



# Lenguajes y Autómatas II

## Gramática Libre del Contexto

REPASO

Unidad V. Análisis Sintáctico



# Gramáticas Libres del Contexto

---

Describen de forma sistemática la **sintaxis** de las construcciones de un lenguaje de programación, como las expresiones y las instrucciones.



Técnica matemática

Fase del compilador

Diagrama de transición



Autómata Finito

Análisis léxico

Gramática Libre del Contexto



Árbol de derivación o derivaciones

Análisis semántico

**Expresión regular**



# Diferencias

## Análisis léxico

LEXEMAS CUMPLAN CON LA REGLA

### Declaración de una variable

- ✓ `int a;`
- ✓ `w int;`
- ✗ `in----t a;`

### Operación aritmética

- ✓ `A = a + b;`
- ✗ `A = a++++ + b;`

## Análisis sintáctico

ORDEN DE LOS LEXEMAS EN UNA SENTENCIA O INSTRUCCION

### Declaración de una variable

- ✓ `int a;`
- ✗ `w int;`

### Operación aritmética

- ✓ `A = a + b;`
- ✗ `= A + ba;`



# Gramáticas Libres del Contexto

---

Una gramática  $G$  es una tupla  $(T, N, I, P)$  donde:

- $T$  conjunto de símbolos *terminales*.
- $N$  conjunto de símbolos *no terminales*.
- $I \in N$  símbolo *inicial*.
- $P$  un serie de *producciones*.



# Gramáticas Libres del Contexto

---

Cada **producción** consiste en:

1. un no terminal, llamada *encabezado* o *lado izquierdo* de la producción
2. una flecha
3. Una secuencia terminales y no terminales, llamado *cuerpo* o *lado derecho* de la producción.



# Ejemplo 1

Sea  $\Sigma = \{a\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto

$T = \{a\}$

Conjunto de terminales. Son los símbolos del alfabeto o expresión regular

$N = \{S\}$

Conjunto de no terminales. Son los encabezados de las producciones

$I = S$

Símbolo inicial. Es el encabezado de una producción

$P:$

$S \rightarrow a$

Producción

Encabezado o lado izquierdo

Cuerpo o lado derecho



# Ejemplo 2

Sea  $\Sigma = \{a, b, c\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto

$T = \{a, b, c\}$  ← Conjunto de terminales. Son los símbolos del alfabeto o expresión regular

$N = \{S, X\}$  ← Conjunto de no terminales. Son los encabezados de las producciones

$I = S$  ← Símbolo inicial. Es el encabezado de una producción

$P:$

$S$	$\rightarrow$	$aX$
$X$	$\rightarrow$	$b \mid c$

Producciones

Los encabezados SON SÍMBOLOS  
NO TERMINALES

El cuerpo lo integra SÍMBOLOS  
TERMINALES O NO TERMINALES

Encabezados o lado izquierdo    Cuerpo o lado derecho





# ¿Cómo representar una expresión regular en una Gramática Libre del Contexto GLC?



# Expresión regular en una GLC

---

Es recomendable primero crear las producciones que representen la expresión regular y posteriormente obtener el resto de los elementos de la Gramática Libre del Contexto GLC, es decir, T, N, I



# Expresión regular a

Correspondiente al lenguaje con una cadena de longitud 1



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a$

P:

$S \rightarrow a$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a$

$I = S$

$P :$

$S \rightarrow a$

$I$  toma el encabezado  $S$  porque es de la única producción que tiene  $GLC$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a$

$N = \{S\}$

$I = S$

$P :$

$S \rightarrow a$

$N$  es el conjunto de todos los encabezados de las producciones



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a$

$T = \{a\}$

$N = \{S\}$

$I = S$

$P :$

$S \rightarrow a$

$T$  es el conjunto de los símbolos del alfabeto o de la expresión regular



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a$

Otra forma de representar la expresión regular  $a$   
En dos producciones

$$T = \{a\}$$

$$N = \{S, W\}$$

$$I = S$$

$P:$

$$S \rightarrow W$$

$$W \rightarrow a$$





# Expresión regular ab

Operación Concatenación



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular **ab**

P:

$S \rightarrow ab$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular **ab**

$I = S$

$P : S \rightarrow ab$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular **ab**

$N = \{S\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow ab$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $ab$

$T = \{a, b\}$

$N = \{S\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow ab$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa el lenguaje  $ab$

Otra forma de representar la expresión regular  $ab$

En dos producciones

$T = \{a, b\}$

$N = \{S, A\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow A$

$A \rightarrow ab$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $ab$

Otra forma de representar la expresión regular  $ab$

En tres producciones

Concatenación de símbolos no terminales

$T = \{a, b\}$

$N = \{S, A, B\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow AB$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$



# Expresión regular a U b

Operación Unión





# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a \cup b$

P:

$S \rightarrow a \mid b$

El símbolo de unión  $\cup$  se representa con  $|$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a \cup b$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow a \mid b$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a \cup b$

$$N = \{S\}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow a \mid b$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a \cup b$

$$T = \{a, b\}$$

$$N = \{S\}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow a \mid b$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a \cup b$

