



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Электромагнитные явления .....	7
Лекция 1 .....	7
1.1. Явление электромагнитной индукции.....	7
1.1.1 Опыты Фарадея.....	7
1.1.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея. ....	8
1.1.3. Природа сторонних сил .....	8
1.1.4. Правило Ленца .....	10
1.1.5. Токи Фуко .....	11
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 1 .....	12
Лекция 2 .....	13
1.2. Явление самоиндукции. ....	13
1.2.1. Индуктивность контура. Индуктивность соленоида .....	13
1.2.2. ЭДС самоиндукции. Правило Ленца .....	14
1.2.3. Зависимость силы тока от времени при размыкании и замыкании цепи .....	15
1.2.4. Энергия магнитного поля контура с током. Объемная плотность энергии магнитного поля .....	16
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 2 .....	17
Колебания и волны.....	19
Лекция 3 .....	19
2.1. Классификация колебаний.....	19
2.2. Незатухающие механические колебания .....	20
2.2.1.Условия возникновения колебаний .....	20
2.2.2. Уравнение незатухающих гармонических колебаний. Основные характеристики незатухающих колебаний. ....	21
2.3. Затухающие колебания .....	24
2.3.1. Уравнение затухающих колебаний.....	24
2.3.2. Основные характеристики затухающих колебаний.....	25
2.4. Вынужденные механические колебания .....	27

2.4.1. Уравнение вынужденных механических колебаний .....	27
2.4.2. Механический резонанс .....	28
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 3 .....	29
Лекция 4.....	31
2.5. Сложение гармонических колебаний .....	31
2.5.1. Диаграмма вектора амплитуды. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.....	31
2.5.2. Биения.....	32
2.5.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу .....	34
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 4 .....	36
Лекция 5.....	38
2.6. Свободные незатухающие электромагнитные колебания.....	38
2.6.1. Условия возникновения колебаний. ....	38
2.6.2. Уравнения незатухающих электромагнитных колебаний. ....	39
2.7. Затухающие электромагнитные колебания .....	41
2.7.1. Уравнение затухающих электромагнитных колебаний.....	41
2.7.2. Характеристики затухающих электромагнитных колебаний....	43
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 5 .....	45
Лекция 6.....	46
2.8. Волны в упругой среде .....	46
2.8.1. Основные характеристики волн .....	47
2.8.2. Уравнение плоской механической волны. ....	48
2.8.3. Волновое уравнение .....	49
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 6 .....	50
Лекция 7.....	51
2.9. Электромагнитные волны .....	51
2.9.1. Основные свойства электромагнитных волн. Волновое уравнение .....	51

2.9.2. Объемная плотность энергии ЭМВ. Поток энергии. Вектор Умова – Пойнтига .....	55
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 7 .....	56
Волновая оптика.....	57
Лекция 8.....	57
3.1. Понятие световая волна и световой вектор .....	57
3.2. Интерференция света .....	57
3.2.1. Оптическая длина пути и оптическая разность хода. Условия максимума и минимума интенсивности света .....	59
3.2.2. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников света (опыт Юнга) .....	61
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 8 .....	63
Лекция 9.....	64
3.2.3. Интерференция в тонких пленках.....	64
3.2.4. Полосы равной толщины (клин, кольца Ньютона) и полосы равного наклона .....	66
3.2.5. Практическое применение интерференции света .....	69
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 9 .....	71
Лекция 10.....	72
3.3. Дифракция .....	72
3.3.1. Метод зон Френеля .....	73
3.3.2. Дифракция Френеля на диске. ....	76
3.3.4. Амплитудная и фазовая зонные пластиинки.....	78
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 10 .....	79
Лекция 11 .....	80
3.3.5. Дифракция в параллельных лучах на одной щели.....	80
3.3.6. Дифракция на дифракционной решетке .....	82
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 11 .....	85
Квантовая оптика .....	86
Лекция 12 .....	86

4.1. Тепловое излучение.....	86
4.1.1. Характеристики, вводимые для описания теплового излучения. ....	86
4.1.3. Экспериментальные законы теплового излучения а.ч.т. ....	89
4.1.4. Объяснение закономерностей теплового излучения а.ч.т. ....	91
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 12 .....	94
Лекция 13 .....	95
4.2. Внешний фотоэффект .....	95
4.2.1. Вольт-амперная характеристика, ее основные закономерности. ....	95
4.2.2. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. ....	97
4.2.4. Зависимость задерживающего напряжения от частоты. ....	100
4.3. Эффект Комптона.....	101
4.4. Природа электромагнитного излучения. Корпускулярно-волновой дуализм .....	103
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 13 .....	104
Элементы квантовой механики .....	105
Лекция 14.....	105
5.1. Гипотеза де Броиля. Опыты, подтверждающие волновые свойства микрочастиц .....	105
5.2. Соотношения неопределеностей Гейзенберга.....	108
5.2.1. Соотношения неопределеностей как проявление волновых свойств .....	108
5.2.2. Условия применимости классической механики для описания движения микрочастиц .....	110
5.3. Волновая функция. Стандартные условия .....	112
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 14 .....	113
Лекция 15.....	114
5.4. Уравнение Шредингера.....	114

5.4.1. Микрочастица в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме. ....	115
5.4.2. Туннельный эффект. ....	119
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 15 .....	122
Основы физики атомного ядра.....	123
Лекция 16.....	123
6.1. Строение и состав атомного ядра .....	123
6.1.1.Характеристики атомного ядра.....	123
6.1.2. Ядерные силы. Свойства ядерных сил .....	124
6.2. Ядерные реакции .....	127
6.3. Явление радиоактивности.....	128
6.3.1. Виды радиоактивного распада ядер.....	128
6.3.2. Основной закон радиоактивного распада. Активность радиоактивного вещества.....	129
Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 16 .....	131
Библиографический список .....	132

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

## ЛЕКЦИЯ 1

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: электромагнитная индукция, ЭДС индукции, закон Фарадея, сила индукционного тока, правило Ленца, вихревое электрическое поле.

### 1.1. Явление электромагнитной индукции

#### 1.1.1. Опыты Фарадея

В 1831 году Майкл Фарадей экспериментально обнаружил, возникновение электрического тока в замкнутом проводящем контуре при любом изменении магнитного потока, пронизывающего данный контур. Это явление получило название *электромагнитной индукции*, а возникающий в этом явлении электрический ток – индукционного тока.

В опытах Фарадея магнитный поток, пронизывающий первый контур (катушку 1), изменялся различными способами (рис. 1.1): 1) замыкалась и размыкалась цепь второго контура; 2) с помощью реостата изменялась сила тока во втором контуре; 3) второй контур приближался или удалялся относительно первого контура; 4) постоянный магнит приближался или удалялся относительно первого контура [1].

Рис. 1.1

Появление индукционного тока  $I_i$  в вышеперечисленных опытах свидетельствует о том, что при изменении магнитного потока сквозь контур, в последнем возникает ЭДС индукции  $\varepsilon_i$ .

Причем индукционный ток изменял свое направление при смене направления движения магнита, направления движения контуров 1 и 2, при

замене нарастающего тока в контуре 2 убывающим со временем током, при замене замыкания цепи второго контура ее размыканием [1].

Кроме того, было экспериментально доказано, что сила индукционного тока  $I_i$  и ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  зависят от скорости изменения магнитного потока, пронизывающего проводящий контур, и не зависят от способа изменения магнитного потока  $\Phi$  [1].

### **1.1.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея**

На основе проделанных опытов Фарадей сформулировал закон электромагнитной индукции: при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего проводящий контур, в нем возникает ЭДС индукции  $\varepsilon_i$ , равная скорости изменения магнитного потока, взятой с обратным знаком.

(1.1)

где  $\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий любую поверхность  $S$ , опирающуюся на проводящий контур [1].

Индукционный ток, возникающий при этом, можно найти из закона Ома

,

где  $R$  – сопротивление контура.

### **1.1.3. Природа сторонних сил**

Появление ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  свидетельствует о том, что в проводящем контуре возникают сторонние силы, совершающие работу по разделению разноименных электрических зарядов. Природа сторонних сил различна и зависит от того, в какой ситуации они появляются.

*Случай 1. В постоянном магнитном поле находится контур переменной площади или вращается контур постоянной площади, или двигается проводник.*

В этом случае, возникновение ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  связано с действием на свободные заряды силы Лоренца. На рис. 1.2, а, показано, что при движении проводника со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле, электроны под действием силы Лоренца перемещаются к одному концу проводника, вследствие чего, на нем

возникает избыток электронов, а на другом конце – их недостаток. Таким образом, сторонней силой, разделяющей заряды, является *сила Лоренца*.

Рис. 1.2

*Случай 2. Неподвижный контур постоянной площади находится в переменном магнитном поле.*

В этом случае на свободные заряды в проводнике сила Лоренца не действует, и для объяснения возникновения ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  Максвелл сформулировал следующий постулат: *переменное во времени магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле*.

Этот постулат является первым положением теории электромагнитного поля Максвелла.

Согласно Максвеллу, *линии вихревого электрического поля являются замкнутыми*, они связаны с направлением вектора  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  правилом левого буравчика и лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\vec{B}$  (рис. 1.2, б). Именно силы вихревого электрического поля совершают работу по разделению разноименных зарядов в проводнике, т. е. являются сторонними силами.

$$; \quad (1.3)$$

$$, \quad (1.4)$$

где  $\vec{E}_{\text{вихр}}$  – вектор напряженности электрического поля, а контур  $(\Gamma)$  (воображаемая линия) располагается внутри проводника (проводящего контура) [1].

#### **1.1.4. Правило Ленца**

Направление индукционного тока можно найти по *правилу Ленца*: *индукционный ток в контуре возникает такого направления, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало любым изменениям магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток* [1].

С правилом Ленца связан знак минус в формуле (1.1). Действительно, если магнитный поток  $\Phi$  через плоскость контура возрастает, то тогда и согласно (1.1)  $\varepsilon_i < 0$ , т. е. магнитный поток  $\Phi_i$ , создаваемый индукционным током, будет противоположен по знаку магнитному потоку  $\Phi$ . При убывании и магнитные потоки  $\Phi_i$  и  $\Phi$  совпадают по знаку [1].

Алгоритм применения правила Ленца:

1. Определить в центре проводящего контура направление внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ .
2. Определить увеличивается или уменьшается магнитный поток сквозь контур.
3. Если магнитный поток увеличивается, то направление магнитного поля  $\vec{B}_i$ , созданного индукционным током, должно быть противоположно направлению вектора  $\vec{B}$  внешнего магнитного поля ( $\vec{B}_i \uparrow\downarrow \vec{B}$ ), если магнитный поток уменьшается, то –  $\vec{B}_i \uparrow\uparrow \vec{B}$ .
4. Зная направление вектора  $\vec{B}_i$ , по правилу Буравчика (правой руки) определить направление индукционного тока  $I_i$ .

На рис. 1.3 приведен пример определения направления индукционного тока  $I_i$  с помощью правила Ленца. Пусть проводящий контур находится в возрастающем со временем  $(dB/dt) > 0$  внешнем магнитном поле. Тогда магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий контур, тоже увеличивается. Следовательно, силовые линии магнитного поля  $\vec{B}_i$ , созданного появившимся индукционным током, направлены противоположно линиям  $\vec{B}$  индукции

внешнего магнитного поля. Зная направление вектора  $\vec{B}_i$ , по правилу Буравчика (правой руки), определяем направление индукционного тока  $I_i$ .

Рис. 1.3

### 1.1.5. Токи Фуко

*Токи Фуко* – это индукционные токи, возникающие в массивных проводниках. Для таких проводников сопротивление  $R$  будет мало и поэтому индукционные токи ( $I_i = \varepsilon_i / R$ ) достигают большой величины.

*Токи Фуко используются для нагревания и плавления металлических заготовок, получения особо чистых сплавов и соединений металлов.* Для этого металлическую заготовку помещают в индукционную печь (соленоид, по которому пропускают переменный ток) [1]. При этом внутри металла возникают индукционные токи, разогревающие металл (вплоть до его плавления). Если в печи создать вакуум и применить левитационный нагрев (в этом случае силы электромагнитного поля не только разогревают металл, но и удерживают его в подвешенном состоянии вне контакта с поверхностью камеры), то получаются особо чистые металлы и сплавы [1].

*Кроме того, токи Фуко могут приводить и к негативным эффектам – нагреву сердечников трансформаторов, электродвигателей и т. д.* Чтобы уменьшить нежелательное воздействие токов Фуко, массивный проводник набирают в виде отдельных пластин. Сила индукционных токов в отдельных пластинах существенно меньше силы тока, текущего по целому массивному проводнику, поэтому в соответствии с законом Джоуля – Ленца ( $Q = I^2 R t$ ), уменьшается выделяемое в проводнике количество теплоты.

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 1***

1. Что называют явлением электромагнитной индукции?
2. Плоская проводящая рамка находится в магнитном поле (см. рис.). В каких случаях в рамке возникает ЭДС индукции?
3. Прямоугольная проводящая рамка удаляется от прямолинейного проводника с током в перпендикулярном к нему направлении, как показано на рисунке. С помощью правила Ленца, определите направление возникающего в рамке индукционного тока.
4. Используя закон Фарадея и определение силы тока, выведите формулу  $q = -\frac{\Delta\Phi}{R}$  – для заряда, протекшего по замкнутому проводящему контуру за время изменения магнитного потока
5. Неподвижный проводящий контур находится в изменяющемся со временем магнитном поле. Что является причиной возникновения ЭДС индукции в контуре в этом случае?

## ЛЕКЦИЯ 2

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: магнитный поток самоиндукции, индуктивность контура, ЭДС самоиндукции, ток самоиндукции, правило Ленца, силы тока при размыкании и замыкании цепи, энергия магнитного поля контура с током, объемная плотность энергии магнитного поля.

### 1.2. Явление самоиндукции

#### 1.2.1. Индуктивность контура. Индуктивность соленоида

Любой проводник с током является источником магнитного поля. Если этот проводник замкнут (т. е. образует контур), то силовые линии созданного им магнитного поля пронизывают саму плоскость контура (рис. 1.4). Возникающий при этом магнитный поток получил название *магнитного потока самоиндукции*  $\Phi_s$ , т. к. причиной его появления является ток в самом контуре.

Рис. 1.4

В контуре с током, содержащем  $N$  витков, поток самоиндукции  $\Phi_s$  пронизывает каждый виток. В этом случае удобно использовать понятие потокосцепления  $\Psi_s$  самоиндукции ( $\Psi_s = N\Phi_s$ ). Потокосцепление зависит от силы тока в контуре и связано с ним выражением

$$, \quad (1.5)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  – *индуктивность контура*.

Индуктивность  $L$  контура характеризует способность контура с током создавать потокосцепление самоиндукции, и зависит от формы и размеров контура, а также от магнитной проницаемости  $\mu$  окружающей среды. В случае если среда является ферромагнитной, то индуктивность оказывается зависящей

и от тока в контуре (т. к. для ферромагнитных сред  $\mu$  зависит от силы тока в проводнике).

В качестве примера, рассчитаем индуктивность длинного соленоида (длина соленоида много больше диаметра его витков). В этом случае модуль вектора  $\vec{B}$  внутри соленоида вычисляется по формуле

$$\text{.} \quad (1.6)$$

Выражая из формулы (1.5) индуктивность и подставляя в потокосцепление выражение для магнитной индукции (1.6), получим для индуктивности длинного соленоида:

$$\text{,} \quad (1.7)$$

где  $V$  – объем, занимаемый соленоидом.

### **1.2.2. ЭДС самоиндукции. Правило Ленца**

Под явлением самоиндукции понимают *возникновение ЭДС индукции в контуре, по которому протекает изменяющийся со временем ток*. Возникающие при этом ЭДС индукции и индукционный ток называют *ЭДС самоиндукции* и *током самоиндукции*  $I_s$ . Согласно законам Фарадея и Ома, значения ЭДС и тока самоиндукции можно вычислить по формулам

$$\text{.} \quad (1.8)$$

$$\text{.} \quad (1.9)$$

Также как и для явления электромагнитной индукции, для самоиндукции можно сформулировать *правило Ленца: ток самоиндукции препятствует любым изменениям основного тока, текущего по цепи* [2].

Как следует из правила Ленца и выражения (1.9), изменение основного тока в цепи тормозится тем сильнее, чем больше индуктивность контура и меньше сопротивление.

Можно сказать, что индуктивность цепи является мерой ее электрической инертности, подобно тому, как масса в механике является мерой инертности тела при его поступательном движении [1].

### 1.2.3. Зависимость силы тока от времени при размыкании и замыкании цепи

Электрическая цепь, приведенная на рис. 1.5, *a*, содержит ключ *K*, источник постоянного тока с ЭДС  $\varepsilon$ , катушку индуктивности  $L$ , а также сопротивления  $R$  и  $r$ . Пока ключ *K* находится в положении 1, по цепи протекает постоянный ток  $I_0 = \varepsilon / R$ , а в катушке сосредоточена энергия в виде энергии  $W_m$  магнитного поля [2]. В момент времени  $t = 0$  цепь размыкают (ключ *K* переводят в положение 2) и ток в цепи начинает убывать. Убывание тока происходит постепенно, вследствие возникающего в катушке индуктивности явления самоиндукции. При этом запасенная в катушке энергия магнитного поля расходуется на поддержание убывающего тока и на нагревание проводников.

Рис. 1.5

Получим зависимость  $I(t)$  силы тока от времени при размыкании цепи. Для этого запишем закон Ома для замкнутой цепи и воспользуемся выражением (1.8) для  $\varepsilon_S$ :

$$\begin{aligned} & ; \\ & , \\ & . \end{aligned} \quad (1.10)$$

На рис. 1.5, *b* приведены построенные по уравнению (1.10) зависимости силы тока  $I$  от времени  $t$  при различных значениях параметра  $\beta$  – от нуля ( $L \rightarrow \infty$ , соответствует отсутствию убывания тока в цепи) до бесконечности ( $L \rightarrow 0$ , ток мгновенно убывает до нуля). Из формулы (1.10) следует, что чем больше  $\beta$ , т. е. чем больше  $r$  или меньше  $L$ , тем быстрее убывает ток в цепи [1].

Рассмотрим, как изменяется ток при замыкании электрической цепи.

Ключ  $K$  сначала находится в положении 2 (рис. 1.5,  $a$ ), тока в цепи нет. В момент времени  $t = 0$  ключ перебрасывают в положение 1 и ток в цепи начинает нарастать [1]. Увеличение тока происходит постепенно вследствие возникающего в катушке явления самоиндукции. Можно показать, что ток будет увеличиваться по закону

$$I = I_0(1 - e^{-\beta t}), \quad \beta = R/L. \quad (1.11)$$

На рис. 1.5,  $b$  приведены графики зависимости  $I$  от  $t$ , полученные из уравнения (1.11) для разных параметров  $\beta$  – от нуля ( $L \rightarrow \infty$ , ток в цепи не нарастает) до бесконечности ( $L \rightarrow 0$ , ток в цепи мгновенно достигает значения  $I = I_0$ ). Видно, что чем больше  $\beta$ , т. е. чем больше  $R$  и меньше  $L$ , тем быстрее нарастает ток в цепи [1].

#### **1.2.4. Энергия магнитного поля контура с током. Объемная плотность энергии магнитного поля**

Любой контур с током обладает энергией в виде энергии магнитного поля  $W_m$ . Получим формулу для  $W_m$  контура с током. Рассмотрим сначала замкнутую цепь, содержащую катушку индуктивности. Так как в цепи идет ток, то внутри катушки сосредоточена энергия в виде энергии  $W_m$ . При размыкании цепи энергия катушки выделится в проводниках в виде Джоулева тепла  $Q$

$$\dots \quad (1.12)$$

Под *объемной плотностью энергии  $w_m$  магнитного поля* понимают энергию магнитного поля, заключенную в единице объема пространства

$$\dots \quad (1.13)$$

Исследуем, от чего зависит объемная плотность энергии  $w_m$  магнитного поля. Для этого рассмотрим однородное магнитное поле, созданное внутри длинного соленоида с током. Используя выражения (1.12), а также (1.7) для

индуктивности соленоида и (1.6) для индукции магнитного поля, выразим объемную плотность энергии  $w_m$  магнитного поля

(1.14)

Как видно из выражения (1.14), объемная плотность энергии магнитного поля зависит от модуля вектора магнитной индукции  $B$ , а также от магнитных свойств окружающей среды.

