南京信息工程大学

本科生毕业论文 (设计)

题　目　**公共交通调度策略的最优化方法**
——以南京信息工程大学校园为例

学生姓名　陈冰

学　　号　201933070085

学　　院　算机学院、软件学院、网络空间安全学院

专　　业　软件工程

指导教师　马杰良

二〇二三 年 五 月 七 日

声　明

本人郑重声明：

1、　以“求实、创新”的科学精神从事科学研究工作。

2、　本论文中除引文外，所有测试、数据和相关材料均为真实有效的。

3、　本论文是我个人在指导教师的指导下进行的研究工作和取得的研究成果，请勿用于非法用途。

4、　本论文中除引文和致谢的内容外，并未抄袭其他人或其他机构已经发表或撰写过的研究成果。

5、　关于其他同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了声明并表示了谢意。

作者签名：

日期：　　年　月　日

目 录

公共交通调度策略的最优化方法
——以南京信息工程大学校园为例

陈冰

南京信息工程大学应用技术学院，江苏 南京 210044

摘要：目标规划是运筹学中的一个重要分支。在一些复杂场景下的目标规划问题可能不光要满足一个单一的目标。又称多目标最优化。随着目标约束的增多，模型复杂度也更高。本文基于启发式双目标规划算法，给出一种满足乘客较小等待时间和较小空车率的多目标规划算法。使用 Pyomo 对该问题进行建模，通过数值求解器 Gurobi 对该算法进行多次迭代求解，得到新的时刻表。通过实地统计的真实数据，使用离散事件模拟包 SimPy 对校园公交系统内的排队乘客进行模拟。通过实验证明，在相同量级数量的参数约束下，该启发式目标约束算法有效降低排队乘客的平均等待时间。

关键词：运筹优化；多目标规划；公交调度；启发式方法

The Optimization Method of Public Transport Scheduling Strategy
——A Case Study of Nanjing University of Information Science and Technology

Bing Chen

School of Applied Technology，NUIST，Nanjing 210044，China

Abstract: Objective planning is an important branch in operations research. In some complex scenarios, the goal planning problem may be more than just meeting a single goal. Also known as multi-objective optimization. As the target constraints increase, so does the complexity of the model. Based on the heuristic dual-objective planning algorithm, this paper presents a multi-objective planning algorithm that satisfies the small waiting time and small empty rate of passengers. The problem was modeled using Pyomo, which was applied using the numerical solver Gurobi The algorithm solves several iterations to obtain a new timetable. Using real-world data from field statistics, SimPy was used to simulate queued passengers in the campus bus system. Pass real-world verification Obviously, under the same number of parameter constraints, the heuristic target constraint algorithm effectively reduces the average waiting time of queuing passengers.

Key words: Operations research optimization; Multi-objective planning; Bus scheduling; Heuristics

1 绪言

1.1 研究背景和意义

公共交通，泛指所有向大众开放、并提供运输服务的运输系统，该系统通常按照固定的时刻表进行资源调度管理，在既定的线路上运行，每次向乘客收取一定的费用。广义而言，公共交通包括民航、铁路、公路、水运等交通方式。作为城市公交网络的重要组成部分，公交系统的发展水平直接影响着市民出行的便捷性和幸福感。因此，公交系统的建设和发展对于构建和谐社会和和谐城市具有重要的意义。公交系统与居民的日常出行息息相关，是居民日常出行的主要选择。以南京市公共交通系统为例，2022 年第一季度，全市营业性客车达 6353 辆，客位 279619 座，全市客运班车总数达 879 辆、45428 客位，旅游及包车 5474 辆、240286 客位。普通干线公路日均交通量 29.52 万辆[1]。但是城市人口的快速增长造成了交通拥堵，同时交通拥堵也阻碍了城市经济的发展。根据高德地图发布的《2022 年度中国主要城市交通分析报告[2]》，2019 至 2022 年度大中型城市的整体候车时长同比呈上升趋势，尤其是受发车频率影响的候车时长上升明显；主要城市高峰平均交通拥堵指数达到 1.704（在通行一小时的行程中实际花费为 1.704 小时）。根据百度地图发布的《2022 年度中国城市交通报告[3]》，我国主要城市公交候车时间为 8.97～17.34 分钟，且候车时间越长的城市受发车频率和交通扰动影响也越大。倡导公交出行是解决交通拥堵的一个主流方案，城市公交系统对节能减排，建设绿色城市也有着重要意义，公交系统依赖城市道路网络，且大多为电力驱动，更多的载客量下产生的碳排放更少，且良好的站点设置与调度方式可以让公交系统与共享单车、轨道交通等其他出行方式结合产生完美的绿色出行生态系统。如何构建一个高效稳定的交通系统，提高乘客的出行满意度，以吸引更多乘客选择公共交通出行，对推动绿色出行和社会发展有着重大意义。

交通调度优化是一项十分复杂的系统性工程，多种因素相互合作用影响着整个系统。通过统计数据，使用模拟算法建立乘客出行模式的模型。在建立了乘客出行模式的模型后，生成随机离散客流，传统的运筹学方法对公交调度这类有约束资源分配问题下有良好的表现，通过所得的数据建立相应问题的规划模型并求解，更好的解决相应交通规划问题。

本文以南信大校园公交系统为例，现有运营方案下，校园公交人流量高峰时期常采用多车次连续发车的方法，由于公交线路站点大多均匀坐落在校园主干道上，高峰时期车辆行进速度也会受到主干道交通环境影响，导致部分站点排队时间较长；非高峰时期，为考虑运营成本，公交采用固定弹性时刻表方式进行调度，现有的调度策略存在滞后性。通过对客流模式进行挖掘分析，运用模拟算法通过该模式建立数学模型，使用运筹学方法从成本、效益、乘客舒适度等多个角度出发，对公交站定址、调度策略等进行优化，最终解决现有策略下校园公共交通系统中的缺陷。

1.2 公共交通调度优化研究现状

排队理论中常用分布函数来描述客流，近年来基于机器学习的客流预测方法受到了广泛的关注。

在机器学习任务中，时间序列预测指的是对按照时间顺序排列的数据点序列（例如上证指数、商场每日人流量、交通客流等）进行预测。这种预测需要考虑时间因素，以更好地预测未来的趋势和变化。LSTM 是时序预测中常用的算法，全称为长短期记忆（Long Short Term Memory），是一种特殊的递归神经网络[4]。2022 年，Wenhua Jiang 等人提出来一种基于深度学习的短期 OD（始发地-目的地）客流预测方法[5]，短期 OD 流量预测的一个关键挑战是由于

出行没有在一定的时间间隔内完成，OD 流量信息的部分可观测性。这种方法创新的提出了一种新的深度学习架构，这种架构可以良好的应用于用于城市轨道交通系统 OD 流量预测，并研究了数据表示和处理部分信息的各种机制。深度学习框架由三个主要组成部分组成，包括多个 LSTM 网络，该网络具有捕获短期/长期时间依赖性的注意机制，用于时空相关性的时间移位图矩阵，以及用于部分 OD 流观测的重建机制。结果表明，所提出的模型具有较高的精度和鲁棒性，以及 OD 流量信息的局部观测对提高预测性能的重要性。在数据表示方面，预测 OD 流量偏差的效果始终优于直接预测 OD 流量。