Otra forma de representar la expresión regular  $a \cup b$

En dos producciones

$$T = \{a, b\}$$

$$N = \{S, A\}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow A$$

$$A \rightarrow a \mid b$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a \cup b$

Otra forma de representar la expresión regular  $a \cup b$

En tres producciones

$T = \{a, b\}$

$N = \{S, A, B\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$



# Expresión regular $(ab) \cup c$

Combinación de la operación Concatenación y Unión



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b, c\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $(ab) \cup c$

$T = \{a, b, c\}$

$N = \{S\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow c \mid ab$

$T = \{a, b, c\}$

$N = \{S\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow ab \mid c$

Es indistinto el orden las alternativas de la unión





# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $(ab) \cup c$

Otra forma de representar la expresión regular  $(ab) \cup c$

En dos producciones

Cada producción corresponde a una alternativa de la unión

$T = \{a, b, c\}$

$N = \{S, A, B\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow ab$

$B \rightarrow c$

Unión de símbolos NO  
TERMINALES



# Expresión regular $a^*$

Operación cerradura estrella



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a^*$

$T = \{a\}$

$N = \{S\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow a^*$

 Forma incorrecta



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a^*$

$T = \{a\}$

$N = \{S\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow \varepsilon \mid a \mid aa \mid aaa \mid aaaa \mid aaaaa \mid \dots$

 Forma incorrecta



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a^*$

$T = \{a\}$

$N = \{S\}$

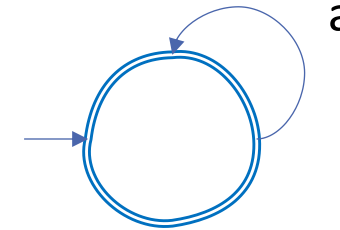
$I = S$

$P:$

$S \rightarrow aS \mid \varepsilon$

$a^n, n \geq 1$

$a^0$



Similar al autolazo del diagrama de transición, en la GLC, es **recursiva** en la producción

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a^*$

$T = \{a\}$

$N = \{S, X\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow X$

$X \rightarrow aX \mid \varepsilon$

Otra forma de representar la expresión regular  $a^*$   
En dos producciones



# Expresión regular $a^+$

Operación cerradura positiva



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a^+$

$T = \{a\}$

$N = \{S\}$

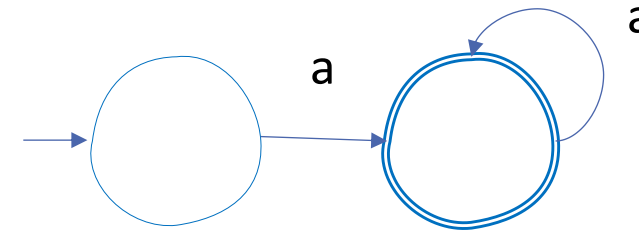
$I = S$

$P:$

$S \rightarrow aS \mid a$

$a^n, n \geq 2$

$a^1$



Similar al diagrama de transición, en la GLC, es **recursiva** en la producción

$$A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$$





# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a^+$

$T = \{a\}$

$N = \{S, X\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow X$

$X \rightarrow aX \mid a$

Otra forma de representar la expresión regular  $a^+$   
En dos producciones



# Expresión regular (0-3)\*

Operación cerradura estrella de unión



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^* = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^*$$

$$T = \{0,1,2,3\}$$

$$N = \{ \}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^* = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^*$$

$$T = \{\}$$

$$N = \{ \}$$

$$I = S$$

$$P:$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^* = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^*$$

$$T = \{0\}$$

$$N = \{ \}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid 0S$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^* = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^*$$

$$T = \{0,1\}$$

$$N = \{ \}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid 0S \mid 1S$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^* = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^*$$

$$T = \{0,1,2\}$$

$$N = \{ \}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid 0S \mid 1S \mid 2S$$



# Expresión regular en una GLC

---

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^* = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^*$$

$$T = \{0,1,2,3\}$$

$$N = \{ \}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid 0S \mid 1S \mid 2S \mid 3S$$





# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^* = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^*$$

$$T = \{0,1,2,3\}$$

$$N = \{ S \}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid 0S \mid 1S \mid 2S \mid 3S$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^* = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^*$$

$$T = \{0,1,2,3\}$$

$$N = \{S, A\}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow A$$

$$A \rightarrow \varepsilon \mid 0A \mid 1A \mid 2A \mid 3A$$

Otra forma de representar la expresión regular  $(0-3)^*$   
En dos producciones



# Expresión regular (0-3)<sup>+</sup>

Operación cerradura positiva de unión



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^+ = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^+$$

$$T = \{0,1,2,3\}$$

$$N = \{ S \}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 0S \mid 1S \mid 2S \mid 3S$$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{0,1,2,3\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular

$$(0-3)^+ = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3)^+$$

$$T = \{0,1,2,3\}$$

$$N = \{S, A\}$$

$$I = S$$

P:

$$S \rightarrow A$$

$$A \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 0A \mid 1A \mid 2A \mid 3A$$

