

Colección PASATEXTO

Módulo de Matemática

Encuentros de Integración Universitaria 2016



*Silvia Butigué, Nancy Scattolini, Silvia Cabrera, Sonia Curti,
Martha Lardone, Susana Mussolini y Juan Manuel Gallardo*

ISBN 978-987-688-251-4

e-book

Módulo de matemática . encuentros de Integración Universitaria 2016 : / Silvia Butigué ... [et al.]. -
1a ed . - Río Cuarto : UniRío Editora, 2018.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-688-251-4

1. Matemática. 2. Ciencias Económicas. I. Butigué, Silvia
CDD 510.711

Módulo de matemática. Encuentros de Integración Universitaria 2016

Silvia Butigué, Nancy Scattolini, Silvia Cabrera, Sonia Curti, Martha Lardone, Susana Mussolini y Juan Manuel Gallardo

2018 © by UniRío editora. Universidad Nacional de Río Cuarto
Ruta Nacional 36 km 601 – (X5804) Río Cuarto – Argentina
Tel: 54 (358) 467 6309
editorial@rec.unrc.edu.ar
www.unrc.edu.ar/unrc/comunicacion/editorial/

ISBN 978-987-688-251-4
Primera Edición: *Marzo de 2018*



Este obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución 2.5 Argentina.
http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/ar/deed.es_AR



Consejo Editorial

Facultad de Agronomía y Veterinaria
Prof. Laura Ugnia y Prof. Mercedes Ibañez

Facultad de Ciencias Económicas
Prof. Nancy Scattolini y Prof. Silvia Cabrera

Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas
y Naturales
Prof. Sandra Miskoski y Prof. Julio Barros

Facultad de Ciencias Humanas
Prof. Gabriela Jure

Facultad de Ingeniería
Prof. Jorge Vicario

Biblioteca Central Juan Filloy
Bibl. Claudia Rodríguez y Prof. Mónica Torreta

Secretaría Académica
Prof. Ana Vogliotti y Prof. José Di Marco

Equipo Editorial

Secretaría Académica: *Ana Vogliotti*
Director: *José Di Marco*

Equipo: *José Luis Ammann, Daila Prado, Maximiliano Brito, Ana Carolina Savino
Soledad Zanatta y Daniel Ferniot*



Contenido

¡Bienvenidos Ingresantes Al Módulo De Matemática!	4
Modalidad de Trabajo - Cronograma	5
Organización y modalidad de lectura del módulo	6
Glosario	7
I Los Números Reales	8
1.1. ¿Con qué conjunto de números trabajaremos?	9
1.2. Representación de números reales en la recta	11
1.3. Propiedades de las operaciones con números reales	14
1.3.1 Propiedad asociativa de la suma y el producto	15
1.3.2 Propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta	16
1.4. Recomendaciones al operar con números reales	19
1.5. Exponentes y radicales	25
II Expresiones Algebraicas	33
2.1. Expresiones algebraicas racionales	34
2.1.1. Expresiones algebraicas enteras	34
2.1.1.1. Operaciones con expresiones algebraicas enteras	35
2.1.1.1.1. Productos notables	38
2.1.1.1.2. Reglas de factorización	40
2.1.2. Expresiones algebraicas fraccionarias	45
2.1.2.1. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias	45
III Ecuaciones	47
3.1. Ecuaciones con una incógnita	48
3.1.1. Ecuaciones lineales con una incógnita	48
3.1.2. Del Lenguaje Coloquial al Matemático	52
3.1.3. Ecuaciones cuadráticas	56
3.1.4. Ecuaciones con Módulo	60
3.1.5. Inecuaciones	62
3.2. Ecuaciones con dos incógnitas	64
3.2.1. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	65
Resolución de Actividades Problemáticas	73
Bibliografía	80

Bienvenidos Ingresantes Al Módulo De Matemática!

Nos es sumamente grato darte la más cordial bienvenida e invitarte a compartir este Módulo del área Matemática. El mismo tiene como finalidad recuperar contenidos y procedimientos estudiados en el Ciclo Secundario, que serán de suma utilidad en el cursado de las asignaturas Análisis Matemático I y Análisis Matemático II. Las mismas se dictan en el Primer Año de las Carreras de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Río Cuarto.

Esperamos que el material que hoy ponemos a tu disposición, te permita reflexionar acerca de aquellos contenidos que te ofrecen mayor dificultad.

Hemos procurado hacerlo amigable, con actividades, ejemplos y llamados de atención sobre los errores más frecuentes, de manera que en forma paulatina te vayas adentrando a los conceptos que queremos repasar en esta etapa.

Pensamos que lo que caracteriza esencialmente la acción educativa es la interacción didáctica que podamos entablar entre nosotros, como así también el aprendizaje que se logra a través del trabajo colaborativo entre ustedes. Todo ello se pondrá en acción cuando trabajemos con las actividades previstas para el ingreso a la Facultad en el transcurso de febrero del próximo año.

Los objetivos que nos han impulsado a escribir este Módulo son para recuperar:

- La utilización de los símbolos y representaciones gráficas.
- La manipulación conveniente del herramiental matemático.
- La interpretación de los resultados hallados.

La propuesta queda a tu disposición. ¡Buen comienzo!



Modalidad de Trabajo - Cronograma

El cronograma de los temas seleccionados para avocarnos a su repaso es el siguiente:

- **REPASO DE ALGEBRA**

Comenzaremos repasando cómo se forma el **conjunto de los números reales**, veremos las **operaciones** que pueden realizarse con ese conjunto, revisando algunas de las **propiedades** que más aplicaremos, también trabajaremos con **expresiones algebraicas**. Concluiremos este bloque recordando las **reglas de factorización** y su aplicación para factorizar expresiones y **simplificar fracciones**.

- **REPASO DE ECUACIONES**

Trabajaremos con ecuaciones lineales y cuadráticas, resolveremos inecuaciones lineales sencillas, con y sin módulo, introduciendo la notación de intervalo, para culminar con sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y métodos de resolución. Esto te permitirá abordar problemas sencillos, en particular de aplicación económica, a través del planteo de ecuaciones y la resolución de las mismas.

Esperamos que esta breve revisión te posibilite recordar esos conceptos, pero si adviertes que están muy olvidados o si los recuerdas pero quieres ampliarlos, puedes consultar los libros que has utilizado en el Secundario o algunos sitios web que conozcas o los que aquí te ofrecemos, como ser:



- ✓ <http://www.vitutor.com/di/re/r2.html> contiene teórico práctico de los números reales, operaciones, intervalos, valor absoluto, temas que también se retomarán en este módulo.
- ✓ http://www.vitutor.com/ab/p/a_1.html hace referencia a expresiones algebraicas, factorización, teoría y práctica con actividades resueltas.
- ✓ http://www.vitutor.com/ecuaciones/1/ecua_Contenidos.html trata sobre ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita, teoría y práctica con ejercicios resueltos.



Para poder organizarnos mejor en este camino que juntos transitaremos te presentamos la:

Organización y modalidad de lectura del módulo

Cada tema que trataremos en este módulo está organizado en una primera parte teórica con ejemplos que te mostrarán el camino de cómo aplicar la teoría, algunas actividades que te desafían a resolverlas por ti sólo. Y una segunda parte de actividades que pretenden integrar los contenidos desarrollados para poner en práctica tus conocimientos.

Asimismo te encontrarás con preguntas a responder, las mismas tienen la intención de invitarte a recordar un concepto, una propiedad o tal vez una definición, antes de abordar la lectura del tema en cuestión. Esta práctica te ayudará a reflexionar sobre los conocimientos adquiridos, es decir, te servirán a tomar conciencia de lo que sabés y también de lo que no recordás.

El siguiente formato te indica que:

Aquí encontrarás el contenido destacado

Además, hemos insertado íconos que te irán señalando si se trata de una actividad a resolver u observaciones que debes prestar especial atención, recordatorios de conceptos que has aprendido en tu paso por la secundaria..., tal como se muestra a continuación.



Este ícono indicará una OBSERVACIÓN, NOTA o ACLARACIÓN referida al contenido que se está desarrollando



Este corresponde a EJEMPLOS



Te indica que es una ACTIVIDAD que te desafía a poner en práctica tus conocimientos.



Simboliza una REFLEXIÓN, un INTERROGANTE a responder



Prestar especial ATENCIÓN al comentario que realizamos



Procesos temporales



La bibliografía consultada para elaborar este módulo

Y como modalidad de lectura te sugerimos que en primer lugar no dejes de leer los objetivos y el eje de cada unidad, así como la introducción, ya que esto te dará una visión global del contenido a desarrollar.

Glosario

Para hacer uso del lenguaje matemático preciso, brindamos a continuación este glosario que contiene los símbolos y notaciones que le son propias.



SÍMBOLOS Y NOTACIONES USADOS EN MATEMÁTICA

\in : "pertenece a" o "perteneciente a"	$//$: "es paralela a"
\notin : "no pertenece" o "no perteneciente a"	\perp : "es perpendicular a"
\Rightarrow : "implica" o "entonces"	∞ : "infinito"
\Leftrightarrow : "implica doblemente" o "sí y sólo si"	$ a $: "módulo de a " o "valor absoluto de a "
$/$: "tales que"	$<$: "es menor que"
\wedge : "y"	\leq : "es menor o igual que"
\vee : "o"	$\not<$: "no es menor que"
\forall : "cualquiera sea" o "para todo"	$>$: "es mayor que"
\exists : "existe al menos uno"	\geq : "es mayor o igual que"
\therefore : "en consecuencia" o "por tanto"	$\not>$: "no es mayor que"
$!$: "único"	\subseteq : "es subconjunto de" o "está incluido en"
$!!$: "absurdo"	\subset : "está incluido estrictamente en"
\equiv : "igual"	$\not\subseteq$: "no está incluido en"
\neq : "distinto" o "no es igual"	\supset : "incluye a"
\approx : "semejante a"	\cap : "intersección"
\cong : "es congruente a"	\cup : "unión"

I Los Números Reales

En esta primera parte del módulo de matemática nos abocamos al campo numérico real, el cual está conformado por los conjuntos de los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales.

De cada uno de esos conjuntos repasaremos sus principales características y su representación geométrica.

Asimismo, revisaremos las propiedades de la adición, multiplicación, potenciación y radicación para poder realizar operaciones con los números reales.

Por último, te encontrarás con recomendaciones o sugerencias para tener en cuenta cuando efectúes operaciones con números reales.



Objetivos:

- ✓ Familiarizarse con el campo numérico real y la recta de los números reales.
- ✓ Operar con números reales y aplicar sus propiedades.

Para lograrlos te proponemos los siguientes

Contenidos:

- 1.1. [¿Con qué conjunto de números trabajaremos?](#)
- 1.2. [Representación de números reales en la recta.](#)
- 1.3. [Propiedades de las operaciones con números reales.](#)
 - 1.3.1. [Propiedad asociativa de la suma y el producto.](#)
 - 1.3.2. [Propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta.](#)
- 1.4. [Recomendaciones al operar con números reales.](#)
- 1.5. [Exponentes y Radicales.](#)



1.1. ¿Con qué conjunto de números trabajaremos?

Recordemos que, cuando mencionamos un conjunto, nos estamos refiriendo a un grupo de objetos.

A su vez, cada objeto que se encuentra en un conjunto se denomina elemento.

Un conjunto puede especificarse listando sus elementos en cualquier orden dentro de llaves, en este caso, se dice que el conjunto está definido por **extensión** o **enumeración**.



El conjunto de las vocales, escrito por extensión, se expresa:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Pero, como frecuentemente trabajaremos con conjuntos que tienen infinitos elementos, en vez de listarlos, generalmente, describiremos las características de sus elementos, que es otra manera de designarlo; en este caso, se dice que está definido por **comprensión**.



En nuestro ejemplo: $A = \{x/x \text{ sea una vocal}\}$, indica que sus elementos cumplen la condición o característica común de ser vocales.

Volviendo a nuestro interrogante: **¿Con qué conjunto de números trabajaremos?**

Con el **CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES**



Antes de continuar con la lectura, ¿podrías mencionar diez **números que pertenezcan a dicho conjunto?**

.....
.....
.....

En símbolos podemos indicarlo:

$$\mathbb{R} = \{x/x \in \mathbb{R}\}$$

Esta expresión indica que los reales son un conjunto formado por los elementos " x " que cumplen la condición de pertenecer al conjunto de los números reales.

Se llega al conjunto de los números reales a través de sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos, debido a la necesidad de ir resolviendo más operaciones.

Al conjunto de los números naturales, $N: \{1, 2, 3, \dots\}$ ó $\{x/x \in N\}$, lo simbolizamos entre llaves, nombrando los primeros elementos y escribiendo tres puntos suspensivos, dado que el listado continúa sin fin. Con este conjunto podemos sumar y multiplicar, obteniendo como resultado otro número natural, pero no siempre es posible restar y dividir dos números naturales y obtener como resultado otro número natural. Además, no todas las raíces de números naturales dan como resultado otro número natural, por ejemplo $\sqrt{3}$ no da como resultado otro número natural.

Surge entonces, el conjunto de los enteros negativos, $Z^-: \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$, que junto al cero y a los naturales (también llamados enteros positivos, $Z^+ \equiv N$), forman el conjunto de los números enteros: $Z = Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$. En este conjunto es posible resolver, además de la suma y multiplicación, la resta y obtener como resultado otro número entero.

Como dentro del conjunto de los números enteros, no todas las divisiones de dos números enteros dan como resultado otro número entero y esto ocurre cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, aparecen los **números fraccionarios**, F , que dan solución a esta situación y que junto a los enteros forman el conjunto de los **números racionales**, simbolizado con una Q . Comprende a todo número que pueda expresarse como un cociente $\frac{p}{q}$, donde tanto "p" como "q" son enteros y $q \neq 0$.



Son ejemplos de números racionales: $\frac{4}{3}$; $0,5$ (ya que puede expresarse como $\frac{5}{10}$); 2 (ya que puede expresarse como $\frac{2}{1}$); etc.

Existen dos maneras de escribir un mismo número racional, como fracción o en forma decimal resolviendo el cociente.



Recordar que como operación aritmética no es posible dividir por cero:

$$\frac{p}{q} \text{ con } q \neq 0$$



En éste último caso podemos obtener una expresión decimal exacta, por ejemplo: 1,5 que se obtiene de $\frac{3}{2}$; o una expresión con infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente, por ejemplo: $0,\hat{2} = 0,22222 \dots$ que proviene de $\frac{2}{9}$ y $0,1\hat{4} = 0,14444 \dots$ que proviene de $\frac{13}{90}$.

Completa el conjunto de los números reales, \mathbb{R} , el subconjunto de los números irracionales, I . La particularidad de los números irracionales es que no pueden ser escritos como una división entre enteros y se expresan con infinitas cifras decimales NO periódicas. Es decir, los números irracionales son decimales cuya forma no es finita ni periódica. Algunos provienen de raíces no exactas.



