Soluciones Numéricas a Ecuaciones Diferenciales Elípticas.

Elizabeth Jiménez Gómez
Juan José León Gil.

Universidad de Antioquia.

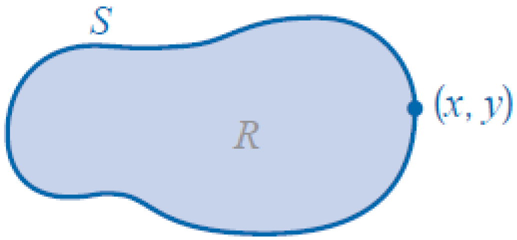
12-05-2020.

Ecuaciones Elípticas.

$$\nabla^2 u(x,y) \equiv \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y)$$

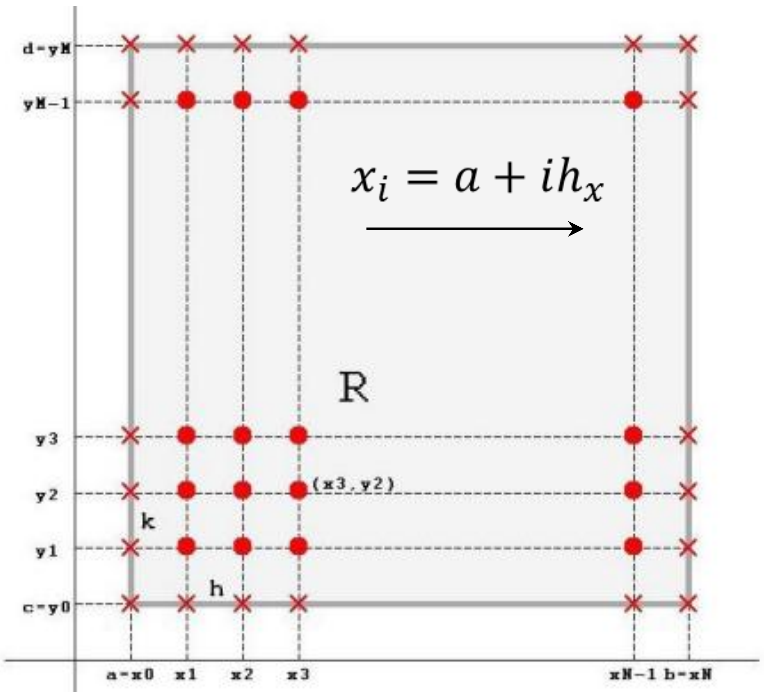
Ecuación de Poisson.

$$\left.\begin{aligned} &R = \{(x,y)|x_0 < x < x_F \; ; \; y_0 < y < y_F\} \\ &u(x,y) = g(x,y) \; para \; (x,y) \in S \end{aligned}\right\}$$



Método de diferencias finitas.

Si definimos $\rightarrow h_x = \frac{(x_F - x_0)}{N_x}$; $h_y = \frac{(y_F - y_0)}{N_y}$



$x_i = a + ih_x$

$y_j = c + jh_y$

$\longrightarrow$ $\boxed{W_{ij} \sim u(x_i\,, y_j)}$

Método de diferencias finitas.

Expandimos en series de Taylor y generamos la fórmula de diferencia centrada:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} - \frac{h_x^2}{12}\frac{\partial^4 u(\varepsilon_i, y_j)}{\partial x^4} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h_y^2} - \frac{h_y^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_j)}{\partial y^4} \qquad (2)$$

$$\boxed{\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h_y^2} = f(x_i, y_j) + \frac{h_x^2}{12}\frac{\partial^4 u(\varepsilon_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h_y^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_j)}{\partial y^4}}$$

Con condiciones de frontera $\longrightarrow$

$u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j) \quad u(x_{N_x}, y_j) = g(x_{N_x}, y_j)$ j = 0,1,2, ..., N_y.

$u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0) \quad u(x_i, y_{N_y}) = g(x_i, y_{N_y})$ i = 0,1,2, ..., N_x-1.

Método de diferencias finitas.

