

El qubit

Las dos posibilidades del qubit:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓
Ket
↓
vector columna

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↓
Ket
↓
vector columna

$$|1\rangle \text{ ——— } \bullet \text{ ———}$$

$$|0\rangle \text{ ——— } \bullet \text{ ———}$$

Estados de superposición: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

 α, β : amplitudes de probabilidad $\in \mathbb{C}$

$$|1\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Pr(0) = |\alpha|^2 = \alpha^* \alpha \\ \Pr(1) = |\beta|^2 = \beta^* \beta \end{cases} \quad \text{Probabilidades}$$

 $|\psi\rangle$ se utiliza para obtener toda la información del sistema

Ejemplos de estados cuánticos:

$$\bullet \{|0\rangle, |1\rangle\}$$

$$\bullet \begin{cases} |x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ |x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \Pr(0) = \Pr(1) = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \begin{cases} |y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ |y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \end{cases} \quad \Pr(0) = \Pr(1) = \frac{1}{2}$$

• Un estado debe estar normalizado, esto es, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

$$|\phi\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\times \quad |2|^2 + |3|^2 = 13$$

$$\frac{|2|^2 + |3|^2}{13} = 1 \quad \checkmark$$

La esfera de Bloch

Una representación geométrica del estado $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ se obtiene con la siguiente parametrización:

$$\alpha \rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad ; \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$\beta \rightarrow e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

Esta parametrización satisface $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$:

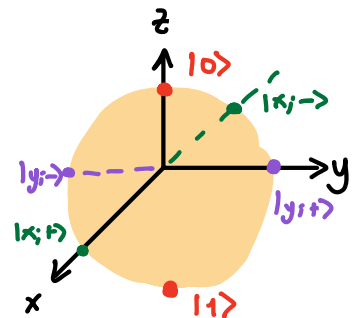
$$|\cos(\frac{\theta}{2})|^2 + |e^{i\phi} \sin(\frac{\theta}{2})|^2 = \cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2}) = 1$$

Algunos estados importantes:

- $(\theta, \phi) = (0, \phi) \longrightarrow |0\rangle$
- $(\theta, \phi) = (\pi, \phi) \longrightarrow |1\rangle$
- $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, 0) \longrightarrow |x_+\rangle$
- $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, \pi) \longrightarrow |x_-\rangle$

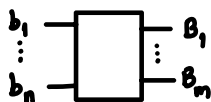
Ejemplo: Para $\theta=0$,

$$|\psi\rangle = \cos(0)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(0)|1\rangle = |0\rangle$$



Compuertas lógicas

Proceso en el que se utilizan una o más señales de entrada para generar otras de salida.



Ejemplos de compuertas lógicas:

• NOT $x \rightarrow \neg x$

Input	Output
0	1
1	0

• AND $x_1, x_2 \rightarrow y$ (Irreversible)

Input 1 (x_1)	Input 2 (x_2)	Output (y)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

En general, las compuertas lógicas clásicas son irreversibles.

Conjunto universal de compuertas: Conjuntos finitos de compuertas que permiten generar cualquier algoritmo con precisión arbitraria.

Ejemplos: $\{AND, OR, NOT\}$, $\{NAND\}$, $\{NOR\}$.

Compuertas cuánticas

$$|\psi_1\rangle \xrightarrow{\hat{U}} |\psi_2\rangle$$

$$\begin{bmatrix} |\psi_2\rangle \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\psi_1\rangle \\ | \end{bmatrix}$$

• De un qubit: $\hat{I}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Se pueden interpretar como rotaciones en la esfera de Bloch.

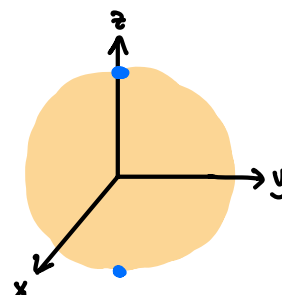
Identidad

\hat{I}



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}|0\rangle &= |0\rangle \\ \hat{I}|1\rangle &= |1\rangle \end{aligned}$$



NOT
cuántica

\hat{X}



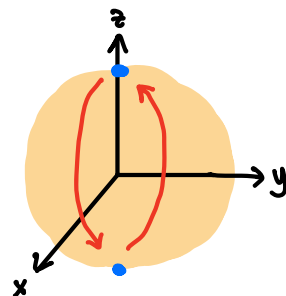
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}|0\rangle = |1\rangle$$

$$\hat{X}|1\rangle = |0\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Hadamard

\hat{H}

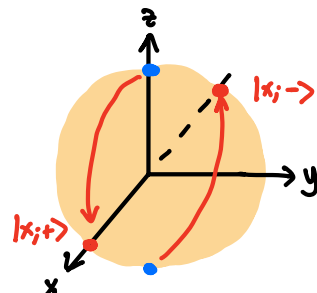


$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H}|0\rangle = |x_+\rangle$$

$$\hat{H}|1\rangle = |x_-\rangle$$

Generar superposición
balanceada



$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = |x_+\rangle$$

$$\hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = |x_-\rangle$$

Todos los estados que no sean los polos
son estados de superposición.

El ecuador contiene superposiciones balanceadas.

$$Pr|0\rangle = Pr|1\rangle = 1/2.$$

Si el estado se encuentra más cerca del Polo norte,

$$Pr|0\rangle > Pr|1\rangle$$

- De 2 qubits:

NOT
controlada
cuántica

\hat{CNOT}

control



blanco

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{CNOT}|00\rangle = |00\rangle$$

$$\hat{CNOT}|01\rangle = |01\rangle$$

$$\hat{CNOT}|10\rangle = |11\rangle$$

$$\hat{CNOT}|11\rangle = |10\rangle$$

(Control) Input 1	(Blanco) Input 2	Output (x_1)	Output (x_2)
0	0	0	0
	1	0	1
1	0	1	1
	1	1	0

- Todas las compuertas cuánticas son reversibles.

$$|\psi_i\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad |\psi_f\rangle = \hat{U}|\psi_i\rangle = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$$

Antes de aplicar una compuerta,
se debe cumplir:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Después de aplicar la compuerta,
se debe cumplir:

$$|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1$$

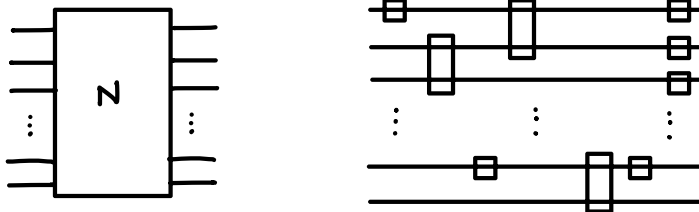
↑ Preservación de ↑
la norma

Los operadores que permiten esto son los operadores unitarios. Éstos cumplen que:

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger,$$

donde \hat{U}^{-1} es el operador inverso a \hat{U} y \hat{U}^\dagger , su transpuesto conjugado.

- Todas las compuertas de N qubits se pueden descomponer en una secuencia de compuertas de 1 y 2 qubits:



Esto es consecuencia de que existan conjuntos universales de compuertas cuánticas que contienen a lo más compuertas de 2 qubits.