Veamos, por ejemplo, algunos de los números irracionales más conocidos

$$e = 2,7182818 \dots \text{(Número base del logaritmo natural)}$$

$$\pi = 3,141592654 \dots ; \quad \sqrt{3} = 1,73205080 ; \text{etc.}$$

Los números **racionales** y los números **irracionales** forman el conjunto de los números **reales**: $\mathbb{R} = Q \cup I$

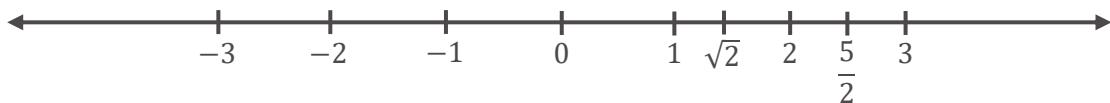
1.2. Representación de números reales en la recta

Los números reales pueden ser representados por puntos en una recta.

Para ello, primero se selecciona un punto en la recta que representa el cero, llamado origen, luego se elige un segmento unidad, cuya medida se marca sucesivamente a la derecha y a la izquierda del cero. Con cada punto sobre la recta asociamos un número con signo, que depende de la posición del punto con respecto al origen. Las posiciones a la derecha del origen son consideradas positivas y a la izquierda negativas. De esta manera, a cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta. De allí que la llamamos recta de números reales.



En la siguiente recta real se representan algunos números.



Detengámonos un momento en la lectura del módulo, ¿qué hemos planteado hasta aquí?

En el cuadro siguiente se muestran las sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos, hasta llegar al conjunto de los números reales.

<u>LOS NÚMEROS REALES</u>	
Números naturales (N) o enteros positivos (Z^+)	
Lo simbolizamos	$N: \{1, 2, 3, \dots\} \text{ ó } \{x/x \in N\}$
El cero	0
Enteros negativos (Z^-)	$Z^-: \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$
<i>Enteros (Z), formado por la unión de los números naturales, el cero y los números enteros negativos:</i>	
Lo simbolizamos	$Z = Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$
	$Z: \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ ó } \{x/x \in Z\}$
Números racionales (Q) formado por la unión de los números enteros (Z) con los fraccionarios (F).	
	$Q = Z \cup F$
<i>Es decir, todos los números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros, con $q \neq 0$, cuya representación decimal es un número exacto o poseen infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente.</i>	
Números irracionales (I), aquellos representados por números decimales que poseen infinitas cifras que <u>no</u> se repiten periódicamente.	
Números reales (R), formado por la unión de los racionales e irracionales	
	$R = Q \cup I$

Fig. 1. Esquema Conjunto de Números Reales



Recordemos las principales CARACTERÍSTICAS del conjunto de números reales:

- ✓ Es infinito.
- ✓ No tiene primer ni último elemento.
- ✓ Es un conjunto denso, pues entre dos números reales existe siempre un número infinito de números reales.
- ✓ El conjunto de números reales completa la recta numérica ya que, si sobre una recta fijamos un origen y un segmento unidad, a cada número real corresponde un punto en la recta y a todo punto de la recta corresponde un número real.

A modo de síntesis, podemos realizar el siguiente ESQUEMA DEL CAMPO NUMÉRICO REAL.

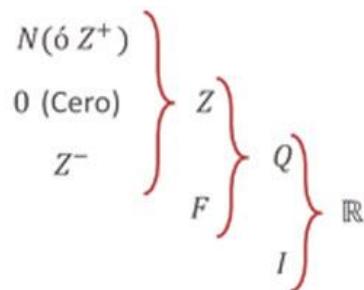


Fig. 2. Campo Numérico Real

Vuelve a revisar los números que mencionaste al comienzo del Módulo, ¿puedes identificar a qué conjunto numérico pertenecen dentro de los reales?

Con este conjunto de números trabajaremos en este curso. Los invitamos ahora a resolver las siguientes actividades, retomando los conceptos vistos hasta aquí.

**Actividad 1:**

Escribe a qué conjunto numérico Q (racional) o I (irracional) pertenece cada uno de los siguientes números:

$$\sqrt{2} \in \quad ; -2 \in \quad ; 1,434343 \dots \in \quad ; 0,123456 \dots \in$$

$$1,1415 \in \quad ; \frac{3}{5} \in \quad ; -\frac{5}{3} \in \quad ; 132 \in$$

$$1,8\hat{9} \in \quad ; -2,565758\dots \in \quad ; \sqrt[3]{7} \in \quad ; \sqrt{81} \in$$

Actividad 2:

Traza una recta, fija el origen y un segmento unidad, y representar los siguientes números reales:

$$-3 ; 2,5 ; \frac{4}{3} ; -\frac{1}{2} ; \pi$$

Para trabajar con un conjunto numérico debemos tener presente las propiedades de las operaciones que se verifican en él, por ello repasaremos brevemente las que se verifican en el conjunto de los números reales.

1.3. Propiedades de las operaciones con números reales

Muchos de los errores que se cometan al operar con números reales surgen por desconocimiento u olvido de algunas de ellas.

Damos a continuación las propiedades básicas de las operaciones con números reales.

Comencemos con las **PROPIEDADES DE LA SUMA Y EL PRODUCTO DE NÚMEROS REALES.**

Para todos los números reales a, b y c , se cumplen las siguientes propiedades.



PROPIEDADES	EJEMPLO
$a + b = b + a$	$2 + 3 = 3 + 2$
$a \cdot b = b \cdot a$	$5 \cdot (-3) = (-3) \cdot 5 = -15$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$
$a + 0 = a$ y $0 + a = a$	$3 + 0 = a$ y $0 + 3 = 3$
$a \cdot 0 = 0$ y $0 \cdot a = 0$	$2 \cdot 0 = 0$ y $0 \cdot 2 = 0$
$a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$	$5 \cdot 1 = 5$ y $1 \cdot 5 = 5$
$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$4 + (-4) = (-4) + 4 = 0$
$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ y $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ si $a \neq 0$	$7 \cdot \frac{1}{7} = 1$ y $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	$5 \cdot (2 - 4) = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 4$

De todas las propiedades que hemos enunciado, trataremos especialmente algunas de las que ocasionan más errores al operar con dicho conjunto de números.

Comenzaremos con la:

1.3.1 Propiedad asociativa de la suma y el producto.

En símbolos la propiedad se escribe:

$$\forall a, b \text{ y } c \in \mathbb{R}: (a + b) + c = a + (b + c) \text{ y } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Significa que, tanto en la suma como en el producto, los números pueden agruparse en cualquier orden.



Veamos algunos ejemplos:

✓ $2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$

✓ $10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = (10 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2} = 15$

Sin embargo, la propiedad asociativa no se verifica en el caso de la división, ni de la diferencia:

$$(16 : 4) : 2 = 4 : 2 = 2 \quad \neq \quad 16 : (4 : 2) = 16 : 2 = 8$$

$$(10 - 5) - 3 = 5 - 3 = 2 \quad \neq \quad 10 - (5 - 3) = 10 - 2 = 8$$

Otra de las propiedades de las operaciones con números reales que aplicaremos frecuentemente es la:

1.3.2 Propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta.

Como su nombre lo indica, "distribuye" la operación producto "dentro" de la suma o la resta.

En símbolos la propiedad se escribe:

$$\forall a, b \text{ y } c \in \mathbb{R}: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{o} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

y

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad \text{o} \quad (b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$$

Establece que si un número multiplica a la suma (ó resta) de otros, es posible resolver la suma (ó resta) y luego multiplicar el resultado por el factor ó multiplicar el factor por cada término de la suma (ó resta) y por último sumar (ó restar) los resultados parciales.

Esta última opción es la que aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (ó resta) de números reales.



Veamos algunos ejemplos en los que efectuamos las opciones descriptas precedentemente para que se aprecie que se arriba al mismo resultado.

$$1 \quad 2(3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16 \rightarrow \text{Distribuimos el factor 2}$$

$$2 \quad 2 \cdot 8 = 16 \quad \xrightarrow{\hspace{10cm}} \quad \text{Resolvemos primero el paréntesis}$$

$$3 \quad \frac{1}{4} \cdot (32 - 12 + 4) = \frac{32}{4} - \frac{12}{4} + \frac{4}{4} = 8 - 3 + 1 = 6 \quad \rightarrow \quad \text{Distribuimos } \frac{1}{4}$$

$$4 \quad \frac{1}{4} \cdot (24) = \frac{24}{4} = 6 \quad \xrightarrow{\hspace{10cm}} \quad \text{Resolvemos primero el paréntesis}$$



Advierte que ni la resta ni la división tienen esta propiedad, y esto es porque el orden en que se agrupan los números altera el



Advierte!

En el tercer ejemplo se incluyeron más de dos términos en el paréntesis para mostrar que también es aplicable la propiedad distributiva del producto a la suma algebraica.

Además, el número real que multiplica al paréntesis es un número fraccionario por lo que, recuerda que su numerador multiplica a cada término del paréntesis y su denominador lo divide.



La propiedad anterior establece que el producto es distributivo respecto a la suma, por lo que no hay que confundir la propiedad en el otro sentido: La suma **NO es distributiva** respecto al producto. Es decir que si la operación a realizar es $2 + (3 \cdot 5)$, no confundirse queriendo aplicar la propiedad.



Veamos a través de los dos procedimientos (uno correcto y el otro incorrecto) que los resultados a los que se arriba son diferentes.

Procedimiento correcto

$$\begin{array}{ll} \rightarrow 2 + (3 \cdot 5) & \neq \\ 2 + 15 & \neq \\ 17 & \neq \end{array}$$

se debe resolver la operación indicada dentro del paréntesis y luego se le suma el término que está fuera del paréntesis.

Procedimiento incorrecto

$$\begin{array}{ll} (2 + 3) \cdot (2 + 5) & \leftarrow \text{Se distribuyó} \\ & \text{erróneamente} \\ 5 \cdot 7 & \text{la suma} \\ 35 & \end{array}$$

Seguidamente enunciamos otras propiedades que se relacionan con la regla de los signos y que sería importante recordar. Si a, b, c y d son números reales, (distintos de cero cuando figuran como denominador):



PROPIEDADES	EJEMPLO
$a - (-b) = a + b$	$2 - (-3) = 2 + 3 = 5$
$(-1) \cdot a = -a$	$(-1) \cdot 4 = -4$
$-(a + b) = -a - b$	$-(2 + 5) = -2 - 5 = -7$
$-(a - b) = -a + b$	$-(3 - 4) = -3 + 4 = 1$
$-(-a) = a$	$-(-9) = 9$
$(-a) \cdot b = -ab$	$(-8) \cdot 6 = -8 \cdot 6 = -48$
$(-a) \cdot (-b) = ab$	$(-2) \cdot (-4) = 2 \cdot 4 = 8$
$-a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$-3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$
$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

Por último, recordamos las siguientes propiedades:



PROPIEDADES	EJEMPLO
$\frac{0}{a} = 0$ con $a \neq 0$	$\frac{0}{3} = 0$
$a\left(\frac{b}{a}\right) = b$	$4\left(\frac{5}{4}\right) = 5$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2.3}{5.4}$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a.c}{b.c} = \frac{a}{b}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2.3}{5.3} = \frac{2}{5}$

↓
Esta última propiedad constituye la PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES según la cual, si multiplicamos o dividimos numerador y denominador de una fracción por un mismo número (excepto el 0), obtenemos una fracción equivalente a la dada.



PROPIEDADES	EJEMPLO
$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	$\frac{2 \pm 3}{4} = \frac{2 \pm 3}{4}$
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$	$\frac{2}{4} \pm \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 \pm 3 \cdot 4}{4 \cdot 5}$
$\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}$

↓
Esta última propiedad, corresponde a un cociente de fracciones, que se resuelve realizando el producto de extremos sobre producto de medios, o también convirtiendo el cociente en multiplicación de la fracción que figura como numerador por la fracción inversa que figura en el denominador.



Hemos recordado al conjunto de los números reales, sabemos qué operaciones podemos hacer con ellos y repasamos algunas de las propiedades más importantes.

¿Estamos en condiciones de comenzar a realizar operaciones con ellos y aplicar sus propiedades?

Creemos que sí, no obstante, nos parece importante que previo a ello te advirtamos sobre errores que por su frecuencia justifican que nos detengamos a considerarlos.

La revisión de algunos procedimientos que frecuentemente ocasionan errores, permitirá que reflexionemos sobre ellos para poder evitarlos.

La manipulación de números reales es esencial para tener éxito en matemática.

1.4. Recomendaciones al operar con números reales

En este apartado nos detendremos especialmente en analizar los errores que comúnmente se cometen al operar con números reales.



En muchos casos la aparición del signo menos ($-$) requiere un poco más de atención. Para que puedas advertirlo te plantearemos las siguientes situaciones:

Si la operación a realizar es:

$$5 \quad 3 + (5 - 2) = 3 + 5 - 2 = 6 \rightarrow \text{(El paréntesis puede suprimirse sin ninguna consecuencia)}$$

$$6 \quad 3 + 3 = 6 \rightarrow \text{(Obtenemos lo mismo si resolvemos dentro del paréntesis)}$$

En cambio, si el paréntesis está precedido de un signo menos ($-$), para suprimirlo debe cambiarse el signo de **todos** los términos de la expresión que figura dentro del paréntesis:

$$7 \quad 3 - (5 - 2) = 3 - 5 + 2 = 0 \rightarrow \text{(El paréntesis puede suprimirse cambiando los signos)}$$

$$8 \quad 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{(Si resolvemos dentro del paréntesis obtenemos el mismo resultado)}$$



¡ADVIERTE lo que hubiera sucedido si eliminamos el paréntesis sin cambiar los signos!

Procedimiento incorrecto.

$$3 - (5 - 2) = 3 - 5 - 2 = -4$$



No se cambiaron los signos al suprimir el paréntesis

Este procedimiento surge de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, ya que el signo menos representa el factor (-1) que al multiplicar a cada término del paréntesis le cambia el signo por aplicación de la ley de los signos.



La llamada Ley de los signos se aplica tanto para el producto como para el cociente de números reales

LEY DE LOS SIGNOS	
Producto	Cociente
$(+) \cdot (+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(-) \cdot (-) = +$	$(-) : (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$	$(-) : (+) = -$



A continuación, te compartimos los siguientes ejemplos:

$$9 \quad (-3)(-5) = 15$$

$$10 \quad (-1) \cdot 5 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3) = -15$$

$$11 \quad \frac{(-4) \cdot 3 \cdot (-2)}{(-6)} = -4$$

En este ejemplo se combinaron productos con cocientes.