不同于一般的前馈神经网络的地方，对于 LSTM 来说它进行分析的对象是输入网络的时间序列。简单的来说，当前馈神经网络时输入的数据在时序上不需要具有任何相关性。对于许多情况，例如图片分类识别，这没有问题。然而，对于一些情景，例如自然语言处理 (NLP) 或者需要分析类似于连拍照片这样的数据时，合理地运用 t 或之前的输入来处理 $t+n$ 时刻的数据，可以更充分地利用输入信息。在 2017 年提出的基于 self-attention 机制的 Transformer 模型[6]最开始在自然语言处理任务中有着不俗的表现，该模型的思想后被广泛应用于机器学习的各个任务分支中，最近的一些研究表明，在对于能源、交通、天气预测等时序预测任务中，Transformer 同样有着优于 LSTM 和 RNN 的表现，尤其是包含双向时空适应（空间自适应和时间自适应）结构的 Transformer[7-8]。

在交通流量预测问题中，现有方法多侧重于时空依赖建模，但忽略了交通预测问题的两个内在特性。不同预测任务的复杂性在不同的空间（如郊区与市中心）和时间（如高峰时段与非高峰时段）上分布不均匀。其次，对过去交通状况的回忆有利于对未来交通状况的预测。基于以上两个特性，一个双向时空自适应 Transformer（Bi-STAT）可以用于准确的交通流预测。Bi-STAT 采用编码器-解码器框架，其中均含有一个空间自适应和时间自适应的 Transformer 结构。受第一个性质的启发，每个 Transformer 都根据任务的复杂性动态地处理流量流，通过一种新的动态停止模块（DHM）的循环机制来实现这一点。每个 Transformer 使用共享参数进行迭代计算，直到 DHM 发出停止信号。受第二个特性启发，Bi-STAT 使用一个解码器实现现在-过去的学习任务，另一个解码器实现现在-未来的预测任务。学习任务提供补充信息协助预测任务，以便更好地泛化。大量实验证明了 Bi-STAT 每个模块的有效性以及该模型的优越预测性能。

常规情况下，公共交通调度采用有规则定期时刻表的方式进行调度，该方法下会产生一个非线性混合整数模型。2004 年，Alessandro Chierici 等人扩展了此种普遍被采用方法[9]，新方法考虑时间表的质量与交通系统对其他可替代的运输方式吸引的乘客之间的相互影响。在放宽完整性约束后，所得的非线性混合整数模型仍然是非凸的。通过基于外部近似的分支定界算法和利用两个子模型的分解和相互更新的启发式算法来解决它。随着机器学习近十年的飞速发展带动了各行各业对于数据驱动的研究热潮，运筹学也不例外，2020 年 Google 与 Deepmind 提出一种基于深度神经网络提升传统混合整数规划方法的性能[10]。求解整数问题的方法有非常多种。一般情况下，在使用相关数值工具求解中使用范围最广的一种方法是分支界定法。这一种方法通过不断求解连续的表示为凸函数的约束得到可行的解。然而，随着整数变量维度的增加，需要求解的松弛问题数量呈指数倍数增长，这在理论上是非常耗时的。为了减少求解的时间，会要求约束中不能含有过多的松弛问题。为了实现这一效果，许多方法会被使用到。很多情况下模型的约束复杂度较高。为了实现以上的目标所需要从模型中提取的信息往往由于模型的复杂度而无法轻易获得。但是使用深度学习方法通常不需要考虑的模型的复杂度如何。从软件工程的角度来看，深度学习方法通过计算提供给我们的是一个黑盒模型，这意味着，如果我们使用这种方法，就不要求我们对模型内部的结构十分了解。在常规求解方法

中，求解 MLP 模型中涉及到以下常用的启发式方法。其中两种就是下潜（Diving）搜索和分支（Branching）选取，使用神经网络求解这一思路可以对这一类的特定问题求解进行加速。

在求解需求为动态的一类运输问题时，常使用动态规划的方法来切结列车调度问题。2020年，Renming Liu 等,针对一类时间依赖需求的地铁列车节能调度问题，提出了列车交通模型[11]，包含列车车头时距、列车载客量和地铁沿线能耗演化的动态方程，制定了非线性动态规划（DP）问题以生成近似最优时间表，进而实现列车利用率、乘客等待时间、服务水平和能源消耗之间的协调。为了克服维度灾难问题，构建了一个近似动态规划（ADP）框架，引入了状态、策略、状态转换和奖励函数的概念。通过数值实验验证了所提模型和算法的有效性，并与遗传算法和差分进化算法进行了比较，该算法能够在较短的时间内收敛到一个较好的解。Pengli Mo 等人的研究[12]针对城市轨道交通线路，结合动态客流需求特征，分析列车运行图与列车运用计划的内在联系，建立列车运行图与车底运用计划协同节能优化模型；该模型通过提高牵引-制动重叠时间和线上折返次数，以实现城轨运营中列车运行图与车底运用计划的协同优化, 基于北京地铁亦庄线的运行数据验证了将运行图和车底运用计划分开考虑可能会导致车底的不充分利用和接续方案的不合理，而协同优化的结果有效提升线上转向接续方式的使用率，实现了再生能的高效利用。该协同优化方法能够在保证乘客服务水平和方案可实施性的前提下生成具有更低运行成本的节能优化方案，更好地实现再生能利用和车底周转连续性之间的平衡，从而实现平峰期城轨系统的高效运行和节能减排的目标。

近年来，为缓解客流过饱和所带来的不利影响，运营商采取了大量措施。一方面，运营商投入了大量的资金，这些资金被用于基础设施的建设，期望这些建设可以达到缩短发车间隔的目的。更短的发车间隔可以让更多的乘客在高峰时刻获得便利的服务。然而，在一些大型城市中，由于城市的发展程度较高，运营商对于基础设施的投资获得的收益与乘客的需求上涨速度无法匹配。这进一步加剧了过度饱和的问题。实际上，在这些城市的高峰时段，发车间隔已经非常短，几乎没有空间通过增加车辆容量来缓解过度饱和的情况。在实践中，运行效率不仅由列车时刻表决定，还受到客流装载方案（如不同 OD 对的容量分配决策[9]）的影响。2023年，Jinpeng Liang 等人设计了一种在线客流控制策略[13]，对每个 OD（始发地-目的地）对的客流进行管理，使研究区间内的乘客总等待时间最小化。假设 OD 需求信息随时间顺序显示，将在线客流控制问题描述为随机动态规划（DP)。设计一种有效的在线自适应策略来指导各个阶段的实时客流控制决策。结果表明，与先到先服务 (FCFS) 策略相比，该方法可以显著减少乘客的预期总等待时间，并缓解地铁车站的拥堵，利用列车容量的可重复使用特性，在高峰时段运送更多的乘客。为了以最小化乘客站台等待时间为目标，Jiawei Yuan 等人建立了混合整数非线性规划模型，并设计了一种新颖的混合遗传算法[14]。在许多大城市的轨道交通线路中，高峰时段的客流需求往往呈现过度拥挤和分布不均衡等特点。为了应对这一问题，针对只有一个方向但是有上下双向的轨道交通线路，研究设计了一种新颖的混合遗传算法，可以更有效地解决模型中的约束条件。通过使用北京地铁 6 号线的历史数据，验证了该方法的有效性。

