

**А.А. Повзнер, А.Г. Андреева, К.А. Шумихина**

# ФИЗИКА

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Электронный текстовый ресурс

Научный редактор: проф., д-р физ.-мат. наук, А.В. Мелких

Подготовлено кафедрой физики

Рекомендовано для всех инженерно-технических направлений подготовки всех форм обучения.

В основу учебного пособия положен цикл лекций по базовому курсу физики, читаемых на кафедре физики УрФУ. В нем в краткой и доступной форме излагается курс физики, целью изучения которого является формирование научного мировоззрения, владения физико-математическим аппаратом, методами физических исследований с целью успешного освоения специальных дисциплин. Интегрирование знаний о природе материи и физических законов в смежные науки позволяет студенту рациональнее и эффективнее использовать полученные в ходе обучения компетенции для решения профессиональных задач. Учебное пособие охватывает весь материал первой части базового курса физики и структурировано по лекциям.

Екатеринбург

2016

## Оглавление

Механика .....	8
Лекция 1 .....	8
1.1. Кинематика движения материальной точки.....	8
1.1.1. Общие понятия.....	8
1.1.2. Система отсчета, радиус-вектор, путь, перемещение, мгновенная скорость движения м.т .....	9
1.1.3. Мгновенное ускорение м.т. Касательное и нормальное ускорения м.т .....	11
1.1.4. Схема решения основной задачи кинематики. Формулы для радиус-вектора $r$ и вектора скорости $v$ .....	13
1.2. Динамика движения м.т.....	15
1.2.1. Сила, инертность тела, масса тела .....	15
1.2.2. Законы Ньютона.....	16
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 1.....	18
Лекция 2 .....	19
1.2.3. Закон сохранения импульса.....	19
1.3. Механическая энергия и работа.....	22
1.3.1. Работа и мощность силы.....	22
1.3.2. Кинетическая энергия тела. Теорема о кинетической энергии.	24
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 2.....	25
Лекция 3 .....	26
1.3.3. Потенциальная энергия взаимодействующих тел. Теорема о потенциальной энергии .....	26
1.3.4. Формула связи потенциальной энергии $W_p$ и консервативной силы $F_K$ .....	29
1.3.5. Механическая энергия системы тел. Закон сохранения ..... и изменения механической энергии .....	31

1.3.6. Применение законов сохранения импульса и механической энергии к анализу абсолютно упругого и неупругого столкновений .....	32
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 3.....	34
Лекция 4.....	35
1.4. Кинематика вращательного движения материальной точки.. и абсолютно твердого тела .....	35
1.4.1. Кинематические характеристики вращательного движения материальной точки и абсолютно твердого тела.....	35
1.4.2. Формулы, выражающие связь между линейными и угловыми характеристиками при вращательном движении .....	37
1.5. Динамика вращательного движения.....	38
1.5.1. Момент инерции м.т. и а.т.т. относительно оси вращения. Теорема Штейнера .....	38
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 4.....	41
Лекция 5.....	42
1.5.2. Момент силы относительно оси вращения. Основной закон динамики вращательного движения .....	42
1.5.3. Момент импульса м.т. и а.т.т. относительно оси вращения .....	44
1.5.4. Взаимосвязь между скоростью изменения момента импульса и моментом силы .....	45
1.5.5. Закон сохранения момента импульса.....	46
1.6. Работа и энергия при вращательном движении .....	47
1.6.1 Кинетическая энергия вращающегося а.т.т .....	47
1.6.2. Работа внешних сил по вращению абсолютно твердого тела...49	49
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 5.....	50
Основы молекулярной физики .....	51
Лекция 6.....	51
2.1. Статистический и термодинамический методы описания свойств макроскопических систем.....	51
2.2. Функция распределения Максвелла и ее применение .....	54

2.2.1. Понятие о функции распределения Максвелла (функции распределения молекул идеального газа по модулю скорости молекул) ...	54
2.2.2. Средние характеристики молекул.....	58
2.2.3. Молекулярно-кинетический смысл температуры .....	59
2.2.4. Основное уравнение МКТ идеального газа для давления* .....	60
2.2.5. Экспериментальная проверка распределения молекул по модулю скорости. Опыт Штерна* .....	62
2.3. Барометрическая формула .....	63
2.4. Распределение Больцмана .....	64
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 6.....	65
Лекция 7 .....	66
2.5. Основные понятия равновесной термодинамики.....	66
2.6. Число степеней свободы молекулы. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы .....	67
2.7 Внутренняя энергия системы, работа, теплообмен.....	69
2.7.1. Внутренняя энергия системы .....	69
2.7.2. Работа .....	70
2.7.3. Теплообмен, теплоемкость системы .....	71
2.8. Первый закон термодинамики и его применение к различным процессам .....	72
2.8.1 Первый закон (начало) термодинамики.....	72
2.8.2. Применение первого начала термодинамики к различным процессам .....	73
2.8.3 Зависимость теплоемкости системы от вида процесса. Уравнение Майера .....	74
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 7.....	75
Лекция 8 .....	76
2.9. Второе начало (закон) термодинамики.....	76
2.9.1. Некоторые формулировки второго начала термодинамики ....	76
2.9.2. Энтропия в термодинамике .....	78

2.9.3 Расчет изменения энтропии для изопроцессов.....	80
2.9.4 Термодинамическая вероятность. Статистический смысл понятия энтропии .....	80
2.10. Тепловые двигатели. Идеальный тепловой двигатель.....	82
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 8.....	84
<b>ЭЛЕКТРИЧЕСТВО .....</b>	<b>85</b>
Лекция 9.....	85
3.1. Электростатика .....	85
3.1.1. Электрический заряд. Закон Кулона.....	85
3.1.2. Вектор напряженности $E$ электростатического поля Напряженность электрического поля точечного заряда.....	87
3.1.3. Принцип суперпозиции электростатических полей. Напряженность электрического поля на оси заряженного кольца .....	88
3.1.4. Силовые линии электростатического поля (линии вектора $E$ )	90
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 9.....	92
Лекция 10 .....	93
3.1.5. Поток вектора $E$ электростатического поля. Теорема Гаусса – Остроградского для вектора $E$ .....	93
3.1.6. Применение теоремы Гаусса – Остроградского к расчету ..... электростатических полей.....	95
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 10.....	101
Лекция 11 .....	102
3.1.7. Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов. Потенциальный характер электростатического поля .....	102
3.1.8. Потенциал $\phi$ электростатического поля. Потенциал $\phi$ электростатического поля точечного заряда .....	104
3.1.9. Принцип суперпозиции для потенциала. Потенциал электрического поля на оси равномерно заряженного кольца .....	105
3.1.10. Работа сил электрического поля. Разность потенциалов.	

Формула связи вектора $E$ и потенциала $\phi$ .....	106
3.1.11. Примеры вычисления разности потенциалов.....	108
3.1.12. Эквипотенциальные поверхности .....	109
3.1.13. Циркуляция вектора $E$ электростатического поля. Теорема о циркуляции вектора $E$ электростатического поля.....	110
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 11.....	111
Лекция 12 .....	112
3.1.14. Распределение избыточного заряда на проводниках. в состоянии равновесия .....	112
3.1.15. Незаряженный проводник во внешнем электрическом поле.....	115
3.1.14. Электроемкость уединенного проводника. Электроемкость конденсатора .....	116
3.1.15. Энергия заряженного проводника и конденсатора. Энергия и объемная плотность энергии электростатического поля .....	119
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 12.....	121
Лекция 13 .....	122
3.2. Постоянный электрический ток .....	122
3.2.1. Сила тока, плотность тока .....	122
3.2.2. Закон Ома для однородного участка цепи. Закон Джоуля – Ленца .....	124
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 13.....	127
Лекция 14 .....	129
3.2.3. Электродвижущая сила источника тока. Закон Ома для неоднородного участка цепи .....	129
3.2.5. Законы Ома и Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.....	132
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 14.....	133
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ .....	135
Лекция 15 .....	135
4.1. Магнитное поле и его характеристики .....	135
4.1.1. Магнитное поле. Опытные данные по обнаружению магнитного	

поля .....	135
4.1.2. Вектор индукции магнитного поля. Линии магнитной индукции. Принцип суперпозиции.....	136
4.1.3. Элемент тока. Закон Био – Савара – Лапласа (БСЛ).....	138
4.1.4. Примеры применения закона Био – Савара – Лапласа к расчету магнитных полей различных проводников с электрическим током.....	140
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 15.....	143
Лекция 16.....	144
4.1.5. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции $B$ .....	144
4.1.6. Применение теоремы о циркуляции вектора $B$ к расчету магнитных полей проводников с током .....	146
4.2. Закон Ампера. Сила Ампера, действующая на прямолинейный проводник с током в однородном поле .....	149
4.3. Поведение контура с током в магнитном поле .....	150
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 16.....	152
Лекция 17 .....	153
4.4. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в магнитном поле	153
4.5. Магнитный поток. Теорема Гаусса для вектора $B$ . Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.....	157
4.6. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле .....	158
4.7. Эффект Холла в металле .....	159
4.8. Магнитное поле в веществе.....	160
4.8.1. Магнитная проницаемость. Вектор намагничивания.....	160
4.8.2. Виды магнетиков .....	163
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 17.....	166
Библиографический список .....	168

# МЕХАНИКА

## ЛЕКЦИЯ 1

### 1.1. Кинематика движения материальной точки

#### 1.1.1. Общие понятия

Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел в пространстве. Для строгости и удобства изложения материала применяют две модели твердых тел **материальная точка** (м.т.) – тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данного движения, и **абсолютно твердое тело** (а.т.т.) – это абсолютно недеформируемое тело или тело, расстояние между двумя любыми точками которого остается постоянным при его движении [1].

Одной из важных кинематических характеристик движения является **траектория** – линия, по которой движется материальная точка. Траектория может быть **прямолинейной** (м.т. движется по прямой линии) или **криволинейной** (рис. 1.1, а). Если траектория движения лежит в одной плоскости, то такое движение принято называть **плоским**.

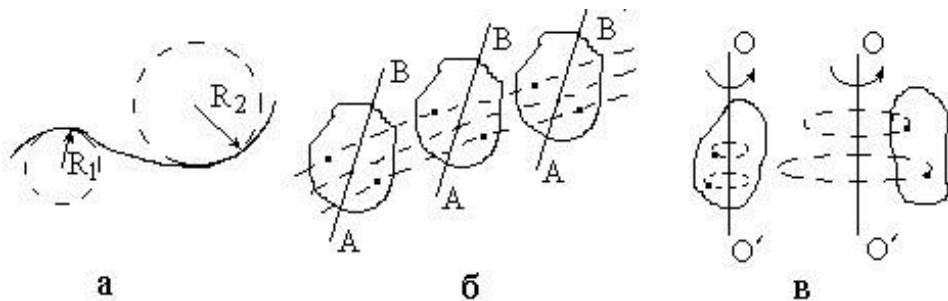


Рис. 1.1

Для а.т.т. вводят два понятия: **поступательное движение** – это такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе (рис. 1.1, б), и **вращательное движение вокруг неподвижной оси** – это такое движение, при котором все точки тела движутся

по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения (рис. 1.1, в) [1].

Любое движение а.т.т. можно свести к сумме двух движений – поступательного и вращательного движений. При поступательном движении а.т.т. все его точки движутся по одинаковым траекториям (рис. 1.1, б), поэтому можно заменить такое движение а.т.т. на движение одной м.т. – его центра масс. Следовательно, поступательное движение а.т.т. не требует отдельного рассмотрения наряду с изучением движения м.т. [1].

### **1.1.2. Система отсчета, радиус-вектор, путь, перемещение, мгновенная скорость движения м.т.**

Кинематика изучает виды механического движения, не рассматривая причины, вызвавшие его. Для описания движения тела в пространстве вводится **система отсчета (с.о.)**, состоящая из тела отсчета (произвольно выбранного тела, относительно которого рассматривается движение других тел), связанной с ним системы координат и часов (рис. 1.2).

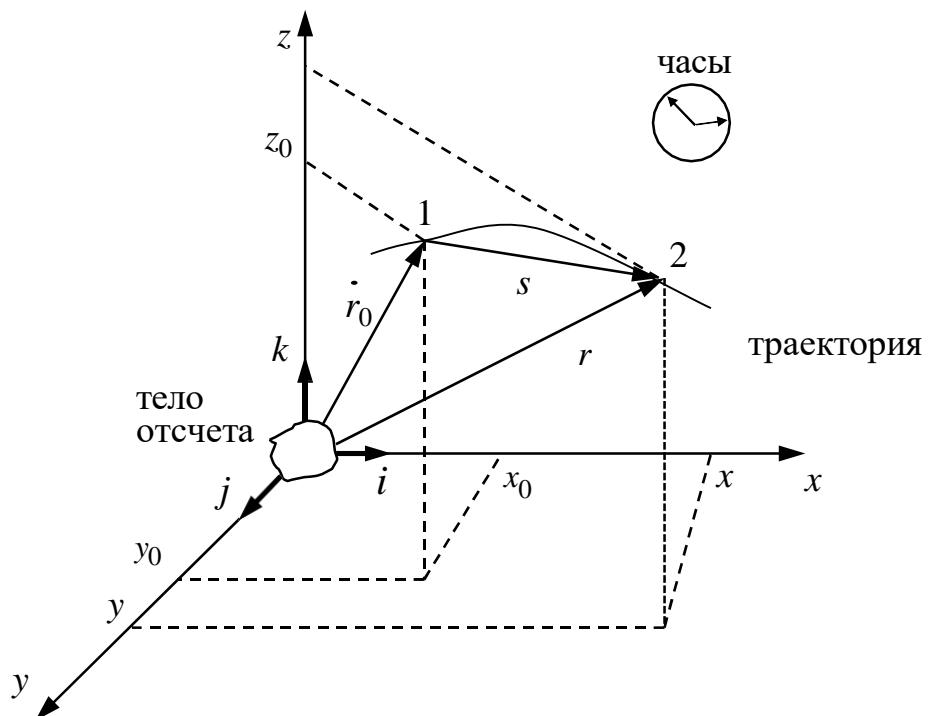


Рис. 1.2

Существует два способа задания положения тела в пространстве: векторный (с помощью **радиус-вектора**) и координатный. **Радиус-вектор**  $\vec{r}$ , проводится из начала координат (от тела отсчета) к данной точке траектории (рис. 1.2). Проекции радиус-вектора на соответствующие координатные оси – это есть координаты  $(x, y, z)$  тела.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|, \quad (1.1)$$

где вектора  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – это единичные вектора – орты.

**Перемещение**  $\vec{S}$ , – вектор, соединяющий начальное и конечное положение тела (точки 1 и 2 на рис. 1.2). Модуль вектора перемещения равен кратчайшему расстоянию между начальным и конечным положением тела. Вектор перемещения можно выразить следующим образом:

$$\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}_0. \quad (1.2)$$

**Путь**  $l$  – длина пройденного телом участка траектории. Если тело движется по прямолинейной траектории в одном направлении, то модуль вектора перемещения равен пройденному пути ( $l = |\vec{S}|$ ). При движении тела по криволинейной траектории пройденный телом путь больше модуля перемещения ( $l > |\vec{S}|$ ).

**Скорость** тела – величина, характеризующая быстроту изменения положения тела в пространстве. В физике вводят среднюю, мгновенную и среднюю путевую скорости. **Средняя скорость**  $\langle \vec{v} \rangle$  равна отношению вектора перемещения ко времени, за которое перемещение было совершено и сонаправлена с вектором перемещения. Под **мгновенной скоростью**  $v$  понимают скорость тела в данный момент времени в данной точке траектории. Мгновенная скорость равна первой производной от радиус-вектора  $\vec{r}$  (или перемещения  $\vec{S}$ ) по времени  $t$ .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{r}'(t) = \vec{S}'(t) \quad (1.3)$$

Вектор  $v$  в каждой точке траектории направлен по касательной к ней (рис. 1.3, *a*)

**Средняя путевая скорость**  $v_{cp}$  – скалярная физическая величина, равная отношению пути, пройденного телом за время  $t$ , к этому времени  $t$

$$v_{cp} = \frac{l}{t} \quad (1.4)$$

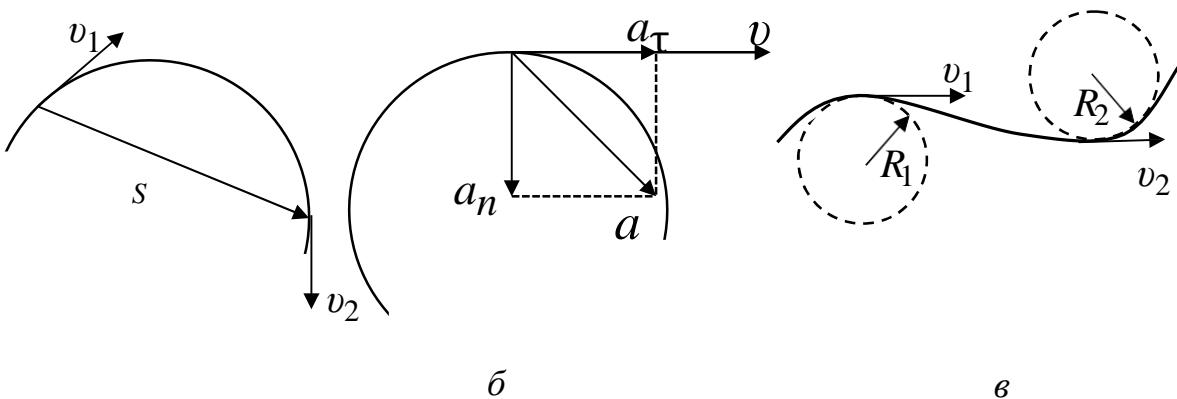


Рис. 1.3

### 1.1.3. Мгновенное ускорение м.т. Касательное и нормальное ускорения м. т.

Быстрооту изменения скорости оценивают, вводя понятие **мгновенного ускорения**  $a$  – ускорения в данной точке траектории, равного первой производной от скорости  $v$  по времени  $t$  или второй производной от радиус-вектора  $r$  (или перемещения  $\vec{S}$ ) по времени  $t$  [1]

$$\dot{a} = \frac{d\dot{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2} = \ddot{r}(t) = \ddot{S}(t). \quad (1.5)$$

В самом общем случае скорость тела может изменяться как по величине, так и по направлению. Поэтому вектор ускорения  $a$  имеет две составляющих: тангенциальное  $\dot{a}_t$  и нормальное  $\dot{a}_n$  ускорения. Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости тела по модулю и направлено по касательной к данной точке траектории (в случае ускоренного движения  $\dot{a}_t$  сонаправлен с вектором мгновенной скорости  $v$ , а в случае замедленного

движения – они противоположны). Нормальное ускорение  $\dot{a}_n$  характеризует быстроту изменения скорости по направлению и направлено перпендикулярно  $\dot{a}_\tau$  к центру кривизны траектории (рис. 1.3, б).

$$a_\tau = \frac{d\dot{v}}{dt}, \quad a_n = \frac{\dot{v}^2}{R}, \quad (1.6)$$

$$\therefore \quad \therefore \quad \therefore \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (1.7)$$

где  $\dot{v}$  – численное значение скорости;  $R$  – **радиус кривизны траектории** в данной ее точке, он равен радиусу окружности  $R$ , вписанной в малый участок траектории вблизи этой точки (рис. 1.3, в) [1].

Приведем вывод формул (1.6) для ускорений  $\dot{a}_\tau$  и  $\dot{a}_n$ . Для этого возьмем на траектории две близко расположенные точки 1 и 2, разделенные интервалом времени  $\Delta t$  (рис. 1.4, а), перенесем параллельно самому себе вектор  $\dot{v}_2$  и отложим на нем отрезок, равный по модулю вектору  $v_1$  (рис. 1.4, б, точка 3).

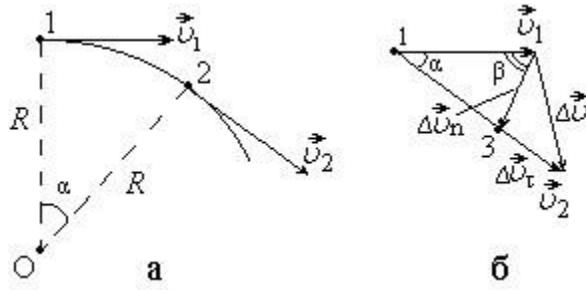


Рис. 1.4

Тогда вектор  $\Delta v = v_2 - v_1$  можно представить в виде суммы двух векторов  $\Delta v = \Delta v_\tau + \Delta v_n$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$  углы  $\alpha$  и  $\beta$  стремятся соответственно к  $0^\circ$  и  $90^\circ$ , поэтому вектор  $d\dot{v}_\tau$  будет направлен по касательной к траектории и будет характеризовать изменение числового значения скорости, а вектор  $d\dot{v}_n$  будет перпендикулярен  $\dot{v}_1$ . Следовательно,

$$\therefore \quad \therefore \quad \therefore \quad a = \frac{d\dot{v}}{dt} = \frac{d\dot{v}_\tau}{dt} + \frac{d\dot{v}_n}{dt} = \dot{a}_\tau + \dot{a}_n;$$

$$\therefore \quad \therefore \quad \therefore \quad \dot{a}_\tau = \frac{d\dot{v}_\tau}{dt}, \quad \dot{a}_n = \frac{d\dot{v}_n}{dt}. \quad (1.8)$$

Длина дуги и расстояние по прямой между точками 1 и 2 при малых  $\Delta t \rightarrow dt$  будут равны  $dl_{1,2} = dS_{1,2} = vdt$ . Из подобия треугольников  $1O2$  и  $1v_13$  следует

$$\frac{dv_n}{v} = \frac{vdt}{R}, \quad a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v^2}{R},$$

что и было записано в формуле (1.6) [1].

#### 1.1.4. Схема решения основной задачи кинематики. Формулы для радиус-вектора $r$ и вектора скорости $v$

Основной задачей кинематики является определение состояния м.т. (ее радиус-вектора  $r$  и скорости  $v$ ) в произвольный момент времени  $t$ . Для этого необходимо задать, во-первых, начальные условия – радиус-вектор  $\dot{r}_0$  и скорость  $\dot{v}_0$  в начальный момент времени  $t = t_0$  и, во-вторых, зависимость ускорения  $a$  от времени  $t$ . Тогда, используя понятие интеграла, для радиус-вектора  $r$  и вектора скорости  $v$  можно записать следующие выражения[1]:

$$d\dot{v} = a dt, \quad \int_{\dot{v}_0}^{\dot{v}} d\dot{v} = \int_{t_0}^t a dt; \quad \dot{v} = \dot{v}_0 + \int_{t_0}^t a dt, \quad (1.9)$$

$$dr = v dt, \quad \int_{r_0}^r d\dot{r} = \int_{t_0}^t \dot{v} dt; \\ r = r_0 + \int_{t_0}^t v dt = r_0 + \int_{t_0}^t \dot{v}_0 + \int_{t_0}^t a dt dt \quad (1.10a)$$

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1.10b)$$

Полученное выше для радиус-вектора  $r$  уравнение (1.10, а) эквивалентно трем скалярным уравнениям:  $(x = x(t), y = y(t), z = z(t))$ . Эти уравнения представляют собой проекции радиус-вектора  $r$  на координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (1.10, б), их называют **кинематическими уравнениями движения материальной точки**.

В наиболее общем случае задаются зависимости от времени проекций полного ускорения на оси  $Ox$ ,  $Oy$   $Oz$ , это может привести к сложной

зависимости координат  $(x, y, z)$  материальной точки от времени и к сложной траектории движения м.т. в пространстве.

Если какая-либо координата (например,  $y$ ) остается при движении м.т. постоянной, то движение м.т. будет плоским, т.е. будет происходить в плоскости, перпендикулярной к оси  $y$  (см. рис. 1.5). При двух постоянных координатах (например,  $z = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ) движение м.т. будет происходить по прямой линии – либо вдоль оси  $Ox$ , либо вдоль прямых, параллельных ей.

Проанализируем некоторые частные случаи движений м.т.

**1. Равнопеременное движение** – это движение, при котором ускорение тела является постоянным и по модулю и по направлению ( $a = \text{const}$ ). Если  $t_0 = 0$ , то из (1.9) и (1.10) получим:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{at}, \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}. \quad (1.11)$$

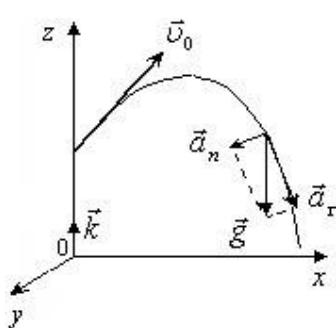


Рис. 1.5.

Например, формула (1.11) может быть применена при описании движения тела под действием силы тяжести (рис. 1.5.). При этом полное ускорение  $a$  можно представить в следующем виде:  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{g} = -g\vec{k}$ . Такое движение будет плоским – м.т. будет двигаться, в плоскости  $zOx$ , перпендикулярной к оси  $Oy$ , по параболической траектории (рис. 1.5, а). Вектор полного ускорения будет оставаться постоянным и по модулю и по направлению, а его составляющие  $a_\tau, a_n$  будут изменяться. Например, в верхней точке траектории  $a = a_n, a_\tau = 0$ .

Кинематические уравнения движения материальной точки будут выглядеть так:

$$x = x_0 + v_x t, z = z_0 + v_{oz} t - gt^2 / 2, y = 0.$$

**2. Равнопеременное прямолинейное движение** ( $a_n = 0, a = a_\tau = \text{const}$ ) будет наблюдаться в тех случаях, когда вектора ускорения  $a$  и начальной скорости  $v_0$  будут либо параллельны друг к другу, либо направлены в

противоположные стороны, либо вектор  $\dot{v}_0$  будет равен нулю:  $v_0 = 0$ . В этих случаях проекция уравнений (1.11) на ось Ох, направленную вдоль линии движения тела, приводит к следующим выражениям [1]:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \quad x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad z = y = 0 \quad (1.12)$$

Как показано в [1], для пути  $l$  и модуля скорости в случаях равноускоренного (знак «+») и равнозамедленного (знак «-») прямолинейных движений можно получить

$$l = |S_X| = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 + v}{2} t = \frac{|v^2 - v_0^2|}{2a}, \quad v = v_0 \pm at. \quad (1.13)$$

## 1.2. Динамика движения м.т.

Рассматривая задачи кинематики о механическом движении, мы сталкиваемся с ускорением тела. Причиной появления ускорения является механическое взаимодействие данного тела с другими телами. В разделе механики «Динамика» изучаются вопросы, связанные с механическим взаимодействием тел между собой.

### 1.2.1. Сила, инертность тела, масса тела

**Сила**  $\vec{F}$  – векторная физическая величина, характеризующая механическое взаимодействие данного тела с другим телом (телами), приводящее к их деформации или к возникновению ускорения [1].

Как показывает опыт, все тела обладают **инертностью**, т.е. изменяют свою скорость при взаимодействии с другими телами не мгновенно, а постепенно. Количественной характеристикой инертности тела является его **масса**  $m$ . *Масса определяется как мера инертности тела при его прямолинейном движении* [1].

В качестве примера рассмотрим столкновение двух тел, массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущимися со скоростью  $\dot{v}_1$  и  $\dot{v}_2$  ( $v_2 > v_1$ ) по гладкой горизонтальной поверхности (отсутствуют силы трения) навстречу друг другу. Пусть в результате столкновения они останавливаются (рис. 1.6). Из такого

столкновения следует, что первое тело является более инертным, чем второе тело, т.е. первое тело обладает большей массой ( $m_1 > m_2$ ). Действительно, за время взаимодействия первое тело изменяет свою скорость на меньшую величину ( $|v'_1| = 0 - v_1 \ll |v'_2| \neq v_2$ ), чем второе тело [1].



Рис. 1.6

### 1.2.2. Законы Ньютона

В основе классической механики лежат три закона Ньютона, которые являются обобщением опытных фактов.

Согласно **первому закону Ньютона** *тело покоятся или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано.*

Первый закон Ньютона выполняется не во всех системах отсчета (С.О.). Например, если выбрать С.О., связанную с поездом, движущимся равномерно и прямолинейно, то шарик, лежащий на гладком горизонтальном столе в купе вагона, будет покойться, т.к. действующие на него силы тяжести и нормальной реакции опоры компенсируют друг друга. Однако, если поезд будет двигаться с ускорением, то без видимых причин шарик начнет двигаться относительно поезда, т.е. приобретет ускорение. Поэтому среди всех С.О. выделяют **инерциальные системы отсчета (ИСО)** как С.О., в которых выполняется *первый закон Ньютона и соответственно второй и третий законы Ньютона* [1].

Наиболее близкой к ИСО можно считать систему отсчета, связанную с Солнцем. Для многих физических явлений системы отсчета, связанные с Землей, а также движущиеся относительно Земли равномерно и прямолинейно также можно считать инерциальными.

Ньютона для формулировки второго закона ввел понятие **импульса**  $p$  тела как векторную физическую величину, равную произведению массы тела на его скорость

$$p = m \dot{v}. \quad (1.14)$$

Согласно второму закону Ньютона первая производная от импульса  $p$  тела по времени  $t$  равна векторной сумме сил, действующих на тело,

$$\frac{d\dot{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N F_i. \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) является наиболее обобщенной формулировкой второго закона Ньютона, позволяющей рассматривать движение тел с переменной во времени массой.

Если масса тела не зависит от времени, то формулу (1.15) можно записать через ускорение тела

$$ma = \sum_{i=1}^N \dot{F}_i, \quad (1.16)$$

и сформулировать **второй закон Ньютона** следующим образом: *произведение массы тела на его ускорение равно векторной сумме сил, действующих на тело* [1].

Согласно третьему закону Ньютона силы, действующие между двумя телами, равны по модулю и противоположны по направлению

$$\dot{F}_1 = -\dot{F}_2. \quad (1.17)$$

На рис. 1.7, б, в, г приведены примеры сил, входящих в третий закон Ньютона (рис. 1.7, а). Эти силы приложены к разным телам, они одинаковой природы, это силы действия и противодействия [1], они одновременно возникают и исчезают.

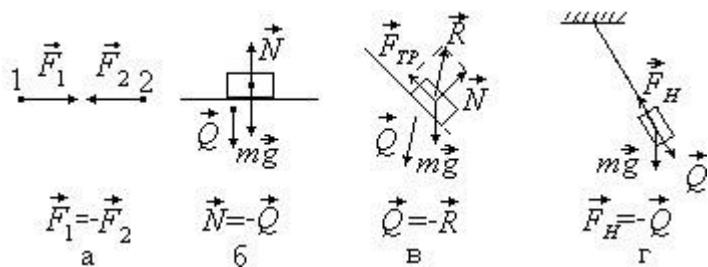


Рис. 1.7

Буквой  $R$  обозначена сила общей реакции опоры ( $R = N + F_H$ ), которая и связана с весом тела  $Q$  третьим законом Ньютона ( $R = -Q$ ) [1].

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 1**

1. Тело движется прямолинейно, причем скорость зависит от времени по закону:  $V = 3t^2 - 10t + 2$ . Определите значение ускорения тела в момент времени 5 с.

- 1)  $20 \text{ м/с}^2$       2)  $5 \text{ м/с}^2$       3)  $15 \text{ м/с}^2$       4)  $10 \text{ м/с}^2$

2. Тело брошено под углом к горизонту. Как направлена скорость тела в верхней точке траектории?

- 1) вертикально вверх;  
2) вертикально вниз;  
3) горизонтально вдоль оси ОХ;  
4) горизонтально против оси ОХ

3. Для какого вида движения тангенциальное ускорение  $a_\tau = \text{const}$ , а нормальное ускорение  $a_n = 0$ ?

- 1) равномерного прямолинейного;  
2) равномерного движения по окружности;  
3) равнопеременного прямолинейного;  
4) равнопеременного криволинейного.

4. Тело покоятся на наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ . Используя второй закон Ньютона, получите выражение для максимального коэффициента трения покоя, при котором тело может начать скользить по наклонной плоскости.

- 1)  $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ ;      2)  $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ ;  
 3)  $\mu < \operatorname{tg}\alpha$       4)  $\mu = \operatorname{ctg}\alpha$ .

5. При движении тел всегда совпадают по направлению два вектора

- 1)  $\vec{F}, \dot{\vec{a}}$ ;      2)  $\vec{F}, \vec{V}$ ;  
 3)  $\vec{F}, \dot{\vec{s}}$ ;      4)  $\vec{a}, \vec{s}$ .

## ЛЕКЦИЯ 2

### 1.2.3. Закон сохранения импульса

Докажем закон сохранения импульса. Для этого рассмотрим систему, состоящую из  $N$  тел (на рис. 1.8 для простоты приведена система из трех тел – м.т.). На каждое тело системы действуют внешние силы  $\vec{F}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) со стороны не входящих в эту систему тел (м.т.) и внутренние силы  $\vec{f}_{ik}$  ( $i, k = 1, \dots, N$ ) со стороны других тел системы. Внутренние силы системы связаны между собой третьим законом Ньютона [1]

$$\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}. \quad (1.18)$$

Для каждого тела, входящего в систему, применим второй закон Ньютона в импульсной форме (1.15) и затем сложим эти уравнения:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_i = \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_{0i}, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{0i} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_{ik} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{0i}.$$

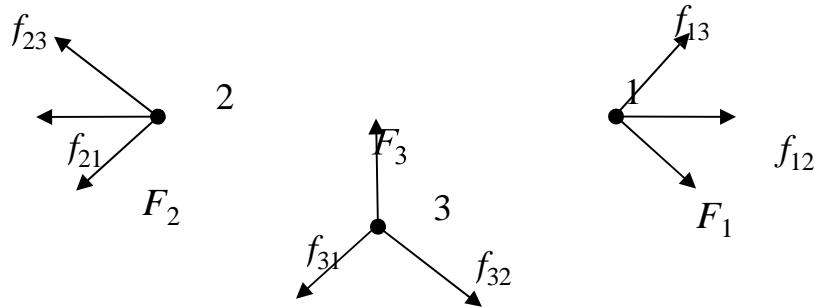


Рис. 1.8

Поскольку внутренние силы, действующие между телами системы, компенсируют друг друга (согласно формуле (1.18)), то

$$d \cdot \overset{N}{\underset{i=1}{\sum}} F_i = 0.$$

$$\frac{d}{dt} p_C = \sum_{i=1}^N F_i, \quad (1.19)$$

где введен импульс  $p_C$  системы как векторная сумма импульсов тел системы

$$p_C = p_1 + p_2 + \dots + p_N. \quad (1.20)$$

Итак, согласно (1.19) векторная сумма импульсов тел системы (импульс системы) изменяется только за счет действия внешних сил.

**В замкнутой системе**, т.е. системе тел, на которую не действуют внешние силы ( $F_i = 0$ ), выполняется **закон сохранения импульса**, согласно которому *импульс  $p_C$  замкнутой системы остается постоянным*

$$p_1 + p_2 + \dots + p_N = \text{const}, \quad p_C = \text{const}. \quad (1.21)$$

Также закон сохранения импульса можно применять в ряде случаев и для незамкнутых систем (системы тел, на которые действуют внешние силы). Перечислим их.

**1. Внешние силы компенсируют друг друга.** Такую систему, например, составляют рассмотренные в п.1.2.1 два тела, движущиеся по гладкой ( $\vec{F}_{\text{тр}} = 0$ ) горизонтальной поверхности навстречу друг другу (рис. 1.6). В этом случае внешние силы – силы тяжести  $m_1g$ ,  $m_2g$ , нормальной реакции опоры  $N_1, N_2$

компенсируют друг друга ( $\sum_{i=1}^N F_i = 0$ ) и поэтому, согласно (1.19) импульс системы этих тел не изменяется:  $p_C = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$ .

**2. Внешние силы не компенсируют друг друга, но их проекция на какую-либо ось остается равной нулю.** В этом случае вектор импульса системы тел изменяется, но его проекция на эту ось сохраняется. Для иллюстрации данного случая рассмотрим систему, состоящую из двух тел, одно из которых движется по гладкой поверхности со скоростью  $v_1$ , а другое падает вертикально вниз со скоростью  $v_2$  и испытывает абсолютно неупругое столкновение с первым телом. В результате соударения тела движутся вместе, со скоростью  $u$  (рис. 1.9).

Сумма внешних сил до удара ( $m_2 \dot{g} + N_1 + m_1 \dot{g} = m_2 \dot{g}$ ), во время удара и после удара ( $N + (m_1 + m_2)g = 0$ ) изменяется, но их проекция на ось Ох остается все время равной нулю и поэтому  $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u$  [1].

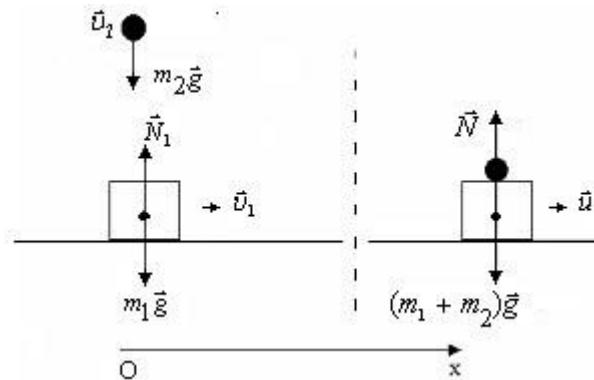


Рис. 1.9

**3. Внешние силы значительно меньше по модулю внутренних сил, действующих между телами в системе ( $F_i \ll f_{ik}$ ).** Это наблюдается при сильных кратковременных взаимодействиях: удар, выстрел, разрыв снаряда и т. д. В этих случаях изменение импульса каждого тела системы, в основном, определяется внутренними силами системы [1]

$$dp_i = (\sum_{ksi} f_{ik} + F_i) dt = \sum_{ksi} f_{ik} dt. \quad (1.22)$$

Поэтому с учетом формул (1.18) и (1.20) суммарный импульс такой системы остается постоянным.

### 1.3. Механическая энергия и работа

Количественной мерой изменения механической энергии тела является **работа** сил, действующих на него.

#### 1.3.1. Работа и мощность силы

Элементарной работой  $dA$ , совершающей силой  $\vec{F}$  на элементарном перемещении  $d\vec{S}$ , называются величину, равная скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F |\vec{dS}| \cos \alpha = F_S dl, \quad \alpha = \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle, \quad (1.23)$$

где  $F_S$  – проекция вектора силы на направление элементарного перемещения (рис. 1.10, а);  $dl = |\vec{dS}|$  – элементарный путь, пройденный точкой приложения силы.

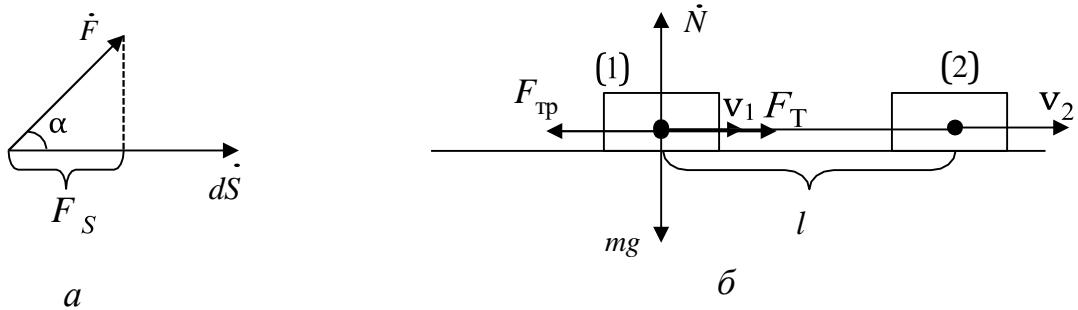


Рис. 1.10

Работа, совершаемая силой  $\vec{F}$  на конечном перемещении, вычисляется как сумма элементарных работ и может быть записана через интеграл

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 F \|\vec{dS}\| \cos \alpha. \quad (1.24)$$

Выражению (1.24) можно придать наглядный геометрический смысл. В соответствии с этим равенством значение работы равно площади под графиком зависимости проекции силы на вектор перемещения от пройденного пути

(рис. 1.11). Пусть этот график имеет вид, показанный на рис. 1.11. Из этого рисунка видно, что работа на пути от точки 1 до точки 2 равна площади под соответствующей кривой. При этом площадь над осью  $s$  берется со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью  $s$  – со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).