В случае однородного магнитного поля (вектор магнитной индукции во всех точках поля одинаков), его энергия, заключенная в конечном объеме  $V$ , определяется согласно (1.14) по формуле

(1.15)

Энергия неоднородного магнитного поля, заключенная в объеме  $V$ , определяется по формуле

(1.16)

### **Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 2**

1. Сформулируйте определение явления самоиндукции.
2. Как изменится индуктивность соленоида, при увеличении в 3 раза числа его витков на единицу длины. Остальные параметры соленоида (длина, площадь поперечного сечения) остаются неизменными.
3. На сколько ампер изменилась сила тока в катушке индуктивностью  $L = 20 \text{ Гн}$ , если при этом за 0,5 мин в ней возникла ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_S = 4 \text{ В}$ ?
4. Электрическая цепь сопротивлением  $R = 10 \text{ Ом}$  содержит катушку индуктивности. При размыкании этой цепи сила тока в ней убывает в  $e$  раз ( $e$  – основание натурального логарифма). Чему равна индуктивность  $L$  катушки?
5. Рассчитайте энергию  $W$  магнитного поля соленоида, если по его обмотке индуктивностью  $L = 0,20 \text{ Гн}$  течет ток силой  $I = 10 \text{ А}$ . Как изменится индуктивность соленоида, при увеличении в 3 раза числа витков на единицу длины. Остальные параметры соленоида (длина, площадь поперечного сечения) остаются неизменными.



# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

## ЛЕКЦИЯ 3

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: гармонические колебания; квазиупругая сила; незатухающие и затухающие колебания; амплитуда, частота, циклическая частота, период и фаза колебаний; законы изменения смещения, скорости, ускорения, кинетической, потенциальной и полной энергии тела, совершающего незатухающие (затухающие) колебания и графики, выражающие эти законы; логарифмический декремент затухания, время релаксации, добротность системы, механический резонанс.

### 2.1. Классификация колебаний

Колебания – это процессы, характеризующиеся определенной степенью повторяемости во времени. В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему внешних сил различают свободные и вынужденные колебания. Свободные колебания совершаются в системе, предоставленной самой себе после однократного выведения ее из положения равновесия (например, качели). Свободные колебания могут быть незатухающими (в отсутствии трения или сопротивления среды) и затухающими. Вынужденные колебания обусловлены внешним периодическим воздействием (например, колебания иглы швейной машины).

Колебания называют периодическими, если значения описывающих их величин повторяются через одинаковый промежуток времени, называемый периодом  $T$ .

Одними из самых распространенных периодических колебаний являются гармонические колебания – колебания, при которых описывающие их величины изменяются по закону косинуса (синуса).

В дальнейшем будем рассматривать только гармонические колебания.

## 2.2. Незатухающие механические колебания

### 2.2.1. Условия возникновения колебаний

Для возникновения незатухающих гармонических механических колебаний необходимы следующие условия: наличие у системы устойчивого положения равновесия; наличие возмущающего воздействия, выводящего систему из положения равновесия; действие упругой (или квазиупругой) силы, возвращающей систему в положение равновесия.

*Квазиупругая сила* – сила любой природы, подчиняющаяся закону Гука (т. е. направлена к положению равновесия и прямо пропорциональна смещению тела от положения равновесия). Таким образом, квазиупругая сила описывается законом

$$F = -kx, \quad (2.1)$$

где  $x$  – смещение тела от положения равновесия;  $k$  – коэффициент квазиупругой (упругой) силы.

Примерами систем, в которых происходят гармонические колебания, являются *пружинный* (рис. 2.1) и *математический* (рис. 2.2) маятники.

Рис. 2.1

Рассмотрим колебания пружинного маятника. После однократного выведения груза из положения равновесия, груз начинает двигаться под действием силы упругости, скорость груза постепенно нарастает и в момент прохождения положения равновесия ( $x=0$ ) становится максимальной. Запасенная в начальный момент времени потенциальная энергия пружины переходит в кинетическую энергию груза. При дальнейшем движении груза, скорость его начинает убывать ( $\vec{F}_y$ , а соответственно и ускорение направлены против смещения) и, достигнув точки с координатой  $x=-x_m$ , груз останавливается. Затем под действием силы упругости груз начинает двигаться

в обратную сторону. Коэффициент  $k$ , входящий в силу упругости – это коэффициент жесткости пружины.

Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на невесомой, нерастяжимой нити длины  $l$ , колеблющаяся под действием силы тяжести (рис. 2.2).

Колебания математического маятника будут гармоническими только при малых углах  $\alpha$  отклонения нити от положения равновесия. Квазиупругая сила  $\vec{F}_y$  представляет собой проекцию на ось Ох результирующей силы, действующей на груз математического маятника (см. рис. 2.2.)

Рис. 2.2

Учитывая малые значения угла отклонения  $\alpha$  ( $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{x}{l}$ ) запишем

,

где – значение коэффициента квазиупругой силы в случае математического маятника.

### **2.2.2. Уравнение незатухающих гармонических колебаний. Основные характеристики незатухающих колебаний.**

Гармонические колебания происходят в замкнутой механической системе ( $F_{\text{ВНЕШ}} = 0$ ) под действием упругой (квазиупругой) силы, в отсутствие сил трения (сопротивления). Полная механическая энергия системы при этом сохраняется.

Согласно II закону Ньютона,

,

Учитывая, что и вводя обозначение, получим

$$= . \quad (2.2)$$

Это дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний.

Решениями этого дифференциального уравнения являются функции:

$$, \quad (2.3)$$

где  $x$  – смещение от положения равновесия в момент времени  $t$ ;  $A$  – амплитуда колебаний, т. е. максимальное смещение (взятое по модулю) от положения равновесия;  $\omega_0$  – циклическая частота незатухающих колебаний – скалярная физическая величина, численно равная числу полных колебаний, совершенных за  $2\pi$  секунд;  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний – определяет фазу колебаний в начальный момент времени;  $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$  – фаза колебаний – величина, определяющая смещение от положения равновесия в данный момент времени.

Кроме того, к основным характеристикам колебаний относятся также следующие величины:  $T_0$  – период незатухающих колебаний, т. е. промежуток времени, за которое совершается одно полное колебание;  $v_0$  – частота колебаний, численно равная числу полных колебаний, совершенных системой за 1 секунду.

$$, \quad (2.4)$$

$$. \quad (2.5)$$

В случае *пружинного маятника* циклическая частота и период незатухающих колебаний равны соответственно:

$$, \quad (2.6)$$

а для математического маятника, с учетом того, что:

$$, \quad (2.7)$$

Рассмотрим, как изменяются со временем скорость и ускорение колеблющегося тела. Пусть смещение тела от положения равновесия изменяется по закону косинуса:

$$. \quad (2.8)$$

Учитывая определения скорости и ускорения тела, запишем:

$$, \quad (2.9)$$

$$, \quad (2.10)$$

где  $v_m = A \cdot \omega_0$  и  $a_m = A \cdot \omega_0^2$  – амплитудные (максимальные) значения скорости и ускорения колеблющегося тела, соответственно.

Графики зависимостей (2.8) – (2.10) при  $\varphi_0 = 0$  представлены на рис. 2.3

Рис. 2.3

Тело, совершающее гармонические колебания, обладает и кинетической, и потенциальной энергией:

$$(2.11)$$

$$(2.12)$$

Поскольку в системе нет неконсервативных сил, то полная механическая энергия  $W$  системы не изменяется:

$$(2.13)$$

На рис. 2.4 приведены графики зависимости кинетической, потенциальной энергии системы, отвечающие зависимостям (2.11), (2.12) при  $\varphi_0 = 0$ , а также полной энергии.

Как видно из графиков, приведенных на рис. 2.3 и 2.4, период изменения потенциальной и кинетической энергий в два раза меньше, чем для смещения  $x$ .

Рис. 2.4

## 2.3. Затухающие колебания

### 2.3.1. Уравнение затухающих колебаний

В реальных условиях механические колебания всегда происходят в какой-либо среде. В этом случае на тело, совершающее колебания, действуют квазиупругая (или упругая) сила и сила сопротивления среды  $\vec{F}_{\text{сопр}}$ , которая в при малых скоростях движения тела прямо пропорциональна его скорости движения и направлена противоположно ей.

$$, \quad (2.14)$$

где коэффициент  $r$  называют коэффициентом сопротивления среды.

Работа силы сопротивления приводит к уменьшению механической энергии замкнутой системы и уменьшению амплитуды колебаний. С помощью второго закона Ньютона выведем зависимость смещения  $x$  тела от положения равновесия с течением времен:

$$(2.15)$$

$$, \quad (2.16)$$

$$, \quad (2.17)$$

где параметр  $\beta$  называют *коэффициентом затухания*.

Уравнение (2.16) является *дифференциальным уравнением затухающих колебаний*. Его решением является функция (уравнение затухающих колебаний в интегральной форме)

$$, \quad (2.18)$$

где  $\omega$  – частота затухающих колебаний, зависящая от собственной частоты  $\omega_0$  и коэффициента затухания:

$$. \quad (2.19)$$

Амплитуда  $A(t)$  затухающих колебаний с течением времени уменьшается и определяется выражением

$$, \quad (2.20)$$

Графики зависимости от времени  $t$  амплитуды колебаний  $A(t)$  и смещения  $x(t)$  приведены на рис. 2.5.

Рис. 2.5

Согласно формуле (2.13) полная механическая энергия колебаний пропорциональна квадрату их амплитуды. Поэтому энергия колебаний убывает также по экспоненциальному закону

$$\cdot \quad (2.21)$$

Затухающие колебания не являются строго периодическими вследствие уменьшения со временем их амплитуды. Однако под периодом  $T$  затухающих колебаний понимают *минимальный промежуток времени, за который колеблющееся тело дважды отклоняется в одну сторону* (рис.2.5). Период затухающих колебаний называют также *условным периодом*.

### **2.3.2. Основные характеристики затухающих колебаний**

1. Критический коэффициент сопротивления среды  $r_k$  – это такой коэффициент, при котором в системе происходит *апериодическое движение*. При этом изменение смещения груза к положению равновесия происходит в отсутствие колебательного движения (кривая 1 или 2 на рис. 2.6).

Убывание смещения  $x$  тела в механической системе по кривым 1 или 2, либо по кривой, расположенной между ними, зависит от начальных условий (например, от того, сообщили или нет маятнику после выведения его из положения равновесия начальную скорость).

Так как при  $r = r_k$  колебательное движение отсутствует, то

$$; \quad (2.22)$$

Для  $r \geq r_k$  в среде наблюдается апериодическое движение тела, а при  $r < r_k$  в среде происходят затухающие колебания.

Рис. 2.6

2. *Время релаксации*  $\tau$  – это время, в течение которого амплитуда колебаний убывает в  $e$ -раз ( $e$ - основание натурального логарифма) [3]

$$\frac{A_0}{A} = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.23)$$

За время релаксации в системе совершаются  $N_e$  полных колебаний [3]

$$N_e = \frac{\tau}{T}, \quad (2.24)$$

3. *Логарифмический декремент затухания*  $\delta$  характеризует уменьшение амплитуды за период колебаний и численно равен

$$\delta = \ln \frac{A_0}{A} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{\tau}, \quad (2.25)$$

4. *Добротность*  $Q$  системы вводят [3] как величину, определяющую потери энергии колебаний системы за один условный период колебаний,

$$Q = \frac{1}{\delta}, \quad (2.26)$$

## 2.4. Вынужденные механические колебания

### 2.4.1. Уравнение вынужденных механических колебаний

Если на колеблющуюся систему, кроме упругой (квазиупругой) силы и силы сопротивления, действует внешняя, периодически изменяющаяся сила, то в системе происходят *вынужденные* механические колебания.

Внешняя сила пополняет энергию системы, расходуемую на работу против силы сопротивления. Поэтому в системе с течением времени устанавливаются вынужденные колебания с постоянной амплитудой (незатухающие колебания).

Пусть внешняя сила изменяется с частотой  $\Omega$  по гармоническому закону:  $F_x = F_0 \cos \Omega t$ . Тогда в проекции на направление движения (ось  $Ox$ ) II закон Ньютона имеет вид

$$m \ddot{x} + c x = F_0 \cos \Omega t, \quad (2.27)$$

Учитывая, что получим

$$m \ddot{x} + c x = A \cos(\Omega t - \phi). \quad (2.28)$$

Это *дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний*.

При установленных вынужденных колебаниях зависимость смещения тела от времени описывается уравнением

,

где частота установленных вынужденных колебаний равна частоте внешней силы  $\Omega$ , амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\phi$  определяются соотношениями:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (2.29)$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \omega^2 + c^2}}, \quad (2.30)$$

В данном случае начальная фаза  $\phi$  определяет сдвиг по фазе между установленными вынужденными колебаниями и внешней силой.

#### 2.4.2. Механический резонанс

Механический резонанс – это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний [3] при приближении частоты вынуждающей силы к некоторой характерной для данной системы частоте  $\Omega_{\text{рез}}$ .

Резонансную частоту  $\Omega_{\text{рез}}$  находим как частоту, при которой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения (знаменатель выражения (2.29) при этом имеет минимум):

,

откуда получаем выражение

$$\cdot \quad . \quad (2.31)$$

Амплитуда колебаний при резонансе равна:

$$\cdot \quad . \quad (2.32)$$

В случае если  $\beta=0$  (сопротивление среды отсутствует), из формулы (2.31) следует, что  $\Omega_{\text{рез}} = \omega_0$ , а амплитуда вынужденных колебаний  $A \rightarrow \infty$ .

Рис. 2.7

Зависимость амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы называется *резонансной кривой*.

На рис. 2.7 представлены резонансные кривые для различных значений коэффициента затухания  $\beta$ . Высота и ширина резонансного пика, зависят от коэффициента затухания  $\beta$ .

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 3***

1. Что называют квазиупругой силой? Чему равен коэффициент квазиупругой силы в случае математического маятника?
2. Четыре системы с одинаковыми массами  $m$  и различными коэффициентами упругости  $k$ , совершают гармонические колебания в соответствие с нижеприведенными уравнениями. Для какой системы коэффициент упругости наименьший?  
1)  $x = 6\sin(3\pi t + \pi)$ , см.      4)  $x = 5\cos(5\pi t + \pi/2)$ , см.  
2)  $x = 3\cos(2\pi t + \pi)$ , см.      8)  $x = 2\sin(4\pi t + \pi/2)$ , см.
3. Что называют логарифмическим декрементом затухания?
4. Материальная точка совершает затухающие колебания в соответствие с законом  $x = 0,02e^{-6t} \cos(\omega t + \pi/4)$ . Логарифмический декремент затухания колебаний  $\lambda = 0,001$ . Определите коэффициент затухания  $\beta$  и частоту  $\omega$  затухающих колебаний.
5. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 минуту уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время 4 минуты?
6. Сформулируйте определение механического резонанса. Приведите встречающиеся примеры проявления механического резонанса.



## ЛЕКЦИЯ 4

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: векторная диаграмма, биения, фигуры Лиссажу.

### 2.5. Сложение гармонических колебаний

#### 2.5.1. Диаграмма вектора амплитуды. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Гармонические колебания можно представить с помощью вектора амплитуды, вращающегося вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 2.8). Длина этого вектора равна амплитуде колебаний. В начальный момент времени угол между вектором амплитуды и положительным направлением оси  $x$  равен начальной фазе колебаний. Тогда проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $Ox$  в момент времени  $t = 0$  равна  $x(0) = A \cos \varphi_0$ . С течением времени проекция на ось  $Ox$  вращающегося вектора амплитуды изменяется по гармоническому закону  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Такой способ представления гармонических колебаний называют *векторной диаграммой* или *диаграммой вектора амплитуды*.

Рис. 2.8

С помощью векторной диаграммы удобно складывать колебания одинаковой частоты и одного направления. Рассмотрим подробнее.

Пусть тело одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих в одном направлении согласно законам

$$, \quad (2.33)$$

$$. \quad (2.34)$$

Результирующее движение представляет собой сумму колебаний  $x_1$  и  $x_2$  и будет также гармоническим колебанием той же циклической частоты  $\omega$  [3]

Рис. 2.9

Чтобы найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания воспользуемся диаграммой вектора амплитуды. Из точки  $O$  проведем вектора  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  под углами  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  к оси  $Ox$  (рис. 2.9) и приведем их во вращение с угловой скоростью  $\bar{\omega}$ .

Проекции векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на ось  $Ox$  при этом совершают гармонические колебания в соответствии с уравнениями (2.33, 2.34). Результирующее колебание будет изображаться проекцией на ось  $Ox$  вектора  $\vec{A}$ , полученного из векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  по правилу параллелограмма [3]. Из построения на рис. 2.9 и теоремы косинусов следует, что

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_0 - \varphi)}, \quad (2.35)$$

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{A_2 \sin(\varphi_0 - \varphi)}{A_1 + A_2 \cos(\varphi_0 - \varphi)}\right), \quad (2.36)$$

где  $A$  – амплитуда,  $\varphi_0$  – начальная фаза результирующего колебания.

Рассмотрим некоторые частные случаи сложения колебаний.

1. ,

т. е. если разность фаз складываемых колебаний равна четному числу  $\pi$ , то тогда колебания максимально усиливают друг друга.

2. ,

т. е. если разность фаз складываемых колебаний равна нечетному числу  $\pi$ , то тогда колебания максимально ослабляют друг друга [3].

3. .

### 2.5.2. Биения

*Биения* – это колебания, с периодически изменяющейся амплитудой, получающиеся в результате сложения двух гармонических колебаний одного

направления с близкими частотами. Сами биения не являются гармоническими колебаниями.

Выведем уравнение биений. Для этого рассмотрим два гармонических колебания  $x_1$  и  $x_2$ , происходящих в одном направлении с близкими частотами ( $\omega_2, \omega_1 \gg \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ) и равными амплитудами (для удобства расчетов):

Тогда результирующее колебание будет происходить по закону

$$x = A \cos(\omega t + \phi), \quad (2.37)$$

где при выводе формулы (2.37) была учтена формула сложения косинусов ( ).

Первый сомножитель в выражении (2.37) изменяется со временем значительно медленнее второго ( $\Delta\omega \ll \omega_2, \omega_1$ ), поэтому можно считать, что результирующее колебание  $x$  представляет собой колебание с циклической частотой  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$  и с изменяющейся со временем амплитудой [3]

$$A = A_1 \cos(\Delta\omega t). \quad (2.38)$$

Под *периодом*  $T_B$  *биений* – понимают период изменения амплитуды результирующего колебания:

$$T_B = \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \quad (2.39)$$

где  $\Delta\omega$  – циклическая частота биений [3].

На рис. 2.10 приведены графики зависимости амплитуды биений  $A_B$  и смещения  $x$  м.т. от времени  $t$  [3].

Рис. 2.10

В общем случае, когда складываются колебания близких частот, но не равных амплитуд, амплитуда результирующего колебания (биений) изменяется в пределах, заключенных в интервале от  $|A_1 - A_2|$  до  $(A_1 + A_2)$ .

Приведем пример биений: источником двух звуковых сигналов является звуковой генератор. Сначала генерируются сигналы разных частот, таких, что человек различает эти сигналы как отдельные. По мере сближения с помощью звукового генератора частот этих сигналов, человек начинает вместо двух

разных сигналов слышать один, но с переменной амплитудой (биения). При выравнивании частот сигналов человек слышит один звуковой сигнал с постоянной амплитудой.

Биения можно использовать, например: 1) для настройки музыкальных инструментов, при анализе восприятия звуков человеком; 2) для определения частоты какого-либо гармонического электрического колебания. Для этого на вход осциллографа подают гармонические колебания от звукового генератора (частоту  $v_\Gamma$  этих колебаний можно изменять) и гармонические колебания с неизвестной частотой  $v$  от какого-либо источника. По наблюдаемой на экране осциллографа картине биений определяют период биений  $T_B$  и частоту колебаний ( $v = v_\Gamma \pm 1/T_B$ ) [3].

### **2.5.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу**

Рассмотрим материальную точку, одновременно участвующую в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ ,

(2.40)

В общем случае, в результате сложения этих колебаний материальная точка будет двигаться по траектории, определяемой соотношением их частот, амплитуд и разности начальных фаз  $\Delta\varphi$  [3].

Пусть частоты складываемых колебаний одинаковы

Проводя математические преобразования и избавляясь от временной зависимости, получим уравнение траектории результирующего движения:

(2.41)

Рассмотрим некоторые примеры сложения взаимно перпендикулярных колебаний.

1)

(2.42)

Выражение (2.42) является уравнением прямой. Траектория движения в этом случае изображена на рис. 2.11, *a*.

2)

(2.43)

Выражение (2.43) также является уравнением прямой. Траектория результирующего движения изображена на рис. 2.11, *b*.

