01-F2

绪论

动态规划：最长公共子序列

世上一切都无独有偶，为什么你与我却否？

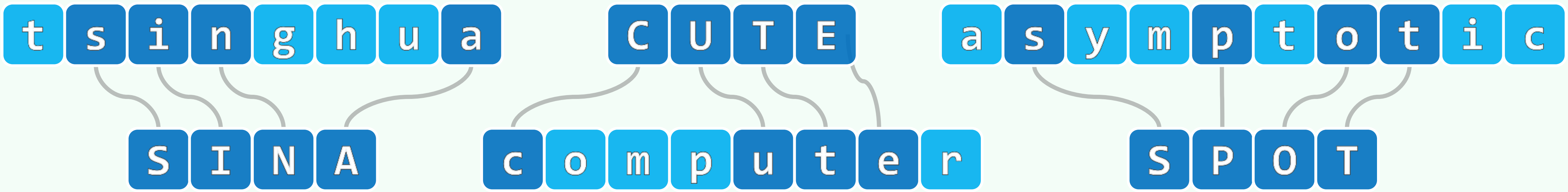
Make it work, make it right, make it fast.

- Kent Beck

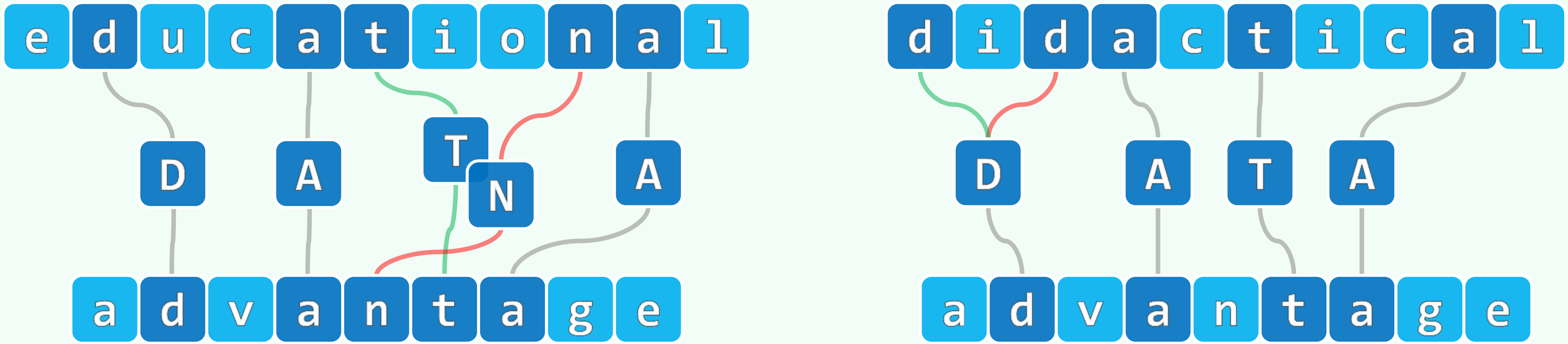
邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

