04-E

栈与队列

栈混洗

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

Stack Permutation

❖ 考查栈 $\mathcal{A} = \langle\, a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n \,]$

$\mathcal{B} = \mathcal{S} = \varnothing$

❖ 只允许

- 将$\boxed{\text{A}}$的顶元素弹出并压入$\boxed{\text{S}}$，或
- 将$\boxed{\text{S}}$的顶元素弹出并压入$\boxed{\text{B}}$

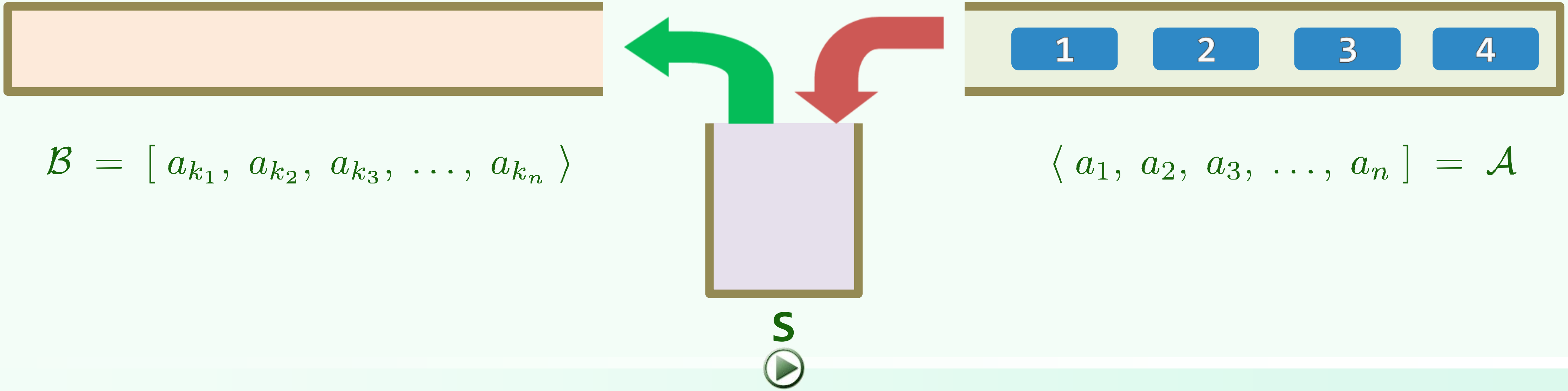
❖ 亦即 $\mathcal{S}.\text{push}(\mathcal{A}.\text{pop}())$

$\mathcal{B}.\text{push}(\mathcal{S}.\text{pop}())$

❖ 若经一系列以上操作后，A中元素全部转入B中

$\mathcal{B} = [\, a_{k_1},\ a_{k_2},\ a_{k_3},\ \ldots,\ a_{k_n} \,\rangle$

则称为A的一个**栈混洗**



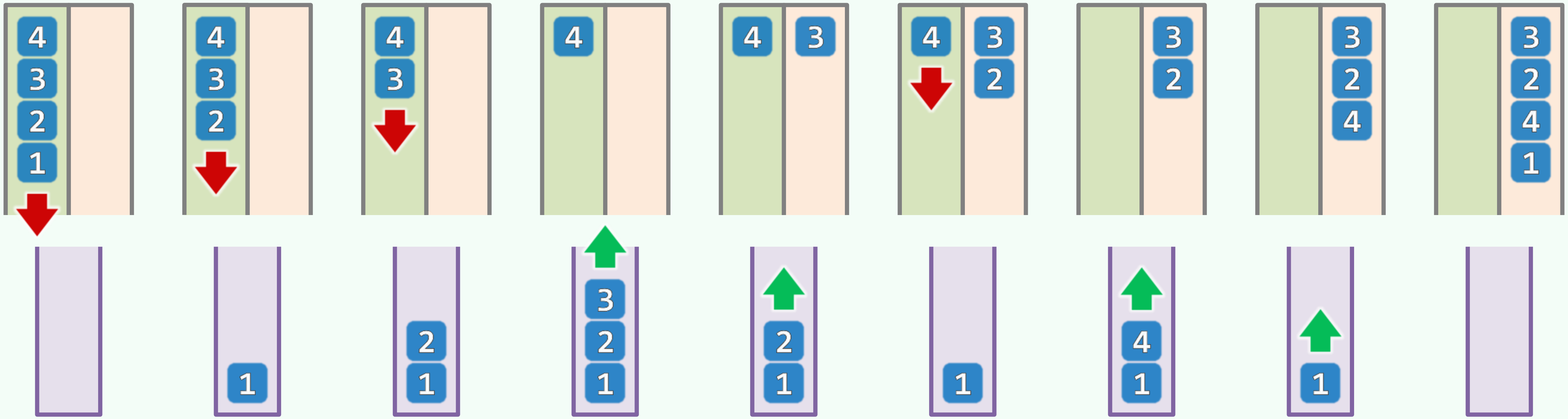
$\mathcal{B} = [\, a_{k_1},\ a_{k_2},\ a_{k_3},\ \ldots,\ a_{k_n} \,\rangle$