Otra forma de representar la expresión regular  $(0-3)^+$   
En dos producciones



# Expresión regular $a^+b$

Operación Concatenación y cerradura positiva



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a^+b$

$T = \{a, b\}$

$N = \{S, T, U\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow TU$

$T \rightarrow aT \mid a$

$U \rightarrow b$

Observe que  $T$  sólo tiene los símbolos de la expresión regular

Concatenación de Símbolos NO TERMINALES

Cerradura positiva



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  $a^+b$

$T = \{a, b\}$

$N = \{S, T\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow Tb$

$T \rightarrow aT \mid a$

← Cerradura positiva





# Expresión regular (a-z U 0-9)<sup>+</sup>

Operación cerradura positiva de uniones



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  **$(a-z \cup 0-9)^+$**

$T = \{a, b, c, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9\}$

$N = \{S, A\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow A$

$A \rightarrow a \mid b \mid \dots \mid z \mid 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9 \mid$

$aA \mid bA \mid \dots \mid zA \mid$

$0A \mid 1A \mid \dots \mid 9A$



# Expresión regular

$$(a-z \cup 0-9)^+ (A-Z \cup -)^*$$

Operación concatenación de cerradura positiva y estrella



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, \dots, Z, -\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  **$(a-z \cup 0-9)^+ (A-Z \cup -)^*$**

$T = \{a, b, c, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, \dots, Z, -\}$

$N = \{S, \text{Min}, \text{May}\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow \text{MinMay}$

$\text{Min} \rightarrow a \mid b \mid \dots \mid z \mid 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9 \mid$

$a\text{Min} \mid b\text{Min} \mid \dots \mid z\text{Min} \mid$

$0\text{Min} \mid 1\text{Min} \mid \dots \mid 9\text{Min}$

$\text{May} \rightarrow \varepsilon \mid A\text{May} \mid B\text{May} \mid \dots \mid Z\text{May} \mid -\text{May}$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, \dots, Z, -\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  **$(a-z \cup 0-9)^+ (A-Z)^*-$**

$T = \{a, b, c, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, \dots, Z, -\}$

$N = \{S, \text{Min}, \text{May}\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow \text{MinMay}-$

$\text{Min} \rightarrow a \mid b \mid \dots \mid z \mid 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9 \mid$

$a\text{Min} \mid b\text{Min} \mid \dots \mid z\text{Min} \mid$

$0\text{Min} \mid 1\text{Min} \mid \dots \mid 9\text{Min}$

$\text{May} \rightarrow \varepsilon \mid A\text{May} \mid B\text{May} \mid \dots \mid Z\text{May}$



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, \dots, Z, -\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  **$(a-z \cup 0-9)^+ (A-Z)^*-$**

$T = \{a, b, c, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, \dots, Z, -\}$

$N = \{S, \text{Min}, \text{May}, \text{Signo}\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow \text{MinMaySigno}$

$\text{Min} \rightarrow a | b | \dots | z | 0 | 1 | \dots | 9 |$

$a\text{Min} | b\text{Min} | \dots | z\text{Min} |$

$0\text{Min} | 1\text{Min} | \dots | 9\text{Min}$

$\text{May} \rightarrow \varepsilon | A\text{May} | B\text{May} | \dots | Z\text{may}$

$\text{Signo} \rightarrow -$



# Expresión regular

$$(A-Z U -)^*(a-z U 0-9)^+$$

Operación concatenación de cerradura estrella y positiva



# Expresión regular en una GLC

Sea  $\Sigma = \{a, b, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, \dots, Z, -\}$  y  $G = (T, N, I, P)$  una gramática libre del contexto, que representa la expresión regular  **$(A-Z U -)^*(a-z U 0-9)^+$**

$T = \{a, b, c, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, \dots, Z, -\}$

$N = \{S, \text{Min}, \text{May}\}$

$I = S$

$P:$

$S \rightarrow \text{MayMin}$

$\text{Min} \rightarrow a \mid b \mid \dots \mid z \mid 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9 \mid$

$a\text{Min} \mid b\text{Min} \mid \dots \mid z\text{Min} \mid$

$0\text{Min} \mid 1\text{Min} \mid \dots \mid 9\text{Min}$

$\text{May} \rightarrow \varepsilon \mid A\text{May} \mid B\text{May} \mid \dots \mid Z\text{May} \mid -\text{May}$





# Ejercicios

---

Obtener la gramática libre del contexto para las siguientes expresiones regulares.

1.  $abc$
2.  $(a \cup b) c$
3.  $a^*b$
4.  $ba^*$
5.  $999(1 \cup 2)$
6.  $(0-9)^*$
7.  $a^*ba^*$
8.  $a^+ba^+$



# Referencias

---

Hopcroft John E., M. R. (2002). ***Introducción a la Teoría de Autómatas, Lenguajes y Computación.*** (2da. ed.). Madrid: Addison-Wesley.

Kelly D. (1995). ***Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales.*** Madrid: Prentice Hall