公交设施选址也是一项复杂的工程，王晓辉的研究[15]以沈阳市浑南新区为背景，在考虑成本因素后，基于模糊软集理论的方法，分析了关键指标确定最佳选址。在动态流量下，同时还需考虑设施的弹性，风险事件（如自然灾害、人为破坏等）会导致道路交通系统服务水平下降，良好的计划可以将期间的后续影响降到最低。关键基础设施 (Critical Infrastructure，CI) 的弹性对于整个社会抵御、响应风险事件并从中快速恢复至关重要。系统弹性（也称韧性）需要从多个维度、采用复合指标进行度量，而恢复力可视为评价系统韧性的维度之一。2020 年 Tingting Zhao 和 Yu Zhang 的研究[16] 重点研究了交通运输系统恢复力的评价和优化问题，并将其建模为双层双目标优化问题。采用加权和法求解该双目标优化问题的帕累托前沿。该研

究将修复计划中的优化问题建模为双层双目标优化问题，优化目标为最小化总行程时间和系统中未满足的出行需求，提出了该优化问题的有效求解算法，将该方法应用于典型路网，说明了应用该方法解决实际路网中修复计划优化问题的具体过程，同时验证了该方法的有效性，并从目标空间分析的角度进一步对该双目标优化问题的实证结果进行了阐释。在该研究中，上层优化问题的目标是通过确定需要优先修复的路段和相应的通行能力恢复等级来最小化总行程时间和系统中未满足的出行需求。下层基于弹性用户均衡问题对居民的出行行为进行建模，以实现对事件发生后交通系统供给侧退化的通行能力和需求侧已经基本恢复正常的出行需求之间的供需不平衡问题的模型化表达和量化分析。现实中常需要综合运用枢纽选址、随机规划等基础理论，Haifeng Zhang 等人的研究[17]针对面向多模式的枢纽选址和网络设计问题，分别在不确定需求和不确定运输成本情形下，建立集成优化方法对多模式货物运输系统中的枢纽与枢纽弧选址、运输模式选择以及运输路径分配进行综合研究。随机需求模型本质上等价于一个确定性期望值问题。最后，利用 TR 数据集对随机规划模型和基于抽样平均近似技术的 Benders 分解算法进行检验，并通过比较分析来探讨随机解的价值。研究结果表明，相较于随机需求模型，多模式枢纽网络拓扑结构对于随机运输成本更为敏感。与确定模型相比，随机模型能够有效应对运输成本不确定性带来的影响，并降低枢纽网络的总成本。

1.3　本文研究内容

1、了解在运筹学在交通优化中的应用的国内外研究现状，其中着重了解乘客出行模式分析和基于运筹优化的公交调度方法。深入学习基于 Python 的建模软件包 Pyomo、数值求解器 Gurobi、离散系统模拟包 Simpy 的具体使用方法，以支撑后续实验研究过程。

2、深入研究 VPS 问题的原理，从不同角度对公交优化问题进行建模。深入研究 MIP（混合整数模型）和 DP（动态规划）问题的基本原理和解法，了解规划问题中的弹性分析，了解基本的博弈论算法。结合 Pyomo 包，研究如何对公交调度问题进行建模以及求出所得问题的数值解。

3、调查现有运行方案下，车站客流的分布情况。车辆的运行情况，包括站点间运行时间，乘客主要 OD（起始-终点）对，车辆空车率等。

4、使用可视化方法更直观、形象的展示不同方案的优劣，通过不同指标进行分析，给出优化改进方案。

1.4　论文组织结构

本文将分为五章来研究交通流量模型建立的相关内容，具体如下：

第一章将介绍研究背景、研究意义、国内外研究现状、主要研究内容和结构，并梳理相关研究的发展历程。最后，引出本文的主要研究内容。

第二章将介绍研究中需要使用的运筹优化法、公交选址、班次调度的不同优化算法，并介绍常用数值求解软件和交通模拟软件。

第三章将通过对统计数据的分析和离散系统模拟的建立来模拟离散客流，同时使用数值模拟软件建立交通模型。

第四章将根据前文分析结果建立数学模型，从成本、效益、乘客舒适度等多个角度出发进行数值仿真模拟，对比不同优化结果的有效性。

第五章将总结本文的工作，并展望未来的研究方向。

2 研究相关理论

2.1 排队论

排队论是一门应用数学领域的学科，主要研究随机到达、处理和服务的问题。排队论可用于研究各种排队系统，例如超市、银行、工厂生产线等。排队论最早起源于 20 世纪初的电话系统，现已广泛应用于网络、运输、供应链管理等各个领域。排队论主要包括三个基本元素：到达过程、服务过程和队列。到达过程是指顾客到达的时间分布；服务过程是指服务时间的分布；队列则是指排队的等待区域。排队论主要关注的是如何通过调整服务设施的数量、服务能力、排队策略等来优化系统性能，从而实现效率最大化、等待时间最小化等目标。排队论具有很强的实用性，可以帮助企业和组织优化服务流程，提高客户满意度。例如，在银行排队时，排队论可以帮助银行管理者确定柜员数量、窗口开放时间等，从而提高服务效率和客户满意度。排队论还可以用于优化生产线、交通运输系统、网络等各个领域，以提高系统性能。因此，管理人员必须考虑如何在这两者之间取得平衡，经常检查目前处理是否得当，研究今后改进对策，以期提高服务质量，降低成本[18-19]。

M/M/1 排队模型是排队论中的一种简单模型，用于描述一个单一服务通道、无限容量的队列系统。M 表示顾客到达服从泊松分布，即顾客到达服从平均到达率为 λ 的指数分布；M 表示服务时间服从平均服务率为 μ 的指数分布；1 表示只有一个服务通道。这个模型可以用于分析单个服务人员在单位时间内完成多少工作，以及顾客在系统中等待的时间。在这个模型中，每个顾客的到达和服务时间是相互独立的。当一个顾客到达并发现服务台忙时，他会排在队列的末尾等待服务。顾客在队列中等待的时间是随机的，平均等待时间为 Wq=ρ/(μ-λ)，其中 ρ 是系统繁忙率，即平均到达率 λ 除以平均服务率 μ。整个系统的响应时间包括等待时间和服务时间，平均响应时间为 W=Wq+1/μ。这个模型可以用于对不同场景下的队列系统进行分析和优化。例如，在服务速率和到达率相等的情况下，队列将无限制地增长，这可能会导致服务时间和等待时间都无限增加，因此需要增加服务能力或降低到达率。已知 $M/M/1$ 模型中到达规律服从参数为 λ 的泊松分布，服务时间服从参数为 μ 的负指数分布。假设系统中有 n 个顾客，在 t 时刻状态为 n 的概率为 $P_n(t)$，则系统的状态方程可以表示为：

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ \lambda p_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda+\mu)P_n = 0 \qquad n \geq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