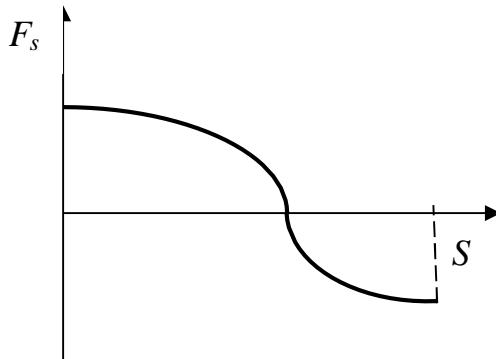


Рис. 1.11

Из формулы (1.24) следует, что работа постоянной ( $F = \text{const}$ ) силы, на прямолинейном участке длины  $l$  запишется следующим образом:

$$A_{12} = F l \cos\alpha. \quad (1.25)$$

Так например, работы постоянных сил, приложенных к телу (рис. 1.10, б) на горизонтальном участке пути  $l$ , равны [1]:

$$A_N = A_{mg} = 0, \quad A_{mp} = -F_{mp} l, \quad A_F = F l.$$

Для описания быстроты совершения механической работы вводят скалярную физическую величину – **мощность силы**, которая численно равна работе, совершающей силой в единицу времени. Если за промежуток времени  $dt$  сила  $F$  совершила работу  $dA$ , то мощность, развивающаяся этой силой в данный момент времени, равна

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{Fd l}{dt} = Fv = F v \cos\alpha \quad (1.26)$$

Зная мощность силы, можно найти и работу, которую совершает эта сила за время  $t$ . Действительно,  $dA = Pdt$  и, следовательно,

$$A = \int_0^t P dt. \quad (1.27)$$

Напомним размерности работы и мощности в системе СИ:  $[A] = \text{Дж}$ ,  $[P] = \text{Дж/с} = \text{Вт}$ .

### 1.3.2. Кинетическая энергия тела. Теорема о кинетической энергии

Чтобы ввести понятие о кинетической энергии  $W_k$  тела, запишем элементарную работу  $dA$  силы  $\vec{F}$  в другом виде (см. п.1.2.2):

$$dA = \vec{F}dS = m \frac{d\vec{v}}{dt} dS = mv dv = mv dv. \quad (1.28)$$

Тогда для работы силы  $\vec{F}$ , переводящей тело из состояния 1 (скорость тела  $\vec{v}_1$ ) в состояние 2 (скорость тела  $\vec{v}_2$ ), можно записать:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}dS = \int_1^2 mv dv = \frac{mv^2}{2} \Big|_1^2 = W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k. \quad (1.29)$$

Из полученной формулы следует, что работа силы равна разности двух величин, определяющих начальное (скорость  $v_1$ ) и конечное (скорость  $v_2$ ) состояния тела. При этом условия перехода из состояния 1 в состояние 2 не оказывают влияние на записанное выражение (1.29). Поэтому можно ввести функцию состояния тела, его **кинетическую энергию  $W_k$  как скалярную физическую величину, характеризующую способность тела совершать работу за счет изменения скорости его движения и равную** [1]

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.30)$$

Как следует из (1.30), кинетическая энергия тела зависит от выбора системы отсчета и всегда положительна.

Опираясь на выражение (1.29) сформулируем **теорему о кинетической энергии**: изменение кинетической энергии тела равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на тело

$$\Delta W_k = A_1 + A_2 + \dots + A_N, \quad dW_k = \sum_i dA_i. \quad (1.31)$$

## **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 2**

Тело начинает двигаться под действием силы, равной  $F = 2\text{Н}$ . Чему равен импульс тела в конце третьей секунды после начала движения?

- 1) 8 кг м/с      2) 6 кг м/с      3) 4 кг м/с      4) 1,5 кг/(м с).

Как двигалось тело постоянной массы, если его импульс не изменялся ни по модулю, ни по направлению?

- 1) Равноускоренно и прямолинейно.
- 2) Равнозамедленно и прямолинейно.
- 3) Равномерно и прямолинейно.
- 4) Равномерно и криволинейно.

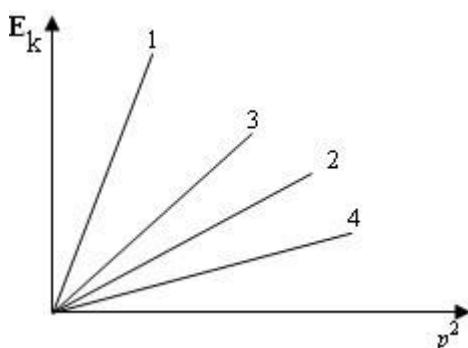
Тело массы  $m = 2$  кг, движется прямолинейно под действием силы 6Н. Чему равна мгновенная мощность силы к концу 4 с движения?

- 1) 48 Вт      2) 72 Вт      3) 12 Вт      4) 24 Вт

На частицу действует сила  $F = 2i + 3j, \text{Н}$ . Работа, совершенная этой силой, при перемещении частицы из начала координат в точку с координатами (5; 2), равна ... Дж.

- 1) 15      2) 16      3) 19      4) 20

На рисунке приведен график зависимости кинетической энергии  $E_k$  от квадрата импульса  $p^2$  тела. Какой график кинетической энергии соответствует телу большей массы?



- 1) 1      2) 2      3) 3      4) 4

## ЛЕКЦИЯ 3

### 1.3.3. Потенциальная энергия взаимодействующих тел. Теорема о потенциальной энергии

**Потенциальная энергия**  $W_p$  – это энергия взаимодействия тел или частей тела между собой. Потенциальная энергия  $W_p$  характеризует способность совершать работу за счет изменения взаимного расположения тел или частей одного тела. При этом между ними действуют **консервативные силы**, работа которых не зависит от формы траектории движения тел, но определяется их начальными и конечными положениями.[1]

Для системы, состоящей из  $N$  взаимодействующих тел, потенциальная энергия равна сумме потенциальных энергий парного их взаимодействия друг с другом и с внешними телами (номера внешних тел изменяются от  $(N+1)$  до  $(N+L)$ ):

$$W_{PC} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1(k \neq i)}^N W_{pi k} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=N+1}^{N+L} W_{pi k}, \quad (1.32)$$

где  $W_{pi k}$  – потенциальная энергия взаимодействия тел с номерами  $i$  и  $k$ . Первое слагаемое в (1.32) описывает взаимодействие тел системы между собой, а второе – с внешними телами. Коэффициент  $(1/2)$  в первом слагаемом учитывает то, что потенциальная энергия взаимодействия тел  $i$  и  $k$  встречается два раза, причем  $W_{pi k} = W_{pk i}$ . Если система тел замкнута, то в выражении (1.32) останется только первое слагаемое, т.к. тела системы взаимодействуют только между собой, но не взаимодействуют с телами не входящими в систему.

Потенциальные взаимодействия принято описывать введением силового поля, при этом, считается, что одно тело взаимодействует с силовым полем, созданным другими телами. Такой подход удобно использовать в том случае, когда движение одного тела (например, первого) слабо влияет на движение другого тела (второго). Тогда можно считать, что первое тело находится в потенциальном поле, созданном вторым телом, и потенциальную энергию их взаимодействия приписать первому телу. Так, например, говорят о

потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли, о потенциальной энергии заряда в электрическом поле и т.д. При этом движение тела слабо влияет на силовое поле, в котором оно движется. Вспомним, что обычно говорят: тело падает на Землю, а не Земля падает на тело. Этим самым отмечают тот факт, что движение тела практически не изменяет положение Земли [1].

Примерами консервативных сил являются силы тяготения (сила тяжести), упругости, сила Архимеда.

**Неконсервативные силы** – силы, работа которых зависит от формы траектории по которой движется тело. В частности, неконсервативными являются силы сопротивления среды, трения, тяги и др.

Название «консервативные» силы связано с тем, что полная механическая энергия  $W_M$  системы тел, взаимодействующих между собой посредством только консервативных сил, сохраняется [1].

Выведем некоторые формулы для потенциальных энергий взаимодействия тел.

### 1. Потенциальная энергия тела, находящегося в поле земного тяготения.

Между телом и Землей действует гравитационная сила:

$$F_T = G \frac{mM_3}{r^2}, \quad r \gg R_3,$$

где  $G$  – гравитационная постоянная;  $r$  – расстояние от центра Земли до тела;  $R_3$  и  $M_3$  – радиус и масса Земли, соответственно;  $m$  – масса тела (рис. 1.12, а).

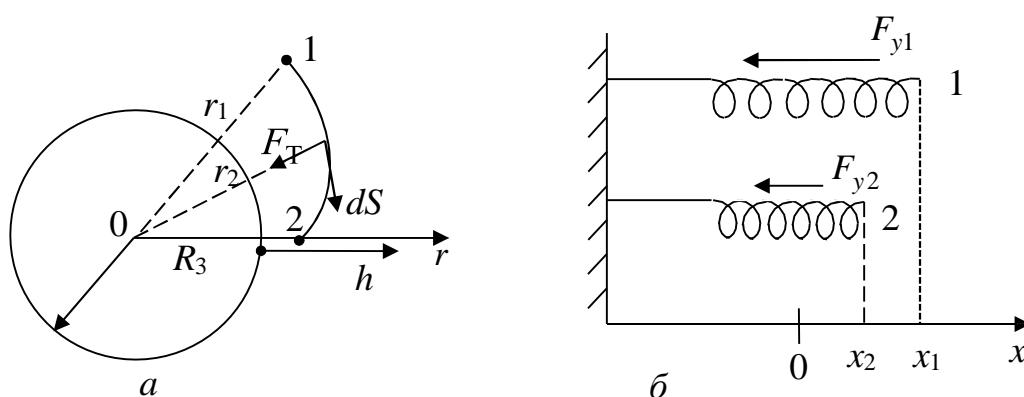


Рис. 1.12

Пусть тело переходит из точки 1 в точку 2, которые находятся на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра Земли (рис. 1.12, а). С учетом формулы (1.29) работа  $A_{12}$  силы тяготения при данном переходе может быть выражена

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 \dot{F} d\dot{s} = \int_1^2 F_T |\dot{r}| \cos \alpha = - \int_1^2 F_T dr = -GmM_3 \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \left[ -\frac{GmM_3}{r} \right]_1^2 \\ &= \left[ -\frac{GmM_3}{r} \right]_1^2 = \left[ -\frac{GmM_3}{r} \right]_2^1 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Из формулы (1.33) следует, что работа силы тяготения определяется убылью величин, зависящих только от начального и конечного положения тела и Земли. Значит, силы тяготения являются консервативными силами, а сами эти величины представляют собой потенциальные энергии гравитационного взаимодействия тела и Земли [1]:

$$W_p = -G \frac{mM_3}{r} + \text{const.} \quad (1.34)$$

Потенциальная энергия  $W_p$  определяется с точностью до некоторой константы. Нулевой уровень отсчета  $W_p$  выбирается произвольно, исходя из удобства решения конкретных задач. Например, можно считать, что при  $r \rightarrow \infty$   $W_p \rightarrow 0$  (если тело находится бесконечно далеко от Земли, то они не взаимодействуют) и тогда, выражение (1.34) перепишется в виде

$$W_p = -G \frac{mM_3}{r}, \quad r \gg R_3.$$

Как уже отмечалось выше, формулу (1.34) можно так же рассматривать как потенциальную энергию тела в гравитационном поле, созданном Землей. В этом случае нулевой уровень отсчета  $W_p$  удобно выбирать на поверхности Земли ( $h = 0$ ,  $W_p = 0$ )

$$W_p = G \frac{mM_3}{R_3 r} (r - R_3) = mg_0 h \frac{R_3}{R_3 + h}.$$

В случае если  $h \ll R_3$ , получим

$$W_p = mg_0 h$$

где  $g_0 = GM_3/R_3^2 = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения на уровне океана ( $h = 0, r = R_3$ );  $h$  – высота тела над поверхностью Земли [1].

## 2. Потенциальная энергия упругодеформированного тела

Рассчитаем работу, совершающую силой упругости при сжатии пружины из состояния 1 до состояния 2 (рис. 1.12, б)

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_y |ds| \cos\alpha = - \int_{x_1}^{x_2} F_y dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \quad (1.35)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – величины начальной и конечной деформации пружины, соответственно.

Как следует из (1.35), сила упругости также как и гравитационная сила, является консервативной, а величина  $W_p = \frac{kx^2}{2}$  является потенциальной энергией взаимодействия всех частей упругодеформированного тела.

Обобщая формулы (1.33) и (1.35), можно сформулировать **теорему о потенциальной энергии**: работа консервативных сил, действующих между телами или частями одного тела, равна убыли их взаимной потенциальной энергии [1].

Для тела, находящегося в силовом поле консервативных сил, **теорему о потенциальной энергии** можно сформулировать так: *работа консервативных сил, действующих на тело, равна убыли потенциальной энергии тела в поле этих сил* [1]:

$$\sum_i dA_{КОНС} = - W_p, \quad dA_{КОНС} = - dW_p. \quad (1.36)$$

### 1.3.4. Формула связи потенциальной энергии $W_p$ и консервативной силы $F_K$

Между консервативной силой  $F_K$ , действующей между телами, и потенциальной энергией их взаимодействия  $W_p$  существуют определенные формулы взаимосвязи, установим их. Для этого распишем выражение для элементарной работы консервативной силы вдоль произвольного направления

$r$  ( $|ds| = |d\vec{r}| = dr > 0$ ) и подставим его в теорему [1] о потенциальной энергии (1.36). Тогда

$$dA_{KONC} = F_{kr}dr = -dW_p, \quad F_{Kr} = -\frac{dW_p}{dr}.$$

Выбирая направление  $r$ , совпадающим с направлениями координатных осей, можно оценить проекции силы  $F_k$  на эти оси и тем самым записать формулу взаимосвязи вектора силы  $\vec{F}_k$  и потенциальной энергии  $W$  [1]:

$$F_x = -\frac{6W_p}{6x}, \quad F_y = -\frac{6W_p}{6y}, \quad F_z = -\frac{6W_p}{6z},$$

где  $\frac{6W_p}{6x}$ ,  $\frac{6W_p}{6y}$ ,  $\frac{6W_p}{6z}$  – частные производные от потенциальной энергии по соответствующим координатам.

$$\vec{F}_k = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left[ \frac{6W_p}{6x} \vec{i} + \frac{6W_p}{6y} \vec{j} + \frac{6W_p}{6z} \vec{k} \right].$$

Вспомним некоторые математические термины. Пусть  $\phi$  – скалярная функция координат  $x, y, z$ . Вектор с компонентами  $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$  называется *градиентом* функции  $\phi$  и обозначается символом  $\text{grad}\phi$ :

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}.$$

Вектор  $\text{grad}\phi$  направлен в сторону возрастания величины  $\phi$ , а по модулю равен приращению этой величины на единичном расстоянии.

С учетом вышесказанного консервативную силу можно представить в виде

$$F_k = -\text{grad}W, \quad |\text{grad}W| = \frac{dW}{dl} \quad (1.37)$$

и, следовательно, консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии частицы, взятому с обратным знаком, т.е. консервативная сила

направлена в сторону убыли потенциальной энергии (противоположно вектору  $\text{grad}W_p$ ).

### 1.3.5. Механическая энергия системы тел. Закон сохранения и изменения механической энергии

**Полной механической энергией**  $W_M$  системы тел называют сумму кинетической энергии тел и потенциальной энергии их взаимодействия [1]:

$$W_M = W_k + W_p. \quad (1.38)$$

В замкнутой системе механическая энергия может изменяться за счет работы неконсервативных сил: они переводят ее в другие виды энергии (механическая энергия уменьшается, происходит ее диссипация, рассеяние), и, наоборот, другие виды энергии переходят в механическую энергию (она возрастает) [1].

Покажем это, используя теоремы о кинетической энергии (1.31) и потенциальной энергии (1.35) [1],

$$\begin{aligned} \mathbb{D}W_M &= \mathbb{D}(W_k + W_p) = \mathbb{D}W_k + \mathbb{D}W_p = (A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}}) + (-A_{\text{конс}}) = A_{\text{неконс}}, \\ \mathbb{D}W_M &= A_{\text{неконс}}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Одним из видов неконсервативных сил являются **диссипативные силы** – силы, в результате действия которых полная механическая энергия системы уменьшается. Диссипативными являются, например, силы трения и сопротивления. Изменение полной механической энергии под действием этих сил отрицательно:

$$\mathbb{D}W_M = \mathbb{D}W_k + \mathbb{D}W_p = \mathbb{D}W_k = A_{mp} = -F_{mp}l < 0.$$

Из формулы (1.39) следует, что в **замкнутой консервативной системе** (действуют только консервативные силы) выполняется **закон сохранения механической энергии**: механическая энергия замкнутой консервативной системы остается постоянной

$$W_M = \text{const} \quad (1.40)$$

Если такая система, между телами которой действуют только консервативные силы, находится во внешнем поле консервативных сил (открытая консервативная система – о.к.с.), то и для нее выполняется закон сохранения механической энергии *о.к.с.* [1]:

$$W_{M(OKC)} = \text{const} \quad (1.41)$$

Так, например, падение тела из состояния покоя в поле тяготения Земли в отсутствие сил сопротивления воздуха можно рассматривать в двух системах. Одна из них является открытой консервативной системой, включающей в себя только падающее тело (тогда падение тела происходит во внешнем силовом поле, созданном Землей, и тело обладает потенциальной энергией в этом поле) [1]. Вторая система является замкнутой консервативной системой, она включает в себя тело и Землю.

### **1.3.6. Применение законов сохранения импульса и механической энергии к анализу абсолютно упругого и неупругого столкновений**

Законы сохранения позволяют получить информацию о взаимодействии тел без рассмотрения законов Ньютона. Рассмотрим два примера, являющиеся предельными случаями взаимодействия тел.

**1. Абсолютно неупругий удар** – это удар, в результате которого тела после соударения движутся вместе как единое целое. Пусть движущееся со скоростью  $\vec{v}_1$  тело массой  $m_1$  сталкивается с движущимся со скоростью  $\vec{v}_2$  телом массой  $m_2$ , в результате чего их скорость оказывается равной  $\vec{u}$  (рис. 1.13).

Если эти тела образуют замкнутую систему, то для нее можно записать закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

из которого следует, что скорость  $\vec{u}$  тел после удара будет равна [1]

$$\vec{u} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad u = \sqrt{\frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2}}. \quad (1.42)$$

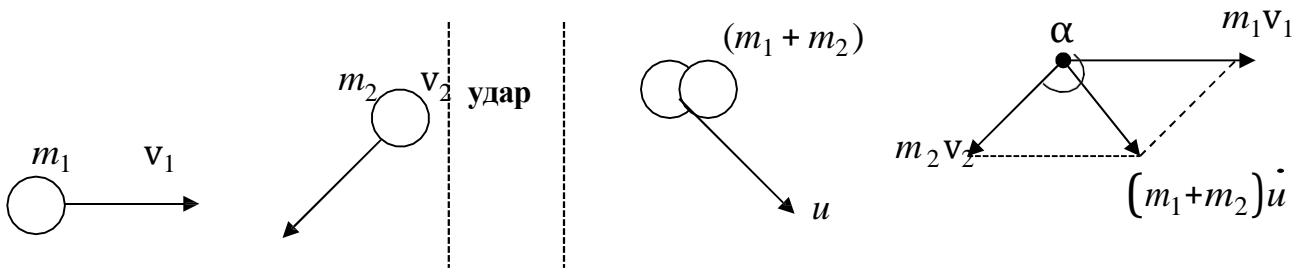


Рис. 1.13

При абсолютно неупругом ударе возникают неконсервативные силы (силы сопротивления), которые переводят часть механической энергии соударящихся тел в тепловую энергию. Причем работа сил сопротивления равна изменению полной механической (кинетической, в данном случае) энергии соударящихся тел:

$$A_{\text{сопр}} = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{m_2v_2^2}{2} = -\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2)\cos\alpha, \quad (1.43)$$

где угол  $\alpha$  в выражениях (1.42) и (1.43) – угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ .

**2. Абсолютно упругий центральный удар** – это удар, при котором, деформации тел, возникающие в момент соударения, после столкновения полностью исчезают. При центральном ударе тела до и после соударения движутся по прямой, соединяющей центры тел. В случае абсолютно упругого удара выполняется не только закон сохранения импульса, но и закон сохранения полной механической энергии.

Рассмотрим тело массой  $m_1$  движущееся вдоль оси Ох со скоростью  $\vec{v}_1$ , сталкивающееся с движущимся вдоль (или против) оси Ох телом массой  $m_2$  со скоростью  $\vec{v}_2$  ( $v_1 > v_2$ ). После соударения скорости тел равны  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ ,

соответственно (рис.1.14).

Запишем для данной системы законы сохранения импульса и механической энергии:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

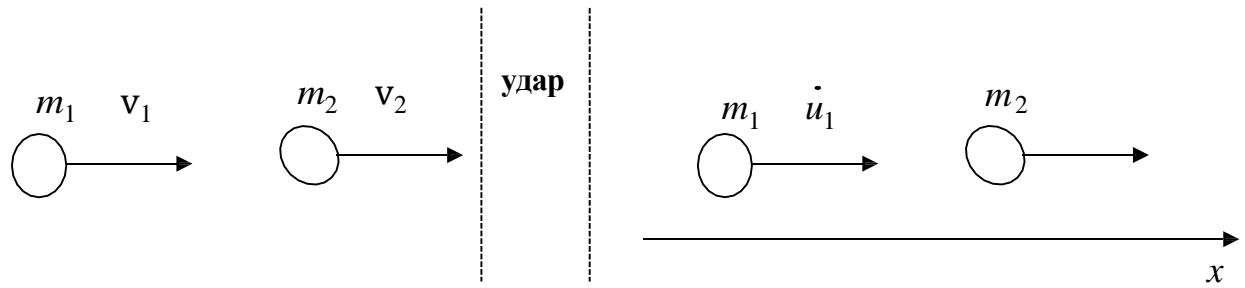


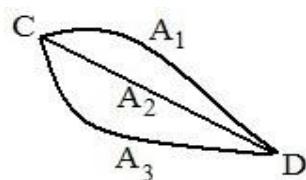
Рис. 1.14

Решая систему данных уравнений можно получить выражение для проекции скоростей  $\dot{u}_1$  и  $\dot{u}_2$  тел на ось Ох после их соударения

$$u_{1X} = \frac{2m_2 v_{2X} + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad u_{2X} = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_{2X}}{m_1 + m_2}. \quad (1.45)$$

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 3**

1. Тело скатывается из точки С в точку D по трем различным траекториям. При этом сила тяжести совершает работу  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ . Какое из приведенных ниже соотношений справедливо?



- 1)  $A_1 > A_2 < A_3$ ;      2)  $A_1 < A_2 < A_3$ ;  
 3)  $A_1 = A_2 = A_3$ ;      4)  $A_1 > A_2 > A_3$ .
2. Тело бросают вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью  $v = 4$  м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. На какой высоте от поверхности Земли кинетическая энергия тела равна потенциальной?
- 1) 0,8 м;      2) 0,4 м;      3) 0,2 м;      4) 0,1 м.

3. Резиновый невесомый шнур при подвешивании груза массы  $m = 1,0$  кг удлинился на  $\Delta l = 1,2$  м. Чему равна потенциальная энергия  $W_p$  шнура в конечном состоянии? ( $g = 10 \text{ м/с}^2$ ).
- 1) 1 Дж;      2) 2 Дж;      3) 4 Дж;      4) 6 Дж.
4. За счет работы каких сил изменяется полная механическая энергия замкнутой системы?
- 1) консервативных;    2) любых;  
 3) неконсервативных; 4) любых, кроме сил трения.
5. Происходит абсолютно неупругое центральное столкновение движущегося шара с неподвижным. Массы шаров одинаковы. Кинетическая энергия второго шара будет составлять после удара ... часть от первоначальной кинетической энергии первого шара.
- 1) 1;      2) 1/2;      3) 1/4;      4) 1/8.

## ЛЕКЦИЯ 4

### **1.4. Кинематика вращательного движения материальной точки и абсолютно твердого тела**

Как уже упоминалось выше, основной задачей кинематики является определение состояния **материальной точки (м.т.)** или **абсолютно твердого тела (а.т.т.)** в любой момент времени  $t$ .

Введем новые понятия и определения, которые значительно упрощают и облегчают описание **вращательного движения материальной точки и абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси**.

#### **1.4.1. Кинематические характеристики вращательного движения материальной точки и абсолютно твердого тела**

Рассмотрим материальную точку, которая движется по окружности радиуса  $r$  вокруг неподвижной оси вращения (рис. 1.15, а) со скоростью  $v$ .

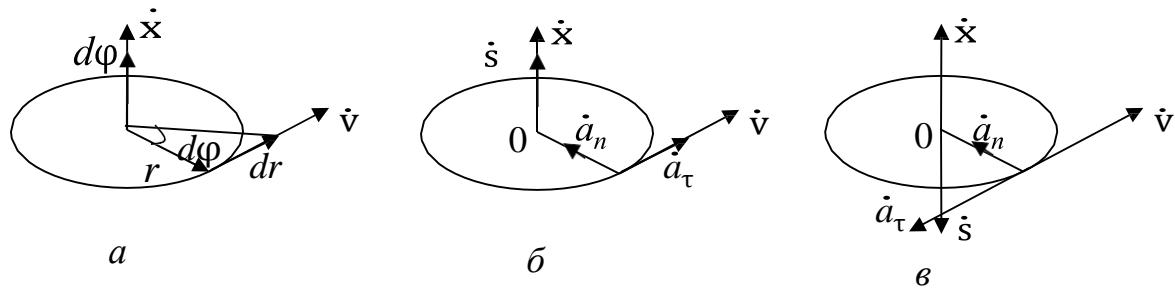


Рис. 1.15

**Вектор элементарного углового перемещения**  $\vec{d\phi}$  – это вектор, модуль которого равен углу элементарного поворота  $d\phi$ . Направлен вектор  $\vec{d\phi}$  по оси вращения и связан с направлением вращения правилом правого буравчика (правого винта), а именно, направление вращения буравчика должно совпадать с направлением вращения м.т., тогда поступательное движение буравчика определяет направление вектора  $\vec{d\phi}$  (рис. 1.15, а) [1].

**Угловая скорость**  $\dot{x}$  – это векторная физическая величина, характеризующая быстроту вращения м.т. и равная угловому перемещению м.т. за единицу времени

$$\dot{x} = \frac{d\dot{\phi}}{dt}. \quad (1.46)$$

Вектор угловой скорости  $\dot{x}$  совпадает по направлению с вектором  $\vec{d\phi}$  элементарного углового перемещения  $d\phi$ .

**Угловое ускорение**  $\ddot{s}$  – это векторная физическая величина, которая характеризует быстроту изменения угловой скорости *равная приращению угловой скорости за единицу времени*

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2\dot{\phi}}{dt^2}. \quad (1.47)$$

На рис. 1.15, б показано, вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости при ускоренном вращении, а при замедленном вращении эти вектора противоположны (рис. 1.15, в).

**Частота обращения**  $n$  – это величина равная числу оборотов, совершаемых телом за единицу времени.

**Период обращения**  $T$  – время одного полного оборота.

Величина угловой скорости связана с периодом и частотой следующим выражением:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi/T.$$

При описании движения абсолютно твердого тела характеристики, описанные выше для вращательного движения м.т. также применимы, поскольку абсолютно твердое тело можно представить в виде совокупности м.т., разбив его на бесконечно малые объемы.

Если задать начальные условия ( $t = t_0$ :  $\varphi = \dot{\varphi}_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ ) и зависимость углового ускорения  $s$  от времени  $t$ , то тогда для векторов углового перемещения  $\varphi$  и угловой скорости  $x$  можно записать [1]

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \dot{x} dt, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 + \int_{t_0}^t s(t) dt. \quad (1.48)$$

При равнопеременном вращении и  $t_0 = 0$  для выражения (1.48) имеем

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + s \cdot t, \quad \varphi = \varphi_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} s t^2. \quad (1.49)$$

Зависимость углового пути  $\varphi$  и модуля угловой скорости  $\omega$  от времени при этом движении при  $\varphi_0 = 0$  описываются выражением

$$\varphi = \dot{x}_0 t + \frac{s t^2}{2} = \frac{\dot{x}_0 + x}{2} t = \frac{|x^2 - x_0^2|}{2s}, \quad x = \dot{x}_0 t + s t. \quad (1.50)$$

Знак «+» в этой формуле ставится для равноускоренного вращения, а для равнозамедленного – знак «-».

#### 1.4.2. Формулы, выражающие связь между линейными и угловыми характеристиками при вращательном движении

Воспользуемся определением векторного произведения двух векторов и рис 1.15, запишем формулу, связывающую вектора  $dr$  и  $d\varphi$

$$dr = [d\dot{\varphi} \cdot r] \quad (1.51)$$

Это выражение позволяет связать линейные и угловые характеристики:

1) запишем выражение, связывающее вектора линейной и угловой скорости  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{r}}{dt} = \frac{[\dot{d\phi}]_r}{L dt} = \frac{d\phi}{L} \frac{[\dot{r}]}{dt} = [\dot{x}_r],$$

$$\dot{\mathbf{v}} = [\dot{x} \ \dot{r}], \quad \mathbf{v} = \mathbf{x}r. \quad (1.52)$$

2) для ускорений  $a_\tau, a_n$  и

$$a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{[\dot{x}_r]}{L dt} = \frac{[\dot{x}]_r}{L} + \frac{[\dot{r}]}{L} \frac{[\dot{x}]}{dt} = [s_r] + [x_r] = a_\tau + a_n,$$

$$\dot{a}_\tau = [s_r \dot{r}], \quad a_\tau = sr, \quad (1.53)$$

$$\dot{a}_n = [x_r v], \quad a_n = x v = \frac{v^2}{R} = x^2 R. \quad (1.54)$$

Рис. 1.15, б иллюстрирует случай ускоренного вращения материальной точки ( $\dot{a}_\tau \parallel v, \dot{s} \parallel \dot{x}$ ), а рис. 1.15, в – ее замедленного движения по окружности ( $a_\tau \parallel v, s \parallel x$ ).

## 1.5. Динамика вращательного движения

### 1.5.1. Момент инерции м.т. и а.т.т. относительно оси вращения.

#### *Теорема Штейнера*

**Моментом инерции  $I$  материальной точки и абсолютно твердого тела относительно оси вращения называют скалярную физическую величину, являющуюся мерой инертности м.т. и а.т.т. при их вращательном движении.** Момент инерции это величина, зависящая от массы  $m$  тела, а также от того, как распределена масса тела относительно оси вращения.

**Момент инерции материальной точки** массой  $m$ , вращающейся по окружности радиуса  $r$  (рис. 1.16, а) равен

$$I = mr^2 \quad (1.55)$$

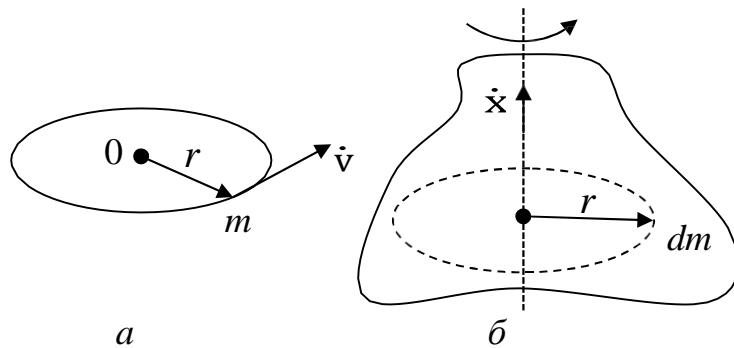


Рис. 1.16

Абсолютно твердое тело объема  $V$ , можно представить как совокупность материальных точек (бесконечно малых элементов) массы  $dm$  (рис. 1.16, б) и определить его **момент инерции  $I$  относительно оси вращения** как сумму моментов инерции каждой материальной точки (каждого бесконечно малого элемента) относительно данной оси вращения или по - другому равен

$$I = \iint_V r^2 dm \quad (1.56)$$

Приведем моменты инерции  $I$  некоторых тел правильной геометрической формы относительно оси вращения  $O_1O_1$ , проходящей через их центр тяжести так, как показано на рис. 1.17 [1].

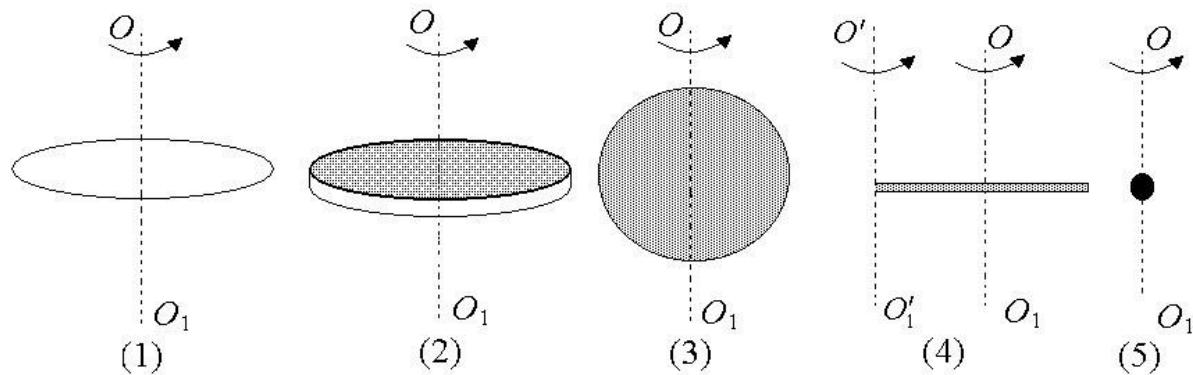


Рис. 1.17

**1. Момент инерции обруча (или тонкостенного цилиндра) массой  $m$  и радиусом  $r$  (рис. 1.17, случай 1)**

$$I = \int_V r^2 dm = r^2 \int_V dm = mr^2. \quad (1.57)$$

## 2. Момент инерции сплошного однородного диска (или цилиндра)

массой  $m$ , радиусом  $R$  и имеющего высоту  $h$ , а также – плотность материала диска (рис. 1.17, случай 2).

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 p dV = \int_V r^2 p \pi r h dr = \pi p \frac{R^4}{2} - \frac{\pi p \frac{m}{V} R^4}{2} = \frac{1}{4} \frac{m}{\pi R^2 h} = \frac{1}{2} mr^2, \quad (1.58)$$

где элементарный объем тела, который равен  $dV=2\pi rhdr$ , выбираем в виде кольцевого слоя радиусом  $r$ , толщиной  $dr$  и высотой  $h$ .

## 3. Момент инерции однородного шара массой $m$ и радиусом $r$ (рис. 1.17, случай 3)

$$I = \frac{2}{5} mr^2. \quad (1.59)$$

## 4. Момент инерции тонкого однородного стержня массой $m$ и длиной $l$ относительно оси вращения ОО<sub>1</sub>, проходящей через его центр тяжести (рис. 1.17, случай 4)

$$I = \frac{1}{12} ml^2. \quad (1.60)$$

## 5. Момент инерции материальной точки массой $m$ относительно оси вращения, проходящей через данную точку равен нулю, так как $r = 0$ (рис. 1.17, случай 5).

Для расчета момента инерции тела относительно произвольной оси вращения можно воспользоваться **теоремой Штейнера**: момент инерции тела  $I'$  относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции  $I$  относительно параллельной ей оси, проходящей через его центр тяжести, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями [1].

$$I' = I + ma^2, \quad (1.61)$$

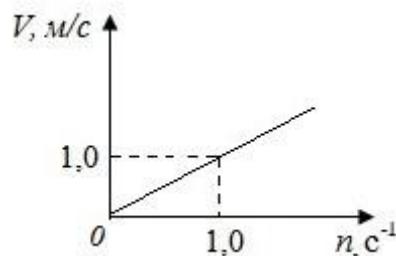
где  $I$ ,  $I'$  – моменты инерции тела массой  $m$  относительно двух осей – оси, проходящий через центр масс тела ( $I$ ) и параллельной ей оси ( $I'$ ), отстоящей от нее на расстоянии  $a$  [1].

С помощью теоремы Штейнера вычислим момент инерции  $I'$  тонкого стержня относительно оси  $O'O_1$ , проходящей через один из его концов (рис. 1.17, случай 4)

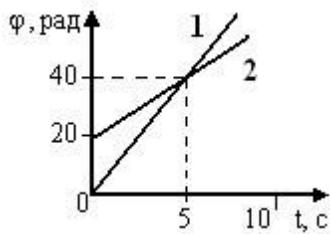
$$I' = I + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) ml^2 = \frac{1}{3} ml^2. \quad (1.62)$$

#### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 4**

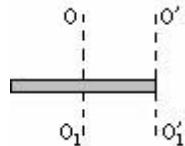
- Материальная точка равномерно движется по окружности. За время  $t = 10\text{c}$  вектор ее линейной скорости повернулся на угол  $\alpha = 450^\circ$ . Чему равна угловая скорость этой материальной точки?
  - $0,125\pi \text{ рад/с}$
  - $0,25 \text{ рад/с}$
  - $0,5\pi \text{ рад/с}$
  - $0,25\pi \text{ рад/с}$
- М.т. движется по окружности постоянного радиуса. Линейная скорость  $V$  этой точки зависит от частоты  $n$  обращения так, как показано на рисунке. Чему равно центростремительное ускорение  $a_{ц}$  точки, соответствующее частоте  $n_1 = 2,0 \text{ c}^{-1}$ ?



- На графике представлены зависимости от времени  $t$  угла  $\phi$  поворота для двух вращающихся тел. Сравнивая величины угловых скоростей, можно утверждать, что величина угловой скорости



- 1) обоих тел одинакова.  
 2) первого тела в два раза больше, чем у второго.  
 3) второго тела в два раза больше, чем у первого.  
 4) данных тел могут соотноситься любым образом.
4. Момент инерции тонкого обруча массой  $m$ , радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через центр обруча перпендикулярно плоскости, в которой лежит обруч, равен  $I = mR^2$ . Как изменится момент инерции обруча, если ось вращения перенести параллельно в точку на обруче.
- 1) увеличится в 2      2) увеличится в 4  
 3) уменьшится в 2      4) уменьшится в 4
5. Если ось вращения однородного стержня перенести из центра масс на один из его концов, то во сколько раз возрастет момент инерции относительно новой оси.



- 1) 1,5      2) 2      3) 3      4) 4

## ЛЕКЦИЯ 5

### 1.5.2. Момент силы относительно оси вращения. Основной закон динамики вращательного движения

Рассмотрим материальную точку массы  $m$ , к которой приложена вызывающая вращение данной точки сила  $\vec{F}$ . **Моментом силы**  $\vec{M}$  **относительно оси вращения называют вектор**  $M$ , **равный векторному произведению** вектора  $r$ , **соединяющего м.т. с осью вращения и перпендикулярного к этой оси, и вектора силы**  $\vec{F}$  (рис. 1.18)

$$M = [r \cdot F], M = rF_{\parallel} \sin \alpha = F_{\parallel} d, \alpha = (\vec{r}, \vec{F}_{\parallel}), \quad (1.63)$$

На рис. 1.18 видно, что ось вращения проходит через точку  $O$  перпендикулярно к вектору  $r$ .

В формуле (1.63) введены **плечо силы  $d$**  – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы и равное  $d = r \sin \alpha$  и  $F_{\parallel}$  - составляющая силы  $\vec{F}$ , перпендикулярная оси вращения.

*Направление вектора момента силы  $M$  определяется по правилу буравчика:* вращательное движение буравчика должно совпадать с направлением кратчайшего поворота от  $r$  к  $F$ , тогда его поступательное движение дает направление  $M$ . Таким образом, находим, что вектор  $M$  направлен вдоль оси вращения [1].

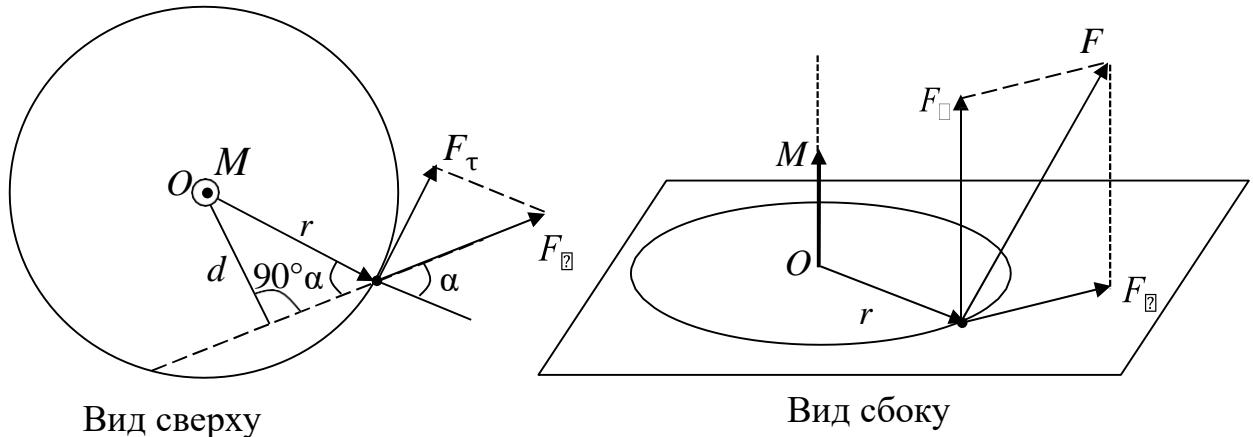


Рис. 1.18

Запишем другое выражение для модуля вектора  $M$ , используя проекцию  $F_{\tau}$  силы  $F_{\parallel}$  на направление касательной к окружности ( $F_{\tau} = F_{\parallel} \sin \alpha$ , см. рис. 1.18); именно сила  $F_{\tau}$  и вызывает вращательное движение м.т. [1]

$$M = rF_{\parallel} \sin \alpha = rF_{\tau} = rm a_{\tau} = rm s \omega \quad r = m \cdot r^2 s = I \cdot \dot{\theta} \quad (1.64)$$

Абсолютно твердое тело можно представить как собой совокупность материальных точек массы  $dm$ . На это тело помимо внешних сил, действующих на него, действуют внутренние силы между материальными точками этого тела.

