Máximos y mínimos.

En el cálculo diferencial, uno de los objetivos principales es encontrar los puntos en los que una función alcanza sus valores extremos, es decir, sus máximos y mínimos. Estos puntos son de gran importancia en diversas aplicaciones prácticas, como la optimización de recursos, la maximización de beneficios, la minimización de costos, entre otros.

Para encontrar los máximos y mínimos de una función, se siguen varios pasos metódicos:

1. **Encontrar la derivada de la función:** La derivada de una función y=f(x) representa la tasa de cambio de la función con respecto a la variable x. Matemáticamente, la derivada se denota como:

$$f'(x) \text{ o } \frac{dy}{dx}$$

2. **Encontrar los valores críticos:** Los valores críticos son los puntos en los cuales la derivada de la función es igual a cero o no existe. Estos puntos son candidatos a ser máximos o mínimos locales. Para encontrarlos, se resuelve la ecuación $f'(x)= 0$.

3. **Determinar la naturaleza de los valores críticos:** Para distinguir si un valor crítico es un máximo, un mínimo o un punto de inflexión, se analiza el signo de la derivada en intervalos alrededor de los valores críticos.

- Si la derivada cambia de positiva a negativa, el punto crítico es un máximo local.
- Si la derivada cambia de negativa a positiva, el punto crítico es un mínimo local.
- Si la derivada no cambia de signo, el punto crítico puede ser un punto de inflexión.

4. **Calcular el valor de la función en los puntos críticos:** Para determinar los valores máximos y mínimos, se evalúa la función original f(x) en los puntos críticos encontrados.

Estos pasos nos permiten identificar los puntos en los que una función alcanza sus valores más altos y más bajos en un intervalo dado, facilitando así la optimización en diversas aplicaciones.

Ejemplo práctico:

A continuación, se presenta un problema práctico en el cual se aplican estos conceptos para optimizar los costos de mantenimiento de una empresa de desarrollo web.

Una empresa de desarrollo web está tratando de optimizar los costos de mantenimiento de sus servidores. El costo promedio diario de mantenimiento, medido en miles de dólares, está modelado por la función:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

donde x es el número de servidores en funcionamiento. Queremos determinar:

1. En qué intervalos el costo de mantenimiento está disminuyendo.
2. En qué intervalos el costo de mantenimiento está aumentando.
3. El número de servidores que minimiza el costo de mantenimiento y el valor mínimo del costo.
4. El número de servidores que maximiza el costo de mantenimiento y el valor máximo del costo.
5. Las coordenadas de los puntos máximos y mínimos en la gráfica.

Solución:

1. **Encontrar la derivada de y=f(x) e igualarla a 0:**

   La derivada de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ es:

   $y'=3x^2 - 12x + 9$

   Igualamos la derivada a cero para encontrar los valores críticos:

   $$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

   Simplificamos dividiendo todo por 3:

   $$x^2 - 4x + 3 = 0$$

   Factorizamos la ecuación:

   $$(x-3)\ (x-1) = 0$$

   Entonces, los valores críticos son:

   $$x=3 \quad y \quad x=1$$

2. **Determinar el signo de y′(x) en los intervalos definidos por los puntos críticos:**
   - Para x < 1:

     Tomamos un valor de prueba en el intervalo $(-\infty, 1)$, por ejemplo, x=0:

     $$y'(0) = 3(0)2 - 12(0) + 9 = 9(positivo)$$

   - Para 1 < x < 3 :

     Tomamos un valor de prueba en el intervalo (1,3), por ejemplo, x = 2:

     $$y'(2) = 3(2)2 - 12(2) + 9 = 3(4) - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3(negativo)$$

- Para x > 3:

  Tomamos un valor de prueba en el intervalo (3, ∞), por ejemplo, x=4:

$$y'(4) = 3(4)2 - 12(4) + 9 = 3(16) - 48 + 9 = 48 - 48 + 9 = 9(positivo)$$

3. **Conclusiones sobre el crecimiento y decrecimiento:**

   - La función y(x) es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ porque $y'(x) > 0$.
   - La función y(x) es decreciente en el intervalo $(1\,, 3)$ porque $y'(x) < 0$.
   - La función y(x) es creciente en el intervalo $(3, \infty)$ porque $y'(x) > 0$.

4. **Determinar el mínimo y el máximo del costo de mantenimiento:**

   El valor mínimo se encuentra en $x =$ (ya que $y(x)$cambia de decreciente a creciente).