3)

. (2.44)

Это уравнение эллипса (при  $A_1 = A_2$  получается окружность). Траектория результирующего движения изображена на рис. 2.11, *в*.

Рис. 2.11

Направление движения точки по траектории определяется разностью начальных фаз (см. рис. 2.11, *в*).

Все изображенные на рис. 2.11 траектории движения м.т. называют *фигурами Лиссажу*. В случае, если частоты складываемых колебаний различны, получаются фигуры Лиссажу более сложной формы.

Фигуры Лиссажу можно применять для определения частоты какого-либо гармонического колебания (сигнала). Для этого нужно на входы  $x$  и  $y$  осциллографа подать два сигнала – с известной (колебание поступает от генератора электромагнитных колебаний, его частоту можно плавно изменять) и неизвестной частотой. Изменяя частоту генератора можно добиться устойчивой фигуры Лиссажу и, зная по ее виду отношение частот складываемых колебаний определить неизвестную частоту [3].

#### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 4***

1. Сформулируйте суть метода диаграммы вектора амплитуды (векторной диаграммы). Для чего его применяют?
2. Материальная точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одного направления:, см и, см. Постройте векторную диаграмму и запишите уравнение результирующего колебания.

3. Два гармонических колебания происходят с одинаковыми частотами в одном направлении с амплитудами  $A_1 = 4$  см и  $A_2 = 3$  см. Амплитуда их результирующего колебания  $A_p = 1$  см. Определите разность фаз складываемых колебаний.

4. Что называют биениями? В результате чего биения возникают?

5. Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих согласно уравнениям  $x=3\cos(\omega t)$  и  $y=2\sin(\omega t)$ . Найдите уравнение траектории точки (фигуры Лиссажу) и постройте ее, указав направление движения.

На рисунке приведены графики биений, полученные при сложении двух колебаний одного направления с близкими частотами.

Для какого графика частота биений наименьшая? Для какого графика частота складываемых колебаний наибольшая?

## ЛЕКЦИЯ 5

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: электромагнитные колебания (незатухающие и затухающие); колебательный контур; зависимости от времени величин, описывающих электромагнитные колебания и их графики; коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания, время релаксации, критическое сопротивление, апериодический режим.

### 2.6. Свободные незатухающие электромагнитные колебания

#### 2.6.1. Условия возникновения колебаний

Под *электромагнитными колебаниями* понимают периодические изменения с течением времени  $q$  – заряда,  $U$  – напряжения,  $I$  – силы тока;  $W_{\varnothing\varnothing}$  – энергии электрического поля;  $W_m$  – энергии магнитного поля,  $\vec{E}$  – напряженности электрического поля;  $\vec{B}$  – магнитной индукции и т. д. Электромагнитные колебания происходят в *электрическом колебательном контуре* – электрической цепи, содержащей последовательно соединенные конденсатор емкостью  $C$  и катушку с индуктивностью  $L$ .

Если активное сопротивление колебательного контура  $R = 0$ , то такой контур называется *идеальным*. В идеальном колебательном контуре не происходит потери энергии колебаний на джоулево тепло (нагревание проводника), и поэтому в таком контуре наблюдаются свободные незатухающие электромагнитные колебания.

Рассмотрим подробнее свободные электромагнитные колебания. Пусть в начальный момент времени ( $t = 0$ ) конденсатору сообщают максимальный заряд  $q = q_m$  (рис. 2.12). Ток в контуре в начальный момент времени отсутствует ( $I = 0$ ), а следовательно, и энергия магнитного поля катушки тоже равна нулю. Полная энергия колебательного контура при  $t = 0$  – это максимальная энергия электрического поля заряженного конденсатора.

Рис. 2.12

Так как обкладки конденсатора соединены с концами катушки индуктивности, то конденсатор начинает разряжаться. Разрядный ток в контуре возрастает постепенно из-за возникновения в катушке Э.Д.С. самоиндукции. В момент времени  $t = T/4$  конденсатор полностью разряжается ( $q = 0$ ), а сила тока достигает максимального значения ( $I = I_m$ ). Теперь полная энергия колебательного контура – это максимальная энергия магнитного поля катушки. Причем, т. к. в идеальном контуре отсутствуют потери энергии на джоулево тепло, то

В течение второй четверти периода конденсатор постепенно заряжается. В момент времени  $t = T/2$  конденсатор полностью перезаряжается (знаки зарядов его обкладок меняются на противоположные по сравнению с первоначальным состоянием). Ток в контуре в этот момент времени снова равен нулю.

В течение третьей и четвертой четверти периода процессы повторяются, но в обратном направлении.

### **2.6.2. Уравнения незатухающих электромагнитных колебаний**

Поскольку в идеальном колебательном контуре полная энергия остается постоянной:

$$, \quad (2.45)$$

то ее производная по времени равна нулю::

$$. \quad (2.46)$$

Учитывая, что, а и вводя обозначение, преобразуем уравнение (2.46) к виду

$$. \quad (2.47)$$

Уравнение (2.47) описывает изменение заряда на обкладках конденсатора с течением времени и является *дифференциальным уравнением свободных электромагнитных колебаний*. Решением уравнения (2.47) является гармоническая функция

$$, \quad (2.48)$$

где  $\omega_0 = 1/LC$  – циклическая частота незатухающих колебаний;  $\varphi_0$  – начальная фаза;  $q_m$  – амплитудное (максимальное) значение заряда на обкладках конденсатора.

Период свободных электромагнитных колебаний

$$\cdot \quad (2.49)$$

Получим закон изменения силы тока в колебательном контуре с течением времени:

$$, \quad (2.50)$$

где  $q_m\omega_0 = i_m$  – амплитудное значение силы тока в контуре.

Зависимость от времени разности потенциалов на обкладках конденсатора:

$$, \quad (2.51)$$

где – амплитудное значение напряжения на конденсаторе.

На рис. 2.13. представлены графики зависимостей (2.48), (2.50), (2.51) при начальной фазе колебаний  $\varphi_0 = 0$ .

Рис. 2.13

Рассмотрим зависимости от времени энергии электрического и магнитного полей:

$$. \quad (2.52)$$

$$. \quad (2.53)$$

На рис. 2.14 приведены графики, выражающие зависимости (при  $\Phi_0 = 0$ ) энергии электрического и магнитного поля в колебательном контуре, а также полной энергии  $W$  контура от времени. Из приведенных графиков видно, что период изменения энергии электрического (магнитного поля) в два раза меньше периода колебаний заряда (силы тока) в контуре.

Рис. 2.14

## 2.7. Затухающие электромагнитные колебания

### 2.7.1. Уравнение затухающих электромагнитных колебаний

Если колебательный контур (рис. 2.15) обладает активным сопротивлением  $R$ , то полная энергия контура с течением времени уменьшается вследствие выделения джоулева тепла на резисторе  $R$  при протекании через него тока. В таком контуре будут наблюдаться *затухающие электромагнитные колебания*.

Рис. 2.15

Выведем уравнение затухающих электромагнитных колебаний. Изменение полной энергии контура за единицу времени равно выделяющейся тепловой мощности  $P = I^2 R$  на сопротивлении  $R$ :

$$; \quad (2.54)$$

$$. \quad (2.55)$$

Учитывая, что, и, вводя обозначение

$$, \quad (2.56)$$

получим

$$. \quad (2.57)$$

Уравнение (2.57) является *дифференциальным уравнением затухающих электромагнитных колебаний*. Решением этого уравнения является функция, описывающая изменение заряда на обкладках конденсатора с течением времени:

$$, \quad (2.58)$$

где  $q_m(t)$  – амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора. С течением времени  $q_m(t)$  убывает по экспоненциальному закону:

$$. \quad (2.59)$$

Коэффициент затухания  $\beta$ , входящий в показатель экспоненты, характеризует быстроту уменьшения амплитуды колебаний, а частота  $\omega_0$  затухающих колебаний связана с собственной частотой  $\omega_0$  соотношением

$$(2.60)$$

На рис. 2.16 изображен график зависимости заряда на обкладках конденсатора от времени.

Рис. 2.16

Полная энергия колебательного контура уменьшается со временем по закону:

(2.61)

Как видно из формул (2.21) и (2.61), энергия системы как в случае механических, так и электромагнитных затухающих колебаний убывает по экспоненциальному закону.

## 2.7.2. Характеристики затухающих электромагнитных колебаний

Частота затухающих колебаний связана с частотой  $\omega_0$  собственных колебаний и коэффициентом  $\beta$  затухания, а также с параметрами контура соотношениями [3]:

• (2.62)

Период затухающих колебаний:

(2.63)

Логарифмический декремент затухания характеризует уменьшение амплитуды колебаний за один период и численно равен [3]:

$$, \quad (2.64)$$

*Время релаксации*  $\tau$  – время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз:

(2.65)

В колебательном контуре, обладающем емкостью, индуктивностью и активным сопротивлением, могут быть реализованы различные режимы работы:

- 1) *периодический режим* – при малом затухании ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) происходит периодическое изменение заряда (рис. 2.16) на обкладках конденсатора;

2) *апериодический режим* – наблюдается, когда при сильном затухании, колебаний заряда не происходит (рис. 2.17, а);

Рис. 2.17

3) *критический режим* – частота затухающих колебаний  $\omega=0$ . Этот режим работы реализуется, когда  $\beta^2 = \omega_0^2$ . Сопротивление контура  $R_{kp}$ , при котором наблюдается этот режим, также называется критическим

$$\cdot . \quad (2.66)$$

Зависимость заряда на обкладках конденсатора от времени в критическом режиме изображена на рис. 2.17, б.\

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 5***

1. Что понимают под электромагнитными колебаниями? В каких системах они могут наблюдаться?
2. На рисунке изображена зависимость силы тока  $i$  от времени  $t$  в колебательном контуре, сопротивлением которого можно пренебречь. Под какими номерами приведены графики, выражающие зависимости от времени электрической энергии в контуре и напряжения на обкладках конденсатора?
3. Вследствие чего уменьшается полная энергия колебательного контура в котором происходят затухающие электромагнитные колебания?
4. Что такое критическое сопротивление контура  $R_{\text{кр}}$ ? При каком условии в колебательном контуре возникнет апериодический разряд конденсатора (т. е. колебаний происходить не будет)?
5. Ниже приведены зависимости заряда от времени в двух колебательных контурах, индуктивность которых одинакова:  
1)  $q=10\cos(200\pi t+\pi)$ , мкКл      2)  $q=6\cos(400\pi t)$ , мкКл  
Для какого из приведенных случаев емкость контура больше? Во сколько раз?

## ЛЕКЦИЯ 6

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: волна; бегущие и стоячие волны; поперечные и продольные волны; волновая поверхность, фронт волны; фазовая скорость, период и длина волны; волновой вектор, волновое число; уравнение плоской механической волны, волновое уравнение.

### 2.8. Волны в упругой среде

Процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени называется *волной*. Частицы среды, в которой распространяются колебания, волной не увлекаются, а лишь колеблются вблизи своих положений равновесия. Однако энергия колебаний переносится от источника к точкам среды. Волны, переносящие в направлении своего распространения энергию колебательного движения, называются *бегущими*. Механические волны могут распространяться только в *упругих средах*, между частицами которых действуют упругие силы. Смещение от положения равновесия какой-то одной частицы в упругой среде приводит к смещению соседней с ней частицы и т. д. – в среде распространяется упругая волна.

Различают *поперечные* и *продольные* механические волны.

Если частицы среды колеблются в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны (рис. 2.18, *a*), то такие волны называются *поперечными* (например, волна на поверхности жидкости). Если же частицы среды колеблются в направлении распространения волны (рис. 2.18, *б*), то такие волны называются *продольными* (например, звук).

Рис. 2.18

Поперечные волны распространяются только в тех средах, в которых возможна деформация сдвига (т. е. в твердых телах и на поверхности жидкостей). Продольные волны распространяются и в твердых телах, и в газах,

и в жидкостях, т. е. в средах, в которых возможна деформация сжатия и растяжения.

### **2.8.1. Основные характеристики волн**

Все точки среды, колеблющиеся в одинаковой фазе, образуют *волновую поверхность*. В каждый момент времени волновых поверхностей много и они неподвижны.

Точки среды до которых к данному моменту времени успела распространиться волна, образуют *волновой фронт* (или *фронт волны*). В каждый момент времени волновой фронт один. Фронт волны с течением времени перемещается в пространстве. По форме волнового фронта различают сферические, цилиндрические и плоские волны.

*Фазовая скорость*  $\vec{v}$  *волны* (скорость распространения волны в среде) – скорость перемещения в пространстве данной фазы колебаний.

*Период*  $T$  *волны* – время, за которое любая точка среды совершает одно полное колебание.

*Под длиной волны*  $\lambda$  понимают расстояние, на которое перемещается волновой фронт за время, равное периоду колебаний

$$, \quad (2.67)$$

где  $v$  – частота,  $\omega$  – циклическая частота колебаний частиц среды.

Также, длина волны равна наименьшему расстоянию между двумя точками среды, совершающими колебания в одинаковой фазе.

*Волновой вектор*  $\vec{k}$  – вектор, сонаправленный с направлением распространения волны.

*Волновое число*  $k$  – модуль волнового вектора. Волновое число можно выразить через длину волны

$$. \quad (2.68)$$

### 2.8.2. Уравнение плоской механической волны

Под *уравнением волны* понимают уравнение, определяющее смещение  $\xi$  от положения равновесия точек среды, находящихся на произвольном расстоянии от источника колебаний в любой момент времени.

Запишем уравнение плоской монохроматической волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$  [3]. Пусть источник находится в начале координат (рис. 2.19) и совершают колебания по закону:

$$\xi(0, t) = A \cos \omega t. \quad (2.69)$$

Благодаря упругой связи между частицами среды спустя некоторое время в колебательное движение вступит и произвольная точка  $M$  среды, находящаяся на расстоянии  $x$  от источника колебаний. Причем, если среда не поглощает энергию (или поглощением энергии средой можно пренебречь), то точка  $M$  будет совершать колебания с той же частотой и амплитудой, что и источник.

Рис. 2.19

Но так как волне нужно время, чтобы пройти это расстояние  $x$ , то колебания точки  $M$  будут отставать по фазе от колебаний в источнике.

$$, \quad (2.70)$$

где  $\tau$  — время, необходимое для того, чтобы волна от источника дошла до точки  $M$ .

С учетом этого

$$. \quad (2.71)$$

Уравнение (2.71) является *уравнением плоской монохроматической волны*, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ .

Для плоской монохроматической волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $Ox$ , *уравнение волны* примет вид:

$$. \quad (2.72)$$

С помощью уравнения волны (2.71) можно построить два различных графика:

- 1) «моментальная фотография» волны – зависимость смещения точек среды в данный момент времени от их координат (рис. 2.20, *a*);
- 2) «временная развертка» – зависимость смещения конкретной точки среды от времени (рис. 2.20, *б*).

Рис. 2.20

С помощью уравнений (2.71) и (2.72), можно найти скорость и ускорение частиц среды, в которой распространяется волна, в любой момент времени:

$$, \quad (2.73)$$

$$. \quad (2.74)$$

Выбор знака перед вторым слагаемым в скобках, определяется направлением распространения плоской волны: знак «–» ставится если волна распространяется в положительном направлении оси  $Ox$ , и знак «+» – если в отрицательном направлении оси  $Ox$ .

### 2.8.3. Волновое уравнение

Уравнения (2.71), (2.72) плоской волны, распространяющейся в положительном (отрицательном) направлении оси  $Ox$  являются решениями дифференциального уравнения второго порядка, называемого *волновым*:

$$. \quad (2.75)$$

Если плоская гармоническая волна распространяется в произвольном направлении, которое можно задать радиус-вектором  $\vec{r}$ , то ее волновое уравнение и уравнение волны записутся, соответственно, следующим образом

$$, \quad (2.76)$$

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 6***

1. Сформулируйте определения поперечной и продольной волны. В каких средах они могут распространяться?
2. Выберите утверждения, которые Вы считаете верными для волны, распространяющейся в упругой среде?
  - 1) фронт волны является волновой поверхностью;
  - 2) волновые поверхности при распространении волны перемещаются;
  - 3) частицы среды вместе с волной не перемещаются, перемещается только фронт волны;
  - 4) волновых поверхностей может быть бесконечное множество.
3. Для двух точек плоской гармонической волны, расстояние между которыми  $l=3\lambda/4$ , разность фаз колебаний равна...
  - 1)  $\Delta\varphi=4\pi/3$
  - 2)  $\Delta\varphi=3\pi/2$
  - 3)  $\Delta\varphi=\pi/2$
  - 4)  $\Delta\varphi=\pi$
4. Чему равна длина волны с частотой 4 Гц, распространяющейся по шнуру со скоростью 8 м/с?
5. На рисунке приведены фотография плоской волны, распространяющейся в упругой среде вдоль оси  $0x$ , в некоторый момент времени и зависимость скорости колебаний произвольной частицы среды от времени. Используя приведенные зависимости, определите фазовую скорость волны и максимальную скорость колебаний частиц среды.

## ЛЕКЦИЯ 7

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: определение электромагнитной волны (ЭМВ, основные свойства ЭМВ; волновое уравнение; объемная плотность энергии электромагнитной волны; поток энергии; вектор Умова – Пойнтинга.

### 2.9. Электромагнитные волны

#### 2.9.1. Основные свойства электромагнитных волн. Волновое уравнение

Электромагнитной волной (ЭМВ) называется процесс распространения в пространстве с конечной скоростью неразрывно связанных друг с другом переменных электрического и магнитного полей.

Существование ЭМВ вытекает из теории Максвелла, в основе которой лежат два постулата: 1) переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле (явление электромагнитной индукции); 2) переменное электрическое поле, в свою очередь, порождает в окружающем пространстве вихревое магнитное поле.

За счет непрерывного взаимопревращения электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде электромагнитных волн.

Теория Максвелла не только предсказала возможность существования электромагнитных волн, но и установила их *основные свойства* [4].

1. В электромагнитной волне (ЭМВ) вектора напряженности электрического поля и магнитной индукции совершают колебания в одинаковой фазе:

$$\text{.} \quad (2.77)$$

Кроме того, вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$  совершают колебания (рис. 2.21) в плоскости, перпендикулярной скорости распространения волны:,. Следовательно, ЭМВ – *поперечная волна* [4]. Как видно из рис. 2.21, на котором изображена «моментальная фотография ЭМВ», вектора образуют правую тройку.

Рис. 2.21

Уравнения (2.77) являются решениями волновых уравнений ЭМВ [4]:

(2.78)

В левой части волновых уравнений (2.78) использовано обозначение оператора Лапласа:

. (2.79)

2. Электромагнитные волны могут распространяться как в веществе, так и в вакууме. Скорость распространения ЭМВ в среде зависит от электрических и магнитных свойств вещества.

Скорость  $c$  распространения ЭМВ в вакууме является максимальной и выражается через электрическую ( $\epsilon_0$ ) и магнитную ( $\mu_0$ ) постоянные:

. (2.80)

В любой среде электромагнитные волны распространяются со скоростью  $v$ , меньшей, чем в вакууме:

, (2.81)

где  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  – абсолютный показатель преломления данного вещества, зависящий от относительной диэлектрической  $\epsilon$  и относительной магнитной проницаемости  $\mu$  среды [4]. Таким образом, скорость ЭМВ в веществе равна

. (2.82)

3. Если электромагнитная волна попадает на границу раздела двух сред с различными абсолютными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , то происходит отражение и преломление ЭМВ (рис. 2.22). При этом выполняются следующие законы [4]:

- падающий, отраженный и преломленный лучи, а также перпендикуляр к границе раздела сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости (рис. 2.22);
- закон отражения:  $\alpha = \beta$ ;
- закон преломления:

, (2.83)

где  $n_{21}$  – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

Рис. 2.22

Кроме того, при переходе ЭМВ из одной среды в другую, период  $T$  волны и ее частота  $v$  остаются неизменными, а скорость  $v$  и длина волны  $\lambda$  изменяются, так как

$$, \quad (2.84)$$

где  $\lambda$  – длина волны в вакууме,  $\lambda_{\text{ср}}$  – длина волны в среде.

Рассматривая отражение электромагнитной волны от границы раздела двух сред, необходимо учитывать соотношение между показателями преломлений этих двух сред. Так, если ЭМВ отражается от оптически более плотной среды (), то фаза колебаний вектора  $\vec{E}$  изменяется на  $\pi$  (вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{E}_{\text{опт}}$  направлены в противоположные стороны, рис. 2.23, *a*). При этом фаза вектора  $\vec{B}$  не изменяется (вектора  $\vec{B}$  и  $\vec{B}_{\text{опт}}$  сонаправлены, рис. 2.23, *a*) [3]. При отражении ЭМВ от оптически менее плотной среды (), наоборот, изменяется скачком на  $\pi$  фаза колебаний вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции, при этом фаза колебаний вектора  $\vec{E}$  остается прежней (рис. 2.23, *б*).

