Int102_w10_p 和 NP

1、先导概念

多项式时间与指数时间:

上方为多项式时间，下方为指数时间也叫做非多项式时间

归约性: 归约性指的是一个问题转化成另外一个更复杂的问题进行求解，一个例子就是求解一元一次方程，但是我把他放到一个二元一次方程组中运算，最后也能得到答案但是过程会更复杂，于此同时，一个问题想要被归约成另一个问题，我们需要满足两个性质。首先，输出一致性，也就是说在我的输入相同的情况下，我的输出必须相同，其次，Q1 中的任一元素必须可以在多项式时间内转化为 Q2 的元素，比如我们 2-CNF 问题中，我们合取范式的每一个逻辑命题都必须可以在多项式时间内转化成图中的顶点和边。而且归约是具有传递性的，也就是说 A 可以归约 B，B 可以归约 C，那么 A 可以归约 C

p 问题（polynomial time problem）：可以在多项式时间内得到解的问题，典型例子有 ：

1、各类排序 2、单源最短路径 3、最小生成树（MST）

Np 问题（Non-polynomial time problem）：可以在多项式时间验证解的问题，在判断的时候我们通常是将这类最优化问题转化成判断性问题，典型的这类问题涵盖如下：

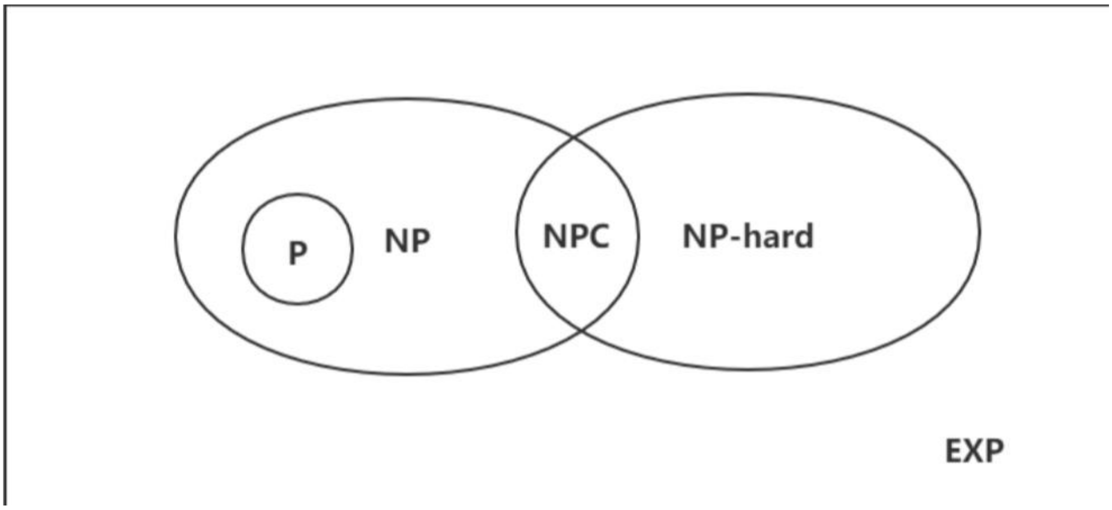
1、Hamiltonian Circuit 2、 Knapsack Problem 3、Circuit-SAT

Npc 问题（NP-complete）：np 类问题中最难的问题，他首先是一个 np 问题，其次所有的 np 问题都可以归约到 npc 问题。例子有：

1、01 背包 2、旅行商问题 3、哈密顿回路

Np 难问题（NP-hard）：nphard 问题包含了 npc 问题但又不完全是 NPC 问题，他可以不是一个 NP 问题，但是所有的 NP 问题都可以在多项式时间内转化为他。对比 NPC，NPC 就是 NPH 的子集，它需要在 NP 的前提下成立，但是 NPH 没有这个限制

