

INT102W5_Dijkstra

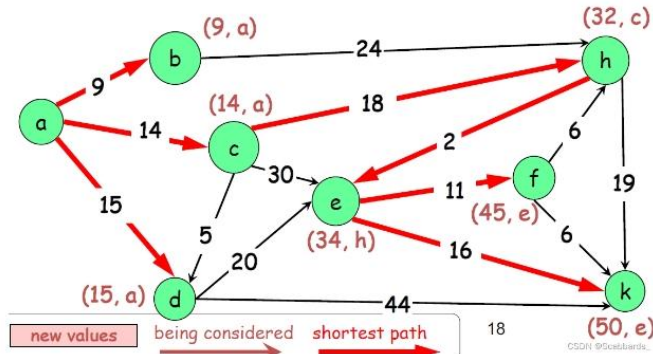
定义：基于贪心算法的单源最短路径算法，即基于某一点出发，要求最后得到该点到图内其他任意点的最小距离。

适用范围：有向图与无向图，通常用来解决比如导航之类的问题。

实现方式：区别于 `prim` 算法，它并不使用递归实现而是使用堆和迭代来进行。

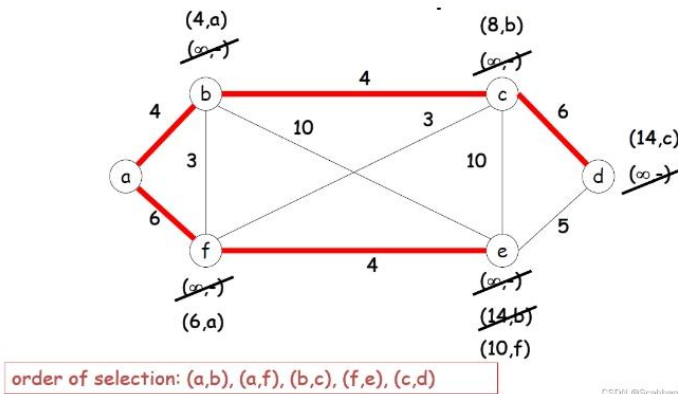
实现流程：对于该算法而言，他主要是分为两个步骤，第一步将所有的非起点距离设置为无穷大，然后再这基础上标记距离 **A** 最近的点（未标记状态），更新距离，收入最佳路径中，然后计算上一节点 **A** 到刚标记节点 **B** 的距离与节点 **A** 到出发点的距离的和，若小于 **B** 到原点的距离则锁定 **A** 点，更新到 **B** 的距离。

图示表达：



a	b	c	d	e	f	h	k
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Δ	(a, 9)	(a, 14)	(a, 15)	∞	∞	∞	∞
	Δ	Δ	Δ	∞	∞	(b, 32)	∞
		Δ	Δ	(c, 45)	∞	(c, 32)	∞
			Δ	(d, 34)	∞	(c, 50)	(d, 59)
				Δ	∞	(h, 51)	(h, 51)
					Δ	(e, 45)	(h, 51)
							(h, 51)

例2



a	b	c	d	e	f	h	k
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Δ	(a, 4)	(a, 10)	(a, 15)	∞	∞	∞	∞
	Δ	Δ	Δ	∞	∞	(b, 32)	∞
		Δ	Δ	(c, 45)	∞	(c, 32)	∞
			Δ	(d, 34)	∞	(c, 50)	(d, 59)
				Δ	∞	(h, 51)	(h, 51)
					Δ	(e, 45)	(h, 51)
							(h, 51)

代码实现：

Pseudo code

```

// Given a graph  $G=(V,E)$  and a source vertex  $s$ 
for every vertex  $v$  in the graph do
    set  $d(v) = \infty$  and  $p(v) = \text{null}$ 
set  $d(s) = 0$  and  $V_T = \emptyset$ 
while  $V - V_T \neq \emptyset$  do // there is still some vertex left
    begin
        choose the vertex  $u$  in  $V - V_T$  with minimum  $d(u)$ 
        set  $V_T = V_T \cup \{u\}$ 
        for every vertex  $v$  in  $V - V_T$  that is a neighbour of  $u$  do
            if  $d(u) + w(u,v) < d(v)$  then // a shorter path is found
                set  $d(v) = d(u) + w(u,v)$  and  $p(v) = u$ 
    end

