UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

Ecuaciones Diferenciales Parciales: Hiperbólicas

Juan José Ochoa Duque

Santiago Andrés Pérez Acevedo

Bryan Pérez Múnera

Ecuación Diferencial Parcial (EDP)

En general en Física se habla de ecuación diferencial en la variable u=u(x,y) a la siguiente expresión:

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

Como caso particular tenemos la ecuación lineal, donde los coeficientes son en general funciones de x,y.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Caracterización de EDP Hiperbólica

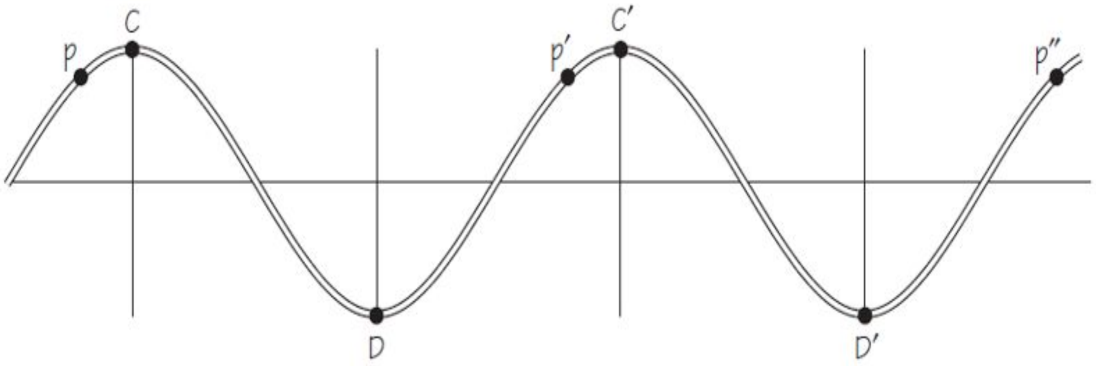
¿Cómo identificar una ecuación hiperbólica?
De la expresión de la ecuación diferencial lineal, se tiene que la relación de los coeficientes determina que una EDP es hiperbólica

$$B^2 - 4AC > 0$$

Ejemplo de EDP Hiperbólica

La Ecuación de Onda es el ejemplo de mayor importancia de una EDP Hiperbólica en física. Tiene la siguiente forma general en 3D:

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = g(\mathbf{r}, t)$$



Ejemplo de EDP Hiperbólica

En nuestro caso en particular nos interesa una Ecuación de Onda unidimensional homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Que está sujeta a las condiciones

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \text{for} \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq l$$

Solución numérica a la Ecuación de Onda

Partiendo de la anterior ecuación, definimos las siguientes cantidades para la solución numérica:

- Se define un entero positivo: $m > 0$
- La partición de x dada por: $h = l/m$
- Un paso de tiempo dado por: $k > 0$
- Las variables “discretizadas” toman la forma: $x_i = ih$, $t_j = jk$, $j, i = 0, 1, \ldots, m$

Solución numérica a la Ecuación de Onda

Tenemos que la definición de segunda derivada de punto medio está dada por

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

Lo que aplicándola a la Ecuación de Onda nos lleva a las relaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

Solución numérica a la Ecuación de Onda

Entonces obtenemos la Ecuación de Onda redefinida:

$$\frac{u(x_i,t_{j+1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j-1})}{k^2}-\alpha^2\frac{u(x_{i+1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-1},t_j)}{h^2}=\frac{1}{12}\left[k^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\mu_j)-\alpha^2h^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,t_j)\right]$$

El término $\tau_{i,j}=\frac{1}{12}\left[k^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\mu_j)-\alpha^2h^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,t_j)\right]$ es un error, que despreciamos, de modo

que obtenemos: $$\frac{w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}}{k^2}-\alpha^2\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{h^2}=0$$

Y tras hacer la definición $\lambda=\alpha k/h$ finalmente:

$$w_{i,j+1}=2(1-\lambda^2)w_{i,j}+\lambda^2(w_{i+1,j}+w_{i-1,j})-w_{i,j-1}$$

Solución numérica a la Ecuación de Onda

Lo anterior se puede ver más claro matricialmente

$$
\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\
\lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\
0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}
$$

Recordando que las condiciones de frontera son $w_{i,0} = f(x_i)$ y $w_{0,j} = w_{m,j} = 0$ con los índices dados por $i = 1, 2, \ldots, m-1$ y $j = 1, 2, 3, \ldots$

Solución numérica a la Ecuación de Onda, aproximación inicial

Hacemos una aproximación de Maclaurin

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \frac{k^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i)$$

Si la segunda derivada existe, entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) = \alpha^2\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) = \alpha^2 f''(x_i)$$

De lo que se sigue

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i)$$

Solución numérica a la Ecuación de Onda, aproximación inicial

De lo anterior tenemos una aproximación con error de orden 3

$$w_{i1} = w_{i0} + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i)$$

Pero debemos obtener f’’, y sabemos que está dada por la aproximación:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\tilde{\xi}_i)$$

Así obtenemos

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2\alpha^2}{2h^2}[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})] + O(k^3 + h^2k^2)$$

Solución numérica a la Ecuación de Onda, aproximación inicial

Haciendo el reemplazo $\lambda = k\alpha/h$ llegamos finalmente a la aproximación para el primer instante de tiempo:

$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + k g(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

Solución numérica a la Ecuación de Onda, pseudocódigo

El pseudocódigo para el caso particular de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

Con las condiciones de frontera e iniciales

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 < t < T$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

Solución numérica a la Ecuación de Onda, pseudocódigo

INPUT endpoint l; maximum time T; constant α; integers $m \geq 2$, $N \geq 2$.

OUTPUT approximations $w_{i,j}$ to $u(x_i, t_j)$ for each $i = 0, \ldots, m$ and $j = 0, \ldots, N$.

Step 1 Set $h = l/m$;
$k = T/N$;
$\lambda = k\alpha/h$.

Step 2 For $j = 1, \ldots, N$ set $w_{0,j} = 0$;
$w_{m,j} = 0$;

Step 3 Set $w_{0,0} = f(0)$;
$w_{m,0} = f(l)$.

Step 4 For $i = 1, \ldots, m-1$ *(Initialize for $t = 0$ and $t = k$.)*
set $w_{i,0} = f(ih)$;

$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2) f(ih) + \frac{\lambda^2}{2}[f((i+1)h) + f((i-1)h)] + kg(ih).$$

Step 5 For $j = 1, \ldots, N-1$ *(Perform matrix multiplication.)*
for $i = 1, \ldots, m-1$
set $w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$.

Step 6 For $j = 0, \ldots, N$
set $t = jk$;
for $i = 0, \ldots, m$
set $x = ih$;
OUTPUT $(x, t, w_{i,j})$.

Step 7 STOP. *(The procedure is complete.)*

Referencias

- Numerical Analysis, Richard L.Burden-J.Douglas Faires, Ninth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Física Matemática, Alonso Sepúlveda, Segunda Edición, Editorial Universidad de Antioquia.
- C++ para ingeniería y ciencias, Gary J Bronson, Segunda Edición, Cengage Learning.