Es importante tener cuidado con los signos, sobre todo en aplicaciones donde un signo erróneo nos estaría informando, por ejemplo, de la existencia de Ganancias cuando en realidad hay Pérdidas o viceversa.

Otro elemento que suele provocar errores es la aparición del cero, por ello también te decimos:



¡PRECAUCIÓN! Cuando intervienen más de dos factores se debe prestar atención a los signos que van asumiendo los resultados parciales. Si hay un número impar de factores negativos el resultado será negativo, si el número de factores con signo negativo es par, el resultado será positivo.



Antes de avanzar, piensa y responde: ¿es posible efectuar las siguientes divisiones: $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{a}$, con $a \neq 0$?

.....
.....

Si aparece el cero como factor de un producto, cualquiera sea el número o el signo de los demás factores, anula todo el resultado.

Si aparece en un cociente como dividendo, también el resultado es nulo.



Veamos los siguientes ejemplos:

$$12 \quad 3 \cdot 50 \cdot (-2) \cdot 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$13 \quad 0 : 3 = \frac{0}{3} = 0$$

Los siguientes ejemplos muestran que: **Si el cero aparece como divisor de un cociente, la operación NO tiene solución.**

$$14 \quad -\frac{2}{0}$$

NO TIENE SOLUCIÓN

No hay ningún real que multiplicado por cero nos de -2

$$15 \quad \frac{(-1) \cdot (-3) \cdot 15}{2 \cdot 0 \cdot (-4)}$$

NO TIENE SOLUCIÓN

Tampoco pudimos resolver este último cociente porque el cero anula el denominador y como la división por cero no existe, el cociente no puede resolverse.

Controla tu respuesta después de lo que acabas de leer.

Otro error muy frecuente se comete al intentar simplificar, es por ello que también te recomendamos:



En general, el cero dividido por cualquier otro número, da como resultado 0, con la sola excepción de que el denominador también sea cero, ya que la expresión $\frac{0}{0}$ no tiene solución.

Si el cero aparece como divisor de cualquier cociente, la operación NO tiene solución.



Las simplificaciones suelen complicarse cuando trabajamos con números fraccionarios. Esto es a causa de que la aparición de numeradores y denominadores combinados en distintas operaciones, promueven simplificaciones de la expresión que no siempre son las correctas.



Como regla general, en cuanto a la simplificación de fracciones, podemos afirmar que en la multiplicación de fracciones es posible simplificar numeradores con denominadores; en cambio, si se las divide, es posible simplificar numeradores y denominadores entre sí.

Recuerda que al multiplicar fracciones se obtiene una nueva fracción cuyo numerador es el resultado de multiplicar los numeradores y su denominador, el producto de los denominadores.



Resolvamos el siguiente producto de Fracciones:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{\cancel{5}^4 \cdot \cancel{4}^4}{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{5}^1} = \frac{4}{3}$$

Hemos simplificado por 5, numerador y denominador

También se pudo haber simplificado antes de efectuar la operación

Los dos procedimientos de simplificación son correctos y permiten arribar a igual resultado.



Consideremos el siguiente ejemplo:

✓ $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 9} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{\cancel{18}}{\cancel{12}} = \frac{3}{2}$ → Hemos simplificado por 6, numerador y denominador

También se pudo haber simplificado numeradores y denominadores entre sí, previo a efectuar el cociente y el resultado hubiese sido el mismo.

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{\cancel{4}} = \frac{1 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{9}} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

La misma operación pudo estar indicada con línea de fracción

✓ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ → Multiplicamos extremos y lo dividimos por el producto de los medios, por último simplificamos por 6, numerador y denominador.

También se pudo haber simplificado antes de efectuar el cociente, extremos con medios.



Si se trata de una división de fracciones, se resuelve multiplicando el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda para formar el numerador del resultado y dividiéndola por el producto entre el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.



Veamos un ejemplo de suma de fracciones en donde cometimos un error muy común:

Procedimiento incorrecto.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

Es frecuente, el tratar de simplificar el 2 con el 4, por ser ambos divisibles por 2 y aparecer como numerador y denominador respectivamente, sin advertir que en este caso las fracciones están sumadas y que deberá resolverse sacando común denominador.

La única simplificación válida en operaciones de suma y resta de fracciones es cuando es posible reducir el numerador con el denominador de la misma fracción, y luego se resuelve a través del procedimiento de suma o resta de fracciones.



Veamos el **procedimiento correcto** del ejemplo dado:

✓ $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$ → Primero buscar un denominador común que sea divisible por ambos denominadores
 $(10 : 2) \cdot 1 = 5$ y $(10 : 5) \cdot 4 = 8$

$\frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{5+8}{10} = \frac{13}{10}$ → Segundo, dividir ese denominador común por cada denominador para luego multiplicarlo por el numerador respectivo

Resolvemos la suma en el numerador

El proceso inverso también puede realizarse.



Por ejemplo:

✓ $\frac{-1+3+11-2}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{11}{5} - \frac{2}{5}$ →

Si tenemos operaciones de suma o resta en el numerador con un denominador en común, podemos distribuir ese denominador en cada término del numerador

Si en el numerador tenemos un producto con un denominador común ¡CUIDADO!, el denominador no se distribuye en ese producto.



Observa el siguiente ejemplo:

$$\frac{5 \cdot 8}{10} \neq \frac{5}{10} \cdot \frac{8}{10}$$
$$\frac{40}{10} \neq \frac{40}{100}$$

Hemos visto que podemos distribuir un mismo denominador en una suma, pero si la suma está en el denominador, ¿es posible distribuir ese numerador?

¡ATENCIÓN! No es posible efectuar esa distribución.



Por ejemplo:

$$\frac{3}{2+5} = \frac{3}{7} \neq \frac{3}{2} + \frac{3}{5} = \frac{15+6}{10} = \frac{21}{10}$$

RECUERDA: siempre debes prestar atención cuando operes con números, pero presta especial atención cuando adviertas signos

negativos, el cero, cuando quieras simplificar y cuando aparezcan fracciones.

Teniendo en cuenta las propiedades que repasamos, te proponemos resolver las actividades siguientes, comenzando con operaciones combinadas sencillas.



Observaciones para resolver actividades.



Actividad 3

Resuelve las siguientes operaciones con números reales:

a) $\frac{2}{3} + 9 =$

b) $\frac{5}{3} \cdot 9 - \left(-\frac{1}{4}\right) =$

c) $4 \cdot (-2 + 5) =$

ATENCIÓN: Para resolver la suma o resta de fracciones se debe sacar común denominador. Nunca debes simplificar el denominador de un término con el numerador del otro término.

CUIDADO: Los signos + y – separan términos.

RECUERDA: Cuando tienes un factor que multiplica a una suma o resta debes aplicar la propiedad: **Distributiva** del producto con respecto a la suma o a la resta.

Actividad 4

Identifica el error que se cometió en cada caso para arribar al resultado indicado y obtiene el resultado correcto:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$

b) $-2 \cdot (3 - 5) = -11$

Avanzando un poco más con las operaciones con números reales, incluimos en este repaso los exponentes y radicales.

1.5. Exponentes y radicales.

¿Recuerdas qué operación indica una potencia con exponente entero?

La expresión 2^3 es una potencia de base 2 y exponente 3 que se resuelve multiplicando tantas veces la base como lo indica el exponente.

Por ello:

$$2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{Multiplicamos 3 veces el } 2} = 8$$



A veces suele confundirse la potencia con un simple producto y se resuelve 2^3 INCORRECTAMENTE como $2 \cdot 3 = 6$

Recordemos las **PROPIEDADES BASICAS DE LOS EXPONENTES**

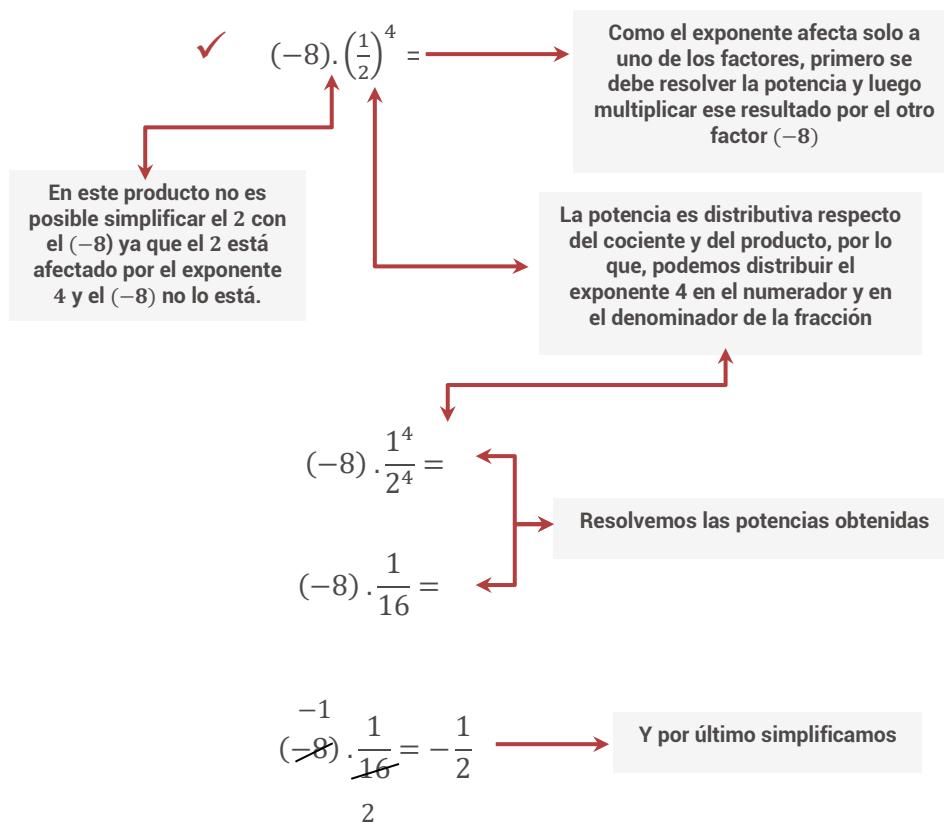




PROPIEDADES	EJEMPLO
$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x$	$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ factores}}$
$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$	$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$ $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$
$x^0 = 1 \quad \text{si} \quad x \neq 0$	$2^0 = 1$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ factores}}}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
$\frac{1}{x^{-n}} = x^n$	$\frac{1}{x^{-5}} = x^5$ $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}}$	$\frac{2^{12}}{2^8} = 2^{12-8} = 2^4 = 16$ $\frac{2^8}{2^{12}} = 2^{8-12} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$
$\frac{x^m}{x^m} = x^{m-m} = x^0 = 1$	$\frac{2^4}{2^4} = 1$
$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$(x^5)^3 = x^{5 \cdot 3} = x^{15}$ $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
$(x \cdot y)^n = x^n y^n$	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 4^3$
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



Veamos un ejemplo en el que aparece una potencia en uno de los factores de un producto:



Hemos recordado cómo se resuelven las potencias de exponente entero positivo, pero ¿qué sucede si el exponente es cero o un número entero negativo?

TODO número (excepto el cero) elevado al exponente 0 , da por resultado 1.



Ejemplos:

✓ $15^0 = 1$

✓ $\left(-\frac{3}{2}\right)^0 = 1$

✓ 0^0 **NO TIENE SOLUCIÓN.**

Si, en cambio, el exponente de la potencia es un número entero negativo, el procedimiento correcto para resolverlo consiste en elevar al inverso multiplicativo de la base al mismo exponente, pero con signo positivo.



¿Recuerdas cómo se obtienen los inversos multiplicativos o recíprocos?

El recíproco de $\frac{5}{4}$ es $\frac{4}{5}$

El de 3 es $\frac{1}{3}$

El de -3 es $-\frac{1}{3}$ (advierte que no cambiamos el signo)

El de 1 es $\frac{1}{1} = 1$

El de 0 **NO EXISTE** porque sería $\frac{1}{0}$ y la división por cero no está

definida.



Resolvamos, por ejemplo, una potencia con exponente negativo.

$$16 \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$



Veamos otro ejemplo combinando el producto y el exponente negativo.

$$17 \quad \left[(-7) \cdot \frac{2}{3}\right]^{-2} =$$

$$= (-7)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \longrightarrow$$

Como la potencia es distributiva respecto del producto, primero se distribuyó el exponente (-2) en cada uno de los factores de la base

$$= \left(-\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \longrightarrow$$

Como el exponente de las potencias tiene signo negativo se tomó el recíproco de cada factor y se lo elevó al exponente 2.

$$= \frac{1}{49} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{196}$$

Aclaración: también se pudo haber resuelto este ejemplo de esta otra forma:



$$\begin{aligned} \left[(-7) \cdot \frac{2}{3}\right]^{-2} &= \quad \leftarrow \\ &= \left(-\frac{14}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{14}\right)^2 = \frac{9}{196} \quad \leftarrow \end{aligned}$$

Primero se resuelve el producto dentro del corchete, luego se eleva a (-2) este resultado parcial; como el exponente (-2) es negativo, se eleva al exponente 2 el recíproco del resultado parcial y por último se calcula la potencia.

A medida que se van combinando operaciones, se acrecienta la posibilidad de cometer errores, sobre todo al operar con signos y al efectuar simplificaciones incorrectas, por ello es conveniente realizar paso a paso cada operación, por lo menos hasta adquirir la práctica suficiente.



Hemos recordado cómo se resuelve una potencia que tiene por exponente un número entero, pero ¿qué sucede si en la potencia aparece un exponente fraccionario?; ¿Cómo resolvemos, por ejemplo, la potencia $4^{3/2}$?



PROCEDIMIENTO: una potencia de exponente fraccionario da origen a una raíz de índice igual al denominador de la fracción y que tiene como radicando a la base de la potencia, que queda elevada a un exponente igual al numerador de la fracción.

$$\text{En nuestro ejemplo } 4^{3/2} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8$$

La potencia de exponente fraccionario da origen a una raíz.

Extraer la raíz a un número es encontrar otro, tal que elevado al índice de la raíz permita obtener el radicando. Es decir que, para resolver estas potencias de exponentes fraccionarios, debemos saber resolver raíces.



Recordemos, entonces, las **PROPIEDADES BASICAS DE LOS RADICALES**



PROPIEDADES	EJEMPLO
$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$ $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$	$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{9 \cdot 2} = \sqrt[3]{18}$ $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$	$\frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{80}{10}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m, m \neq n$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
$(\sqrt[n]{x})^n = x$	$(\sqrt[8]{7})^8 = 7$



Resolvamos mentalmente algunas raíces sencillas:

$$1 \quad \sqrt[3]{8} = 2 \text{ porque } 2^3 = 8$$

$$2 \quad \sqrt[4]{81} = 3$$

$$3 \quad \sqrt[5]{1} = 1$$

$$4 \quad \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$



Veamos un ejemplo de combinaciones sencillas de exponentes y radicales:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} =$$

Iremos resolviendo paso a paso las operaciones, para que se adviertan los pasos que vamos ejecutando:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 16}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}}$$

Para resolver el producto del numerador, primero se debe extraer la raíz cúbica de uno de los factores $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ y resolver la potencia del otro factor $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16$.