Согласно третьему закону Ньютона векторная сумма моментов  $\dot{M}_{ik}$  внутренних сил относительно оси вращения равна нулю.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k(s)}^N M_{ik} = 0,$$

Следовательно

$$M = \int_V dM = \int_V dm r \cdot s = I \cdot s.$$

Сформулируем **основной закон динамики вращательного движения для абсолютно твердого тела:**

*Векторная сумма моментов действующих на тело внешних сил относительно этой оси вращения равна произведению момента инерции тела относительно оси вращения на вектор углового ускорения*

$$I \ddot{s} = \dot{M}. \quad (1.65)$$

### 1.5.3. Момент импульса м.т. и а.м.т. относительно оси вращения

**Моментом импульса м.т.** массы  $m$ , движущейся со скоростью  $v$  относительно оси вращения, называют вектор  $L$ , определяемый векторным произведением вектора  $r$ , соединяющего м.т. с осью вращения и перпендикулярного к этой оси, и вектора импульса тела  $p$  (рис. 1.19, а).

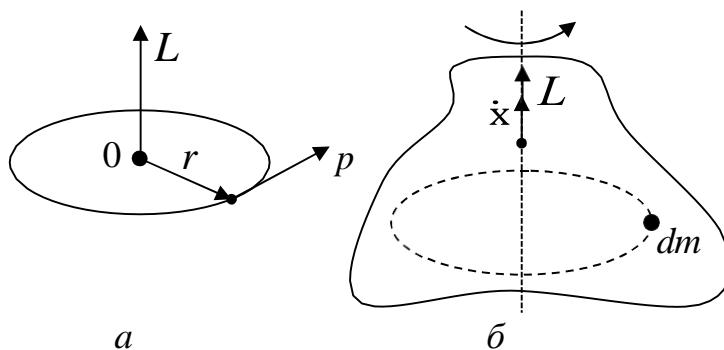


Рис. 1.19

$$L = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, L = r p \sin \alpha = rp, \quad (1.66)$$

Вектор  $L$  направлен по оси вращения, согласно правилу буравчика (вращательное движение буравчика должно совпадать с направлением

кратчайшего поворота от  $F_0$  к  $p$ , тогда его поступательное движение определит направление  $\vec{L}$ ).

Раскрывая векторное произведение в (1.66), получим выражение для модуля момента импульса  $\vec{L}$ :

$$L = rp = rmv = rmxr = (mr^2)\omega x = Ix, \quad (1.67)$$

Абсолютно твердое тело объема  $V$  представляет собой совокупность м.т. массы  $dm$ , то его модуль момента импульса относительно оси вращения равен сумме моментов импульсов всех материальных точек, из которых оно состоит, поэтому

$$L = \int_V dL = \int_V dm r^2 \omega = \omega \int_V dm r^2 = I\omega,$$

Для однородного симметричного относительно оси вращения тела (под таким телом подразумевается тело, при любом повороте вокруг оси вращения которого, совмещается само с собой) направления векторов  $L$  и  $x$  совпадают (рис. 1.19, б) и, следовательно

$$\vec{L} = I\vec{x}. \quad (1.68)$$

В случае произвольного а.т.т. вектора  $L$  и  $x$  не параллельны и поэтому вектор  $L$  не будет направлен вдоль оси вращения. Момент импульса  $L$  а.т.т. имеет вид

$$L = \int_V dL = \int_V dm [r \times v], \quad (1.69)$$

#### **1.5.4. Взаимосвязь между скоростью изменения момента импульса и моментом силы**

Формулу (1.65), которая представляет собой основной закон динамики вращательного движения можно записать

$$I\varepsilon = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = \frac{dL}{dt},$$

$$\frac{dL}{dt} = \dot{M}. \quad (1.70)$$

*Векторная сумма моментов, действующих на а.т.м. внешних сил относительно этой оси вращения равна согласно (1.70) производной по времени от вектора момента импульса тела относительно оси вращения.*

### 1.5.5. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему, которая состоит из  $N$  взаимодействующих между собой материальных точек, вращающихся вокруг произвольной оси. Для каждой материальной точки можно записать выражение (1.70), которое представляет собой основное уравнение динамики вращательного движения.

$$\frac{dL_i}{dt} = \sum_{k(s)} \dot{M}_{ik} + \dot{M}_i, \quad (1.71)$$

где  $i$  – номер м.т. ( $i = 1, \dots, N$ ),  $\dot{M}_i$  и  $\dot{M}_{ik}$  – моменты внешних и внутренних сил, соответственно.

Далее выражение (1.71) просуммируем по всем материальным точкам системы и получим

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=0}^N \dot{M}_i. \quad (1.72)$$

где  $L = \sum_{i=1}^N L_i$  – момент импульса  $L$  системы, учтено, что  $\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{dE_i}{dt}$ , а также по третьему закону Ньютона векторная сумма моментов внутренних сил, действующих на м.т. относительно оси вращения, равна нулю  $\sum_{i=1}^N \sum_{i(s)k} \dot{M}_{ik} = 0$ .

Из (1.72) можно сформулировать **закон сохранения момента импульса:**

Момент импульса замкнутой системы остается постоянным относительно любой оси вращения

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad \dot{L} = \text{const}, \quad (1.73)$$

т.к. для замкнутой системы сумма моментов внешних сил равна нулю.

Выражение (1.73) можно переписать в другом виде, используя формулу (1.68),

$$\sum_i I_i \dot{x}_i = \text{const}, \quad (1.74)$$

где  $I_i, \omega_i$  – момент инерции и угловая скорость вращения  $i$  – й м.т. системы.

При вращательном движении внутренние силы могут изменить распределение массы относительно оси вращения, т.е. моменты инерции тел системы. При неизменном momente импульса замкнутой системы такое перераспределение массы системы относительно оси вращения приводит к изменению угловой скорости входящих в нее тел [1].

Рассмотрим подтверждающий это явление пример.

Человек (его момент импульса равен  $\vec{L}_1$ ) стоит на краю вращающейся с угловой частотой  $x_1$  платформы (момент импульса которой равен  $\vec{L}_2$ ) (рис. 1.18, а, б). При переходе человека (м.т.) массой  $m_1$  в центр платформы массой  $m_2$  (однородный диск радиусом  $R$ ) его момент импульса становится равным нулю ( $\vec{L}'_1 = 0$ ) и поэтому по закону сохранения момента импульса возрастет угловая скорость вращения платформы.

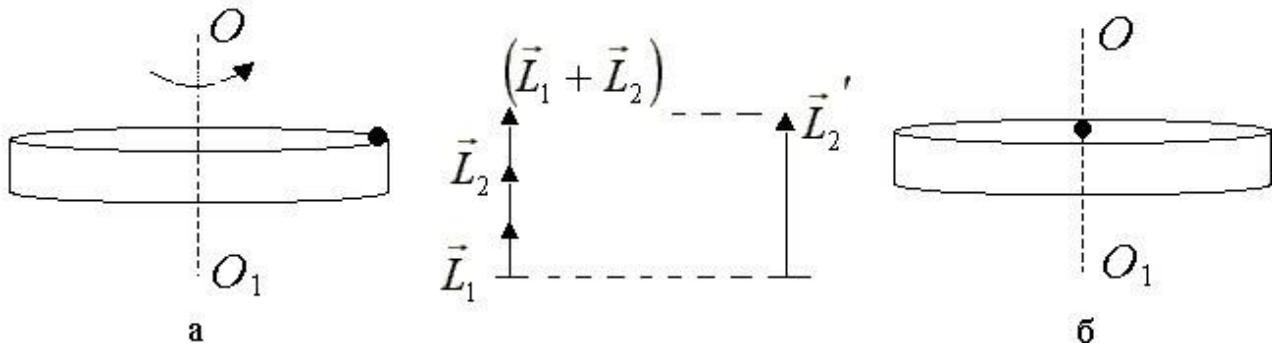


Рис. 1.20

$$L_1 + L_2 = L'_1 : \left( m_1 R^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \right) x_1 = \frac{1}{2} m_2 R^2 x_2, x_2 = x_1 (m_1 + 2m_2) / m_1, x_2 > x_1$$

## 1.6. Работа и энергия при вращательном движении

### 1.6.1 Кинетическая энергия вращающегося а.т.м.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, которое вращающейся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 1.16, б). Это тело можно представить тело как совокупность материальных точек массы  $dm$ . Запишем выражение для кинетической энергии этого тела

$$W_k = \int dW_K = \int \frac{dmv^2}{2} = \int \frac{dm\omega^2r^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \int dm r^2 = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Таким образом, полученное выражение является кинетической энергией а.т.т., которое вращается относительно неподвижной оси

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2} \quad (1.75)$$

Рассмотрим движение цилиндра без скольжения по плоскости, рис. 1.21,. Это тело участвует одновременно в двух видах движения: поступательном (плоском) и вращательном движениях. Тогда выражение для кинетической энергии этого тела можно записать в виде суммы кинетической энергии этих видов движения: поступательного движения тела со скоростью  $v$  вместе с осью вращения, которая проходит через его центр масс (точка  $O$ ), и вращательного – относительно этой оси с угловой скоростью  $\omega$

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1.76)$$

Для сплошного ( $I_1 = 1/2mR^2$ ) и тонкостенного ( $I_2 = mR^2$ ) цилиндров одинаковой массы  $m$  и радиуса  $R$  кинетические энергии запишутся таким образом [1]:

$$W_{k1} = \frac{3mv^2}{4}, \quad W_{k2} = mv^2.$$

Полученные формулы для кинетической энергии цилиндров позволяют объяснить опыт по различию времени их скатывания с наклонной плоскости высотой  $h$  и длиной  $l$  (рис. 1.21, б). Так, согласно закону сохранения энергии (силой трения при движении цилиндров практически можно пренебречь) получим

$$mgh = \frac{3mv_1^2}{4} = mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 < v_1,$$

где  $v_1, v_2$  – обозначают скорости сплошного и полого цилиндров у основания наклонной плоскости [1].

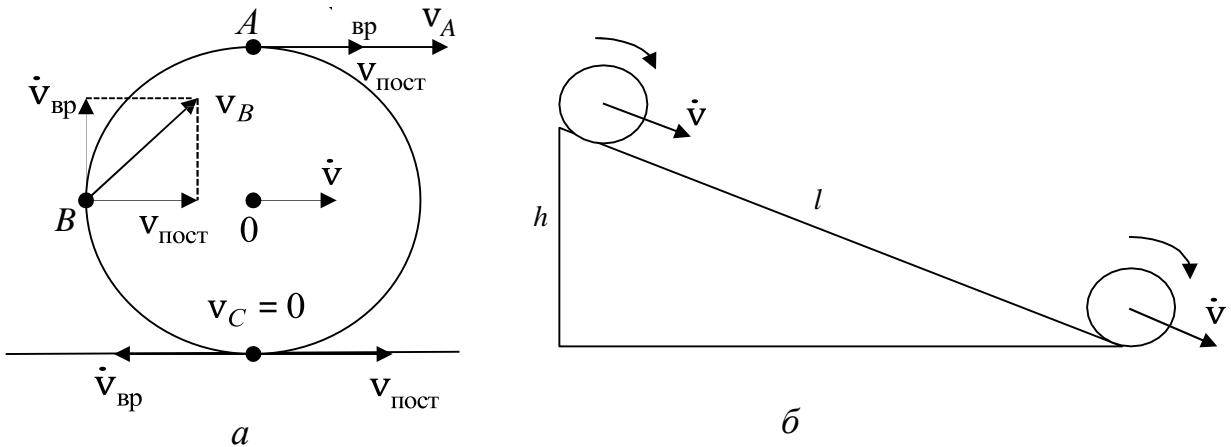


Рис. 1.21

При скатывании цилиндров центр их масс движется равноускоренно без начальной скорости и поэтому согласно формуле (1.13) можно записать:

$$l = \frac{v_1 t_1}{2} = \frac{v_2 t_2}{2} \quad \text{?} \quad t_2 > t_1,$$

т.е. на скатывание полого цилиндра требуется большее время, чем для сплошного цилиндра.

Качественно это можно объяснить тем, что полый цилиндр является более инертным, чем сплошной (для него момент инерции относительно оси вращения больше), и поэтому он медленнее изменяет свою скорость и поэтому тратит больше времени на скатывание с наклонной плоскости [1].

Как видно из рис. 1.21, а, модули скоростей точек на поверхности цилиндра будут разными ( $v_B = 0$ ,  $v_C = \sqrt{2} v$ ,  $v_A = 2v$ ) в связи с тем, что эти точки участвуют одновременно и в поступательном, и во вращательном движениях со скоростями  $\dot{v}_{\text{пост}}$  и  $\dot{v}_{\text{bp}}$ , причем  $\dot{v}_{\text{bp}}$  для каждой точки направлена по касательной к поверхности цилиндра и равна по модулю  $v$  ( $v_{\text{общ}} = v_{\text{пост}} + v_{\text{bp}} = v + v_{\text{bp}}$ ) [1].

### 1.6.2. Работа внешних сил по вращению абсолютно твердого тела

Элементарная работа силы  $F$  по вращению тела вокруг неподвижной оси вращения (см. рис. 1.15) определяется по формуле

$$dA = \dot{F} d\dot{S} = F |\dot{dr}| \cos\alpha = F_r r d\phi \cos\alpha = M d\phi \cos\alpha = I s d\phi = I \frac{dx}{dt} d\phi = I \frac{d\phi}{dt} x = I x dx,$$

где угол  $\alpha$  зависит от направления векторов момента  $\vec{M}$  силы и элементарного углового перемещения  $d\vec{\phi}$ . Для ускоренного вращения  $\alpha = 0$  так как  $\dot{M} \parallel d\vec{\phi}$ , а для замедленного вращения  $\alpha = 180^\circ$  так как  $\dot{M} \parallel d\vec{\phi}$ .

Таким образом записать выражение для элементарной работы внешних сил по вращению абсолютно твердого тела

$$dA = M d\dot{\phi} = I \dot{x} d\dot{x} = I x dx, \quad (1.77)$$

Запишем выражение для работы внешних сил при изменении угловой скорости от  $x_1$  до  $x_2$  на конечном угловом перемещении  $\Delta\phi = (\phi - \phi_0)$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{\phi_0}^{\phi} M d\dot{\phi} = \int_{x_1}^{x_2} I x dx = \frac{I x^2}{2} \Big|_1^2 - \frac{I x^2}{2} \Big|_2^1 = W_k - W_k = \Delta W_k \quad (1.78)$$

Это выражение является теоремой о кинетической энергии при вращательном движении тела.

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 5**

1. Модуль момента импульса вращающегося тела изменяется со временем по закону  $L = A + Bt^2$ , где  $A = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$ ,  $B = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-3}$ . Чему равна величина момента силы, действующей на тело в конце второй секунды от начала движения?

- 1) 16 Н·м      2) 4 Н·м      3) 2 Н·м      4) 8 Н·м

2. Два цилиндра с равными массами и высотами вращаются вокруг своих осей. Плотность материала первого цилиндра больше плотности второго,  $p_1 = 2p_2$ . Каково соотношение вращающих моментов, если угловые ускорения цилиндров одинаковые?

- 1)  $M_1 = 4M_2$       2)  $M_1 = \frac{1}{2}M_2$       3)  $M_1 = 2M_2$       4)  $M_1 = \frac{1}{4}M_2$

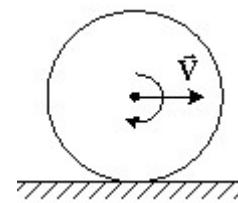
3. Какие характеристики вращательного движения не изменяются с течением времени при равноускоренном вращательном движении тела

- 1) момент импульса;
- 2) угловая скорость;
- 3) угловое ускорение;
- 4) момент сил, приложенных к телу.

4. Если момент инерции тела увеличить в два раза, а скорость его вращения уменьшить в 2 раза, то момент импульса тела

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) не изменится;        | 2) уменьшится в 4 раза; |
| 3) уменьшится в 2 раза; | 4) увеличится в 4 раза. |

5. Обруч массой  $m = 0,3$  кг и радиусом  $R = 0,5$  м привели во вращение, сообщив ему энергию вращательного движения 1200 Дж, и отпустили на пол так, что его ось вращения оказалась параллельной плоскости пола. Если сила трения совершила работу, равную 800 Дж, то обруч начал движение без проскальзывания, имея кинетическую энергию вращательного движения, равную ...



- |            |            |
|------------|------------|
| 1) 200 Дж  | 2) 1000 Дж |
| 3) 1400 Дж | 4) 600 Дж  |

## ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ

### ЛЕКЦИЯ 6

#### 2.1. Статистический и термодинамический методы описания свойств макроскопических систем

Для систем, состоящих из огромного числа частиц, находящихся в тепловом движении, наряду с механической формой движения материи

появляется новая **тепловая форма движения**. Это можно подтвердить следующими фактами:

- 1) у системы появляются новые свойства (макропараметры, такие как давление, температура, электрическое сопротивление и т.д.), которыми не обладают отдельные частицы;
- 2) система забывает свои предыдущие состояния. Например, какое-либо равновесное состояние газа можно получить различными способами, и по конечному состоянию газа нельзя определить, какой из них был реализован. Этим тепловая форма движения материи существенно отличается от механической формы движения (в механике конечное состояние тела однозначно связано с его начальным состоянием);
- 3) состояние отдельной частицы не оказывает влияния на макроскопическое состояние системы. Так, например, давление газа в равновесном состоянии остается постоянным, хотя скорость какой-либо частицы из-за теплового движения постоянно изменяется.

Все это свидетельствует о том, что в этом разделе необходимо использовать другие подходы (термодинамический и статистический подходы) к описанию свойств макросистемы.

Кратко изложим суть **статистического подхода**, схема реализации которого приведена на рис. 2.1.

Для системы, находящейся в равновесном состоянии, из-за хаотичности теплового движения имеется большой набор случайных значений скоростей и координат частиц. Оказывается, что на огромной совокупности случайных значений скоростей, координат, кинетических энергий, потенциальных энергий отдельных частиц (первый блок на рис. 2.1) появляются строгие статистические закономерности, которые выражаются функциями распределения частиц по модулю их скоростей  $f(v)$ , по координатам  $f(x, y, z)$ , кинетическим  $f(W_k)$ , потенциальным энергиям  $f(W_p)$  и т.д. (второй блок на рис. 2.1).

Знание этих функций распределения позволяет оценить средние свойства частиц, т.е. свойства, усредненные по всей совокупности частиц (третий блок на рис. 2.1). Средние свойства частиц характеризуют всю совокупность частиц в целом. Если, например, говорят, что скорость частиц с повышением температуры возрастает, то под этим подразумевают средние скорости частиц.



Рис. 2.1

Далее знание средних характеристик частиц позволяет получить макроскопические свойства системы (четвертый блок на рис. 2.1).

В термодинамическом подходе при описании свойств системы ее внутреннее строение не рассматривается, а используются величины, относящиеся к системе в целом – **термодинамические параметры состояния**. Связь между термодинамическими параметрами состояния устанавливается экспериментально. Все основные выводы о поведении систем делаются на основе трех начал (законов) термодинамики. Эти законы термодинамики являются постулатами (недоказуемыми утверждениями), они обобщают опытные данные. В связи с этим выводы термодинамики являются достоверными и не подвергаются сомнению.

Основными термодинамическими параметрами состояния в молекулярной физике являются давление, температура, плотность и концентрация.

**Давление**  $p$  – скалярная физическая величина, характеризующая распределение силы по поверхности на которую она действует и численно равная нормальной составляющей силы, действующей на единицу площади поверхности перпендикулярно этой поверхности ( $p = F_n/S$ , где  $F_n$  – нормальная составляющая силы, т.е. составляющая силы, перпендикулярная поверхности  $S$ , на которую сила действует).

**Температура**  $T$  – скалярная физическая величина, определяющая степень нагретости тела: чем более нагрето тело, тем выше будет его температура.

**Плотность**  $p$  – скалярная физическая величина, равная массе вещества в единице объема ( $p = m/V$ )

**Концентрация**  $n$  – скалярная физическая величина, равная числу молекул в единице объема ( $n = N/V$ )

В последующем изложении рассмотрим подробно отдельные этапы применения статистического подхода. Причем сначала будут рассматриваться системы классических частиц, т.е. частиц, для которых волновые свойства не сказываются на их движении.

## 2.2. Функция распределения Максвелла и ее применение

### 2.2.1. Понятие о функции распределения Максвелла (функции распределения молекул идеального газа по модулю скорости молекул)

Пусть идеальный газ (его молекулы на расстоянии не взаимодействуют, а при столкновениях ведут себя как упругие шары) находится в закрытом сосуде в равновесном состоянии при температуре  $T$ .

Для того чтобы ввести функцию распределения молекул по модулю скорости, возьмем произвольную молекулу идеального газа, и через равные промежутки времени будем измерять модуль ее скорости. Пусть из общего числа  $N$  опытов  $dN_v$  дает число опытов, в которых скорости молекул попадают в интервал скоростей  $(v, v+dv)$ . Тогда вероятность  $dP(v)$  попадания скорости молекулы в малый интервал скоростей будет равна

$$dP(v) = \frac{dN_v}{N}$$

при стремлении общего числа опытов к бесконечности ( $N \rightarrow \infty$ ). Это позволяет ввести функцию распределения молекул по модулю скорости

$$f(v) = \frac{dP(v)}{dv}. \quad (2.1)$$

Случайным в выражении (2.1) является номер выбираваемой молекулы, над которой проводятся опыты, а закономерным то, что вероятность  $dP(v)$  попадания значений скоростей молекулы в интервал скоростей  $(v, v+dv)$  остается все время постоянной величиной и не зависит от номера выбираваемой молекулы.

Итак, функция  $f(v)$  является плотностью вероятности и равна отношению вероятности  $dP(v)$  попадания модуля скорости молекулы в интервал скоростей  $(v, v+dv)$  к величине этого интервала  $dv$ . Можно предложить другой способ определения, другой физический смысл функции распределения  $f(v)$ . Для этого зафиксируем в какой-то момент времени скорости всех молекул и нанесем их на ось скоростей (рис. 2.2).

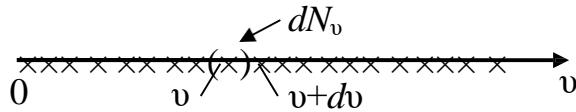


Рис. 2.2

Число молекул  $dN_v$ , попадающих в интервал скоростей  $(v, v+dv)$ , будет зависеть от общего числа молекул  $N$ , от величины интервала скоростей  $dv$  и от скорости  $v$ , вблизи которой берется этот интервал. Эту зависимость от скорости  $v$  можно описать с помощью функции  $f(v)$ . Тогда

$$dN_v = N \cdot f(v) dv \quad f(v) = \frac{dN_v}{Ndv}. \quad (2.2)$$

Итак, функция  $f(v)$  равна отношению относительного числа молекул ( $dN_v / N$ ), скорости которых попадают в бесконечно малый интервал скоростей  $(v, v+dv)$ , к величине этого интервала  $dv$ .

Входящая в формулы (2.1) и (2.1) функция  $f(v)$  получила название функции распределения молекул по модулю скорости или функции распределения Максвелла. Случайным в формуле (2.2) являются номера молекул, скорости которых попадают в заданный интервал скоростей, а закономерным то, что их число остается постоянным и не зависит от номеров

молекул. Формула для этой функции была получена в 1859 г. английским ученым Максвеллом и она имеет вид:

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv} = \frac{dP(v)}{dv} = \frac{4\pi}{2\pi kT} \left( \frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (2.3)$$

В формуле (2.3)  $m_0$  обозначает массу одной молекулы, а  $k$  - это постоянная Больцмана.

График функции  $f(v)$  приведен на рис. 2.3,а. Из него видно, что при скорости молекулы  $v$ , равной нулю ( $v = 0$ ), функция  $f(v)$  обращается в ноль, затем функция нарастает и при скорости, называемой наиболее вероятной скоростью  $v_B$  молекул, достигает максимального значения, после этого она спадает до нуля при скоростях молекул, стремящихся к бесконечности.

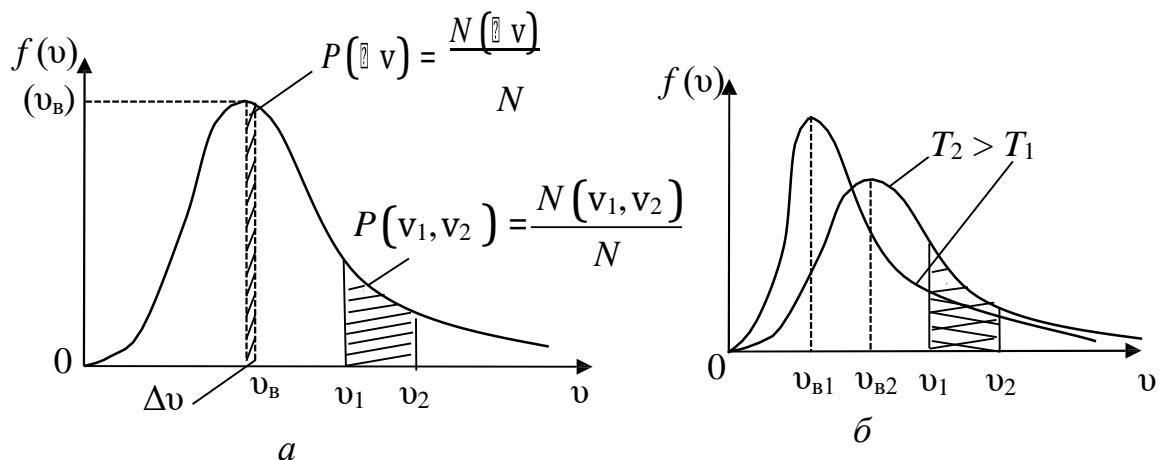


Рис. 2.3

Зная функцию распределения молекул идеального газа по скоростям  $f(v)$ , можно найти относительное число молекул  $\frac{N(v_1, v_2)}{N}$ , скорости которых попадают в интервал скоростей  $(v_1, v_2)$ , или вероятность попадания скорости одной молекулы в интервал скоростей  $(v_1, v_2)$ :

$$\frac{N(v_1, v_2)}{N} = P(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \quad (2.4)$$

Графически эта величина  $N(v_1, v_2)/N$  (или  $P(v_1, v_2)$ ) представляет собой площадь под графиком функции  $f(v)$  в пределах интервала скоростей от

$v_1$  до  $v_2$  (рис. 2.3, а). В случае малого интервала скоростей  $\Delta v$  (в его пределах функция распределения  $f(v)$  остается примерно постоянной величиной) можно с достаточной степенью точности рассчитать относительное число ( $N(\Delta v)$ ) молекул или вероятность  $P(\Delta v)$  по упрощенной формуле

$$\frac{N(\Delta v)}{N} = P(\Delta v) = f(v)\Delta v \quad (2.5)$$

В этом случае площадь под графиком функции будет представлять собой площадь прямоугольной полоски (рис. 2.3, а).

Можно дать пояснение названию наиболее вероятной скорости  $v_B$  молекул – если выбирать одинаковый интервал скоростей  $\Delta v$  около различных значений скорости  $v$ , то вблизи скорости  $v_B$  в малый интервал скоростей  $\Delta v$  попадет наибольшее число молекул (площадь прямоугольной полоски шириной  $\Delta v$  будет наибольшей).

Площадь под графиком функции распределения  $f(v)$  будет равна единице

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1 \quad (2.6)$$

это выражение называют **условием нормировки**. Интеграл в формуле (2.6) представляет собой вероятность того, что скорость отдельной молекулы попадает в область всех возможных значений скоростей, а это является достоверным событием, вероятность которого равна единице.

По другой трактовке функции распределения  $f(v)$  этот интеграл представляет собой относительное число молекул, скорости которых попадают в область всевозможных значений скоростей, что приводит также к единице в формуле (2.6).

Для того чтобы качественно пояснить изменение графика функции распределения  $f(v)$  при повышении температуры идеального газа, необходимо выяснить, как изменяется максимум функции  $f(v)$ . Исследуя функцию  $f(v)$  на

экстремум, получаем значения наиболее вероятной скорости и функции Максвелла, отвечающей этому значению

$$v_B = \sqrt{\frac{2\kappa T}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad (2.7)$$

$$f(v_B) = \frac{2(\frac{m_0}{e})^{2/3}}{2\pi kT} \sim \sqrt{\frac{m_0}{T}}. \quad (2.8)$$

В формулу (2.7) входит универсальная газовая постоянная  $R$  ( $R = kN_A$ ) и молярная масса  $M$  ( $M = m_0 N_A$ ) газа.

Из формул (2.7) и (2.8) следует, что с ростом температуры значение максимума функции  $f(v_{\text{вер}})$  уменьшается, а наиболее вероятная скорость увеличивается. Также учитывая условие (2.6) нормировки (неизменность площади под графиком функции  $f(v)$ ), делаем вывод, что с увеличением температуры график функции распределения Максвелла становится ниже, но растягивается вдоль оси скоростей.

На рис. 2.3, б приведены графики функции  $f(v)$  для двух температур ( $T_2 > T_1$ ). Из данных графиков видно, что с ростом температуры увеличивается число молекул, скорости которых больше наиболее вероятной ( $v > v_{\text{вер}}$ ), т.е. доля быстрых молекул становится больше. Кроме того, как видно из рис. 2.3, б, повышение температуры приводит к возрастанию числа молекул, попадающих в заданный интервал скоростей ( $v_1, v_2$ ).

### 2.2.2. Средние характеристики молекул

Функции распределения позволяют рассчитать средние свойства молекул, характеризующие всю совокупность молекул в целом. Оценим среднюю арифметическую скорость  $\langle v \rangle$  молекул, которая согласно ее определению равна сумме модулей всех скоростей молекул, взятых в какой-то момент времени, деленной на их число

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N v_i.$$

Для расчета средней арифметической скорости молекул газа обратимся к методам статистики, согласно которым среднее значение произвольной величины  $\langle x \rangle$  может быть рассчитано с помощью функции распределения  $f(x)$  как

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} xf(x)dx. \quad (2.9)$$

Тогда

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} vf(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (2.10)$$

Аналогично можно оценить среднее значение от квадрата скорости молекул

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v)dv = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{M}$$

Следовательно, средняя квадратичная скорость молекул равна

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (2.11)$$

Среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул можно рассчитать по формуле

$$\langle W_{\text{к,пост}} \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3kT}{2} \quad (2.12)$$

### 2.2.3. Молекулярно-кинетический смысл температуры

Можно вводить разные определения температуры, показывая каждый раз новые ее свойства. Так, например, в п. 2.1. температура была определена как величина, определяющая степень нагретости тела.

Также температуру можно определить как *единственный термодинамический параметр состояния, одинаковый для всех тел, находящихся в состоянии теплового равновесия*. Так, например, если принести мяч с улицы в комнату, то с течением времени температуры мяча и воздуха в комнате станут одинаковыми, хотя остальные термодинамические параметры –

давление воздуха в комнате и внутри мяча и объем мяча и комнаты останутся разными.

Из опыта известно, что для разреженных газов, находящихся в состоянии теплового равновесия, величина  $(pV/N)$  принимает одинаковое значение, а следовательно, имеет смысл температуры. Для измерения температуры тел в градусах, был введен коэффициент пропорциональности  $k$  – постоянная Больцмана.

$$\left( \frac{pV}{N} = kT \right) \quad (2.23)$$

В соответствии с формулой (2.23) вводится абсолютная шкала температур, шкала температур Кельвина. В этой шкале температура принимает положительные значения  $T \geq 0$ .

Из формулы (2.12) следует молекулярно-кинетический смысл температуры

$$T = \frac{2\langle W_{k,\text{пост}} \rangle}{3k}, \quad (2.13)$$

а именно: *температура системы является мерой интенсивности теплового движения молекул*. Чем выше температура, тем интенсивность теплового движения молекул больше, и наоборот. Абсолютный нуль ( $T = 0 K$ ) температур – такая температура, при которой тепловое движение молекул отсутствует.

#### **2.2.4. Основное уравнение МКТ идеального газа для давления\***

С помощью усредненных характеристик молекул можно рассчитать термодинамические параметры системы. Выведем формулу для давления идеального газа, находящегося при заданной температуре.

Давление газа на стенки сосуда обусловлено ударами молекул о стенки сосуда. При соударении одной молекулы со стенкой сосуда, она передает стенке импульс  $\Delta p_{CT} = 2m_0v$  (рис. 2.4). Предположим, что все молекулы движутся с одинаковой по модулю скоростью вдоль трех взаимно перпендикулярных осей  $Ox, Oy, Oz$ .

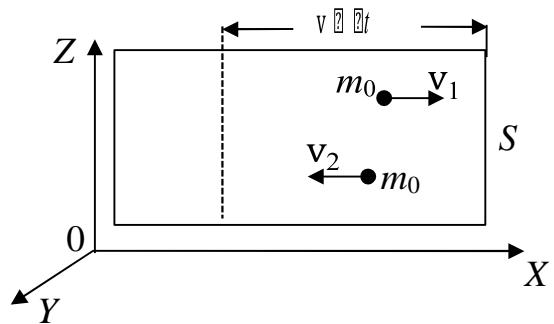


Рис. 2.4

Вследствие хаотичности теплового движения молекул, вдоль любой из координатных осей движется одинаковое число молекул  $((1/3)N)$ , а в положительном направлении оси  $Ox$  – половина от  $((1/3)N)$ , т.е.  $(1/6)N$  всех молекул. Следовательно, за время  $\Delta t$ , с одной стенкой сосуда столкнется  $1/6$  часть всех молекул, находящихся в объеме цилиндра с площадью основания  $S$  и высотой  $v\Delta t$  (именно такое расстояние проходят молекулы, движущиеся со скоростью  $v$  за время  $\Delta t$ ).

Таким образом, за время  $\Delta t$  молекулы сообщают стенке импульс, равный

$$\frac{\Delta p'}{ст} = 2m \underset{0}{v} \underset{6}{\left( \frac{1}{3} N \right)} = 2m \underset{0}{v} \underset{6}{\left( \frac{1}{3} nv \right)} \underset{0}{\Delta t S} = \frac{1}{3} m n v^2 \Delta t S,$$

где  $n = N/V$  – концентрация молекул (число молекул в единице объема).

Давление газа на стенку сосуда равно отношению **средней** силы давления на стенку сосуда к площади этой стенки. В свою очередь, средняя сила давления равна среднему импульсу, переданному молекулами стенке за время  $\Delta t$

$$p = \frac{\langle F \rangle}{S} = \frac{\langle \Delta p'_{ст} \rangle}{\Delta t S} = \frac{1}{3} m n \langle v^2 \rangle.$$

Итак, для давления идеального газа на стенки сосуда можно записать

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2 \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) носит название основного уравнения МКТ идеального газа.

Как показывают расчеты, учет движения молекул по всем направлениям в пространстве (не только вдоль осей  $Ox, Oy, Oz$ ), приводит также к записанной выше формуле для давления идеального газа.

С учетом формулы (2.14) и выражения для кинетической энергии, запишем давление идеального газа через среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул

$$p = \frac{2}{3} n \langle W_K \rangle. \quad (2.15)$$

### **2.2.5. Экспериментальная проверка распределения молекул по модулю скорости. Опыт Штерна\***

В настоящее время известны несколько опытов, в которых проверялось распределение частиц идеального газа по модулю их скоростей. Они использовали метод молекулярных и атомных пучков (Штерн 1920 г., Элдридж 1927 г., Ламмерт 1929 г.). Рассмотрим подробнее опыт Штерна.

Селектор и детектор совмещены во вращающемся цилиндре со щелью (рис. 2.5). Когда щель попадает на линию пучка, через нее внутрь цилиндра входит порция молекул, идущих с разогретой платиновой нити. Поскольку скорости всех молекул различны, то молекулы достигают противоположной стенки цилиндра с различным запаздыванием по отношению к моменту прохождения щели и, поэтому попадают на разные участки внутренней стенки цилиндра. Измеряя число молекул, попавших на различные участки, можно вычислить распределение молекул в пучке по скоростям. Проведенные эксперименты подтвердили справедливость распределения Максвелла.

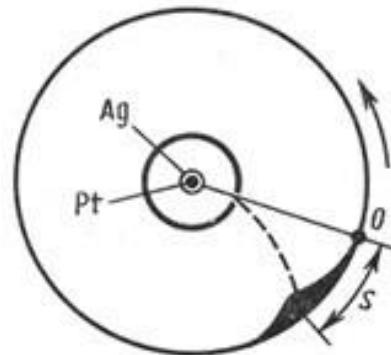


Рис. 2.5

### 2.3. Барометрическая формула

Рассмотрим газ, находящийся в равновесии в поле силы тяжести. В этом случае сумма действующих сил на каждый элемент объема газа равна нулю. Выделим малый объем газа на высоте  $h$  (рис. 2.6, а) и рассмотрим действующие на него силы.

На выделенный объем действует сила давления газа снизу, сила давления газа сверху и сила тяжести. Тогда баланс сил запишется в виде

$$pS = (p + dp)S + dm g,$$

где  $dm$  – масса выделенного объема. Для этого объема можно записать уравнение Менделеева – Клапейрона

$$pdV = \frac{dm}{M} RT$$

Выражая величину  $dm$ , можно получить уравнение

$$dp = -dh \frac{pM}{RT} g.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dp}{p} = -dh \frac{Mg}{RT}.$$

Проинтегрируем полученное уравнение, учитя, что температура постоянна,

$$\ln p = -h \frac{Mg}{RT} + \text{const.}$$

Пусть давление на поверхности равно  $p_0$ , тогда полученное уравнение легко преобразовать к виду

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \quad (2.16)$$

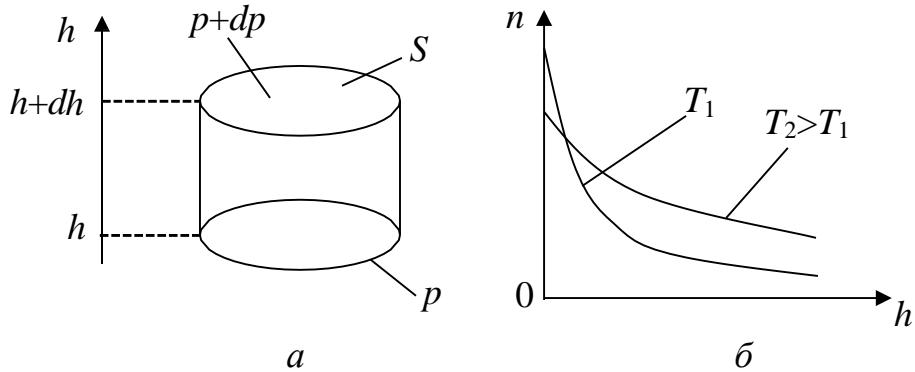


Рис. 2.6

Полученная формула называется барометрической и достаточно хорошо описывает распределение давления по высоте в атмосфере Земли и других планет. Важно помнить, что эта формула была выведена из предположения равновесия газа, при этом величины  $g$  и  $T$  считались постоянными, что, конечно, не всегда справедливо для реальной атмосферы.

В силу того, что с увеличением высоты, температура воздуха уменьшается, выражение (2.16) для расчета его давления можно применять только при небольших перепадах высот.

## 2.4. Распределение Больцмана

Запишем барометрическую формулу (2.16) через концентрацию частиц, воспользовавшись тем, что  $p = nkT$ :

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right), \quad (2.17)$$

где  $n_0$  – концентрация газа на поверхности земли,  $n$  – концентрация газа на высоте  $h$  от поверхности земли.

На рис. 2.6, б приведены графики зависимости концентрации  $n$  молекул газа от высоты  $h$  при различных температурах  $T$ . С увеличением температуры концентрация  $n_0$  молекул газа вблизи поверхности земли становится меньше, а сама зависимость  $n(h)$  – менее резко убывает, чем при более низкой температуре.

Поскольку воздух представляет собой смесь таких газов, как азот, кислород, углекислый газ, гелий и т.д., то согласно формуле (2.17), его состав будет изменяться с высотой – с увеличением высоты будет возрастать концентрация легких газов (газов с меньшей молярной массой).