En forma de ecuación de diferencias, el método de diferencia finita es:

$$2\left[\left(\frac{h_x}{h_y}\right)^2+1\right]w_{i,j}-\left(w_{i+1,j}+w_{i-1,j}\right)-\left(\frac{h_x}{h_y}\right)^2\left(w_{i,j+1}+w_{i,j-1}\right)=-h_x^2 f(x_i,y_j)$$

Con condiciones de frontera $\longrightarrow$

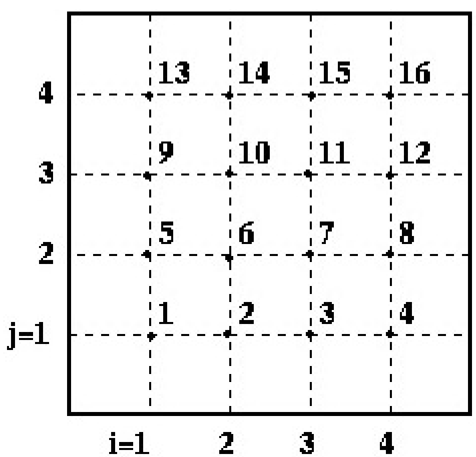
$w_{0,j}=g(x_0,y_j)$ $\quad w_{n,j}=g(x_{N_x},y_j)$ $\quad$ j= $0,1,\dots,N_y$

$w_{i,0}=g(x_i,y_0)$ $\quad w_{i,m}=g(x_i,y_{N_y})$ $\quad$ i= $0,1,\dots,N_x$.

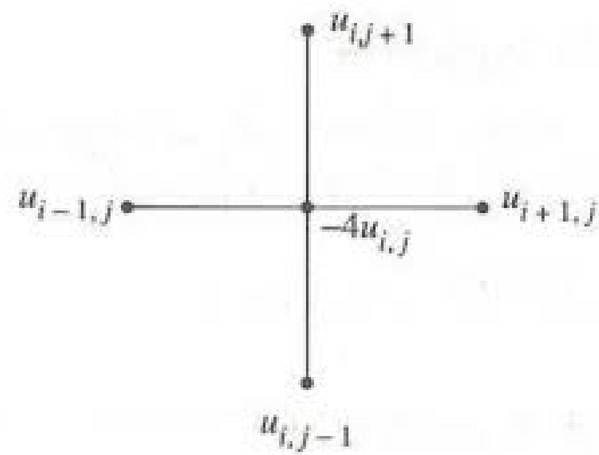
$P_l=(x_i,y_j)$

$w_l=w_{i,j}$,

$l=i+N_x(j-1)$



$\longrightarrow$



Método de diferencias finitas.

$$\lambda w_{i,j-1} + w_{i-1,j} - \mu w_{ij} + w_{i+1,j} + \lambda w_{i,j+1} = -h_x^2 f(x_i\,, y_j)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	·	·	·	·					·	N_x
1	$-\mu$	1				λ														
2	1	$-\mu$	1				λ													
3		1	$-\mu$	1				λ												
4			1	$-\mu$	1				λ											
5				1	$-\mu$					λ										
6	λ					$-\mu$	1				λ									
7		λ				1	$-\mu$	1				λ								
8			λ				1	$-\mu$	1				λ							
9				λ				1	$-\mu$	1				·						
10					λ				1	$-\mu$					·					
·						λ					·	·				·				
·							λ				·	·	·				·			
·								λ				·	·	·				·		
·									λ				·	·					λ	
										·				·						λ
											·									
												·					·	·		
													·				·	·	1	
·														λ				1	$-\mu$	1
N_y															λ				1	$-\mu$

$$M\vec{w} = \vec{b}$$

$$\lambda = \left(\frac{h_x}{h_y}\right)^2$$

$$\mu = 2(1+\lambda)$$

Ejemplos

Enunciado.

Una placa de plata rectangular de 6 cm por 5 cm genera calor uniformemente en cada punto a una velocidad de q = 1.5 cal/s·cm^3. Supongamos que *x* representa la distancia a lo largo del borde de la placa de 6cm de longitud y *y* es la distancia a lo largo del borde de la placa de 5cm de longitud. Suponga que la temperatura *u(x,y)* a lo largo de los bordes se mantiene a las siguientes temperaturas:

$$u(x,0) = x(6-x), \qquad u(x,5) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 6,$$
$$u(0,y) = y(5-y), \qquad u(6,y) = 0, \qquad 0 \leq y \leq 5.$$

Donde el origen se encuentra en una esquina de coordenadas y los bordes se encuentran a lo largo de los ejes positivo de x y y. La temperatura en estado estacionario *u=u(x,y)* satisface la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{q}{K}$$

Donde K es la conductividad térmica y es igual a 1.04cal/cm·deg·s. ¿Cómo cambia la temperatura a través de la placa?.

