begin{aligned}
CNOT(|1\rangle|-\rangle) &= CNOT\left(\frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(CNOT\,|10\rangle - CNOT\,|11\rangle)
\end{aligned}
$$

Phase kickback

Entonces,

$$
\begin{aligned}
CNOT(|1\rangle\,|-\rangle) &= CNOT\left(\frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(CNOT\,|10\rangle - CNOT\,|11\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle)
\end{aligned}
$$

Phase kickback

Entonces,

$$
\begin{aligned}
CNOT(|1\rangle|-\rangle) &= CNOT\left(\frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(CNOT|10\rangle - CNOT|11\rangle)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle) = |1\rangle\left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Phase kickback

Entonces,

$$
\begin{aligned}
CNOT(|1\rangle\,|-\rangle) &= CNOT\left(\frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(CNOT\,|10\rangle - CNOT\,|11\rangle)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle)\\
&= |1\rangle\left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}\right) = |1\rangle\left(-\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\\
&= -\,|1\rangle\,|-\rangle
\end{aligned}
$$

Phase kickback

Entonces,

$$
\begin{aligned}
CNOT(|1\rangle|-\rangle) &= CNOT\left(\frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(CNOT|10\rangle - CNOT|11\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle) \\
&= |1\rangle\left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}\right) = |1\rangle\left(-\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -|1\rangle|-\rangle
\end{aligned}
$$

Note que el resultado se ve como haber pateado un "$-$" al estado original.

Phase kickback

Por otro lado tenemos que $CNOT\,|0\rangle\,|-\rangle = |0\rangle\,|-\rangle$.

Phase kickback

Generalizando los dos resultados obtenidos,

1. $CNOT(|0\rangle |-\rangle) = |0\rangle |-\rangle$.
2. $CNOT(|1\rangle |-\rangle) = - |1\rangle |-\rangle$.

tenemos:

$$CNOT(|b\rangle |-\rangle) = (-1)^b |b\rangle |-\rangle$$

Phase kickback

Vamos a poder generalizar este resultado para cualquier compuerta $\hat{U}_f$ con

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

Phase kickback

Vamos a poder generalizar este resultado para cualquier compuerta $\hat{U}_f$ con

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

Vamos a probar para $n = 1$ y de manera análoga se puede generalizar para un dominio más grande.

Phase kickback

Sea $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ una función y $\hat{U}_f$ la compuerta cuántica que codifica a f; recordemos que:

$$\hat{U}_f \left|x\right\rangle \left|y\right\rangle = \left|x\right\rangle \left|y \oplus f(x)\right\rangle$$

Queremos analizar los casos con $\left|y\right\rangle = \left|-\right\rangle = \frac{\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}$.

Phase kickback

$$\hat{U}_f \left|x\right\rangle \left|-\right\rangle = \hat{U}_f \left(\frac{\left|x\right\rangle \left|0\right\rangle - \left|x\right\rangle \left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

Phase kickback

$$\hat{U}_f \left|x\right\rangle \left|-\right\rangle = \hat{U}_f \left(\frac{\left|x\right\rangle \left|0\right\rangle - \left|x\right\rangle \left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\hat{U}_f \left|x\right\rangle \left|0\right\rangle - \hat{U}_f \left|x\right\rangle \left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}$$

Phase kickback

$$\hat{U}_f |x\rangle |-\rangle = \hat{U}_f \left(\frac{|x\rangle |0\rangle - |x\rangle |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\hat{U}_f |x\rangle |0\rangle - \hat{U}_f |x\rangle |1\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle |f(x) \oplus 0\rangle - |x\rangle |f(x) \oplus 1\rangle) = |A\rangle$$

Phase kickback

$$\hat{U}_f \left|x\right\rangle \left|-\right\rangle = \hat{U}_f \left(\frac{\left|x\right\rangle \left|0\right\rangle - \left|x\right\rangle \left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\hat{U}_f \left|x\right\rangle \left|0\right\rangle - \hat{U}_f \left|x\right\rangle \left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|x\right\rangle \left|f(x) \oplus 0\right\rangle - \left|x\right\rangle \left|f(x) \oplus 1\right\rangle \right) = \left|A\right\rangle$$

Aquí tenemos que ver los casos posibles para los valores de $f(x)$, que por definición son dos.