Такой же вывод можно провести для любой потенциальной силы (не обязательно для силы тяжести). Из формулы (2.17) видно, что в числителе экспоненты стоит потенциальная энергия одной молекулы в потенциальном поле. Тогда формулу (2.17) можно записать в виде

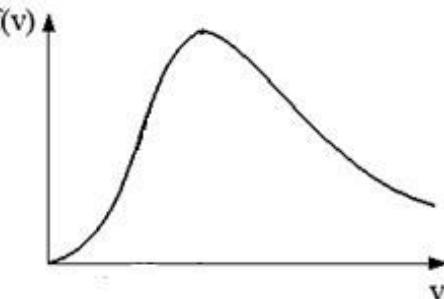
$$n = n_0 \exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right). \quad (2.18)$$

В таком виде эта формула пригодна для нахождения концентрации молекул, находящихся в равновесии в поле любой потенциальной силы.

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 6***

1. На рисунке представлен график

функции распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла). Если, не меняя температуры, взять другой газ с большей молярной массой и таким же числом молекул, то



максимум кривой сместится вправо, в сторону больших скоростей.  
максимум кривой сместится влево, в сторону меньших скоростей.  
высота максимума увеличится.

площадь под кривой уменьшится.

площадь под кривой не изменится.

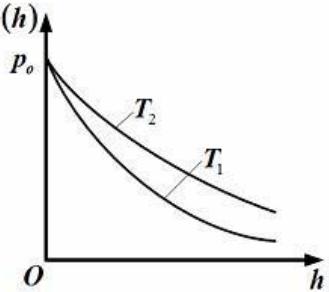
2. Температуру идеального газа увеличили в 16 раз. При этом средняя квадратичная скорость молекул возрастает в ... раз (а).

- 1) 2      2) 4      3) 8      4) 16

3. Часть стенки сосуда покрыли kleem, поглощающим все падающие молекулы газа. При этом давление газа на стенки сосуда
- 1) увеличится
  - 2) уменьшится
  - 3) не изменится
  - 4) однозначного ответа дать нельзя
4. Правильные утверждения
- 1) Функция распределения Максвелла позволяет найти распределение молекул по значениям потенциальной энергии.
  - 2) Распределение Больцмана справедливо только в потенциальном поле силы тяжести.
  - 3) Распределение молекул в пространстве устанавливается в результате совместного действия теплового движения и потенциального поля.
  - 4) Распределение Больцмана характеризует распределение частиц классической системы по координатам после установления в системе равновесия.
  - 5) Функция распределения Максвелла устанавливает распределение молекул идеального газа по скоростям [2].

5. На рисунке представлены зависимости давления воздуха от высоты для двух разных температур. Температуры связаны между собой соотношением

- 1)  $T_1 = T_2$
- 2)  $T_1 > T_2$
- 3)  $T_1 < T_2$



## ЛЕКЦИЯ 7

### 2.5. Основные понятия равновесной термодинамики

**Функция состояния системы** – это любая функция параметров системы, изменение которой зависит только от начального и конечного состояний системы, но не зависит от пути перехода.

**Равновесным состоянием** системы называется такое состояние, при котором все параметры системы имеют определенные значения, остающиеся при неизмененных внешних условиях постоянными сколь угодно долго.

**Неравновесное состояние** – состояние, в котором хотя бы один из термодинамических параметров не имеет определенного значения.

**Замкнутой или изолированной системой** называют систему, не обменивающуюся с окружающей средой ни энергией, ни веществом.

Если система обменивается энергией, но не обменивается веществом с окружающими средой, то такая система называется **закрытой**.

**Открытая система** – система, которая обменивается энергией и частицами с окружающими внешними телами.

Процесс, состоящий из непрерывной последовательности равновесных состояний, называется **равновесным**. Из сказанного следует, что равновесным может быть только бесконечно медленный процесс. При достаточно медленном протекании реальные процессы могут приближаться к равновесному состоянию сколь угодно близко.

**Все равновесные процессы являются обратимыми**, это значит, что равновесный процесс может быть проведен как в прямом, так и в обратном направлении. Причем система будет проходить в обратном порядке через все те же состояния, что и при прямом ходе. На диаграммах состояния изображаются только равновесные состояния и равновесные процессы.

Процесс, в ходе которого система, пройдя через ряд изменений, возвращается в исходное состояние, называют **круговым**.

## **2.6. Число степеней свободы молекулы. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы**

*Числом  $i$  степеней свободы в механике называют число независимых между собой возможных перемещений механической системы, оно зависит от числа материальных точек, образующих систему, а также от числа и характера наложенных на систему механических связей. За счет возбуждения таких*

степеней свободы у системы появляется энергия, в основном эта энергия будет представлять собой энергию кинетического движения [2].

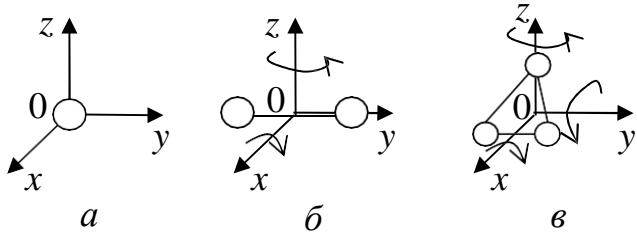


Рис. 2.7

Для свободной материальной точки число степеней свободы равно трем ( $i_{\text{пост}} = 0$ ) – это степени свободы поступательного движения, которое для своего описания требует трех координат ( $x, y, z$ ), с этими степенями свободы связана кинетическая энергия поступательного движения. Число степеней свободы вращательного движения для материальной точки отсутствует ( $i_{\text{вращ}} = 0$ ), так как вращение материальной точки относительно взаимно перпендикулярных осей ( $Ox, Oy, Oz$ ), проходящих через нее, не вызывает ее перемещения в пространстве, т.е. не требует дополнительной энергии [2].

Рассмотрим молекулу, состоящую из одного атома (рис. 2.7, а).

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 0, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 3. \quad (2.19)$$

Для двухатомных молекул рассмотрим два случая. Если молекула является **жесткой**, т.е. расстояние между атомами в ней не изменяется (рис. 2.7, б), то

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 2, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 5. \quad (2.20)$$

В случае **нежесткой молекулы**, когда расстояние между атомами может изменяться под влиянием силы упругости, необходимо учитывать колебательное движение атомов в молекуле. Такая молекула будет обладать шестью степенями свободы, одна из которых является колебательной.

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 2, \quad i_{\text{кол}} = 1, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{кол}} = 6. \quad (2.21)$$

В случае многоатомной молекулы, у которой число молекул  $N \gg 3$  (рис. 2.7, в), также возможны два случая. Если молекула **жесткая**, то

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 3, \quad i_{\text{кол}} = 0, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{кол}} = 6. \quad (2.22)$$

В случае **нежесткой** молекулы между атомами действуют упругие силы, число степеней свободы для молекулы будет равно  $3N$  – три степени свободы поступательного движения, три степени свободы вращательного движения равновесной конфигурации молекулы и ( $3N - 6$ ) степеней свободы колебательного движения [2].

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 3, \quad i_{\text{кол}} = 3N - 6, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{кол}} = 3N. \quad (2.23)$$

Сформулированный Максвеллом **закон о равномерном распределении энергии** хаотического теплового движения **молекул по степеням свободы**, гласит: *на одну степень свободы поступательного и вращательного движения в среднем приходится энергия, равная  $kT/2$ , а на каждую степень свободы колебательного движения – энергия  $kT$ .*

Таким образом, средняя энергия молекулы, участвующей в тепловом движении, может быть вычислена как

$$\langle W_K \rangle = \frac{kT}{2} \left( i_{\text{вращ}} + i_{\text{пост}} \right) + (kT) i_{\text{кол}}. \quad (2.24)$$

В дальнейшем, при описании идеального газа будем рассматривать только жесткие молекулы (данное приближение оказывается справедливым в интервале температур приблизительно от 10 до  $10^3$  К, при более высоких температурах появляются дополнительные колебательные степени свободы) и тогда формула (2.24) запишется в виде

$$\langle W_K \rangle = \frac{i}{2} kT = \frac{i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}}}{2} kT \quad (2.25)$$

## 2.7 Внутренняя энергия системы, работа, теплообмен

### 2.7.1. Внутренняя энергия системы

Под внутренней энергией  $U$  системы (или тела) понимают его энергию за вычетом энергии системы во внешних полях и кинетической энергии движения

системы как целого. Внутренняя энергия системы зависит от параметров ее состояния (в самом простом случае от таких параметров, как ее объем, температура и давление)[2].

Внутренняя энергия является функцией состояния системы:  $U = U(p, V, T)$ . Так как параметры системы связаны уравнением состояния

$$pV = \nu RT \quad (2.26)$$

то это означает, что внутренняя энергия системы может быть записана как функция только двух переменных, например, объема и давления:  $U = U(p, V)$ .

С точки зрения молекулярной физики, внутренняя энергия системы складывается из суммы кинетических энергий теплового движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия [2].

Поскольку идеальный газ состоит из не взаимодействующих друг с другом молекул, то его внутренняя энергия, с учетом формулы (2.25) равна

$$U = \sum_{i=1}^N W_{\kappa_i} = N \langle W_{\kappa} \rangle = \frac{i}{2} N k T = \frac{i}{2} \nu R T, \quad (2.27)$$

где учтено, что  $N = \nu N_a$  и  $R = k N_a$  – универсальная газовая постоянная ( $R = 8,31$  Дж/моль·К,  $N_a = 6,02 \cdot 10^{23}$  – постоянная Авогадро).

Внутреннюю энергию закрытой системы можно изменить с помощью работы и теплопередачи (теплообмена).

### 2.7.2. Работа

Под **работой** понимают такой способ обмена энергией между системой и окружающими телами, при котором происходит перемещение макроскопических частей системы, изменяется ее объем.

Получим формулу, позволяющую рассчитать работу расширения (сжатия) газа в ходе различных процессов. Рассмотрим процесс равновесного расширения газа, находящегося под поршнем площади  $S$  (рис. 2.8, а). Сила  $F$  давления газа на поршень при его элементарном перемещении  $dl$  совершает элементарную работу  $\delta A$  равную

$$\delta A = F dl \cos 0 = (pS) dl = p(S dl) = pdV. \quad (2.28)$$

Если работа связана с *конечным* изменением объема, то она определяется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \delta A = \int_{V_1}^{V_2} pdV \quad (2.29)$$

При расширении ( $V_2 > V_1$ ) газ совершает положительную работу, а при сжатии ( $V_2 < V_1$ ) – отрицательную. В *изохорическом процессе* объем газа остается неизменным ( $dV = 0$ ) и, поэтому, газ работы *не совершает*.

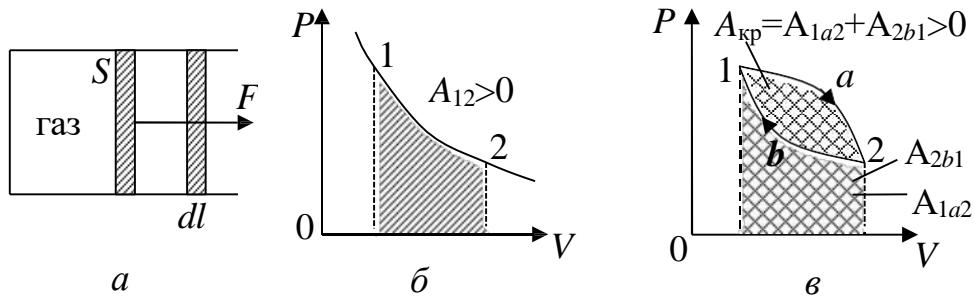


Рис. 2.8

Графически работа газа определяется площадью под графиком зависимости давления газа  $p$  от объема  $V$  в ходе процесса (рис. 2.8, б). Следовательно, значение интеграла (2.29) зависит не только от пределов интегрирования, но и от *формы кривой* на  $p$ - $V$ -диаграмме. Поэтому говорят, что *работа газа есть функция процесса*. Для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в обозначении элементарной работы используется значок  $\delta$  (см. формулу (2.28)), а не значок  $d$ .

Работа  $A_{kp}$ , совершенная газом в ходе кругового (циклического) процесса, равна площади фигуры (1- $a$ -2- $b$ -1), ограниченной графиком процесса (рис. 2.8, в). В случае, если циклический процесс, изображенный в координатах ( $p$ ,  $V$ ) совершается по часовой стрелке, то  $A_{kp} = (A_{1a2} + A_{2b1}) > 0$ , (рис. 2.8, в), а если против – то  $A_{kp} < 0$ .

### 2.7.3. Термообмен, теплоемкость системы

Под **термообменом** (теплопередачей) понимают процесс обмена энергией между системой и внешними телами, при котором не происходит

изменение объема системы, не перемещаются ее макроскопические части. Энергия, получаемая или отдаваемая системой при таком процессе, называется количеством теплоты. Если система получает теплоту, то она считается положительной, если отдает – отрицательной [2].

**Теплоемкость**  $C$  системы равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить системе, чтобы нагреть ее на один градус.

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (2.30)$$

Также вводят удельная ( $c$ ) и молярная ( $c_M$ ) теплоемкости системы

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\delta Q}{mdT}, \quad c_M = \frac{C}{v} = \frac{\delta Q}{vdT}, \quad (2.38)$$

где  $m$  – масса системы, а  $v = M/m$  – количество вещества.

Удельная теплоемкость – это теплоемкость 1 кг вещества, а молярная – это теплоемкость вещества, взятого в количестве 1 моль.

Зная теплоемкости системы можно рассчитать количество теплоты, которое получает (отдает) система при нагревании (охлаждении).

$$\delta Q = CdT = cmdT = c_MvdT. \quad (2.39)$$

Количество теплоты, полученное (отданное) системой при плавления (криSTALLизации) и парообразования (конденсации) можно рассчитать соответственно по формулам

$$\delta Q = \lambda dm, \quad \delta Q = rdm, \quad (2.40)$$

где используются определяемые из опыта удельные теплоты плавления  $\lambda$  и парообразования  $r$ :  $\lambda = \delta Q / m$ ,  $r = \delta Q / m$ .

## 2.8. Первый закон термодинамики и его применение к различным процессам

### 2.8.1 Первый закон (начало) термодинамики

Законом, выражающим закон сохранения энергии в тепловых процессах, является **первое начало** термодинамики. Согласно первому закону термодинамики *количество теплоты, подведенное к системе, идет на*

*изменение ее внутренней энергии и на работу, совершающую системой над внешними телами.*

$$\delta Q = dU + \delta A . \quad (2.41)$$

Формула (2.41) записана для элементарных процессов, при которых происходит бесконечно малое изменение параметров системы. В этом выражении  $\delta Q$  и  $\delta A$  означают элементарное количество теплоты и элементарную работу в ходе процесса, при котором внутренняя энергия системы изменилась на бесконечно малую величину  $dU$ . Знакок  $\delta$  указывает на то, что количество теплоты  $Q$  и работа  $A$  являются функциями процесса. Знакок  $d$  указывает на то, что внутренняя энергия  $U$  является функцией состояния (т.е. ее изменение зависит только от начального и конечного состояния системы, но не зависит от пути перехода системы из начального в конечное состояние).

Первое начало термодинамики для процесса, при котором изменение параметров системы является конечным можно записать в виде

$$Q = \Delta U + A \quad (2.42)$$

### 2.8.2. Применение первого начала термодинамики к различным процессам

Запишем, прежде всего, формулы, которые будут использоваться при рассмотрении различных процессов в идеальном газе.

$$U = \frac{i}{2}vRT, \quad \Delta U = \frac{i}{2}vR\Delta T, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} pdV, \quad Q = \Delta U + A, \quad pV = vRT .$$

**1. Изотермический процесс:**  $T = const, m = const; pV = const$  –

уравнение процесса.

$$\Delta U = \frac{i}{2}vR\Delta T = 0, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{V_2 vRT}{V} dV = vRT \ln \frac{V_2}{V_1} = vRT \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad Q = A . \quad (2.43)$$

**2. Изохорический процесс:**  $V = const, m = const; p/T = const$  –

уравнение процесса.

$$\Delta U = \frac{i}{2} v R \Delta T = \frac{i}{2} V \Delta p, \quad A = 0, \quad Q = \Delta U. \quad (2.44)$$

**3. Изобарический процесс:**  $p = const, m = const; V/T = const$  –

уравнение процесса.

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{i}{2} v R \Delta T = \frac{i}{2} p \Delta V, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p(V_2 - V_1) = p \Delta V \\ &\quad , \\ Q &= \Delta U + A = \frac{i+2}{2} p \Delta V = \frac{i+2}{2} v R \Delta T \end{aligned} \quad (2.45)$$

**4. Адиабатический процесс** – это процесс, происходящий в системе без теплообмена с внешними телами:  $Q_{12} = 0; pV^\gamma = const$  – уравнение процесса,

где  $\gamma = \frac{i+2}{i}$  – показатель адиабаты (коэффициент Пуассона)

$$\Delta U = \frac{i}{2} v R \Delta T = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1), \quad A = -\Delta U \quad . \quad (2.46)$$

**5. Круговой процесс** – пройдя ряд изменений, система вернулась в исходное состояние, поэтому итоговое изменение температуры  $\Delta T_{kp} = 0$

$$\Delta U_{kp} = \frac{i}{2} v R \Delta T_{kp} = 0, \quad Q_{kp} = A_{kp} . \quad (2.47)$$

### 2.8.3 Зависимость теплоемкости системы от вида процесса.

#### Уравнение Майера

Зависимость количества теплоты от вида происходящего процесса приводит к аналогичной зависимости и теплоемкости системы. Поэтому вводят различные теплоемкости, описывающие протекание процессов при постоянном объеме ( $C_V$ ), давлении ( $C_p$ ), температуре ( $C_T$ ) и т.д. [2].

Рассчитаем молярные теплоемкости газа в различных изопроцессах.

**Изотермический процесс:**

$$c_{M_T} = \frac{\delta Q}{v dT} = 0, \quad \text{т.к.} \quad dT = 0 . \quad (2.48)$$

**Изохорический процесс:**

$$c_{M_V} = \frac{\delta Q}{vdT} = \frac{dU}{vdT} = \frac{ivRdT}{2vdT} = \frac{i}{2} R, \quad (2.49)$$

где при выводе выражения для  $c_{M_V}$  были использованы формулы (2.44).

### **Изобарический процесс:**

$$c_{M_p} = \frac{\delta Q}{vdT} = \frac{dU + \delta A}{vdT} = \frac{(i+2)vRdT}{2vdT} = \frac{(i+2)}{2} R \quad (2.50)$$

где при выводе выражения для  $c_{M_p}$  были использованы формулы (2.45)

### **4. Адиабатический процесс:**

$$c_{M_{\text{ад}}} = \frac{\delta Q}{vdT} = 0, \quad \text{т.к.} \quad dQ = 0. \quad (2.51)$$

Отметим, что исходя из формул (2.50) и (2.49) разность теплоемкостей  $c_{M_p}$  и  $c_{M_V}$  для идеального газа равна

$$c_{M_p} - c_{M_V} = R. \quad (2.52)$$

Уравнение (2.52) получило название **уравнения Майера**.

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 7**

#### 1. Верные утверждения:

- 1) работа, совершаемая термодинамической системой, является функцией процесса, т.е. зависит от вида процесса, в ходе которого система переходит из одного состояния в другое;
- 2) при равновесном расширении система совершает максимальную работу;
- 3) при утечке газа из баллона в вакуум, газ не совершает работу;
- 4) на круговом процессе система может совершать работу только в том случае, если она не обменивается теплом с окружающими телами.

#### 2. Удельная теплоемкость идеального газа зависит от:

- 1) числа атомов в молекулах газа;
- 2) молярной массы газы;
- 3) массы газа;

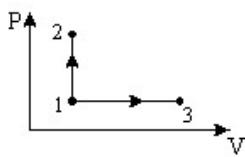
4) вида процесса, в ходе которого газ получает тепло.

3. Молярные теплоемкости двухатомного идеального газа в процессах 1-2

и 1-3 равны  $C_1$  и  $C_2$  соответственно. Тогда  $C_2/C_1$

составляет

- 1) 9/7      2) 7/5  
3) 5/7      4) 7/9



4. Многоатомному идеальному газу в результате изобарического процесса подведено количество теплоты  $Q$ . На работу газа расходуется часть теплоты  $A/Q$ , равная

- 1) 0,40    2) 0,75    3) 0,60    4) 0,25

5. Формулировками первого начала термодинамики могут служить утверждения:

- 1) Механическая энергия может превращаться во внутреннюю полностью, внутренняя в механическую – лишь частично;
- 2) При любом круговом процессе система не может совершать работу, большую, чем количество тепла, подведенное к ней извне;
- 3) Предоставленная самой себе неравновесная система всегда самопроизвольно приходит в равновесное состояние;
- 4) Тепло, подведенное к системе, затрачивается на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы над внешними телами.

## ЛЕКЦИЯ 8

### 2.9. Второе начало (закон) термодинамики

#### 2.9.1. Некоторые формулировки второго начала термодинамики

По мере развития термодинамики этот закон (начало), как обобщение опытных фактов, формулировался разными учеными по-разному, но все эти формулировки отражали необратимость протекания процессов в природе.

Приведем некоторые из этих формулировок.

1. Невозможен процесс, единственным результатом которого является переход тепла от холодного тела к горячему (Клаузиус).

Следующие формулировки (под номерами 2,3,4,5,6) в явном виде устанавливают неэквивалентность двух форм передачи энергии в виде тепла (неупорядоченная форма передачи энергии) и работы (упорядоченная форма), что приводит к необратимости протекания процессов в природе. Их неэквивалентность связана с различием тепловой формы движения материи и упорядоченной формой ее движения. Так, неупорядоченная форма движения материи приводит к диссипации энергии, к невозможности полного перехода ее в упорядоченную форму движения материи – работу.

2. Невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счет охлаждения одного тела (Томсон).

3. Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу.

4. Невозможен вечный двигатель второго рода, т.е. такое устройство, которое превращало бы тепло в работу полностью (Остwald).

5. Каждый тепловой двигатель должен содержать в своем составе охладитель.

6. Коэффициент полезного действия тепловой машины не может быть равен единице.

Приведем еще одну возможную формулировку второго начала термодинамики.

7. Невозможен процесс самопроизвольного перехода тепловой энергии в другие виды энергии. Приведем пример, подтверждающий эту формулировку. Пусть шарик катится по горизонтальному столу. С течением времени за счет работы силы трения его механическая энергия перейдет в тепловую энергию стола и шарика. Обратный процесс самопроизвольно не протекает, т.е. шарик за счет своей внутренней энергии теплового движения не начнет двигаться по столу.

### 2.9.2. Энтропия в термодинамике

Ряд термодинамических формулировок второго начала термодинамики содержит понятие энтропии системы. При развитии термодинамики оказалось, что помимо внутренней энергии системы функцией состояния системы также является величина, которая для равновесных процессов вводится (это было сделано Клаузиусом) по формуле

$$\frac{S_2 - S_1}{T} = \frac{\delta Q}{T}, \quad dS = \delta Q/T. \quad (2.53)$$

Следовательно, эта величина не зависит от пути перехода из одного состояния в другое, она получила название энтропия. Величину ( $\delta Q/T$ ) в формуле (2.53) называют приведенной теплотой.

Из формулы (2.53) следует, что источником изменения энтропии системы является теплообмен между системой и внешними телами. В зависимости от вида равновесного процесса, происходящего в системе, энтропия системы может как возрастать (тепло подводится к системе), так и убывать (тепло отводится от системы).

Оказалось, что существует еще один источник изменения энтропии, он связан с протеканием в системе неравновесного процесса. Клаузиус показал, что при протекании неравновесного процесса в замкнутой (изолированной) системе ее энтропия возрастает. Поэтому для изменения энтропии системы с учетом возможности протекания в ней неравновесного процесса равенство (2.53) запишется следующим образом:

$$\frac{\delta Q_{НЕОБР}}{T} \geq 0. \quad (2.54)$$

Эта формула (2.54) является важной для анализа протекания необратимых процессов в замкнутых (или изолированных) системах (нет теплообмена между системой и окружающими телами –  $\delta Q = 0$ ), для них  $\delta S \geq 0$ .

Дадим формулировку второго начала термодинамики с использованием понятия энтропии (Клаузиус): *энтропия замкнутой системы стремится к максимуму*:

$$\Delta S \geq 0. \quad (2.55)$$

Из опыта известно, что если замкнутая (или изолированная) система сначала находилась в неравновесном состоянии, то с течением времени в ней протекают процессы перехода в равновесное состояние, в состояние теплового равновесия. При таком процессе энтропия системы возрастает ( $\Delta S \geq 0$ ). Когда система переходит в равновесное состояние, энтропия достигает максимального значения, которое с течением времени остается неизменным (рис. 2.9).

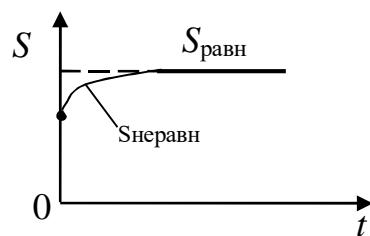


Рис. 2.9

Следовательно, в таких системах невозможен процесс перехода системы из равновесного состояния в неравновесное, так как при этом энтропия будет убывать, что запрещено вторым началом термодинамики. Отсюда следует, что важное свойство энтропии системы – помимо того, что она является функцией состояния, она также *определяет направление протекания процессов в замкнутых системах*.

Наиболее полно физический смысл энтропии раскрывается в статистической (молекулярной) физике. В дальнейшем будут даны формулировки второго начала термодинамики с точки зрения молекулярного строения вещества.

### 2.9.3 Расчет изменения энтропии для изопроцессов

Формулы (2.41), (2.53) позволяют рассчитать изменение энтропии для разных изопроцессов.

**Изотермический процесс:**

$$\oint S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta A}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{vRdV}{V} = vR \ln \frac{V_2}{V_1} = vR \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.56)$$

**Изохорический процесс:**

$$\oint S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{ivRdT}{2T} = -\frac{i}{2} vR \ln \frac{T_2}{T_1} = -\frac{i}{2} vR \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (2.57)$$

**Изобарический процесс:**

$$\oint S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{(i+2)vRdT}{2T} = \frac{i+2}{2} vR \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i+2}{2} vR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.58)$$

**Адиабатный процесс:**

Так как теплота не подводится ( $\delta Q = 0$ ), во всех равновесных адиабатных процессах

$$\oint S = 0, S = \text{const.} \quad (2.59)$$

Такие процессы называются *изоэнтропийными*.

### 2.9.4 Термодинамическая вероятность. Статистический смысл понятия энтропии

В п.2.9.2 было показано, что энтропия, как термодинамическая величина, определяет направление протекания процессов в замкнутых системах.

В статистической физике энтропия системы раскрывается с другой стороны, ее можно связать с тепловым движением молекул. Рассуждения при этом будут следующими. Если система самопроизвольно переходит из неравновесного состояния в равновесное, то это означает, что она самопроизвольно переходит из состояний менее вероятных в состояния более вероятные, причем равновесное состояние обладает наибольшей вероятностью, так как в нем система может находиться сколь угодно долго при неизменных внешних условиях [2].

Таким образом, необратимость процессов связана с переходом системы из состояний менее вероятных в состояния более вероятные. Существует возможность протекание и обратных процессов, при которых система переходит из более вероятных состояний в менее вероятные, но вероятность осуществления таких процессов будет чрезвычайно малой.

Для количественной оценки вероятности различных состояний системы, вводят понятие **термодинамической вероятности (статистического веса)**. Термодинамическая вероятность  $\Omega$  – это число микросостояний системы, которые соответствуют данному макросостоянию системы. Причем, по определению,  $\Omega \gg 1$ .

Молекулы, участвуя в тепловом движении, непрерывно изменяют свои координаты и скорости. Поэтому одно макросостояние системы будет реализовываться огромным числом микросостояний, которое оценить не просто.

Относительно термодинамической вероятности  $\Omega$  можно отметить следующее:

- 1) так же, как и энтропия,  $\Omega$  возрастает при переходе замкнутой системы из неравновесного состояния в состояние равновесия;
- 2) она так же, как и энтропия, является наибольшей в состоянии равновесия;
- 3) так же, как и энтропия  $\Omega$  является функцией состояния системы;
- 4) она характеризует степень хаотичности в движении молекул по координатам и скоростям;
- 5) в отличие от энтропии  $\Omega$  является мультипликативной функцией состояния системы, т.е. для системы, состоящей из двух невзаимодействующих подсистем она равна произведению термодинамических вероятностей этих подсистем ( $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$ ) [2].

В свою очередь, энтропия является аддитивной функцией состояния системы: энтропия системы, состоящей из двух невзаимодействующих частей, равна сумме энтропий этих частей ( $S = S_1 + S_2$ ).

Больцман показал, что энтропия связана с термодинамической вероятностью соотношением

$$S = k \ln \Omega, \quad (2.60)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Формула (2.60) раскрывает статистический смысл энтропии: *энтропия системы является мерой хаотичности в движении молекул по координатам и скоростям*. Кроме того, с помощью выражения (2.60) можно оценить энтропию для неравновесных состояний.

Согласно статистической формулировке второго начала термодинамики: *в замкнутой системе вероятнее всего протекают процессы идущие с увеличением энтропии, процессы с уменьшением энтропии маловероятны*.

В замкнутой системе также могут протекать и процессы, происходящие с уменьшением энтропии, но их вероятность мала.

## 2.10. Тепловые двигатели. Идеальный тепловой двигатель

Тепловой двигатель – это устройство, превращающее тепловую энергию топлива в механическую работу. На рис. 2.10 показана блок-схема теплового двигателя. Нагреватель сообщает рабочему телу (это пар или газ) количество теплоты  $Q_{\text{НАГР}}$ , за счет которого рабочее тело совершает работу, а неизрасходованное при этом тепло передает охладителю. При этом коэффициент полезного действия теплового двигателя будет меньше единицы

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_{\text{НАГР}} - |Q_{\text{ОХЛ}}|}{Q_{\text{НАГР}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{ОХЛ}}|}{Q_{\text{НАГР}}} < 1. \quad (2.61)$$

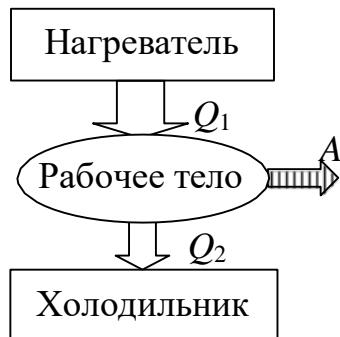


Рис. 2.10

Если взять круговые процессы, для которых разность между максимальной и минимальной температурой будет одинаковой, то среди них максимальный КПД будет у теплового двигателя, работающего по **циклу Карно**. Такой двигатель назвали **идеальным** [2]. Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат, его графики в координатах ( $p, V$ ) и ( $T, S$ ) приведены на рис. 2.11, а, б.

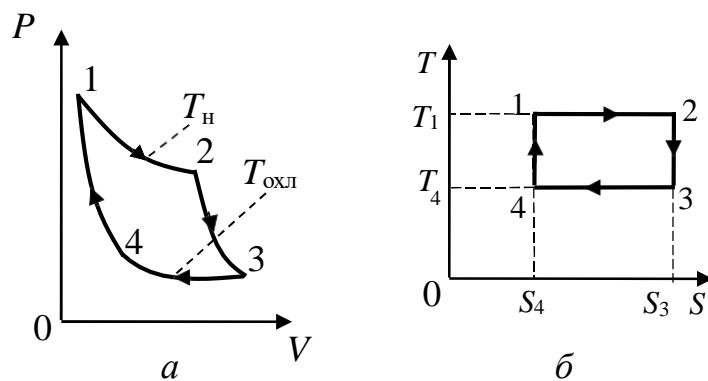


Рис. 2.11

В состоянии 1 рабочее тело приводится в тепловой контакт с нагревателем при температуре  $T_1$ . Происходит процесс изотермического расширения газа, в ходе которого он получает от нагревателя количество теплоты  $Q_1$ . В состоянии 2 рабочее тело отключается от нагревателя, и дальнейшее расширение происходит адиабатически. При этом газ совершает работу за счет убыли своей внутренней энергии, и его температура понижается. Когда она становится равной температуре холодильника  $T_2$  (состояние 3), рабочее тело приводят в тепловой контакт с ним и проводят изотермическое сжатие газа, в ходе которого рабочее тело отдает холодильнику количество теплоты  $Q_2$ . Этот процесс осуществляют до тех пор, пока газ не окажется в состоянии 4, из которого он может быть переведен с исходное состояние 1 путем адиабатического сжатия.

Выведем формулу для КПД идеального теплового двигателя. Для этого выделим отдельные вклады в изменении энтропии рабочего тела (газ) и учтем,

что изменение энтропии рабочего тела (газа) на замкнутом цикле будет равно нулю [2]

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{КРУГ}} &= \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = \frac{\Delta Q_T}{T_1} + 0 + \frac{\Delta Q_T}{T_3} + 0 = \frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_{\text{ОХЛ}}}{T_{\text{ОХЛ}}} = 0 \quad \left| \frac{Q_{\text{ОХЛ}}}{Q_H} \right| = \frac{T_{\text{ОХЛ}}}{T_H} \\ \eta_{\text{КАРНО}} &= 1 - \frac{T_{\text{ОХЛ}}}{T_H} = 1 - \frac{T_{\text{ОХЛ}}}{T_H}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Из полученной формулы (2.62) следует, что КПД обратимого цикла Карно не зависит от природы рабочего тела.

### *Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 8*

1. Правильные утверждения:

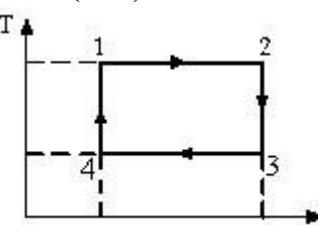
- 1) энтропия замкнутой системы с течением времени не убывает;
- 2) нельзя передать тепло от менее нагревого тела к более нагретому без изменений в окружающих телах;
- 3) для адиабатически замкнутой системы  $\Delta S \geq 0$ ;
- 4) энтропия замкнутой системы стремится к минимуму.

2. Один моль гелия и один моль азота, находящиеся в закрытых сосудах, нагрели от температуры  $T_1$  до температуры  $T_2$ . Тогда:

- 1) изменения энтропий этих газов не зависят от объемов сосудов;
- 2) изменения энтропий этих газов не зависят от скорости нагрева;
- 3)  $\Delta S_{N2} = \Delta S_{He}$ ;
- 4)  $\Delta S_{N2} > \Delta S_{He}$ .

3. Правильные утверждения о свойствах термодинамической вероятности:

- 1) термодинамическая вероятность – однозначная функция состояния системы;
- 2) в равновесном состоянии термодинамическая вероятность максимальна;

- 3) термодинамическая вероятность – величина мультипликативная;
- 4) термодинамическая вероятность – величина аддитивная.
4. На рисунке изображен цикл Карно в координатах  $(T, S)$ , где  $S$  – энтропия. Адиабатное сжатие происходит на этапе
- 1) 4 – 1                  2) 2 – 3  
                               3) 1 – 2                  4) 3 – 4
- 
5. Формулировкой второго начала термодинамики могут служить утверждения:
- 1) Невозможно периодически действующее устройство, которое превращало бы тепло в работу полностью.
  - 2) Энтропия замкнутой системы стремится к минимуму.
  - 3) Всякая система, предоставленная сама себе, стремится перейти в наиболее вероятное макросостояние.
  - 4) Наиболее вероятным изменением энтропии адиабатически замкнутой неравновесной системы является ее возрастание.

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

### ЛЕКЦИЯ 9

#### 3.1. Электростатика

##### *3.1.1. Электрический заряд. Закон Кулона*

*Электростатика* – раздел электродинамики, в котором изучается взаимодействие неподвижных электрических зарядов.

*Электрический заряд* – это скалярная физическая величина, характеризующая способность тел вступать в электромагнитные взаимодействия, величина которой определяет интенсивность этих взаимодействий.

Электрический заряд **дискретен**, т.е. заряды всех тел и частиц, вступающих в электромагнитные взаимодействия, кратны элементарному заряду (минимальному, существующему в природе) заряду.

$$Q = \mathbb{N} q_{\min}, \quad (3.1)$$

где  $q_{\min} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  – величина элементарного заряда,  $N$  – целое число.

Электрический заряд обладает свойством аддитивности: заряд любой системы есть алгебраическая сумма зарядов частиц, составляющих эту систему.

В электрически изолированных системах справедлив закон *сохранения электрического заряда*: суммарный заряд электрически изолированной системы остается неизменным

$$q_1 + q_2 + \dots = \text{const.} \quad (3.2)$$

Введение электрического заряда позволило сформулировать **закон Кулона**: силы, с которыми взаимодействуют два неподвижных точечных заряда в вакууме, прямо пропорциональны произведению их зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними; силы направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды (рис. 3.1, а) [3]:

$$\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad F_1 = F_2 = F_k = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3.3)$$

где  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \Phi/\text{м}$  – электрической постоянной.

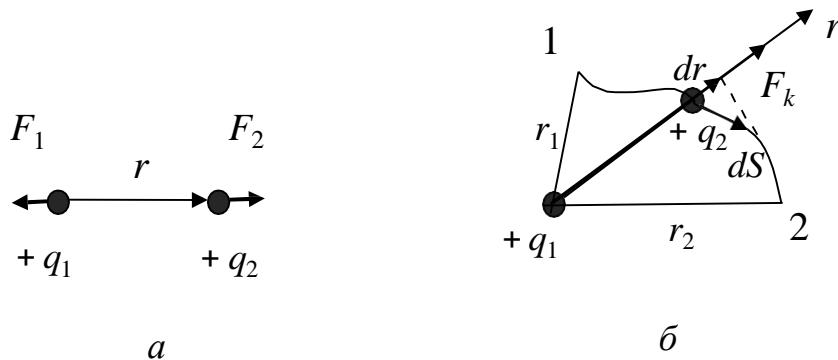


Рис. 3.1

При взаимодействии электрических зарядов в среде сила их взаимодействия уменьшается  $\epsilon$  раз, где  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды. Тогда выражение (3.3) имеет вид

$$F_k = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \quad (3.4)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость для вакуума равна единице; для каждой среды  $\epsilon$  имеет свое значение большее единицы ( $\epsilon > 1$ ), однако для воздуха  $\epsilon = 1,0006 = 1$ .

### **3.1.2. Вектор напряженности $E$ электростатического поля Напряженность электрического поля точечного заряда**

*Напряженность электростатического поля  $E$  – векторная физическая величина, являющаяся силовой характеристикой поля и равная отношению кулоновской силы, действующей на пробный положительный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда [3]*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_k}{q_0} \quad (3.5)$$

Зная величину вектора напряженности в каждой точке поля можно определить силу, с которой электростатическое поле действует на внесенный в него заряд:

$$F_k = q_0 E. \quad (3.6)$$

Рассчитаем напряженность  $E$  поля, точечного заряда. В качестве источника электростатического поля рассмотрим точечный заряд  $q_1$ , а в качестве заряда находящегося в этом поле – точечный заряд  $q_2$ . Используя формулы (3.4), (3.6) получим

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad \text{?}$$

$$\vec{E}_{m.z.} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad E_{m.z.} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.7)$$

Полученное выражение (3.7) позволяет определить вектор напряженности  $\vec{E}$  поля, созданного точечным зарядом  $q$ .

Направления векторов  $\vec{E}$  в разных точках поля для положительного и отрицательного точечных зарядов показаны на рис. 3.2, а, б, соответственно. На рис. 3.2, в изображена зависимость модуля  $E$  от расстояния  $r$  до заряда.

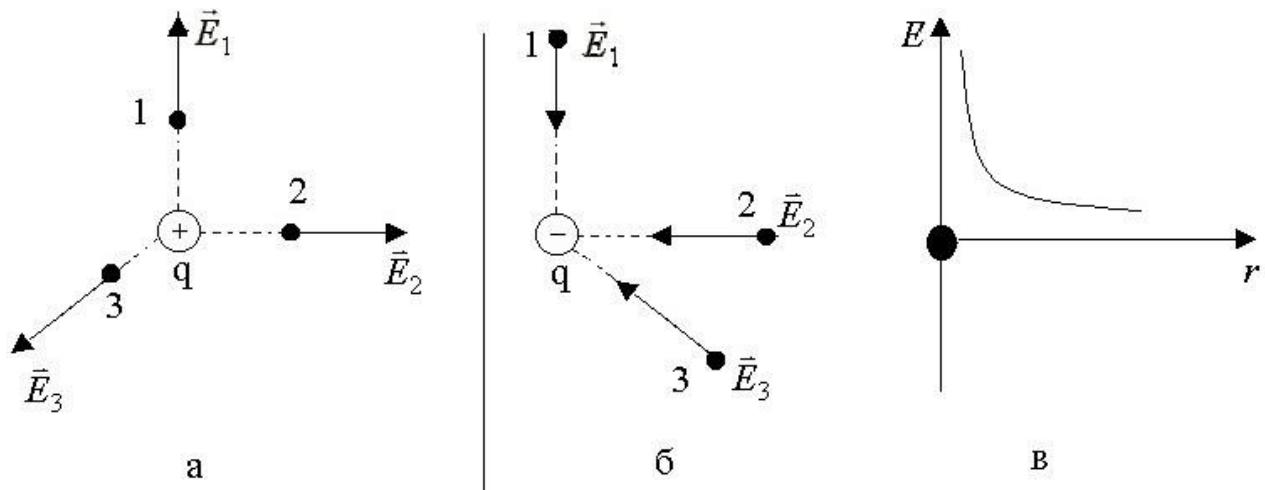


Рис. 3.2

Из (3.6) видно, что направление силы Кулона, действующей на пробный положительный заряд  $q_0$ , помещенный в данную точку поля, сонаправлено с направлением вектора  $\vec{E}$  в данной точке.

