

### 題目一：使用 Lagrange 插值近似 $\cos(0.75)$

已知以下函數值

- $\cos(0.698) = 0.7661$
- $\cos(0.733) = 0.7432$
- $\cos(0.768) = 0.7193$
- $\cos(0.803) = 0.6946$

利用 1~4 次 Lagrange 插值多項式來估計  $\cos(0.75)$ ，並比較估計值、誤差界限與真實誤差（真值約為 0.7317）。

計算結果：

- 一次插值結果：  
 $P_1(0.75) \approx 0.731577$   
誤差界限  $\leq 0.000153$ ，真實誤差  $= 0.000111911$
  - 二次插值結果：  
 $P_2(0.75) \approx 0.731691$   
誤差界限  $\leq 2.652e-6$ ，真實誤差  $= 1.7827e-6$
  - 三次插值結果：  
 $P_3(0.75) \approx 0.731689$   
誤差界限  $\leq 3.5139e-8$ ，真實誤差  $= 2.56986e-8$
  - 四次插值：**無法執行**（僅有 4 個資料點）
- 

### 題目二：使用逆插值法解 $x = e^{(-x)}$

利用下列資料點：

- $x = 0.3 \rightarrow e^{(-x)} = 0.740818$
- $x = 0.4 \rightarrow e^{(-x)} = 0.670320$
- $x = 0.5 \rightarrow e^{(-x)} = 0.606531$
- $x = 0.6 \rightarrow e^{(-x)} = 0.548812$

用逆插值法配合迭代法求解非線性方程  $x = e^{-x}$ 。

解答結果：

- 使用固定點迭代法 ( $x_{n+1} = e^{-x_n}$ )，初始猜測  $x_0 = 0.7$
  - 最終近似解為： $x \approx 0.56714335$
- 

題目三：使用 Hermite 插值預測車輛位置與速度

一輛汽車行駛在直線道路上，測得時間、距離與速度如下表：

時間 T (秒)	距離 D (英尺)	速度 V (英尺/秒)
0	0	75
3	200	77
5	375	80
8	620	74
13	990	72

回答以下問題：

(a) 預測  $t = 10$  秒時的位置與速度：

- 預測位置： $D(10) \approx 845.544$  英尺
  - 預測速度： $V(10) \approx 139.081$  英尺/秒
- 

(b) 判斷是否超速（限速 80.670 ft/s）：

- 汽車在  $t \approx 0.585$  秒 時第一次超過限速。
- 

(c) 預測最大速度與時間：

- 預測最大速度： $V_{\max} \approx 139.081$  英尺/秒

- 發生於： $t \approx 9.997$  秒
- 換算為英里/小時：約 **94.828 mi/h**