<u>Trabajo de Matemática I N°3</u>

Autor: **Agustín Francisco Lorenzin**

Profesor: **Damián Pinasco**

Carrera: **Maestría en Econometría**

Materia: **Matemática I**

Tema: **Transformaciones Lineales**

Ciclo Lectivo: **2025**

Fecha de Entrega: **26/04/2025**

Lorenzin, Agustín Francisco
Maestrando en Econometría
Universidad Torcuato Di Tella

Trabajo de Matemática I N°3

Consigna:

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales es posible definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique:

a) $T(1,2,1) = (k,8,3)$.

b) $T(2,1,0) = (k^3,k^6,k^9)$.

c) $T(1,0,1) = (k,10,5)$.

d) $T(1,1,1) = (k^2,9-k^2+k,2+k)$.

Para la/las transformaciones halladas estudiar la dimensión del $\ker(T)$ y de la $\mathrm{Im}(T)$

Resolución:

Se busca encontrar todos los valores de $k \in R$ tales que exista una transformación lineal $T:R^3 \to R^3$ que satisfaga simultáneamente:

$$T(1,2,1) = (k,8,3).$$

$$T(2,1,0) = (k^3,k^6,k^9).$$

$$T(1,0,1) = (k,10,5).$$

$$T(1,1,1) = (k^2,9-k^2+k,2+k).$$

Sin embargo, los vectores dados (1,2,1), (2,1,0), (1,0,1), (1,1,1) no forman la base canónica. Entonces, para asegurar que T esté bien definida, debe existir una relación lineal entre esos vectores compatible con la linealidad de T:

$$\alpha(1,2,1)+\beta(2,1,0)+\gamma(1,0,1)+\delta(1,1,1)=(0,0,0)$$

por lo tanto:

$$\boldsymbol{\alpha+2\beta+\gamma+\delta=0}$$
$$\boldsymbol{2\alpha+\beta+\delta=0}$$
$$\boldsymbol{\alpha+\gamma+\delta=0}$$

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones en 4 incógnitas. Siempre que el número de incógnitas supere al de ecuaciones, existe dependencia lineal.

$$\boldsymbol{\gamma = -(\alpha+\delta)}$$

$$\alpha+2\beta-(\alpha+\delta)+\delta=0 \Rightarrow \alpha - \alpha + \delta - \delta + 2\beta = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0}$$

$$2\alpha+(0)+\delta=0 \Rightarrow \boldsymbol{2\alpha = -\delta}$$

$$\boldsymbol{\gamma = -\alpha - \delta = -\alpha + 2\alpha = \alpha}$$

En resumen, tenemos:

$$\boldsymbol{\beta=0,\ \delta=-2\alpha,\ \gamma=\alpha\ (\text{con } \alpha \text{ libre})}$$

Lorenzin, Agustín Francisco
Maestrando en Econometría
Universidad Torcuato Di Tella
Los vectores dados son **linealmente dependientes**. Existe la relación:

$$\alpha*(1,2,1)+0*(2,1,0)+\alpha*(1,0,1)-2\alpha*(1,1,1)=(0,0,0)$$

$$(1,2,1)+(1,0,1)-2(1,1,1)=(0,0,0)$$

Los valores de k deben satisfacer:

$$T(1,2,1)+T(1,0,1)-2T(1,1,1)=(0,0,0)$$

Recordando las imágenes dadas:

$$T(1,2,1)=(k,8,3).$$

$$T(2,1,0)=(k^3,k^6,k^9).$$

$$T(1,0,1)=(k,10,5).$$

$$T(1,1,1)=(k^2,9-k^2+k,2+k).$$

$$k+k-2*(k^2)=0 \Rightarrow \underline{k=1 \text{ o } k=0}$$

$$8+10-2*(9-k^2+k)=0 \Rightarrow \underline{k=1 \text{ o } k=0}$$

$$3+5-2*(2+k)=0 \Rightarrow \underline{k=2}$$

No existe un k que cumpla simultáneamente esas tres condiciones.

No existen valores de $k \in R$ para los cuales sea posible definir una transformación lineal $T:R^3 \to R^3$ que verifique simultáneamente las condiciones impuestas.

Respecto al análisis de la dimensión del núcleo ker(T) y de la imagen Im(T) de la transformación T, dado que no existe ningún valor de $k \in R$ que permita definir una transformación lineal $T:R^3 \to R^3$ que satisfaga simultáneamente las condiciones impuestas, resulta improcedente abordar el estudio de las dimensiones de ker(T) e Im(T), en tanto que la transformación solicitada no puede ser construida.