

数学系课程  
定理框架手册

# 基础拓扑学讲义

尤承业 编著  
北京大学出版社

aytony

2024 -- 04 -- 18



# 目录

<b>1   拓扑空间与连续映射</b>	<b>3</b>
1.1 拓扑空间 .....	3
1.2 连续映射与同胚映射 .....	4
1.3 乘积空间与拓扑基 .....	5
<b>2   几个重要的拓扑性质</b>	<b>6</b>
2.1 分离公理与可数公理 .....	6
2.2 Урысон 引理及其应用 .....	6
2.3 紧致性 .....	7

# 1 | 拓扑空间与连续映射

## 1.1 | 拓扑空间

**定义 1.1:** 设  $X$  是一个非空集合.  $X$  的一个子集族  $\tau$  称为  $X$  的一个**拓扑**, 如果它满足

1.  $X, \emptyset$  都包含在  $\tau$  中;
2.  $\tau$  中任意多个成员的并集仍在  $\tau$  中;
3.  $\tau$  中有限多个成员的交集仍在  $\tau$  中.

集合  $X$  和它的一个拓扑  $\tau$  一起称为一个**拓扑空间**, 记作  $(X, \tau)$ . 称  $\tau$  中的成员为这个拓扑空间的**开集**.

**例 1.1.1:** 设  $X$  是无穷集合,  $\tau_f = \{A^c \mid A \text{ 是 } X \text{ 的有限子集}\} \cup \{\emptyset\}$ , 则不难验证  $\tau_f$  是  $X$  的一个拓扑, 称为  $X$  上的**余有限拓扑**.

**例 1.1.2:** 设  $X$  是不可数无穷集合,  $\tau_c = \{A^c \mid A \text{ 是 } X \text{ 的可数子集}\} \cup \{\emptyset\}$ , 则  $\tau_c$  也是  $X$  的拓扑, 称为**余可数拓扑**.

**例 1.1.3:** 设  $\mathbb{R}$  是全体实数的集合, 规定  $\tau_e = \{U \mid U \text{ 是若干各开区间的并集}\}$ , 这里“若干”可以是无穷, 有限, 也可以是零, 因此  $\emptyset \in \tau_e$ . 则  $\tau_e$  是  $\mathbb{R}$  上的拓扑, 称为  $\mathbb{R}$  上的**欧式拓扑**. 记  $E = (\mathbb{R}, \tau_e)$ .

**例 1.1.4:** 记  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ . 规定  $\mathbb{R}^n$  上的度量  $d$  为:

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

不难验证  $d$  满足正定性、对称性和三角不等式, 记  $E^n = (\mathbb{R}^n, d)$ , 称为  $n$  维**欧氏空间**.

**引理:**  $(X, d)$  的任意两个球形邻域的交集是若干球形邻域的并集.

**命题 1.1:**  $X$  上由度量  $d$  决定的度量拓扑  $\tau_d$  满足  $X$  上的拓扑性质.

**定义 1.2:** 拓扑空间  $X$  的一个子集  $A$  称为**闭集**, 如果  $A^c$  是开集.

**命题 1.2:** 拓扑空间的闭集满足:

1.  $X$  与  $\emptyset$  都是闭集;
2. 任意多个闭集的交集是闭集;
3. 有限个闭集的并集是闭集.

**定义 1.3:** 设  $A$  是拓扑空间  $X$  的一个子集, 点  $x \in A$ . 如果存在开集  $U$ , 使得  $x \in U \subset A$ , 则称  $x$  是  $A$  的一个**内点**,  $A$  是  $x$  的一个**邻域**.  $A$  的所有内点的集合称为  $A$  的**内部**, 记作  $\overset{\circ}{A}$  (或  $A^\circ$ ).

**命题 1.3:**

1. 若  $A \subset B$ , 则  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .
2.  $\overset{\circ}{A}$  是包含在  $A$  中所有开集的并集, 因此是包含在  $A$  中的最大开集;
3.  $\overset{\circ}{A} = A \iff A$  是开集;
4.  $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ ;
5.  $(A \cup B)^\circ \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ .

**定义 1.4:** 设  $A$  是拓扑空间  $X$  的子集,  $x \in X$ . 如果  $x$  的每个邻域都含有  $A \setminus \{x\}$  中的点, 则称  $x$  为  $A$  的**聚点**.  $A$  的所有聚点的集合称为  $A$  的**导集**, 记作  $A'$ . 称集合  $\bar{A} := A \cup A'$  为  $A$  的**闭包**.

**命题 1.4:** 若拓扑空间  $X$  的子集  $A$  和  $B$  互为余集, 则  $\bar{A}$  与  $\overset{\circ}{B}$  互为余集.

**命题 1.5:**

1. 若  $A \subset B$ , 则  $\bar{A} \subset \bar{B}$ ;
2.  $\bar{A}$  是所有包含  $A$  的闭集的交集, 所以是包含  $A$  的最小的闭集;
3.  $\bar{A} = A \iff A$  是闭集;
4.  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;
5.  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

**定义 1.5:** 规定  $A$  的子集族

$$\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}.$$

容易验证  $\tau_A$  是  $A$  上的一个拓扑, 称为  $\tau$  导出的  $A$  上的**子空间拓扑**, 称  $(A, \tau_A)$  为  $(X, \tau)$  的**子空间**.

**命题 1.6:** 设  $X$  是拓扑空间,  $C \subset A \subset X$ , 则  $C$  是  $A$  的闭集  $\iff C$  是  $A$  与  $X$  的一个闭集之交.

**命题 1.7:** 设  $X$  是拓扑空间,  $B \subset A \subset X$ , 则

1. 若  $B$  是  $X$  的开 (闭) 集, 则  $B$  也是  $A$  的开 (闭) 集;
2. 若  $A$  是  $X$  的开 (闭) 集,  $B$  是  $A$  的开 (闭) 集, 则  $B$  也是  $X$  的开 (闭) 集.

## 1.2 | 连续映射与同胚映射

**定义 1.6:** 设  $X$  和  $Y$  都是拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  是一个映射,  $x \in X$ . 如果对于  $Y$  中  $f(x)$  的任一邻域  $V$ ,  $f^{-1}(V)$  总是  $x$  的邻域, 则称  $f$  在  $x$  处**连续**.

**命题 1.8:** 设  $f: X \rightarrow Y$  是一映射,  $A$  是  $X$  的子集,  $x \in A$ . 记  $f_A = f|_A: A \rightarrow Y$  是  $f$  在  $A$  上的限制, 则

1. 如果  $f$  在  $x$  连续, 则  $f_A$  在  $x$  也连续;
2. 若  $A$  是  $x$  的邻域, 则当  $f_A$  在  $x$  连续时,  $f$  在  $x$  也连续.

**定义 1.7:** 如果映射  $f: X \rightarrow Y$  在任一点  $x \in X$  处都连续, 则说  $f$  是**连续映射**.

**定理 1.1:** 设  $f: X \rightarrow Y$  是映射, 下列各条件互相等价:

1.  $f$  是连续映射;
2.  $Y$  的任一开集在  $f$  的原象是  $X$  的开集;
3.  $Y$  的任一闭集在  $f$  的原象是  $X$  的闭集.

**命题 1.9:** 设  $X, Y$  和  $Z$  都是拓扑空间, 映射  $f: X \rightarrow Y$  在  $x$  处连续,  $g: Y \rightarrow Z$  在  $f(x)$  处连续, 则复合映射  $g \circ f: X \rightarrow Z$  在  $x$  处连续.

**定理 1.2 (粘接定理):** 设  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  是  $X$  的一个有限闭覆盖. 如果映射  $f: X \rightarrow Y$  在每个  $A_i$  上的限制都是连续的, 则  $f$  是连续映射.

**定义 1.8:** 如果  $f: X \rightarrow Y$  是一一对应, 并且  $f$  及其逆  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  都是连续的, 则称  $f$  是一个**同胚映射**, 或称**拓扑变换**, 或简称**同胚**. 当存在  $X$  到  $Y$  的同胚映射时, 就称  $X$  与  $Y$  同胚, 记作  $X \cong Y$ .

