Método de diferencias finitas

para problemas lineales

Gustavo A. Castrillon

Instituto de física

7 de mayo de 2020

Análisis del método

El método de diferencias finitas para problemas lineales se utiliza para solucionar ecuaciones del tipo:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

con $a \leq x \leq b$ y $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$. Se considera un número de partes (N) en el cual partiremos el intervalo $[a, b]$.
Por otro lado representado $x_i = a + ih$ con $i = 1, 2, ..., N + 1$ con un paso dado por: $h = (b - a)/(N + 1)$ tendríamos que:

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

Por otro lado podemos ver $y(x_{i+1})$ y $y(x_{i-1})$ como:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) \text{ y } y(x_{i-1}) = y(x_i - h)$$

Si realizamos una expansión de Taylor para las dos y nos queda que:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \tfrac{h^2}{2}y''(x_i) + \tfrac{h^3}{6}y'''(x_i) + \tfrac{h^4}{24}y^4(\xi_i^+)$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \tfrac{h^2}{2}y''(x_i) - \tfrac{h^3}{6}y'''(x_i) + \tfrac{h^4}{24}y^4(\xi_i^-)$$

sumando (3) y (4) tenemos que:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + \tfrac{h^4}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)]$$

despejando $y''(x_i)$ nos quedaría que:

$$y''(x_i) = \tfrac{1}{h^2}[y(x_{i+1} - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \tfrac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

Se puede ver a $y'(x_i)$ por medio del método de diferencias centradas cómo:

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i)$$

reemplazando en la ecuación (1) nos queda que:

$$\frac{1}{h^2}[y(x_{i+1} - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] = p(x_i)(\frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12}[2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)]$$

Para este método suponemos todo termino del tipo $O(h^2)$ se vuelven cero e intercambiando $y(x_i)$ por ω_i y organizando términos nos queda que:

$$-(1 + \frac{h}{2}p(x_i))y_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i))y_i - (1 - \frac{h}{2}p(x_i))y_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

Problema a tratar

Una función a tratar para el problema lineal fue la ecuación hipergeométrica de Gauss la cual está descrita por:

$$x(x-1)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha = 0$$

donde α, β, γ son constantes.
En específico consideraremos los valores $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, que segun la teoría al resolver la ecuación con los valores anteriores arrojaría la serie geométrica

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Algoritmo

Para darle solución a la serie hipergeométrica de Gauss primero creamos un algoritmo en C++ que realice el procesamiento numérico de los datos, estableciendo que $[1.1, 21]$ y $f(2) = -1$, $f(21) = -0.05$, partiendo el intervalo en 50 partes.
Este algoritmo guarda en un archivo de texto con los datos arrojados por el método lineal y luego utiliza un programa hecho en python para realizar un gráfico, comparando estos valores con los valores reales de la serie geométrica.

Analisis del algoritmo en C++

Se ingresa un intervalo $[a, b]$, los valores en $y(a) = \alpha$ y $y(b) = \beta$ y el número (N) de particiones. Además de las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$
El archivo de texto que arroja tendrá los datos x,y.
Se define h como $h = (b - a)/(N + 1)$
El algoritmo está distribuido en 3 pasos iniciales
Paso 1 (para $i = 1$) $x = a + h$.
$\mathrm{a}_1 = 2 + h^2 q(x_i)$
$\mathrm{b}_1 = -1 + \frac{h}{2} p(x_i)$
$\mathrm{d}_1 = -h^2 r(x_i) + (1 + \frac{h}{2} p(x_i))\alpha$
$\mathrm{a}_1\omega_1 = d_1 - b_1\omega_2$

Paso 2 (para $i = 2, ..., N-1$) $x = a + ih$
$\mathrm{a}_i = 2 + h^2 q(x)$
$\mathrm{b}_i = -1 + \frac{h}{2} p(x)$
$\mathrm{c}_i = -1 - \frac{h}{2} p(x)$
$\mathrm{d}_i = -h^2 r(x)$
$\mathrm{a}_i \omega_i = d_i - c_i \omega_{i-1} - b_i \omega_{i+1}$

Paso 3 (para $i = N$)
x=b-h
$\mathrm{a}_N = 2 + h^2 q(x)$
$\mathrm{c}_N = -1 - \frac{h}{2} p(x)$
$\mathrm{d}_N = -h^2 r(x) + (1 - \frac{h}{2} p(x))\beta$
$\mathrm{a}_N \omega_N = d_N - c_N \omega_{N-1}$

Ahora para métodos prácticos se establece
Para i=1, $l_1 = a_1$, $u_1 = b_1/a_1$, $z_1 = d_1/l_1$
Para $i = 2, ..., N-1$, $l_i = a_i - c_i u_{i-1}$, $u_i = b_i/l_i$,
$z_i = (d_i - c_i z_{i-1})/l_i$
Para $i = N$, $l_N = a_N - c_N u_{N-1}$, $z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/l_N$
Teniendo en cuenta que:

$\omega_0 = \alpha$

$\omega_{N+1} = \beta$

$\omega_N = z_N$

Al final se recorre $i = N-1, ..., 1$ para ingresar los valores:

$w_i = z_i - u_i \omega_{i+1}$