Código en Python.

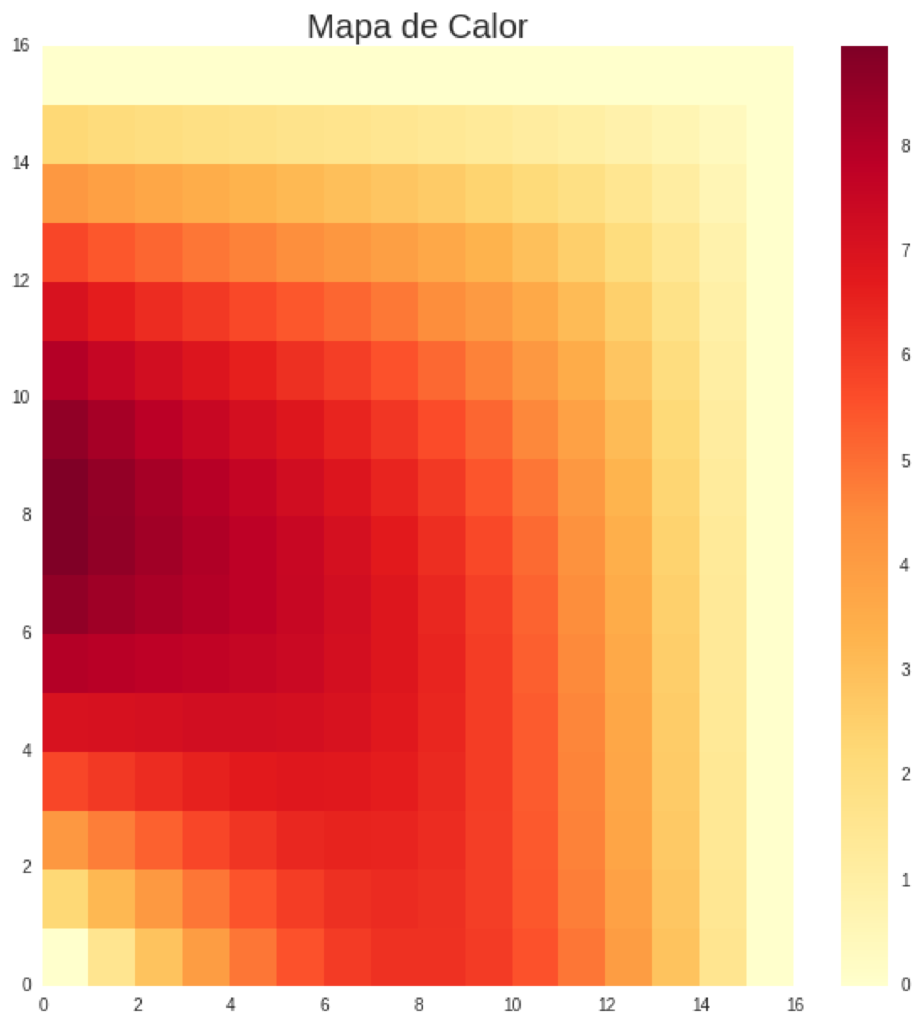
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sb   # Special for heat map.
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.colors as colors
import matplotlib.cm as cm
from sys import argv
from matplotlib.colors import BoundaryNorm
from matplotlib.ticker import MaxNLocator
```

```python
# The data is extracted from the text files.
matrix = np.loadtxt('outputMat.dat', unpack = True)  # File Matrix
x, y, w = np.loadtxt('outputCols.dat', unpack=True)    # File x, y, w.