以上问题的关系可表示如下：



2、问题的证明

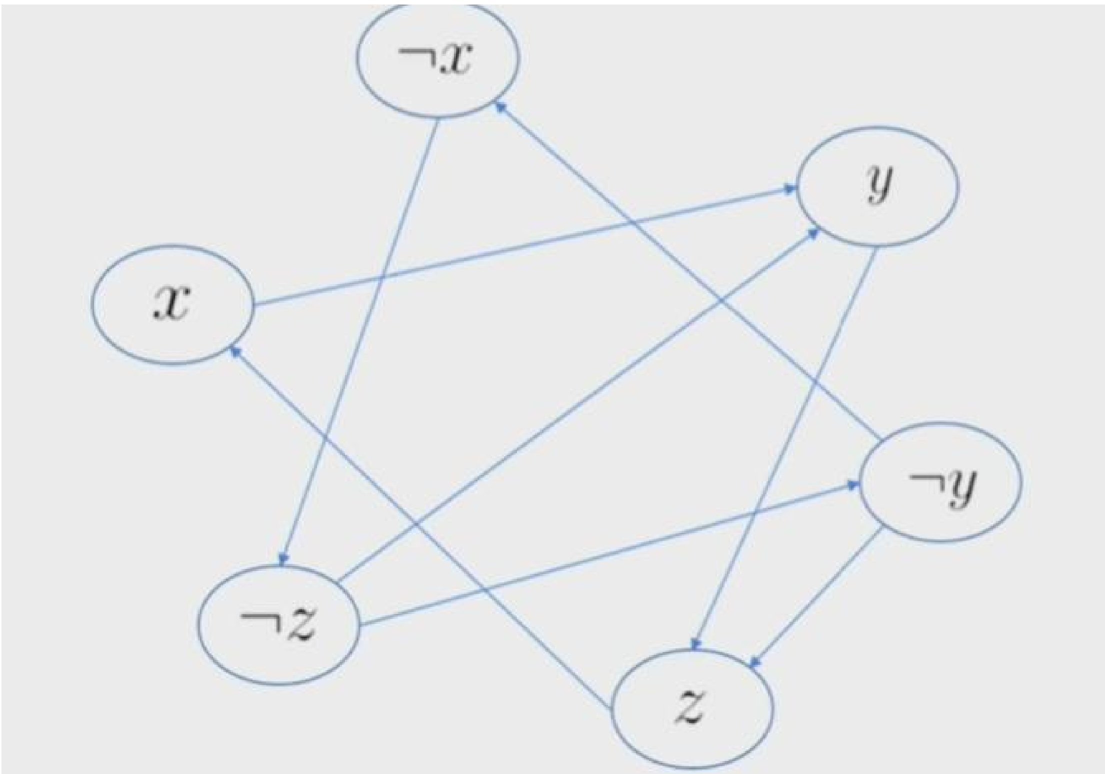
基本思路：使用放缩，把一个我们未知时间的算法归约到一个已知时间的算法，那么我们就可以通过归约的基本性质得到证明。

示例：2—CNF—SAT，2-合取范式的表达如下

$$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (z \vee y)$$

那么根据这个合取式，我们想要知道他的满足性问题，那我们就想办法把它归约到图的问题进行解决。在这种情况下，由于每一个子命题都存在非和其本身，那么我们就会对应得到 6 个节点（因为我们总共 3 个子命题），在这一情形下，联系我们上学期离散数学的内容我们可以得知，一个析取范式（括号内的内容）需要其中一个命题为真另一个为伪，那么我们就对应将其中一个的逆否命题作为出度，真命题作为入度进行连接。（他的原理在于逆否命题和原命题真伪性相反，那么我们就可以用他的逆否命题成立来表示当前命题不成立，由于一个析取范式有两个子命题，所以对于每一个（）内的内容我们都有两

条边）。在这之后我们就可以得到一个如下的图示



由此，我们可以发现对应 Q1，我们的所有元素都可以转化成 Q2，并且将满足性问题转化成了该图中的连通性问题，即寻找该图中是否存在原命题和其否定的通路（这里说的通路不是直接连接而是通过传递），这显然是一个 P 问题，所以我们就可以说我们的初始算法是 P 问题。

3、优化问题转化为决策问题

思想：对我们来说有的时候很难去发现一个问题的最优方案，但是我们可以找到他的某个方案在限定的条件下是否可行，重复进行最后我们就可以得到对应的可能解。

题目：

State the decision version of the following problems

- Given a **weighted** graph G and a source vertex a, find the ***shortest*** paths from a to every other vertex

根据图中内容，我们可以得知他要我们求得图中起点 A 到所有点的最短距离，那么，我们就可以将该问题转化成为对这个图中 A 到任一点的距离都必须小于等于 k，根据这个我们就成功的把一个优化问题转化为了一个决策问题