   Sustituimos x=3 en la función original y=f(x):

$$\mathrm{y}(3) = (3)3 - 6(3)2 + 9(3) + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$$

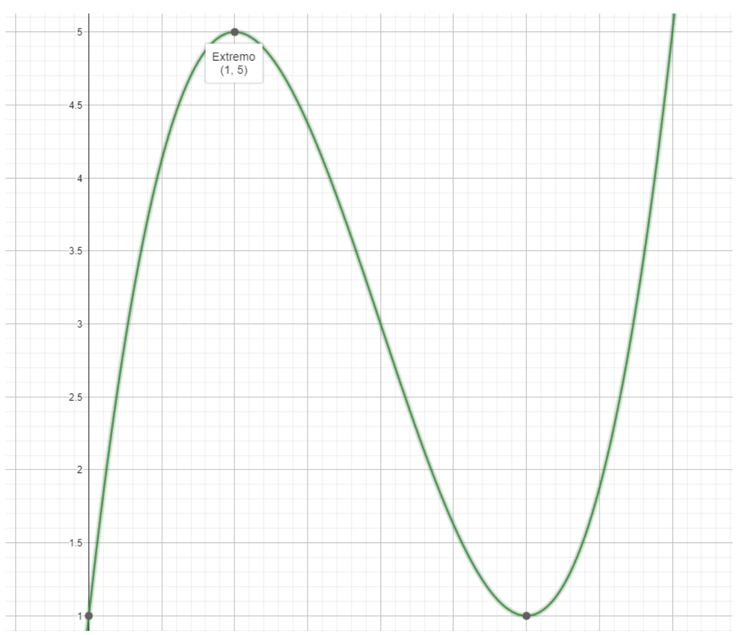
   El valor máximo se encuentra en x=1 (ya que y(x) cambia de creciente a decreciente).

   Sustituimos x=1 en la función original y=f(x):

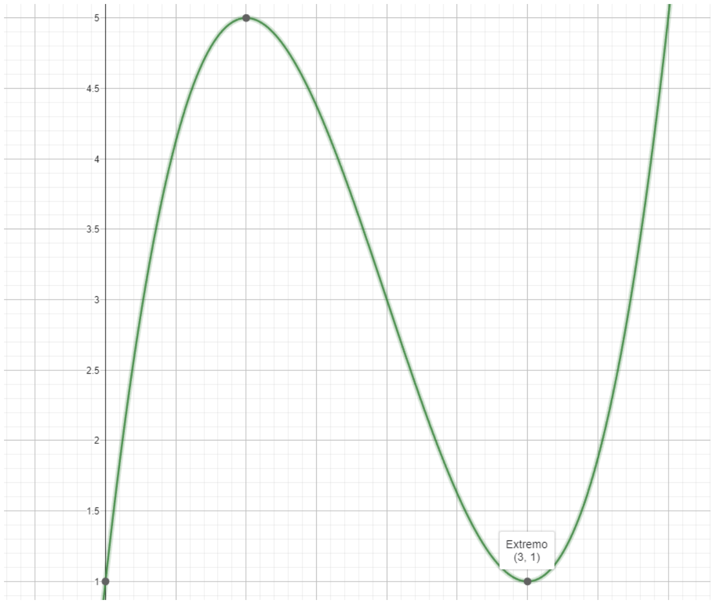
$$\mathrm{y}(1) = (1)3 - 6(1)2 + 9(1) + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$$

5. **Coordenadas de los puntos máximos y mínimos en la gráfica:**

   El punto máximo es (1,5).



El punto mínimo es (3,1).



Conclusión:

1. El costo de mantenimiento está disminuyendo en el intervalo (1,3).
2. El costo de mantenimiento está aumentando en los intervalos (−∞,1) y (3,∞).
3. El número de servidores que minimiza el costo de mantenimiento es 3 servidores, y el valor mínimo del costo es 1 mil dólares.
4. El número de servidores que maximiza el costo de mantenimiento es 1 servidor, y el valor máximo del costo es 5 mil dólares.
5. Las coordenadas de los puntos máximos y mínimos en la gráfica son: máximo en (1,5) y mínimo en (3,1).

Por lo tanto, la empresa debe mantener 3 servidores en funcionamiento para minimizar los costos de mantenimiento, y debe evitar tener solo 1 servidor en funcionamiento, ya que eso maximiza los costos de mantenimiento.