# ----------------------
# 3D histogram.
# ----------------------

# Set the dimensions
xpos = [range(matrix.shape[0])]
ypos = [range(matrix.shape[1])]
xpos, ypos = np.meshgrid(xpos, ypos)
xpos = xpos.flatten('F')
ypos = ypos.flatten('F')
zpos = np.zeros_like(x)

# width, length, deep.

dx = 0.5 * np.ones_like(zpos)
dy = dx.copy()
dz = matrix.flatten()

#To make a kind of "color map" if the bin is high it is "hotter"

offset = dz + np.abs(dz.min())
fracs = offset.astype(float)/offset.max()
norm = colors.Normalize(fracs.min(), fracs.max())
color_values = cm.jet(norm(fracs.tolist()))
```

Código en Python.

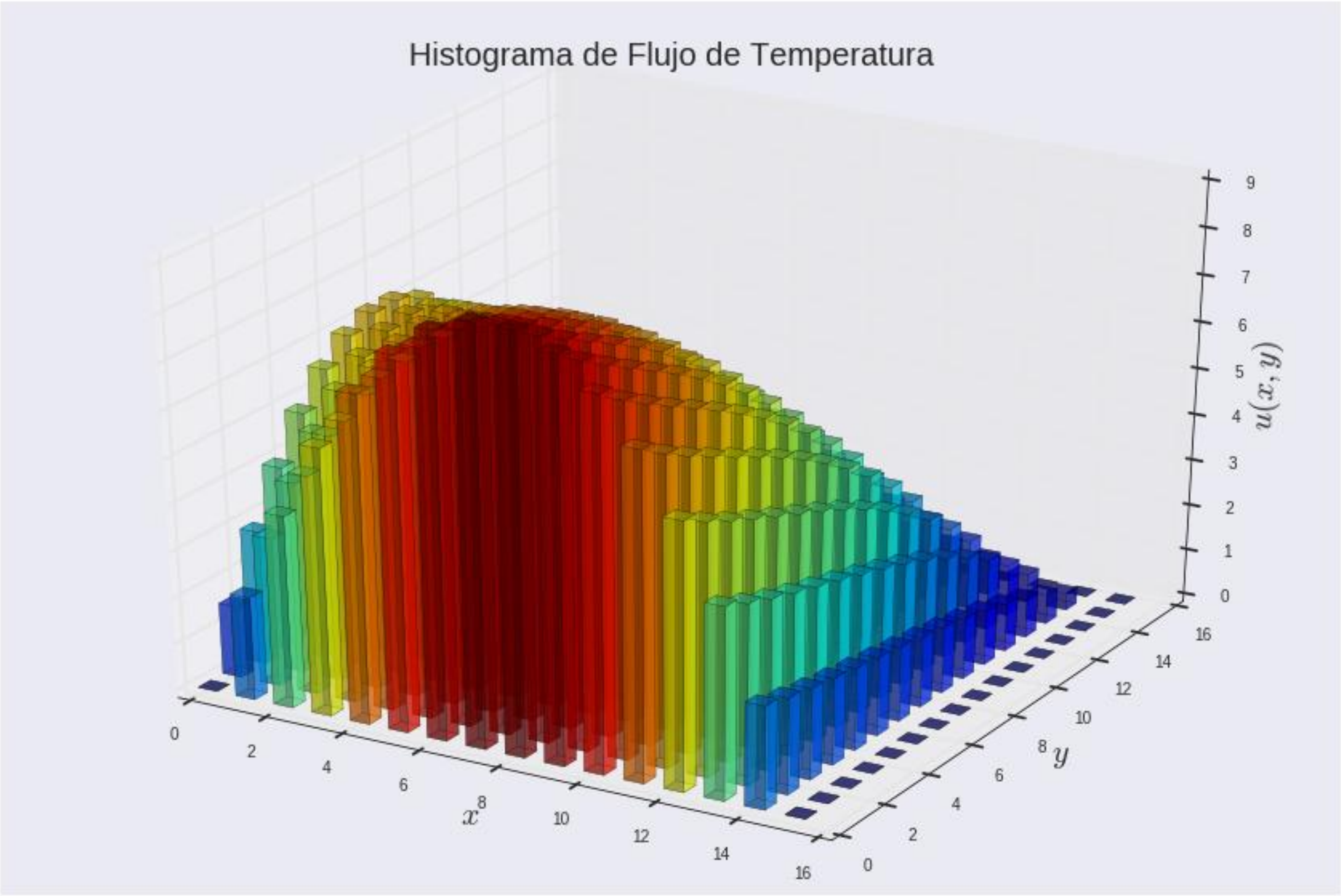
```
# Heatmap.