公式 2.1 表示关于 P_n 的差分方程，该方程描述了系统状态之间的转移关系，如图 2.1 所示。

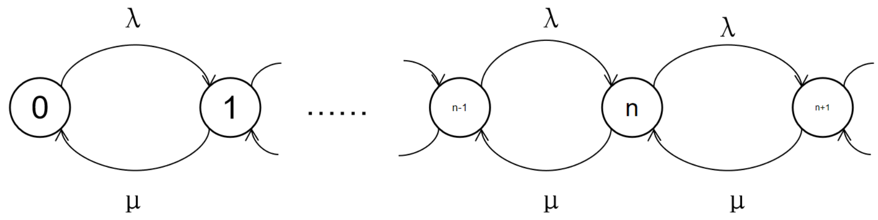


图 2.1 M/M/1 模型状态转移示意图

要解决排队问题，首先需要收集原始数据，以获得顾客到达间隔和服务时间的经验分布。然后可以使用统计学方法（例如 χ^2 检验）确定哪种理论分布最适合数据，并估计其参数值。

常用的分布函数包括泊松分布、负指数分布和爱尔郎分布。

2.2 运输问题

经济建设中经常需要解决物资调运问题，即在多个生产基地和消费地点之间制定调运方案，以最小化总运费。假设有 m 个生产地点 A_i，$i = 1, 2, \ldots, m$，每个地点的产量为 a_i；有 n 个销地 B_j，$j = 1, 2, \ldots, n$，每个地点的需求量为 b_j；从 A_i 到 B_j 运输单位物资的运价为 c_{ij}。我们用 x_{ij} 表示从 A_i 到 B_j 的运量。在产销平衡的条件下，可以通过求解以下数学模型来得到总运费最小的调运方案：

$$\begin{aligned}
&\min z = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \\
&\begin{cases}
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\
x_{ij} \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

式 2.2 描述了一个产销平衡的运输问题，包含 $m \times n$ 个变量和 $m + n$ 个约束方程。但是，由于存在一些关系式，如：

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \right) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

这些关系式使得模型的独立约束方程最多只有 $m + n - 1$ 个，从而简化了求解运输问题的计算。因此，通常可以采用表上作业法来解决这类问题。

2.3 线性规划

生产管理和经营活动中常提出如何合理利用有限资源以达到最佳经济效益的问题，这类问题的解决引出了线性规划。线性规划问题的形式各异，因此需要将各种数学模型转换为标准形式。规定的标准型式为:

$$\begin{aligned}
&\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\
x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n
\end{cases}
\end{aligned}$$

在实际数值计算中，更常用的是线性规划的矩阵形式：

$$\begin{aligned}
&maxz = CX \\
&AX = b \\
&X \geq 0
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \dots, P_n)\,; 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A——约束条件的 $x \times n$ 维系数矩阵，一般 $m < n$;

b——资源向量;

C——价值向量

X——决策变量向量。

2.4 整数规划

在线性规划中，有时最优解可能是分数或小数，但有些问题要求解必须是整数，例如机器台数、工人人数或车辆数等。为了得到可行的整数最优解，需要研究整数规划。整数规划是最近几十年中发展起来的规划论分支，其中，所有变量都限制为整数的问题被称为纯整数规划或全整数规划，而仅有一部分变量限制为整数的问题则称为混合整数计划。整数规划的应用广泛，可用于生产、管理、科学研究等各个领域。

2.5 线性目标规划

在实际情况下会产生多目标问题，如在运输问题中，可能同时需要尽量减少运输成本，减少稀缺资源的消耗，减少运输时间。目标规划是解决存在多个目标的最优化问题的方法，它把多目标决策问题转化为线性规划问题来求解[20]。

2.6 VSP 问题

车辆调度问题（VSP）是一项由 Dantzig 和 Ramser 于 1959 年提出的挑战性问题，虽然经过多年的研究，但由于其复杂性较高，至今仍未找到多项式时间算法，因此目前的研究主要集中于高质量的启发式算法。启发式算法是一种解决问题的策略和方法，建立在人们的经验和判断基础上，反映了人的主观能动作用和创造力。

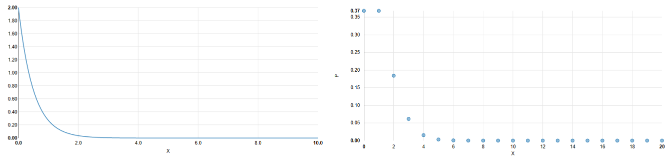
通常情况下，VSP 问题的常规形式是指：在满足各种约束条件（如货物需求量与发送量、交发货时间、车辆容量限制、行驶里程限制、行驶时间限制等）的情况下，有序地组织车辆行驶路线，以实现某些目标（如最小化空驶里程、最小化运输费用、确保车辆按时到达、尽可能减少使用车辆数量等）。根据不同的约束条件和目标，VSP 问题可被分类为满载问题和非满载问题、单车场问题和多车场问题、单车型问题和多车型问题、单目标问题和多目标问题等。

3 算法设计与分析

3.1 单服务台负指数分布排队系统建模

在一个由 k 个串行车站组成的排队系统中，每个车站的服务时间相互独立，服从参数为 $k\mu$ 的负指数分布，而整个系统的服务时间则服从 k 阶爱尔朗分布。与指数分布相比，爱尔朗分布族具有更大的适应性。值得注意的是，当 k=1 时，爱尔朗分布化为负指数分布，并可进一步推导出对于单个车站而言，到达人数近似服从泊松分布，由于泊松分布的无记忆性[21]，因

此更适用于描述排队系统。



(a) k=1 的爱尔郎分布　　(b) 泊松分布

图 3.1 两种分布对比图

前文给出了单服务台负指数分布排队系统（M/M/1/ ∞ / ∞）的基本方程 2.1 和状态图 2.1，由图图 2.1 可知，状态 0 转移到状态 1 的转移率为 λP_0，状态 1 转移到状态 0 的转移率为 μP_1。由排队系统生灭状态的平衡性质可知，对于状态 0 必须满足如下方程：

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

对于任意的 $n \geq 1$ 的状态，都可以得到式 2.1 中的方程，求解 2.1 得：

$$P_1 = (\lambda/\mu) P_0$$

易证：

$$P_2 = (\lambda/\mu)^2 \, P_0$$

$$\cdots\cdots$$

$$P_n = (\lambda/\mu)^n \, P_0$$

令 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$，由概率的性质

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

可以得到站台中乘客数为 n 的概率

$$P_n = (1-\rho)\rho^n, n \leq 1, \rho < 1$$

其中 ρ 代表系统的平均服务率，它刻画了服务机构的繁忙程度；所以又称服务机构的利用率。

由此可以得到一个平均到达率为 λ，平均服务率 μ 的排队系统的几个主要指标：

（1）乘客到达后不能及时得到服务需要等待的概率（系统服务强度）:

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.1}$$

（2）系统空闲的概率：

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.2}$$

（3）系统中平均乘客长度（队长的期望值）

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \tag{3.3}$$

（4）在队列中等待的平均顾客数（队列长期望值）

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda} \tag{3.4}$$

（5）在系统中顾客逗留时间的期望值

$$W_s = E[W] = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{3.5}$$

（6）队列中顾客等待时间的期望值

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \tag{3.6}$$

使用一个 Python 类描述系统提供的服务，代码如下：

```
class System(object):
    def __init__(self, env, numService, miuService_):
        self.env = env
        self.service = simpy.Resource(env, numService)
        self.miuService = miuService_

    def beingServed(self):
        yield self.env.timeout(random.expovariate(self.miuService))
```