$\langle\, a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n \,] = \mathcal{A}$

计数：SP(n)

❖ 同一输入序列，可有多种栈混洗：[1, 2, 3, 4 >，[4, 3, 2, 1 >，[3, 2, 4, 1 > ...

❖ 一般地，对于长度为n的序列，混洗总数SP(n) = ?



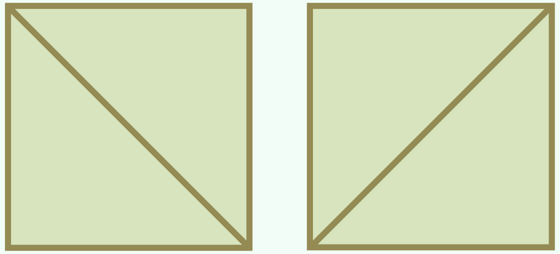
❖ 显然，SP(n) <= n!；更准确地呢？

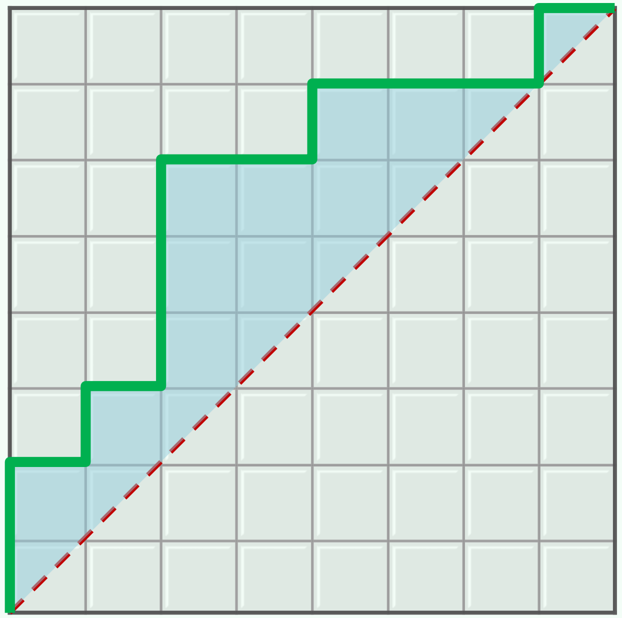
计数：catalan(n)

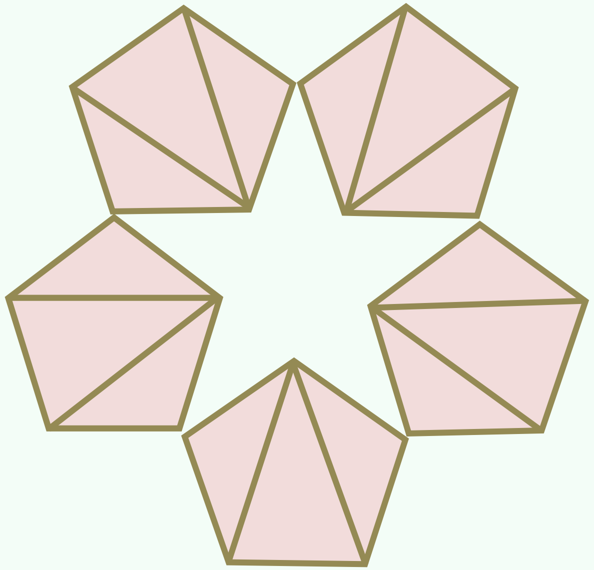
- $SP(1) = 1$
- 考查S再度变空（A首元素从S中弹出）的时刻，无非n种情况：

$$SP(n) = \sum_{k=1}^{n} SP(k-1) \cdot SP(n-k)$$

$$= catalan(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$







$SP(2) = 4!/3!/2! = 2$

$SP(3) = 6!/4!/3! = 5$

$\dots \qquad \dots \qquad \dots$

$SP(6) = 12!/7!/6! = 132$

计数：catalan(n)