fig = plt.figure(figsize=(10, 10))
plt.pcolormesh(matrix,cmap='YlOrRd')
plt.colorbar()
plt.title('Mapa de Calor',fontsize=20)
plt.savefig('Exercise8_1.png')

# 3D Histogram

fig = plt.figure(figsize=(15, 10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.bar3d(xpos, ypos, zpos, dx, dy, dz, color=color_values, zsort='average', alpha =0.5)
plt.title('Histograma de Flujo de Temperatura',fontsize=20)
ax.set_xlabel(r'$x$',fontsize=20)
ax.set_ylabel(r'$y$',fontsize=20)
ax.set_zlabel(r'$u ( x, y ) $',fontsize=20)
plt.savefig('Exercise8_2.png')

# Smooth surface

fig = plt.figure(figsize=(15, 10))
ax1 = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax1.plot_trisurf(x, y, w, cmap=cm.jet, linewidth=0.1)
fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)
plt.title('Superficie de Flujo de Temperatura',fontsize=20)
ax1.set_xlabel(r'$x$',fontsize=20)
ax1.set_ylabel(r'$y$',fontsize=20)
ax1.set_zlabel(r'$u ( x, y ) $',fontsize=20)
plt.savefig('Exercise8_3.png')
```

Resultados.



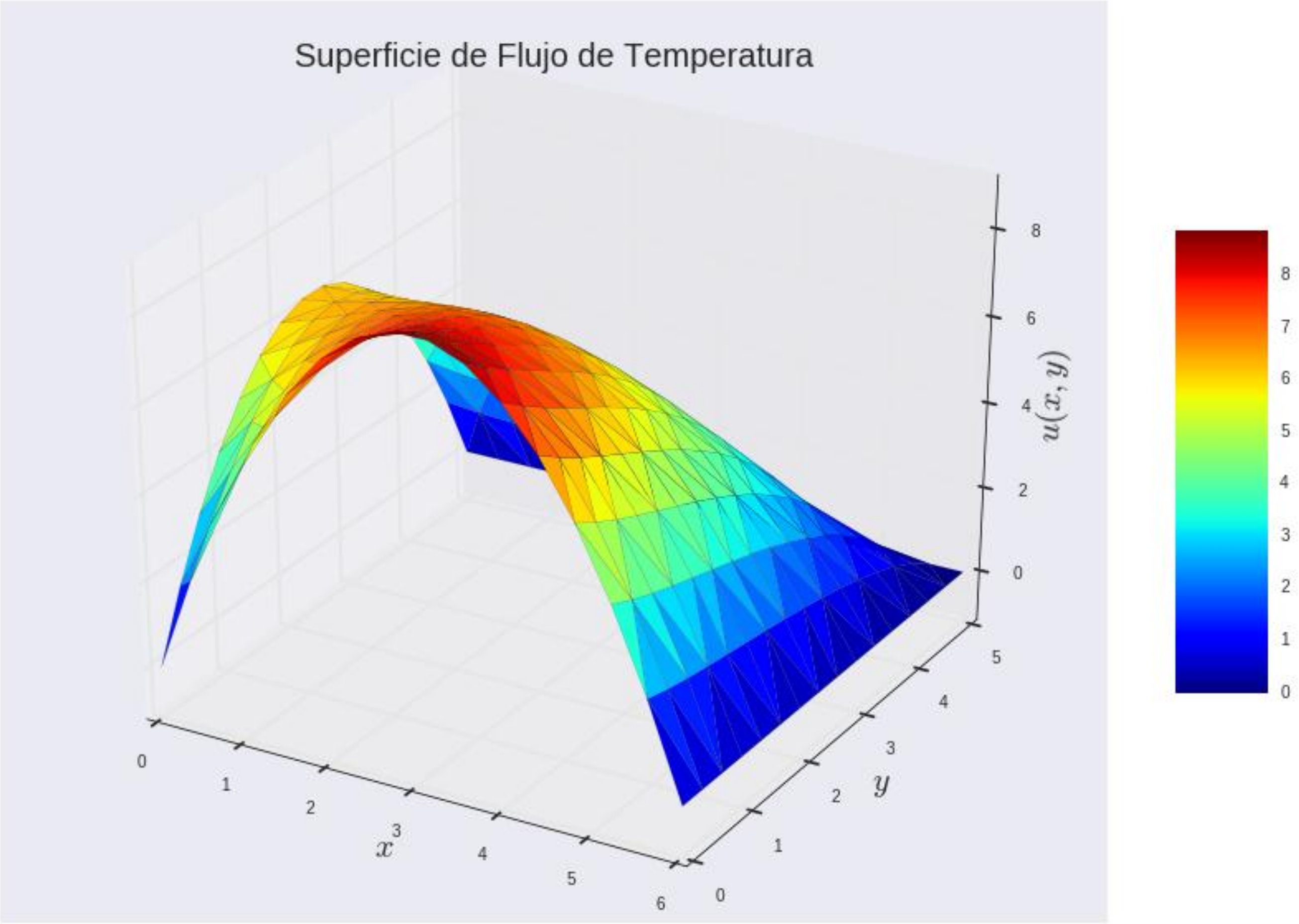
• Ejemplos

Resultados.



• Ejemplos

Resultados.

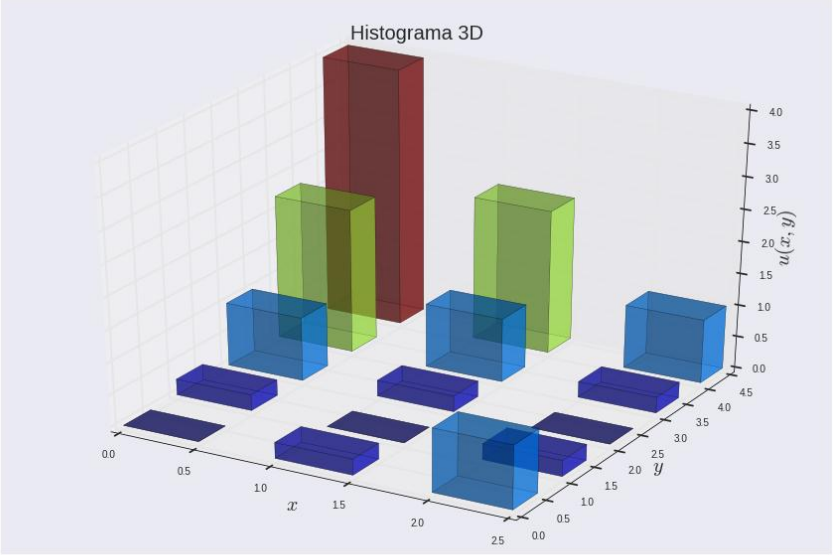


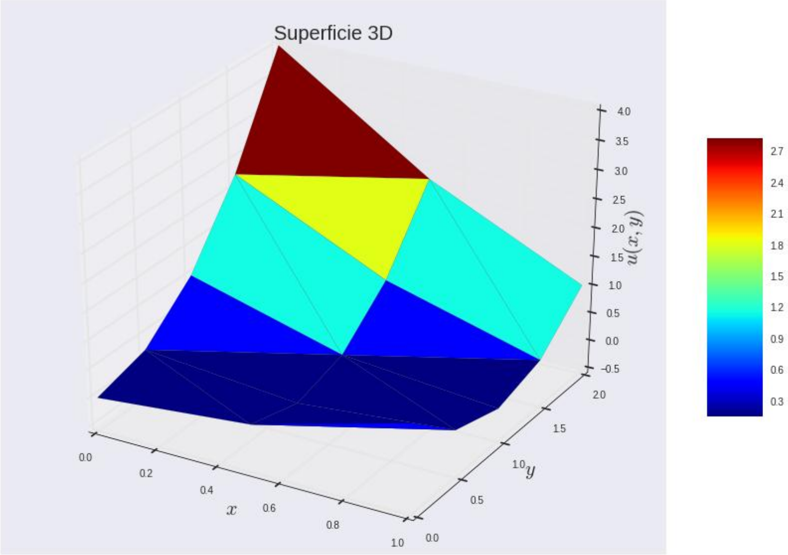
Otros ejemplos.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$$