Phase kickback

1. $f(x) = 0$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|0 \oplus 0\rangle - |x\rangle|0 \oplus 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|0\rangle - |x\rangle|1\rangle)$$

2. $f(x) = 1$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|1 \oplus 0\rangle - |x\rangle|1 \oplus 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|1\rangle - |x\rangle|0\rangle)$$

Phase kickback

1. $f(x) = 0$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|0 \oplus 0\rangle - |x\rangle|0 \oplus 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|0\rangle - |x\rangle|1\rangle)$$
$$= |x\rangle \cdot \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |x\rangle|-\rangle$$

2. $f(x) = 1$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|1 \oplus 0\rangle - |x\rangle|1 \oplus 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|1\rangle - |x\rangle|0\rangle)$$
$$= |x\rangle \cdot \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} = -|x\rangle \cdot \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = -|x\rangle|-\rangle$$

Phase kickback

Así obtenemos la expresión:

$$\hat{U}_f \left|x\right\rangle \left|-\right\rangle = (-1)^{f(x)} \left|x\right\rangle \left|-\right\rangle$$

Contenido

Problema: Sea $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ una función, queremos determinar si f es constante o balanceada.

Algoritmo de Deutsch

Problema: Sea $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ una función, queremos determinar si f es constante o balanceada.

Obs. f es constante si a todo elemento del dominio lo manda a un mismo valor; f es balanceada si cada elemento del codominio está relacionado con la misma cantidad de elementos del dominio.

Solución clásica

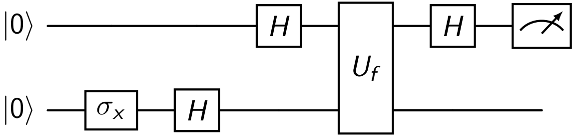
Calculamos $f(0)$ y $f(1)$ si son iguales entonces es constante y si son distintos es balanceada.

Solución clásica

Calculamos $f(0)$ y $f(1)$ si son iguales entonces es constante y si son distintos es balanceada.
Complejidad: $O(n)$.

Solución cuántica

El circuito correspondiente al algoritmo de Deutsch es:



Solución cuántica

Vamos a ir solucionando paso a paso el circuito para ver su funcionamiento.

Estado inicial:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle |0\rangle = |00\rangle$$

Solución cuántica

Estado inicial:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle\,|0\rangle = |00\rangle$$

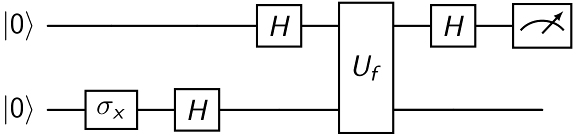
Aplicamos $I \otimes H\sigma_x$

$$|\psi_1\rangle = (I \otimes H\sigma_x)\,|00\rangle = |0\rangle \otimes (H(\sigma_x\,|0\rangle)) = |0\rangle \otimes H\,|1\rangle = |0\rangle\,|-\rangle$$

donde

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

El circuito correspondiente al algoritmo de Deutsch es:



Estado inicial:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle\,|0\rangle = |00\rangle$$

Aplicamos $I \otimes H\sigma_x$

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle\,|-\rangle$$

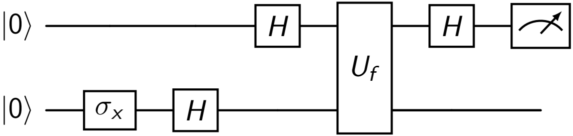
Paso 2: Aplicamos $H \otimes I$

$$|\psi_2\rangle = (H \otimes I)\,|0\rangle\,|-\rangle = (H\,|0\rangle)\,|-\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |-\rangle$$

$$= \frac{|0\rangle\,|-\rangle + |1\rangle\,|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

Solución cuántica

El circuito correspondiente al algoritmo de Deutsch es:



Solución cuántica

Estado inicial:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle\,|0\rangle = |00\rangle$$

Aplicamos $I \otimes H\sigma_x$

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle\,|-\rangle$$

Paso 2: Aplicamos $H \otimes I$

$$|\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle\,|-\rangle + |1\rangle\,|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

Paso 3: Aplicamos el oráculo U_f

$$|\psi_3\rangle = \hat{U}_f\left(\frac{|0\rangle\,|-\rangle + |1\rangle\,|-\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\hat{U}_f(|0\rangle\,|-\rangle) + \hat{U}_f(|1\rangle\,|-\rangle)}{\sqrt{2}}$$