### 3.1.3. Принцип суперпозиции электростатических полей.

#### *Напряженность электрического поля на оси заряженного кольца*

Для расчета  $\vec{E}$  поля, созданного системой зарядов или макроскопическим заряженным телом, используют **принцип суперпозиции**: вектор напряженности  $\vec{E}$  электрического поля, созданного несколькими зарядами, равен векторной сумме напряженностей полей, созданных каждым зарядом в отдельности ( $E_1, E_2, \dots$ ) [3].

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad (3.8)$$

Для расчета напряженности электрического поля макроскопического заряженного тела в какой-либо точке  $A$  (рис. 3.3, а) необходимо разбить тело на бесконечно малые объемы, которые можно рассматривать как точечные заряды

$(dq)$ . Затем по формуле (3.7) в точке  $A$  найти вектора  $dE$  от этих зарядов и просуммировать их, т.е. взять интеграл по всему объему  $V$  тела

$$E_A = \iiint_V dE; \quad dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (3.9)$$

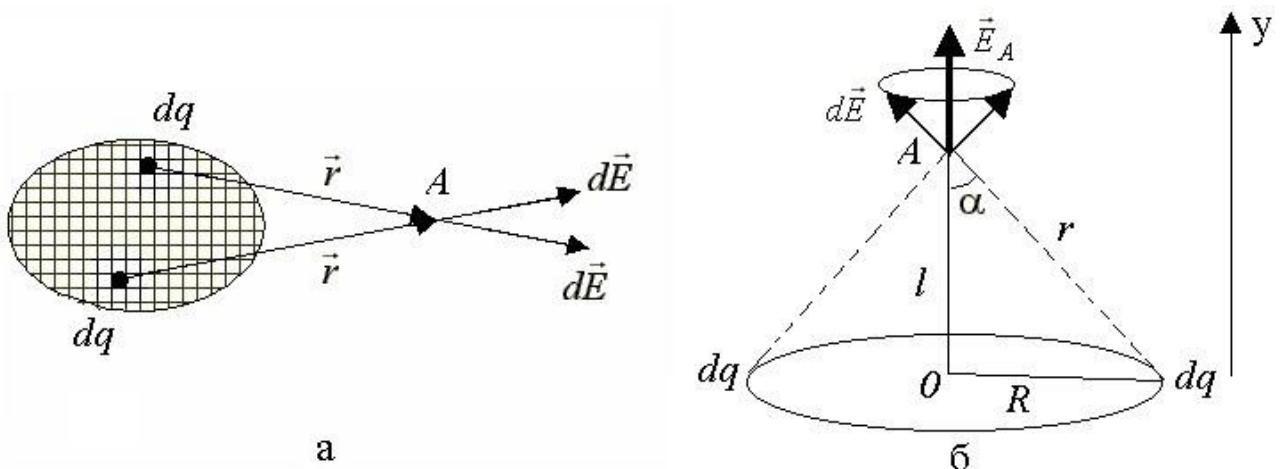


Рис. 3.3

Приведем пример расчета напряженности электростатического поля на оси равномерно заряженного кольца. Пусть равномерно заряженное по длине кольцо радиусом  $R$  несет заряд  $q$ . Найдем направление и модуль вектора  $E$  поля кольца в точке  $A$ , расположенной на оси кольца на расстоянии  $l$  от его центра (рис. 3.3, б). Для этого разбиваем кольцо на малые участки – точечные заряды  $dq$ , определяем направление векторов  $dE$  от всех зарядов  $dq$  в точке  $A$  и используем для расчета  $E_A$  формулу (3.9). Из симметрии задачи видно, что все векторы  $dE$  образуют конус векторов с углом  $\alpha$  при его вершине и суммарный вектор  $E_A$  будет направлен вдоль оси, вверх [3].

Тогда

$$E_A = \iiint_V dE$$

$$;$$

$$\text{Очевидно: } E_A = \iiint_V dE \cos\alpha = \iiint_V \frac{dq \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\cos\alpha}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dq = \frac{q \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + l^2)^{3/2}};$$

где учтено, что

$$\cos\alpha = \frac{l}{r} = \frac{l}{\left(R^2 + l^2\right)^{1/2}}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля в точке А, находящейся на оси заряженного кольца (рис. 3.3) вычисляется по формуле

$$E_A = \frac{q l}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + l^2\right)^{3/2}}; \quad (3.10)$$

Проанализируем полученное выражение. При  $l = 0$ , напряженность электростатического поля в центре кольца (точка О), равна

$$E_0 = 0. \quad (3.11)$$

При  $l \gg R$  кольцо можно рассматривать как материальную точку, следовательно напряженность электрического поля кольца рассчитывается по формуле (3.7) напряженности поля точечного заряда

$$l \gg R : \quad E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

### **3.1.4. Силовые линии электростатического поля (линии вектора $E$ )**

Для графического изображения электростатических полей используют линии вектора  $\vec{E}$  – они проводятся так, чтобы в каждой точке линии вектор  $\vec{E}$  был направлен по касательной к ней (рис. 3.4). Линии вектора  $\vec{E}$  нигде не пересекаются, они начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность. Примеры графического изображения полей точечных зарядов приведены на рис. 3.4, б, в, г [3].

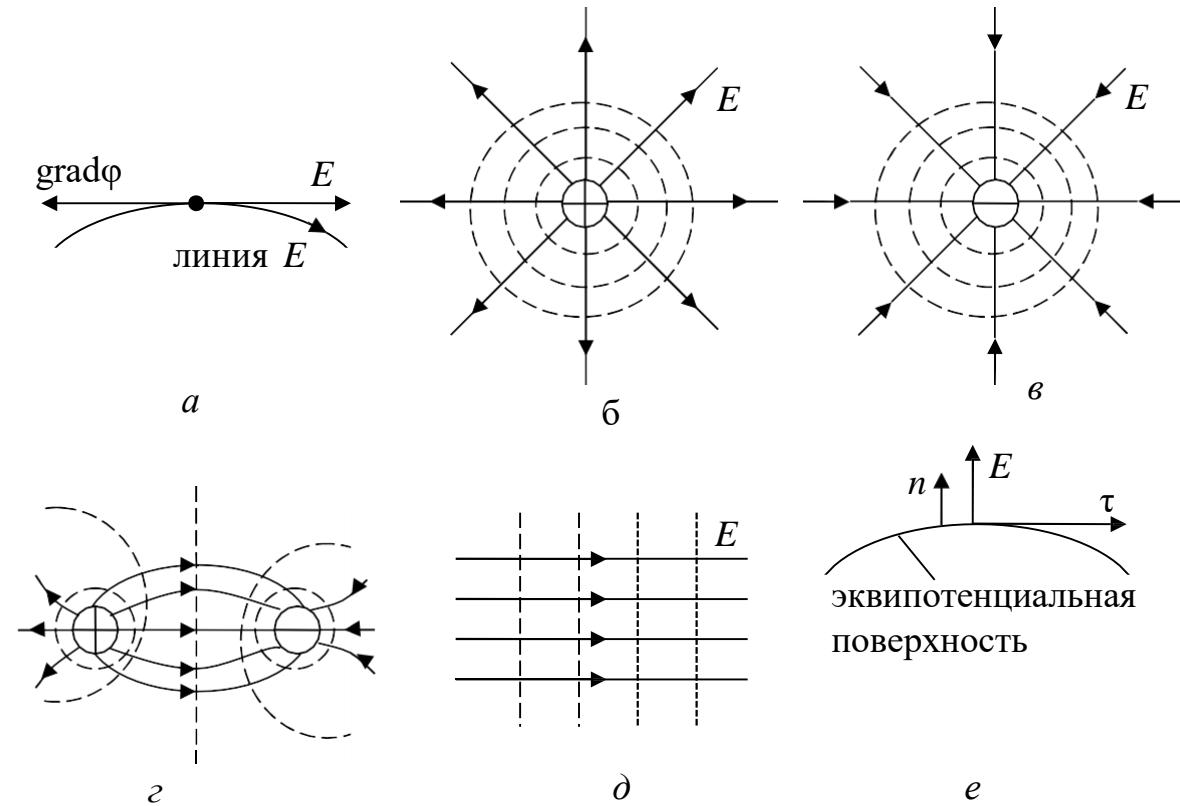
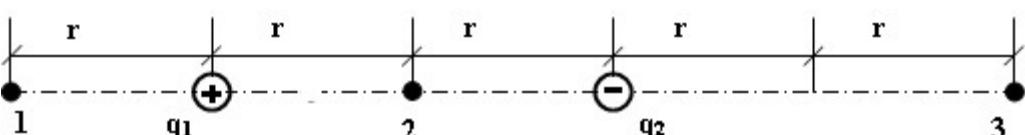


Рис. 3.4

Силовые линии вектора  $E$  точечного заряда изображаются в виде прямых линий, выходящих или входящих в заряд (рис. 3.4, б, в, г). Для однородного электрического поля (рис. 3.4, д), в любой точке вектор  $E$  одинаков и по величине и по направлению. В этом случае силовые линии  $E$  являются прямыми, параллельными и равноотстоящими друг от друга.

Обычно линии  $E$  проводят так, чтобы их густота в каждой точке поля определяла числовое значение вектора  $E$ . Под густотой линий  $E$  понимают количество линий, пронизывающих перпендикулярную к ним плоскую поверхность фиксированной площади. Поэтому по степени близости друг к другу линий  $E$  можно судить об изменении модуля вектора  $E$  и, соответственно, об изменении модуля кулоновской силы, действующей на заряженную частицу в электрическом поле [3].

## **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 9**

1. Три одинаковых металлических шарика с зарядами  $-6 \text{ нКл}$ ,  $+6 \text{ нКл}$  и  $+3 \text{ нКл}$  привели в соприкосновение друг с другом. После соприкосновения
  - 1) шарики будут притягиваться друг к другу;
  - 2) шарики будут отталкиваться друг от друга;
  - 3) шарики не будут ни притягиваться, ни отталкиваться друг от друга;
  - 4) первые два шарика притянутся друг к другу, и будут отталкиваться от третьего.
2. При помещении электрических зарядов в диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  сила их взаимодействия
  - 1) увеличивается в  $\epsilon$  раз;
  - 2) увеличивается в  $\epsilon^2$  раз;
  - 3) уменьшается в  $\epsilon$  раз;
  - 4) не изменяется.
3. Два одинаковых по модулю и разноименных точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  создают в точках 1, 2 и 3 разные напряженности электрического поля. Величина напряженности поля минимальна в точке ...
 

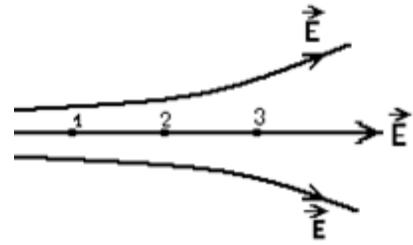
- 1) 1      2) 2      3) 3

4. По тонкому металлическому кольцу равномерно распределен заряд  $q$ .

Напряженность поля в точках, расположенных на оси кольца, при увеличении расстояния от центра кольца

- 1) только убывает;
- 2) только возрастает;
- 3) сначала возрастает, затем убывает;
- 4) сначала убывает, затем возрастает.

5. На рисунке изображено неоднородное электростатическое поле. Верное соотношение между напряженностями этого поля в точках 1, 2 и 3 ...



- 1)  $E_1 = E_2 = E_3$   
 2)  $E_1 > E_2 > E_3$   
 3)  $E_1 < E_3 < E_2$   
 4)  $E_1 < E_2 < E_3$

## ЛЕКЦИЯ 10

### 3.1.5. Поток вектора $\vec{E}$ электростатического поля. Теорема Гаусса – Остроградского для вектора $E$

Рассмотрим произвольную поверхность  $S$ , которая находится в неоднородном электростатическом поле (рис. 3.5, а). Введем понятие **потока  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через произвольную поверхность  $S$**  как

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S EdS \cos\alpha, \quad \alpha = \frac{\langle \cdot, \cdot \rangle}{\|E, n\|} \quad (3.12)$$

где  $dS$  – вектор, величина которого равна площади  $dS$  элементарной площадки, направленный по нормали  $n$  к площадке  $dS$  (рис. 3.5, а).

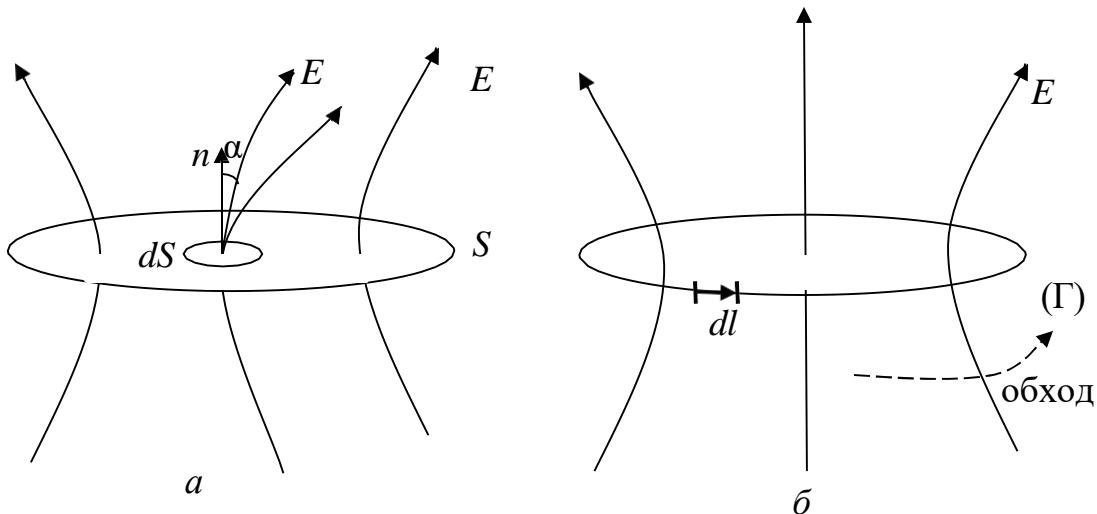


Рис. 3.5.

Поток вектора  $E$  равен количеству силовых линий электрического поля, пронизывающих поверхность  $S$ .

На рис. 3.6 приведены примеры расчета потока  $\Phi_E$  через различные поверхности  $S$  (рис. 3.6, а, б, в поверхность  $S$  – плоская; рис. 3.6, г  $S$  – замкнутая поверхность). В последнем случае поток  $\Phi_E$  через замкнутую поверхность равен нулю, так как количество линий  $E$ , входящих ( $N_+$ ) и выходящих ( $N_-$ ) из нее, одинаково, но они берутся с противоположными знаками ( $\cos\alpha_+ > 0, \cos\alpha_- < 0$ ) [3].

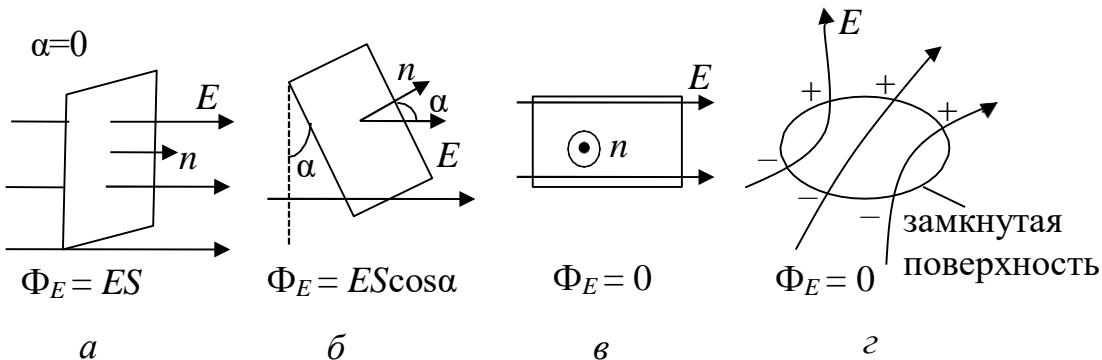


Рис. 3.6

Поток вектора напряженности можно определить с помощью **теоремы Гаусса**: поток вектора  $E$  через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов  $q_\Sigma$ , охватываемых этой поверхностью, и деленной на  $\epsilon\epsilon_0$

$$\oint_S EdS = \frac{q_\Sigma}{\epsilon\epsilon_0} \quad (3.13)$$

Эта теорема является следствием закона Кулона и принципа суперпозиции для электростатических полей.

Рассмотрим доказательство теоремы в случае поля точечного заряда. В качестве замкнутой поверхности возьмем сферу радиусом  $R$ . Точечный положительный заряд  $q$  поместим в центр этой сферы (рис. 3.7, а).

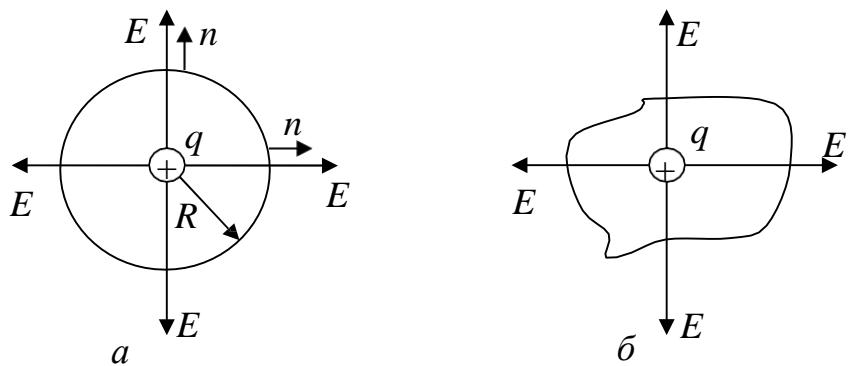


Рис. 3.7

Таким образом, поток вектора напряженности через выбранную сферическую поверхность равен

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS \cos 0^\circ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = q/\epsilon_0.$$

Поскольку поток вектора  $E$  электрического поля совпадает с количеством силовых линий, пронизывающих поверхность, то, вместо сферы можно взять произвольную замкнутую поверхность (рис. 3.7, б). При этом полученный результат не изменится, так как число таких линий  $E$  в случаях (а) и (б) одинаково.

### 3.1.6. Применение теоремы Гаусса – Остроградского к расчету электростатических полей

Теорему Гаусса применяют для нахождения выражения модуля вектора напряженности в случае электростатических полей, обладающих какой-либо симметрией.

Алгоритм применения теоремы Гаусса:

- 1) из симметрии распределения зарядов определить направление вектора  $E$  в каждой точке поля;
- 2) выбрать произвольную замкнутую поверхность, содержащую внутри себя заряд (часть заряда), создающего поле, и отражающую симметрию поля. Для удобства, как правило, выбираются

поверхности, элементы которых параллельны или перпендикулярны силовым линиям;

- 3) рассчитать поток вектора  $E$  через выбранную в п.2 поверхность.;
- 4) вычислить заряд, находящийся внутри данной поверхности;
- 5) с помощью теоремы Гаусса, рассчитать модуль вектора напряженности.

Рассмотрим конкретные примеры применения теоремы Гаусса.

**Пример 1. Электрическое поле равномерно заряженной по поверхности бесконечно протяженной плоскости. Поле плоского конденсатора.**

*1 этап.* Введем поверхностную плотность заряда  $\sigma$ , как заряд, приходящийся на единицу площади поверхности

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (3.14)$$

где  $dq$  – заряд находящийся на элементарной поверхности  $dS$ .

Если заряд  $q$  равномерно распределен по поверхности  $S$ , то поверхностная плотность заряда во всех ее точках будет одинаковой и равной

$$\sigma = \frac{q}{S}.$$

Поле бесконечно протяженной равномерно заряженной плоскости является однородным (во всех точках поля модуль  $E$  одинаков), линии  $E$  перпендикулярны к плоскости (рис. 3.8, а).

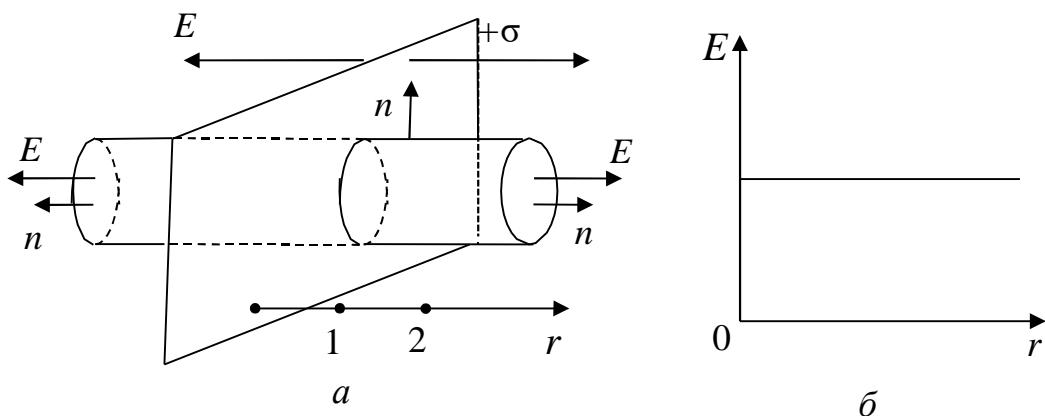


Рис. 3.8

*2 этап.* Замкнутую поверхность, через которую будем рассчитывать поток вектора  $E$ , выберем в виде цилиндра, образующая которого перпендикулярна к плоскости (рис. 3.8, а).

*3 этап.* Поток  $\Phi_E$  через боковую поверхность выбранного цилиндра будет равен нулю ( $\alpha=90^\circ$ , линии  $E$  не пересекают боковой поверхности) и, поэтому остается только поток через основания цилиндра ( $S_1 = S_2 = S$ )

$$\Phi_e \stackrel{D}{=} \int_s EdS \cos\alpha = \int_{S_1} EdS \cos\alpha + \int_{S_2} EdS \cos\alpha = 2ES$$

*4 этап.* Рассчитаем заряд плоскости, попадающий внутрь выбранного цилиндра

$$q_\Sigma = \int_s dq = \int_s \sigma dS = \sigma S$$

*5 этап.* Для расчета напряженности поля плоскости применяем теорему Гаусса (3.13):

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon\epsilon_0};$$

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon\epsilon_0}, \quad (3.15)$$

где введением  $|\sigma|$ , учтен случай отрицательно заряженной плоскости [3].

На рис. 3.8, б приведен график зависимости  $E(r)$  – напряженности поля плоскости от расстояния  $r$  от нее.

С помощью формулы (3.15) и принципа суперпозиции (3.8) можно рассчитать поле плоского конденсатора, как поле двух параллельных плоскостей с равными по модулю и противоположными по знаку поверхностными плотностями зарядов (рис. 3.9, а).

Применив принцип суперпозиции, видим, что поле конденсатора существует только между его пластинами (рис. 3.9, б), а модуль вектора напряженности этого поля равен

$$E = E_+ + E_- = \frac{|\sigma|}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{|q|}{S\epsilon\epsilon_0}, \quad (3.16)$$

где  $|q|$  – модуль заряда одной из пластин конденсатора площади  $S$ .

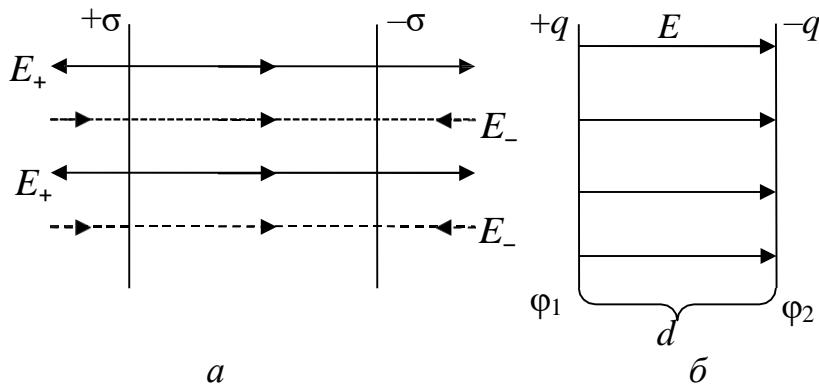


Рис. 3.9

**Пример 2. Поле равномерно заряженной бесконечно длинной прямолинейной нити.**

1 этап. Введем линейную плотность  $\tau$  заряда, как заряд, приходящийся на единицу длины нити

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \quad (3.17)$$

где  $dq$  – заряд, находящийся на элементе  $dl$  длины нити.

Если нить заряжена равномерно, то линейная плотность заряда во всех ее точках одинакова и вычисляется как

$$\tau = \frac{q}{l},$$

где  $q$  – заряд всей нити длиной  $l$ .

Поле равномерно заряженной нити обладает осевой симметрией – линии  $E$  представляют собой прямые, выходящие из нити и лежащие в плоскостях, перпендикулярных к ней (рис. 3.10, а). Причем на одинаковых расстояниях от нити, т.е. на цилиндрических поверхностях, модуль  $E$  будет одинаковым [3].

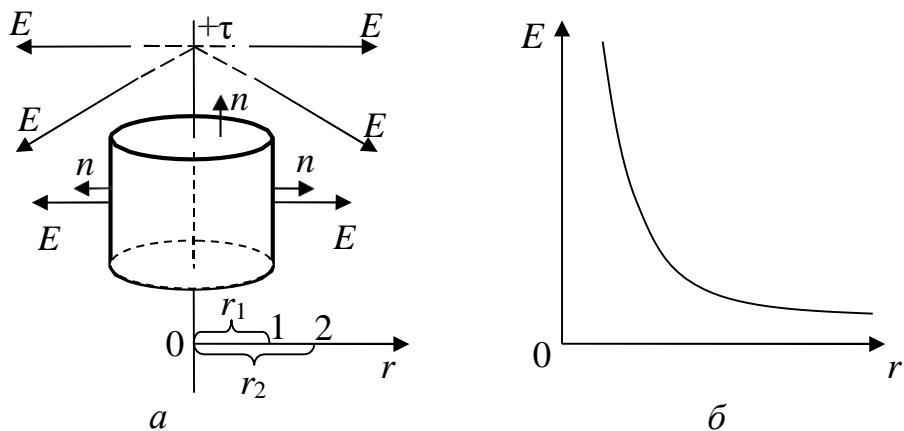


Рис. 3.10

**2 этап.** Замкнутую поверхность, через которую будем рассчитывать поток вектора  $E$ , выберем в виде цилиндра высотой  $H$  и радиусом  $r$ , ось которого совпадает с нитью.

**3 этап.** Так как линии напряженности параллельны основаниям и пересекают только боковую поверхность цилиндра, то поток  $\Phi_E$  через основания цилиндра равен нулю. Поэтому поток вектора  $E$  сквозь выбранный цилиндр равен потоку только через его боковую поверхность

$$\Phi_E = \int\limits_S EdS \cos\alpha = \int\limits_{S_{бок}} EdS \cos\alpha = ES_{бок} = E2\pi rH .$$

**4 этап.** Внутрь цилиндра попадает заряд, находящийся на отрезке нити длиной  $H$

$$q_\Sigma = \int dq = \int \tau dl = \tau H .$$

**5 этап.** Чтобы рассчитать напряженность поля нити, используем теорему Гаусса (3.13):

$$E2\pi rH = \frac{\tau H}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} . \quad (3.18)$$

На рис. 3.10, б приведен график зависимости  $E(r)$  – напряженности поля нити от расстояния  $r$  от нее.

**Пример 3. Поле равномерно заряженной (зарядом  $q$ ) по поверхности сферы радиусом  $R$ .**

*1 этап.* Поле такой сферы обладает сферической симметрией – линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые, выходящие из центра положительно заряженной сферы заряда  $q$  (рис. 3.11, а). Причем на одинаковом расстоянии от центра сферы, т.е. на сферических поверхностях, модуль  $E$  будет одинаковым [3].

*2 этап.* В качестве замкнутой поверхности, через которую будем рассчитывать поток вектора  $E$ , выберем сферическую поверхность радиусом  $r > R$ .

*3 этап.* Поток вектора напряженности через выбранную сферическую поверхность радиуса  $r$  равен

$$r > R : \quad \Phi_e = \oint_s E dS \cos \alpha = E \oint_s dS = E 4\pi r^2.$$

*4 этап.* Внутрь выбранной поверхности попадает весь заряд сферы радиуса  $R$

$$q_{\Sigma} = q .$$

*5 этап.* По теореме Гаусса рассчитаем напряженность поля сферы

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}, \quad E = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} .$$

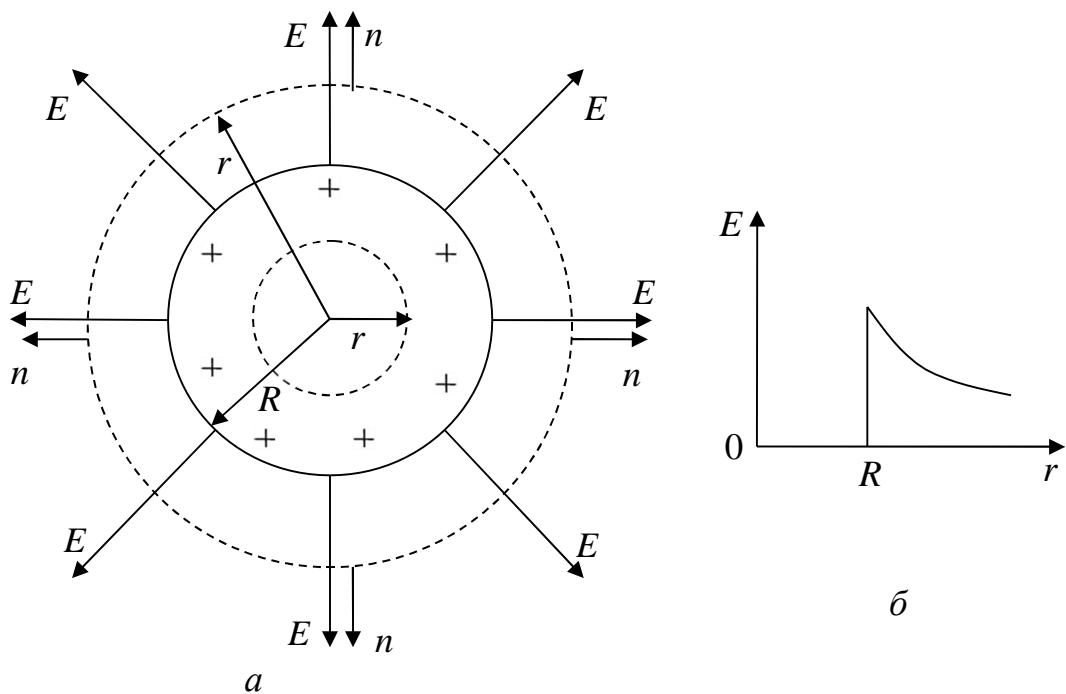


Рис. 3.11

Аналогичный расчет для расстояний  $r < R$  приводит к тому, что внутри сферы электрического поля нет, т.к. в этом случае внутрь вспомогательной поверхности, имеющей радиус  $r$ , заряд  $q$  сферы не попадает ( $q_{\Sigma} = 0, E = 0$ ) [3].

Из записанных выше формул для вектора  $\vec{E}$  следует, что внутри сферы поле отсутствует, а за ее пределами оно совпадает с полем точечного заряда  $q$ , помещенного в центр сферы [3]:

$$r < R : \quad E = 0, \quad r \geq R : \quad E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.19)$$

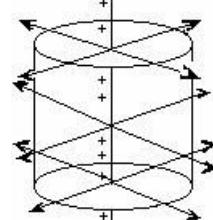
где введена поверхностная плотность заряда  $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2}$ .

На рис. 3.11, б приведен график зависимости  $E(r)$  – напряженности поля равномерно заряженной по поверхности сферы от расстояния  $r$  от ее центра.

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 10**

1. Поток вектора напряженности  $\Phi_E$ , создаваемого бесконечно протяженной заряженной нитью, через боковую поверхность  $S$  цилиндра равен

1)  $\Phi_E = 0$       2)  $\Phi_E = ES \cos 90^\circ$



3)  $\Phi_E = ES \cos 0^\circ$       4)  $\Phi_E = ES \cos 180^\circ$

2. Точечный заряд  $-6q$  находится внутри замкнутой полой поверхности. Если внутри этой поверхности добавить заряд  $-q$ , а снаружи  $+q$ , то поток вектора напряженности электростатического поля через данную замкнутую поверхность

1) уменьшится      2) увеличится      3) не изменится

3. Точечный заряд  $+q$  находится в центре сферической поверхности. Если увеличить радиус сферической поверхности, то поток вектора напряженности электрического поля через поверхность сферы

1) уменьшится      2) увеличится      3) не изменится

4. Полая металлическая сфера радиусом  $R$  заряжена положительным зарядом  $q$ . Величина напряженности электрического поля  $E$  на расстоянии  $R/3$  от центра сферы равна

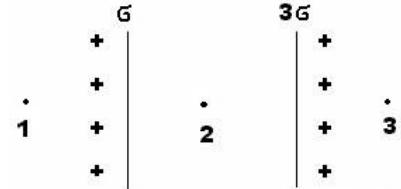
$$1) E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad 2) E = \frac{9q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad 3) E = 0 \quad 4) E = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

5. Верные соотношения для величины

напряженности поля, созданного

заряженными плоскостями, в точках

1, 2, 3:



$$1) E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} \quad 2) E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$$

$$3) E_3 = \frac{3\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} \quad 4) E_1 = E_3 = \frac{2\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$$

## ЛЕКЦИЯ 11

### 3.1.7. Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов.

#### **Потенциальный характер электростатического поля**

Взаимодействие между неподвижными зарядами осуществляется посредством электростатического поля: *взаимодействуют не заряды, а один заряд в месте своего расположения взаимодействует с полем, созданным другим зарядом*. В этом заключается **идея близкодействия** – идея передачи взаимодействий через материальную среду, через поле [3].

Докажем, потенциальность электростатического поля. Для этого рассчитаем работу кулоновской силы при перемещении точечного положительного заряда  $q_2$  из точки 1 в точку 2 (рис. 3.1, б) в электростатическом поле, созданном положительным точечным зарядом  $q_1$  [3],

$$A_{12} = \int_1^2 F_k ds = \int_1^2 F_k dl \cos\alpha = \int_1^2 F_k dr =$$

$$= \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} - \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} = W_{p1} - W_{p2}. \quad (3.20)$$

Из формулы (3.20) видно, что работа кулоновской силы определяется величинами, зависящими только от начального и конечного положения заряда  $q_2$ . Таким образом, работа, совершаемая кулоновской силой (силами электростатического поля) не зависит от пути перехода из точки 1 в точку 2. Следовательно, кулоновская сила является консервативной, а электростатическое поле, в котором она действует – *потенциальным*. Находясь в таком поле, заряд обладает потенциальной энергией  $W_p$ . Она представляет собой потенциальную энергию точечного заряда  $q_2$  в электрическом поле заряда  $q_1$  или потенциальную энергию заряда  $q_1$  в электрическом поле заряда  $q_2$ , или взаимную потенциальную энергию двух взаимодействующих точечных зарядов [3].

С учетом формулы (3.20) для потенциальной энергии  $W_p$  взаимодействия двух точечных зарядов можно записать выражение:

$$W_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + \text{const}. \quad (3.21)$$

Как следует из формулы (3.21), потенциальная энергия определяется не однозначно, а с точностью до некоторой постоянной величины. Выбор этой постоянной величины осуществляется наиболее удобным для решения задач способом. В частности, для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов принято выбирать константу так, чтобы на бесконечно большом расстоянии между ними, потенциальная энергия их взаимодействия обращалась в ноль ( $r \rightarrow \infty, W_p = 0$ ). Следовательно, для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов получаем выражение

$$W_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (3.22)$$

### **3.1.8. Потенциал $\phi$ электростатического поля. Потенциал $\phi$ электростатического поля точечного заряда**

Известно, что точечный заряд  $q$ , который помещен в электростатическое поле, обладает в этом поле потенциальной энергией  $W_p$ . Для расчета потенциальной энергии взаимодействия заряда с полем вводят потенциал  $\phi$ .

Потенциал  $\phi$  электростатического поля – *скалярная физическая величина, которая характеризует энергетические свойства электрического поля и равна отношению потенциальной энергии пробного заряда  $q_0$ , помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда.*

$$\phi = \frac{W_p}{q_0} \quad (3.23)$$

Если в каждой точке поля известен его потенциал, то потенциальную энергию внесенного в электрическое поле заряда можно рассчитать по формуле

$$W_p = q\phi. \quad (3.24)$$

Рассмотрим точечный заряд  $q$ , который создает электрическое поле, поместим точечный заряд  $q_0$  в это поле. Из выражений (3.22), (3.23) запишем

$$W_p = q_0\phi = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \quad \square$$

Таким образом, потенциал  $\phi$  поля точечного определяется как

$$\Phi_{m.z.} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (3.25)$$

Из (3.25) видно, что при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\phi \rightarrow 0$ , т. е. нулевой уровень потенциала  $\phi$  электростатического поля точечного заряда выбирается на бесконечно большом расстоянии от него.

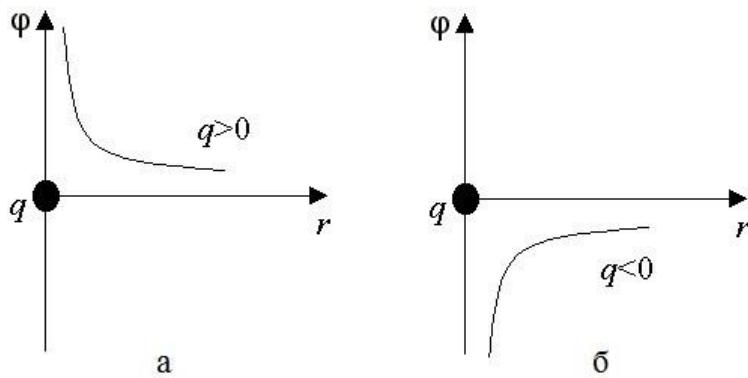


Рис. 3.12

### 3.1.9. Принцип суперпозиции для потенциала. Потенциал электрического поля на оси равномерно заряженного кольца

Для потенциала  $\phi$  поля, созданного системой зарядов или макроскопическим заряженным телом, также справедлив *принцип суперпозиции*: потенциал  $\phi$  электрического поля, созданного несколькими зарядами, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных каждым зарядом по отдельности [3].

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots \quad (3.26)$$

Для того, чтобы определить потенциал макроскопического заряженного тела в какой-либо точке  $A$  (рис. 3.3, а), это тело разбивают на бесконечно малые объемы, при этом их можно рассматривать как точечные заряды  $dq$ . Затем по формуле (3.25) находят потенциалы  $d\phi$  от этих зарядов в т.  $A$  и проводят суммирование всех  $d\phi$ , т.е. берут интеграл по объему  $V$  тела

$$\Phi_A = \int_V d\phi, \quad \text{где} \quad d\phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad (3.27)$$

Потенциальная энергия взаимодействия зарядов может быть определена также с помощью принципа суперпозиции. Например, для потенциальной энергии системы точечных зарядов  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) запишем

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (3.28)$$

где  $\varphi_i$  – потенциал электрического поля, который создан всеми зарядами, кроме  $i$ -го, в месте расположения  $i$ -го заряда; множитель  $(1/2)$  обусловлен тем, что взаимодействие любой пары зарядов в сумме учитывается дважды.

В качестве примера использования формулы (3.27) рассчитаем *потенциал электростатического поля на оси равномерно заряженного кольца*. Определим потенциал  $\varphi$  электрического поля рассматриваемого кольца в точке А, которая расположена на оси кольца на расстоянии  $l$  от его центра (рис. 3.3, б). Разобьем кольцо на бесконечно малые участки – точечные заряды  $dq$  и воспользуемся выражением (3.27) для расчета  $\varphi_A$

$$\varphi_A = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0 \sqrt{R^2 + l^2}}. \quad (3.29)$$

Проанализируем (3.29). При  $l = 0$  (в центре кольца) потенциал равен

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (3.30)$$

При  $l \gg R$  ( $l$  значительно превышает радиус  $R$  кольца), кольцо можно считать материальной точкой, следовательно, потенциал электрического поля кольца определяется как потенциал поля точечного заряда

$$l \gg R: \quad \varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l}.$$

### **3.1.10. Работа сил электрического поля. Разность потенциалов.**

#### **Формула связи вектора $E$ и потенциала $\varphi$**

Определим работу сил электростатического поля по перемещению точного заряда из точки 1 в точку 2, используя выражения (3.6), (3.20):

$$A_{12} = q \int_1^2 E dl \cos\alpha, \quad \alpha = \langle \vec{E}, d\vec{S} \rangle; \quad (3.31)$$

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.32)$$

где  $dS$  – вектор элементарного перемещения,  $dl$  – модуль вектора элементарного перемещения (элементарный путь).