通过上述指标对车站客流进行模拟，核心实现代码如下：

```
def runSys(env, numService, miuService):
    sys = System(env, numService, miuService)
    global initLen, customerList
    moviegoer = initLen
    for moviegoer in range(initLen):
        customerList.append(Customer(moviegoer, env.now, initLen, 0))
        env.process(inoutQueue(env, moviegoer, sys))
    global queueLen
    queueLen = initLen
    while True:
        reachInterval_ = random.expovariate(lambdaReachInterval)
        yield env.timeout(reachInterval_)
        if systemCapacity == None or queueLen <= systemCapacity:
            moviegoer += 1
            queueLen += 1
            customerList.append(Customer(moviegoer, env.now, queueLen, reachInterval_))
            env.process(inoutQueue(env, moviegoer, sys))
```

3.2 公交调度问题建模

考虑单车型、多停车点、满载运输问题的一种启发式算法，并考虑使总空驶里程极小为目标约束（对公交运营商的运输效益有极大影响）。

考虑一项货运业务，其发点为 i'，收点为 i''。假定有 n 个可用的车站，分别为 $A_{m+1},...,A_{m+n}$，可以发出和接收空车。每个车站可派出的空车数为 b_j，可接收的空车数为 b'_j。该业务的货物量为 g_i，需要 a_i 辆空车运输。为使总空驶里程最小化，我们将该业务视为一个点，称为收缩点或重载点 i。可以用网络中任意两点间的最短路径确定行车路线。空车调度问题的目标是使总空驶里程最小化，该问题可描述如下：

$$\mathrm{T}:\begin{cases}\min z=\sum_{i=1}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n}a_jx_{ij}\\ \sum_{j=1}^{m+n}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{j=1}^{m+n}x_{ij}\leqslant b,\quad i=m+1,m+2,\cdots,m+n\\ \sum_{i=1}^{m+n}x_{ij}=a_j,\quad j=1,2,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m+n}x_{ij}\leqslant b_j,\quad j=m+1,m+2,\cdots,m+n\\ x_{ij}\geqslant 0\text{ 且为整数}\end{cases}$$

添加一个约束，这个约束的目标为使在车站的乘客等待时间最小。在此基础上给出一个整数规划模型，这个模型给出具有线性约束。这些约束联合同步每个车站的有效乘客装载时间窗口和车辆到达和离开时间。以精确地制定来自不同 O-D 对的分钟依赖需求和小时依赖需求量下的总等待时间。

考虑如何在路线的一个方向上设计需求响应时刻表，其中车站按顺序编号为 1；2; ...; S，车辆服务从第一站移动到最后一站，如图 3.2 。

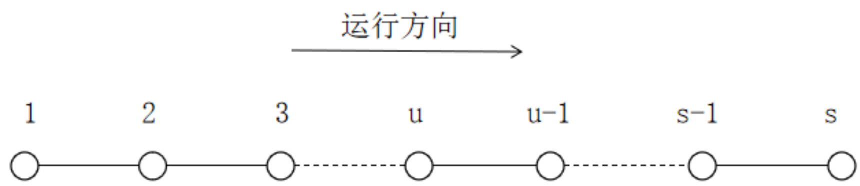


图 3.2 运行示意图

校园内公交线路共有 10 个车站，工作日每天有两个运行方向。通过统计上下车的乘客数量，可以得到它们服从的分布函数。假设该线路上运行的所有车辆都有相同的运力，标准载客量为 22 人。该线路的平均速度为 15 公里/小时。为了保证成本效益和用户体验，有以下约束条件：一般情况下，乘客在车站等待的时间不应该大于十分钟；同时给出一个硬性约束车辆荷载人数不能超过 22 人。同时为了节约公交的运营成本，车辆的运营时期车上的空座位数量应该尽量不大于一半。

算法中出现的参数描述和相关计算公式如下：

表 3.1 参数表

参数	参数含义
j=1，2，……，n	车站标志
$P_j(t) \sim \frac{\lambda^t}{t!}e^{-\lambda}, j=1,2,...,n$	客流密度（t 时刻到达 j 车站的乘客密度）
$\tau_j, j=1,2,...,n$	车站间行车时间（从 j 到 j+1 站的行车时间）
$d_j j$	第 j 站的下车人数
B	载客容量
$\hat{B}$	容量上限
$\widehat{t}$	高峰期乘客等待时间上限
$\hat{t}$	平峰时段乘客等待时间上限
$t=(T_0,T_1,T_2,...,T_k,...,T_m)$	决策变量（发车时刻表）
$T_{k1}=T_k, T_{kj}=T_{k1}+\sum_{\ell=1}^{j-1}, j=1,2,3,...,n-1$	第 k 班次驶离 j 站的时刻
$D_k(T_{kj})$	第 k 辆车驶离 j 站时该车上的乘客数

（1）第 k 辆车到达 j 站后，车上剩余乘客数:

$$a_{kj}=max(D_k(T_{kj-1})-\int_{T_{k-1}}^{T_{kj}} d_j(t)dt),0;$$

（2）第 k 辆车驶到 j 站后可容纳的上车乘客数上界:

$$b_{kj}=\hat{b}-a_{kj};$$

（3）第 k - 1 辆车驶离 j 站到第 k 辆车驶到 j 站时段内，到达的乘客数量：

$$W_{kj}(0)=\int_{T_{kj}}^{K_{k-1}} P_j(t)dt;$$

求出可行解 $T=(T_0,T_1,t_2,...T_k,...,T_m)$ 符合目标函数：

$$minC=W_1(T)d_1+W_2(T)d_2+low(T)d_3$$

在每个车站按 FIFO（先来先服务）原则提供服务，在第 k+1 号车到达 j 个站台时，需要的车辆最大值 h_{kj}^* 符合如下规划问题：

$$\max_{0\le h\le h_{kj}} h$$

$$\sum_{r=h}^{h_{kj}} W_{kj}(r)\le b_{kj}$$

使用 GurboiPy 建立该问题的模型，核心代码如下：

```
class MyModel():
def __init__(self):
    self.model = gp.Model()
    self.m = 3
    self.n = 4
    for i in range(self.m):
        for j in range(self.n):
```

```
            self . cij [( i ,  j )]  =  self . table_value [ i ][ j ][0]
            self . dij [( i ,  j )]  =  self . table_value [ i ][ j ][1]

def  define_decision_var ( self ):
    self . xij  = gp. tupledict ()
    for  i  in  range( self . m):
        for  j  in  range( self . n):
            self . xij [ i , j ]  =  self . model.addVar(vtype=gp.GRB.INTEGER)

def  add_basic_cos( self ):
    for  i  in  range( self . m):
        cos1  = 0
        for  j  in  range( self . n):
            cos1  +=  self . xij [ i ,  j ]
        self . model.addConstr(cos1  ==  self . a[ i ])
    for  j  in  range( self . n):
        cos2  = 0
        for  i  in  range( self . m):
            cos2  +=  self . xij [ i ,  j ]
        self . model.addConstr(cos2==  self . b[ j ])

def  add_new_cos(self,   cos_left ,   cos_right ):
    self . model.addConstr( cos_left   ==  cos_right )
```