Рис. 2.23

Изменение на  $\pi$  фазы векторов  $\vec{E}$  или  $\vec{B}$ , означает что при отражении падающей на границу раздела двух сред плоской ЭМВ, тройка векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  поворачивается на угол  $180^\circ$  либо вокруг вектора  $\vec{B}$  (если, рис. 2.23, *а*), либо вокруг вектора  $\vec{E}$  (если, рис. 2.23, *б*) [3].

4. Электромагнитные волны материальны. Распространяясь в пространстве, они обладают массой, импульсом, производят давление на поверхность, на которую они падают [4].

5. В любой момент времени объемные плотности энергии электрического ( $E$ ) и магнитного ( $B$ ) полей электромагнитной волны одинаковы:

,

(2.85)

## 2.9.2. Объемная плотность энергии ЭМВ. Поток энергии. Вектор Умова – Пойнтига

Объемную плотность энергии ЭМВ  $w$  можно найти как сумму объемной плотности энергии электрического поля  $w_{\text{эл}}$  и объемной плотности энергии магнитного поля  $w_m$ :

(2.86)

Учитывая равенство (2.85) для объемных плотностей энергии, можно показать, что

,  
(2.87)

тогда (2.87) можно переписать в виде

.  
(2.88)

Для характеристики процесса переноса энергии электромагнитной волной вводят поток энергии и плотность потока энергии.

*Поток энергии*  $\Phi$  – скалярная физическая величина, равная энергии, переносимой электромагнитной волной через некоторую поверхность площадью  $s$  в единицу времени (рис. 2.24)

.  
(2.89)

*Плотность потока энергии*  $\vec{P}$  (ее также называют вектором Пойнтига, или вектором Умова – Пойнтига) – это векторная величина, численно равная энергии, переносимой через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени [4].

.  
(2.90)

Рис. 2.24

Вектор Умова – Пойнтига можно представить и в таком виде:

.  
(2.91)

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 7***

1. Сформулируйте определение электромагнитных волн и назовите основных их свойства?
2. Чему равна частота колебаний вектора индукции магнитного поля электромагнитной волны, распространяющейся в воздухе с длиной волны  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м?
3. Что происходит с частотой, скоростью и длиной ЭМВ при переходе ее из стекла в воздух?
4. На какую длину волны, необходимо настроить приемник, чтобы он мог принимать сигнал радиостанции, работающей на частоте 101,7 Гц?
5. В некоторый момент времени ЭМВ «дошла» до точки среды с координатами  $(x,y,z)$ . Причем напряженность электрического поля  $\vec{E} = (E, 0, 0)$ , а индукция магнитного поля  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . Вдоль какой координатной оси распространялась ЭМВ?

# ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

## ЛЕКЦИЯ 8

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: световая волна и световой вектор; когерентность и монохроматичность волн; интерференция света и условия ее наблюдения; Оптическая длина пути и оптическая разность хода волн; условия максимума и минимума интенсивности света.

### 3.1. Понятие световая волна и световой вектор

*Световые волны* – это электромагнитные волны видимого диапазона излучения: ( $400 < \lambda < 780$ ) нм. Световые волны испускаются при переходах электронов между уровнями энергий в молекулах и атомах, при тепловых и электрических воздействиях на них.

В вышеуказанном диапазоне длин волн человек различает такие основные цвета, как фиолетовый, синий, голубой, зеленый, желтый, оранжевый, красный. Если сложить все волны видимого диапазона излучения, то тогда получится излучение, которое называют *белым светом* [5].

Из двух характеристик ЭМВ (вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля и вектора индукции  $\vec{B}$  магнитного поля) наибольшее воздействие на человеческий глаз оказывает вектор напряженности электрического поля ЭМВ, вызывая в глазу световые ощущения. Поэтому вектор  $\vec{E}$  назвали *световым вектором*.

При дальнейшем описании интерференции света будем рассматривать именно световой вектор – вектор  $\vec{E}$ .

### 3.2. Интерференция света

*Интерференция света* – это такое наложение световых волн, при котором наблюдается пространственное перераспределение интенсивности результирующей волны: в одних точках пространства, накладываемые световые

волны усиливают друг друга (светлые области), а в других – ослабляют (темные области).

Не все световые волны могут интерферировать между собой. Интерференция наблюдается только при наложении *когерентных световых волн*. Волны являются *когерентными*, если их частоты одинаковы, а разность фаз с течением времени не изменяется. Кроме того для наблюдения интерференционной картины необходимо, чтобы колебания световых векторов  $\vec{E}$ , интерферирующих волн, совершились вдоль одного или близких направлений.

Любые два независимых источника света излучают некогерентные световые волны. Чтобы получить когерентные волны, необходимо каким-либо образом разделить свет от одного источника на две части примерно одинаковой интенсивности. Рассмотрим некоторые способы получения когерентных световых волн.

### 1. Щели Юнга

Две узкие (десятые доли мм) параллельные друг другу щели  $S_1$  и  $S_2$ , вырезанные в непрозрачном экране, освещаются светом, прошедшим через столь же узкую щель  $S$ , равноотстоящую от  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 3.1). Щели  $S_1$  и  $S_2$  являются источниками вторичных когерентных волн. Накладываясь друг на друга в точке А на экране Э, волны интерферируют.

Рис. 3.1

### 2. Зеркала Френеля

Как видно из рис. 3.2, световая волна одновременно падает на два зеркала, расположенных под углом  $\alpha \approx 180^\circ$ . Отраженные от зеркал лучи интерферируют на экране в точке А.

Когерентные части волны распространяются так, как будто бы они испускаются двумя разными источниками  $S_1$  и  $S_2$ .

Рис. 3.2

### 3. Тонкая прозрачная пленка

При отражении падающего светового луча  $\Pi$  от нижней и верхней поверхностей пленки, возникают когерентные волны 1 и 2 (рис. 3.3), которые при наложении будут интерферировать.

Рис. 3.3

#### **3.2.1. Оптическая длина пути и оптическая разность хода. Условия максимума и минимума интенсивности света**

Скорость света зависит от того в какой среде он распространяется, поэтому за одно и то же время, в разных средах свет будет проходить неодинаковые расстояния.

*Оптической длиной пути  $L$  световой волны называется произведение расстояния  $S$ , пройденного волной в данной однородной среде, на абсолютный показатель преломления этой среды:*

*Оптическая разность хода  $\Delta$  двух когерентных волн – разность их оптических путей:*

Оптическая разность хода – величина алгебраическая: она может быть положительной или отрицательной [5].

Рассмотрим интерференцию двух световых волн, распространяющихся в разных средах от когерентных источников 1 и 2, с одинаковой начальной фазой (см. рис. 3.4). Тогда уравнения этих световых волн могут быть записаны в виде:

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - k_1 S_1 + \phi_0) \quad \text{и} \quad E_2 = E_{02} \cos(\omega t - k_2 S_2 + \phi_0),$$

где  $E_{01}$  и  $E_{02}$  – амплитуды интерферирующих волн.

Рис. 3.4

Квадрат результирующей амплитуды при сложении колебаний, направленных вдоль одной прямой, определяется выражением

(3.1)

, (3.2)

где длина световой волны в среде с показателем преломления  $n$ , а  $\lambda$  – длина этой же волны в вакууме.

Из выражения (3.1) следует, что интерферирующие волны 1 и 2 будут максимально усиливать друг друга в случае, когда, т. е. разность фаз волн 1 и 2 должна быть равна, где  $m$  – целое число. Следовательно, с учетом формулы (3.2) получаем, что при максимальном усилении волн: или

. (3.3)

Оптическая разность хода  $\Delta$  равна четному числу полуволн – *условие максимума интенсивности*.

Также из выражения (3.1) получаем, что интерферирующие световые волны наиболее ослабляют друг друга при, т. е. когда их разность фаз равна. Следовательно, при максимальном ослаблении волн: или

. (3.4)

Оптическая разность хода волн  $\Delta$  равна нечетному числу полуволн – *условие минимума интенсивности*.

### 3.2.2. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников света (опыт Юнга)

Схема опыта Юнга и интерференционная картина в виде светлых и темных полос на экране представлены на рис. 3.5.

Пусть 1 и 2 – когерентные щелевые источники света, расположенные на расстоянии  $d$  друг от друга (такие источники получаются, как правило, при падении световой волны на непрозрачную пластинку с узкими щелями). Экран Э расположен параллельно  $d$  на расстоянии  $l$  ( $l > > d$ ). Световые волны, идущие от источников 1 и 2, на экране накладываются друг на друга, интерферируют, вследствие чего экран окрашивается чередующимися светлыми и темными прямолинейными полосами.

Рассмотрим интерференцию двух лучей от источников 1 и 2 на экране в точке А. Так как оба луча распространяются в воздухе ( $n = 1$ ), то их оптические пути  $S_1$  и  $S_2$  совпадают с геометрическими. По теореме Пифагора (см. рис 3.5):

Рис. 3.5

Вычитая из первого второе равенство, имеем:, где – оптическая разность хода двух лучей. Опыт показывает, что четкая интерференционная картина наблюдается только вблизи центра экрана, т. е. при  $x \ll l$ , поэтому. Тогда для оптической разности хода лучей 1 и 2 получаем

(3.5)

Приравнивая выражение (3.5) для разности хода к условиям (3.3) максимума и (3.4) минимума получим координаты *светлых*  $x_{\max}$  и *темных*  $x_{\min}$  полос

$$, \quad (3.6)$$

$$, \quad (3.7)$$

где  $m = 0, 1, 2 \dots$

Видно, что в центре картины располагается максимум (при  $m = 0$ ,  $x_{\max}=0$ ).

Шириной интерференционной полосы  $\Delta x$  называется расстояние между соседними минимумами (или максимумами) интенсивности. Светлые и темные интерференционные полосы имеют *одинаковую ширину*, равную

(3.8)

Если источники 1 и 2 испускают немонохроматический свет, то на экране наблюдаются цветные полосы.

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 8***

1. Сформулируйте определение интерференции и условие его наблюдения.
2. Сформулируйте условия максимального усиления и ослабления света при интерференции.
3. Электромагнитные волны частотой  $v = 5 \cdot 10^{14}$  Гц испускаются двумя когерентными источниками. Чему равна минимальная разность хода волн, если наблюдается минимум интерференции?
4. Чему равна результирующая интенсивность волн при интерференции двух одинаково поляризованных волн с одинаковыми интенсивностями  $I$  и разностью фаз  $\Delta\phi = 0$ ?
5. В опыте Юнга непрозрачная пластина с двумя параллельными щелями сначала освещалась монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 550$  нм (зеленый цвет), а затем светом – с  $\lambda = 700$  нм (красный цвет). Как изменилась при этом ширина интерференционных полос, наблюдавшихся на экране?

## ЛЕКЦИЯ 9

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: интерференция в тонких пленках; полосы равной толщины; кольца Ньютона; полосы равного наклона; просветление оптики.

### 3.2.3. Интерференция в тонких пленках

Рассмотрим находящуюся в воздухе ( $n = 1$ ) тонкую прозрачную пленку толщиной  $d$  и показателем преломления  $n$ . На пленку падает монохроматическая световая волна  $\Pi$  (рис. 3.6) под углом  $\alpha$ . В точке  $A$  падающая волна  $\Pi$  частично отразится (луч 1), частично преломится под углом  $\beta$ . Преломленный луч, достигнув нижней поверхности пленки в точке  $B$ , частично преломится и выйдет из пленки (луч 3) и частично отразится, дойдя до точки  $C$ . В точке  $C$  волна вновь делится: преломляется и выходит в воздух (луч 2), отражается и, достигнув точки  $F$ , преломляется и покидает пленку (луч 4). Волны 1, 2, 3, 4 образуются из одного падающего луча  $\Pi$  [6] и, поэтому, являются *когерентными*. При этом лучи 1 и 2 являются отраженными, а лучи 3 и 4 – проходящими.

Рис. 3.6

Для наблюдения интерференции лучей 1 и 2, на их пути надо поставить собирающую линзу, в фокальной плоскости которой размещен экран  $\mathcal{E}$  (рис. 3.6). Лучи пересекутся на экране в точке  $P$ . Результат их интерференции будет определяться оптической разностью хода  $\Delta$ , которая возникает на участке от

точки  $A$  до плоскости  $EC$  (см. рис. 3.6): луч 2 проходит оптический путь  $(AB+BC)$   $n$ , а луч 1 проходит в воздухе путь  $AE$ .

Также необходимо учесть, что луч 1 отражается в точке  $A$  от оптически более плотной среды (пленки), что приводит к изменению фазы светового вектора на  $\pi$ . Такое изменение фазы колебаний эквивалентно изменению оптического пути луча на  $\lambda/2$ . Отражение луча в точке  $B$  происходит от оптически менее плотной среды (воздуха), поэтому вектор  $\vec{E}$  не изменяет свою фазу [6].

Таким образом, оптическая разность хода лучей 1 и 2, запишется в виде

$$\text{.} \quad (3.9)$$

Учитывая закон преломления света и геометрию построения, можно показать, что из формулы (3.9) для оптической разности хода лучей 1 и 2 получается выражение:

$$\text{.} \quad (3.10)$$

Световые волны 1 и 2 усиливают друг друга, если или

$$\text{.} \quad (3.11)$$

Световые волны 1 и 2 ослабляют друг друга, если или

$$\text{.} \quad (3.12)$$

При рассмотрении интерференции проходящих лучей 3 и 4, получим, что условия максимума (3.11) для отраженного света будут соответствовать условиям минимума для лучей 3 и 4, а условия минимума (3.12) лучей 1 и 2 соответствует условиям максимума в проходящем свете [6].

### **3.2.4. Полосы равной толщины (клин, кольца Ньютона) и полосы равного наклона**

1. Клин – тонкая пленка с непараллельными гранями (клин) угол между которыми мал. Пусть на клин К падает плоская волна (рис. 3.7). При отражении лучей 1 и 2 от верхней и нижней поверхностей клина получаются лучи 1' и 1'', 2' и 2''. Пройдя через линзу, лучи 1' и 1'' пересекаются на экране Э в точке А, являющейся изображением точки В. Результат интерференции лучей 1' и 1'' зависит от толщины клина  $d$ , а результат интерференции в точке А' лучей 2' и 2'' – от толщины клина  $d'$ . Таким образом, на экране Э наблюдается интерференционная картина в виде чередующихся светлых и темных полос, возникающая от многих падающих лучей. Каждая интерференционная полоса появляется за счет отражения от мест пленки с одинаковой толщиной – *полосы равной толщины*. Сами полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности клина (плоскость В–В'), а их изображение с помощью линзы наблюдается на экране Э.

Рис. 3.7

При нормальном падении света на клин, полосы равной толщины оказываются локализованными на верхней поверхности клина.

В случае интерференции на клине, для оптической разности хода световых лучей справедлива формула (3.10), в которой надо учесть, что в разных местах клина толщина разная.

При освещении клина белым светом, то *полосы равной толщины* окрашены во все цвета радуги.

2. Кольца Ньютона. Частным случаем полос равной толщины является интерференционная картина, возникающая при отражении света от клина, образованного между стеклянной пластинкой П и соприкасающейся с ней линзой Л большого радиуса кривизны (рис. 3.8). Пространство между линзой и

плоскопараллельной пластинкой может быть заполнено жидкостью, а может оставаться воздушным.

Пусть на плоскую поверхность линзы Л падает нормально параллельный пучок света. Рассмотрим интерференцию в отраженном свете. Падающий луч частично отражается от верхней (луч 2) и нижней поверхностей (луч 1) зазора между линзой и пластинкой П (рис. 3.8).

Рис. 3.8

При интерференции когерентных лучей 1 и 2 возникают полосы равной толщины, имеющие вид концентрических окружностей – *кольца Ньютона*.

Кольца Ньютона получаются также и в случае, если пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено веществом (например, жидкостью). Если показатель преломления вещества клина меньше показателя преломления стеклянной пластиинки, то «потеря» полуволны происходит при отражении луча от стеклянной пластиинки.

Получим формулы для радиусов колец Ньютона. Пусть  $r_m$  – радиус кольца с номером  $m$ . Из ДОАВ следует:

Так как  $d \ll r_m$ , то

$$\dots . \quad (3.13)$$

Используя условия минимума (3.12) для отраженного света, и учитывая, что  $\alpha = \beta = 0$ , имеем для темных колец

$$(3.14)$$

Подставим (3.14) в (3.13) и найдем радиусы темных колец в отраженном свете

$$(3.15)$$

где  $n$  – показатель преломления вещества клина (зазора между линзой и пластинкой), в случае воздушного слоя  $n=1$ .

Радиусы светлых колец в отраженном свете (с учетом формул (3.11) и (3.13)) рассчитываются по формуле

. (3.16)

При наблюдении колец Ньютона в проходящем свете, по формуле (3.15) рассчитываются радиусы светлых колец, а по формуле (3.16) – темных.

3. Полосы равного наклона. Если на тонкую прозрачную пленку постоянной толщины падает рассеянный (под разными углами) монохроматический свет, то возникающая при отражении такого света от верхней и нижней грани пленки интерференционная картина называется – полосы равного наклона. Данная картина представляет собой чередующиеся светлые и темные полосы, образуемые лучами, падающими на пленку под одним и тем же углом. Рассмотрим подробнее образование интерференционной картины.

Рис. 3.9

Рассмотрим пучок рассеянного света, падающий на пленку  $\Pi$  (рис. 3.9). Лучи 1 и 2, лежащие в одной плоскости и падающие на пленку  $\Pi$  под одним и тем же углом  $\alpha$ , собираются линзой  $L$  на экране  $\mathcal{E}$ , находящемся в фокальной плоскости линзы, в точке  $A$ . Лучи, падающие под тем же углом  $\alpha$ , но лежащие в другой плоскости, собираются в другой точке фокальной плоскости. Лучи, падающие на пленку под другим углом  $\alpha'$ , собираются в других точках. Таким образом, на экране возникнут светлые и темные полосы, соответствующие максимумам и минимумам интенсивностей света, падающего под определенным углом на пленку.

При освещении плоскопараллельной пластиинки рассеянным белым светом, интерференционные полосы приобретут радужную окраску.

### 3.2.5. Практическое применение интерференции света

Явление интерференции находит широкое практическое применение. Исследуя, например, интерференционную картину «полосы равной толщины» можно измерять малые углы клиновых деталей, диаметры очень тонких проволочек, а также контролировать качество обработки поверхности (ведь мельчайшая шероховатость на поверхности клина приведет к искажению интерференционной картины). Кроме того, рассчитывая интерференционные картины в различных опытах, можно довольно точно определять длину волны света, показатель преломления среды, радиус кривизны линзы и многие другие параметры. В технике также широко применяют оптические измерительные приборы, основанные на явлении интерференции – интерферометры.

Рис. 3.10

Остановимся кратко на одном из практических применений интерференции – *просветлении оптики*. Современные оптические приборы содержат много различных линз, проходя через которые, свет испытывает многократное отражение, вследствие чего ослабляется интенсивность прошедшего света. А это, в свою очередь, приводит к уменьшению эффективности использования оптического прибора. Кроме того, вышеупомянутое многократное отражение света приводит к возникновению бликов. Чтобы устранить эти недостатки на поверхности линз наносят тонкие «просветляющие» пленки, показатель  $n_{\text{пл}}$  преломления которых, меньше, чем показатель  $n_{\text{л}}$  преломления линз (рис. 3.10). Кроме того эти пленки имеют малый коэффициент отражения. Толщина «просветляющей» пленки подбирается так, чтобы при интерференции световых волн 1 и 2 (см. рис. 3.10), отраженных от поверхностей пленки и линзы, они гасили друг друга.

Рассмотрим нормальное падение света на поверхность пленки. Так как отражение волн 1 и 2 происходит от оптически более плотных сред, то их оптическую разность хода можно записать, как  $\Delta = 2dn$ . Приравнивая оптическую разность хода к условию минимума, находим минимальную

толщину пленки (при  $m = 0$ ), при которой отраженные от пленки световые волны гасят друг друга

$$, \quad (3.17)$$

где  $n$  – показатель преломления пленки.

Поскольку на объективы фотоаппаратов падает белый свет, то невозможно с помощью просветляющей пленки добиться одновременного гашения всех длин волн, составляющих его. Толщину пленки подбирают так, чтобы она гасила лучи с  $\lambda_0 = 555$  нм (зеленый цвет), к которым наиболее всего восприимчив глаз человека. «Просветленные» таким образом объективы фотоаппаратов кажутся в белом свете голубовато–красными.

## ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 9***

1. Сформулируйте определение полос равной толщины и равного наклона.
2. Световая волна падает на стеклянную пластинку с показателем преломления  $n$  из воздуха (см. рис.). Используя обозначения указанные на рисунке, запишите оптическую разность хода лучей выходящих из пластиинки.
3. Тонкую пленку освещают белым светом. Вследствие явления интерференции в отраженном свете наблюдается зеленый цвет. Каким будет ее цвет при уменьшении толщины
4. Монохроматический пучок света ( $\lambda = 600$  нм) падает по нормали на стеклянный клин с углом при его вершине. Рассчитайте количество светлых интерференционных полос, приходящихся на 1 см длины клина и наблюдаемых в отраженном свете.
5. Объясните явление просветление оптических стекол. На поверхность объектива ( $n_{об} = 1,5$ ) нанесена тонкая пленка ( $n_{пл} < n_{об}$ ) толщиной 110 нм, на которую нормально падает монохроматический свет ( $\lambda = 600$  нм). Найдите значение  $n_{пл}$  показателя преломления пленки, при котором она будет «просветляющей» для света указанной длины волны.

## ЛЕКЦИЯ 10

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: дифракция, принцип Гюйгенса – Френеля, зоны Френеля и их свойства; расчет амплитуды и интенсивности световой волны в точке наблюдения; дифракция Френеля на отверстии и на диске; зонные пластинки.

### 3.3. Дифракция

Дифракция света – комплекс явлений, наблюдавшихся при распространении световой волны в среде с резкими оптическими неоднородностями и связанных с нарушением законов геометрической оптики: в результате дифракции свет отклоняется от прямолинейного распространения и, огибая препятствия, оказывается в области геометрической тени. При этом наблюдается пространственное перераспределение интенсивности световой волны – интерференция. Для наблюдения дифракции необходимо, чтобы размеры оптических неоднородностей (преград, экранов, щелей) были соизмеримы с длиной световой волны.

Для объяснения дифракции используют *принцип Гюйгенса – Френеля* (сформулирован в 1815 г.), в соответствии с которым *каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн, когерентных между собой*. Огибающая этих волн определяет положение волнового фронта в следующий момент времени. В случае распространения света в однородной изотропной среде, вторичные когерентные волны являются сферическими.

Вторичные когерентные волны, накладываясь друг на друга, интерферируют между собой. Учитывая амплитуды и фазы вторичных волн, можно рассчитать амплитуду результирующей волны в любой точке пространства.

В качестве примера объяснения дифракции на основе принципа Гюйгенса – Френеля, рассмотрим преграду с узкой щелью, на которую падает плоская волна (рис. 3.11).

Рис. 3.11

В момент времени  $t_1$  фронт волны находится в этой щели и его каждая точка является источником вторичных когерентных сферических волн, проходящих за время  $dt$  расстояние  $R = c \cdot dt$ . Положение фронта волны в момент времени  $t_2 = t_1 + dt$  находится, как огибающая фронтов вторичных волн. Поскольку скорость волны в каждой точке волнового фронта перпендикулярна к нему, то имеются участки фронта волны, обеспечивающие проникновение света в область геометрической тени (см. рис. 3.11). Если размеры этих участков фронта волны соизмеримы с размерами щели, то дифракция света будет наблюдаться. Если же они существенно меньше размеров щели, то свет будет проходить через щель в соответствии с законами геометрической оптики, а явление дифракции будет не заметно [5].

### 3.3.1. Метод зон Френеля

Рассмотрим точечный источник света  $S$ , от которого в однородной среде распространяется сферическая волна, возбуждающая в точке  $P$  световое колебание (рис. 3.12).

Рис. 3.12

Для нахождения амплитуды световой волны в точке  $P$  воспользуемся принципом Гюйгенса – Френеля. Пусть  $a = OS$  – расстояние от точечного источника  $S$  света до волнового фронта, а  $b = OP$  – расстояние от фронта волны до точки наблюдения  $P$ . Френель разбил волновой фронт на кольцевые зоны – зоны Френеля, построенные так, что расстояния от краев соседних зон до точки наблюдения  $P$  отличаются на  $\frac{\lambda}{2}$  ( $\lambda$  – длина световой волны в той среде, в которой распространяется волна).

Рис. 3.13

Выражая радиус  $r_m$  произвольной зоны Френеля с номером  $m$ , с помощью теоремы Пифагора из  $\Delta SAB$  и  $\Delta ABR$ , и учитывая, что высота сферического сегмента  $h$  мала (см. рис. 3.13) получим:

$$\text{.} \quad (3.18)$$

Если волна плоская (источник света удален на бесконечность:  $a \rightarrow \infty$ ), то радиус  $r_m$  зоны Френеля с номером  $m$  может быть выражен:

$$\text{.} \quad (3.19)$$

Расчеты показывают, что на полностью открытом волновом фронте укладывается огромное количество зон Френеля, причем площади всех зон примерно одинаковы. Однако, с увеличением номера зоны Френеля, уменьшается ее угловой размер (угол, под которым эта зона видна из точки наблюдения) и увеличивается расстояние от нее до точки наблюдения  $P$ . Все это приводит к тому, что с увеличением номера зоны амплитуда  $A_m$  колебания, возбуждаемого вторичной волной, приходящей от зоны Френеля с номером  $m$ , в точке  $P$  уменьшается. Таким образом, для амплитуд колебаний, возбуждаемых в точке  $P$  наблюдения зонами Френеля, справедливы неравенства

Кроме того амплитуда световой волны, приходящей в точку наблюдения от зоны с номером  $m$  может быть выражена в виде

Учтем, что согласно построению зон Френеля, волны, приходящие в точку наблюдения  $P$  от соседних зон, имеют оптическую разность хода  $\lambda/2$  (что соответствует разности фаз, равной  $\pi$ ) и, в соответствии с условием интерференционного минимума, ослабляют друг друга. Поэтому амплитуду результирующей световой волны в точке  $P$  можно найти в виде:

При полностью открытом волновом фронте  $N \rightarrow \infty$ , поэтому вклад зоны Френеля с номером  $N$  пренебрежимо мал по сравнению с вкладом от первой зоны Френеля () .

Таким образом, при полностью открытом волновом фронте, амплитуда световой волны в точке  $P$  равна половине амплитуды, создаваемой только лишь одной первой (центральной) зоной Френеля

$$\text{.} \quad (3.20)$$

Если на пути световой волны поместить непрозрачный экран с отверстием, открывающим только одну первую зону Френеля, то амплитуда световых колебаний в точке  $P$  будет равна  $A_1$ , т. е. в два раза больше, а интенсивность света ( $I \sim A^2$ ) – в четыре раза больше, чем при отсутствии экрана.

### 3.3.2. Дифракция Френеля на диске.

Пусть на пути сферической волны, распространяющейся от точечного источника света  $S$ , расположена преграда в виде *диска*, перекрывающая  $m$  зон Френеля (рис. 3.14, *a*). Тогда амплитуда результирующей световой волны в точке  $P$  равна

,

следовательно, в точке  $P$  всегда наблюдается *светлое пятно* – интерференционный максимум, соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля (зоны с номером  $m+1$ ).

Рис. 3.14

Наблюдаемый на экране центральный максимум, окружен концентрическими темными и светлыми кольцами, возникающими на границе геометрической тени. Распределение интенсивности  $I$  света на экране в этом случае изображено на рис. 3.14, *б*. В случае, если преграда перекрывает много зон Френеля ( $m$  – велико), и. Если диск закрывает лишь часть центральной (первой) зоны Френеля, то интенсивность света  $I$  на экране остается практически одинаковой во всех точках.

### 3.3.3. Дифракция Френеля на круглом отверстии

Пусть на пути сферической волны, распространяющейся от точечного источника света  $S$ , расположен экран с *круглым отверстием*, открывающим небольшое количество зон Френеля (рис. 3.15, *a*). Тогда амплитуда результирующей световой волны в точке  $P$  равна

,

где  $m$  – номер последней зоны, укладывающейся в отверстие экрана.

Так как, число уложившихся в отверстие экрана зон не велико, а амплитуды световых волн, приходящих с соседних зон Френеля мало отличаются по величине, получим

,

(3.21)

где знак (+) соответствует нечетному  $m$ , а знак (–) – четному  $m$ .

Рис. 3.15

Если число  $m$ , укладывающихся в отверстии зон мало, то  $A_m \approx A_1$ . Из формулы (3.21) следует, что при нечетном  $m$  амплитуда колебаний в точке  $P$  будет приблизительно равна  $A \approx A_1$ , при четном  $m - A \approx 0$ .

Дифракционная картина от круглого отверстия представляет собой чередование светлых и темных концентрических колец на границе геометрической тени. В центре картины наблюдается либо темное (отверстие открывает четное число зон Френеля, рис. 3.15,  $\delta$ ), либо светлое (открыто нечетное число зон, рис. 3.15,  $\epsilon$ ) пятно. В случае, если в отверстие укладывается не более одной зоны Френеля, то дифракция не наблюдается (в точке  $P$  и вокруг нее – размытое светлое пятно).

### ***3.3.4. Амплитудная и фазовая зонные пластиинки.***

Метод зон Френеля позволяет достаточно просто предложить способы для получения значений амплитуды результирующей волны в точке наблюдения, превышающих значение  $A_l/2$  (соответствующее полностью открытому волновому фронту) [5]. Как было показано в п. 3.3.1., если закрыть непрозрачным экраном все зоны Френеля, кроме первой, то амплитуда результирующей волны увеличится в два раза ( $A_P = A_l$ ) , а интенсивность – в четыре.

Чтобы еще больше увеличить результирующую амплитуду  $A_P$ , на пути световой волны можно поставить *амплитудную зонную пластинку*, перекрывающую все четные (или все нечетные) зоны Френеля. Тогда, в случае, если зонной пластинкой перекрываются все четные зоны Френеля, результирующая амплитуда  $A_P$  световой волны равна

,

А если перекрытыми оказываются все нечетные зоны Френеля, то.

Максимальное же увеличение амплитуды  $A_P$  получают с помощью *фазовой зонной пластинки*, изменяющей фазу волн, идущих в точку наблюдения от четных зон Френеля, на  $\pi$ . Вследствие этого, волны, идущие от всех зон Френеля, приходят в точку наблюдения в одинаковой фазе и, следовательно, усиливают друг друга. Поэтому амплитуды всех волн в точке наблюдения суммируются:

Амплитудные и фазовые зонные пластиинки достаточно легко создать для электромагнитных волн в области сверхвысоких частот. В этом случае размеры зон Френеля будут достаточно большими. Так, из формулы для радиусов зон Френеля (3.18) в случае СВЧ-диапазона ( $\lambda_0 \approx 1$  см,  $S0 = 0P = 1$  м) можно получить следующие оценки:  $r_1 = 7$  см ;  $r_2 = 10$  см, и т. д. [5]

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 10***

1. Сформулируйте принцип Гюйгенса – Френеля.
2. Сформулируйте условия наблюдения дифракции.
3. В чем состоит метод зон Френеля? Выведите формулу (3.18) для радиуса зон Френеля?
4. Чему равна разность фаз двух волн, приходящих в точку наблюдения от соседних зон Френеля?
5. Что наблюдается в центре дифракционной картины, полученной от круглого отверстия, если в нем укладывается небольшое четное число зон Френеля?

1) темное пятно	2) светлое пятно
3) полусвет	4) полутень

## ЛЕКЦИЯ 11

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: дифракция Фраунгофера; дифракция на щели, условия минимумов и максимумов при дифракции на щели; дифракционная решетка, период (постоянная) решетки, условия максимумов и минимумов при дифракции на решетке.

### 3.3.5. Дифракция в параллельных лучах на одной щели

Дифракция в параллельных лучах называется дифракцией Фраунгофера. Параллельные лучи (плоские волны или волны с плоским волновым фронтом) можно получить, удалив точечный источник света на бесконечность или поместив его в фокус собирающей линзы. Кроме того, источником плоских волн является лазерное излучение.

Пусть плоская световая монохроматическая волна, падает по нормали на экран с узкой щелью шириной  $a$  (рис. 3.16). При этом длина щели много больше ее ширины и перпендикулярна к плоскости чертежа. Рассмотрим момент времени, в который волновой фронт дойдет экрана со щелью. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, все точки волнового фронта, уложившиеся в щель (расстояние  $AB$ ) являются источниками вторичных когерентных волн, распространяющихся во всевозможных направлениях вперед от щели.

Для наблюдения дифракционной картины, за щелью размещают собирающую линзу  $L$ , в фокальной плоскости которой расположен экран  $\mathcal{E}$  (рис. 3.16). Рассмотрим волны 1 и 2, преломившиеся от краев щели под углом  $\phi$  к первоначальному направлению (этот угол называется углом дифракции). Оптическая разность хода лучей 1 и 2, идущих от краев щели в этом направлении, равна (так как  $AC \perp BC$ ). Волновой фронт, укладывающийся на отрезке  $AB$  разобьем на полоски одинаковой ширины – зоны Френеля, таким образом, чтобы разность хода лучей, идущих от соседних зон Френеля была равна (см. рис. 3.16).

Рис. 3.16

Пусть на открытой части волнового фронта уместилось, таким образом,  $N$  штук зон Френеля. Тогда.

Амплитуды вторичных волн, распространяющихся от различных зон Френеля, будут равны, так как построенные таким образом зоны Френеля имеют одинаковые площади и одинаково наклонены к направлению наблюдения (точка  $M$ ). Как следует из построения, волны, идущие от любых соседних зон Френеля, приходят в точку  $M$  в противоположной фазе с равными амплитудами и, поэтому гасят друг друга.

Если для данного угла дифракции  $\phi$  число зон Френеля, укладывающихся на отрезке  $AB$  окажется четным ( $N = 2m$ , где  $m$  – целое число), то соседние зоны погасят друг друга (вторая гасит первую, четвертая – третью и т. д.). Поэтому при данном угле дифракции  $\phi$  на экране в точке  $M$  будет минимум освещенности.

Углы дифракции  $\Phi_{\min}$ , соответствующие минимумам освещенности, находят из условия:

$$, \quad (3.22)$$

где  $m = 1, 2, 3\dots$  – порядок дифракционного минимума.

Если же число зон Френеля, укладывающихся на отрезке  $AB$  окажется нечетным (, где  $m$  – целое число), то на экране в точке  $M$  будет наблюдаться максимум освещенности (так как световая волна, идущая от одной зоны Френеля останется не погашенной).

Углы дифракции  $\Phi_{\max}$ , соответствующие максимумам освещенности, определяются из условия:

$$, \quad (3.23)$$

где  $m = 1, 2, 3\dots$  – порядок дифракционного максимума.

В направлении  $\phi = 0^0$  щель действует как одна зона Френеля и поэтому в центре дифракционной картины наблюдается максимум освещенности (центральный максимум).

На рис. 3.17 приведена зависимость  $I = I(\sin \varphi)$  интенсивности света на экране от синуса угла дифракции. Дифракционная картина, наблюдаемая на экране, симметрична относительно центра щели (центрального максимума).

Рис. 3.17

Если щель освещается белым светом, то наблюдаемый на экране центральный максимум, имеет вид белой полосы. Максимумы других порядков имеют при этом радужную окраску (разлагаются в спектр). Причем из условия (3.23) следует, что максимумы более коротких волн, располагаются ближе к центру дифракционной картины. Так, внутри каждого порядка максимума ближе всего к центру находится максимум фиолетового цвета, а дальше – красного.

### 3.3.6 Дифракция на дифракционной решетке

*Дифракционной решеткой* называется совокупность периодически расположенных одинаковых дифракционных элементов (отверстий или препятствий).

Рис. 3.18

Рассмотрим одномерную дифракционную решетку представляющую собой ряд параллельных щелей одинаковой ширины  $a$ , разделенных одинаковыми непрозрачными промежутками (штрихами) шириной  $b$ . Периодом или постоянной дифракционной решетки называется суммарное расстояние  $d = a + b$  (рис. 3.18). Период решетки численно равен всей длине решетки, разделенной на количество нанесенных штрихов, и связан с числом штрихов  $n$ , приходящихся на единицу длины решетки, соотношением  $d = 1/n$ .

Пусть одномерная дифракционная решетка освещается падающей по нормали плоской монохроматической световой волной (рис. 3.17). На пути лучей, прошедших дифракционную решетку, помещена собирающая линза Л, в фокальной плоскости которой, размещен экран Э. На экране наблюдается чередование максимумов и минимумов интенсивности света. Дифракционная

картина, наблюдаемая на экране, определяется как условиями минимумов и максимумов при дифракции от одной щели, так и интерференцией лучей, идущих под одинаковыми углами от разных щелей.

Если для угла дифракции  $\varphi$  выполняется условие (3.22) минимумов при дифракции на одной щели, то в данном направлении каждая щель дает нулевую интенсивность. Поэтому вся решетка (совокупность щелей) дает нулевую интенсивность в этом направлении.

Минимумы, наблюдаемые под углом, удовлетворяющим соотношению,

(3.24)

называются *главными минимумами* дифракционной решетки ( $m = 1, 2, 3\dots$ ).

Рассмотрим результат интерференции двух лучей, идущих из соответственных точек разных щелей (из начала, середины, конца щелей) под одним углом. Оптическая разность хода между двумя лучами, идущими от соседних щелей 2 и 1 (3 и 2 и др.), равна  $\Delta = d \sin \varphi$  (см. рис. 3.17). Если оптическая разность хода удовлетворяет условию максимума (3.3) при интерференции, то волны, идущие от соседних щелей, будут усиливать друг друга. Таким образом, углы дифракции, под которыми будут наблюдаться *главные максимумы*, определяются выражением

,

где  $m = 0, 1, 2\dots$  – порядок главного максимума. Максимум с  $m = 0$  называется *центральным* (нулевым).

Общее число  $N$  главных максимумов, которые может дать дифракционная решетка, равно

(3.26)

где – наибольший порядок максимума, наблюдаемого по одну сторону от центрального (), слагаемое «единица» учитывает сам центральный максимум.

При общем числе щелей  $K$  решетки между соседними главными максимумами располагаются  $K-1$  добавочных минимумов, которые определяются условием интерференционных минимумов лучей, идущих от соседних щелей:

Между добавочными минимумами расположены  $K-2$  слабых по интенсивности добавочных максимума. При увеличении числа  $K$  щелей на решетке, главные максимумы становятся более острыми и интенсивными, т. е. дифракционная картина становится четче.

В случае, если дифракционная решетка освещается не монохроматическим светом, все главные максимумы, кроме центрального, разлагаются в спектр. Причем, в спектре разных порядков линий, соответствующие коротким волнам будут располагаться ближе к центру дифракционной картины, чем линии, соответствующие длинным волнам. Так, например, при освещении решетки белым светом, из формулы (3.25) следует, что так как  $\lambda_\phi < \lambda_{kp}$ , то и  $\Phi_\phi < \Phi_{kp}$  в спектре любого порядка, кроме центрального.

Для центрального максимума  $m=0$ ,  $\phi = 0^0$ , поэтому волны с разной длиной волны приходят в центр экрана [5] и при сложении дают полосу цвет которой, совпадает с цветом излучения, падающего на дифракционную решетку.

## ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 11***

1. Запишите условие дифракционных максимумов на щели.
2. Узкая щель шириной  $a = 0,02$  мм освещается падающим по нормали монохроматическим излучением ( $\lambda = 500$  нм). Определите угол дифракции для третьего дифракционного минимума, наблюдавшегося на экране.
3. Что называют дифракционной решеткой?
4. Период дифракционной решетки равен  $d = 2$  мкм. Какое количество штрихов нанесено на 1 миллиметр решетки?
5. Дифракционная решетка, в которой на 1 мм нанесено  $n = 200$  штрихов, освещается падающим по нормали монохроматическим излучением ( $\lambda = 600$  нм). Определить максимум наивысшего порядка, который можно получить с помощью данной решетки. Чему равно общее число дифракционных максимумов?

# КВАНТОВАЯ ОПТИКА

## ЛЕКЦИЯ 12

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: тепловое излучение, энергетическая светимость, спектральная плотность энергетической светимости, коэффициент поглощения; абсолютно черное тело (а.ч.т.), абсолютно серое тело (а.с.т.); законы Кирхгофа, Вина и Стефана – Больцмана; связь между светимостью АЧТ и серого тела.

### 4.1. Тепловое излучение

Тепловое излучение – это излучение электромагнитных волн телами, температура которых отлична от абсолютного нуля. Данное излучение связано с тепловым движением атомов и молекул, поэтому его интенсивность увеличивается с возрастанием температуры.

