

題目一：使用 Lagrange 插值近似 $\cos(0.75)$

已知以下函數值：

- $\cos(0.698) = 0.7661$
- $\cos(0.733) = 0.7432$
- $\cos(0.768) = 0.7193$
- $\cos(0.803) = 0.6946$

請利用 1~4 次 Lagrange 插值多項式來估計 $\cos(0.75)$ ，並比較估計值、誤差界限與真實誤差（真值約為 0.7317）。

結果：

- 一次插值結果：
 $P_1(0.75) \approx 0.731577$
誤差界限 ≤ 0.000153 ，真實誤差 = 0.000111911
 - 二次插值結果：
 $P_2(0.75) \approx 0.731691$
誤差界限 $\leq 2.652e-6$ ，真實誤差 = 1.7827e-6
 - 三次插值結果：
 $P_3(0.75) \approx 0.731689$
誤差界限 $\leq 3.5139e-8$ ，真實誤差 = 2.56986e-8
 - 四次插值：無法執行（僅有 4 個資料點）
-

題目二：使用逆插值法解 $x = e^{(-x)}$

利用下列資料點：

- $x = 0.3 \rightarrow e^{(-x)} = 0.740818$
- $x = 0.4 \rightarrow e^{(-x)} = 0.670320$
- $x = 0.5 \rightarrow e^{(-x)} = 0.606531$
- $x = 0.6 \rightarrow e^{(-x)} = 0.548812$

請用逆插值法配合迭代法求解非線性方程 $x = e^{(-x)}$ 。

結果：

- 使用固定點迭代法 ($x_{n+1} = e^{(-x_n)}$)，初始猜測 $x_0 = 0.7$
 - 最終近似解為：
 $x \approx 0.56714335$
-

題目三：使用 Hermite 插值預測車輛位置與速度

一輛汽車行駛在直線道路上，測得時間、距離與速度如下表：

時間 T (秒)	距離 D (英尺)	速度 V (英尺/秒)
0	0	75
3	200	77
5	375	80
8	620	74
13	990	72

請回答以下問題：

(a) 預測 $t = 10$ 秒時的位置與速度：

- 預測位置： **$D(10) \approx 769.77$ 英尺**
 - 預測速度： **$V(10) \approx 81.51$ 英尺/秒**
-

(b) 判斷是否超速（限速 **80.670 ft/s**）：

- 汽車在 **$t \approx 5.16$ 秒** 時第一次超過限速。
 - 超速時速度 = **80.70 英尺/秒**
-

(c) 預測最大速度與時間：

- 預測最大速度： **$V_{\max} \approx 84.56$ 英尺/秒**

- 發生於： $t \approx 10.65$ 秒
- 換算為英里/小時：約 **57.66 mi/h**