Solución cuántica

Paso 3: Aplicamos el oráculo U_f

$$|\psi_3\rangle = \hat{U}_f\left(\frac{|0\rangle|-\rangle + |1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\hat{U}_f(|0\rangle|-\rangle) + \hat{U}_f(|1\rangle|-\rangle)}{\sqrt{2}}$$

Vamos a aplicar el phase-kickback:

$$|\psi_3\rangle = \frac{(-1)^{f(0)}|0\rangle|-\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

Solución cuántica

Paso 3: Aplicamos el oráculo U_f

$$|\psi_3\rangle = \hat{U}_f\left(\frac{|0\rangle|-\rangle + |1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\hat{U}_f(|0\rangle|-\rangle) + \hat{U}_f(|1\rangle|-\rangle)}{\sqrt{2}}$$

Vamos a aplicar el phase-kickback:

$$|\psi_3\rangle = \frac{(-1)^{f(0)}|0\rangle|-\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= (-1)^{f(0)}\left(\frac{|0\rangle|-\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Solución cuántica

Hay que analizar los casos de f:

1. f constante:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle |-\rangle + (-1)^{f(0) \oplus f(1)} |1\rangle |-\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

2. f balanceada:

Solución cuántica

Hay que analizar los casos de f:

1. f constante:

$$
\begin{aligned}
|\psi_3\rangle &= (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle |-\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)} |1\rangle |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
&= (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle |-\rangle + |1\rangle |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) = (-1)^{f(0)} |+\rangle |-\rangle
\end{aligned}
$$

2. f balanceada:

Solución cuántica

Hay que analizar los casos de f:

1. f constante:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |+\rangle |-\rangle$$

2. f balanceada:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle |-\rangle + (-1)^{f(0) \oplus f(1)} |1\rangle |-\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

Solución cuántica

Hay que analizar los casos de f:

1. f constante:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |+\rangle |-\rangle$$

2. f balanceada:

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle |-\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)} |1\rangle |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle |-\rangle - |1\rangle |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) = (-1)^{f(0)} |-\rangle |-\rangle \end{aligned}$$

Hay que analizar los casos de f:

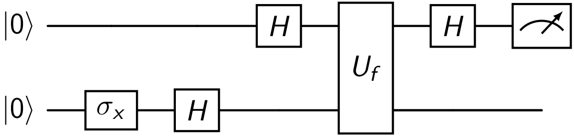
1. f constante:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |+\rangle |-\rangle$$

2. f balanceada:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |-\rangle |-\rangle$$

El circuito correspondiente al algoritmo de Deutsch es:



Solución cuántica

Hay que analizar los casos de f:

1. f constante:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |+\rangle |-\rangle$$

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= (H \otimes \hat{I})(-1)^{f(0)} |+\rangle |-\rangle = (-1)^{f(0)}(\hat{H} |+\rangle) |-\rangle \\ &= (-1)^{f(0)} |0\rangle |-\rangle \end{aligned}$$

2. f balanceada:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |-\rangle |-\rangle$$

Solución cuántica

Hay que analizar los casos de f:

1. f constante:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |+\rangle |-\rangle$$

$$|\psi_4\rangle = (-1)^{f(0)} |0\rangle |-\rangle$$

2. f balanceada:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |-\rangle |-\rangle$$

Solución cuántica

Hay que analizar los casos de f:

1. f constante:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |+\rangle |-\rangle$$

$$|\psi_4\rangle = (-1)^{f(0)} |0\rangle |-\rangle$$

2. f balanceada:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |-\rangle |-\rangle$$

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= (\hat{H} \otimes \hat{I})(-1)^{f(0)} |-\rangle |-\rangle = (-1)^{f(0)}(\hat{H} |-\rangle) |-\rangle \\ &= (-1)^{f(0)} |1\rangle |-\rangle \end{aligned}$$

Solución cuántica

Hay que analizar los casos de f:

1. f constante:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |+\rangle |-\rangle$$

$$|\psi_4\rangle = (-1)^{f(0)} |0\rangle |-\rangle$$

2. f balanceada:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} |-\rangle |-\rangle$$

$$|\psi_4\rangle = (-1)^{f(0)} |1\rangle |-\rangle$$

Solución cuántica

Conclusión: Al medir el primer cúbit obtendremos $|0\rangle$ si la función es constante o bien, $|1\rangle$ si es balanceada.

Complejidad: Lineal O(n)

Contenido

Algoritmo de Deutsch-Jozsa

Es la generalización del algoritmo de Deutsch tomando a $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.