Тепловое излучение любого тела является немонокроматичным (в спектре излучения присутствуют всевозможные частоты).

Поскольку интенсивность  $I$  теплового излучения зависит от температуры тела ( $I = I(T)$ ), то в отличие от других видов излучения, тепловое излучение может находиться в равновесии с излучающим телом, т. е. *является равновесным* [4]. Это означает, что тело, находящееся в состоянии равновесия, излучает за единицу времени столько же энергии, сколько ее и поглощает. Если же тепловое равновесие нарушается, то начинает преобладать какой-то один из двух процессов (излучение или поглощение), вследствие чего снова восстанавливается состояние равновесия.

#### 4.1.1. Характеристики, вводимые для описания теплового излучения.

Одними из основных характеристик, используемых для описания теплового излучения, являются *энергетическая светимость*  $R_T$  тела и его *испускательная способность – спектральная плотность*  $r_{\lambda,T}$  *энергетической светимости*.

$$,$$
 (4.1)

. (4.2)

Как видно из формулы (4.1), *энергетическая светимость*  $R_T$  равна энергии, излучаемой всеми длинами волн (всеми частотами) с единицы площади поверхности тела за единицу времени.

*Спектральная плотность*  $r_{\lambda,T}$  *энергетической светимости* (испускальная способность тела) равна энергии, излучаемой в единичном интервале длин волн с единицы площади поверхности тела за единицу времени.

Формула (4.2) устанавливает связь между *энергетической светимостью* и *спектральной плотности* *энергетической светимости*.

*Энергетическая светимость*  $R_T$  и *испускальная способность*  $r_{\lambda,T}$  являются размерными величинами. Их размерность определяется из формулы (4.1):

Кроме того наряду с величиной  $r_{\lambda,T}$ , для описания закономерностей теплового излучения применяют спектральную плотность *энергетической светимости*  $r_{v,T}$ , выраженную через частоту  $v$  излучения

. (4.3)

Причем эти две величины, связаны друг с другом соотношением

. (4.4)

*Величиной, описывающей способность тела поглощать электромагнитное излучение, является монохроматический коэффициент поглощения (поглощающая способность тела) [4]*

. (4.5)

*Монохроматический коэффициент поглощения* показывает, какая часть энергии  $dW_{\text{пад}}$  падающего излучения с длинами волн в пределах от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$  поглощается телом.

Как следует из формулы (4.5) *поглощающая способность*  $a_{\lambda,T}$  является безразмерной величиной. Она зависит от температуры тела и от длины волны поглощаемого теплового излучения.

При решении практических задач, связанных с тепловым излучением, часто используют две модели тел: 1) *абсолютно черное тело (а.ч.т.)* – тело, полностью поглощающее падающее на него излучение во всем интервале длин волн ( $a_{\lambda,T} = 1$ ); 2) *абсолютно серое тело (а.с.т.)* – тело, поглощательная способность которого одинакова во всем интервале длин волн ( $a_{\lambda,T} = \text{const} < 1$ ).

#### **4.1.2. Закон Кирхгофа**

Поглощательная и испускательная способность любого тела связаны между собой законом *Кирхгофа* (1859 г.), согласно которому, *отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела и является универсальной функцией температуры тела и длины волны* [4]. Эта универсальная функция Кирхгофа по физическому смыслу является испускательной способностью (спектральной плотностью энергетической светимости) абсолютно черного тела.

Математически закон Кирхгофа можно записать в виде

$$r_{\lambda,T}^0 = \frac{a_{\lambda,T}}{\sigma T^4}, \quad (4.6)$$

где введенная величина  $r_{\lambda,T}^0$  обозначает испускательную способность абсолютно черного тела.

Из закона Кирхгофа следует, что:

1) тело сильнее излучающее определенные длины волн, будет их сильнее и поглощать (т. к.  $r_{\lambda,T}/a_{\lambda,T} = \text{const}$ );

2) наиболее мощным излучателем при данной температуре во всем интервале длин волн является абсолютно черное тело (из формулы (4.6) имеем:

Кроме того, из закона (4.6) следует, что для описания теплового излучения любых тел необходимо экспериментальное и теоретическое исследование спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела.

#### **4.1.3. Экспериментальные законы теплового излучения а.ч.т.**

Реальное тело не может иметь коэффициент поглощения, равный единице, поэтому необходимо смоделировать а.ч.т. для исследования законов его излучения. Моделью а.ч.т. может служить полость внутри тела, имеющая малое входное отверстие (рис. 4.1).

Рис. 4.1

Излучение, попадающее в эту полость через входное отверстие, испытывает многократное отражение от стенок полости. При этом энергия падающего излучения почти полностью поглощается внутри полости и излучение практически не выходит наружу.

Таким образом, коэффициент поглощения такой полости во всем интервале длин волн оказывается равным  $a_{\lambda,T} = 1$ , поэтому выходящее из полости излучение и представляет собой излучение а.ч.т. [4] с температурой, равной температуре тела в котором находится полость.

Такое излучение можно экспериментально изучить с помощью различных спектральных приборов (простейший из которых – дифракционная решетка) и построить график зависимости испускательной способности  $r_{\lambda,T}^0$  а.ч.т. от длины волны. Эти графики приведены на рис. 4.2,а.

Рис. 4.2

Согласно формуле (4.2) площадь под графиком испускательной способности а.ч.т. равна его энергетической светимости.

Полученные экспериментально графики для спектральной плотности энергетической светимости а.ч.т. при разных температурах излучающего тела, позволили сформулировать три опытных закона теплового излучения.

*1. Закон Стефана – Больцмана: энергетическая светимость абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени его температуры.*

$$, \quad (4.7)$$

где  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K}^4)$  – постоянная Стефана – Больцмана.

Этот закон был открыт экспериментально Стефаном (1879 г.) и теоретически доказан Л. Больцманом (1884 г.) на основе законов термодинамики. Можно также экспериментально показать, что площадь под графиком испускательной способности  $r_{\lambda,T}^0$  а.ч.т., являющаяся по физическому смыслу энергетической светимостью, прямо пропорциональна четвертой степени температуры а.ч.т. [4].

2. Закон смещения Вина. Он позволяет найти смещение длины волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующей максимуму испускательной способности а.ч.т., при изменении его температуры. Длина волны  $\lambda_{\max}$ , на которую приходится максимум испускательной способности а.ч.т., обратно пропорциональна его абсолютной температуре

$$, \quad (4.8)$$

где) – постоянная Вина.

3. Закон Вина: максимум испускательной способности абсолютно черного тела прямо пропорционален пятой степени его температуры [4].

$$, \quad (4.9)$$

где – вторая постоянная Вина.

#### **4.1.4. Объяснение закономерностей теплового излучения а.ч.т.**

Законы теплового излучения а.ч.т., полученные экспериментально, а также с помощью термодинамического подхода, требовали корректного теоретического описания. Кроме того, необходимо было получить в явном виде формулу для которой давала бы совпадение с экспериментальной испускательной способностью а.ч.т. во всем интервале длин волн.

1. *Формула Релея – Джинса.* Расчет испускательной способности а.ч.т. в рамках классической физики был проведен Релеем и Джинсом. Они рассматривали равновесное излучение черного тела в закрытой полости (рис. 4.1). Предполагалось, что *атомы стенок полости излучают как совокупность линейных гармонических осцилляторов (электрических диполей) со всевозможными частотами*. Исходя из этого предположения, была получена формула для испускательной способности а.ч.т. [4]

$$J(\lambda, T) = \frac{2\pi^2 k^3}{c^2} \frac{1}{\lambda^5} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\omega)}{\sinh(\beta E(\omega))} d\omega, \quad (4.10)$$

где – средняя энергия осциллятора,  $k$  – постоянная Больцмана, а  $T$  – температура излучающего тела.

В итоге в рамках классической физики для испускательной способности абсолютно черного тела была получена *формула Релея – Джинса*.

$$J(\lambda, T) = \frac{2\pi^2 k^3}{c^2} \frac{1}{\lambda^5} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\omega)}{\sinh(\beta E(\omega))} d\omega. \quad (4.11)$$

При сравнении графика испускательной способности а.ч.т., построенного по формуле Релея – Джинса (4.11), с экспериментальной кривой (см. рис. 4.2,б) видно, что в области длинноволнового излучения наблюдается хорошее согласие теоретического описания с экспериментом. Однако в области ультрафиолетового и рентгеновского излучений наблюдается резкое расхождение между экспериментальной зависимостью  $r_{\lambda,T}^0$  и кривой, построенной по формуле (4.11).

Кроме того, расчет энергетической светимости а.ч.т. по формуле Релея – Джинса приводит к бесконечно большой энергии излучения, т. е. нарушается закон сохранения энергии

Итак, классическая физика не смогла объяснить зависимость  $r_{\lambda,T}^0(\lambda)$  для а.ч.т. во всем интервале длин волн. Сложившееся на тот момент времени состояние в классической физике, когда для теплового излучения наблюдалось резкое расхождение между теорией и экспериментом в ультрафиолетовой области, и нарушился закон сохранения энергии, получило название *ультрафиолетовой катастрофы* [4].

2. *Формула Планка.* Планк высказал предположение о том, что *атомы излучают электромагнитные волны не непрерывно, а отдельными порциями энергии (квантами)*. Это означает, что энергии осцилляторов (атомов) квантуются, т. е. принимают дискретный набор значений

$$, \quad (4.12)$$

где  $W_1$  – минимальная энергия осциллятора, называемая также квантом энергии (фотоном).

Согласно Планку, энергия  $W_1$  кванта электромагнитной волны частоты  $\nu$  (энергия фотона) определяется формулой

$$, \quad (4.13)$$

где, – постоянные Планка.

Планком было получено выражение для испускательной способности а.ч.т.:

$$, \quad (4.14)$$

которое полностью описывает зависимость спектральной плотности энергетической светимости а.ч.т. от длины волны во всем интервале длин волн. Из выражения (4.14) также вытекают законы Стефана – Больцмана и Вина [4].

В области длинноволнового излучения формула (4.14) приводит к формуле Релея – Джинса (4.11)

Кроме того, формула Планка (4.14) позволяет получить точные выражения для постоянной  $\sigma$  Стефана – Больцмана и постоянной  $b$  Вина, входящих в опытные законы теплового излучения,

С помощью формулы (4.14) оказалось возможным установить зависимость максимального значения спектральной плотности энергетической светимости а.ч.т.  $(r_{\lambda,T}^0)_{\max}$  от его абсолютной температуры,

$$, \quad (4.16)$$

где постоянная  $c'$  равна

Предположение Планка об излучении атомами квантов энергии свидетельствует о дискретном характере энергетических уровней атома. Тепловое движение переводит осцилляторы на выше расположенные уровни энергии, затем при переходе на нижние уровни и происходит излучение квантов энергии.

## ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 12***

1. Сформулируйте определение спектральной плотности энергетической светимости. Запишите формулу, выражающую взаимосвязь между испускательной способностью тела и его энергетической светимостью.
2. Сформулируйте отличие моделей абсолютно черного тела (а.ч.т.) и абсолютно серого тела (а.с.т.)
3. Имеются четыре тела с различными спектральными коэффициентами поглощения. Наиболее эффективным нагревателем в нагревательном приборе является тело с коэффициентом поглощения равным...
4. На рисунке приведено распределение энергии в спектре излучения для двух абсолютно черных тел, имеющих разную температуру. Какое тело имеет большую температуру? Во сколько раз отличаются энергетические светимости этих тел?

Температура а.ч.т. увеличилась от 1000 К до 1500 К. Во сколько раз увеличилась максимальная спектральная плотность энергетической светимости при этом?

## ЛЕКЦИЯ 13

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: внешний фотоэффект; опытные законы фотоэффекта; задерживающее напряжение, ток насыщения; уравнение Эйнштейна для фотоэффекта; работа выхода; красная граница фотоэффекта; эффект Комптона; корпускулярно-волновой дуализм.

### 4.2. Внешний фотоэффект

*Внешним фотоэффектом* называют явление выбивания электронов из металла под действием падающего излучения.

Объяснение опытных законов фотоэффекта приводит к выводу о том, что электромагнитное излучение не только испускается атомами в виде отдельных порций энергии (гипотеза Планка), но также распространяется и поглощается отдельными порциями энергии, называемыми фотонами [4]. Рассмотрим, как этот вывод был сделан.

#### 4.2.1. Вольт-амперная характеристика, ее основные закономерности.

Схема установки для изучения фотоэффекта приведена на рис. 4.3, *a*.

Анод и катод находятся внутри вакуумной трубы. Между ними приложено напряжение  $U$ . Через кварцевое окно на катод падает монохроматическое излучение, выбивающее из катода электроны. Электроны летят на анод, цепь замыкается и возникает электрический ток.

На рис. 4.3, *в*. приведена вольт-амперная характеристика, снятая на установке по изучению фотоэффекта. Обсудим ее основные особенности.

1.  $U = 0$ . Даже при напряжении  $U$  между анодом и катодом, равном нулю, в цепи наблюдается отличный от нуля электрический ток (рис. 4.3, *в*). Падающее электромагнитное излучение, выбивает с поверхности катода электроны, которые покидая катод, оставляют его положительно заряженным. При этом вылетевшие с поверхности катода электроны, притягиваются к положительно заряженному металлу и стремятся снова вернуться в металл. Таким образом, вблизи металла появляется электронное облако (рис. 4.3, *б*), которое образовано

электронами, покидающими и возвращающимися на катод. Однако часть электронов (их скорость при выходе из металла является наибольшей) могут преодолеть двойной электрический барьер (металл притягивает вылетающий электрон, а электронное облако его отталкивает) [4] вблизи поверхности металла. Эти электроны достигают анода и участвуют в появлении электрического тока в цепи.

Рис. 4.3

2. Напряжение между катодом и анодом  $U > 0$  (катод подключается к отрицательному полюсу источника напряжения). В этом случае в вакуумной трубке появляется электрическое поле, «помогающее» электронам перемещаться к аноду. Число электронов, достигающих анода, возрастает, электронное облако становится меньше и при больших напряжениях полностью исчезает [4]. С увеличением напряжения, электрический ток достигает насыщения  $I = I_H$ , так как все электроны, выбиваемые с поверхности катода, достигают анода.

3. Напряжение на вакуумной трубке  $U < 0$ . Электрическое поле, возникающее при этом в трубке, тормозит электроны. Сила электрического тока уменьшается и при напряжении, называемом *задерживающим* (*затирающим*) напряжением  $U_3$ , обращается в ноль. В этом случае, даже самые быстрые электроны не достигают поверхности анода, т. к. преодолевая препятствующее их движению электрическое поле, теряют кинетическую энергию. Около поверхности анода, скорость самых быстрых электронов обращается в ноль, вследствие чего электроны, разворачиваются и под действием кулоновских сил летят обратно. Цепь не замыкается. Учитывая вышесказанное, задерживающее напряжение определяется равенством:

$$\text{.} \quad (4.17)$$

#### **4.2.2. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.**

Эйнштейн предположил, что электромагнитное излучение не только испускается (гипотеза Планка), но также распространяется и поглощается в виде отдельных порций энергии – фотонов. Следовательно, электромагнитное излучение представляет собой поток особых частиц, называемых фотонами, они обладают корпускулярно-волновым дуализмом – сочетают в себе свойства и частицы, и волны. Энергия  $W_\Phi$  фотона рассчитывается по формулам:

$$,$$
 (4.18)

в которые входит постоянная Планка  $h$ , масса  $m_\Phi$  и импульс  $p_\Phi$  фотона, длина волны  $\lambda$  и частота  $\nu$  электромагнитного излучения.

Согласно Эйнштейну электрон поглощает фотон. Энергия фотона позволяет электрону выйти из металла (это требует энергии  $W_{\text{вых}}$ ) с кинетической энергией  $W_k$ . Энергия выхода  $W_{\text{вых}}$  электрона из металла изменяется в зависимости от расстояния, на котором находится электрон внутри металла до его поверхности [4]. Для электронов, вылетающих с поверхности металла, энергия выхода будет минимальной (для каждого металла она имеет определенное значение и называется работой выхода  $A_{\text{вых}}$ ), а их кинетическая энергия будет соответственно максимально возможной. По закону сохранения энергии для такого процесса можно записать:

$$.$$
 (4.19)

Выражение (4.19) называется уравнением Эйнштейна для фотоэффекта.

#### **4.2.3. Опытные законы фотоэффекта, их объяснение**

Приведем формулировку экспериментальных законов фотоэффекта, открытых Столетовым в 1886-1889 гг., и их объяснение с точки зрения волновой и корпускулярной теории.

1 закон: сила  $I_h$  фототока насыщения прямо пропорциональна падающему на катод потоку  $\Phi_s$  электромагнитного излучения ( $I_h \sim \Phi_s$ ). Учитывая формулу (4.18), для потока  $\Phi_s$  падающего на металл излучения и для силы фототока насыщения можно записать

$$, \quad (4.20)$$

где  $dN_{\Phi}$  и  $dN_{\text{эл}}$  – число падающих на катод фотонов и число электронов, вылетающих из него за время  $dt$ , соответственно. Так как лишь малая часть фотонов выбивает электроны (большая часть фотонов поглощается металлом), то

,

где  $\eta \ll 1$  – «коэффициент выбивания» электронов.

Таким образом, для силы фототока насыщения  $I_{\text{н}}$  получаем выражение:

$$, \quad (4.21)$$

что подтверждает первый закон фотоэффекта ( $I_{\text{н}} \sim \Phi_s$ , при  $v = \text{const}$ ).

С помощью волновой теории света тоже можно объяснить первый закон фотоэффекта. Согласно волновой теории, энергия падающей волны определяется ее амплитудой и частотой. Увеличение потока падающего монохроматического излучения связано с увеличением его амплитуды, что и приводит к выбиванию большего числа электронов из металла, т. е. к большей силе тока насыщения [4].

*2 закон: максимальная кинетическая энергия вылетающих с поверхности катода электронов зависит линейно от частоты падающего излучения и не зависит от его интенсивности.*

Объяснение второго закона фотоэффекта вытекает из уравнения Эйнштейна (4.19), из которого следует:.

При обычных интенсивностях падающего излучения один электрон поглощает один фотон, вероятность многофотонных процессов практически равна нулю, поэтому  $W_{\text{к макс}}$  не зависит от интенсивности падающего излучения, т. е. от числа фотонов, падающих на металл в единицу времени [4].

Волновая теория объясняет второй закон фотоэффекта лишь частично. Увеличивая частоту волны, можно увеличить энергию вылетающего электрона, что объясняет пропорциональность максимальной кинетической энергии  $W_{\text{к макс}}$  вылетающего электрона частоте падающего излучения. Но волновая теория не

может объяснить, почему увеличение амплитуды волны, т. е. интенсивности волны, не приводит к увеличению  $W_{\text{K MAX}}$  электрона [4].

*З закон: существует красная граница  $\nu_{\text{K}}$  фотоэффекта – такая минимальная частота падающего излучения, ниже которой фотоэффект не наблюдается.*

Фотоэффект наблюдается, если падающее излучение имеет частоту большую, чем красная граница. В случае, если частота падающего на металл излучения – фотоэффект отсутствует. Кроме того, под *красной границей* фотоэффекта также понимают длину волны. Фотоэффект наблюдается, если длина волны падающего на металл излучения будет меньше или равна красной границе фотоэффекта.

Третий закон фотоэффекта также объясняется из уравнения Эйнштейна.

С уменьшением частоты  $v$  падающего излучения, согласно формуле (4.19) будет уменьшаться и максимальная кинетическая энергия вылетающих из металла электронов (так как для каждого металла). При частоте излучения, равной красной границе фотоэффекта, вся энергия фотона расходуется только на выбивание электрона из металла без сообщения ему кинетической энергии,. Если частота излучения, то энергии фотона не достаточно для того, чтобы выбить электрон с поверхности металла и фотоэффекта наблюдаться не будет.

Таким образом, красная граница фотоэффекта для данного металла определяется формулой

(4.22)

Волновая теория третий закон фотоэффекта объяснить не может. Согласно волновой теории, даже если частота волны мала, то можно так увеличить ее амплитуду, что энергии волны будет достаточно для наблюдения фотоэффекта и при значениях  $v$ , меньших

Отметим, что *фотоэффект является безынерционным явлением* (выход электронов из металла при поглощении излучения происходит мгновенно).

Волновая теория этот факт объяснить не может. Согласно волновой теории, падающее на металл излучение возбуждает вынужденные колебания электронов. На раскачку электрона падающей волной до энергии, необходимой для выхода из металла, требуется время [4].