该算法计算框图如图 3.3

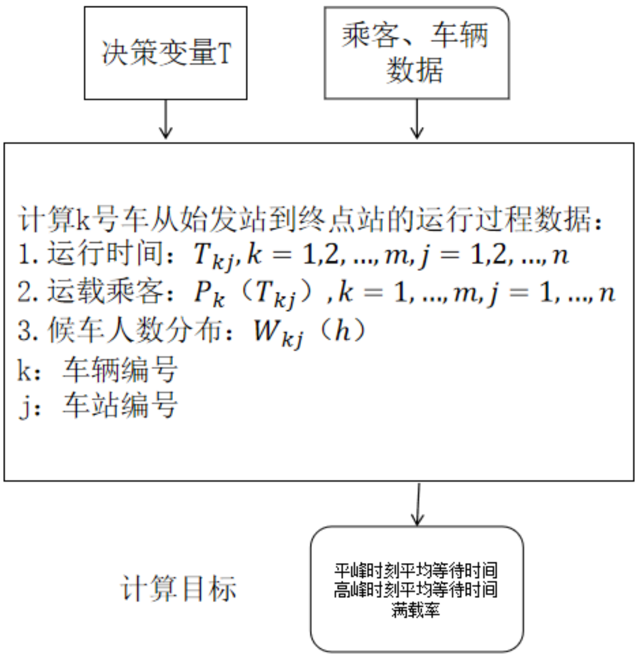


图 3.3 算法计算框图

4 试验和结果

4.1 实验环境

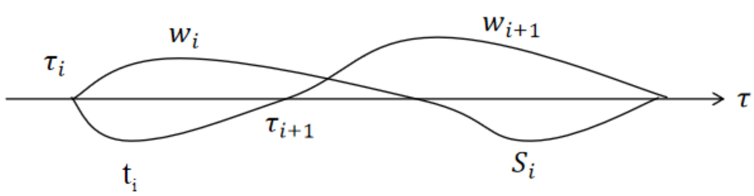
本文实验的训练和测试均搭建于 Linux 操作系统，版本为 Ubuntu20.06 LTS。使用的处理器为 Intel CORE I7，开发工具为 Ananconda3、python3.8、Pycharm。模型的开发基于 Simpy 4.0.1、Pyomo 6.5.0、gurobipy 10.0 框架。

4.2 数据准备

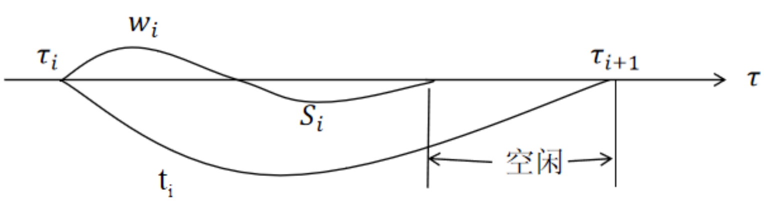
解决排队问题首先要根据原始资料作出乘客到达间隔和服务时间的经验分布，根据以往经验，校园公交车站客流呈周期性变化，选择文德楼北上行线车站实地统计，该车站位于校门、宿舍楼、主教学楼连接处的枢纽位置，客流量较有代表性，采样地点如图 4.1 。

图 4.1 采样地点

原始数据记载乘客到达时刻和对应的等待时间，以 τ_i 表示第 i 个乘客到达的时刻，以 s 表示等待时间可以得出相继到达时间 $t_i\,(t_i=\tau_{i+1}-\tau_i)$ 和等待时间 w_i，它们的关系如图 4.2 。



(a) $w_i+s_i-t_i>0$



(b) $w_i+s_i-t_i<0$

图 4.2 相继到达的间隔时间和排队等待时间关系示意图

由图 4.2 可以得到如下关系：

间隔 $t_i = \tau_{i+1} - \tau_i$

等待时间 $$w_{i+1} = \begin{cases} w_i + s_i - t_i, & w_i + s_i - t_i > 0 \\ 0, & w_i + s_i - t_i < 0 \end{cases}$$

由图 4.2 可以得到如下关系：

间隔 $t_i = \tau_{i+1} - \tau_i$

等待时间 $$w_{i+1} = \begin{cases} w_i + s_i - t_i, & w_i + s_i - t_i > 0 \\ 0, & w_i + s_i - t_i < 0 \end{cases}$$

以大约两节课的时间（两小时）为一个周期，5 分钟为间隔进行采样，将所统计的一个周期内的客流数据经以上关系整理后所得结果如表 4.1 所示。

表 4.1 车站乘客到达人数分布表

时间段	到达人数	时间段	到达人数
14:00～14:05	18	15:00～15:05	5
14:06～14:10	7	15:06～15:10	2
14:11～14:15	4	15:11～15:15	3
14:16～14:20	8	15:16～15:20	6
14:21～14:25	1	15:21～15:25	5
14:26～14:30	5	15:26～15:30	67
14:31～14:35	1	15:31～15:35	8
14:36～14:40	3	15:36～15:40	12
14:41～14:45	5	15:41～15:45	8
14:46～14:50	6	15:46～15:50	3
14:51～14:55	2	15:51～15:55	4
14:56～15:00	2	15:56～16:00	2

统计同时段内车辆到达时间，可以估算出乘客的平均等待时间，如表 4.2 所示。

表 4.2 车站平均等待时间表

等待时间（分钟）	频次
0	23
1	31
2	27
3	25
4	33
5	19
6	22
7	19
8	8
>10	0

4.3 评价指标

使用 Gurobi 对该算法进行多次迭代计算所得结果如图 4.3

在迭代到一定程度后该算法不再收敛。选择一个可行解，以平均队列长度为评价指标与原有方法比较。

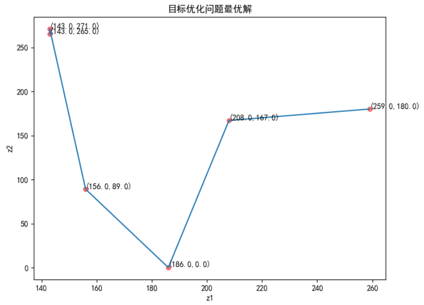


图 4.3 求解过程迭代图

4.4 实验与分析

由统计结果可以得到公交站这一排队系统的几个特征：

平均到达率：

$$\lambda \approx 1.56$$

平均等待时间:4.30(min)

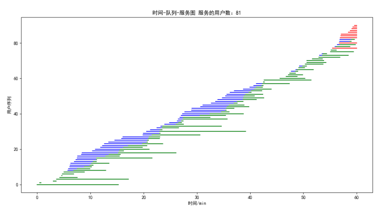
平均服务率：

$$\mu = 1/4.30 \approx 0.23$$

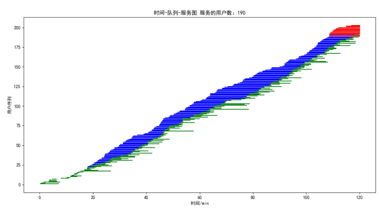
系统的服务强度：

$$\rho = 6.67$$

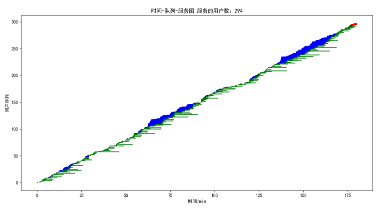
因为服务强度远远大于 1，说明系统的服务能力不足以应对到达率，系统会出现排队现象，排队长度可能会不断增加。如果希望系统稳定运行，需要增加服务能力或降低到达率。通过实际分析，系统在高峰时期更容易产生阻塞，可以在高峰时期采用大小区间的方案解决这一问题。分别取 t=60、120、180、240 进行模拟，可以得到原始方案中用户到达服务图：