Mientras tanto, en el denominador se deberá resolver la raíz cuadrada de la suma $\sqrt{1 + \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{4+5}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ y luego multiplicar el resultado por $\frac{1}{6}$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 16}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{1}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 16}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{8}{\frac{1}{4}} = 32$$

Simplificando los productos de fracciones y resolviendo la última fracción obtenida, se llega al resultado definitivo

Hasta aquí hemos desarrollado un breve repaso de las operaciones con números reales, describiendo a través de ejemplos los procedimientos más comunes y advirtiendo sobre los errores más frecuentes.



- Cuando no se indica el índice de la raíz, se interpreta que el índice es 2 (también se la conoce como raíz cuadrada).
- La radicación al igual que la potenciación es distributiva con respecto al producto y al cociente.



¡ATENCIÓN!

La radicación al igual que la potenciación NO es distributiva respecto de la suma, por lo que primero se debe resolver la suma y luego extraerle la raíz al resultado parcial.



Para que ejercites los temas vistos, te proponemos resolver las siguientes operaciones con números reales:



Actividad 5

Resuelve las siguientes operaciones con números reales:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{5} : 3 - \frac{1}{5} \cdot 5 =$

b) $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) =$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{5}{14} - \frac{2}{7} + 1 =$

d) $\frac{5}{12} - \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right) + \frac{5}{6} - \frac{1}{4} =$

e) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$

f) $(-2)^{-2} \cdot (-2)^{-3} : (-2)^{-1} =$

g) $\frac{2^7 \cdot 2^4 \cdot 2^{-3}}{(2^4 \cdot 2^5)^2 \cdot 2^7} =$

h) $\sqrt[4]{(-2)^{-6} \cdot (-2)^8 \cdot (-2)^2} =$

i) $\sqrt{\frac{49}{121}} \cdot \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \cdot \left(\frac{7}{22}\right)^{-1} =$

j) $\left(\frac{9}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{9}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^{-1} - \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}} =$

k) $\frac{3 - \frac{1}{2}}{-\left(\frac{2}{3} - 2\right)} =$

l) $\frac{\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{11}{5}} =$

m) $\frac{-\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right)}{-1} =$

n) $\frac{\left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 - 3}{\left(\frac{1}{3} + 4^2\right)^{-1}} =$

o) $\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)^2}{3 \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)} + \frac{7}{9} =$

p) $\frac{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{11}{25} + 1}} \cdot (-12) =$

q) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^4} \cdot \frac{1}{(-3)^3} \cdot (-2)^3 \cdot \frac{(3)^{-2}}{(2)^{-1}} =$

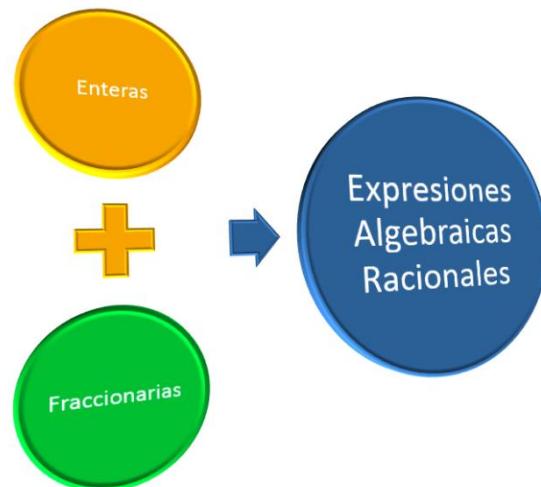
r) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right)^{-2} : \frac{6}{7} - \sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} + \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} =$

II Expresiones Algebraicas

Si combinamos los conjuntos numéricos vistos anteriormente, con la idea de variable (una letra como número generalizado) llegamos al concepto de ÁLGEBRA.

El cálculo algebraico nace como una generalización del modelo numérico.

Así como para trabajar con modelos aritméticos ó numéricos tuvimos que aprender a realizar cálculos con números, para trabajar con un modelo algebraico debemos ser hábiles en cálculos con variables. Por ello en esta segunda parte se combinarán números representados con símbolos, a través de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación ó extracción de raíces.



Objetivos:

- ✓ Operar con expresiones algebraicas enteras.
- ✓ Utilizar productos especiales.
- ✓ Establecer las reglas básicas de factorización y aplicarlas para factorizar expresiones.
- ✓ Simplificar, sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas racionales

Para lograrlos te proponemos los siguientes:

Contenidos:

- 2.1. [Expresiones Algebraicas Racionales.](#)
 - 2.1.1. [Expresiones Algebraicas Enteras.](#)
 - 2.1.1.1. [Operaciones con Expresiones Algebraicas Enteras.](#)
 - 2.1.1.2. [Productos Notables.](#)
 - 2.1.1.3. [Reglas de Factorización.](#)
 - 2.1.2. [Expresiones Algebraicas Fraccionarias.](#)
 - 2.1.2.1. [Operaciones con Expresiones Algebraicas Fraccionarias.](#)



2.1. Expresiones algebraicas racionales.

En esta Unidad, vamos a trabajar con expresiones algebraicas, que son aquellas en las que figuran números y letras relacionadas por las operaciones aritméticas.

De acuerdo a las operaciones que intervienen, se las clasifican en expresiones algebraicas racionales e irracionales.

Nos dedicaremos al repaso de las expresiones racionales.

Las expresiones algebraicas **RACIONALES** son aquellas en las cuales algunas de sus variables forman parte del denominador o figuran en el numerador con exponente entero.



Por ejemplo, son expresiones algebraicas **racionales**:

$$x + \frac{1}{y} ; 3x^{-3} + 2 ; x^2 - 4$$

A su vez las Expresiones Algebraicas Racionales se dividen en dos grupos: las **Enteras** y las **Fraccionarias**.

Comenzaremos con las Expresiones Algebraicas Enteras:

2.1.1. Expresiones algebraicas enteras

Se llama expresión algebraica entera a toda combinación de números y letras relacionadas a través de las operaciones de **adición, sustracción, multiplicación y potenciación** con exponente natural. Por ende, en estas expresiones no aparece ninguna letra en el denominador ni afectada por una raíz o por un exponente negativo.



Ejemplos de expresiones algebraicas enteras:

- ✓ $3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ es una expresión algebraica **entera** en la variable x .
- ✓ $(x + y)^3 - x.y$ es una expresión algebraica **entera** en las variables x e y .

Clasificación de expresiones algebraicas enteras

Las expresiones algebraicas enteras las clasificamos en monomios y polinomios:



Monomio: Es toda expresión algebraica entera constituida por un sólo término. Las letras solamente están afectadas por operaciones de producto y de potencia de exponente natural.



Por Ejemplo: $-3a^3b^2c$

Es un monomio constituido por el número negativo, -3 , que recibe el nombre de "coeficiente" y la "parte literal": a^3b^2c .

Puede observarse que las operaciones involucradas son la multiplicación y la potencia de exponente natural.

Monomios semejantes: Son los que tienen igual parte literal (las mismas letras elevadas a los mismos exponentes).



Por Ejemplo: $-3a^3b^2c$ es semejante a $5a^3b^2c$

Polinomio: Es una expresión algebraica entera compuesta por la suma algebraica (suma y/o resta) de monomios no semejantes.



Por ejemplo: $3ax^3 + 2bx^2 - 5x + 8$

Es posible realizar operaciones con las expresiones algebraicas enteras, aplicando las mismas propiedades que vimos en los modelos numéricos.

2.1.1.1. Operaciones con expresiones algebraicas enteras.

Comencemos con las **SUMAS ALGEBRAICAS**



PROCEDIMIENTO: Primero se suman los monomios semejantes que, como dijimos, son aquellos que tienen la misma parte literal y difieren sólo en sus coeficientes. Luego de esta asociación, obtenemos la suma de monomios no semejantes, dando por resultado el polinomio.



Algunos ejemplos:

18 $2xy^3 + 5xy^3 = 7xy^3$



Sumamos los monomios semejantes

✓ $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) = \text{---} \rightarrow$

Como en este caso existen paréntesis que agrupan términos, lo primero que debemos hacer es suprimirlos, recordando que si están precedidos por el signo más (+) las operaciones indicadas dentro del paréntesis siguen igual y si las precede un signo menos (-) se deberán cambiar los signos comprendidos dentro del paréntesis

$3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3 =$

Asociamos los términos semejantes: $3x^2y$ con $4x^2y$; $-2x$ con $6x$, 1 con -3 y los sumamos.

$= 7x^2y + 4x - 2 \rightarrow$

Resultado final, al no poder seguir operando con la expresión

Otro ejemplo más:

✓ $-2xy + y^2 + 5 - (3y^2 + xy) + x = \text{---}$

Suprimimos el paréntesis cambiando el signo de los términos que figuran dentro de él

$= -2xy + y^2 + 5 - 3y^2 - xy + x =$

Sumamos o restamos los términos semejantes

$= -3xy - 2y^2 + 5 + x \text{---}$

Este último es el resultado final ya que no es posible realizar ningún otro cálculo con términos que NO son semejantes.

Avanzando con otras operaciones, veremos la

MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.



PROCEDIMIENTO: la propiedad distributiva es la herramienta clave para multiplicar expresiones algebraicas. Se las resuelve multiplicando término a término y por último se suman los términos semejantes.



Veamos un ejemplo en el que se multiplican dos expresiones algebraicas:

✓ $(2x + y)(-y + x) =$

$= 2x(-y) + 2xx + y(-y) + yx =$

$= -2xy + 2x^2 - y^2 + yx =$

$= -xy + 2x^2 - y^2$

Se realiza el producto de una de las sumas por la otra, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma

Se aplica regla de signos del producto y propiedades del producto de potencias de igual base

Se asocian y suman o restan los términos semejantes

Otro ejemplo:

✓ $(x - 1)(x^3 - y + xy) =$

$= xx^3 - xy + xxy - 1x^3 + 1y - 1xy$

Comenzamos multiplicando los términos del primer paréntesis por los del segundo o a la inversa porque el orden de los factores NO altera el producto.

Efectuamos el producto de la x del primer paréntesis por cada término del segundo paréntesis (prestar atención a los signos) y luego hacemos lo mismo con el -1 .

$= x^4 - xy + x^2y - x^3 + y - xy =$

Se resuelven los productos de cada término cuando sea posible: $xx^3 = x^4$; $xxy = x^2y$, sumando o restando los términos semejantes.

$= x^4 - 2xy + x^2y - x^3 + y$



Actividad 6

Resuelve las siguientes operaciones con expresiones algebraicas:

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| a) $x + x =$ | b) $x^2 + x^2 =$ |
| c) $2x + 2x =$ | d) $2x^2 + 2x^2 =$ |
| e) $x \cdot x =$ | f) $x^2 \cdot x^2 =$ |
| g) $2x \cdot 2x =$ | h) $2x^2 \cdot 2x^2 =$ |
| i) $(2x + 5) \cdot (-8x + 4) =$ | j) $2x^2 + 5x + 2 - (4x^2 - 3x) =$ |

Actividad 7

Completa el siguiente cuadro, con las operaciones indicadas:

M	N	M + N	M - N	M · N
$2x^3$	$-\frac{5}{2}x^3$			
$5a^5$	$5a^2$			

Actividad 8

Dadas las expresiones algebraicas enteras (o polinomios en x):

$$P(x) = -5 + 2x^3 + 4x^2 \quad y \quad Q(x) = 3x^4 + x - x^2, \text{ calcula: } P(x) \cdot Q(x)$$

2.1.1.1.1. Productos notables.

Hay productos de expresiones algebraicas que por la frecuencia con que aparecen se los denomina **ESPECIALES** ó **NOTABLES** y que por el mismo motivo es muy conveniente incluirlos en este repaso.



CUADRADO DE UN BINOMIO

En símbolos:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Binomio: porque es la suma (ó resta) de dos términos no semejantes.

Cuadrado: porque aparece elevado al exponente 2.



PROCEDIMIENTO: el resultado es el cuadrado del primer término más (ó menos) el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Procedimiento correcto

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Procedimiento incorrecto

$$(x + a)^2 = x^2 + a^2$$

Porque la potencia NO es distributiva con respecto a la suma (ó la resta).

El procedimiento correcto surge de multiplicar término a término la expresión algebraica de la base por sí misma:

- ✓ $(x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a) = x^2 + 2ax + a^2$
- ✓ $(x - a)^2 = (x - a) \cdot (x - a) = x^2 - 2ax + a^2$



Desarrollemos el cuadrado del siguiente binomio:

$$19 \quad (x - 5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$



Actividad 9

Desarrolla las siguientes expresiones:

- a) $(2 - x)^2 =$
- b) $(2x + 1)^2 =$



PRODUCTO DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA

En símbolos:

$$(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - a^2$$

Esta igualdad puede verificarse efectuando la multiplicación y cancelando los términos iguales con signos opuestos:

$$(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - xa + ax - a^2 = x^2 - a^2$$



PROCEDIMIENTO: La suma por la diferencia de dos bases es igual a la diferencia de los cuadrados de las bases.



Por ejemplo:

$$20 \quad (x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$$

También es frecuente que se deba desarrollar el procedimiento inverso de escribir la expresión algebraica como producto de sus factores utilizando:



Los productos notables son igualdades que se denominan **identidades**, dado que se verifican para cualquier valor que se les asignen a sus letras.

2.1.1.1.2. Reglas de factorización

Las más utilizadas son:

FACTOR COMÚN

En símbolos:

$$ax + ay = a \cdot (x + y)$$

Es decir, se trata de la recíproca de la propiedad distributiva del producto respecto a la suma (ó a la resta).



Por ejemplo:

✓ $2x^2 + 4x = 2x \cdot (x + 2)$ →

Como la expresión $2x$ se repite en los dos términos, se extrae como factor común, que multiplica a $(x + 2)$.

La expresión $(x + 2)$ se obtiene de dividir cada término del primer miembro por el factor común, así: $2x^2 \div 2x = x$ y $4x \div 2x = 2$



FACTOR COMÚN EN GRUPOS

En símbolos:

$$\begin{aligned} acx^3 + adx^2 + bcx + bd &= ax^2.(cx + d) + b.(cx + d) \\ &= (cx + d).(ax^2 + b) \end{aligned}$$

En lugar de presentar un factor común en toda la expresión, se presenta el factor común en grupos de igual número de términos.



Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 3y^3 + 12y^2 - 2y - 8 &= \xrightarrow{\text{En este caso, de los dos primeros términos se extrae como factor común } 3y^2, \text{ y de los dos últimos términos el factor común es } (-2).} \\ &= 3y^2(y + 4) - 2(y + 4) = \xleftarrow{\text{Si observamos los paréntesis, queda la misma expresión } (y + 4), \text{ la que ahora pasa a ser factor común de los dos términos, obteniéndose el producto final}} \\ &= (y + 4). (3y^2 - 2) \end{aligned}$$



Actividad 10

Factoriza las siguientes expresiones.

a) $4x^5 + 4x =$

b) $6x^3 - 16 + 24x^2 - 4x =$



TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

En símbolos:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Si identificamos un trinomio cuadrado perfecto, podemos indicarlo como el cuadrado de la suma (o resta) de sus bases.



Por ejemplo, la expresión:

✓ $4 + 4z + z^2 = (2 + z)^2$



Es un trinomio cuadrado perfecto, porque tenemos dos términos elevados al cuadrado: 2 y z y un tercer término que es el doble producto de los otros dos:
 $2 \cdot 2 \cdot z = 4z$.

Sin embargo:

$$9 + 2y + y^2 = \text{NO}$$
 es un trinomio cuadrado perfecto



Porque a pesar de que tiene tres términos y existen dos términos que aparecen elevados al cuadrado (3 e "y"), no aparece el doble producto del primero por el segundo: $2 \cdot 3 \cdot y = 6y$.



Actividad 11

Factoriza las siguientes expresiones.

a) $x^2 - 2x + 1 =$

b) $4x^2 + 16x + 16 =$



DIFERENCIA DE CUADRADOS

En símbolos:

$$x^2 - a^2 = (x + a) \cdot (x - a)$$

La diferencia (¡atención!, **NO** la suma) de dos términos cuadrados pueden expresarse como el producto de la suma por la diferencia de sus bases.



Por ejemplo:

✓ $16 - x^2 = (4 + x) \cdot (4 - x)$



Actividad 12

Decir si es Verdadero (V) o Falso (F):

a) $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a + b)$	
b) $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$	
c) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
d) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$	
e) $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a - b)$	
f) $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$	
g) $(-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1$	
h) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$	
i) $4x^2 + 16x + 16 = (2x + 4)^2$	
j) $-x^2 + b^2 = (-x + b) \cdot (x + b)$	

Actividad 13

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

- a) $4x^5 - 4x =$
- b) $9y + 24y^2 + 16y^3 =$
- c) $24x^2 + 6x^3 - 4x - 16 =$
- d) $16x^3 + 9x + 24x^2 =$
- e) $9x^6 - 9x^2 =$



A continuación, te proponemos una Actividad Integradora de estos **Productos Notables**.



Actividad 14

Desarrolla o factoriza, según corresponda, cada una de las siguientes expresiones:

a) $(3 - 2x)^2 =$

b) $4x^2 - 36 =$

c) $2x^2 + 8x + 8 =$

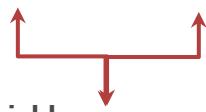
d) $16x^4 - 16x^2 =$

e) $2x^3 - 16x^2 + 32x - 64 - 4x^2 + 32x =$

f) $(2x + 3y)^2 =$

Hemos analizado la suma y el producto de expresiones algebraicas, pero puede suceder que debamos considerar expresiones tales como:

$$\frac{8}{x-1} ; \frac{2+3x}{6x}$$



en donde la variable aparece en el denominador

Estas expresiones se denominan: **EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS**, e implican cocientes:



2.1.2. Expresiones algebraicas fraccionarias

Las expresiones algebraicas fraccionarias son cocientes de polinomios.

En símbolos:

Expresiones Algebraicas Fraccionarias tienen la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son **POLINOMIOS**.



Ejemplos de expresiones algebraicas FRACCIONARIAS:

✓ $\frac{3x^3+2x^2-3x+1}{3x^2+2x-3}$

✓ $\frac{2x^4-8}{x-2}$

2.1.2.1. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.

Las reglas que guían las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias son las mismas reglas de las fracciones, también nombradas en este material.



Veamos algunos ejemplos en los que debamos resolver expresiones algebraicas fraccionarias:



¡ATENCIÓN! No existe una regla que sea aplicable en cada caso. Dependerá mucho de tu ingenio reconocer qué regla de factorización o qué producto notable conviene aplicar en el caso específico de manera de simplificar la expresión y arribar al resultado.

1º se saca factor común en el numerador del primer factor y en el denominador del segundo factor

$$\frac{3x+9}{6} \cdot \frac{18}{5x+15} = \frac{\cancel{3}(x+3)}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{18}}{\cancel{5}(x+3)} = \frac{3 \cdot 3}{5} = \frac{9}{5}$$

2º se simplifican los factores del numerador con los del denominador, o sea, $(x+3)$ con $(x+3)$ y el 18 con el 6; luego se multiplica derecho.



Veamos otro ejemplo resuelto:



Se resolvió la suma del numerador.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{(x-1)+1}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$$

Se buscó un común denominador para los dos sumandos,
recuerda que $x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$



ADVIERTE que en el resultado no se pudo simplificar las x del numerador y denominador ya que la x^2 está afectada por la resta del 1, no por el producto.

Seguidamente te proponemos algunas actividades que incluyen operaciones con expresiones algebraicas racionales, junto a casos de factoreo, para reafirmar los temas repasados.

¡A PRACTICAR!



Actividad 15

Factoriza, resuelve y simplifica, según corresponda:

a) $\frac{x^2+8x+16}{x+4} =$

b) $\frac{x^3+4x^2-16x-64}{x+4} =$

c) $\frac{4x^5-4x}{9x^6-9x^2} =$

d) $\frac{x^2-1}{x^3+2x^2-x-2} =$

e) $\frac{24x^2+6x^3-4x-16}{3x^3+12x^2-2x-8} =$

f) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} =$

g) $\frac{(x-1)(x+2)}{x-7} - \frac{x^2-4}{x-7} + \frac{-4x+8}{(x-7)(x-2)} =$

h) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{-x+1}{x^2-2x+1} =$

i) $\frac{(y^2-9)}{(y-1)} \cdot \frac{(y-3)}{(y+3)} =$

j) $\frac{x^2-4}{x^2+2x} \cdot \frac{x^2}{x-2} =$

k) $\frac{2x+x^2}{x} \cdot \frac{x^2}{2-x} =$

l) $\frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+8x}{x-1}} =$

III Ecuaciones

Las representaciones son las figuras o ideas que sustituyen a la realidad y que nos permiten comunicarnos. Así, cuando en una empresa, queremos establecer la relación entre los costos variables y los fijos, hacemos una representación de tales costos, y para ello nos valemos del concepto matemático de ecuaciones. Pues, representar tales costos, se reduce a encontrar uno o algunos números que cumplan con ciertas condiciones, susceptibles de ser expresados por medio de igualdades y que representen tales costos. Estas igualdades, que satisfacen los costos desconocidos, se llaman ecuaciones.

En este módulo trabajaremos con ecuaciones lineales, cuadráticas, ecuaciones con módulo, también con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y con inecuaciones.

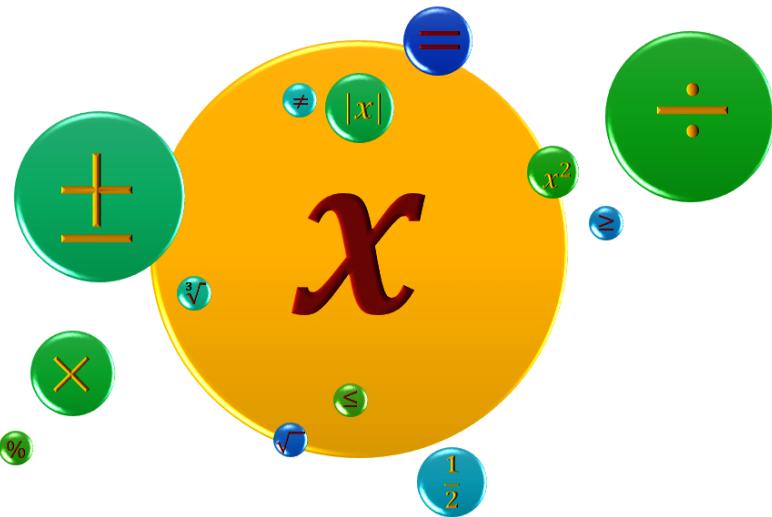
Objetivos:

- ✓ Resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.
- ✓ Resolver ecuaciones e inecuaciones lineales y representar el conjunto solución en la recta numérica.
- ✓ Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por distintos métodos.

Para lograrlos te proponemos repasar los siguientes:

Contenidos:

- 3.1 [Ecuaciones con una incógnita.](#)
 - 3.1.1 [Ecuaciones lineales con una incógnita](#)
 - 3.1.2 [Del Lenguaje Coloquial al Matemático](#)
 - 3.1.3 [Ecuaciones cuadráticas.](#)
 - 3.1.4 [Ecuaciones con Módulo](#)
 - 3.1.5 [Inecuaciones](#)
- 3.2 [Ecuaciones con dos incógnitas](#)
 - 3.2.1 [Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.](#)





3.1. Ecuaciones con una incógnita

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se transforma en igualdad numérica cuando se atribuyen a las letras que figuran en la igualdad algebraica valores numéricos particulares.

Resolver una ecuación es encontrar los valores de sus variables para los cuales la ecuación se verifica.

Los valores particulares que asumen las letras para que una ecuación se convierta en una igualdad numérica son las raíces de la ecuación.



¿Adviertes la diferencia que existe entre una identidad y una ecuación?

.....
.....
.....
.....

3.1.1. Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación lineal con una incógnita, es aquella igualdad que posee la incógnita elevada al exponente 1.

Por ejemplo: $5x + 2 = -3$, es una ecuación lineal, porque la incógnita, x , está elevada al exponente 1.

La solución es: $x = -1$ porque $5 \cdot (-1) + 2 = -3$



Veamos el siguiente ejemplo resuelto, que nos permite hallar la raíz o solución de la ecuación:

$$2 - \left[-2(x+1) - \frac{x-3}{2} \right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

Suprimimos paréntesis, teniendo en cuenta que está precedido por un signo menos.

Dentro del corchete, aplicamos propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$$2 - \left(-2x - 2 - \frac{x-3}{2} \right) = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

Sacamos común denominador y resolvemos

$$2 + 2x + 2 + \frac{x-3}{2} = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

En el segundo miembro quitamos el paréntesis que, al estar precedido por el signo menos, cambian los signos que figuran dentro de él

$$24 + 24x + 24 + 6(x-3) = 8x - (5x-3) + 36x$$

$$24x + 6x - 8x + 5x - 36x = 3 - 24 - 24 + 18$$

Agrupamos términos y sumamos términos semejantes.

$$-9x = -27$$

Dividimos los dos miembros por: -9

$$x = 3$$

Veamos cómo resolvemos otra ecuación un poco más complicada, en la que aplicaremos **productos notables** y **factorización**.

$$\begin{aligned}
 & (x-6)^2 - 13 = 5(x+3)(x-3) + 2x\left(-\frac{1}{3} - 2x\right) \\
 & \text{Cuadrado de una resta} \quad \text{Factoreo de una diferencia de cuadrados} \quad \text{Propiedad distributiva} \\
 & x^2 - 12x + 36 - 13 = 5(x^2 - 9) - \frac{2}{3}x - 4x^2 \\
 & x^2 - 12x + 23 = 5x^2 - 45 - \frac{2}{3}x - 4x^2 \\
 & x^2 - 12x + 23 = x^2 - 45 - \frac{2}{3}x \\
 & -12x + 23 = -45 - \frac{2}{3}x \\
 & -12x + \frac{2}{3}x = -45 - 23 \\
 & x\left(-12 + \frac{2}{3}\right) = -68 \\
 & -\frac{34}{3}x = -68 \\
 & x = \frac{-204}{-34} \\
 & x = 6
 \end{aligned}$$

Separamos en términos cada miembro. Recordar que los signos más y menos fuera de un paréntesis separan términos

Desarrollamos, según corresponda, luego operamos y distribuimos el 5.

Restamos los términos semejantes en el 2º miembro.

Cancelamos x^2 en ambos miembros.

Agrupamos términos semejantes

Sacamos factor común x en el primer miembro y operamos en el segundo

Operamos en el paréntesis

El 3 que está dividiendo al primer miembro pasa multiplicando a todo el otro miembro

Pasamos dividendo -34 al segundo miembro

Calculamos y obtenemos el valor de la incógnita

Para verificar, sustituimos la incógnita de la ecuación original por el valor que obtuvimos:

$$(6 - 6)^2 - 13 = 5(6 + 3)(6 - 3) + 2 \cdot 6\left(-\frac{1}{3} - 2 \cdot 6\right)$$

$$0 - 13 = 5 \cdot 9 \cdot 3 + 12\left(-\frac{1}{3} - 12\right)$$

$$-13 = 135 + 12\left(-\frac{37}{3}\right)$$

$-13 = -13$ → La solución es correcta porque la igualdad se cumple:



PRACTICA CON LAS SIGUIENTES ECUACIONES



Actividad 16

Resuelve las siguientes ecuaciones y verifica las soluciones:

a) $(x + 2)(x - 2) + \frac{5}{3}x\left(\frac{9}{10}x - 1\right) = \frac{5}{2}(x - 3)^2 + \frac{27}{2}$

b) $-4\left(2x - \frac{1}{4}\right) + (x + 4)^2 = 2(7 + x)(7 - x) + 3x + 3x^2$

c) $(x - 5)^2 - (1 + x)(x - 1) = 2(5x + 3)$

d) $(x - 6)^2 - (x + 8)^2 = 28(x + 1)$

Actividad 17

Te proponemos nos ayudes a detectar el error que se cometió en la resolución de las siguientes ecuaciones.

a)

$$-x + (x + 1)(x - 1) = \frac{1}{2}(2x + 20) + x(1 + x) - 1$$

$$-x + x^2 - 1 = x + 10 + x + x^2 - 1$$

$$-3x = 10$$

$$x = 10 + 3$$

$$x = 13$$

b)

$$-3(x + 1) - 2 = 2(x - 7) + 2x$$

$$-3x - 3 = 2x - 14 + 4x$$

$$-3x - 3 = 6x - 14$$

$$-3x - 6x = -14 + 3$$

$$-9x = -11$$

$$x = \frac{11}{9}$$

En Ciencias Económicas, usaremos las ecuaciones para resolver situaciones problemáticas que se plantean en forma coloquial. Para poder resolverlas y aplicar el herramiental matemático adecuado necesitaremos traducir ese lenguaje coloquial al simbólico.

3.1.2 Del Lenguaje Coloquial al Matemático

El lenguaje matemático es un código tal como lo es el lenguaje coloquial (con el que hablas todos los días). En matemática, no sólo podemos utilizar una letra como número generalizado sino también tenemos la posibilidad de representar con letras tanto incógnitas, como a variables y constantes. La complicación se presenta cuando debemos pasar a lenguaje matemático una estructura de relaciones vinculadas con cierta complejidad entre los datos conocidos y lo que se quiere averiguar.