Таким образом, экспериментальные законы фотоэффекта полностью объясняются в рамках корпускулярных представлений о свете и остаются необъясненными волновой теорией.

#### **4.2.4. Зависимость задерживающего напряжения от частоты.**

Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (4.19) в следующем виде:

График этой зависимости приведен на рис. 4.4. По графику можно найти постоянную Планка  $h$  () и красную границу  $v_K$  для данного металла (по точке пересечения графика с осью частот:).

Рис. 4.4

### 4.3. Эффект Комптона

Рассмотрим эксперимент по рассеянию рентгеновского излучения веществом. Пучок рентгеновских лучей с определенной длиной волны  $\lambda$  падает на кристалл и рассеивается им под разными углами (рис. 4.5, а).

В рассеянном излучении наряду с излучением длиной волны  $\lambda$  (несмещенная компонента излучения) появляется излучение с длиной волны  $\lambda'$  (смещенная компонента излучения), причем (рис. 4.5, б) [4].

*Эффект Комптона заключается в появлении смещенной компоненты в рассеянном веществом рентгеновском излучении.* Причем, длина волны смещенной компоненты  $\lambda'$  не зависит от природы рассеивающего вещества и рассчитывается по формуле

$$, \quad (4.24)$$

где величина называется *комптоновской длиной волны*. Она равна

$$, \quad (4.25)$$

где – масса покоя электрона.

В рассмотренном ранее явлении фотоэффекта, при облучении металла излучением видимого диапазона, энергия падающего фотона мала по сравнению с энергией покоя свободного электрона ( $W_\Phi/W_{0e} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ ), поэтому происходит поглощение фотона электроном [4].

Рис. 4.5

В области рентгеновских лучей энергия фотона возрастает настолько (), что при взаимодействии фотона со свободным электроном (его энергия связи с атомом значительно меньше энергии налетающего фотона), происходит процесс упругого рассеяния фотона на электроне. При этом возникает смещенная компонента излучения.

При выводе формулы (4.24) использованы законы сохранения энергии (4.26) и импульса (4.27) для процесса упругого взаимодействия электрона и фотона (рис. 4.5, в)

$$, \quad (4.26)$$

$$. \quad (4.27)$$

Несмешенная компонента возникает при рассеянии фотонов на сильно связанных с атомами электронах, для них энергия связи с атомом значительно превосходит энергию налетающего фотона [4]. Поэтому процесс рассеяния фотона будет происходить не с электроном, а с атомом, что приводит к существенному уменьшению различия между длинами волн  $\lambda'$  и  $\lambda$  (данное различие в эффекте Комптона вообще не обнаруживается).

Для атомов с малым атомным номером преобладают электроны, слабо связанные с атомами. Поэтому для таких элементов в основном наблюдается рассеяние фотонов на свободных электронах. Следовательно, для элементов с малыми номерами в таблице Менделеева, интенсивность смешенной компоненты будет больше интенсивности несмешенной компоненты (рис. 4.5, б). Для атомов с большими атомными номерами будет преобладать число электронов, сильно связанных с атомами, поэтому интенсивность несмешенной компоненты будет больше (рис. 4.5, б) [4].

#### **4.4. Природа электромагнитного излучения. Корпускулярно-волновой дуализм**

С современной точки зрения ЭМИ представляет собой поток особых частиц, называемых фотонами. Фотоны обладают корпускулярно-волновым дуализмом [4], сочетающим в себе свойства и частицы, и волны одновременно. Взаимосвязь корпускулярных и волновых свойств можно видеть в записи энергии фотона (4.18), где она выражается через волновые (длина и частота волны) и корпускулярные (масса и импульс) свойства фотона. Из формулы (4.18) следует выражение, наглядно отражающее корпускулярно-волновой дуализм фотона:

. (4.28)

Перечислим свойства волны и частицы, которыми они обладают в классической механике:

*Частица:* 1) неделима во всех взаимодействиях; 2) имеет траекторию движения; 3) локализована в пространстве, т. е. в данный момент времени занимает определенную точку пространства.

*Волна:* 1) делится; 2) не имеет траектории; 3) занимает все пространство.

Рис. 4.6.

Рассмотрим прохождение фотоном щели (рис. 4.6, а). После щели фотон попадает в определенную точку экрана (как частица фотон является неделимым). С другой стороны, фотон как волна испытывает явление дифракции и может отклониться на произвольный угол от первоначального направления движения. Вероятность отклонения на разные углы неодинакова. Наибольшая вероятность соответствует углам, при которых наблюдаются максимумы дифракционной картины, получаемой при накоплении достаточно большого числа фотонов (рис. 4.6, б).

Волновые свойства у электромагнитного излучения (потока фотонов) проявляются в таких явлениях, как интерференция, дифракция и поляризация. Волновые же свойства отдельного фотона проявляются в вероятностном

характере его поведения, они описывают вероятность его обнаружения в различных точках экрана (пространства). Эта особенность волновых свойств фотона является важной при построении квантовой механики [4].

При увеличении частоты фотона(уменьшении его длины волны), все четче проявляются корпускулярные свойства электромагнитного излучения.

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 13***

1. Сформулируйте определение внешнего фотоэффекта. Опишите основные ее закономерности.
2. Как изменится кинетическая энергия выбитых фотоэлектронов, если при фотоэффекте увеличить частоту облучающего света, не изменяя общую интенсивность излучения?
3. Определите работу выхода электронов из катода, если катод вакуумного фотоэлемента освещается светом с энергией квантов 9 эВ и фототок прекращается при подаче на фотоэлемент запирающего напряжения 3 В.
4. Сформулируйте определение эффекта Комптона. Выведите формулу Комптона.
5. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния  $90^0$ . Найти энергию и импульс падающего фотона.

# ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

## ЛЕКЦИЯ 14

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: гипотеза де Бройля, волны де Бройля, длина волны де Бройля, микрочастица; соотношения неопределенностей Гейзенберга, сопряженные величины; волновая функция, плотность вероятности, условие нормировки для волновой функции; уравнение Шредингера.

### 5.1. Гипотеза де Бройля. Опыты, подтверждающие волновые свойства микрочастиц

В начале двадцатого века сложилась ситуация, при которой физическая теория не могла объяснить строения атомов, их спектры излучения и много других фактов, связанных с микромиром.

В то время уже было известно, что электромагнитное излучение обладает корпускулярно – волновым дуализмом: представляет собой поток особых частиц – фотонов, которые сочетают в себе свойства и частицы, и волны.

В 1927 г. французский физик Луи де Бройль выдвинул гипотезу о том, что корпускулярно-волновой дуализм присущ не только свету, но и всем частицам материи. Согласно *гипотезе де Бройля: каждой частице материи массы  $m$ , движущейся со скоростью  $v$  (обладающей импульсом), можно поставить в соответствие волновой процесс*, длина волны которого рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (5.1)$$

Волны, которые соответствуют движущейся частице, получили название *волны де Бройля*, а их длина – *длина волны де Бройля*.

Экспериментально можно обнаружить волны с длиной  $\lambda$ . Частицы, для которых можно на эксперименте обнаружить волновые свойства, называют *микрочастицами*, а частицы, волновые свойства которых обнаружить не удается – *макрочастицами*. Так, например, длина волны де Бройля для пули массой, летящей со скоростью, составляет. Таким образом, пуля волновых свойств не проявляет и к описанию ее движения следует применять законы классической

механики. Однако для частиц малой массы, движущихся с большими скоростями, длина волны де Бройля может стать сравнимой с той, которую можно обнаружить экспериментально. Волновые свойства таких частиц нужно учитывать и для описания их движения применяют законы квантовой механики. Необходимо отметить, что одна и та же частица в одних явлениях проявляет волновые свойства, а в других – не проявляет.

Для обнаружения волновых свойств у микрочастиц был поставлен ряд опытов. Рассмотрим наиболее важные из них.

1. *Опыты Девиссона и Джермера* (1927 г.). С помощью электронной пушки формировался пучок электронов с постоянной скоростью  $v$ , который посыпался под углом скольжения  $\theta$  на поверхность кристалла. Интенсивность отраженного пучка электронов измерялась приемником (рис. 5.1, *a*). При фиксированном угле скольжения  $\theta$  изменяли непрерывно напряжение  $U$  на электронной пушке [4]. При этом оказалось, что зависимость интенсивности  $I$  от квадратного корня напряжения на электронной пушке ( $\sqrt{U}$ ) носит немонотонный характер (рис. 5.1, *б*).

Рис. 5.1

Максимумы интенсивности наблюдались на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 5.1, *б*) [4], что можно объяснить с помощью формул (5.1) для длины волны де Бройля и Вульфа – Брэгга ( $2ds\sin\theta = n\lambda$ ), выражающей условие максимумов при дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке.

,

;

,

где учтено, что угол скольжения  $\theta$  и постоянная решетки  $d$  кристалла остаются неизменными при проведении опытов.

Выбирая из опыта конкретные значения  $U$ ,  $\theta$ ,  $n$ (порядка максимума) и  $d$ , можно получить хорошее совпадение длин волн, рассчитанных по формулам (5.1) и Вульфа – Брэгга, что доказывает справедливость формулы де Бройля.

*2. Опыты Томпсона и Тартаковского.* Тонкую металлическую фольгу ( $10^{-7} \text{ м} \leq h \leq 10^{-6} \text{ м}$ ) бомбардировали пучком электронов, имеющих постоянную кинетическую энергию. За фольгой был установлен экран (фотопластинка), на котором рассматривали результат прохождения электронного пучка (рис. 5.2).

Рис. 5.2

На экране наблюдалась дифракционная картина в виде светлых и темных колец, аналогичная картине, полученной в результате дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке. Это доказывало наличие волновых свойств у пучка электронов. Расчет длины волны волнового процесса, сопровождающего движение пучка электронов, по формуле де Броиля (5.1) и с помощью формулы для дифракции рентгеновских лучей также приводит к одинаковому результату.

Аналогичные опыты были поставлены и для других микрочастиц (протоны, атомы, молекулы и т. д.). Все это подтвердило наличие волновых свойств у потока микрочастиц.

*3. Опыты Бибермана, Сушкина и Фабриканта.* Из приведенных выше опытов не было ясно, чему приписать волновые свойства – потоку частиц или отдельной частице.

Для ответа на этот вопрос учеными Л. Биберманом, Н. Сушкиным и В. Фабрикантом был поставлен следующий опыт. На установке, подобной установке в опыте Тартаковского и Томпсона, была создана малая интенсивность пучка электронов, а именно, промежуток времени между последовательными вылетами двух электронов из электронной пушки во много раз превышало время пролета установки одним электроном. Этим исключалось влияние других электронов на прохождение одним электроном всей установки.

Результаты опыта оказались следующими: отдельный электрон, проходя установку, случайно отклонялся и попадал в какую-то точку экрана (в этом месте экрана на фоточувствительной пластинке появлялась темная точка). При накоплении достаточно большого числа электронов (эксперимент был длительным) хаотичная картина случайных точек на экране превращалась в

упорядоченную картину дифракции, аналогичную той, что была получена в опытах Томпсона и Тартаковского.

Таким образом, было доказано, что волновыми свойствами обладает отдельно движущийся электрон. Итак, *микрочастица обладает волновыми свойствами, которые проявляются в вероятностном характере ее поведения*, в различной вероятности ее обнаружения в разных точках пространства.

## 5.2. Соотношения неопределенностей Гейзенберга

### 5.2.1. Соотношения неопределенностей как проявление волновых свойств

В отличие от классических частиц, микрочастицы обладают волновыми свойствами, в связи, с чем возникают ограничения на применимость таких понятий, как координата, импульс, время, энергия, траектория движения и т. д., для описания движения микрочастиц. Эти ограничения устанавливаются соотношениями неопределенностей Гейзенberга, согласно которым произведение неопределенностей ( $\Delta A, \Delta B$ ) двух сопряженных величин ( $A, B$ ) не может быть меньше постоянной Планка  $\hbar$  [4]:

$$\dots . \quad (5.2)$$

В формуле (5.2) в правой части в разных учебных пособиях записывают либо  $\hbar$ , либо  $\hbar/2$ , либо  $h$  (важен порядок величины, а не конкретная цифра).

*Сопряженными называют величины, которые не могут иметь одновременно точных значений* [4]. Так, в квантовой механике сопряженными величинами являются такие пары величин, как координата и соответствующая ей проекция импульса микрочастицы, а также энергия и время.

Приведем ряд примеров на соотношение неопределенностей Гейзенберга.

1. Сопряженными величинами являются координата и соответствующая ей проекция импульса. Тогда для них соотношение (5.2) можно записать в виде

$$\dots . \quad (5.3)$$

Неравенство вида (5.3) является можно записать и для оставшихся двух координат и проекций импульса на соответствующие координатные оси:

$$, \quad (5.4)$$

Однако координата микрочастицы и не соответствующая ей проекция импульса (т. е. проекция импульса на другую координатную ось), могут быть одновременно определены с большой точностью. В таких случаях можно записать:

2. Сопряженными величинами являются энергия и время ( $A = W, B = t$ ). Для них соотношение (5.2) запишется в виде

$$\dots \quad (5.5)$$

В формуле (5.5)  $W$  – энергия частицы в квантовом состоянии,  $\Delta W$  – неопределенность (ширина, размытие или разброс) по энергии данного квантового состояния,  $\Delta t$  – неопределенность времени жизни частицы в данном квантовом состоянии [4].

## **5.2.2. Условия применимости классической механики для описания движения микрочастиц**

Соотношение неопределенностей Гейзенberга можно использовать в качестве критерия применимости законов классической или квантовой механики для описания движения микрочастиц. Движение микрочастицы описывается в рамках классической механики, если к ее движению можно применить понятие траектории, т. е. одновременно с большой точностью определить (задать) координату и соответствующую проекцию импульса микрочастицы:

(5.6)

В формуле (5.6) величина  $L$  представляет собой характерный размер установки(размер области локализации частицы).

Перемножая неравенства в формуле (5.6) и используя соотношение неопределенностей Гейзенберга (5.3), а также формулу де Бройля (5.1), получим

Как следует из формулы (5.7), классическая механика применима для описания движения микрочастицы в случае, если длина волны де Броиля частицы существенно меньше размера ее области локализации.

Рассмотрим некоторые примеры, поясняющие условия (5.6) и (5.7).

1. Электрон движется в электронно-лучевой трубке длиной  $l = 0,10$  см. Ускоряющее напряжение на трубке  $U = 10$  кВ. За счет расходимости пучка электронов радиус пятна на экране (размер области локализации электрона) составляет  $L = 1,0 \cdot 10^{-5}$  м.

Оценим точность задания импульса электрона. Из рис. 5.4 видно, что

т. е. импульс электрона задан с большой степенью точности.

Рис. 5.4

Оценим точность задания координаты электрона с помощью соотношения неопределенностей Гейзенберга (5.3):

Видим, что координата электронов тоже может быть определена с высокой степенью точности. Таким образом, к описанию движения электронов в электронно-лучевой трубке могут быть применены законы классической механики.

2. Движение электрона в атоме. Размеры атома составляют  $L \approx 1 \cdot 10^{-10}$  м (размеры области локализации электрона). Из теории Бора для атома водорода известно, что скорость электрона на первой боровской орбите равна  $v \approx 1 \cdot 10^6$  м/с. Оценим длину волны де Бройля, соответствующую электрону в атоме водорода [4]

Как следует из полученного оценочного соотношения, при описании движения электрона в атомах необходимо применять законы квантовой механики.

### **5.3. Волновая функция. Стандартные условия**

Итак, движению микрочастицы соответствует волновой процесс с длиной волны  $\lambda_B$ . Какова же природа волн де Броиля? Правильная трактовка природы волн де Броиля была дана М. Борном в 1927 г. Согласно Борну волны де Броиля – это волны вероятности [4], а волновая функция, описывающая волны де Броиля, представляет собой амплитуду вероятности. Физический смысл имеет только квадрат модуля волновой функции – это плотность вероятности. Плотность вероятности равна отношению вероятности  $dP(x,y,z,t)$  найти частицу в момент времени  $t$  в бесконечно малом объеме  $dV$ , взятом около точки с координатами  $(x,y,z)$ , к величине этого объема  $dV$

(5.8)

В связи с вероятностным смыслом волновой функции на нее накладываются стандартные условия, а именно, волновая функция и ее частные производные по координатам должны быть непрерывными, однозначными и конечными [4].

На рис. 5.5, а показаны точки, которые должны отсутствовать на графике для волновой функции или для модуля квадрата волновой функции.

Для волновой функции справедливо условие нормировки:

, (5.9)

оно дает вероятность найти частицу в какой-то момент времени в объеме ее существования, а это – вероятность достоверного события [4], и поэтому такой интеграл равен единице.

Рис. 5.5

### ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 14***

1. Сформулируйте гипотезу де Бройля. Запишите формулу для длины волны де Бройля.
2. В электростатическом поле с разностью потенциалов  $U$  ускоряются протон и  $\alpha$ -частица. Массы и заряд этих частиц связаны соотношениями: Чему равно отношение длины волны де Бройля протона к длине волны де Бройля  $\alpha$ -частицы?
3. Запишите известные Вам соотношения неопределенностей Гейзенберга. Каков их физический смысл?
4. Координату электрона массой можно установить с неопределенностью. Какую минимальную неопределенность скорости будет иметь электрон?
5. Запишите условие нормировки для волновой функции. В чем состоит его физический смысл?

Лекция 15

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: уравнение Шредингера, энергетический спектр, основное и возбужденные состояния микрочастицы, потенциальная яма, потенциальный барьер, туннельный эффект, коэффициент прозрачности барьера.

## 5.4. Уравнение Шредингера

В классической механике схема решения задачи о движении частицы выглядит следующим образом: задаются координаты и импульс частицы в начальный момент времени, записывается второй закон Ньютона, с помощью которого и формул кинематики, в итоге получают координаты и импульс частицы в конечный момент времени.

Такую схему решения задачи о движении микрочастицы в квантовой механике применить нельзя, так как одновременно невозможно точно задать координаты и импульс частицы. В этом случае состояние микрочастицы однозначно определяется заданием ее волновой функции, поэтому решается уравнение для этой волновой функции и, таким образом, находится конечное состояние частицы – ее волновая функция в момент времени  $t$  (рис. 5.5, б).

Впервые основное уравнение квантовой механики – уравнение для волновой функции было записано в 1926 г. Э. Шредингером [4] и получило название *уравнения Шредингера*.

Чаще всего рассматривается движение микрочастицы в *стационарных* (не зависящих от времени) силовых полях. В таких полях потенциальная энергия частицы со временем не изменяется и зависит лишь от координат, а полная энергия частицы остается постоянной. Волновую функцию для частицы в этом случае можно представить в виде произведения временной ее части на координатную часть [4]

(5.10)

Для координатной части волновой функции уравнение Шредингера (его называют *стационарным уравнением Шредингера*) примет вид

(5.11)

В этом уравнении – постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ ;  $m$  – масса частицы; – оператор Лапласа.

*Уравнение Шредингера является основным уравнением квантовой механики*, оно не выводится, его справедливость проверяется сопоставлением полученных из него результатов с опытными данными [4]. Его роль в квантовой механике такая же, как – уравнения Ньютона в классической механике.

Решая уравнение Шредингера, можно найти не только волновые функции, но и энергетический спектр частицы и вероятность ее обнаружения в различных точках пространства. Эти сведения используются для анализа поведения частицы в потенциальном поле определенного вида.

Рассмотрим некоторые простейшие задачи квантовой механики, имеющие точное решение. Такие задачи играют важную роль при анализе экспериментальных данных.

#### **5.4.1. Микрочастица в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме**

*Потенциальной ямой* называется область пространства, в которой потенциальная энергия частицы много меньше, чем в соседних областях.

*Постановка задачи.* Рассмотрим одномерную задачу о движении частицы в силовом поле, в котором потенциальная энергия частицы задана следующими соотношениями [4]:

(5.12)

Вид потенциального поля приведен на рис. 5.6, а. Видно, что частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме, за пределы которой она выйти не может.

Рис. 5.6

*Решение уравнения Шредингера.* Так как микрочастица локализована в области, то уравнение Шредингера необходимо решать именно для этой области. Запишем уравнение Шредингера, учитывая, что в области ямы

Решением этого уравнения является сумма двух плоских монохроматических волн де Бройля (бегущей и отраженной)

Учитывая, что волновая функция должна быть непрерывна, запишем граничные условия в этой задаче:,. Подставляя данные граничные условия в волновую функцию, получим ее явный вид:

В формулу для волновой функции входит номер квантового состояния  $n$ , причем значение  $n = 0$  исключается, так как  $n = 0$  вероятность найти частицу внутри потенциальной ямы и вне ее будет равна нулю, т. е. частица не существует, а это противоречит условию задачи [4].