问题

❖ 子序列（Subsequence）：由序列中若干字符，按原相对次序构成

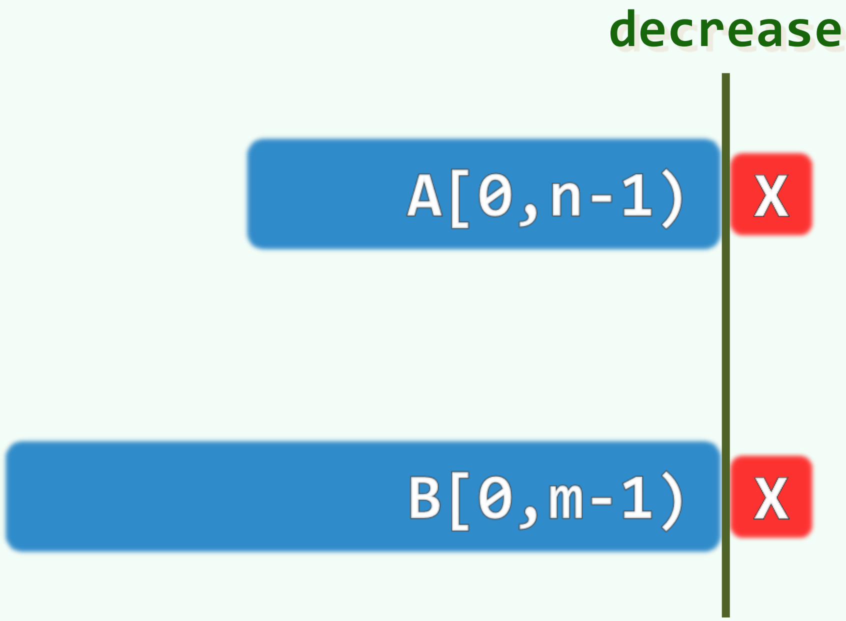


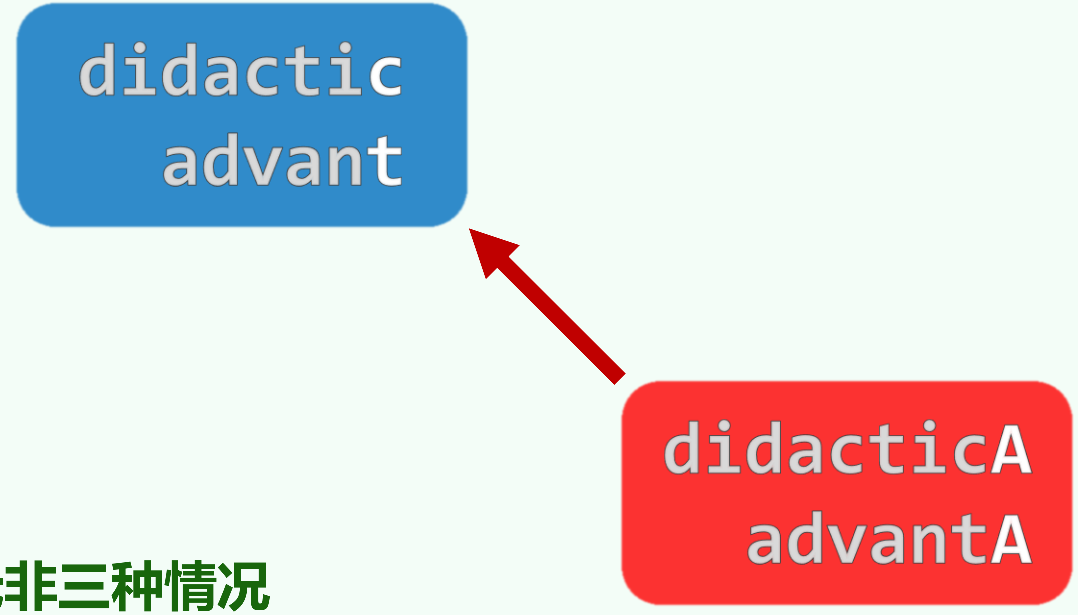
❖ 最长公共子序列（Longest Common Subsequence）：两个序列公共子序列中的最长者