В формуле (3.32) введена величина  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  – разность потенциалов, которая характеризует работу сил электростатического поля по перемещению заряда из одной точки поля в другую и равна отношению этой работы к величине переносимого заряда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q}. \quad (3.33)$$

Формулы (3.31), (3.32) позволяют получить интегральное выражение, связывающее напряженность поля с разностью потенциалов между двумя точками:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 Edl \cos \alpha. \quad (3.34)$$

Связь  $E$  и  $\varphi$ , справедливую для малой окрестности какой-либо точки поля в дифференциальном виде, получим из выражений для элементарной работы:

$$dA = qEdl \cos \alpha = qE_l dl = -qd\varphi \quad ; \\ E_l = -\frac{d\varphi}{dl}, \quad (3.35)$$

где  $E_l$  – проекция вектора  $E$  на направление  $l$  в пространстве.

В векторном виде формулу связи  $E$  и  $\varphi$  можно получить из выведенного в механике соотношения между консервативной силой и потенциальной энергией:

$$F_k = qE = -\text{grad}W_p = -\text{grad}(q\varphi); \\ E = -\text{grad}\varphi. \quad (3.36)$$

Итак, в каждой точке поля вектор  $\vec{E}$  равен по модулю и противоположен по направлению вектору градиента потенциала, т.е. вектор  $\vec{E}$  в каждой точке указывает направление наиболее быстрого убывания потенциала (рис. 3.4, а) [3].

### 3.1.11. Примеры вычисления разности потенциалов

Применим формулу (3.34) к расчету разности потенциалов между двумя точками в случае различных полей.

1) поле создано бесконечно протяженной заряженной плоскостью.

Используя формулы (3.34) и (3.15) находим разность потенциалов между двумя точками поля, находящимися на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от плоскости (рис. 3.8,а).

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 Edl \cos\alpha = E \int_{r_2}^{r_1} \frac{|\sigma|}{2ss_0} dr = \frac{|\sigma|}{2ss_0} (r_2 - r_1), \quad (3.37)$$

где знак «-» берется для отрицательно заряженной плоскости, знак «+» выбирается для положительно заряженной плоскости;

2) поле создано конденсатором. С учетом формул (3.34) и (3.16), разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  (напряжение  $U$ ) между обкладками конденсатора, равна

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 Edl \cos\alpha = Ed = \frac{|\sigma|}{ss_0} d = \frac{q}{Ss_0} d, \quad (3.38)$$

где  $d$  – расстояние между обкладками конденсатора,  $S$  – их площадь;

3) поле создано равномерно заряженной бесконечно длинной прямолинейной нитью. Используя формулы (3.34) и (3.18), находим разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстоянии  $r_1$  и  $r_2$  от нити (рис. 3.10, а)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 Edl \cos\alpha = [dl = dr, \alpha = 0] = \frac{\tau}{2\pi ss_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2 dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi ss_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.39)$$

4) Поле создано равномерно заряженной по поверхности сферой радиусом  $R$  и заряда  $q$  (рис. 3.11, а). Используя формулы (3.19) и (3.34), получаем, что при  $r < R$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 Edl \cos\alpha = 0, \text{ т.к. } E = 0 \quad \text{при } r < R : \quad \varphi = \text{const}; \quad (3.40)$$

при  $r \geq R$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 Edl \cos\alpha = \left[ dl = dr, \alpha = 0 \right] = \frac{q}{4\pi s_0} \int_0^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi s_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_0^1 - \frac{q}{4\pi s_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_0^2. \quad (3.41)$$

Из формул (3.40) и (3.41) следует, что внутри сферы потенциал постоянен, а за ее пределами он совпадает с потенциалом точечного заряда  $q$ , помещенного в центр сферы (см. формулу (3.25)). На поверхности сферы потенциал вычисляется по формуле

$$\varphi_{\text{пов}} = \frac{q}{4\pi s_0 R}, \quad (3.42)$$

На рис. 3.13 приведена зависимость потенциала  $\varphi$  от расстояния  $r$  от центра сферы для случая, когда сфера находится в вакууме или в воздухе ( $s=1$ ).

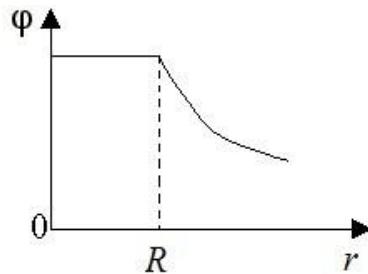


Рис. 3.13

### 3.1.12. Эквипотенциальные поверхности.

Электростатические поля можно изображать графически не только с помощью линий напряженности, но и эквипотенциальных поверхностей. *Эквипотенциальная поверхность* – это поверхность равного потенциала (т.е. в каждой точке эквипотенциальной поверхности потенциал  $\varphi$  будет одинаковым), поэтому элементарная работа по перемещению заряда по такой поверхности будет равна нулю:  $dA = -qd\varphi = 0$ . Следовательно, вектор  $E$  в каждой точке поверхности будет перпендикулярен к ней, т.е. будет направлен по вектору нормали  $n$  (рис. 3.4, е). Действительно, если бы это было не так, то тогда существовала бы составляющая вектора напряженности  $E_t$ , направленная по касательной к поверхности, и, тогда, потенциал в разных точках поверхности

был бы разным ( $E_\tau = -\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$  при  $\varphi \neq \text{const}$ ), что противоречит определению эквипотенциальной поверхности [3].

На рис. 3.4 приведено графическое изображение электростатических полей с помощью эквипотенциальных поверхностей (пунктирные линии). В случае если поле создано точечным зарядом, эквипотенциальные поверхности представляют собой сферы, в центре которых находится точечный заряд – источник поля (рис. 3.4, б, в). Вид эквипотенциальных поверхностей поля, созданного одновременно отрицательным и положительным зарядами, приведен на рис. 3.4, г. В случае однородного электрического поля (рис. 3.4, д), эквипотенциальные поверхности – это плоскости, перпендикулярные к линиям  $\vec{E}$ .

Условились проводить эквипотенциальные поверхности так, чтобы разность потенциалов между соседними поверхностями была одинаковой. Это позволяет наглядно видеть изменение потенциальной энергии заряда при его движении в электрическом поле [3].

Тот факт, что вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности в каждой ее точке, позволяет достаточно просто переходить от графического изображения электрического поля с помощью линий  $\vec{E}$  к эквипотенциальным поверхностям, и наоборот. Так, проведя на рис. 3.4, б, в, г, д пунктирные линии, перпендикулярные к линиям  $\vec{E}$ , можно получить графическое изображение поля с помощью эквипотенциальных поверхностей в плоскости рисунка [3].

### **3.1.13. Циркуляция вектора $E$ электростатического поля. Теорема о циркуляции вектора $E$ электростатического поля.**

Возьмем произвольный контур ( $\Gamma$ ) в неоднородном электростатическом поле (рис. 3.5, б). **Циркуляцией вектора  $\vec{E}$**  по произвольному контуру ( $\Gamma$ ) называют интеграл вида:

$$\oint_{\Gamma} \frac{E dl}{dl} = \oint_{\Gamma} E dl \cos \alpha, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ E, dl \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

где  $dl$  – вектор, модуль которого равен элементарной длине  $dl$  контура  $(\Gamma)$ , а его направление совпадает с направлением обхода контура  $(\Gamma)$  (рис. 3.5, б).

Согласно формуле (3.31) циркуляция вектора  $E$  электростатического поля по произвольному замкнутому контуру  $(\Gamma)$  равна отношению работы  $A_{\text{круг}}$  сил поля по перемещению точечного заряда  $q$  по этому контуру к величине заряда и, в соответствии с формулой (3.32), будет равна нулю [3].

$$= A_{\text{круг}} = \varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}} = 0. \quad (3.44)$$

$$\oint_{(\Gamma)} \frac{E dl}{dl} = \frac{q}{q} \quad \text{нач} \quad \text{кон}$$

Равенство нулю циркуляции вектора  $E$  по произвольному замкнутому контуру  $(\Gamma)$  свидетельствует о *потенциальном* характере электростатического поля.

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 11**

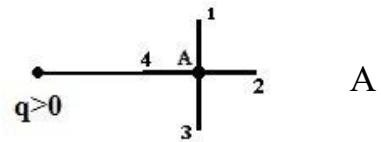
1. Два шарика с зарядами  $q_1 = +q$  и  $q_2 = -q$  находятся на расстоянии  $r$  друг от друга. Потенциал поля, созданный этими зарядами в точке, находящейся посередине между ними равен ...

$$1) \varphi = 0 \quad 2) \varphi = \frac{q}{4\pi s_0 r} \quad 3) \varphi = \frac{q}{2\pi s_0 r} \quad 4) \varphi = \frac{q}{\pi s_0 r}$$

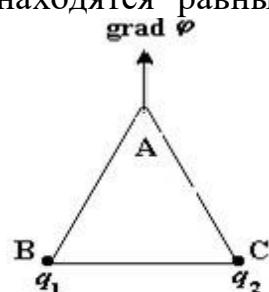
2. Поле создано точечным положительным зарядом  $q$ .

Направление вектора градиента потенциала в точке

- 1) А – 3    2) А – 1  
3) А – 4    4) А – 2



3. В вершинах  $B$  и  $C$  равностороннего треугольника находятся равные по модулю точечные заряды. Вектор, проведенный из точки  $A$ , совпадает с направлением градиента потенциала электростатического поля зарядов в этой точке. Знаки зарядов соответствуют выражению



- 1)  $q_1 > 0, q_2 < 0$       2)  $q_1 < 0, q_2 < 0$   
 3)  $q_1 > 0, q_2 > 0$       4)  $q_1 < 0, q_2 > 0$
4. Электрон под действием сил электрического поля перемещается из одной точки поля в другую. При уменьшении разности потенциалов между этими точками в 2 раза абсолютная величина работы электрического поля по перемещению электрона
- 1) уменьшится в 4 раза      2) уменьшится в 2 раза  
 3) увеличится в 2 раза      4) не изменится
5. Работа сил электростатического поля по перемещению электрического заряда  $q < 0$  из точки 1 в точку 2 по эквипотенциальной поверхности...
- 1)  $A > 0$       2)  $A < 0$       3)  $A = \emptyset$       4)  $A = 0$

## ЛЕКЦИЯ 12

### *3.1.14. Распределение избыточного заряда на проводниках в состоянии равновесия*

Проводники – вещества, проводящие электрический ток. В любом проводнике есть свободные заряды, способные упорядоченно перемещаться по нему под действием внешнего электрического поля. В металлических проводниках свободными зарядами являются электроны.

Если проводнику сообщить избыточный заряд, то в *условии равновесия избыточного заряда* (избыточный заряд неподвижен) справедливы следующие утверждения:

1. *Электрическое поле внутри проводника отсутствует, а объем проводника и его поверхность являются эквипотенциальными:*

$$E_{\text{вн}} = 0, \quad \varphi_{\text{вн}} = \text{const}. \quad (3.45)$$

Действительно, если равенства (3.45) не выполняются, то работа сил электрического поля не будет равна нулю ( $dA = qEdl \cos \alpha = -qd\varphi \neq 0$ ), следовательно, свободные заряды в проводнике должны перемещаться, что противоречит условию равновесия избыточного заряда.

2. Избыточный заряд распределяется только по внешней поверхности проводника.

Докажем это утверждение с помощью теоремы Гаусса. Выберем внутри проводника произвольную замкнутую поверхность (рис. 3.14, а) и рассчитаем через нее поток вектора  $\vec{E}$ . С учетом формулы (3.13) имеем:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cos \alpha = \int_S E = 0 = q_{\Sigma} - q = 0,$$

$\oint_S$        $E$        $dS \cos \alpha$        $q_{\Sigma}$        $- q$

т.е. внутри такой поверхности избыточного заряда нет, так как этот заряд одного знака. Таким образом, избыточный заряд располагается только на внешней поверхности проводника.

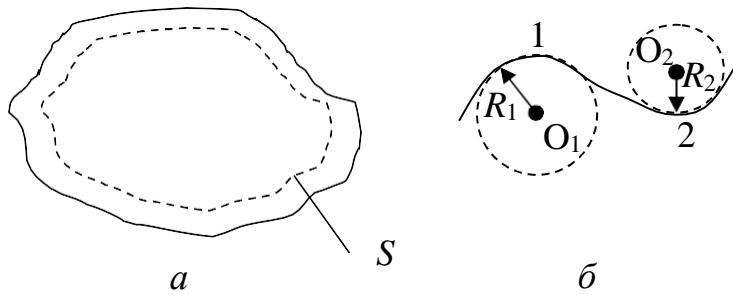


Рис. 3.14

3. Распределение избыточного заряда по внешней поверхности проводника является неравномерным: модуль вектора  $\vec{E}$  и поверхностная плотность заряда  $\sigma$  больше в тех точках поверхности проводника, где радиус кривизны поверхности меньше (а сама кривизна – больше).

Докажем третье утверждение. Если учесть, что поверхность проводника можно представить в виде совокупности разных участков вписанных в нее сфер (рис. 3.14, б) и использовать формулы (3.19) и (3.42) для напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  на поверхности сферы, то тогда можно записать [3]:

$$\varphi_{\text{поверх}} = \varphi_{\text{сф1}} = \varphi_{\text{сф2}} : \frac{\sigma_1 R_1}{SS_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{SS_0} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (3.46, \text{а})$$

$$E_{\text{поверх}} = E_{\text{сф}} = \frac{\varphi_{\text{сф}}}{R} = \frac{\sigma}{SS_0}. \quad (3.46, \text{б})$$

Согласно формуле (3.46б), модуль вектора  $\vec{E}$  вблизи какой-либо точки поверхности заряженного проводника пропорционален поверхностной плотности заряда  $\sigma$  в этой точке [3].

На рис. 3.15, а приведено графическое изображение электрического поля заряженного проводника произвольной формы. При изображении линий напряженности учтено, что т.к. поверхность проводника является эквипотенциальной, то силовые линии во всех точках должны быть перпендикулярны к поверхности металла.

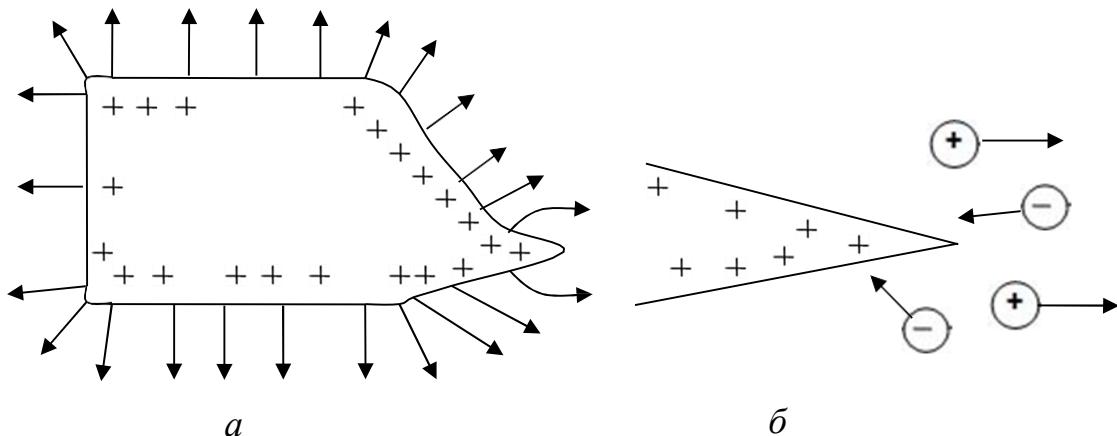


Рис. 3.15

Вблизи острия модуль вектора  $E$  может превысить значение, соответствующее ионизации молекул воздуха (при атмосферном давлении  $E_{\text{иониз}} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ ), что приводит к возникновению явления стекания зарядов, сопровождающегося электрическим ветром [3].

Образующиеся при ионизации молекул электроны движутся к острию и компенсируют на нем часть заряда, равновесие зарядов на проводнике нарушается, и к острию подходят заряды с других участков поверхности проводника (рис. 3.15, б). Это движение продолжается до тех пор, пока модуль напряженности электрического поля вблизи острия будет превышать  $E_{\text{иониз}}$ . В то же время положительно заряженные ионы молекул воздуха движутся в противоположном направлении, от острия, при этом они увлекают за собой нейтральные молекулы, создавая движение воздуха – электрический ветер [3].

### 3.1.15. Незаряженный проводник во внешнем электрическом поле

Рассмотрим незаряженный проводник, помещенный во внешнее электрическое поле напряженности  $E_0$ . Рис. 3.16, а соответствует начальному моменту времени, когда проводник только поместили во внешнее поле  $E_0$ .

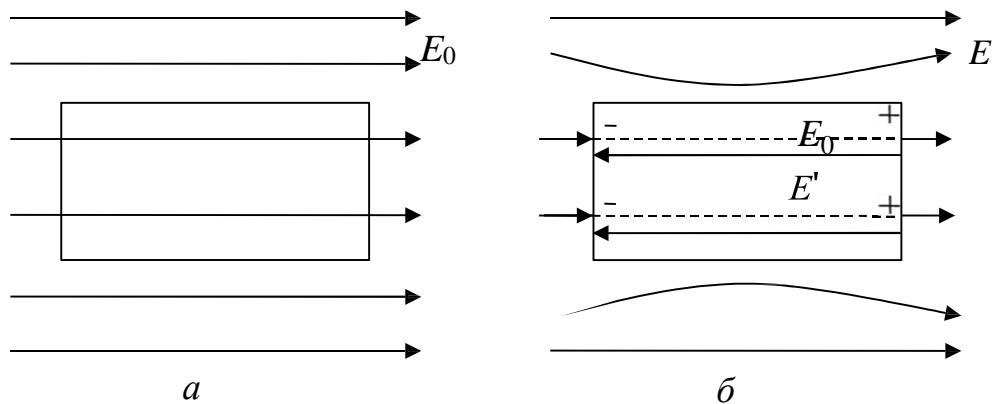


Рис. 3.16

Под действием сил внешнего поля  $E_0$  свободные электроны в проводнике начинают перемещаться, вследствие чего на его противоположных сторонах появляются индуцированные заряды (явление электростатической индукции). Индуцированные заряды создают свое поле  $E'$ , направленное противоположно внешнему  $E_0$ . Перемещение будет происходить до тех пор, пока индуцированное поле  $E'$  не скомпенсирует внешнее поле  $E_0$  внутри проводника ( $E_{\text{внутри}} = E' + E_0 = 0$ ,  $\varphi_{\text{внутри}} = \text{const}$ ). Индуцированные заряды искажают внешнее поле снаружи, вблизи поверхности проводника (рис. 3.16, б).

То, что *внешнее электрическое поле не проникает внутрь металла*, позволяет использовать металлическую оболочку (сплошную или в виде сетки), для защиты различных приборов от воздействия внешних электрических полей (приборы при этом помещаются внутрь металлической оболочки).

### **3.1.14. Электроемкость уединенного проводника. Электроемкость конденсатора**

Уединенный проводник – это проводник, расположенный вдали от других заряженных тел или проводников так, что они не оказывают на этот проводник никакого влияния. Из экспериментальных данных известно, что заряд  $q$  проводника пропорционален его потенциалу ( $q \propto \varphi$ ). Коэффициент пропорциональности  $C$  между ними называется электроемкостью проводника

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (3.47)$$

не будет зависеть ни от  $q$  и ни от  $\varphi$ . Электроемкость проводника характеризует его способность накапливать заряд и зависит только от геометрических размеров и формы проводника, а также от диэлектрических свойств окружающей среды (от  $\epsilon$ ). Ни от заряда, ни от потенциала проводника электроемкость не зависит.

Запишем формулу для электроемкости уединенного проводника сферической формы. Учитывая формулы (3.47) и (3.42), для электроемкости сферы можно записать

$$C_{\text{сф}} = \frac{q}{\varphi_{\text{сф}}} = \frac{q}{q/4\pi\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (3.48)$$

Электроемкость уединенного проводника является малой величиной. Так, например, если рассматривать планету Земля, как проводящий шар радиусом  $R = 6400$  км, то тогда ее электроемкость составит всего 711 мкФ [3].

Наличие вблизи уединенного проводника каких-либо тел **увеличивает** его электроемкость. Докажем это.

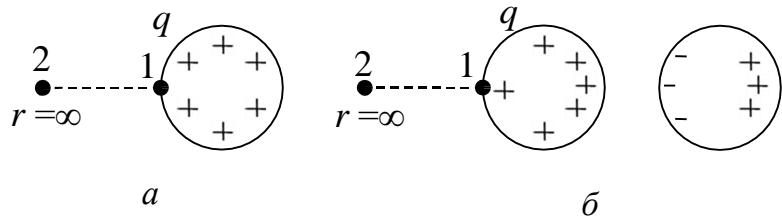


Рис. 3.17

Действительно, если, например, к положительно заряженному проводнику (рис. 3.17, а) поднести незаряженный металлический проводник, то за счет перераспределения заряда на проводниках (рис. 3.17, б) электрическое поле в пространстве ослабевает, т.е. на линии 1-2 модуль вектора  $E$  будет уменьшаться и поэтому потенциал поверхности заряженного проводника

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 = \frac{2}{1} Edl \cos\alpha$$

будет также уменьшаться, что при постоянном заряде проводника приводит к увеличению его электроемкости:  $q = \text{const}$ ,  $\varphi \rightarrow 0 \Rightarrow C = q / \varphi$  [3].

Наибольший эффект увеличения электроемкости проводника достигается для конденсаторов, представляющих собой две металлические пластины (обкладки), разделенные слоем диэлектрика. Обкладки заряжены одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами. Форма обкладок конденсатора такова, что электрическое поле существует только в пространстве между ними. Это позволяет устранить влияние на электроемкость конденсатора окружающих его тел [3].

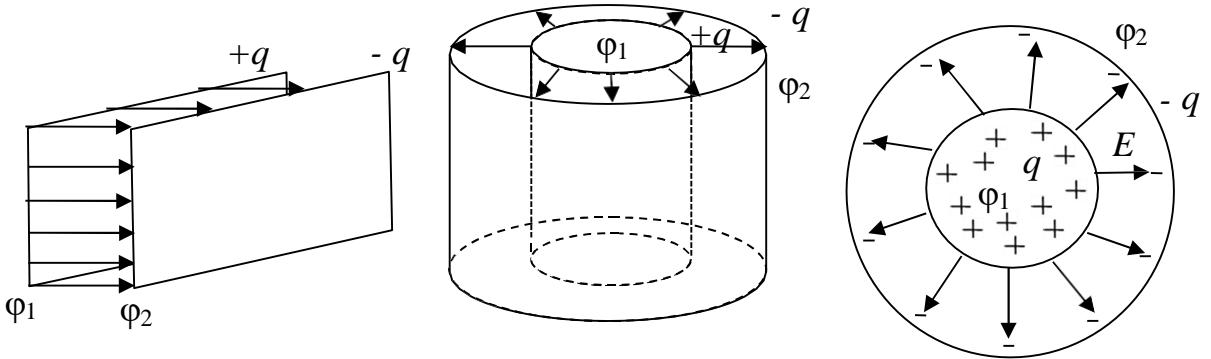


Рис. 3.18

По форме обкладок конденсаторы делятся на плоские, сферические и цилиндрические. Их схематическое изображение приведено на рис. 3.18.

Электроемкость конденсатора вводится согласно формуле

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (3.49)$$

где  $q$  – заряд одной из обкладок конденсатора, взятый по модулю,  $(\varphi_1 - \varphi_2) = U$  – разность потенциалов (напряжение) между его обкладками.

Электроемкость конденсатора, зависит только от его геометрических размеров, формы обкладок и диэлектрической проницаемости  $s$  среды между его пластинами.

Выведем формулу для *электроемкости плоского конденсатора*. Используя полученную в п. 3.1.11 формулу (3.38) для разности потенциалов на обкладках плоского конденсатора, получим

$$C_{\text{пл}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{qd / (ss_0S)} = \frac{ss_0S}{d}, \quad (3.50)$$

где  $S$  – площадь одной обкладки конденсатора,  $d$  – расстояние между ними,  $s$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды между обкладками конденсатора.

Найдем емкость *сферического конденсатора* (радиус внутренней обкладки, которого равен  $r_1$ , внешней –  $r_2$ , а пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ ). Электрическое поле в сферическом конденсаторе создается только его внутренней обкладкой

(согласно теореме Гаусса). Для определения электроемкости воспользуемся формулами (3.41) и (3.49):

$$C_{\text{c}\phi} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi s_0 r_1} - \frac{q}{4\pi s_0 r_2}} = \frac{4\pi s_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Определим емкость цилиндрического конденсатора (радиус внутренней обкладки конденсатора равен  $r_1$ , внешней –  $r_2$ , а пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ ). По теореме Гаусса электрическое поле в цилиндрическом конденсаторе создается только его внутренней обкладкой и совпадает с полем (3.18), созданным заряженной нитью. Для определения электроемкости воспользуемся формулой разности потенциалов для поля нити (3.39) и определением емкости (3.49):

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi s_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi s_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

### **3.1.15. Энергия заряженного проводника и конденсатора. Энергия и объемная плотность энергии электростатического поля**

Выведем формулу для энергии  $W$  заряженного проводника. Для этого рассмотрим работу внешних сил по увеличению заряда проводника от  $q_1 = 0$  (энергия проводника  $W_1 = 0$ , если потенциал  $\varphi_1 = 0$ ) до  $q_2$  (энергия  $W_2$ , потенциал  $\varphi_2$ ), а именно будем малыми порциями  $dq$  перемещать заряд из бесконечности ( $\varphi_\infty = 0$ ) на поверхность проводника (рис. 3.17, а). При этом работа  $A_{\text{вн}}$  внешней силы будет совершаться против кулоновской силы отталкивания одноименных зарядов и поэтому [3]

$$A_{\text{вн}} = W_2 - W_1 = -A_{\text{кул}} = - \int_0^{q_2} dA_{\text{кул}} = - \int_0^{q_2} (\varphi_\infty - \varphi) dq = \int_0^{q_2} \frac{q}{C} dq = \frac{q_2^2}{2C},$$

где учтено, что  $W_1 = 0$ .

Таким образом, энергию заряженного уединенного проводника с учетом формулы (3.47) можно записать в виде

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (3.51)$$

Выведем формулу для энергии  $W$  заряженного конденсатора. Запишем работу внешних сил по перемещению малых порций заряда  $dq$  с одной пластины конденсатора на другую из состояния 1 (конденсатор не заряжен, заряд пластин  $q=0$ , энергия конденсатора  $W_1=0$ ) до состояния 2 (энергия  $W_2$ , заряд положительной обкладки  $q_2 = q$ ) [3].

$$A_{\text{вн}} = W_2 - W_1 = -A_{\text{кул}} = -q_2 dA_{\text{кул}} = -q_2 (\varphi_1 - \varphi_2) dq = - \int_0^{q_2} \left( -\frac{q}{C} \right) dq = \frac{q^2}{2C},$$

где учтено, что  $W_1 = 0$  и  $(\varphi_1 - \varphi_2) < 0$ , так как заряд перемещается от отрицательно заряженной обкладки, где находится точка 1, к положительно заряженной обкладке, на которой находится точка 2.

Таким образом, с учетом формулы (3.49) энергия заряженного конденсатора запишется следующим образом:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}. \quad (3.52)$$

Оставаясь в рамках электростатики, нельзя однозначно ответить на вопрос о происхождении энергии заряженного проводника (конденсатора) – или это энергия его зарядов, или энергия электростатического поля в окружающем проводник пространстве. И только из рассмотрения полной системы уравнения Максвелла был сделан вывод в пользу электростатического поля [3].

Запишем формулу (3.52) для энергии конденсатора через характеристику электростатического поля – вектор напряженности  $E$ . Тогда энергия заряженного плоского конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{ss_0S}{2d} (Ed)^2 = \frac{ss_0E^2}{2} V = wV,$$

где  $V = Sd$  – объем пространства между обкладками конденсатора, т.е. объем занимаемый электростатическим полем, а  $w$  – *объемная плотность энергии* электростатического поля.

*Объемная плотность энергии* электростатического поля – скалярная физическая величина, равная энергии электростатического поля, заключенной в единичном объеме.

В случае неоднородного поля объемная плотность энергии определяется следующим образом:

$$w(x, y, z) = \frac{dW}{dV} = \frac{ss_0 E^2(x, y, z)}{2}, \quad (3.53)$$

где  $dW$  – энергия электростатического поля, заключенная в элементарном объеме  $dV$  вблизи точки пространства с координатами  $(x, y, z)$ .

Если известна объемная плотность энергии, то энергия  $W$  поля в любом конечном объеме  $V$  пространства может быть вычислена по формуле

$$W = \iiint_V w dV = \iiint_V \frac{ss_0 E^2(x, y, z)}{2} dx dy dz. \quad (3.54)$$

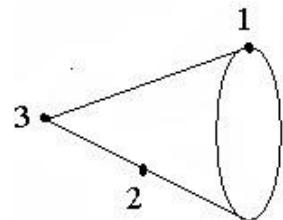
Так, например, применение формулы (3.54) к электростатическому полю заряженной металлической сферы радиусом  $R$  приводит к формуле, совпадающей с выражением (3.51) [3].

$$W = \int_R^{\infty} \frac{ss_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi ss_0 r^2} \right)^2 dr = \left| dV = 4\pi r^2 dr \right| = \frac{q^2}{8\pi ss_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi ss_0 R} = \frac{q\varphi}{2}.$$

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 12**

1. Для величин напряжённости  $E$  электрического поля вблизи поверхности заряженного металлического конуса, в указанных на рисунке точках, верным является соотношение под номером

- 1)  $E_1 = E_2 = E_3$       2)  $E_1 < E_2 < E_3$   
 3)  $E_1 > E_2 > E_3$       4)  $E_1 > E_3 < E_2$



2. Металлический шар имеет отрицательный заряд и создает вокруг себя электрическое поле. Если к шару поднести положительно заряженное тело, то электроемкость шара

- 1) уменьшится      2) увеличится      3) не изменится

3. Электроемкость конденсатора зависит от...
- 1) заряда конденсатора;
  - 2) напряжения на его обкладках;
  - 3) расстояния между его обкладками;
  - 4) диэлектрической проницаемости среды между его обкладками;
  - 5) площади обкладок.
4. После отключения источника постоянного напряжения из плоского конденсатора удалили диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 6$ . Энергия конденсатора при этом
- |                        |                         |
|------------------------|-------------------------|
| 1) уменьшилась в 6 раз | 2) увеличилась в 6 раз  |
| 3) не изменилась       | 4) уменьшилась в 36 раз |
5. Плоский воздушный конденсатор подключен к батарее. Обкладки конденсатора, не отключая от батареи, сближают от  $d_1 = 4,5$  см до  $d_2 = 1,5$  см. Объемная плотность энергии электрического поля внутри конденсатора при этом ....
- |                        |                       |
|------------------------|-----------------------|
| 1) увеличится в 3 раза | 2) увеличится в 9 раз |
| 3) уменьшится в 3 раза | 4) уменьшится в 9 раз |

## ЛЕКЦИЯ 13

### 3.2. Постоянный электрический ток

#### 3.2.1. Сила тока, плотность тока

Электрический ток – направленное движение заряженных частиц. За направление тока принимают направление движения положительно заряженных частиц. Необходимым условием возникновения электрического тока является наличие свободных заряженных частиц и электрического поля. Электрический ток может протекать в различных средах: твердых и жидкких металлах, полупроводниках, электролитах и в газах. В данном разделе ограничимся только рассмотрением электрического тока в металлических

проводниках. Свободными носителями электрического заряда, в этом случае, являются электроны.

Сила тока  $I$  – это скалярная физическая величина, равная заряду, проходящему через поперечное сечение проводника за единицу времени

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (3.55)$$

В случае постоянного тока выражение (3.55) имеет вид

$$I = \frac{q}{t}. \quad (3.56)$$

Вектор плотности тока  $j$  – это векторная физическая величина, характеризующая распределение тока по сечению проводника. Направление вектора  $j$  совпадает с направлением скорости  $v$  упорядоченных положительных зарядов ( $j \uparrow\uparrow v$ ), т.е. совпадает с направлением тока. Модуль вектора  $j$  равен силе электрического тока, протекающего в данной точке внутри проводника через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению тока (рис. 3.19, а).

$$\vec{j} = \frac{|dI|}{dS_{\perp}}, \quad (3.57)$$

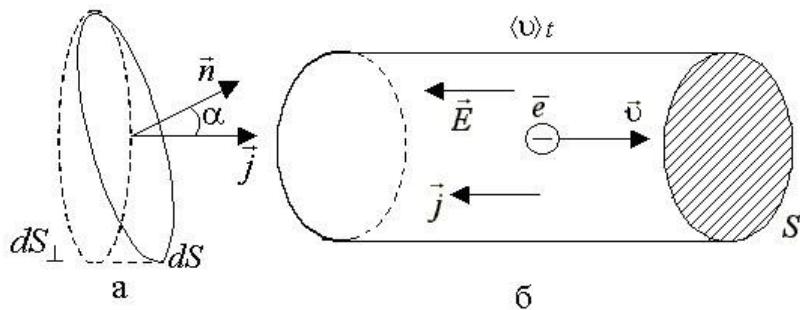


Рис. 3.19

Из (3.57) можно определить силу тока, протекающего через любую поверхность  $S$

$$I = \iint_S j dS = \iint_S j dS \cos\alpha. \quad (3.58)$$

где  $3\alpha = \left(j; dS\right)$ , а  $dS$  по направлению совпадает с вектором нормали  $n$  к элементарной площадке,  $dS_{\perp} = dS \cos\alpha$  (рис. 3.19, а).

Выразим вектор плотности электрического тока  $j$  через характеристики, описывающие движение свободных зарядов в проводнике.

В отсутствие электрического поля свободные электроны участвуют в тепловом движении со средней арифметической скоростью  $\langle u \rangle$ , которая при комнатной температуре приблизительно равна 100 км/с. Однако, поскольку электроны движутся хаотично, тока в проводнике не возникает (через поперечное сечение проводника в обе стороны проходят одинаковое число электронов и поэтому суммарный перенос заряда равен нулю) [3].

При включении электрического поля у свободных электронов появляется еще и скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения под действием сил электрического поля. По модулю скорость направленного движения электронов примерно равна 1 мм/с, что существенно меньше средней скорости теплового движения  $\langle u \rangle$ . Но именно скорость  $\langle v \rangle$  обеспечивает наличие тока в проводнике.

Рассмотрим проводник (рис. 3.19, б), через поперечное сечение площадью  $S$  которого за время  $t$  пройдут электроны, находящиеся в цилиндре высотой  $(v)t$ . Пусть  $n$  – концентрация свободных электронов,  $\langle v \rangle$  – скорость их упорядоченного движения,  $q_0$  – заряд электрона. Тогда с учетом формул (3.56) и (3.57), получим

$$j = \frac{|I|}{S} = \frac{|q|}{St} = \frac{|q_0|N}{St} = \frac{|q_0|nS(v)t}{St} = |q_0|n\langle v \rangle,$$

$$j = |q_0|n\langle \dot{v} \rangle. \quad (3.59)$$

### 3.2.2. Закон Ома для однородного участка цепи. Закон Джоуля – Ленца

Участок электрической цепи, на котором направленное движение зарядов происходит под действием только кулоновских сил называется однородным. Сформулируем закон Ома для однородного участка электрической цепи: *сила*

тока  $I$ , протекающего по однородному участку цепи, прямо пропорциональна напряжению  $U$ , приложенному к этому участку, и обратно пропорциональна сопротивлению  $R$  этого участка цепи

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3.60)$$

Напряжение  $U$  на однородном участке цепи совпадает с разностью потенциалов  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  между начальной и конечной точками участка (см. п. 3.2.3).

Сопротивление  $R$  однородного участка цепи – это скалярная физическая величина, характеризующая свойство проводника препятствовать протеканию по нему электрического тока и равная

$$R = \frac{U}{I}. \quad (3.61)$$

Сопротивление  $R$  однородного участка цепи не зависит ни от  $U$ , ни от  $I$ , но определяется геометрическими размерами проводника, его материалом и температурой [3].

Зависимость силы электрического тока  $I$  от приложенного к нему напряжения (рис. 3.20, а) называется вольт-амперной характеристикой (ВАХ) однородного участка цепи. Эта зависимость представляет собой прямую линию, при этом можно определить электрическое сопротивление участка как  $R = \text{ctg } \beta$  (рис. 3.20, а), где  $\beta$  – угол наклона этой прямой.

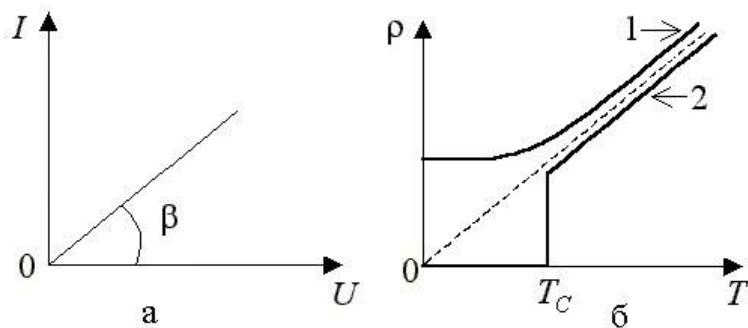


Рис. 3.20

Для проводника цилиндрической формы длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  электросопротивление может быть определено как

$$R = p \frac{l}{S}. \quad (3.62)$$

где  $p = \frac{RS}{l}$  – удельное сопротивление проводника, зависящее только от его материала и температуры, численно равное сопротивлению  $R$  проводника единичной длины и единичной площади поперечного сечения.

Температурная зависимость удельного сопротивления чистых металлических проводников в области комнатных температур определяется как

$$p = p_0(1 + \alpha t), \quad (3.63)$$

где  $p_0$  – удельное сопротивление проводника при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ ;  $p$  – удельное сопротивление при температуре проводника  $t^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления (ТКС) – величина, равная *относительному изменению удельного сопротивления проводника с ростом температуры проводника на  $1^\circ\text{C}$*

$$\alpha = \frac{p - p_0}{p_0 t}. \quad (3.64)$$

Зависимость сопротивления  $R$  металлического проводника также соответствует формуле (3.60), так как размеры проводника ( $l, S$ ) обычно изменяются с температурой значительно слабее, чем удельное сопротивление  $p$  проводника [3]:

$$R = R_0(1 + \alpha t). \quad (3.65)$$

Для чистых металлов ТКС  $\alpha$  является положительной величиной, примерно равной  $(\alpha \approx 1/273)K^{-1}$ . При низких температурах, когда колебания положительных ионов кристаллической решетки не оказывают существенного влияния на движение свободных электронов, удельное сопротивление  $p$  не изменяется с температурой, оставаясь постоянной величиной (рис. 3.20, б, график 1). Для многих металлов при определенной температуре  $T_c$  (ее называют температурой перехода в сверхпроводящее состояние,  $T_c \approx 20\text{ K}$ )

сопротивление  $R$  металла обращается в ноль ( $R = 0$ ), металл при  $T < T_c$  будет находиться в сверхпроводящем состоянии (рис. 3.20, б, график 2) [3].

Определим количество теплоты  $Q$ , которое выделяется в проводнике при протекании по нему электрического тока. Если единственным результатом протекания тока по проводнику является нагрев, то работа сил электрического поля по перемещению заряда в проводнике целиком расходуется на выделение теплоты.