Para facilitarte la resolución de los distintos problemas propuestos en este módulo, te sugerimos, que frente a cada uno trata de ayudarte con algunas preguntas, tales como:

- ✓ ¿Qué es lo que se quiere averiguar?, o expresado formalmente: ¿Cuál es la incógnita?
- ✓ ¿Cuáles son los datos disponibles?
- ✓ ¿Qué relación vincula los datos con las incógnitas?
- ✓ ¿Qué está permitido hacer?, en otras palabras: ¿Qué propiedades conocemos y que pueden utilizarse para resolver eficazmente la situación planteada?
- ✓ ¿El conjunto solución hallado, da respuesta al problema planteado?

Encontrar la solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación sobre la base de los datos de un problema suele ser más complejo.

Seguidamente te sugerimos algunas pautas que te ayudarán a resolver un problema.



ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Etapa 1: **PLANTEO** del problema en lenguaje Matemático.

Elegir las variables cuya determinación es suficiente para responder a la situación planteada y traducir en ecuaciones las condiciones impuestas al o los valores buscados.

Etapa 2: **RESOLUCIÓN** de la o las Ecuaciones.

Calcular los valores que satisfacen las ecuaciones. En otras palabras, despejar la /s incógnita /s de las ecuaciones planteadas.

Etapa 3: **INTERPRETACIÓN** de la Solución.

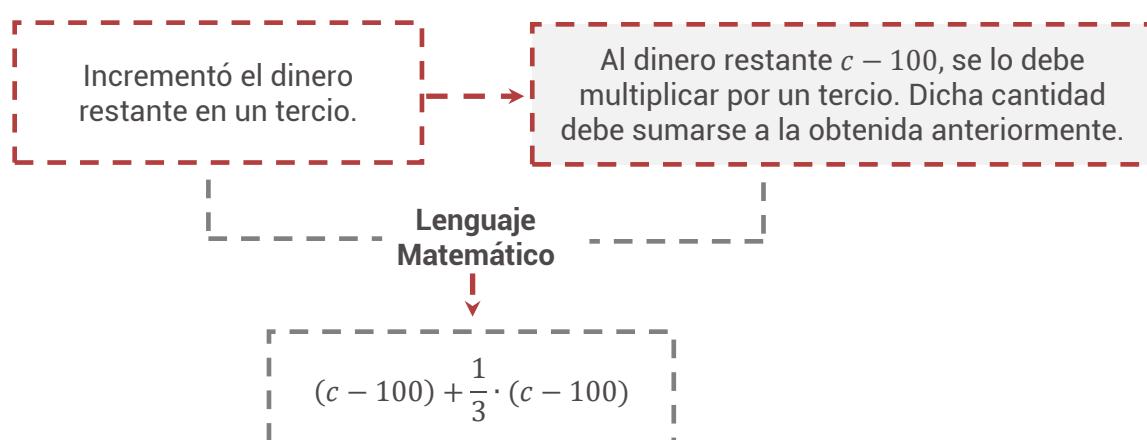
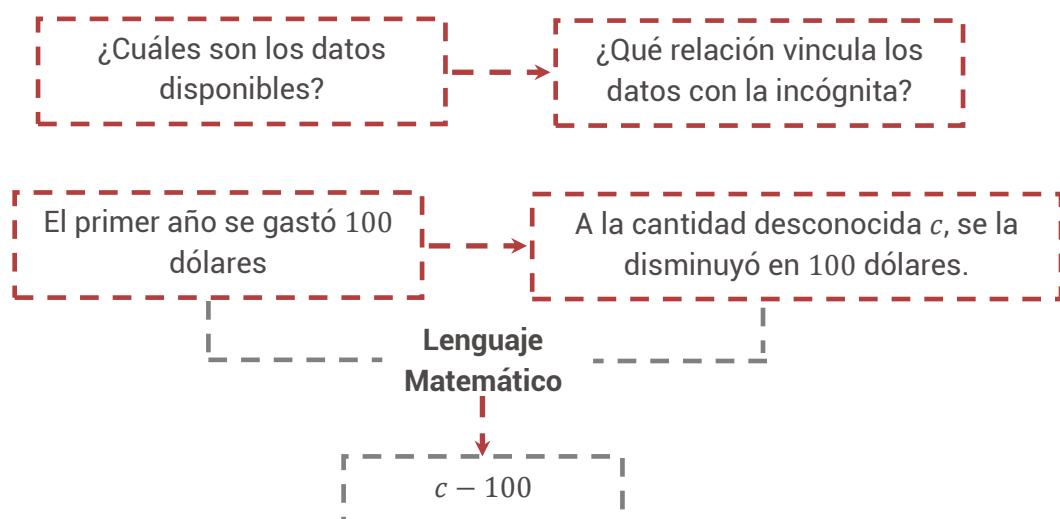
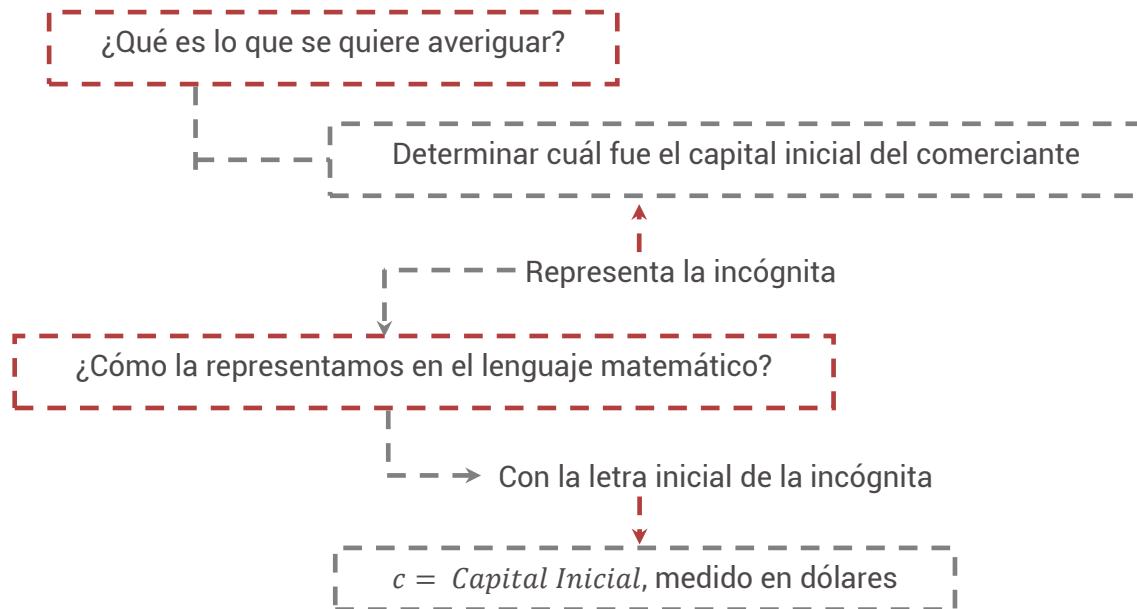
Discutir si las soluciones halladas satisfacen el modelo, es decir, si los valores hallados son compatibles con el problema enunciado.

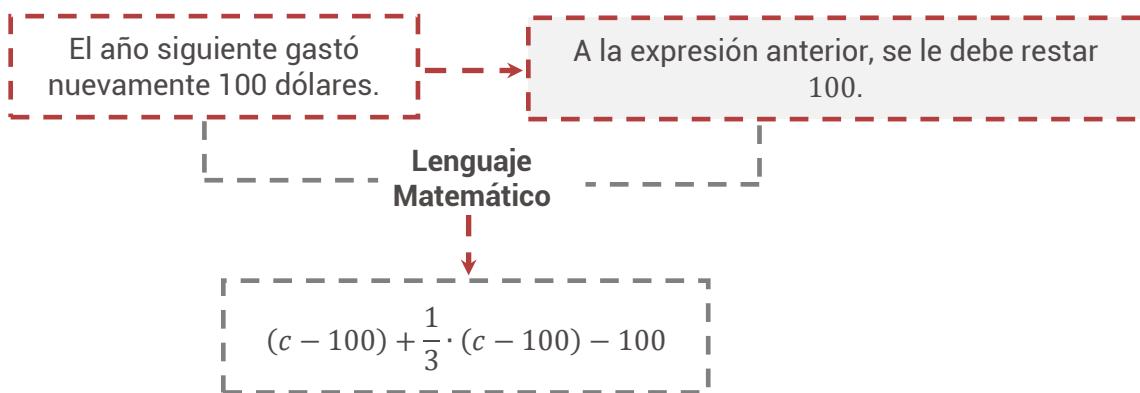


Trabajaremos con el siguiente ejemplo:

Un comerciante disponía de una cierta cantidad de dólares. El primer año gastó 100 dólares. Luego, incrementó el dinero restante en un tercio. El año siguiente gastó nuevamente 100 dólares. Posteriormente, agregó el triple del dinero que le quedaba, con lo que obtuvo el doble de su capital inicial. ¿Podrías averiguar de cuánto dinero disponía en un principio?

La traducción corresponde a la primera etapa de la resolución de problemas, es decir al **PLANTEO** del problema. Nos ayudaremos con las siguientes preguntas:





Antes de continuar, te recomendamos realizar algunos cálculos con la finalidad de trabajar con expresiones más reducidas:

$$(c - 100) + \frac{1}{3} \cdot (c - 100) - 100 = \frac{3 \cdot (c - 100) + (c - 100) - 3 \cdot 100}{3} = \\ = \frac{3c - 300 + c - 100 - 300}{3} = \frac{4c - 700}{3}$$

Posteriormente, agregó el triple del dinero que le quedaba ...

Lenguaje Matemático

$$\frac{4c - 700}{3} + 3 \cdot \left(\frac{4c - 700}{3} \right) = \frac{16c - 2800}{3}$$

Finalmente...

El capital llegó al doble del inicial.

Lenguaje Matemático

$$\frac{16c - 2800}{3} = 2c$$



De esta forma se ha ido condicionando la incógnita hasta tener planteada la ecuación completa. Ahora, estamos en condiciones de determinar el capital inicial del comerciante, y para ello se debe resolver la ecuación anterior, que si observas, se trata de una ecuación lineal.

Teniendo en cuenta las etapas en la resolución de un problema, te proponemos resuelvas la siguiente situación problemática:



Actividad 18

Resuelve la siguiente situación problemática, planteando la ecuación correspondiente. No olvides verificar e interpretar la solución.

Mi esposa gastó en la Farmacia $\frac{1}{3}$ del dinero que tenía y luego, en la carnicería $\frac{2}{5}$ de lo que le quedó; aún tiene \$60. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

Las ecuaciones que resolvimos son ecuaciones de 1° grado, porque la incógnita aparece elevada al exponente 1. También en esta ocasión revisaremos los procedimientos para resolver ecuaciones de 2° grado.

3.1.3. Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es una igualdad en donde la incógnita aparece elevada al cuadrado.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 2x = 0$, es una ecuación cuadrática, porque la incógnita "x" aparece elevada al cuadrado.



Resolvamos paso a paso la ecuación:

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x \cdot (x + 2) = 0$$

Sacamos factor común x en el primer miembro y nos queda un producto de dos factores cuyo resultado es cero

$$x = 0 \text{ ó } (x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ó } x = -2$$

Para que el resultado de dicho producto se anule existen dos alternativas: $x = 0$ ó $(x + 2) = 0$, por lo que $x = -2$

Y esas son las dos soluciones de la ecuación de segundo grado, ya que si reemplazamos dichos valores en la ecuación, se verifica la igualdad.



Veamos otro ejemplo:



$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

En este caso no podemos proceder como en el caso anterior que sacamos factor común x , ya que existe un término que no lo tiene.

Para estos casos y en general para resolver cualquier ecuación cuadrática, existe una fórmula general, que seguramente la recordarás por haberla aplicado muchas veces en la resolución de distintas actividades:

FÓRMULA CUADRÁTICA

(también denominada Fórmula Resolvente)

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ (es a distinto de cero), están dadas por:

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¿La recuerdas?

De la aplicación de dicha fórmula pueden surgir, dos raíces reales distintas, dos raíces reales iguales o dos raíces imaginarias según el signo que asuma la expresión que está debajo de la raíz cuadrada.



✓ Si $b^2 - 4ac > 0$ obtendremos dos raíces reales distintas.

✓ Si $b^2 - 4ac = 0$ obtendremos dos raíces reales iguales.

✓ Si $b^2 - 4ac < 0$ obtendremos dos raíces imaginarias.

Este caso no lo desarrollaremos porque ya dijimos que trabajaremos con el conjunto de números reales.



Retomando nuestro ejemplo, si debemos resolver la ecuación:

$$\checkmark \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - (-32)}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4}$$

$x_1 = \frac{2 + 6}{4} = 2$
 $x_2 = \frac{2 - 6}{4} = -1$

Rta: Las soluciones de $2x^2 - 2x - 4 = 0$ son: $x = 2$ y $x = -1$

Veamos otro ejemplo resuelto:

$$x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$$

$$6x^2 - 7x + 2 = 0$$

Se multiplicó miembro a miembro por 6

Hallemos las raíces, utilizando la fórmula resolvente:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} x_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Actividad 19

Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| a) $(x - 6).(x + 2) = 0$ | d) $4x^2 = 9x$ |
| b) $x^2 + 3x = 10$ | e) $x^2 - 2x = 2$ |
| c) $2x^2 + 9x = 5$ | f) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ |

Actividad 20

Una compañía de TV por cable que tiene 20000 abonados y cobra \$35 mensuales, ordena un estudio de mercado para decidir el aumento que aplicará en sus tarifas. Los resultados del estudio indican que la empresa perderá 400 abonados por cada peso que aumente la tarifa. ¿Cuál deberá ser el aumento para que no haya ingreso? ¿Y para que el ingreso sea de \$92500?

Tarifa \$	Cantidad de Abonados	Ingreso (\$)
35	20000	35 . 20000
$35 + 1$	$20000 - 400 \cdot 1$	$(35 + 1) \cdot (20000 - 400 \cdot 1)$
$35 + 2$	$20000 - 400 \cdot 2$	$(35 + 2) \cdot (20000 - 400 \cdot 2)$
$35 + 3$	$20000 - 400 \cdot 3$	$(35 + 3) \cdot (20000 - 400 \cdot 3)$
⋮	⋮	⋮
$35 + x$	$20000 - 400 \cdot x$...

La fórmula que escribimos para una tarifa de $35 + x$ permite calcular el ingreso de la compañía en función del incremento aplicado en la tarifa. ¿Qué valores debe tener x , para que sea solución del problema?