❖ $SP(1) = 1$

❖ 考查S再度变空（A首元素从S中弹出）的时刻，无非n种情况：

$$SP(n) = \sum_{k=1}^{n} SP(k-1) \cdot SP(n-k)$$

$$= catalan(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

$SP(2) = 4!/3!/2! = 2$

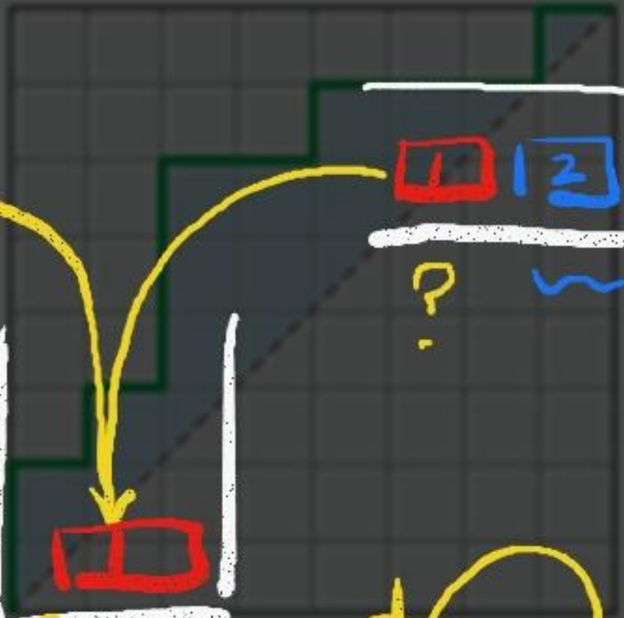
$SP(3) = 6!/4!/3! = 5$

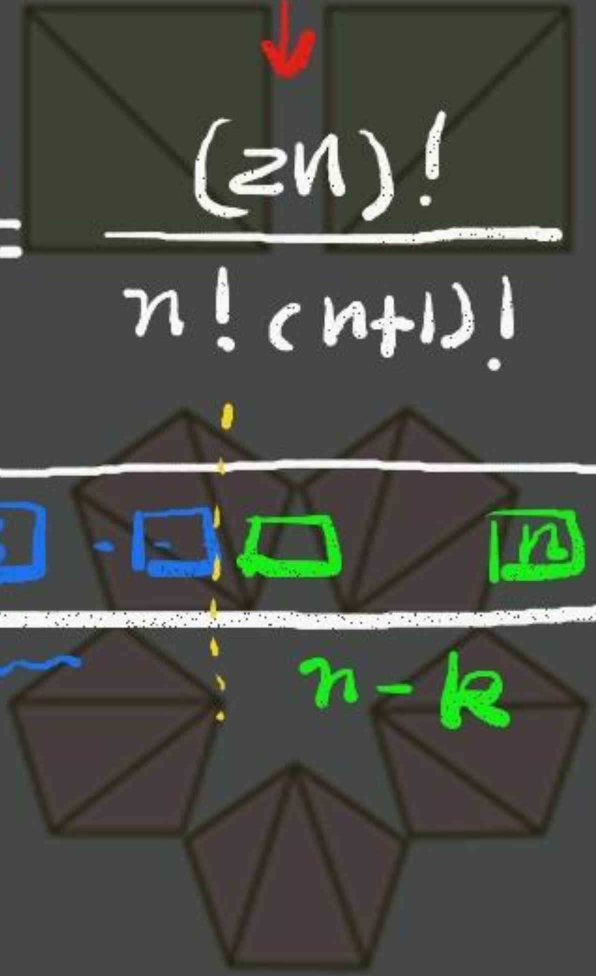
… … …

$SP(6) = 12!/7!/6! = 132$

$$Sp(n) = \sum_{k=1}^{n} Sp(k-1) \cdot Sp(n-k)$$

$$= catalan(n) \doteq \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$$





$k-1$

B $\boxed{1}\ \boxed{\ }\ \cdots\ \boxed{\ }\ \boxed{1}\ \boxed{\quad}$

A $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \cdots\ \boxed{\ }\ \boxed{\quad}\ \boxed{n}$

?

$n-k$

B.size() → k

? S → $\emptyset$

甄别：检测禁形

❖ 输入序列< 1, 2, 3, ..., n]的任一排列[p_1, p_2, p_3, ..., p_n >是否为栈混洗？

❖ 先考查简单情况：n = 3，A = < 1, 2, 3]

- 栈混洗共 6! / 4! / 3! = 5 种；全排列共 3! = 6 种 //少了一种...