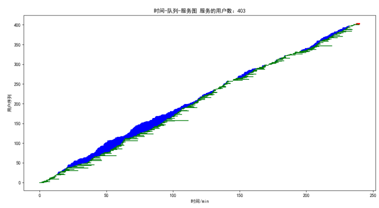
(a) t=60



(b) t=120



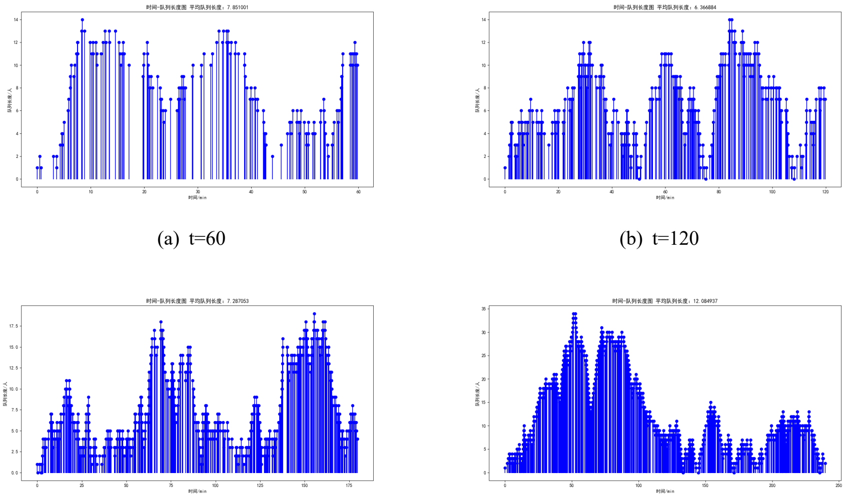
(c) t=180



(d) t=240

图 4.4 系统时间-队列-服务图

系统的时间-队列长度图：

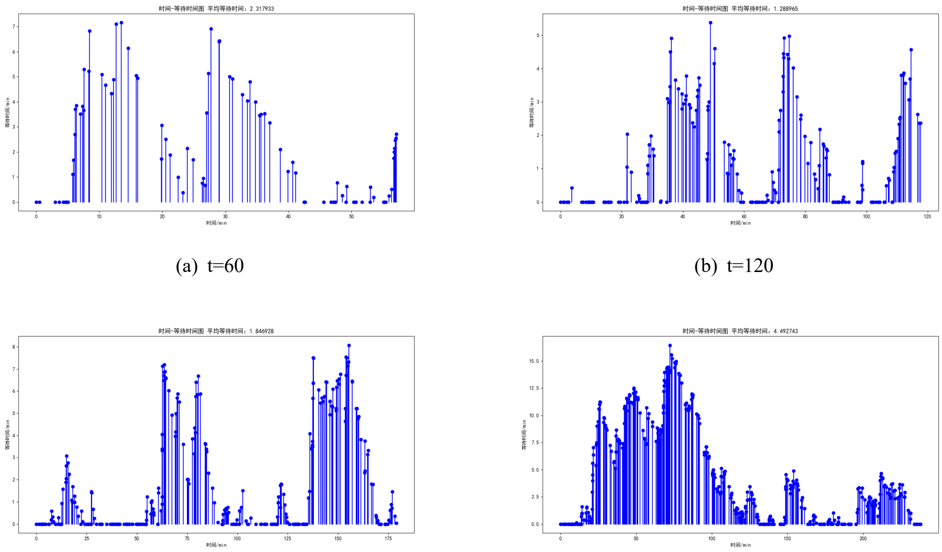


(a) t=60　　(b) t=120

(c) t=180　　(d) t=240

图 4.5 系统时间-队列长度图

系统的时间-等待时间图：



(a) t=60　　(b) t=120

(c) t=180　　(d) t=240

图 4.6 系统时间-等待时间图

选择一个最优解，得到如下运行图。

在该实验中，按照 3.2 中介绍的模型构建方法使用 Gurobi 搭建模型。通过迭代计算，在迭代次数超过 180 后模型开始不收敛。在不考虑大小区间的情况下，所得的可行解可以得到一个较好的方案。

使用表 4.1 中的数据，通过图 4.2 中的关系重新计算指标，使用大小区间方案处理后可以得到：

$$\rho = 0.84$$

对该系统进行模拟结果如下：

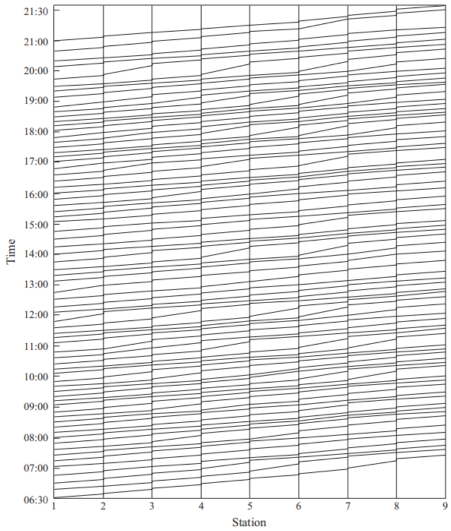
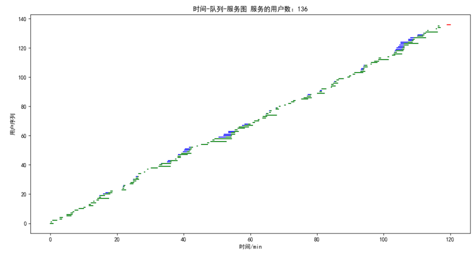
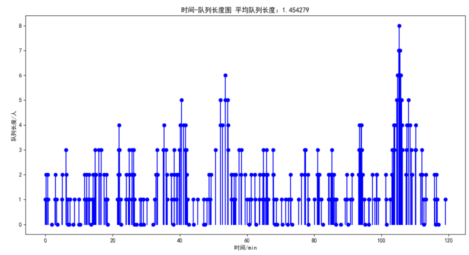


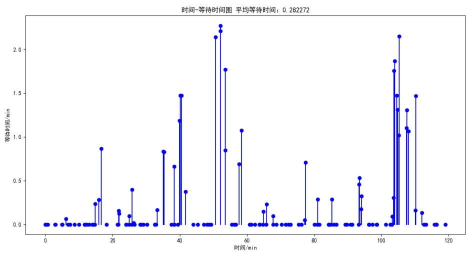
图 4.7 优化后的运行图



(a) 系统时间-队列-服务图



(b) 系统时间-队列长度图



(c) 系统时间-等待时间图

图 4.8 优化后系统的模拟结果

5 总结与展望

本文基于传统的启发式方法，使用一种包含多个约束的目标规划算法，该算法灵感来源于[9,22]，对传统的有规则时刻表计算任务添加多个目标约束，同时由 Gurobi Optimization 公司开发新一代大规模优化器 Gurobi，为该类问题的建模和求解提供了帮助。当实际问题越来越复杂，问题规模越来越庞大的时候，需要一个经过证明可以信赖的大规模优化工具，为决策提供质量保证。基于 3.1 中经典的排队理论，基于真实的统计数据，可以使用离散系统建模包 SimPy 对车站客流进行模拟。本文重点讨论了如何通过计算和调整具有给定时间变化的乘客的时刻表，使乘客在车站的总等待时间最小。建立了一个统一的带有线性约束的二次整数规划模型，来协调每个车站的乘客出发时间。如图 4.4 到图 4.6 的模拟结果，通过平均队列长度、平均等待时间等指标，分析现有系统的缺陷，给出适当的优化方案。通过多次迭代解得出的新的发车表（图 4.7 ）在理论上可以有效提高系统的平均服务强度。