Actividad 21

En una fábrica se incorporó una máquina de última generación, antes del 20 de diciembre de 2014, la misma aumentará las ganancias de la empresa. Sin embargo, está previsto que en cierto momento dichas ganancias comenzarán a disminuir por el deterioro de la máquina y los gastos de mantenimiento. Se estima que la situación puede preverse según el siguiente modelo:

$$G(x) = -1,25 x^2 + 2,5 x + 18,75$$

donde x es el tiempo transcurrido desde la compra de la máquina medido en años, y G es la ganancia adicional, resultado de su utilización, medida en miles de dólares. Si no tiene ganancia adicional, ¿cuál es el tiempo transcurrido?



3.1.4. Ecuaciones con Módulo

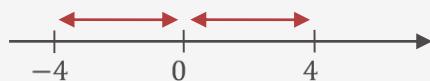
Puede suceder que debamos resolver una ecuación en la que aparece un valor absoluto.

Se llama **MÓDULO** ó también **VALOR ABSOLUTO** de un número real a la distancia entre dicho número y cero y lo simbolizamos: $|x|$

Por ejemplo: los números 4 y -4 son opuestos ya que tienen distinto signo, pero tienen igual módulo, porque están a la misma distancia de cero.

Es decir que: $|-4| = |4| = 4$

Graficamente:



Generalizando:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es importante tener en claro que $-x$ es positivo cuando x es negativo.

Aplicaremos la definición de módulo para resolver las ecuaciones con módulo.



Resolvamos la ecuación:

✓ $|x - 2| = 3$

Esta ecuación expresa que $x - 2$ es un número que se encuentra a tres unidades de cero.

Por ello podemos decir que:

$$x - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 2 = 5$$

ó bien:

$$x - 2 = -3 \Rightarrow x = -3 + 2 = -1$$

De ambas igualdades surgen las soluciones de la ecuación con módulo, que reemplazadas en la misma verifican la igualdad:

Para $x = -1$:

$$|-1 - 2| = 3 \Rightarrow |-3| = 3$$

Para $x = 5$:

$$|5 - 2| = 3 \Rightarrow |3| = 3$$

En general se puede interpretar $|a - b|$ ó $|b - a|$ como la distancia entre a y b .

Por ello en la ecuación anterior $|x - 2| = 3$ establece que la distancia entre x y 2 es de tres unidades, por lo que las soluciones:

$x = -1$ y $x = 5$ indican los números que distan de 2 en tres unidades. **Compruébalo en la recta numérica.**



Por ejemplo, si resolvemos la ecuación:

$$\begin{array}{l}
 \checkmark x^2 - 6 = 19 \\
 x^2 = 19 + 6 \\
 \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \\
 |x| = 5
 \end{array}$$

Despejamos x^2
Aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad
Sustituimos el primer miembro utilizando el módulo y calculamos $|x| = 5$

$$x = \pm 5$$

Ahora reemplazemos cada uno de los valores en la ecuación original para comprobar si se cumple la igualdad:

Para $x = 5$

$$5^2 - 6 = 19$$

Para $x = -5$

$$(-5)^2 - 6 = 19$$



La raíz cuadrada de x^2 se expresa como el módulo de x .

En símbolos, escribimos:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Esta expresión del módulo de un número, nos resultará útil cuando en una ecuación sea necesario despejar una incógnita que esté elevada a una potencia par.



Actividad 22

Halla el/los valores de x que verifica la igualdad

- a) $|x + 2| = 1$ b) $(3 + x)^2 - 4 = 0$
 c) $|2x + 4| = 0$ d) $x^2 - 8 = 1$

¿Qué sucede si aparece una desigualdad en vez de una igualdad?

La expresión se denomina inecuación y el procedimiento de resolución es muy similar al utilizado en las ecuaciones.

3.1.5. Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad en la que hay dos miembros relacionados mediante cualquiera de estos signos \leq , $<$, \geq , $>$. Si esos miembros son expresiones algebraicas, estamos en presencia de una inecuación, en la cual figuran números e incógnitas.

Por ejemplo:

✓ $x + 2 > 1$ implica que $x > 1 - 2$ por lo que $x > -1$

La única propiedad que cambia con respecto a las igualdades es cuando el número que **multiplica o divide** a la incógnita es un **número negativo**, al despejarlo, invierte el sentido de la desigualdad.



Por ejemplo:

$$-\frac{1}{4} - 2x \leq \frac{7}{4}$$

$$-2x \leq \frac{7}{4} + \frac{1}{4}$$

$$-2x \leq \frac{8}{4}$$

$$x \geq \frac{2}{-2}$$

$$x \geq -1$$

En este caso, al dividir miembro a miembro de la desigualdad por el valor, (-2), se invierte el sentido de la misma.

Al trabajar con módulo también pueden aparecer expresiones que contengan los signos \leq , $<$, \geq , $>$.



Veamos algunos ejemplos:

Hallaremos los valores de x que verifican la desigualdad:

$$\checkmark |x| < 3$$

Debemos hallar todos los valores de x cuya distancia a cero sea menor que 3.

Gráficamente la situación sería:



Los valores de x que estamos buscando pertenecen al intervalo $(-3; 3)$, es decir: $-3 < x < 3$.

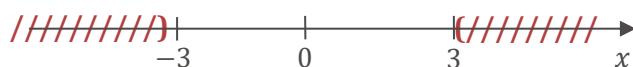
En símbolos: $|x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$ sería el conjunto solución de la inecuación.

Observa ahora como hallamos los valores de x que verifiquen la desigualdad:

$$\checkmark |x| > 3$$

Debemos hallar todos los valores de x cuya distancia a cero sea mayor que 3.

Gráficamente la situación sería:



Los valores de x que estamos buscando pertenecen al intervalo $(-\infty; -3)$ o al intervalo $(3; \infty)$, es decir $x > 3$ o $x < -3$.

En símbolos: $|x| > 3 \Rightarrow x > 3$ o $x < -3$

Analicemos ahora el siguiente ejemplo:

$$\checkmark |x - 2| > 3$$

Gráficamente la situación sería:





Los valores de x que estamos buscando pertenecen al intervalo $(-\infty; -1)$ o al intervalo $(5; \infty)$, es decir $x > 5$ o $x < -1$.

En símbolos: $|x - 2| > 3 \Rightarrow x > 5$ o $x < -1$.



Actividad 23

Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, graficando en la recta real cada uno de los conjunto solución.

a) $2x + 5 < 11$

d) $|x - 2| < 3$

b) $5 + 3x > 4$

e) $|x + 1| \geq 4$

c) $6 - 3x \leq -3$

f) $|x + 2| \geq 2$

Hemos repasado los procedimientos por los cuales se resuelven las ecuaciones con una incógnita, veremos ahora cómo se resuelven las ecuaciones en las cuales aparecen dos incógnitas o variables.

3.2. Ecuaciones con dos incógnitas

Ya vimos que una ecuación es una igualdad en la que debemos averiguar el valor de una incógnita.

Cuando en la ecuación aparecen dos letras representando variables o incógnitas a averiguar el procedimiento cambia.

La expresión: $x + y = 3$ es un ejemplo de una ecuación de dos variables, y para resolverla debemos averiguar los valores de "x" e "y" que verifican la igualdad.



Dentro de las soluciones podemos intuir que estarán:

$$x = 2 \quad , \quad y = 1$$

También: $x = -1 \quad , \quad y = 4$

También: $x = 0 \quad , \quad y = 3$ etc. etc.

Todos esos pares de valores simultáneamente verifican la ecuación, ya que sumados dan por resultado 3.

Pero además de esos pares de valores existen otros infinitos pares que verifican la ecuación, por lo que podemos decir que existen infinitas soluciones para este tipo de ecuaciones.

Cada una de ellas puede ser interpretada como un punto de coordenadas (x, y) sobre una recta, ya que la ecuación $x + y = 3$ es la ecuación de una recta.



RECUERDA

Para encontrar los pares de valores que pertenecen a una recta y que verifican su ecuación se despeja una de las variables, en nuestro ejemplo:

$$y = -x + 3$$

Luego se le da valores arbitrarios a "x" y se obtienen los

Las ecuaciones donde las incógnitas aparecen todas con grado 1, que no están elevadas a ninguna otra potencia, ni bajo ninguna raíz, se llaman ecuaciones lineales.

Si en vez de tener que averiguar los valores que asumen las variables que verifican una ecuación lineal de dos variables, tenemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cada una y debemos encontrar los valores que verifican ambas ecuaciones simultáneamente.

3.2.1. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas representa un conjunto de dos rectas, y su resolución consiste en hallar un punto en común entre ellas, es decir encontrar un valor de cada incógnita que verifique el sistema.

Para hallar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se pueden aplicar distintos métodos.

En este repaso recordaremos los procedimientos de tres de ellos: Método de igualación, Método por sustitución y Método gráfico.



Por ejemplo:

Teniendo el siguiente sistema lineal con dos incógnitas, nuestro objetivo será hallar los valores de "x" y de "y" tal que las dos ecuaciones sean verdaderas.

✓ $\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$ Para ello, utilicemos el siguiente método:

Método de Iguallación

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases} && \text{Despejamos una de las dos variables en las dos ecuaciones, con lo cual tenemos un sistema equivalente. En este caso elegimos despejar la variable "y" en ambas ecuaciones} \\ & \begin{cases} y = \frac{22 - 4x}{3} \\ y = \frac{18 - 2x}{5} \end{cases} && \text{Recordamos que, al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, por lo que podemos igualar los segundos miembros.} \\ & \frac{22 - 4x}{3} = \frac{18 - 2x}{5} && \text{Luego, estamos en presencia de una ecuación de } 1^{\circ} \text{ grado con una variable que resolvemos despejando el valor de esa única variable.} \\ & 5.(22 - 4x) = 3.(18 - 2x) \\ & 110 - 20x = 54 - 6x \\ & -20x + 6x = 54 - 110 \\ & -14x = -56 \\ & x = \frac{-56}{-14} \\ & x = 4 \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de x obtenido, en alguna de las ecuaciones

En nuestro ejemplo, elegimos reemplazar el valor de $x = 4$ en la segunda ecuación.

$$y = \frac{18 - 2.(4)}{5} = \frac{18 - 8}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \text{Operamos para hallar el valor de } y$$

La **solución** del sistema es el par de valores $(x ; y) = (4 ; 2)$



VERIFICACIÓN

Para comprobarlo reemplazamos en ambas ecuaciones el valor hallado:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (4) + 3 \cdot (2) &= 22 \\ 16 + 6 &= 22 \\ 22 &= 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (4) + 5 \cdot (2) &= 18 \\ 8 + 10 &= 18 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

Ahora sí, podemos asegurar que el par $(4 ; 2)$ es la única solución del sistema.

Veamos cuál es el procedimiento si se resuelve el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por otro método:

Método de Sustitución

Resolveremos por este método el mismo sistema que ya resolvimos por el método de igualación.

En nuestro ejemplo elegimos despejar la variable "y" en la primera ecuación

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{array} \right.$$

Despejamos una de las variables en una de las ecuaciones.

$y = \frac{22 - 4x}{3}$

Luego reemplazamos el valor hallado en la otra ecuación.

Nuevamente nos ha quedado planteada una ecuación de 1º grado con una incógnita que sabemos resolver

$$2x + 5 \cdot \left(\frac{22 - 4x}{3} \right) = 18$$

$$2x + \frac{110 - 20x}{3} = 18$$

$$2x - \frac{20x}{3} = 18 - \frac{110}{3}$$

$$-\frac{14x}{3} = -\frac{56}{3}$$

$$x = 4$$

Luego reemplazamos el valor de x obtenido, en alguna de las ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita y .

En nuestro ejemplo lo reemplazamos en la primera ecuación:

$$4 \cdot (4) + 3y = 22$$

$$16 + 3y = 22$$

$$3y = 22 - 16$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$$\boxed{y = 2}$$

Confirmamos que la solución del sistema está dado por el par $(4; 2)$. No hace falta verificarlo, ya que se hizo al aplicar el método de igualación.

También es posible hallar la solución de un sistema a través del Método gráfico.

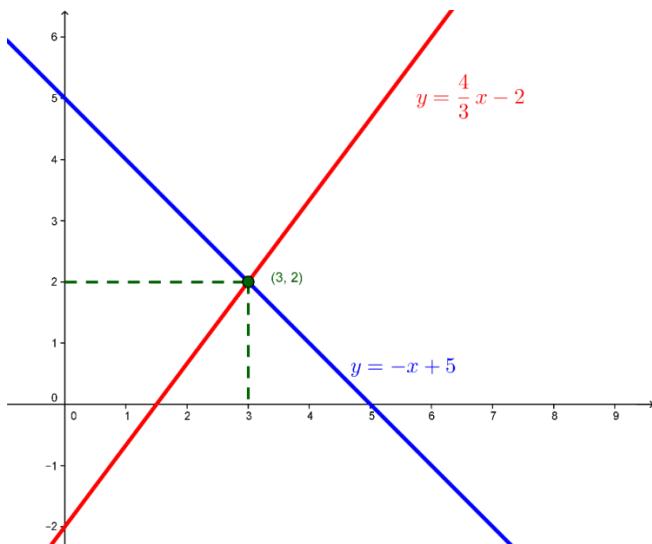
Método Gráfico

Consideramos como ejemplo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3y + 6 = 4x \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Para graficar las rectas que representan cada una de las ecuaciones de 1º grado con dos incógnitas, despejamos "y" en cada ecuación y obtenemos así las fórmulas de las dos funciones lineales.

En la primera $y = \frac{4}{3}x - 2$ En la segunda $y = -x + 5$



RECUERDA: para representar cada recta, podemos utilizar su pendiente y su ordenada al origen. El número que multiplica a "x" en la ecuación es la pendiente, determina su inclinación, y el término independiente es la ordenada al origen, es decir, el punto en el que la recta corta al eje y.

La solución del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya representación en el plano son dos rectas, está dada por el punto $(3, 2)$ que pertenece a ambas rectas.

Es decir que el par $(3, 2)$ verifica simultáneamente ambas ecuaciones del sistema.



¿Te animas a verificar gráficamente la solución del sistema resuelto por igualación y sustitución?



CLASIFICACIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Cuando resolvemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, podemos encontrarnos ante tres casos:

Qué sucede en el gráfico	Clase de sistema
Las rectas se cortan en un punto, es decir que tienen pendientes distintas.	Compatible Determinado
Las dos ecuaciones representan la misma recta, es decir que tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen.	Compatible Indeterminado
Las rectas son paralelas, es decir que tienen igual pendiente y distinta ordenada al origen.	Incompatible



Te proponemos el siguiente desafío:

- Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas.
- Obtén una nueva ecuación multiplicando la anterior por un mismo número en ambos miembros.
- Forma un sistema con las dos ecuaciones anteriores
¿A cuál de los tres casos mencionados, corresponderá el sistema obtenido?



