Quantum Function Evaluator

Buscamos definir funciones clásicas de manera cuánticas y encontrar las ventajas que existen.

Finito

Sea una función $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tal que conocemos el valor de $f(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

↳ ¿Cómo podemos implementar esta función?

Respuesta

↳ Dado que conocemos los valores de la imagen de cada elemento del dominio basta con hacer:

$$\left.\begin{array}{l} \text{if } (\text{input} = x): \\ \quad \text{then } f(x) \end{array}\right\} \text{Para todo } x \in \mathcal{X}$$

obs. Solo estamos trabajando con dominios finitos; dominios infinitos no se verá dentro de está escuela.

Queremos plantear esta idea en un circuito cuántico, por lo que necesitamos saber:

¿Qué compuerta cuántica simula el "if"?

Respuesta

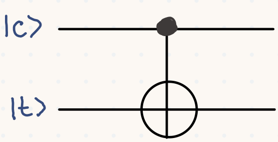
↳ CNOT, CCNOT, . . .

Recordando la semántica de la compuerta CNOT:

$$\text{CNOT}(c, t) := \text{if } (c == 1): \text{ then } \neg t$$

Cambiamos el valor del target.

Con $t :=$ target ; $c :=$ control.



Circuito.

> La generalización de CNOT aumenta el número de qubits que revisamos que están en el valor 1

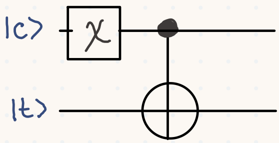
Sin embargo estas compuertas no bastan. ¿Por qué?

Respuesta → Ya que solo identifican cuando los qubits de control con valor 1.

↳ Falta saber cuando tienen valor 0.

¿Podemos modificar nuestra compuerta para que identifiquen 0 en lugar de 1?

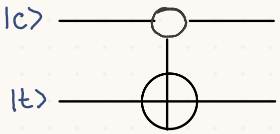
Respuesta: Sí, basta con aplicar una compuerta X (σ_x) a $|c\rangle$ antes de la CNOT.



$$\text{if } (\neg c == 1): \text{ then } \neg t$$

$$\neg c = 1 \iff c = 0 \checkmark$$

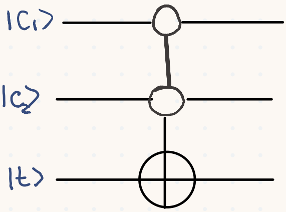
A este circuito le vamos a dar su propia notación



$$\left.\begin{array}{l} \text{if } (c == 0) \\ \quad \text{then } \neg t \end{array}\right\} \text{Semántica.}$$

$\boxed{\text{y le llamaremos } \widetilde{CNOT}}$

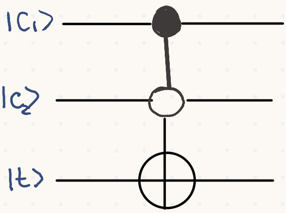
Análogo a la compuerta CNOT se puede generalizar para revisar si más qubits tienen el valor 0



if $(c_1 == 0$ y $c_2 == 0)$:
then $\neg t$

Finalmente, podemos "mezclar" ambos operadores:

p.e.



if $(c_1 == 1$ y $c_2 == 0)$:
then $\neg t$

TAREA: Ver al operador como matriz.
Mostrar que el operador es unitario.

Ejemplo: Sumador cuántico.

- Suma de 1 qbit más 1 qubit:

  Sean $|x_0\rangle$, $|x_1\rangle$ estados de 1 qubit, buscamos un circuito que regrese el valor $|x_0 + x_1\rangle$.

- Lo primero que buscamos hacer es definir la función $f(x_0, x_1) = x_0 + x_1$:

x_0	x_1	$f(x_0, x_1) = x_1 + x_2$
0	0	0 0
0	1	0 1
1	0	0 1
1	1	1 0

Qubits de entrada (columnas x_0, x_1) — Qubits de salida (columna f)

- Vamos a definir el circuito dada la tabla anterior:

  a) El circuito constara de # de qbits de entrada más el # de qubits de salida.

  b) Inicializaremos a los qubits de salida con el valor de $|0\rangle$.