```

this should be \emptyset

代码的距离流程我认为是这样的，首先我们给出一个图像 G ，然后让点为 V ，边为 E ，对于所有的图内顶点 v 我们设定将每个顶点的距离初始化为无穷大 (∞) ，前驱顶点初始化为 $null$ ，在这之后我们把出发点的距离初始化为 0 并且令存储已访问并更新节点的集合 V 为空。然后当任然存在没有记录更新的点的时候，我们从中选择对于距离最短的点，将他加入到已记录集合 VT 中，然后遍历所有和他相邻的节点，检查当前通过顶点 (u) 的路径是否比先前已知的最短路径更短，如果更短那么就更新相邻点的最短距离和前置顶点。

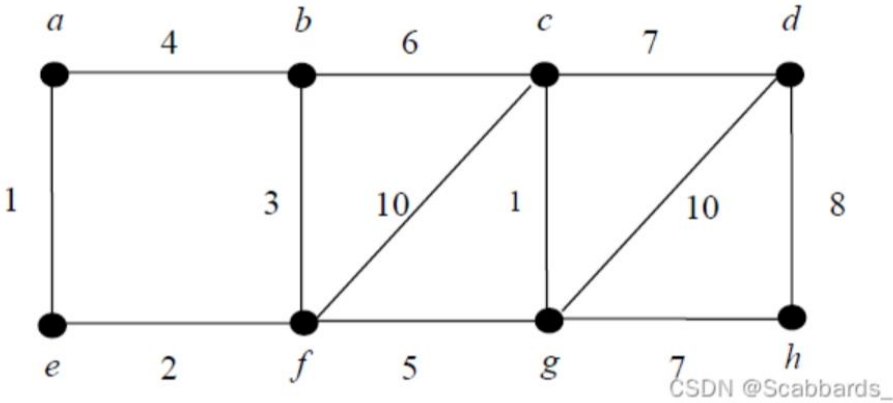
各变量代表的定义：

$D(v)$ = 距离， $p(v)$ = 前一个顶点， s = 原点， v = 点的所有集合， vt = 已标记点。

例题：

Question 3

Consider the following graph G . The label of an edge is the cost of the edge.



3. Referring to the same graph above, find the shortest paths from the vertex a to all other vertices in the graph G using *Dijkstra's algorithm*. Show the changes of the priority queue step by step and give the order in which edges are selected. (5 marks)

N.B. There may be more than one solution. You only need to give one of the solutions.

Order Selected	a(0,-)	b(-,∞)	c(-,∞)	d(-,∞)	e(-,∞)	f(-,∞)	g(-,∞)	h(-,∞)
a(0,-)		b(a,4)	c(-,∞)	d(-,∞)	e(a,1)	f(-,∞)	g(-,∞)	h(-,∞)
e(a,1)		b(a,4)	c(-,∞)	d(-,∞)		f(e,3)	g(-,∞)	h(-,∞)
f(e,3)		b(a,4)	c(f,13)	d(-,∞)			g(f,8)	h(-,∞)
b(a,4)			c(b,10)	d(-,∞)			g(f,8)	h(-,∞)
g(f,8)			c(g,9)	d(g,18)				h(g,15)
c(g,9)				d(c,16)				h(g,15)
d(c,16)								h(g,15)
h(g,15)								

对于这个题我们可以通过上表的方式来进行思考，每一列代表在这一次循环中做了什么。

No. _____
Date _____

$a(-\infty)$ $b(-\infty)$ $c(-\infty)$ $d(-\infty)$ $e(-\infty)$ $f(-\infty)$ $g(-\infty)$ $h(-\infty)$

第2步: 令 a 为出发点 $(-1, 0)$, 与 a 相邻有两个点, 距离分别为 4 与 1, 故此时更新数据, 分别为 4 与 1,

$b(a, 4)$ $e(a, 1)$

此时我们并未锁定任何节点! 然后这里选择已知路径最小的点 $e(a, 1)$, 标记, 收入最优解中, 并对 e 进行的操作, 由于 b 一直没有被更新到故维持 $(a, 1)$ 的状态, 由于 a 到 f 在当前路径为 3, 从 f 到 a , 故更新

$b(a, 4)$ $f(e, 3)$

此时 e 被标记 (被标记后就不再放入表中, 因为表是我们做的石中 U 和 V 的综合 (似理解), 记住就好!!!)

后续即重复如上步骤

$b(a, 4)$	$(f, 13)$	$g(f, 8)$
$c(b, 10)$	$g(f, 8)$	
$d(g, 18)$	$h(g, 15)$	
$d(g, 16)$	$h(g, 15)$	
	$h(g, 15)$	

注, 在这里 a 和 c 到最后无路可走才被记录