Actividad 24

Resuelve los siguientes sistemas, grafícalos en un sistema de ejes coordinados y luego clasifícalos:

a)
$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ y - x = -1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = 3 + y \\ 3y = -9 + 3x \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y - 1 = -x \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$



¿Pudiste identificar algún sistema que responda al desafío planteado?

Existen numerosos problemas cuya resolución consiste en plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.



A continuación, te planteamos el siguiente problema:

Un inversionista posee " x " Euros e " y " Dólares. Sabe que al final del mes pasado el valor total de su dinero había bajado \$350,00 producto de una disminución conjunta de un \$1 en la cotización del Euro y \$2 en la cotización del Dólar. Ayer el valor total ha aumentado \$ 600,00; consultando las cotizaciones el Euro subió \$3,00 y el Dólar \$1,00. Con los datos disponibles, ¿es posible saber cuántos Euros y Dólares posee el inversor?

¿Qué es lo que se quiere averiguar?

Determinar la cantidad de Euros y Dólares que posee el inversor.

Representan las incógnitas

¿Cómo la representamos en el lenguaje matemático?

Con la letra x representaremos a la cantidad de Euros y con y la cantidad de Dólares.

$x = \text{Cantidad de Euros} ; y = \text{Cantidad De Dólares}$

¿Cuáles son los datos disponibles?

Sabe que al final del mes pasado el valor total de su dinero había bajado \$350,00 producto de una disminución conjunta de un \$1,00 en la cotización del Euro y \$2 en la cotización del Dólar.

¿Qué relación vincula los datos con las incógnitas?

Los Euros y Dólares se valúan, en una fecha determinada, a su valor de cotización. En este caso el enunciado no nos brinda la cotización, pero nos dice que en ambas monedas la misma ha disminuido un \$1.

Es por ello, que:

Disminución en la Cotización del Euro x Cantidad de Euros

+

Disminución en la Cotización del Dólar x Cantidad de Dólares

=

La cantidad de dinero que ha perdido

Lenguaje Matemático

$$-x - 2.y = -350$$



Hemos llegado a obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Lenguaje
Matemático

$$\begin{cases} -x - 2y = -350 \\ 3x + y = 600 \end{cases}$$

Ahora que ya tienes armado el sistema, te invitamos a que averigües cuántos Euros y Dólares posee el inversor, utilizando alguno de los métodos dados para su resolución.

Con estas actividades damos por concluido el temario dispuesto para el repaso. Esperamos que la revisión de estos temas te haya permitido actualizarlos de manera de poder recordarlos cuando debamos recurrir a ellos.



Resolución de Actividades Problemáticas

A continuación, ponemos a tu disposición las soluciones de las actividades propuestas en este módulo.

Pretendemos que las mismas te sirvan para comprobar si tu razonamiento y las técnicas que empleaste en su resolución, te llevaron a obtener las respuestas correctas. Por eso

¡Inténtalo solo!

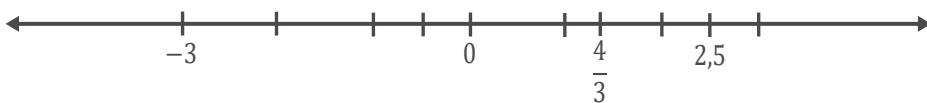


Actividad 1:

$\sqrt{2} \in I$	$-\frac{5}{3} \in Q$
$-2 \in Q$	$132 \in Q$
$1,434343 \dots \in Q$	$1,8\hat{9} \in Q$
$0,123456 \dots \in I$	$-2.565758 \dots \in I$
$1,1415 \in Q$	$\sqrt[3]{7} \in I$
$\frac{3}{5} \in Q$	$\sqrt{81} \in Q$



Actividad 2:



Actividad 3:

a) $\frac{29}{3}$ b) $\frac{61}{4}$ c) 12



Actividad 4:

a) $\frac{11}{12}$ b) 4

Actividad 5:

a) $\frac{8}{45}$

j) $\frac{196}{45}$

b) $-\frac{13}{24}$

k) $\frac{15}{8}$

c) $\frac{10}{7}$

l) $-\frac{1}{3}$

d) 4

m) $\frac{7}{9}$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$

n) $-\frac{1127}{48}$

f) $(-2)^{-4}$

o) 2

g) $\frac{1}{2^5}$

p) $-4, \overline{44}$

h) 2

q) $\frac{1}{3^3}$

i) 3

r) $\frac{32}{21}$

Actividad 6:

a) $2x$

f) x^4

b) $2x^2$

g) $4x^2$

c) $4x$

h) $4x^4$

d) $4x^2$

i) $-16x^2 - 32x + 20$

e) x^2

j) $-2x^2 + 8x + 2$

Actividad 7:

M	N	$M + N$	$M - N$	$M \cdot N$
$2x^3$	$-\frac{5}{2}x^3$	$-\frac{1}{2}x^3$	$\frac{9}{2}x^3$	$-5x^6$
$5a^5$	$5a^2$	$5a^2(a^3 + 1)$	$5a^2(a^3 - 1)$	$25a^7$

Actividad 8:

$$P(x) \cdot Q(x) = 6x^7 + 12x^6 - 2x^5 - 17x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x$$

Actividad 9:

a) $x^2 - 4x + 4$ b) $4x^2 + 4x + 1$

Actividad 10:

a) $4x(x^4 + 1)$ b) $(4 + x)(6x^2 - 4)$

Actividad 11:

a) $(x - 1)^2$ b) $(2x + 4)^2$

Actividad 12:

a) $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a + b)$	F
b) $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$	V



c) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	V
d) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$	F
e) $a^2 - b^2 = (a - b).(a - b)$	F
f) $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$	V
g) $(-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1$	V
h) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$	F
i) $4x^2 + 16x + 16 = (2x + 4)^2$	F
j) $-x^2 + b^2 = (-x + b).(x + b)$	V

Actividad 13:

- a) $4x(x^4 - 1)$ d) $x(4x + 3)^2$
b) $y(3 + 4y)^2$ e) $9x^2(x^2 - 1).(x^2 + 1)$
c) $(4 + x)(6x^2 - 4)$

Actividad 14:

- a) $9 - 12x + 4x^2$ d) $(4x^2 - 4x).(4x^2 + 4x)$
b) $(2x - 6)(2x + 6)$ e) $2(x - 2)(x - 4)^2$
c) $2(x + 2)^2$ f) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

Actividad 15:

a) $(x + 4)$

g) $\binom{(x-2)}{(x-7)}$

b) $(x + 4) \cdot (x - 4)$

h) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{9x}$

i) $\frac{(y-3)^2}{(y-1)}$

d) $\frac{1}{(x+2)}$

j) x

e) 2

k) $\frac{4-x^2}{x^2} = -(1 - \frac{4}{x^2})$

f) $\frac{-8x}{(x^2-4)}$

l) $\frac{2}{(x+1)(x+4)}$

Actividad 16:

a) $x = 3$

c) $x = 1$

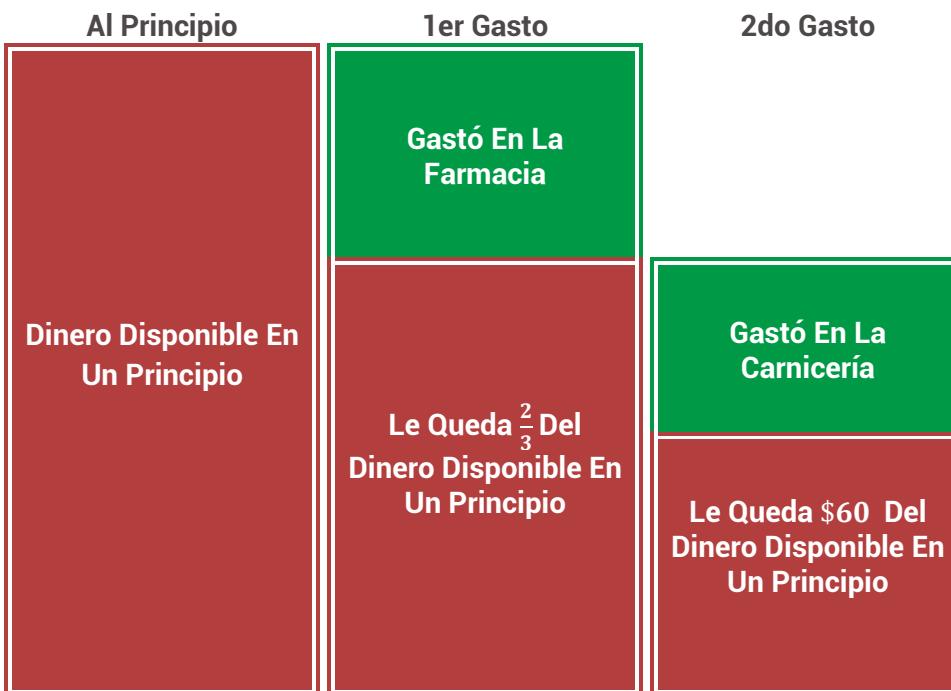
b) $x = -27$

d) $x = -1$

Actividad 17:

a) En el penúltimo paso el -3 del primer miembro debería haber pasado dividiendo a la expresión del segundo miembro.

b) En el primer paso se detectan dos errores, en el primer miembro no se tiene en cuenta que un 2 está restando a toda la expresión. En el segundo miembro, se debería haber distribuido el 2 solo en el binomio del primer término y no en ambos términos.

Actividad 18:

El dinero que tenía al principio era 150 unidades monetarias.

Actividad 19:

a) $x_1 = -2, x_2 = 6$

d) $x_1 = 0, x_2 = \frac{9}{4}$

b) $x_1 = -5, x_2 = 2$

e) $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$

c) $x_1 = -5, x_2 = \frac{1}{2}$

f) $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$

Actividad 20:

Para que no haya ingreso el aumento deberá ser de \$50.

**Actividad 21:**

El tiempo transcurrido es 5 años.

**Actividad 22:**

- a) $x = -3, x = -1$
- b) $x = -5, x = -1$
- c) $x = -2$
- d) $x = -3, x = 3$

**Actividad 23:**

a) $x < 3$



b) $x > -\frac{1}{3}$



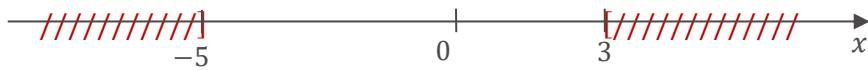
c) $x \geq 3$



d) $x > -1 \wedge x < 5$



e) $x \leq -5 \vee x \geq 3$



f) $x \leq -4 \wedge x \geq 0$



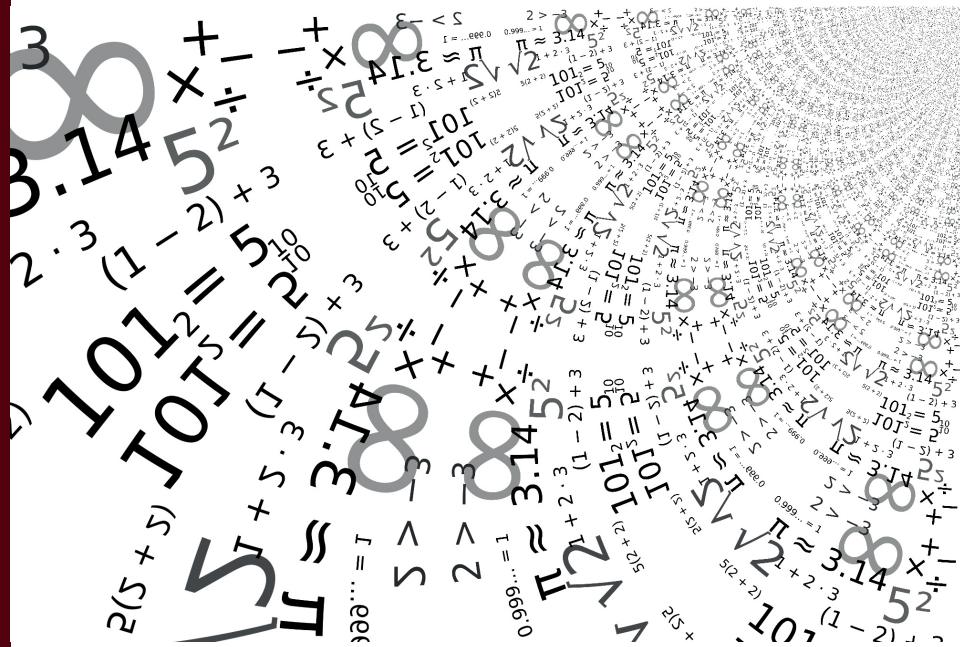
**Actividad 24:**

- a) Solución $x = 2, y = -1$. Sistema compatible determinado.
- b) Solución $y = x - 3$. Sistema compatible indeterminado.
- c) No tiene solución. Sistema incompatible.
- d) Solución $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Sistema compatible indeterminado.
- e) Solución $x = 11, y = -14$. Sistema compatible determinado.
- f) Solución $x = 0, y = 2$. Sistema compatible determinado.



Bibliografía

- ✓ HAEUSSLER Ernest y PAUL Richard. "Matemáticas para Administración y Economía". Editorial Iberoamericana. Primera Edición 1992.
- ✓ LIAL Margaret, Hungerford Thomas "Matemáticas para Administración y Economía", Editorial Prentice Hall.
- ✓ <http://www.vitutor.com>. ejercicios resueltos
ecuaciones



Módulo de Matemática

Encuentros de Integración Universitaria 2016

*Silvia Butigué, Nancy Scattolini, Silvia Cabrera, Sonia Curti,
Martha Lardone, Susana Mussolini y Juan Manuel Gallardo*

Este módulo consta de tres capítulos. En el primero repasamos al conjunto de números reales, haciendo hincapié en las principales características y representaciones geométricas de los subconjuntos que lo forman. Revisamos las propiedades de las operaciones aritméticas con los números reales. El segundo trata sobre expresiones algebraicas, del mismo modo que se trabajó con modelos aritméticos en el primero, en éste adquiriremos habilidad en operaciones que combinan números con variables. Concluiremos este bloque recordando las reglas de factorización y su aplicación para factorizar expresiones y simplificar fracciones. En el tercer y último capítulo trabajaremos con ecuaciones lineales y cuadráticas, resolveremos inecuaciones lineales sencillas, introduciendo la notación de intervalo, para culminar con la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Esto permitirá abordar problemas sencillos, en particular de aplicación económica, a través del planteo de ecuaciones y la resolución de las mismas. Cada tema tratado está organizado en una primera parte teórica con ejemplos, con algunas actividades que desafían a resolverlas individualmente. Y una segunda parte de actividades integradoras, preguntas que permitirán reflexionar sobre los conocimientos adquiridos.

Colección PASATÉXTO



Universidad Nacional
de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Económicas