$$u(x,0) = x^2, \quad u(x,2) = (x-2)^2, \quad 0 \le x \le 1;$$

$$u(0,y) = y^2, \quad u(1,y) = (y-1)^2, \quad 0 \le y \le 2.$$





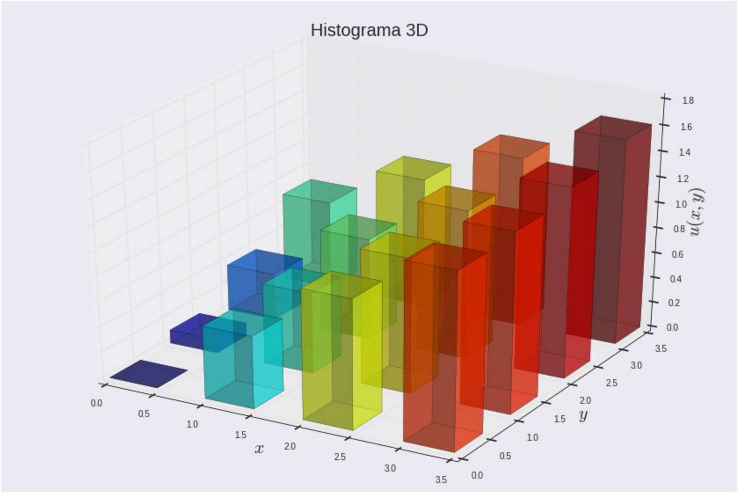
Ejemplos

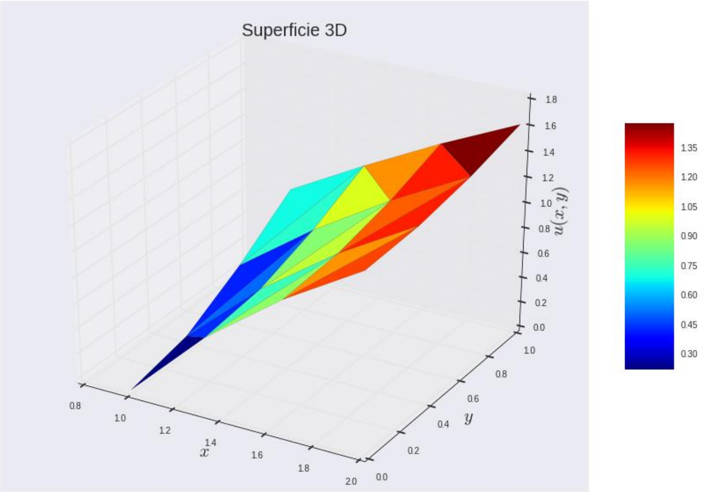
Otros ejemplos.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1;$$

$$u(x,0) = 2\ln x, \qquad u(x,1) = \ln(x^2+1), \quad 1 \le x \le 2;$$

$$u(1,y) = \ln(y^2+1), \quad u(2,y) = \ln(y^2+4), \quad 0 \le y \le 1.$$



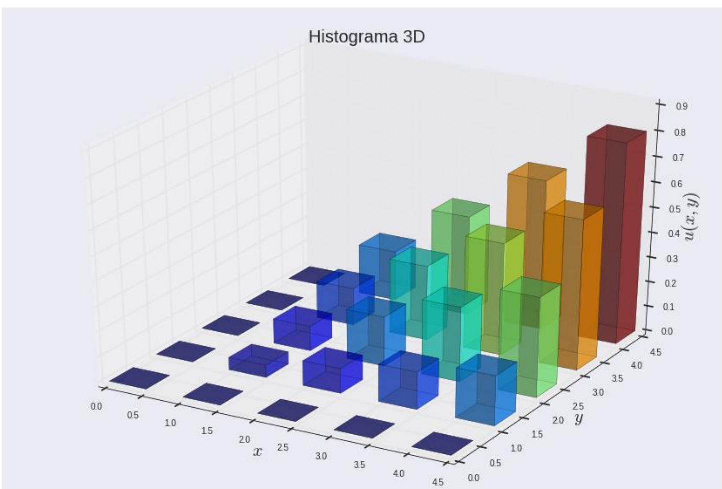


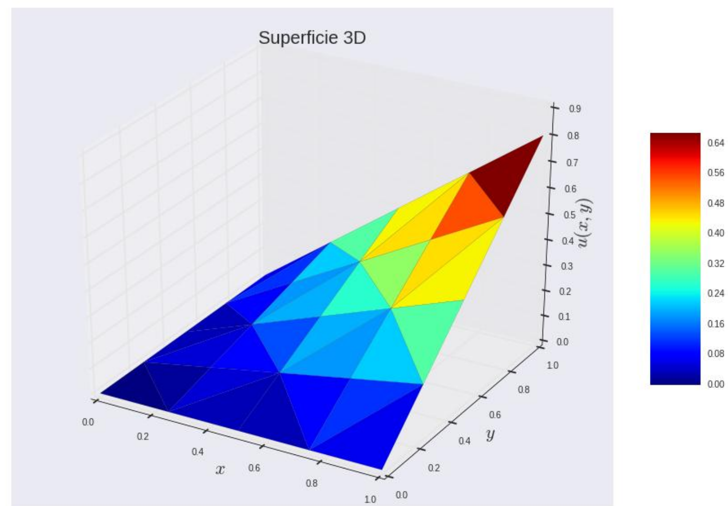
Otros ejemplos.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = x, \qquad 0 \le x \le 1;$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = y, \qquad 0 \le y \le 1.$$