**例 1.2.1:** 开区间 (作为  $E^1$  的子区间) 同胚于  $E^1$ .

**例 1.2.2:**  $E^n$  中的单位球体  $D^n := \{x \in E^n \mid \|x\| \leq 1\}$  的内部  $\overset{\circ}{D}^n$  同胚于  $E^n$ . 同胚映射  $f: \overset{\circ}{D}^n \Rightarrow E^n$  可规定为:  $f(x) = \frac{x}{1-\|x\|}, \forall x \in \overset{\circ}{D}^n$ . 它的逆映射为:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1+\|y\|}, \quad \forall y \in E^n.$$

**例 1.2.3:**  $E^n \setminus \{O\} \cong E^n \setminus D^n$  ( $O$  为原点) .

**例 1.2.4:** 球面  $S^2$  去掉一点后与  $E^2$  同胚.

**例 1.2.5:** 任何凸多边形 (包含内部) 都互相同胚.

**例 1.2.6:** 凸多边形与  $D^2$  同胚.

**定义 1.9:** 拓扑空间的在同胚映射下保持不变的概念成为**拓扑概念**, 在同胚映射下保持不变的性质叫**拓扑性质**.

### 1.3 | 乘积空间与拓扑基

**命题 1.10:**  $\overline{\mathcal{B}}$  是  $X_1 \times X_2$  上的一个拓扑.

**定义 1.10:** 称  $\overline{\mathcal{B}}$  为  $X_1 \times X_2$  上的**乘积拓扑**, 称  $(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{B}})$  为  $(X_1, \tau_1)$  和  $(X_2, \tau_2)$  的**乘积空间**, 简记为  $X_1 \times X_2$ .

**定理 1.3:** 对于任何拓扑空间  $Y$  和映射  $f: Y \rightarrow X_1 \times X_2$ ,  $f$  连续  $\iff f$  的分量都连续.

**推论:**  $\forall b \in X_2$ , 由  $x \mapsto (x, b)$  规定的映射  $j_b: X_1 \rightarrow X_1 \times X_2$  是嵌入映射.

**定义 1.11:** 称集合  $X$  的子集族  $\mathcal{B}$  为**集合  $X$  的拓扑基**, 如果  $\overline{\mathcal{B}}$  是  $X$  的一个拓扑; 称拓扑空间  $(X, \tau)$  的子集族  $\mathcal{B}$  为这个**拓扑空间的拓扑基**, 如果  $\overline{\mathcal{B}} = \tau$ .

**命题 1.11:**  $\mathcal{B}$  是集合  $X$  的拓扑基的充分必要条件是:

1.  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ ;
2. 若  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , 则  $B_1 \cap B_2 \in \overline{\mathcal{B}}$  (也就是  $\forall x \in B_1 \cap B_2$ , 存在  $B \in \mathcal{B}$ , 使得  $x \in B \subset B_1 \cap B_2$ ) .

**例 1.3.1:** 规定  $\mathbb{R}$  的子集族  $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$ . 显然  $\mathcal{B}$  满足 命题 1.11 中条件 1. 任取  $[a_1, b_1), [a_2, b_2)$ , 若  $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$ , 记  $a = \max\{a_1, a_2\}, b = \min\{b_1, b_2\}$ , 于是  $a \leq x < b$ . 则  $[a, b) \in \mathcal{B}$ , 并且  $x \in [a, b) \subset [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$ . 因此 命题 1.11 中条件 2 也满足. 这样,  $\mathcal{B}$  是  $\mathbb{R}$  上的一个拓扑基.

**命题 1.12:**  $\mathcal{B}$  是拓扑空间  $(X, \tau)$  的拓扑基的充分必要条件为:

1.  $\mathcal{B} \subset \tau$  (即  $\mathcal{B}$  的成员是开集);
2.  $\tau \subset \overline{\mathcal{B}}$  (即每个开集都是  $\mathcal{B}$  中一些成员的并集) .