Тогда, выделившееся за малый промежуток времени  $dt$  количество теплоты  $dQ$  можно выразить как

$$dQ = dA = dqU = IUDt = \frac{U^2}{R} dt = I^2 R dt. \quad (3.66)$$

При протекании переменного электрического тока для конечного промежутка времени

$$Q = \int_0^t dQ = \int_0^t I^2 R dt, \quad (3.67)$$

В случае постоянного тока выражение (3.67) принимает вид

$$Q = I^2 Rt. \quad (3.68)$$

Выражение (3.68) является **законом Джоуля – Ленца**: *количество теплоты, выделяемое в проводнике при протекании по нему электрического тока, равно произведению квадрата силы тока на сопротивление проводника и на время протекания по нему тока.*

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 13**

1. По однородному металлическому проводнику постоянного сечения течет ток. Концентрацию свободных электронов в проводнике можно выразить через следующие величины, которые считаются известными:
  - 1)  $I$  – сила тока, текущего по проводнику;
  - 2)  $|e|$  – модуль заряда электрона;
  - 3)  $S$  – площадь поперечного сечения проводника;
  - 4)  $E$  – напряженность электрического поля в проводнике;

- 5)  $\langle \dot{v} \rangle$  – средняя скорость направленного движения носителей тока в проводнике.
2. Однородный участок цепи – это участок
- 1) с одинаковой площадью поперечного сечения
  - 2) на котором на носители электрического заряда одновременно действуют и электрические и сторонние силы
  - 3) на котором на носители заряда действуют только электростатические силы
  - 4) на котором на носители электрического заряда действуют только сторонние силы
3. На рисунке изображен график зависимости падения напряжения  $U$  на двух последовательно соединенных проводниках 1 и 2 одинакового поперечного сечения от их длины  $l$ . Если отношение тангенсов соответствующих углов равно  $\operatorname{tg}\alpha_1 / \operatorname{tg}\alpha_2 = 2$ , то отношение  $p_1/p_2$  удельных сопротивлений этих проводников
- 
- 1) 1
  - 2) 2
  - 3) 4
  - 4) 1/2
4. При укорочении спирали электроплитки в 1,5 раза количество теплоты  $Q$ , выделяемое электроплиткой за единицу времени...
- 1) уменьшится в 1,5 раза
  - 2) уменьшится в 2,25 раз
  - 3) увеличится в 1,5 раза
  - 4) увеличится в 2,25 раз
5. На рисунке изображена вольтамперная характеристика резистора. За время  $t=10$  с резистор выделяет в окружающую среду количество теплоты, равное ...
- 
- 1) 10 Дж
  - 2) 20 Дж
  - 3) 50 Дж
  - 4) 80 Дж

## ЛЕКЦИЯ 14

### 3.2.3. Электродвижущая сила источника тока. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Возьмем замкнутую электрическую цепь, содержащую источник тока, и рассмотрим, как протекает по ней постоянный ток, т.е. как происходит движение положительного заряда ( $+q$ ) по этой цепи (рис. 3.21, б) [3].

Во внешней части цепи сопротивлением  $R$  (часть замкнутой цепи, не содержащая источник тока) заряд ( $+q$ ) перемещается под действием кулоновских сил в направлении уменьшения потенциала. Для дальнейшего движения заряда по внутренней части цепи (источник тока) необходимо переместить заряд ( $+q$ ) к точкам с большим потенциалом. Поэтому в источнике тока на заряды, должны действовать **сторонние силы** – силы не кулоновского происхождения, разделяющие разноименные заряды и переносящие заряд ( $+q$ ) от отрицательного к положительному полюсу источника тока. Именно работа сторонних сил обеспечивает в замкнутой цепи постоянное движение заряда и, соответственно, протекание электрического тока. Сторонние силы могут иметь различную природу. Это могут быть, например, силы химических реакций (в гальванических элементах), силы магнитного поля, силы вихревого электрического поля и т.д. Наглядно перемещение заряда по полной цепи демонстрирует ее механическая модель (рис. 3.21, а). В ней под действием силы тяжести (аналог кулоновской силы) шарик (положительный заряд) скатывается по цилиндрической поверхности (внешняя часть цепи). Для его дальнейшего движения необходима сторонняя сила (это может быть сила упругости сжатой пружины, механический подъемник и т.д.), которая поднимает шарик на первоначальную высоту по вертикали (внутренняя часть цепи, источник тока), совершая при этом работу против силы тяжести [3].

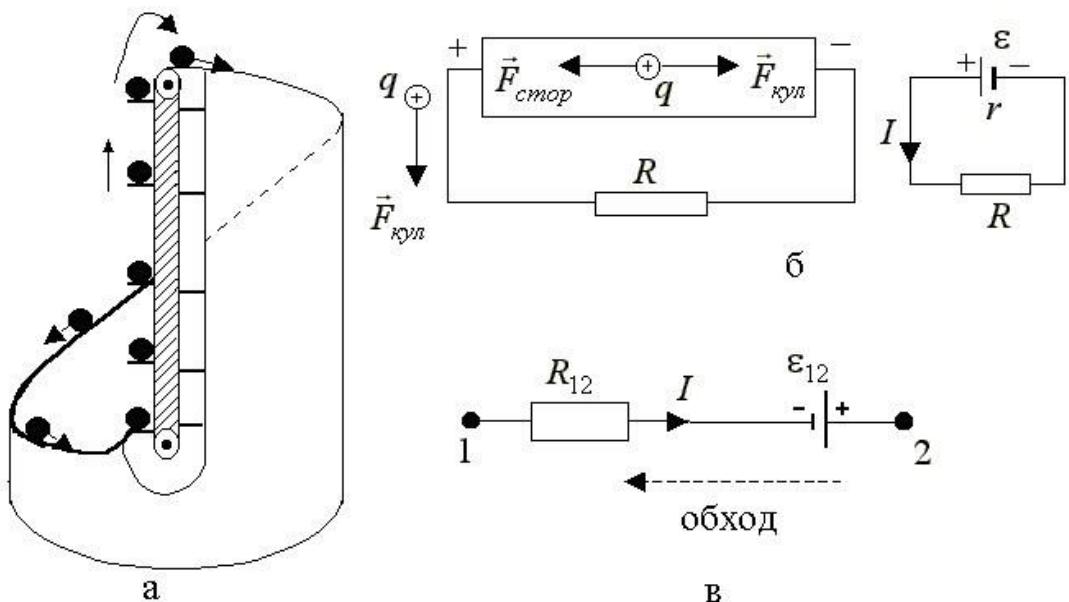


Рис. 3.21

Характеристками источника тока являются его сопротивление  $r$  (внутреннее сопротивление цепи) и **электродвижущая сила (ЭДС)**. ЭДС источника тока ( $s$ ) – скалярная физическая величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда от отрицательного к положительному полюсу источника.

$$s = \frac{A_{\text{стор}}}{q_+}, \quad (3.69)$$

Изображение источника тока на схемах приведено на рис. 3.21, б.

**Неоднородный участок цепи** – участок цепи, на котором действуют как сторонние, так и кулоновские силы (рис. 3.21, в). Работу кулоновских сил по перемещению электрического заряда на этом участке характеризует разность потенциалов  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ , а сторонних сил – действующая на этом участке цепи ЭДС  $s_{1,2}$  [3]

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{\text{кул}1,2}}{q}, \quad s_{1,2} = \frac{A_{\text{стор}1,2}}{q}. \quad (3.70)$$

**Напряжение**  $U_{1,2}$ , неоднородного участка цепи – скалярная физическая величина, характеризующая общую работу сторонних и кулоновских сил на неоднородном участке цепи и равная

$$U_{1,2} = \frac{A_{\text{кул1,2}} + A_{\text{стор1,2}}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + s_{1,2}. \quad (3.71)$$

Из формулы (3.71) следует, что на однородном участке цепи ( $\varepsilon_{1,2}=0$ ) напряжение равно разности потенциалов:

$$U_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.72)$$

Для неоднородного участка цепи также выполняется закон Ома. Докажем это. Пусть при протекании тока на неоднородном участке цепи за малый промежуток времени  $dt$  выделяется количество теплоты  $dQ_{1,2}$ . Согласно закону сохранения энергии,  $dQ_{1,2}$  равно суммарной работе сторонних и кулоновских сил по перемещению зарядов по неоднородному участку цепи

$$\begin{aligned} dQ_{1,2} &= dA_{\text{кул1,2}} + dA_{\text{стор1,2}} \quad [1] \\ [2] \quad I^2 R_{1,2} dt &= dq(\varphi_1 - \varphi_2) + dq s_{1,2} = dq U_{1,2} = I U_{1,2} dt \quad [2] \quad U_{1,2} = IR_{1,2}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Формула (3.73) выражает закон Ома для неоднородного участка цепи.

Учитывая, что  $\varepsilon_{1,2}$ ,  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ ,  $I$  являются алгебраическими величинами и могут быть как больше, так и меньше нуля, запишем закон Ома (3.73) в следующем виде [3]:

$$IR_{1,2} = (\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}}) s_{1,2}, \quad (3.74)$$

где  $\varphi_{\text{нач}}$  и  $\varphi_{\text{кон}}$  – потенциалы начальной и конечной точек участка цепи. Выбор знаков в формуле (3.74) осуществляется следующим образом [3]:

- произвольно выбирается направление обхода контура (см. рис. 3.21, в);
- если источник тока создает ток в направлении обхода, то его ЭДС ( $s_{1,2}$ ) берется в формуле (3.74) со знаком «+», в противном случае – со знаком «-»;
- если направление тока на участке цепи совпадает с направлением обхода, то перед силой тока ставится знак «+», в противном случае – со знаком «-».

Продемонстрируем выбор знаков в законе Ома (3.74) на примере неоднородного участка цепи, изображенного на рис. 3.21,в. Применив, приведенный выше алгоритм получим

$$-IR_{1,2} = (\varphi_2 - \varphi_1) - s_{1,2},$$

где начальной точкой участка считается точка, с которой начинается обход участка цепи.

### 3.2.5. Законы Ома и Джоуля - Ленца в дифференциальной форме

Пусть внутри проводника электрическое поле является неоднородным и его удельное сопротивление  $\rho$  зависит от выбранной внутри него точки. В этом случае необходимо использовать дифференциальную форму законов Ома и Джоуля – Ленца, справедливую для малой окрестности точки внутри проводника.

Приведем вывод этих формул. Для упрощения вывода возьмем однородный изотропный проводник длиной  $l$  с постоянной площадью  $S$  поперечного сечения, в котором создадим однородное электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ . Введенные упрощения (однородность и изотропность проводника, а также однородность поля) не скажутся на общности полученных формул.

Учитывая закон Ома (3.60), формулы (3.57) и (3.62)

получим:

$$I = \frac{U}{R}, \quad I = jS, \quad U = El, \quad R = \frac{\rho l}{S} \quad \Rightarrow \quad jS = \frac{El}{\left(\frac{\rho l}{S}\right)} \quad \Rightarrow \quad j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E; \\ j = \sigma E. \quad (3.75)$$

Формула (3.75) представляет собой закон Ома в дифференциальной форме. Введенная в выражение величина  $\sigma$  называется удельной проводимостью, она связана с удельным сопротивлением  $\rho$  формулой [3]

$$\sigma = 1/\rho. \quad (3.76)$$

*Удельная тепловая мощность*  $w$  равна количеству теплоты, выделяемому при протекании тока в единичном объеме проводника, расположенному вблизи точки, взятой внутри проводника за единицу времени:

$$w = \frac{dQ}{dVdt}, \quad (3.77)$$

где  $dQ$  – бесконечно малое количество теплоты, выделяемое в элементарном объеме  $dV$ , за малое время  $dt$ .

Для рассматриваемого здесь вывода вместо элементарных значений  $dQ$ ,  $dV$  и  $dt$  можно подставить их конечные значения  $Q$ ,  $V$ ,  $t$ , что дает

$$\begin{aligned} w &= \frac{Q}{Vt} = \frac{I^2Rt}{Vt} = \frac{(jS)^2plt}{Slts} = j^2p = (\sigma E)^2 p = \sigma E^2 = \ddot{jE}, \\ w &= \sigma E^2 = \ddot{jE}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Формула (3.78) является законом Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

В случае неоднородного участка цепи, когда в проводнике одновременно действуют и сторонние и кулоновские силы формулы (3.75) и (3.78) примут вид [3]:

$$j = \sigma(E + E_{стор}), \quad (3.79)$$

$$w = j(E + E_{стор}). \quad (3.80)$$

#### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 14**

1. ЭДС источника тока – физическая величина, численно равная
  - 1) работе, совершаемой электростатическими силами при перемещении единичного положительного точечного заряда через источник тока;
  - 2) работе, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного точечного заряда через источник тока;
  - 3) суммарной работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного точечного заряда через источник тока;

- 4) отношению модуля сторонней силы, действующий на точечный пробный заряд, к этому заряду.
2. Неоднородный участок цепи – это участок...
- 1) в котором на носители электрического заряда одновременно действуют и электрические и сторонние силы.
  - 2) в котором на носители заряда действуют только электростатические силы.
  - 3) в котором удельное сопротивление в разных точках разное.
  - 4) с неодинаковой площадью поперечного сечения.
3. На рисунке изображен неоднородный участок цепи. В формулах:  $I$  и  $\epsilon$  – модули силы тока и ЭДС;  $R$  – сопротивление всего участка
- 
- Закон Ома, соответствующий приведенной схеме –
- 1)  $IR = \varphi_A - \varphi_B + s$
  - 2)  $IR = \varphi_B - \varphi_A + s$
  - 3)  $IR = \varphi_A - \varphi_B - s$
  - 4)  $IR = \varphi_B - \varphi_A - s$
4. Закону Ома для неоднородного участка электрической цепи в дифференциальной форме соответствует формула
- 1)  $j = \sigma \left( E_k + E_{cmop} \right)$
  - 2)  $I = (\varphi_1 - \varphi_2) / R_{12}$
  - 3)  $I = U_{12} / R_{12}$
  - 4)  $IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \epsilon_{12}$
  - 5)  $I = \epsilon / (R + r)$
  - 6)  $j = \sigma E_k$
5. Удельная тепловая мощность постоянного тока равна теплу, выделяемому
- 1) единицей объема проводника за единицу времени.
  - 2) проводником за время  $t$ .
  - 3) единицей длины проводника за единицу времени.
  - 4) единицей длины проводника за время  $t$ .

# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

## ЛЕКЦИЯ 15

### 4.1. Магнитное поле и его характеристики

#### 4.1.1. Магнитное поле. Опытные данные по обнаружению магнитного поля

Хорошо известно (опыт Эрстеда, 1820 г.), что магнитная стрелка, помещенная под проводником, по которому течет постоянный ток, стремится расположиться перпендикулярно к проводнику (рис. 4.1, а). Плоская рамка с током, подвешенная на гибких токоподводах вблизи прямого тока, стремится расположиться так, чтобы проводник с током и сама рамка оказались лежащими в одной плоскости (см. рис. 4.1, б).

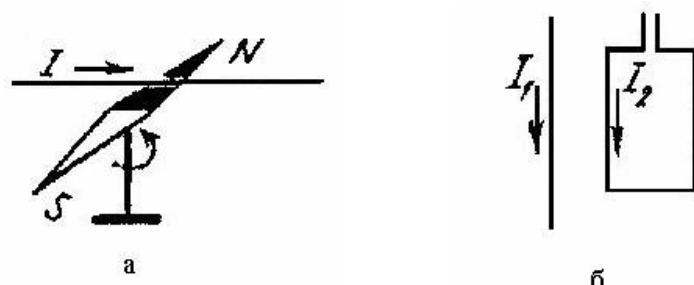


Рис. 4.1

Если поднести (даже не соприкасая) два магнита друг к другу, то они будут либо притягиваться, либо отталкиваться. Как известно, у любого магнита есть два полюса – северный и южный. Одноименные полюсы взаимно отталкиваются, разноименные – взаимно притягиваются. Притяжение между магнитами возникнет, если поднести их друг к другу разноименными полюсами.

В опытах Ампера (1820 г.) было установлено, что два параллельных прямолинейных проводника, по которым текут токи одного направления,

притягиваются друг к другу, если же токи имеют противоположные направления – проводники будут отталкиваться (рис. 4.2).

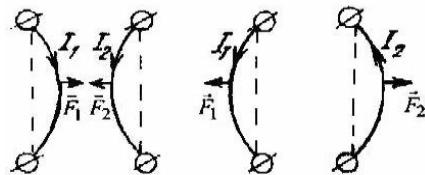


Рис. 4.2

В случае протекания тока только по одному проводнику, взаимодействия между проводниками не будет.

Такое взаимодействие, обусловленное движением зарядов (электрический ток – направленное движение зарядов), назвали *магнитным взаимодействием*, и осуществляется оно посредством *магнитного поля*.

*Магнитное поле* – форма существования материи, являющаяся частью электромагнитного поля, которая создается проводниками с током, движущимися электрическими зарядами, намагниченными телами и изменяющимся со временем электрическим полем. Магнитное поле действует на движущиеся зарженные частицы (тела). и, как следствие, на проводники с токами. На намагниченные тела магнитное поле действует независимо от того, движутся они или неподвижны.

#### **4.1.2. Вектор индукции магнитного поля. Линии магнитной индукции. Принцип суперпозиции.**

*Силовой характеристикой магнитного поля является вектор индукции магнитного поля  $B$  (вектор магнитной индукции, или магнитная индукция).* Понятие о векторе индукции магнитного поля вводится на основании одного из трех опытных фактов: а) ориентирующее действие магнитного поля на рамку с током; б) отклонение проводника с током в магнитном поле; в) отклонение пучка электрически зарженных частиц, движущихся в магнитном поле.

Рассмотрим рамку с током, свободно установившуюся в магнитном поле. В этом случае принято считать, что направление вектора  $B$  в том месте, где расположена рамка с током, совпадает с направлением *положительной*

нормали к плоскости рамки. Нормаль – это единичный вектор, перпендикулярный к плоскости рамки. За направление *положительной нормали* принимают направление поступательно движения буравчика, рукоятка которого вращается по направлению тока в рамке (рис. 4.3, а). При этом в магнитном поле направление положительной нормали  $\vec{n}$  рамки с током совпадает с направлением от южного полюса  $S$  к северному  $N$  свободно установившейся в поле магнитной стрелки (рис. 4.3, б).

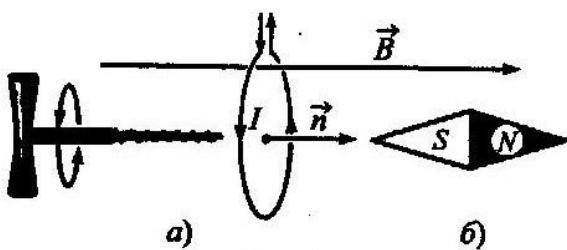


Рис. 4.3

Графически магнитные поля изображаются с помощью линий магнитной индукции (силовых линий магнитного поля).

*Линии магнитной индукции* - линии, проведенные в магнитном поле так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной индукции совпадает с направлением вектора  $\vec{B}$  в этой точке поля (см. рис. 4.4, а).

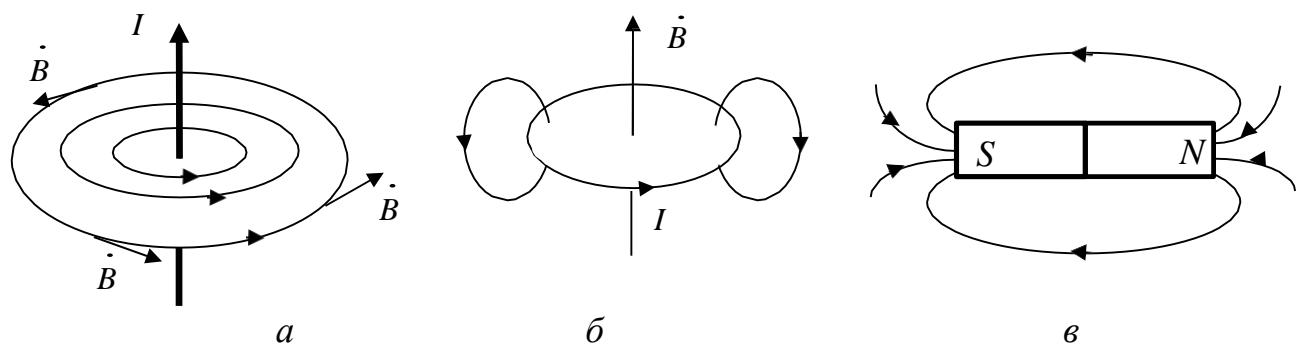


Рис. 4.4

Вид линий магнитной индукции простейших магнитных полей показан на рис. 4.4. Из рисунка видно, что эти линии охватывают проводник с током, создающий магнитное поле. Линии  $B$  прямого тока – концентрические

окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к току, и центры которых лежат на линии тока (рис. 4.4, а). Линии  $B$  тока, текущего по кольцевому проводнику, в плоскости кольца перпендикулярны к нему. Вблизи проводника они лежат в плоскостях, перпендикулярных проводнику. Направление линий индукции определяется по *правилу буравчика* (правого винта): если ввинчивать буравчик по направлению вектора плотности тока в проводнике, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление силовых линий магнитного поля. Линии индукции магнитного поля всегда *замкнуты* (в отличие от линий напряженности электростатического поля) и *не пересекаются*. Линии магнитной индукции полевого магнита выходят из северного ( $N$ ) полюса и входят в южный ( $S$ ), см. рис. 4.4, в.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив *принцип суперпозиции*: *магнитная индукция  $B$  результирующего поля, созданного несколькими источниками, равна векторной сумме индукций полей ( $B_1, B_2, B_3$  и т.д.), создаваемых каждым источником по отдельности*:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + \dots \quad (4.1)$$

#### 4.1.3. Элемент тока. Закон Био – Савара – Лапласа (БСЛ)

Элемент тока  $Idl$  – это вектор, направленный в каждой точке проводника с током  $I$  параллельно вектору  $j$  плотности тока и равный по модулю произведению модуля силы тока  $|I|$  на элемент длины  $dl$  проводника [4]. Он является электронейтральным и создает только магнитное поле.

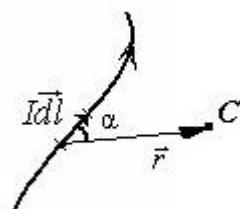


Рис. 4.5

Индукция  $dB$  магнитного поля, созданного элементом тока  $Idl$  в некоторой точке  $C$  определяется по следующему выражению:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^3}, \quad dB = \frac{\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2}, \quad \alpha = \left| \frac{dl}{r} \right|. \quad (4.2)$$

где  $r$  – радиус-вектор, проведенный от элемента тока к рассматриваемой точке пространства,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды (для вакуума  $\mu = 1$ ).

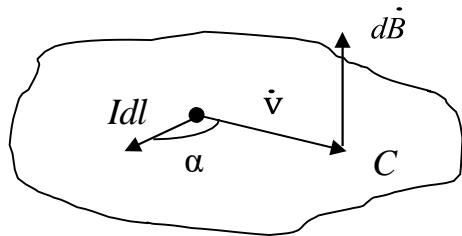


Рис. 4.6

Формула (4.2) получила название – **закон Био – Савара – Лапласа** (БСЛ). Вектор  $dB$  в точке  $C$  направлен перпендикулярно плоскости векторов  $dl$  и  $r$  (рис. 4.6). Его направление определяется по правилу буравчика: рукоятку буравчика вращаем от элемента тока  $Idl$  к вектору  $r$  по наименьшему углу, тогда поступательное движение острия буравчика укажет направление вектора  $dB$ .

Закон Био – Савара – Лапласа используется для расчета магнитных полей, созданных проводниками с токами различной конфигурации. Чтобы рассчитать индукцию магнитного поля проводника с током нужно:

- 1) разбить проводник на отдельные элементы тока;
- 2) в рассматриваемой точке, с помощью закона БСЛ, рассчитать вектора индукции  $dB$  от каждого элемента тока;
- 3) по принципу суперпозиции (4.1) найти вектор индукции  $B$  магнитного поля всего проводника.

Таким образом, получаем, что индукции магнитного поля проводника с током находится по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^3} \cdot \hat{r} \quad (4.3)$$

#### 4.1.4. Примеры применения закона Био – Савара – Лапласа к расчету магнитных полей различных проводников с электрическим током

*Пример 1.* Магнитное поле прямолинейного проводника конечной длины с током  $I$ .

Рассчитаем индукцию магнитного поля прямолинейного проводника конечной длины с током  $I$  в точке  $A$  (рис. 4.7, а) Положение точки  $A$  можно задать расстоянием  $a$  до проводника и углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ;  $\alpha_1$  – угол между первым элементом тока (он расположен там, откуда начинается ток) и вектором  $\vec{r}_1$ , проведенным от этого элемента тока в точку  $A$ ;  $\alpha_2$  – угол между последним элементом тока (он расположен там, где заканчивается ток) и вектором  $\vec{r}_2$ , проведенным от этого элемента тока в точку  $A$  [4].

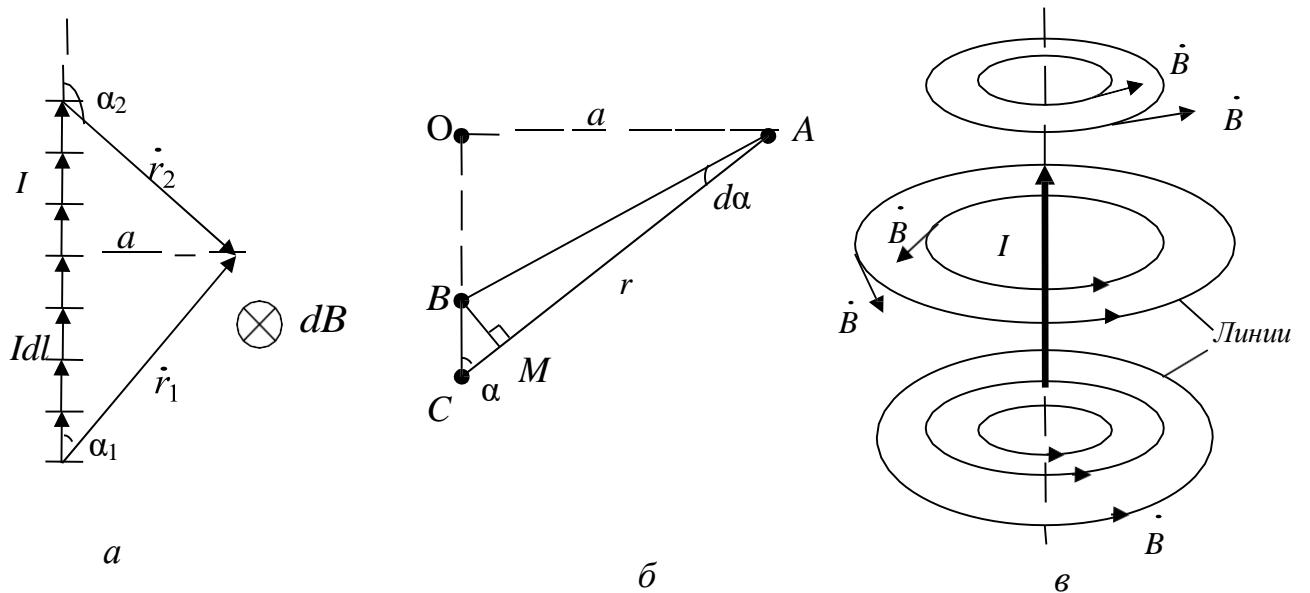


Рис. 4.7

Из рис. 4.7, а видно, что все векторы  $dB$  направлены перпендикулярно плоскости чертежа «от нас», следовательно, также направлен и вектор  $B$  результирующего поля. Тогда формула (4.3) для модуля вектора  $B$  запишется так [4]:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\alpha}{r^2}. \quad (4.4)$$

Для дальнейших преобразований подынтегрального выражения в формуле (4.4) рассмотрим рис. 4.7, б, на котором изображен произвольный элемент длины  $dl$  проводника. Из рис. 4.7, б следует

$$\triangle OAC \sim \triangle BCM : \frac{OA}{AC} = \frac{BM}{BC}; \frac{a}{r} = \frac{rd\alpha}{dl}; \frac{dl}{r^2} = \frac{d\alpha}{a}.$$

Подставляя полученное выражение в (4.4), получим

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (4.5)$$

Направление вектора  $B$  можно определить, предварительно проведя линии  $B$  прямого проводника с током – это окружности, охватывающие проводник и лежащие в плоскости, перпендикулярной к нему; направление линий  $B$  связано правилом правого буравчика с направлением тока в проводнике. Тогда вектор  $B$  в каждой точке линии будет направлен по касательной к ней (рис. 4.7, в) [4].

В случае, когда магнитное поле создается бесконечно длинным прямолинейным проводником с током ( $\alpha_1 \rightarrow 0^\circ$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 180^\circ$ ) формула (4.5) примет вид

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (4.6)$$

Как правило, расстояние от проводника до рассматриваемой точки обозначают буквой  $r$ , поэтому в формулах (4.5) и (4.6), в общем случае, вместо буквы  $a$  пишут букву  $r$ .

*Пример 2.* Магнитное поле в центре кольцевого тока.

Пусть по кольцу радиуса  $R$  протекает постоянный ток силы  $I$  (рис. 4.8, а). Необходимо найти индукцию магнитного поля в центре кольцевого тока, в точке О. Для этого разбиваем кольцевой ток на элементы тока  $Idl$  (на рис. 4.8, а указано два элемента тока) и находим направление векторов магнитной индукции  $dB$  всех элементов тока в центре кольца (они будут

направлены перпендикулярно плоскости кольца, вверх). Суммарный вектор  $B$  также будет направлен вертикально вверх. Для определения его модуля берем проекцию формулы (4.3) на вертикальную ось и получаем

$$B = \oint dB = \oint \frac{\mu\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu\mu_0 I \sin 90^\circ}{4\pi R^2} \oint dl = \frac{\mu\mu_0 I \cdot 2\pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu\mu_0 I}{2R},$$

где учтено, что в данном случае  $r = R$ .

Итак, в центре кольцевого тока модуль вектора магнитной индукции будет равен

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R} \quad (4.7)$$

*Пример 3.* Магнитное поле на оси кольцевого тока.

Рассмотрим то же кольцо с током  $I$  радиуса  $R$ , как и в примере 2. Пусть точка  $A$  находится на оси кольцевого на расстоянии  $a$  от его центра (рис. 4.8, б). Рассчитаем индукцию магнитного поля в точке  $A$ .

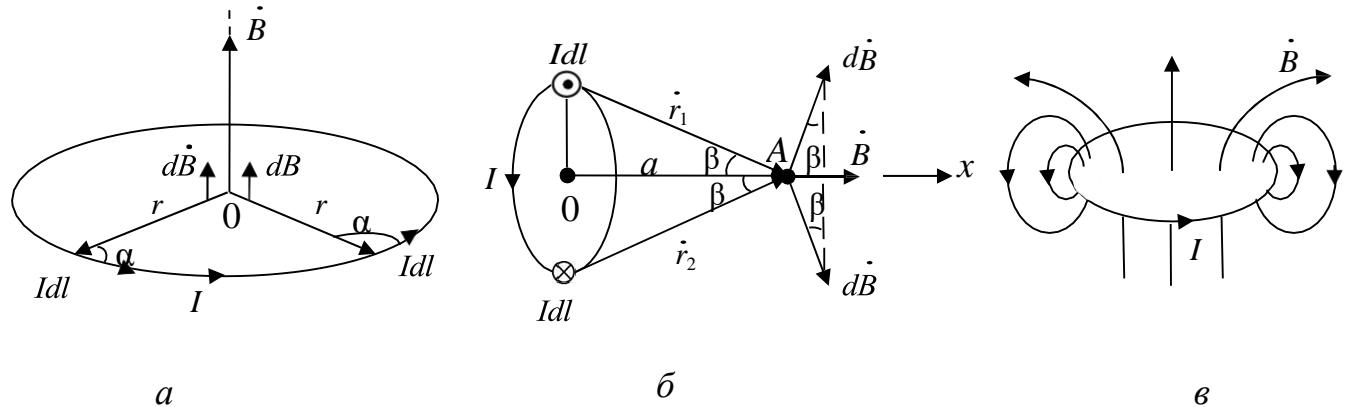


Рис. 4.8

На рис. 4.8, б показаны векторы  $dB$ , созданные верхним и нижним элементами тока в точке  $A$ . Каждый из этих векторов образует угол  $\beta$  с вертикальным направлением. Из симметрии расположения векторов становится очевидно, что сумма указанных на рис. 4.8, б векторов  $dB$ , будет направлена вдоль оси кольца. Следовательно, суммарный вектор магнитной индукции  $B$ , созданный всеми элементами тока, также будет направлен по оси кольца. Проектируя уравнение (4.3) на ось Ох (направлена вдоль оси кольца), получим

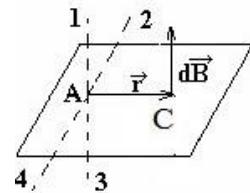
$$B = \oint dB \sin\beta = \frac{\mu\mu_0 I \sin 90^\circ \sin\beta}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{\mu\mu_0 I \sin\beta}{4\pi r^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 I R^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (4.8)$$

Для центра кольцевого тока (точка  $O$ ,  $a = 0$ ) из формулы (4.8) получаем формулу (4.7).

Линии  $B$  кольцевого тока представляют собой окружности, перпендикулярные плоскости кольца, их направление связано правилом правого буравчика с направлением тока (рис. 4.8, в).

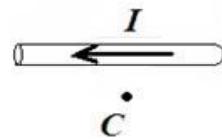
### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 15**

1. На рисунке в точке С изображен вектор индукции  $dB$  магнитного поля, созданного элементом тока  $Idl$ , находящегося в точке А. Элемент тока  $Idl$  сонаправлен с направлением



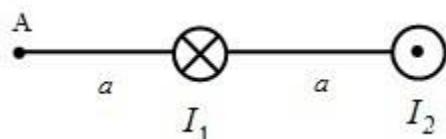
- 1) 1      2) 2      3) 3      4) 4

2. На рисунке изображен проводник, по которому идет электрический ток. Направление тока указано стрелкой. Вектор магнитной индукции в точке С направлен



- 1) от нас перпендикулярно плоскости чертежа  $\otimes$ .  
 2) к нам перпендикулярно плоскости чертежа  $\odot$ .  
 3) в плоскости чертежа вверх  $\uparrow$ .  
 4) в плоскости чертежа вниз  $\downarrow$ .

3. Магнитное поле создано двумя параллельными длинными проводниками с токами  $I_1$  и  $I_2$ , расположенными перпендикулярно плоскости чертежа. Если  $I_2=3I_1$ , то вектор  $B$  индукции результирующего поля в точке А направлен



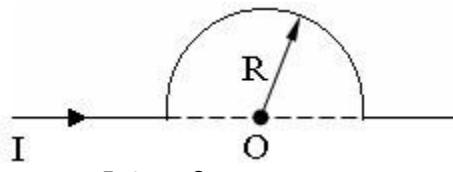
1) вверх

2) влево

3) вправо

4) вниз

4. Бесконечно длинный проводник с током изогнут так, как показано на рисунке. Индукцию магнитного поля, созданного этим проводником с током в точке О можно вычислить по формуле



$$1) B = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

$$2) B = \frac{\mu_0 I}{4R} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right)$$

$$3) B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$4) B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right)$$

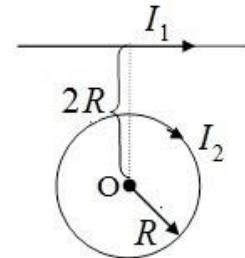
5. Бесконечно длинный прямолинейный проводник с током  $I_1$ , круговой контур с током  $I_2$  лежат в плоскости чертежа, причем  $I_1 = 2\pi I_2$ . Индукция магнитного поля, созданного токами  $I_1$  и  $I_2$  в центре кругового тока (точка О) определяется формулой

$$1) B = 0$$

$$2) B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}$$

$$3) B = \frac{\mu_0 I_2}{R}$$

$$4) B = \frac{\mu_0 I_2}{2R} \left( 1 + \frac{1}{\pi} \right)$$



## ЛЕКЦИЯ 16

### 4.1.5. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции $B$

Рассмотрим произвольный замкнутый контур  $\Gamma$  (воображаемую замкнутую линию) (рис. 4.9, а), поместим этот контур в магнитном поле. Введем элемент тока  $dl$ , как вектор, равный элементу длины  $dl$  контура и направленный в каждой точке контура по касательной в направлении обхода контура (рис. 4.9, а).

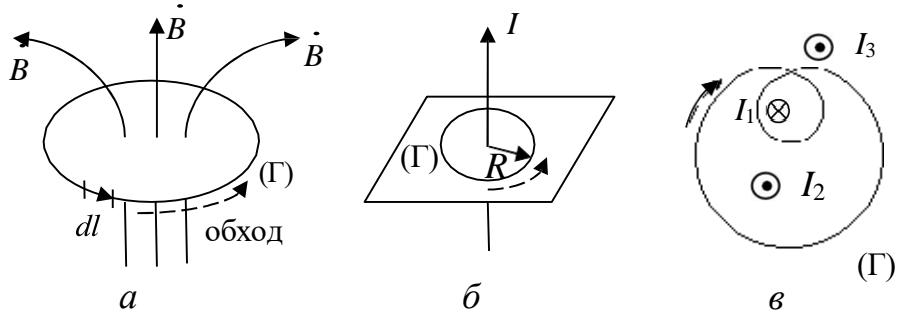


Рис. 4.9

Циркуляцией вектора  $B$  по замкнутому контуру  $(\Gamma)$  называется интеграл вида

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} d\vec{l} = \oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha, \quad \alpha = \left[ \vec{B}, d\vec{l} \right],$$

Сформулируем теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля  $B$ : *циркуляция вектора  $B$  по произвольному замкнутому контуру  $(\Gamma)$  равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на  $\mu_0$ :*

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_i I_i. \quad (4.9)$$

Знак силы тока  $I$  в выражении (4.9) определяется следующим правилом: если направление электрического тока связано с направлением обхода контура правилом правого буравчика, то выбирается знак плюс; в противном случае – знак минус.

Докажем теорему о циркуляции вектора  $B$  на примере бесконечно длинного прямолинейного проводника с током  $I$ . В качестве замкнутого контура выберем контур  $(\Gamma)$ , который совпадает с линией магнитной индукции радиуса  $R$ , а направление обхода контура выберем по направлению линии  $B$  (рис. 4.9, б), т.е. против часовой стрелки. Тогда

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl \cos 0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I,$$

Итак, мы проверили, справедливость теоремы.

Рассмотрим рис. 4.9, в и запишем теорему о циркуляции вектора  $B$  по контуру  $(\Gamma)$ , приведенному на этом рисунке:

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos\alpha = \mu\mu_0(2I_1 - I_2).$$

Проанализируем полученное выражение. Как видно из рисунка, ток  $I_1$  охватывается контуром дважды, поэтому в эту формулу входит коэффициент два, а ток  $I_3$  не охватывается контуром, следовательно, ток  $I_3$  в формулу не входит.

#### **4.1.6. Применение теоремы о циркуляции вектора $B$ к расчету магнитных полей проводников с током**

С помощью теоремы о циркуляции вектора  $B$  можно численно определить модуль вектора  $B$  в случаях определенной симметрии магнитного поля, т.е. при известном направлении вектора  $B$  в каждой точке поля.

*Этапы применения теоремы о циркуляции вектора  $B$  к расчету магнитных полей проводников с током:* 1) сначала с учетом симметрии задачи определяем направление вектора  $B$  в любой точке поля. В случае, если это сделать невозможно, то для определения направления и модуля вектора  $B$  следует применить закон БСЛ и принцип суперпозиции для магнитных полей; 2) далее выбираем произвольный замкнутый контур  $(\Gamma)$  и вычисляем циркуляцию вектора  $B$  по выбранному замкнутому контуру; 3) определяем алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром; 4) для расчета модуля вектора индукции магнитного поля применяем теорему о циркуляции вектора  $B$

*Пример 1. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида.*

Соленоид это проводник, навитый на цилиндрический каркас.

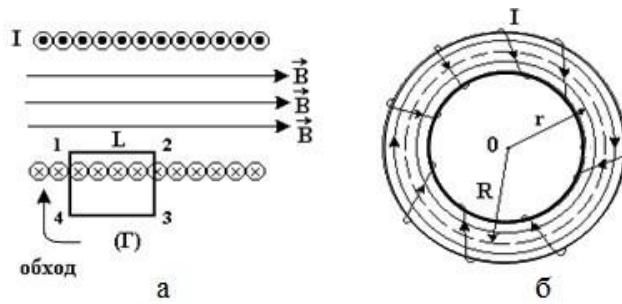


Рис. 4.10

Произведем расчет вектора  $B$  по описанным выше этапам.

**1 этап.** Магнитное поле существует только внутри соленоида (это следует из симметрии задачи), кроме того, поле является однородным, силовые линии  $B$  связаны с направлением тока в соленоиде правилом правого буравчика (рис. 4.10, а).

**2 этап.** В качестве произвольного замкнутого контура ( $\Gamma$ ) выберем прямоугольник 1-2-3-4-1, при этом одна сторона этого прямоугольника параллельна оси соленоида и расположена внутри него (обозначим её  $l$  – длина стороны 1-2 контура). Вычислим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по выбранному контуру ( $\Gamma$ )

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} B dl \cos \alpha &= \int_1^2 B dl \cos 0^\circ + \int_2^3 B dl \cos 90^\circ + \int_3^4 B dl \cos \alpha + \int_4^1 B dl \cos 90^\circ = \\ &= B \int_1^2 dl = B l, \end{aligned}$$

Отметим, что на сторонах контура 2-3, 3-4 и 4-1 интеграл обращается в ноль, поскольку внутри соленоида угол между вектором  $B$  и вектором  $dl$  равен  $90^\circ$ , а за пределами выбранного контура магнитное поле отсутствует ( $B = 0$ ).

**3 этап.** Вычислим алгебраическую сумму токов, охватываемых данным контуром:

$$\sum I_i = N I,$$

где  $N$  – число витков на стороне контура 1–2.

Направление тока и обхода контура связаны правилом правого буравчика, поэтому в полученном выражении для силы тока выбираем знак плюс.