❖ [3, 1, 2 > //为什么是它？

❖ 观察：任意三个元素能否按某相对次序出现于混洗中，与其它元素无关 //故可推而广之...

❖ 禁形：对于任何1 ≤ i < j < k ≤ n

[..., k, ..., i, ..., j, ... > 必非栈混洗

❖ 反过来，不存在 “312”模式的序列，一定是栈混洗吗？

甄别：直接模拟

❖ 充要性：　　A permutation is a stack permutation **iff**

　(Knuth, 1968)　　it does NOT involve the permutation **312**　　//习题[4-3]

❖ 如此，可得一个$\mathcal{O}(n^3)$的甄别算法　　//进一步地...

❖ $[\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ \dots,\ p_n\ \rangle$是$\langle\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\ ]$的栈混洗，**当且仅当**

　对于任意$i < j$，不含模式$[\ \dots,\ j+1,\ \dots,\ i,\ \dots,\ j,\ \dots\ \rangle$

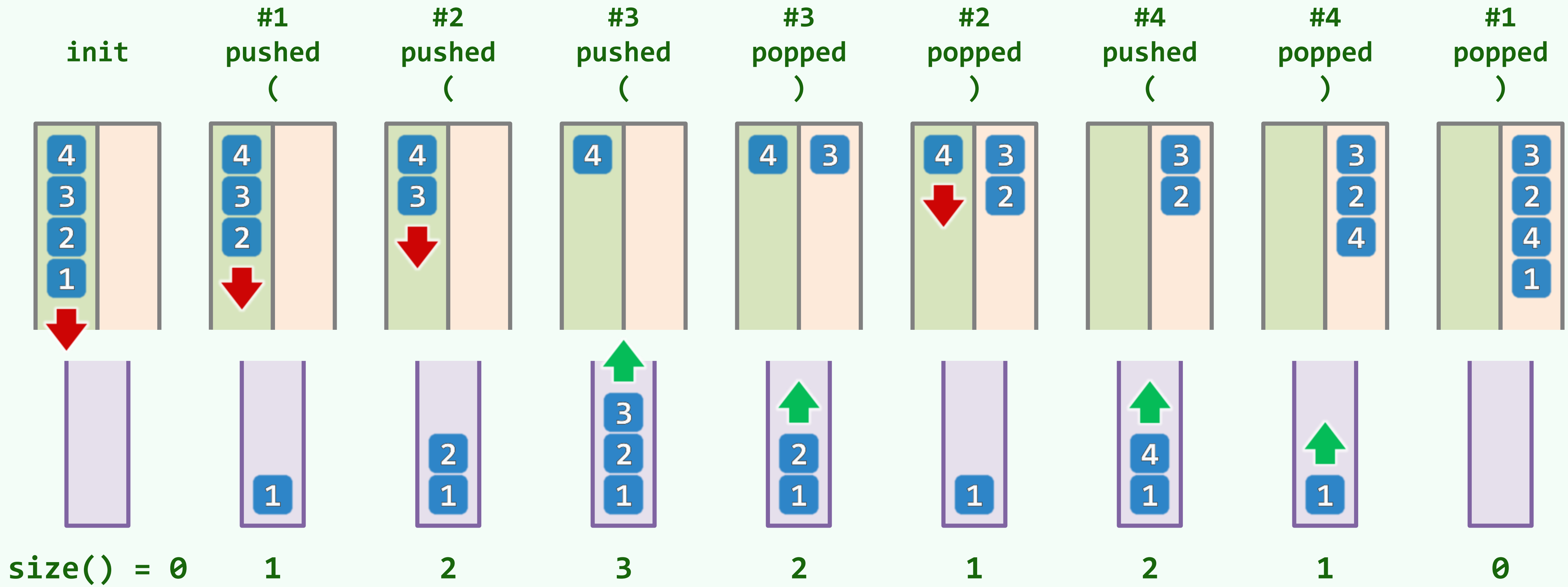
❖ 如此，可得一个$\mathcal{O}(n^2)$的甄别算法　　//再进一步地...

❖ $\mathcal{O}(n)$算法： 直接借助栈A、B和S，模拟混洗过程　　//为何可行？

　　每次S.pop()之前，检测S是否已空；或需弹出的元素在S中，却非顶元素

括号匹配

❖ 观察：每一栈混洗，都对应于栈S的n次push与n次pop操作构成的某一序列；反之亦然



❖ n个元素的栈混洗，等价于n对括号的匹配；二者的组合数，也自然相等