同时本文的优化问题具有一定的普遍性，在大数据时代，机器学习、深度学习技术热火朝天的同时，优化问题再一次进入人们的视野，“十年电气无人问，一朝 ML 人皆知”，这句话可见现有新研究对优化问题的重视。随着 AI 技术的发展，对机器学习底层的最优化理论的重要性已经开始逐渐意识到了。最优化理论是机器学习算法的核心，包括梯度下降、牛顿法、拟牛顿法等一系列优化算法，这些算法的效率和收敛性直接影响到机器学习的性能和应用。理解最优化理论的基本原理和方法，对于开发高效、鲁棒的机器学习算法至关重要。越来越多的人开始关注最优化理论，并且开始进行相关的研究和开发。最优化以蕴含在机器学习内部，作为参数寻优的调整方向。大可以作为独立模型，在机器学习得到的数据模型的基础上做决策模型，比如现在的随机优化已有先拟合分布再建立优化的方向。

本文同样还存在许多的不足，由于数据采集条件有限，对于客流分布的描述仅仅基于少量的统计数据得出，进行计算后给出客流的分布函数，对于乘客出行兴趣、O-D 对等数据没有进行详尽的统计。事实上客流受非常多的因素影响，仅仅用简单的分布函数难以完整的描述出该模式。由于道路网络时变的交通模式和复杂的空间依赖性，交通流预测是一个具有挑战性的时空预测问题。为了克服该挑战，信德烟酒将交通网络看为一张图，提出新的深度学习预测模型，交通图卷积长短时记忆网络（TGC-LSTM）学习交通网络中道路之间的相互作用，并预测网络级的交通状态。近年来的一些研究[23]也表明，传统的 LSTM 网络在对于融合乘客出行兴趣、O-D 对、天气等因素的复杂场景下，对于客流的预测有着不俗的表现。对于更加复杂的场景，融合时空的双向数据下，基于 self-attention 的算法[7] 更是有着优于 LSTM 的表现。现有的交通流预测方法大部分采用基于区域的态势感知图像或基于站点的图像表示去捕捉交通流的空间动态性，而态势感知图像和图形表示的结合同样是精准预测的关键。在对于优化模型的的求解，本文提出的模型在迭代次数超过一定程度后，不具有良好的收敛性。对于大规模数值优化问题的求解，基于深度学习的方法[10]近年来也进入了人们的视野。显然，当前大数据时代，基于数据驱动的机器学习方法是大势所趋，传统优化方法与新技术的结合受到越来越多的重视。期待在有了更加优质的数据的支持下，可以使用新的方法对该问题进行更深入的研究。

参考文献：

[1] 南京市交通运输局. 2022 年一季度南京交通经济运行综合分析报告[EB/OL]. 2022[2022-06-10]. http://jtj.nanjing.gov.cn/njsjtysj/202206/t20220610_3442578.html.

[2] 高德地图. 2022 年度中国主要城市交通分析报告[EB/OL]. 2023[2023-01-18]. https://report.amap.com/share.do?id=a184b07685866c850185c2e9da200007.

[3] 百度地图. 2022 年度中国城市交通报告[EB/OL]. 2023[2023-03-01]. https://jiaotong.baidu.com/cms/reports/traffic/2022/index.html.

[4] Hochreiter S, Schmidhuber J. Long short-term memory[J]. Neural Computation, 1997, 9(8): 1735-1780.

[5] Jiang W, Ma Z, Koutsopoulos H N. Deep learning for short-term origin–destination passenger flow prediction under partial observability in urban railway systems[J]. Neural Computing and Applications, 2022, 34: 4813–4830.

[6] Vaswani A, Shazeer N, Parmar N, et al. Attention is all you need[Z]. 2017. arXiv: 1706.03762.

[7] 高榕, 万以亮, 邵雄凯, 等. 面向改进的时空 Transformer 的交通流量预测模型[EB/OL]. (2021-03-14)[2023-04-12]. http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.20220618.1141.008.html.

[8] Chen C, Liu Y, Chen L, et al. Bidirectional spatial-temporal adaptive transformer for urban traffic flow forecasting [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022: 1-13.

[9] Chierici A, Cordone R, Maja R. The demand-dependent optimization of regular train timetables[J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2004, 17: 99-104.

[10] Nair V, Bartunov S, Gimeno F, et al. Solving mixed integer programs using neural networks[Z]. 2021. arXiv: 2012.13349.

[11] Liu R, Li S, Yang L, et al. Energy-efficient subway train scheduling design with time-dependent demand based on an approximate dynamic programming approach[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(7): 2475-2490.

[12] Mo P, Yang L, D’Ariano A, et al. Energy-efficient train scheduling and rolling stock circulation planning in a metro line: A linear programming approach[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2020, 21(9): 3621-3633.

[13] Liang J, Zang G, Liu H, et al. Reducing passenger waiting time in oversaturated metro lines with passenger flow control policy[J]. Omega, 2023, 117: 0305-0483.

[14] Yuan J, Gao Y, Li S, et al. Integrated optimization of train timetable, rolling stock assignment and short-turning strategy for a metro line[J]. European Journal of Operational Research, 2022, 301(3): 855-874.

[15] 王晓辉. 城市公共交通设施选址方法研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2012.

[16] Zhao T, Zhang Y. Transportation infrastructure restoration optimization considering mobility and accessibility in resilience measures[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2020, 117: 102700.

[17] Zhang H, Yang K, Gao Y, et al. Accelerating benders decomposition for stochastic incomplete multimodal hub location problem in many-to-many transportation and distribution systems[J]. International Journal of Production Economics, 2022, 248: 108493.

[18]《运筹学》教材编写组. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.

[19] 王炜, 过秀成. 交通工程学[M]. 南京: 东南大学出版社, 2011.

[20] 韩伯棠. 管理运筹学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[21] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[22] 谭泽光, 姜启源. 公交车调度问题的数学模型[J]. 工程数学学报, 2002, 19: 99-104.

[23] 高梦琪. 基于机器学习的城市轨道交通客流预测[D]. 北京: 北京交通大学, 2020.

致谢

行文至此，大学的学习生活似乎也将告一段落了。首先，谨向我的指导老师马杰良老师表示衷心的感谢。马老师不仅无私地向我们传授知识，还关心体贴学生，善于因材施教。

感谢所有任课老师，感谢我的辅导员和班主任，感谢他们的谆谆教诲和鼓励帮助。

感谢南信大的全体后勤人员，因为她们的存在学生们才能在多变的环境下安心的学习和生活。

感谢过去几年那个刻苦钻研，遇到困难不退缩的自己，从一个懵懂的高中生成长成一个能独当一面的"coder"

一路花开，何德何能，所遇之人皆携手相助，不偏不倚，与君相识，三生有幸。虽陨首结草不能报之万一，借文聊表谢忱!