**4 этап.** Применим теорему о циркуляции и определим модуль вектора индукции магнитного поля  $B$ :

$$B \parallel l = \mu\mu_0 NI \quad \square$$

$$B = \mu\mu_0 nI, \quad (4.10)$$

В выражении (4.10) введено число витков на единицу длины соленоида  $n = N/l$ . Формула (4.10) может быть применима для расчета модуля  $B$  внутри длинного соленоида, у которого длина существенно превышает диаметр  $D$  витков ( $l \gg D$ ).

### Пример 2. Магнитное поле тороида.

Тороид – это проводник, навитый на каркас в виде тора (рис. 4.10, б).

**1 этап.** Магнитное поле существует только внутри тороида (следует из симметрии задачи), также силовые линии вектора  $B$  представляют собой окружности с центром в точке О (рис. 4.10, б), а их направление связано с направлением тока в тороиде правилом правого буравчика. Вектор  $B$  касателен к линиям индукции в каждой точке.

**2 этап.** В качестве произвольного замкнутого контура ( $\Gamma$ ), выберем контур, который совпадает с силовыми линиями радиуса  $r$ , а направление обхода контура возьмем по часовой стрелке. Циркуляция вектора  $B$  по выбранному контуру ( $\Gamma$ ):

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos\alpha = B \oint_{(\Gamma)} dl \cos 0 = B \parallel 2\pi r.$$

**3 этап.** Вычислим алгебраическую сумму токов, охватываемых данным контуром ( $\Gamma$ ):

$$\sum I_i = N \parallel I,$$

где  $N$  – число витков тороида.

**4 этап.** Применим теорему о циркуляции и определим модуль вектора индукции магнитного поля  $B$ :

$$B \parallel 2\pi r = \mu\mu_0 NI,$$

$$B = \mu\mu_0 nI \parallel R/r, \quad (4.11)$$

где введено число витков на единицу длины тороида  $n = N/(2\pi R)$ , а  $R$  – радиус окружности, проходящей через центры витков тороида.

В случае, если диаметр  $D$  витков тороида значительно меньше  $R$  ( $D \ll R$ ), то тогда можно считать, что  $r \parallel R$  и следовательно, формула (4.11) перепишется в виде

$$B = \mu\mu_0 nI. \quad (4.12)$$

#### 4.2. Закон Ампера. Сила Ампера, действующая на прямолинейный проводник с током в однородном поле

Если элемент тока  $Idl$  поместить в магнитное поле, то со стороны магнитного поля на него действует сила  $dF$ , величина которой определяется соотношением

$$\frac{\cdot}{dF} = \left[ \frac{\cdot}{Idl} \parallel \frac{\cdot}{B} \right], \quad dF = Idl \sin\alpha, \quad \alpha = \left( \frac{\cdot}{dl}, \frac{\cdot}{B} \right), \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) определяет силу, действующую на элемент тока со стороны магнитного поля и является **законом Ампера**.

Направление силы  $dF$  может быть найдено по общему правилу векторного произведения, из которого следует правило левой руки: если расположить ладонь левой руки так, чтобы вектор индукции магнитного поля  $B$  входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца совпадали с направлением элемента тока  $Idl$ , отставленный большой палец укажет направление силы Ампера [4].

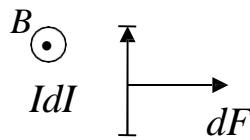


Рис. 4.11

Сила Ампера, действующая в магнитном поле на проводник конечной длины  $l$  с током  $I$ , равна геометрической сумме сил Ампера, действующих на все малые элементы этого проводника:

$$F = I \int_{(l)} [dl \parallel B]. \quad (4.14)$$

В частности, если проводник прямолинейный, а магнитное поле однородно, то из (4.14) получается выражение:

$$F = Il \sin \alpha, \quad (4.15)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением тока (вектором плотности тока) в проводнике и вектором индукции магнитного поля.

### 4.3. Поведение контура с током в магнитном поле

Магнитное поле оказывает ориентирующее действие на замкнутый проводящий контур, по которому идет постоянный электрический ток. Для описания поведения контура с током в магнитном поле, вводят понятие *магнитного момента*  $\vec{p}_m$ .

Магнитный момент контура с током – это вектор, модуль которого равен

$$p_m = IS, \quad (4.16)$$

где  $S$  – площадь контура;  $I$  – сила тока, текущего по нему.

Магнитный момент  $\vec{p}_m$  перпендикулярен к плоскости контура и направление его связано с направлением тока в контуре правилом правого буравчика (рис. 4.12).

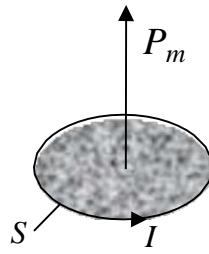


Рис. 4.12

Рассмотрим поведение контура с током в однородном магнитном поле. На рис. 4.13, а показан прямоугольный контур, помещенный в однородное магнитное поле. При пропускании постоянного тока через контур под действием пары одинаковых по модулю сил ( $F_{12}$  и  $F_{34}$ ) контур поворачивается, при этом на контур действует механический вращающий момент

$$M = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} M = p_m B \sin \alpha, \quad (4.17)$$

$$M = p_m B, \quad m$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $p_m$  и  $B$ . Вращение контура происходит вокруг вертикальной оси, перпендикулярной как  $B$ , так и  $p_m$ . Вектор вращающего момента  $M$  откладывается вдоль оси вращения так, чтобы из его конца вращение контура под действием пары сил было видно происходящим против часовой стрелки. На рис. 4.13, б вектор  $M$  направлен «к нам» (из-за чертежа перпендикулярно его плоскости).

Поворот контура происходит до тех пор, пока вектор магнитного момента не установится параллельно линиям индукции магнитного поля (рис. 4.13, в), т.е. станет положением устойчивого равновесия.

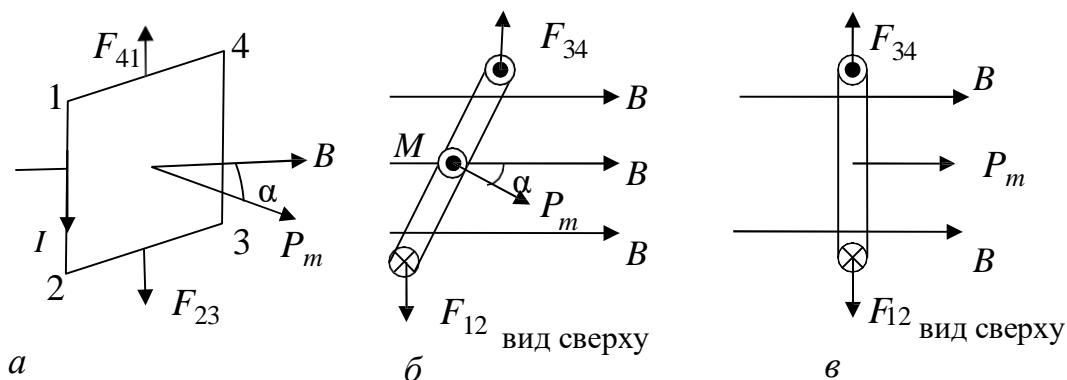


Рис. 4.13

Этому положению соответствует минимальное значение потенциальной энергии  $W_p$  контура с током в магнитном поле, величина которой определяется соотношением

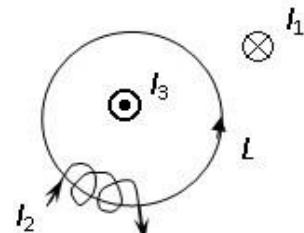
$$W_p = -IBS \cos\alpha = -(IS)B \cos\alpha = -p_m B \cos\alpha = -(p_m B),$$

$$\frac{W}{W_p} = -\left(\frac{p_m B}{p_m B}\right) = -\cos\alpha, \quad \alpha = \arccos p_m B. \quad (4.18)$$

При  $\alpha = 0$ ,  $W_p = -p_m B$ , т.е. принимает минимальное значение.

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 16**

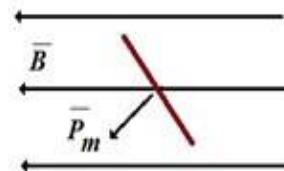
1. Вокруг проводника с током в однородной среде нарисован контур обхода. Контур растягивают так, что охватываемая им площадь увеличивается в полтора раза. При этом значение циркуляции вектора магнитной индукции
  - 1) увеличивается в 1,5 раза.
  - 2) увеличивается в 2,25 раза.
  - 3) уменьшается в 1,5 раза.
  - 4) не изменяется.
2. Если  $I_1=3$  А,  $I_2=1$  А,  $I_3=5$  А, то циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции по контуру обхода  $L$  в вакууме равна ...
  - 1)  $-4\pi \cdot 10^{-7}$  Тл·м
  - 2)  $-12\pi \cdot 10^{-7}$  Тл·м
  - 3)  $16\pi \cdot 10^{-7}$  Тл·м
  - 4)  $8\pi \cdot 10^{-7}$  Тл·м



3. В однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной к линиям индукции, расположены два проводника одинаковой длины  $l$  с одинаковыми токами  $I$ . Отношение  $F_1/F_2$  – модулей сил Ампера, действующих на эти проводники, равно

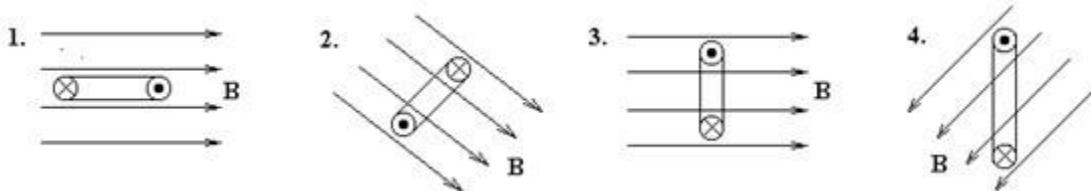
$$1) \frac{1}{2} \quad 2) 1 \quad 3) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 4) 2$$

4. Магнитный момент  $P_m$  рамки с током направлен так, как показано на рисунке. Рамка с током находится в однородном магнитном поле. Вращающий момент сил, действующий на рамку со стороны магнитного поля, направлен...



- 1) перпендикулярно плоскости рисунка к нам
- 2) перпендикулярно плоскости рисунка от нас
- 3) по направлению вектора магнитной индукции
- 4) против направления вектора магнитной индукции

5. Если значение индукции магнитного поля и ток в контуре во всех случаях одинаковы, то наибольшей энергией во внешнем магнитном поле обладает контур с током, приведенный на рисунке под номером ...



## ЛЕКЦИЯ 17

### 4.4. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в магнитном поле

На движущуюся в магнитном поле заряженную частицу действует сила, которая называется **силой Лоренца**

$$\dot{F}_L = q \left[ \dot{v} \cdot \vec{B} \right], \quad F_L = |q|vB \sin\alpha, \quad \alpha = \angle v, B \quad (4.19)$$

Направление этой силы может быть определено по правилу векторного произведения или левой руки (для положительно заряженной частицы) (рис. 4.2, в): левая ладонь располагается так, чтобы линии индукции магнитного поля входили в ладонь, четыре вытянутых пальца направлены по вектору скорости частицы, тогда отогнутый на  $90^\circ$  большой палец указывает

направление силы Лоренца, действующей на положительную частицу (рис. 4.14). Если частица отрицательная, то направление вектора силы Лоренца меняет направление на противоположное.

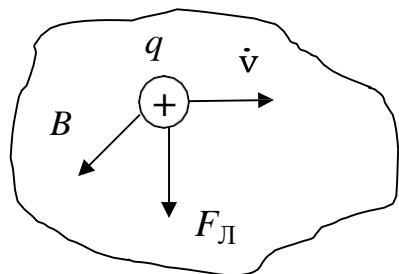


Рис. 4.14

Сила Лоренца  $F_L$  работы не совершает, так как угол между ней и скоростью  $v$  частицы равен  $90^\circ$  (в любой момент времени мощность силы Лоренца равна  $N = F_L v \cos 90^\circ = 0$ ). Следовательно, у движущейся в магнитном поле заряженной частицы модуль скорости и ее кинетическая энергия не изменяются. Однако, под действием силы Лоренца, изменяется направление скорости движения частицы.

На рис. 4.15 изображены частные случаи движения частицы *в однородном магнитном поле*.

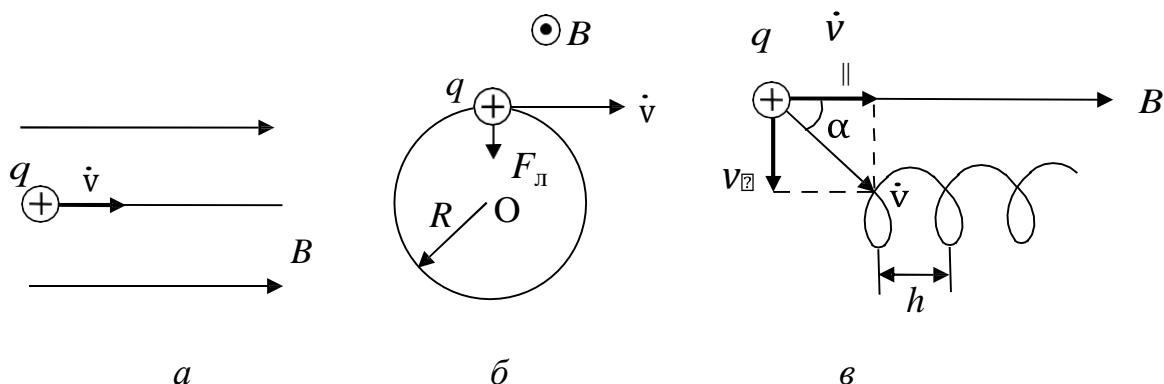


Рис. 4.15

a)  $\alpha = 0^\circ$ . В этом случае  $F_L = 0$ , магнитное поле не влияет на движение частицы. Частица будет двигаться вдоль линий вектора  $B$  (см. рис. 4.15, а) по прямолинейной траектории с постоянной по модулю и направлению скоростью.

б)  $\alpha = 90^\circ$ . Движущаяся заряженная частица влетела в магнитное поле перпендикулярно линиям вектора  $B$ . Сила направлена перпендикулярно вектору скорости и сообщает частице центростремительное ускорение. Траектория движения частицы – окружность радиуса  $R$  (рис. 4.15, б).

Согласно второму закону Ньютона

$$F_\perp = ma_n, \quad |q|vB = m \frac{v^2}{R},$$

отсюда радиус окружности, по которой движется частица, определяется выражением:

$$R = \frac{mv}{|q|B}. \quad (4.20)$$

Период обращения частицы по окружности:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B}. \quad (4.21)$$

Как следует из формулы (4.21), период  $T$  не зависит от скорости движения частицы.

в)  $\alpha$  – произвольный угол. Вектор скорости частицы разложим на две составляющие:  $v_{11}$  – направленную вдоль линий магнитной индукции, и  $v_\perp$  – перпендикулярную этим линиям. Модули составляющих равны соответственно:

$$v_{11} = v \cos \alpha, \quad v_\perp = v \sin \alpha. \quad (4.22)$$

Траектория движения частицы – винтовая линия (рис. 4.15, в). Движение частицы в магнитном поле может быть представлено как сумма двух видов движения – прямолинейного равномерного вдоль линий  $B$  ( $\alpha = 0^\circ$ ) и движения по круговой траектории в плоскости, перпендикулярной вектору  $B$  ( $\alpha = 90^\circ$ ).

Запишем выражения, по которым можно определить: шаг  $h$  винтовой линии, радиус  $R$  винтовой линии и период  $T$  обращения частицы (рис. 4.15, в)

$$R = \frac{mv_\perp}{|q|B}, \quad T = \frac{2\pi m}{|q|B}, \quad h = v_{11} \cdot T, \quad (4.23)$$

Если частица движется в неоднородном магнитном поле, то ее траекторией является винтовая линия (спираль) радиус и шаг которой будут изменяться.

В частном случае, приведенном на рис. 4.16, а, при движении частицы вдоль оси  $Ox$  модуль вектора  $B$  увеличивается и согласно формулам (4.23) радиус  $R$  и шаг винтовой линии  $h$  будут уменьшаться.

В совмещенных в пространстве электрическом и магнитном полях на частицу, кроме силы Лоренца, также действует и кулоновская сила

$$F = F_k + F_L = qE + q[\dot{v} \times B].$$

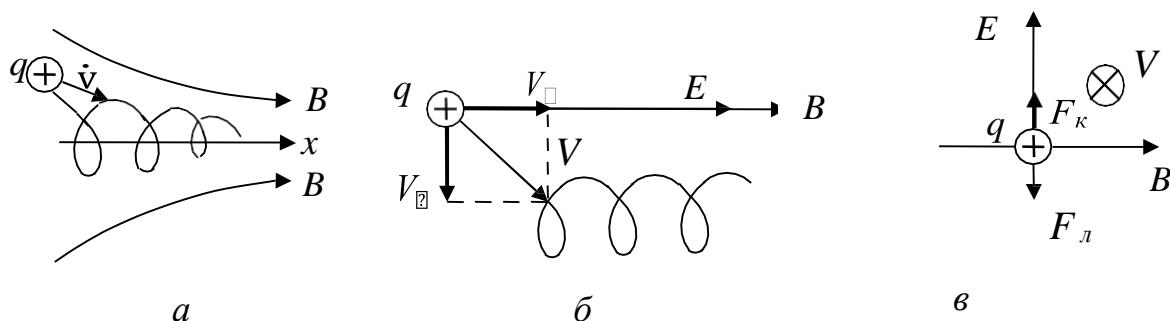


Рис. 4.16

Если вектора  $E$  и  $B$  однородных электрического и магнитного полей сонаправлены (см. рис. 4.16, б), то из формулы (4.23) следует, что траектория движения частицы - винтовая линия, с постоянным радиусом  $R$  (поскольку модуль  $v$  не изменяется). Однако из-за действия кулоновской силы модуль  $v$ <sup>11</sup> будет возрастать, и, следовательно, шаг  $h$  винтовой линии будет увеличиваться.

В скрещенных под прямым углом однородных электрическом и магнитном полях (рис. 4.12, в) заряженная частица будет двигаться равномерно и прямолинейно, если ее вектор скорости  $v$  будет направлен от нас в плоскость рисунка, а модуль вектора скорости равен

$$F_L = F_k : \quad |q|vB = |q|E, \quad \text{т. е. } v = E/B.$$

#### 4.5. Магнитный поток. Теорема Гаусса для вектора $B$ . Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Рассмотрим бесконечно малую (элементарную) площадку  $dS$ , находящуюся в магнитном поле (рис. 4.17, а). **Элементарным магнитным потоком**  $d\Phi$  через площадку  $dS$  называют скалярную физическую величину, равную

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS \cos \alpha, \quad \alpha = \frac{\langle \vec{B}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{B}\| \|\vec{n}\|}, \quad (4.24)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором  $B$  и вектором  $n$  нормали к площадке  $dS$  (рис. 4.17, а).

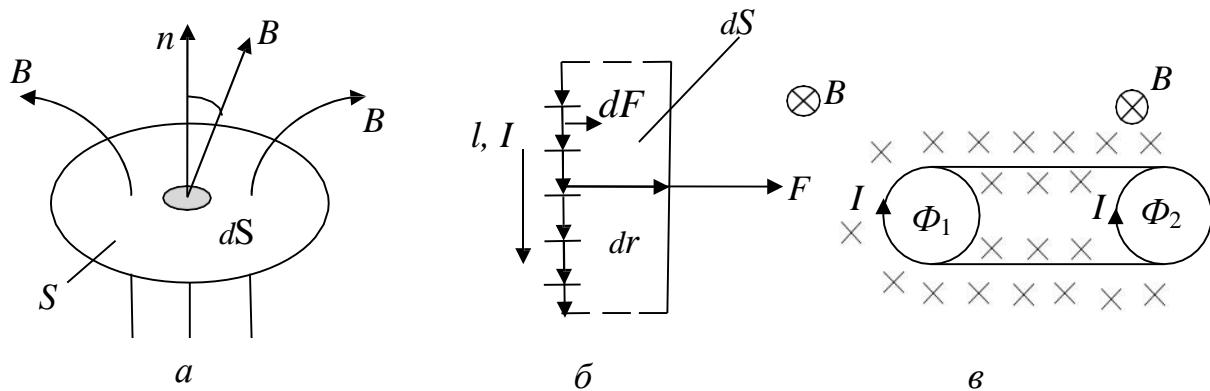


Рис. 4.17

Чтобы найти магнитный поток  $\Phi$  через конечную поверхность  $S$ , нужно просуммировать все элементарные магнитные потоки  $d\Phi$ :

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S B dS \cos \alpha. \quad (4.25)$$

Поскольку линии индукции проводятся так, что их густота определяет модуль вектора  $B$  в данной точке поля, то магнитный поток  $\Phi$  будет пропорционален количеству линий индукции, пронизывающих всю поверхность  $S$ .

Так как линии  $B$  являются замкнутыми, то теорема Гаусса в интегральной форме для вектора магнитной индукции  $B$  запишется следующим образом:

$$\oint_S BdS = \oint_S BdS \cos\alpha = 0. \quad (4.26)$$

Физический смысл теоремы Гаусса для вектора  $B$  заключается в следующем: в природе нет магнитных зарядов и, поэтому линии  $B$  являются замкнутыми [4].

#### 4.6. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Найдем теперь работу  $dA$ , при которой под действием сил поля прямолинейный проводник перемещается на  $dr$  в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  (рис. 4.17, б). Длина проводника  $l$ , по нему протекает ток  $I$ .

Прежде всего, вычислим силу  $F$ , действующую со стороны магнитного поля на проводник с током, как сумму сил  $dF$ , действующих на каждый элемент тока  $Idl$  проводника. С учетом формул (4.13) и (4.14) имеем

$$\dot{F} = \int d\dot{F}, \quad F = \int dF = \int IBdl \sin 90^\circ = IBl.$$

Тогда элементарная работа силы, действующей на проводник с током, может быть записана как

$$dA = Fd\dot{r} = Fdr \cos 0^\circ = IBldr = IBdS = Id\Phi, \quad (4.27)$$

где  $d\Phi$  – элементарный магнитный поток, пронизывающий поверхность  $dS$ , которую описывает проводник при своем движении в магнитном поле.

Работа сил магнитного поля на конечном перемещении складывается из работ  $dA$  на малых участках пути

$$A = \int dA = I \int d\Phi = I\Phi, \quad (4.28)$$

где  $\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий поверхность, которую описывает проводник при своем движении в магнитном поле. Таким образом, работа сил магнитного поля зависит от пути перехода проводника из начального в конечное состояние, т.е. магнитное поле не является потенциальным.

Если в магнитном поле перемещается контур с током (рис. 4.17, в), то с учетом формулы (4.27), работу  $A$  магнитного поля при таком перемещении можно записать как

$$A = \oint Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Phi, \quad (4.29)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  – магнитные потоки, пронизывающие плоскость контура в начальном и конечном положениях.

#### 4.7. Эффект Холла в металле

Возьмём металлическую прямоугольную пластинку шириной  $b$ , толщиной  $d$  и поместим её в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости пластины (рис. 4.18, а). Затем пропустим по пластинке ток, плотностью  $j$ .

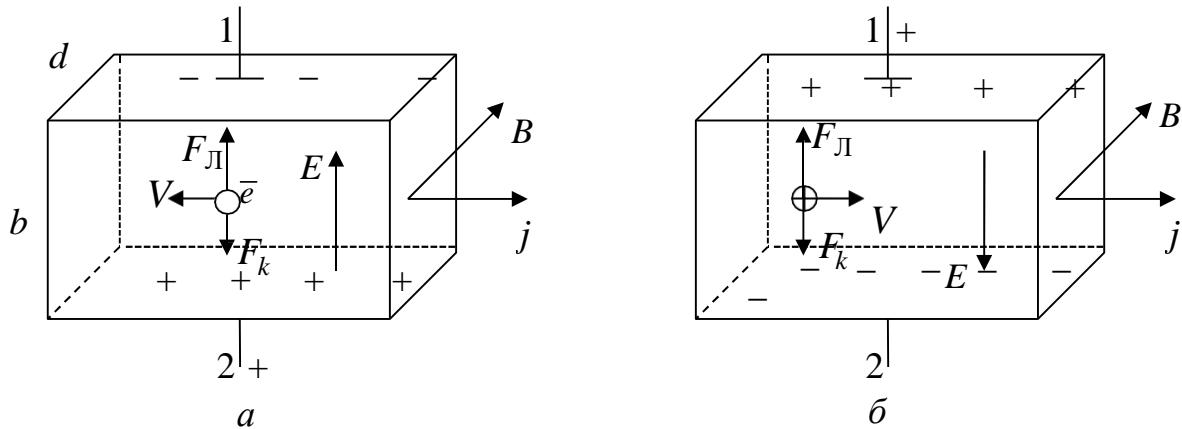


Рис. 4.18

Под действием силы Лоренца, упорядоченно движущиеся свободные электроны будут смещаться к верхней грани пластины, которая зарядится отрицательно, а нижняя грань при этом зарядится положительно. В результате в металле возникает поперечное электрическое поле, напряжённость  $E$  которого будет перпендикулярна векторам  $B$  и  $j$  (**эффект Холла**). Итак, открытый в 1879 году эффект Холла заключается в возникновении поперечного электрического поля  $E \perp B \perp j$ .

Для разности потенциалов, возникающей между верхней и нижней гранями пластины, в условиях установившегося в поперечном сечении стационарного распределения зарядов, можно получить следующее выражение [4]:

$$\begin{aligned} I &= |e|nvS = |e|nvbd, & v &= \frac{I}{|e|nd}, \\ F_\kappa &= F_\lambda : \quad |e|E = |e|vB, & \varphi_1 - \varphi_2 &= Eb = Bvb = \frac{IB}{|e|nd} \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= R_x \frac{IB}{d} = R_x jbB. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Как следует из формулы (4.30), холловская разность потенциалов определяется толщиной  $d$  пластины в направлении магнитного поля, силой тока и модулем вектора  $B$  магнитного поля. Если выразить силу тока через плотность тока, то тогда в формулу (4.30) войдет толщина  $b$  пластины в направлении, перпендикулярном направлению магнитного поля [4].

Кроме того, холловская разность потенциалов зависит и от концентрации  $n$  свободных электронов в металлической пластине. Концентрация свободных электронов входит в выражение (4.30) через постоянную Холла:

$$R_x = \frac{1}{n|e|}. \quad (4.31)$$

Обычно постоянная Холла устанавливается экспериментально. Затем с помощью известного значения  $R_x$  по формуле (4.31) можно определить концентрацию свободных электронов в металле.

## 4.8. Магнитное поле в веществе

### 4.8.1. Магнитная проницаемость. Вектор намагничивания.

Все встречающиеся в природе вещества являются магнетиками. Магнетики, помещенные во внешнее магнитное поле  $B_0$  намагничиваются, т.е. создают своё магнитное поле  $B'$ . Таким образом, результирующее магнитное поле  $B$  в магнетике

$$B = B_0 + B'. \quad (4.32)$$

Магнитное поле вещества  $B'$  связано с микротоками  $I'$ , обусловленными движением электронов в атомах, ионах и молекулах [4].

Введем магнитную проницаемость  $\mu$  среды, показывающую во сколько раз индукция магнитного поля при наличии среды отличается от индукции магнитного поля в вакууме.

В случае однородных и изотропных магнетиков

$$\mu = \frac{B}{B_0}. \quad (4.33)$$

Также для описания способности вещества создавать своё магнитное поле  $\vec{B}'$  вводится вектор намагничивания  $J$ . Он равен векторной сумме магнитных моментов  $p_{\text{м.ат}_i}$  атомов, которые находятся в единице объёма вещества

$$\vec{J} = \frac{\sum_i p_{\text{м.ат}_i}}{V}. \quad (4.34)$$

Магнитный момент атома складывается из суммы магнитных моментов электронов, связанных с их орбитальным движением, спиновых магнитных моментов электронов и спинового магнитного момента ядра (из-за большой массы ядра этим моментом обычно пренебрегают) [4]. Согласно теории Бора орбитальные магнитные моменты электронов связаны с движением электронов в атоме по круговым орбитам, что приводит к созданию кольцевого тока, который и обладает магнитным моментом. Спиновый магнитный момент электрона является таким же неотъемлимым свойством частицы, как и заряд, и масса.. Первоначально наличие спинового магнитного момента объяснялось вращением частицы вокруг своей оси. Впоследствии было доказано, что такое представление о спиновом моменте неверно, хотя само понятие спинового момента осталось.

Качественно возникновение собственного магнитного поля  $\vec{B}'$  магнетика можно пояснить на основе гипотезы Ампера о существовании внутри молекул

молекулярных токов (микротоков). Их ориентация во внешнем магнитном поле и создаёт не равное нулю магнитное поле  $\vec{B}'$  вещества и соответственно  $J$  [4].

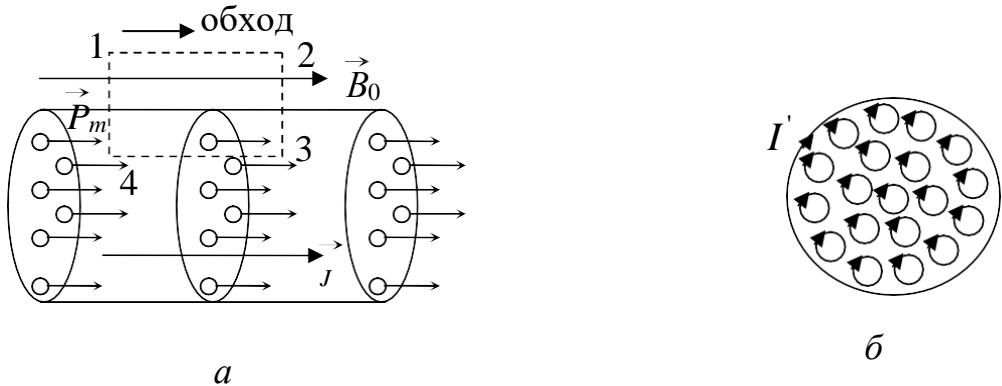


Рис. 4.19

Рассмотрим помещенный в однородное магнитное поле  $B_0$  однородный длинный стержень в виде цилиндра (рис. 4.19, а). Если внешнее магнитное поле отсутствует ( $B_0 = 0$ ), то, вследствие теплового движения, молекулярные токи ориентированы хаотично по всем направлениям и, поэтому  $B' = 0$ ,  $J = 0$ . Во внешнем магнитном поле происходит ориентация магнитных моментов микротоков вдоль поля (магнитные моменты микротоков будут параллельны вектору  $B_0$ ). За счет такой ориентации происходит компенсация микротоков внутри стержня. Однако, на поверхности цилиндра компенсация микротоков отсутствует (рис. 4.19, б). Магнитное поле цилиндра  $B'$  оказывается подобным магнитному полю соленоида

$$B' = B_{\text{сол}} = \mu_0 I'_{\text{витка}} \frac{N}{l} = \mu_0 \frac{I'}{l}, \quad (4.35)$$

где  $I'$  – это суммарный поверхностный ток, текущий по поверхности цилиндра на длине  $l$ .

Учитывая, что сумма магнитных моментов атомов в этом случае будет равна магнитному моменту суммарного поверхностного тока  $I'$  ( $\sum p_{\text{м.ат}_i} = \dot{p}_{\text{тока}}$ ), то для модуля вектора намагничивания можно переписать формулу (4.34) в виде

$$J = \frac{P_{\text{тока}}}{V} = \frac{I'S}{Sl} = \frac{I'}{l}. \quad (4.36)$$

Из формул (4.35) и (4.36) видно, что

$$B' = \mu_0 J, \quad \dot{B}' = \mu_0 \dot{J}, \quad \dot{B} = \dot{B}_0 + \mu_0 \dot{J}. \quad (4.37)$$

#### **4.8.2. Виды магнетиков**

Все вещества по магнитным свойствам подразделяются на три группы – диамагнетики, парамагнетики и магнитоупорядоченные вещества (ферро-, антиферро- и ферримагнетики) [4]. Остановимся на каждой из этих групп несколько подробнее.

##### *Диамагнетики*

Это группа веществ, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атома равен нулю. Магнитная проницаемость этих веществ  $\mu \leq 1$ , что означает незначительное ослабление ими внешнего магнитного поля. Если поместить диамагнетик во внешнее неоднородное магнитное поле, то диамагнетик будет выталкиваться в область более слабого поля. К диамагнетикам относятся инертные газы, металлы Bi, Zn, Cu, Ag, Au, Hg, стекло, мрамор, различные смолы и т.д. [4].

##### *Парамагнетики*

Это группа веществ, у которых магнитный момент атома отличен от нуля даже в отсутствие внешнего магнитного поля. Магнитная проницаемость этих веществ  $\mu \geq 1$ , что приводит к незначительному увеличению внешнего магнитного поля в присутствии парамагнетика. Если поместить парамагнетик во внешнее неоднородное магнитное поле, то он будет втягиваться в область более сильного поля.

К парамагнетикам относятся щелочные и щелочноземельные металлы, алюминий Al, платина Pt, растворы солей железа, газы азот и кислород, редкоземельные металлы и их соединения и т.д. [4].

## Ферромагнетики

Ферромагнетики называются также магнитоупорядоченными веществами. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атома ферромагнетика не равен нулю. Магнитная проницаемость магнитоупорядоченных веществ  $\mu \geq 1000$ , что приводит к значительному увеличению внешнего магнитного поля в присутствии ферромагнетика. К ферромагнетикам относятся такие металлы, как Fe, Co, Ni, Gd, сплавы и соединения этих элементов, и т.д. [4].

Ферромагнетизм обусловлен спиновыми магнитными моментами атомов. Атомы ферромагнетиков имеют незаполненные внутренние электронные оболочки, что приводит к большим магнитным моментам атомов [4].

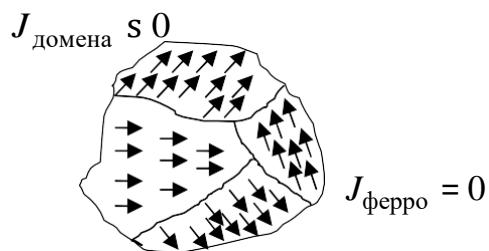


Рис. 4.20

Между магнитными моментами соседних атомов устанавливается обменное взаимодействие, вследствие чего формируются **домены – микрообласти** размерами порядка  $l \in (10^{-4} \dots 10^{-2}) \text{ см}$ , внутри которых магнитные моменты атомов ориентируются параллельно друг другу (рис. 4.20). Поскольку, в отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов различных доменов направлены в разные стороны, поэтому общая намагниченность ферромагнетика равна нулю (рис. 4.20).

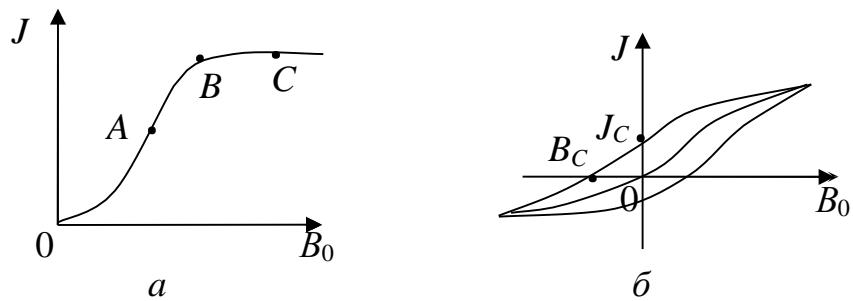


Рис. 4.21

Кривая намагничивания ферромагнетика является нелинейной (рис. 4.21, а). Намагченность ферромагнетика достигает насыщения ( $J$  перестает изменяться с увеличением  $B_0$ ) в слабых магнитных полях.

Для ферромагнетиков характерно **явление гистерезиса** – зависимость свойств образца от его предшествующих состояний или явление отставания изменения намагченности от изменения внешнего магнитного поля. Если намагнить ферромагнетик до насыщения, а затем начать уменьшать внешнее магнитное поле до нуля, то изменение  $J$  будет отставать от изменения  $B_0$ , и, в отсутствии внешнего магнитного поля, ферромагнетик будет обладать остаточной намагченностью  $J_C$  (рис. 4.21, б) [4]. Чтобы устранить остаточную намагченность ферромагнетика (размагнитить его), необходимо приложить внешнее магнитное поле противоположного направления. Значение модуля вектора магнитной индукции  $B_C$  при котором намагченность ферромагнетика обратится в ноль называют **коэрцитивной силой**. Дальнейшее увеличение внешнего магнитного поля  $B_0$  снова приводит к намагничиванию ферромагнетика до насыщения (нижняя веточка). При циклическом изменении  $B_0$  намагченность ферромагнетика будет описывать кривую, называемую **петлей гистерезиса** (рис. 4.21, б) [4].

В зависимости от величины коэрцитивной силы  $B_C$  различают магнитомягкие и магнитожесткие материалы. Магнитомягкие материалы: легко перемагничиваются (коэрцитивная сила  $B_C \approx 1$  мкТл, петля гистерезиса является узкой). Благодаря таким свойствам, магнитомягкие материалы используют при изготовлении устройств, в которых потери энергии при перемагничивании

должны быть незначительными: электродвигатели, сердечники трансформаторов и т.д. Магнитожёсткие материалы трудно перемагнитить (коэрцитивная сила  $B_C \approx 1$  мТл, петля гистерезиса является широкой). В силу таких свойств, магнитожесткие материалы применяются для изготовления постоянных магнитов.

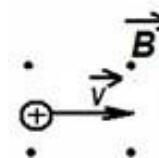
Для каждого ферромагнетика существует температура, выше которой он теряет свои необычные свойства и становится обычным парамагнетиком. Она получила название температуры Кюри ( $T_C$ ). Для железа и никеля  $T_C$  составляет 1038 К и 641 К соответственно [4].

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 17***

1. Верными утверждениями о силе Лоренца являются:

- 1) сила Лоренца является центростремительной силой,
- 2) сила Лоренца изменяет скорость частицы по модулю,
- 3) сила Лоренца работы не совершает,
- 4) действует только на движущиеся заряженные частицы.

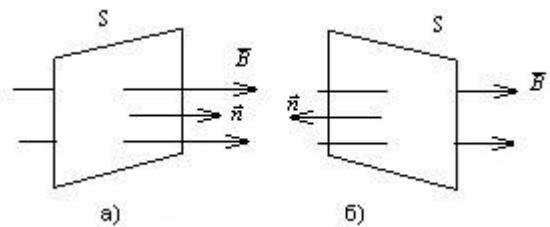
2. На рисунке изображена движущаяся в магнитном поле с индукцией  $B$  положительно заряженная частица. Сила Лоренца, действующая на нее направлена...

- 
- 1) в плоскости рисунка вверх,
  - 2) в плоскости рисунка вниз,
  - 3) перпендикулярно плоскости рисунка от нас,
  - 4) перпендикулярно плоскости рисунка к нам.

3. Физический смысл теоремы Гаусса для вектора магнитной индукции содержится в утверждении

- 1) Источником магнитного поля являются токи проводимости.
- 2) Источником магнитного поля является изменяющееся со временем электрическое поле.
- 3) В природе отсутствуют магнитные заряды.

4. Прямоугольную рамку площадью  $S$ , расположенную в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  так, что ее плоскость перпендикулярна полю (рис. а), поворачивают на  $180^\circ$  (рис. б), при этом изменение магнитного потока через рамку будет равно



1) 0                    2)  $2BS$

3)  $-2BS$             4)  $-BS$

5. Пять веществ имеют различные относительные магнитные проницаемости  $\mu$ . Ферромагнетиками среди них являются вещества:

1)  $\mu = 100$             2)  $\mu = 1,0023$

3)  $\mu = 2000$             4)  $\mu = 0,9998$

## **Библиографический список**

1. Валишев, М.Г. Физика. Часть 1. Механика: учеб. пособие / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2006. – 83 с.

<http://window.edu.ru/resource/721/28721/files/ustu328.pdf>

2. Валишев, М.Г. Физика: учеб. Пособие / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. – СПб. : Изд-во Лань, 2010. – 576 с.

3. Валишев, М.Г. Физика. Часть 2. Электростатика. Постоянный ток : учеб. пособие / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2006. – 60 с.

<http://window.edu.ru/resource/720/28720/files/ustu327.pdf>

4. Валишев, М.Г. Физика. Часть 3. Электромагнетизм : учеб. пособие / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2006. – 55 с.

<http://window.edu.ru/resource/719/28719/files/ustu326.pdf>

Учебное электронное текстовое издание

Повзнер Александр Александрович

Андреева Анна Григорьевна

Шумихина Кямаля Арифовна

## **ФИЗИКА**

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

**Ответственный редактор** *H.B. Лутова*

**Редактор** *A.B. Ерофеева*

**Компьютерная верстка** *авторская*

**Рекомендовано Методическим советом**

**Разрешено к публикации 16.05.2016**

**Электронный формат – pdf**

**Объем 4,7 уч.-изд. л.**



**620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19**

**Информационный портал УрФУ**

**<http://www.ustu.ru>**