Используя условие нормировки, находим постоянную  $A$

Таким образом, собственные волновые функции, описывающие поведение частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме, имеют вид

(5.13)

Для собственных значений энергии частицы получим:

,

(5.14)

*Анализ полученного решения.* Из формулы (5.14) следует, что энергетический спектр частицы является дискретным (энергия частицы может принимать только определенные значения) и расходящимся, минимальное значение энергии отлично от нуля и равно  $W_1$  (рис. 5.6, a)

$$, \quad . \quad (5.15)$$

Состояние частицы при квантовом числе  $n = 1$ , называется *основным состоянием* частицы, а все остальные ее состояния называются *возбужденными*.

Для сравнения: в классической механике энергетический спектр частицы является непрерывным (энергия может принимать абсолютно любые значения), минимальное значение энергии равно нулю.

Как видно, выводы классической и квантовой механики при малых значениях квантового числа  $n$  находятся в несоответствии между собой [4].

Обсудим теперь *вероятность обнаружения микрочастицы внутри потенциальной ямы*.

В классической механике частица движется равномерно по траектории от одной стенки до другой, и поэтому классическая плотность вероятности обнаружения частицы будет одинаковой во всех точках потенциальной ямы, так как частица одинаковое время находится вблизи любой точки [4].

Запишем формулу для квантовой плотности вероятности обнаружения микрочастицы внутри потенциальной ямы

$$. \quad (5.16)$$

Из формулы (5.16) следует, что квантовая плотность вероятности обнаружения микрочастицы внутри потенциальной ямы зависит от координаты  $x$  и от номера квантового состояния  $n$ . Так, например, для квантового состояния с  $n = 1$  плотность вероятности  $P(x, 1)$  на краях потенциальной ямы равна нулю, а в ее середине будет максимальной. Число максимумов на зависимости  $P(x, n)$  будет равно номеру квантового состояния  $n$ , а вся площадь под каждым графиком плотности вероятности равна единице (рис. 5.6, б), так как физический смысл площади под всем графиком – вероятность обнаружения частицы внутри ямы.

Вероятность обнаружения частицы в квантовом состоянии  $n$  внутри потенциальной ямы в области пространства равна площади под графиком соответствующей плотности вероятности и ограниченной по оси абсцисс значениями  $l_1$  и  $l_2$ , а также может быть вычислена по формуле

(5.17)

Итак, движение частицы внутри потенциальной ямы при небольших значениях  $n$  необходимо описывать в рамках квантовой механики. Однако, при больших значениях квантового числа  $n$  возможно применение классической механики при описании движения микрочастицы. Это связано с тем, что при увеличении  $n$  возрастает модуль волнового вектора, следовательно, уменьшается длина волны де Броиля (), соответствующая движению частицы, и при некотором значении  $n$  будет выполняться условие применимости классической механики для описания движения микрочастицы: [4].

Причем для больших  $n$  происходит относительное сближение энергетических уровней, энергетический спектр становится квазинепрерывным

, (5.18)

Большое число максимумов и минимумов на графике зависимости плотности вероятности от координаты  $x$  (при большом  $n$ ) приводит к тому, что усредненное значение квантовой плотности вероятности будет совпадать с классическим значением плотности вероятности.

Соответствие выводов квантовой и классической теории при больших значениях квантовых чисел, является частным случаем *принципа соответствия*, согласно которому: *при больших значениях квантовых чисел выводы квантовой механики должны соответствовать выводам классической механики* [4].

### 5.4.2. Туннельный эффект

*Потенциальным барьером* называется область пространства, в которой потенциальная энергия частицы больше, чем в соседних областях.

*Постановка задачи.* Рассмотрим одномерную задачу о движении частиц с энергией  $W$  вдоль оси  $Ox$ . Частицы из области 1 налетают на прямоугольный потенциальный барьер (область 2) высотой  $U_0$ , причем  $W < U_0$  (см. рис. 5.7, а). Что же происходит с частицами при их встрече с потенциальным барьером?

Согласно законам классической механики все частицы, для которых  $W < U_0$ , отражаются от потенциального барьера и летят обратно. Проникновение таких частиц в области 2 и 3 (область за барьером) невозможно.

*Решение уравнения Шредингера.* В квантовой механике чтобы описать движение микрочастиц, при их встрече с потенциальным барьером, необходимо решить уравнение Шредингера в трех областях (см. рис. 5.7, а). Запишем уравнение Шредингера для каждой из областей и сразу приведем их решения.

Область 1:

,

.

Область 2:

,

.

Область 3:

,

..

Из решения уравнения Шредингера для второй области видно, что  $\Psi_2(x)$  не носит волнового характера, т. е. ее нельзя представить в виде гармонической функции синуса (косинуса). Это означает, что частица не может находиться в этой области сколь угодно долго, по истечении определенного промежутка времени она должна покинуть эту область пространства [4]. В третьей области пространства отражения нет, поэтому отраженной волны в области не будет.

Рис. 5.7

Полученные в ходе решения уравнения Шредингера для трех областей волновые функции, необходимо «сшить» на границе этих областей, т. е. наложить на волновые функции стандартные условия.

На рис. 5.7, б приведен график зависимости квадрата модуля волновой функции от координаты  $x$  с учетом стандартных условий (условий сшивания), накладываемых на волновые функции на границах потенциального барьера. Из рис. 5.7, б видно, что вероятность обнаружения микрочастицы внутри потенциального барьера (вторая область) уменьшается с ростом координаты  $x$  и что вероятность найти микрочастицу в области 3 (область за барьером) будет отлична от нуля [4].

*Анализ полученного решения.* При встрече микрочастиц с потенциальным барьером возникает *туннельный эффект* – явление проникновения частиц сквозь высокий ( $W < U_0$ ) потенциальный барьер. Коэффициент прозрачности  $D$  потенциального барьера – величина, определяющая вероятность проникновения частиц сквозь потенциальный барьер и равная отношению интенсивности волны, прошедшей потенциальный барьер, к интенсивности волны, падающей на барьер. Это отношение интенсивностей волн можно найти с учетом условий сшивания, накладываемых на волновую функцию на границах потенциального барьера (см. рис. 5.7) [4]

. . . . . (5.19)

Как следует из формулы (5.19), коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера зависит от массы частицы ( $m$ ), ширины барьера ( $b - a$ ) и соотношения между высотой потенциального барьера и полной энергией налетающей на него частицы ( $U_0 - W$ ).

В случае потенциального барьера  $U(r)$  произвольной формы (рис. 5.7, в), коэффициент прозрачности барьера определяется по формуле:

. . . . . (5.20)

Туннельный эффект объясняет многие наблюдаемые на опыте явления, такие например, как  $\alpha$ -распад ядер, холодную эмиссию электронов из металла.

## ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 15***

1. Запишите стационарное уравнение Шредингера и поясните все входящие в него величины.
2. Сформулируйте определение потенциальной ямы. Каким энергетическим спектром обладает микрочастица, находящаяся внутри бесконечно глубокой потенциальной ямы?
3. Протон находится в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Волновая функция, описывающая его состояние имеет вид указанный на рисунке. Чему равна вероятность обнаружить протон на участке?
4. Сформулируйте определение потенциального барьера. В чем состоит туннельный эффект?
5. К потенциальному барьеру высотой и шириной  $d$  приближаются различные частицы с энергией одинаковой  $W$ : электрон, атом гелия, и молекула водорода. Для какой частицы коэффициент прозрачности барьера будет наименьшим?

# ОСНОВЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

## ЛЕКЦИЯ 16

**Основные понятия и законы**, которые должны быть освоены в ходе лекции: ядерные силы и их свойства, дефект масс, энергия связи, удельная энергия связи;  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -распады; основной закон радиоактивного распада, период и постоянная распада, среднее время жизни и активность радиоактивного ядра; ядерные реакции и их энергия.

### 6.1. Строение и состав атомного ядра

В опытах Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц веществом (1911 г.) было доказано, что положительный заряд и практически вся масса атома сосредоточены в малом по размерам ядре (линейные размеры ядра составляют порядка, а размеры атома.

После открытия нейтрона (Чедвик, 1932 г.) окончательно сложилась протонно-нейтронная модель атомного ядра. Массы протона и нейтрона примерно одинаковы и равны,. Протон имеет положительный электрический заряд, равный по модулю заряду электрона, а нейтрон электрического заряда не имеет.

#### 6.1.1.Характеристики атомного ядра

1. *Обозначение ядра.* Ядро химического элемента принято обозначать символом. Здесь  $Z$  называют зарядовым числом – оно определяет заряд ядра или порядковый номер элемента в Периодической системе элементов, или число электронов в электрически нейтральном атоме; – *массовое число*, оно равно суммарному числу протонов ( $Z$ ) и нейтронов ( $N$ ) в ядре (т. е. числу нуклонов в ядре).

#### 2. *Типы ядер:*

– *изотопы* – это ядра, с одинаковыми зарядовыми, но разными массовыми числами (у них одинаковое количество протонов, но разное –

нейтронов). Так, например, для водорода имеется три изотопа – протий  ${}_1^1\text{H}$ , дейтерий  ${}_1^2\text{H}$  и тритий  ${}_1^3\text{H}$ ;

- *изобары* – это ядра с одинаковыми массовыми, но разными зарядовыми числами (такие ядра могут получаться в ходе  $\beta$ -распада);
- *изомеры* – ядра с одинаковым числом нейтронов, но разным количеством протонов.

Наличие изотопов приводит к тому, что приводимое в периодической системе элементов Д.И. Менделеева массовое число каждого элемента не является целым. При расчете массового числа химического элемента, учитывается наличие и процентное всех его изотопов.

3. *Размеры ядер.* Было экспериментально доказано, что радиус ядра зависит от массового числа и эта зависимость имеет вид:

(6.1)

Рассчитаем с помощью формулы (6.1) плотность ядерного вещества

(6.2)

Из выражения (6.2) видно, что плотность ядерного вещества чрезвычайно велика и не зависит от массового числа (от номера элемента в таблице Менделеева).

### **6.1.2. Ядерные силы. Свойства ядерных сил**

Между нуклонами в ядре действуют ядерные силы, которые обладают следующими свойствами:

1. Ядерные силы – силы притяжения.
2. *По интенсивности ядерные силы превосходят кулоновские примерно в 100 раз.* Поэтому ядерные силы удерживают в ядре положительно заряженные протоны, между которыми также действуют кулоновские силы отталкивания.
3. *Ядерные силы обладают зарядовой независимостью,* т. е. действуют между протоном и нейтроном, нейтроном и нейтроном, протоном и протоном, и интенсивности этих взаимодействий одинаковы.

4. Ядерные силы приводят к тому, что ядро является устойчивым образованием, т. е. при его получении выделяется энергия. Она называется энергией связи атомного ядра и рассчитывается по формуле

$$, \quad (6.3)$$

где разность масс называют *дефектом массы*, — масса атома водорода, — масса нейтрального атома.

Энергия связи атомного ядра представляет собой минимальную энергию, которую нужно сообщить ядру, чтобы разделить его на отдельные нуклоны и развести их на расстояния, на которых они не взаимодействуют.

Удельная энергия связи характеризует устойчивость ядра. Она равна энергии связи, приходящейся на один нуклон

$$. \quad (6.4)$$

Чем больше энергия связи, тем более устойчивым (т. е. менее склонным к самопроизвольным распадам) является ядро.

График зависимости удельной энергии связи от массового числа приведен на рис. 6.1. Из него следует, что наиболее прочными являются ядра элементов с массовыми числами порядка 50 (т. е. вблизи железа), у них наблюдаются самые большие значения.

Анализируя зависимость, приведенную на рис. 6.1, можно заметить, что двух типах ядерных реакций энергия будет выделяться — это реакции деления тяжелых ядер и слияния легких ядер. В ходе таких реакций образуются более устойчивые ядра.

Рис. 6.1

5. Ядерные силы зависят от ориентации спинового момента нуклонов. Так, атом дейтерия образуется только в том случае, когда спиновые моменты протона и нейтрона направлены параллельно друг другу.

6. Ядерные силы не являются центральными.

*7. Ядерные силы обладают свойством насыщения*, т. е. один нуклон может взаимодействовать только с ограниченным количеством нуклонов вокруг него.

*8. Ядерные силы являются короткодействующими*. С этим свойством связан распад тяжелых ядер. Рассмотрим, как он происходит. При попадании нейтрона в ядро оно возбуждается и принимает различные формы и, в частности, форму в виде гантели (рис. 6.2). В узкой области перешейка ядерные силы будут ослаблены (в них участвует малое количество нуклонов), поэтому за счет дальнодействующих кулоновских сил (их интенсивность при этом не ослабевает), ядро распадается, образуя два осколка, разлетающиеся с большими скоростями, и два – три нейтрона. Энергия при ядерной реакции выделяется, в основном, в виде кинетической энергии разлетающихся осколков.

Рис. 6.2

## 6.2. Ядерные реакции

Под ядерной реакцией понимают процесс взаимодействия ядер или ядра и элементарной частицы, приводящий к их взаимному превращению. Общая схема ядерной реакции выглядит таким образом:

$$, \quad (6.5)$$

или в краткой форме

$$, \quad (6.6)$$

где обозначают исходное и образующееся в результате реакции ядро;  $a, b$  известные частицы, которые часто встречаются в различных ядерных реакциях – это электрон ( $e^-$ ), позитрон ( $e^+$ ), протон ( $p$ ), нейтрон ( $n$ ),  $\alpha$ -частица и т. д.

В ходе любой ядерной реакции сохраняются:

- 1) энергия ();
- 2) импульс ();
- 3) момент импульса();
- 4) электрический заряд ();
- 5) массовое число () .

*Энергия ядерной реакции* – это энергия, выделяющаяся или поглощающаяся в ходе ядерной реакции. Она равна разности энергий покоя исходных ядер и ядер, образующихся в результате ядерной реакции

$$(6.7)$$

В качестве примеров ядерных реакций рассмотрим реакцию термоядерного синтеза и реакцию деления тяжелых ядер.

*Термоядерный синтез* заключается в слиянии легких ядер, сопровождающимся выделением большого количества энергии. Для протекания таких реакций вещество должно быть нагрето до сверхвысоких температур (порядка). Приведем несколько типичных примеров реакций термоядерного синтеза:

,

,

,

В скобках приведено значение энергии, выделяющейся в ходе синтеза легких ядер.

Под *реакцией деления тяжелых ядер* понимают такую ядерную реакцию, в ходе которой ядро тяжелого элемента, под действием попадающего на него нейтрона, делится на два соразмерных по массе осколка, обладающих большой кинетической энергией, и из него также вылетают 2-3 нейтрона.

Приведем пример реакции деления тяжелых ядер:

### 6.3. Явление радиоактивности

#### 6.3.1. Виды радиоактивного распада ядер

Явление радиоактивности (*p-a*) заключается в самопроизвольном превращении исходного ядра в ядро нового элемента, при котором испускаются элементарные частицы. Различают альфа- ( $\alpha$ -) и бета- ( $\beta$ -) распады, они сопровождаются испусканием гамма- ( $\gamma$ -) лучей. Атомное ядро, испытывающее *p-a*-распад, называют *материнским*, а образующееся при этом ядро – *дочерним*.

Для того чтобы определить параметры ядра, получаемого при *p-a* распаде, применяют правила смещения, они позволяют правильно установить изменение таких параметров ядра, как его заряд и массовое число.

Выделяют *три вида β-распада*:  $\beta^-$ -распад (из ядра вылетает электрон  $e^-$ ),  $\beta^+$ -распад (из ядра вылетает позитрон  $e^+$ ) и *электронный захват* (*e-захват*, ядро захватывает один электрон с *K*-слоя, *L* - слоя, *M* – слоя и т. д.).

При *α-распаде* из ядра вылетает  $\alpha$ -частица, представляющая собой ядро атома гелия.

Для этих видов распада правила смещения записываются следующим образом:

$$\beta^- \text{-распад:}, \quad (6.8)$$

$$\beta^+ \text{-распад:}, \quad (6.9)$$

$$e\text{-захват:}, \quad (6.10)$$

$$\alpha\text{-распад:} \quad (6.11)$$

Из этих правил следует, что все радиоактивные ядра объединяются в  $\alpha$ -семейства, число которых равно четырем – это семейства (или ряды) тория (), нептуния (), урана () и актиния. Для них массовое число определяется следующим образом:

где число  $n$  принимает целочисленные значения.

Каждый член ряда получается из предыдущего путем  $\alpha$ - или  $\beta$ -распадов. Поэтому у соседних членов ряда массовые числа либо одинаковы (они являются изобарами) или отличаются на четыре.

Что касается  $\gamma$ -излучения, то оно не представляет собой самостоятельный вид радиоактивного распада, а только сопровождает  $\alpha$ - и  $\beta$ -распады, и также любые взаимные превращения ядер, при которых происходит переход ядра из возбужденных состояний в основное.

Установлено, что  $\gamma$ -излучение испускается дочерним (а не материнским) ядром при его переходе из возбужденного состояния в основное состояние.

### **6.3.2. Основной закон радиоактивного распада. Активность радиоактивного вещества**

1. *Основной закон радиоактивного распада.* Все процессы радиоактивного распада подчиняются общим законам, согласно которым вероятность распада одного ядра в единицу времени является для данного типа ядра постоянной величиной. Ее называют *постоянной распада*  $\lambda$ , она дает вероятность распада одного ядра за единицу времени.

Пусть  $N$  – число ядер, не распавшихся к моменту времени – количество ядер, претерпевших распад за промежуток времени () ядер, тогда для вероятности распада ядра за единицу времени можно записать

откуда следует *основной закон радиоактивного распада*

$$\cdot \quad (6.12)$$

В выражении (6.12) через  $N_0$  обозначено начальное число радиоактивных ядер в веществе.

2. *Период полураспада  $T$  – это время, за которое распадается половина первоначального количества ядер.*: Он связан с постоянной распада  $\lambda$  формулой

$$\text{.} \quad (6.13)$$

3. *Среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного ядра.*

Получим формулу для среднего времени  $\tau$  жизни ядра. За время  $(t, t+dt)$  распадается  $dN$  ядер, их время жизни можно считать одинаковым и равным  $t$ , это связано с малостью интервала  $dt$ . Суммарное время жизни этих ядер будет равно  $(-tdN)$ . Суммируя время жизни ядер по всем интервалам  $dt$  от нуля до бесконечности и деля эту сумму на первоначальное количество частиц  $N_0$ , получим

$$\text{.} \quad (6.14)$$

3. *Активность радиоактивного вещества* – это величина, определяющая интенсивность радиоактивного распада и равная количеству распадов в данном радиоактивном веществе, происходящих за единицу времени:

$$\text{,} \quad (6.15)$$

где начальная активность  $A_0$  радиоактивного вещества равна

$$\text{.} \quad (6.16)$$

Единицей измерения активности в СИ является беккерель (Бк). При активности  $p$ -а вещества в 1 Бк в веществе происходит один распад за одну секунду ( $1 \text{ Бк} = 1 \text{ распад/с}$ ). Применяется более крупная единица, называемая кюри, она составляет.

## ***Вопросы и задания для самоконтроля к лекции 16***

1. Перечислите основные свойства ядерных сил.
2. Что такое энергия связи ядра? По какой формуле она рассчитывается?
3. Запишите уравнения, описывающие  $\alpha$ - и  $\beta^-$ -распады.
4. Активность некоторого радиоактивного вещества уменьшилась в 4 раза за 60 суток. Чему равны период полураспада и постоянная распада для этого радиоактивного вещества?
5. Запишите недостающие обозначения в следующих реакциях:

## **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Валишев, М.Г. Физика. Часть 3. Электромагнетизм: учебное пособие / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2006. – 55 с.
2. Малышев, Л.Г. Избранные главы курса физики. Электромагнетизм: учебное пособие / Л.Г. Малышев, А.А. Повзнер. – Екатеринбург : изд-во Урал. ун-та, 2014. – 169 с.
3. Валишев, М.Г. Физика. Часть 4. Колебания и волны: учебное пособие / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2006. – 90 с.
4. Валишев, М.Г. Курс общей физики: учебное пособие / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. – СПб : Лань, 2010. – 576 с.
5. Валишев, М.Г. Физика. Часть 5. Волновая оптика: учебное пособие / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2006. – 61 с.
6. Малышев, Л.Г. Основные законы классической физики в примерах и задачах / Л.Г. Малышев, К.А. Шумихина, А.В. Мелких [и др.] ; под ред. Ф.А. Сидоренко. – Екатеринбург : УрФУ, 2013. – 404