**例 1.3.2:** 若  $\mathcal{B}$  是  $(X, \tau)$  的拓扑基,  $A \subset X$ . 规定  $\mathcal{B}_A := \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ . 它是  $A$  的子集族. 显然 命题 1.12 的条件 1 成立. 设  $V$  是  $A$  的开集, 则有  $U \in \tau$ , 使  $V = A \cap U$ . 设  $U = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}, B_{\alpha} \in \mathcal{B}$ , 则  $V = \bigcup_{\alpha} A \cap B_{\alpha} \in \overline{\mathcal{B}}_A$ . 于是  $\overline{\mathcal{B}}_A$  满足 命题 1.12 条件 2. 因此  $\overline{\mathcal{B}}_A$  是  $(A, \tau_A)$  的拓扑基.

**例 1.3.3:** 设  $\mathbb{R}$  的子集族  $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b, a, b \text{ 为有理数}\}$ . 则  $\mathcal{B}$  是  $E^1$  的拓扑基.

## 2 | 几个重要的拓扑性质

### 2.1 | 分离公理与可数公理

$T_1$  公理: 任何两个不同点  $x$  与  $y$ ,  $x$  有邻域不含  $y$ ,  $y$  有邻域不含  $x$ .

$T_2$  公理: 任何两个不同点有不相交的邻域.

命题 2.1:  $X$  满足  $T_1$  公理  $\iff X$  的有限子集是闭集.

推论: 若  $X$  满足  $T_1$  公理,  $A \subset X$ , 点  $x$  是  $A$  的聚点, 则  $x$  的任一邻域与  $A$  的交是无穷集.

命题 2.2: Hausdorff 空间中, 一个序列不会收敛到两个以上的点.

$T_3$  公理: 任意一点与不含它的任一闭集有不相交的 (开) 邻域.

$T_4$  公理: 任意两个不相交的闭集有不相交的 (开) 邻域.

命题 2.3: 度量空间  $(X, d)$  满足  $T_i$  公理 ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

命题 2.4:

- 满足  $T_3$  公理  $\iff$  任意点  $x$  和它的开邻域  $W$ , 存在  $x$  的开邻域  $U$ , 使得  $\bar{U} \subset W$ .
- 满足  $T_4$  公理  $\iff$  任意闭集  $A$  和它的开邻域  $W$ , 有  $A$  的开邻域  $U$ , 使得  $\bar{U} \subset W$ .

$C_1$  公理: 任一点都有可数的邻域基.

命题 2.5: 如果  $X$  在  $x$  处有可数邻域基, 则  $x$  有可数邻域基  $\{V_n\}$ , 使得  $m > n$  时,  $V_m \subset V_n$ .

命题 2.6: 若  $X$  是  $C_1$  空间,  $A \subset X, x \in \bar{A}$ , 则  $A$  中存在收敛到  $x$  的序列.

推论: 若  $X$  是  $C_1$  空间,  $x_0 \in X$ , 映射  $f: X \rightarrow Y$  满足: 当  $x_n \rightarrow x_0$  时,  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , 则  $f$  在  $x_0$  连续.

$C_2$  公理: 有可数拓扑基.

命题 2.7: 可分度量空间是  $C_2$  空间.

例 2.1.1: Hilbert 空间  $E^\omega$  是一个度量空间. 在所有平方收敛的实数序列构成的线性空间中, 规定内积

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

它决定度量  $\rho$ :

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2},$$

得到的度量空间就是  $E_\omega$ .

定理 2.1 (Lindelöf 定理): 若拓扑空间  $X$  满足  $C_2, T_3$  公理, 则它也满足  $T_4$  公理.

### 2.2 | Урысон 引理及其应用

定理 2.2 (Урысон 引理): 如果拓扑空间  $X$  满足  $T_4$  公理, 则对于  $X$  的任意两个不相交闭集  $A$  和  $B$ , 存在  $X$  上的连续函数  $f$ , 它在  $A$  和  $B$  上分别取值为 0 和 1.