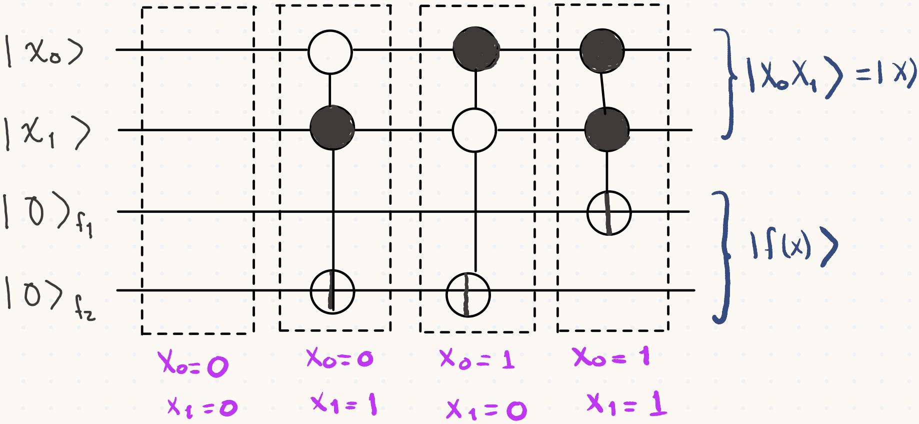
Con las aclaraciones a), b) podemos empezar a definir el circuito.

x_0	x_1	$f(x_0, x_1) = x_1 + x_2$
0	0	0 0
0	1	0 1
1	0	0 1
1	1	1 0

$|f_1 f_2\rangle$

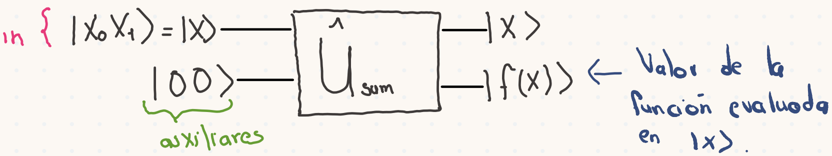
Qubits de entrada
↳ Qubits control.

Qubits de salida
↳ Qubits target.



Notas: * A nuestro circuito de suma le renombramos $\hat{U}_{sum}$.

* La forma de representar a nuestro circuito como compuerta es:



Esta compuerta la podemos generalizar para estados de mas de 1 qubit.

↳ A grandes rasgos, ¿cómo se realizaría el sumador para dos estados $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$ de dos qubits?

1.- Hacer la tabla que defina la función

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
00	00	000
⋮	⋮	⋮

2.- Definir el circuito tal que ocupo 4 qubits de entrada y 3 qubits de salida.

¿Donde está la ventaja?

↳ Superposición. → Podemos hacer la operación en distintos estados al mismo tiempo

$$\frac{1}{2} U_{sum}\left(|0\rangle_{x_0}|0\rangle_{x_1} + |0\rangle_{x_0}|1\rangle_{x_1} + |1\rangle_{x_0}|0\rangle_{x_1} + |1\rangle_{x_0}|1\rangle_{x_1}\right)$$

$$= \left(|00\rangle + |01\rangle + |01\rangle + |10\rangle\right)\frac{1}{2}$$

Conseguimos un estado con todas las soluciones posibles de la suma de dos estados de un qubit. Paralelismo Cuántico.

Entonces... Ya ganamos?

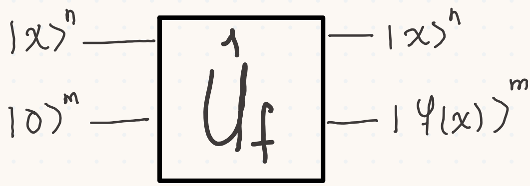
↳ Aquí no acaba nuestro camino, ya que, aunque en superposición tenemos todos los resultados posibles este no es observable; Al momento de querer ver el estado colapsará a solo una de las soluciones, y peor aún, está solución es probabilista.

↳ Este inconveniente es manejable y se verá en ejemplos de la sig sección.

Generalización.

Usando la filosofía de como definimos la función sum, podemos definir cualquier función clásica.

Sea $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ ent existe una compuerta cuántica $\hat{U}_f$ tal que calcula f y esta definida como:



Usualmente no es relevante la implementación de $\hat{U}_f$, se trata como una caja negra y le llamaremos oraculo. Sin embargo es fundamental que se entienda como se podría implementar de ser necesario.

Tarea: Define las compuertas U_{AND}, U_{OR} y U_f con $f(x)=x^2$.

¿Porqué la compuerta AND clásica no coincide en "dimensionalidad" con el AND cuántico?