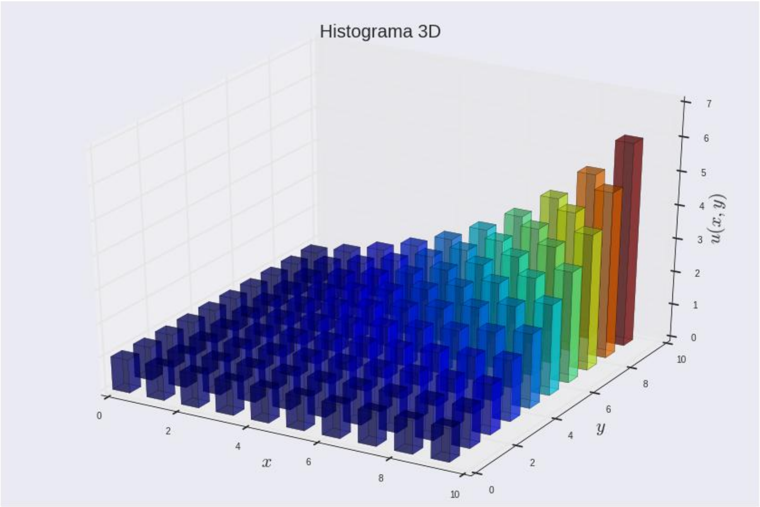


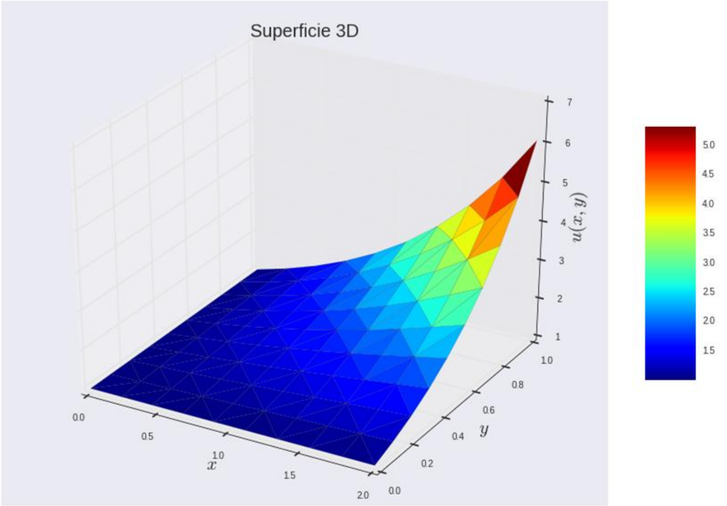
Otros ejemplos.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=(x^2+y^2)e^{xy} \qquad 0<x<2,\quad 0<y<1.$$

$$u(0,y)=1,\quad u(2,y)=e^{2y},\qquad 0\le y\le 1;$$

$$u(x,0)=1,\quad u(x,1)=e^{x},\qquad 0\le x\le 2.$$





Otros ejemplos.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \qquad 1 < x < 2, \quad 1 < y < 2.$$

$$u(x,1) = x \ln x, \quad u(x,2) = x \ln\left(4x^2\right), \qquad 1 \le x \le 2;$$

$$u(1,y) = y \ln y, \quad u(2,y) = 2y \ln(2y), \qquad 1 \le y \le 2.$$