**定理 2.3 (Tietze 扩张定理):** 如果  $X$  满足  $T_4$  公理, 则定义在  $X$  的闭子集  $F$  上的连续函数可连续地扩张到  $X$  上.

**命题 2.8:** 拓扑空间  $X$  可度量化  $\iff$  存在从  $X$  到一个度量空间的嵌入映射.

**定理 2.4 (Урысон 度量化定理):** 拓扑空间  $X$  如果满足  $T_1, T_4$  和  $C_2$  公理, 则  $X$  可以嵌入到 Hilbert 空间  $E^\omega$  中.

## 2.3 | 紧致性

**定义 2.1:** 拓扑空间称为**列紧的**, 如果它的每个序列有收敛 (即有极限点) 的子序列.

**命题 2.9:** 定义在列紧拓扑空间  $X$  上的连续函数  $f: X \rightarrow E^1$  有界, 并达到最大、最小值.

**定义 2.2:** 拓扑空间称为**紧致的**, 如果它的每个开覆盖有有限的子覆盖.

**命题 2.10:** 紧致  $C_1$  空间是列紧的.

**命题 2.11:** 对任给  $\delta > 0$ , 列紧度量空间存在有限的  $\delta$ -网.

**定义 2.3:** 设  $\mathcal{U}$  是列紧度量空间  $(X, d)$  的一个开覆盖,  $X \notin \mathcal{U}$ . 称函数  $\varphi_{\mathcal{U}}$  的最小值为  $\mathcal{U}$  的**Lebesgue 数**, 记作  $L(\mathcal{U})$ .

**命题 2.12:**  $L(\mathcal{U})$  是正数; 并且当  $0 < \delta < L(\mathcal{U})$  时,  $\forall x \in X, B(x, \delta)$  必包含在  $\mathcal{U}$  的某个开集  $U$  中.

**命题 2.13:** 列紧度量空间是紧致的.

**定理 2.5:** 若  $X$  是度量空间, 则  $X$  列紧  $\iff X$  紧致.

**命题 2.14:**  $A$  是  $X$  的紧致子集  $\iff A$  是  $X$  的任一开覆盖有有限子覆盖.

**命题 2.15:** 紧致空间的闭子集紧致.

**命题 2.16:** 紧致空间在连续映射下的像也紧致.

**推论:** 定义在紧致空间上的连续函数有界, 并且达到最大、最小值.

**命题 2.17:** 若  $A$  是 Hausdorff 空间  $X$  的紧致子集,  $x \notin A$ , 则  $x$  与  $A$  有不相交的邻域.

**推论:** Hausdorff 空间的紧致子集是闭集.

**定理 2.6:** 设  $f: X \rightarrow Y$  是连续的一一对应, 其中  $X$  紧致,  $Y$  是 Hausdorff 空间, 则  $f$  是同胚.

**命题 2.18:** Hausdorff 空间的不相交紧致子集有不相交的邻域.

**命题 2.19:** 紧致 Hausdorff 空间满足  $T_3, T_4$  公理.

**引理:** 设  $A$  是  $X$  的紧致子集,  $y$  是  $Y$  的一点, 在乘积空间  $X \times Y$  中,  $W$  是  $A \times \{y\}$  的邻域. 则存在  $A$  和  $y$  的开邻域  $U$  和  $V$ , 使得  $U \times V \subset W$ .

**定理 2.7:** 若  $X$  和  $Y$  都紧致, 则  $X \times Y$  也紧致.

**定义 2.4:** 拓扑空间  $X$  称为**局部紧致的**, 如果  $\forall x \in X$  都有紧致的邻域.

**命题 2.20:** 设  $X$  是局部紧致的 Hausdorff 空间, 则

- $X$  满足  $T_3$  公理;
- $\forall x \in X$ ,  $x$  的紧致邻域构成它的邻域基;
- $X$  的开子集也是局部紧致的.

**定义 2.5:** 拓扑空间  $X$  称为**仿紧的**, 如果  $X$  的每个开覆盖都有局部有限的开加细.