❖ 可能有多个　　可能有歧义

减治递归



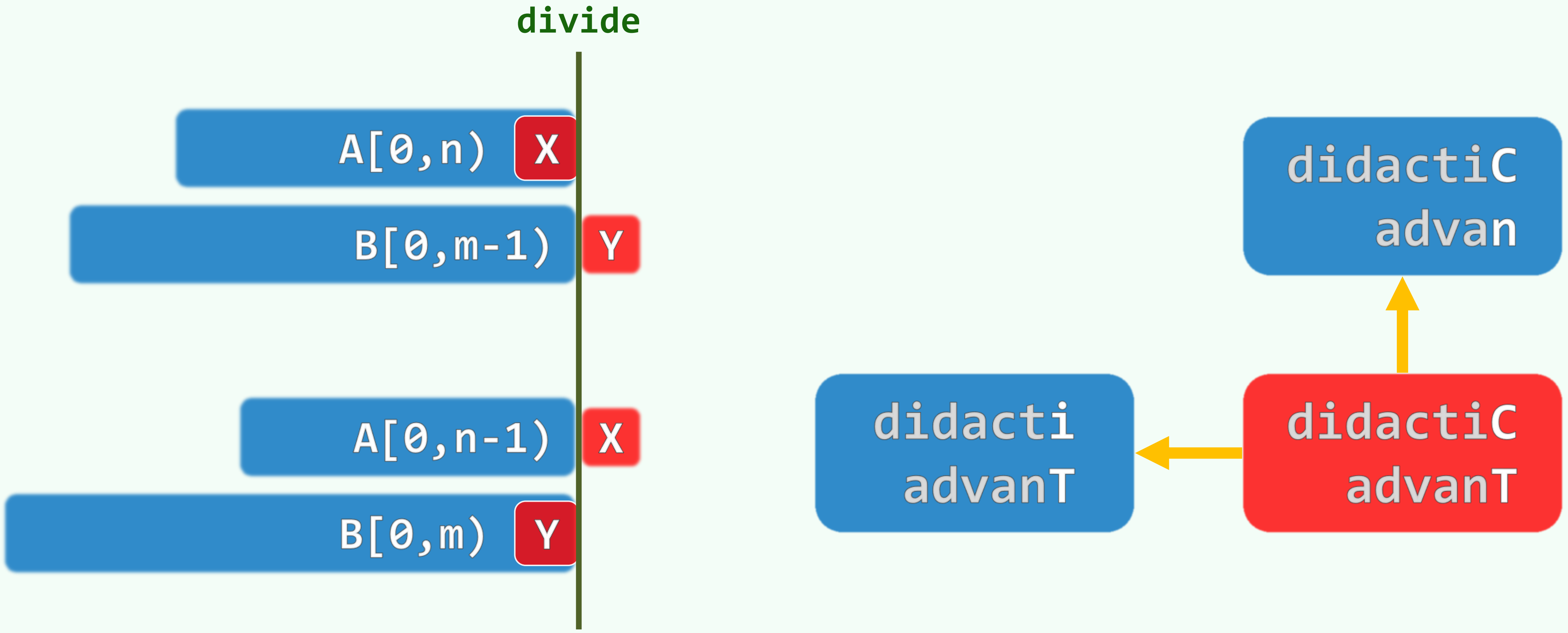


❖ 对于序列A[0,n)和B[0,m)，LCS(n , m)无非三种情况

0) 若n = -1或m = -1，则取作空序列（""） //递归基

1) 若A[n] = 'X' = B[m]，则取作：LCS(n-1 , m-1) + 'X' //减而治之

分治递归



2) A[n] ≠ B[m]，则在 LCS(n,m-1) 与 LCS(n-1,m) 中取更长者 //分而治之

理解

❖ LCS的每一个解，对应于(0,0)与(n,m)之间的一条**单调通路**；反之亦然

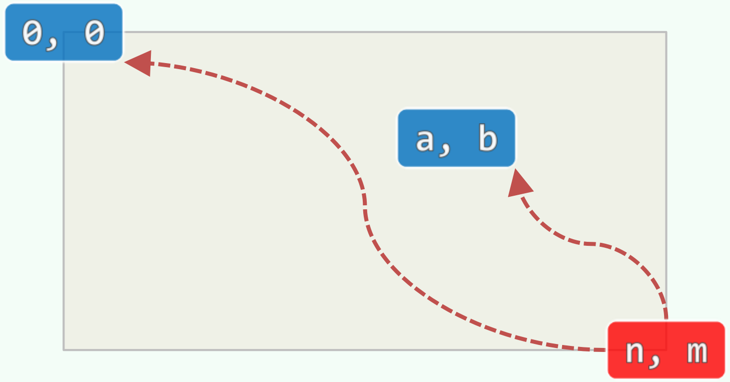
		E	D	U	C	A	T	I	O	N	A	L
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
D	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
V	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A	0	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
N	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
T	0	0	1	1	1	2	3	3	3	3	3	3
A	0	0	1	1	1	2	3	3	3	3	4	4
G	0	0	1	1	1	2	3	3	3	3	4	4
E	0	1	1	1	1	2	3	3	3	3	4	4

多解

		D	I	D	A	C	T	I	C	A	L
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
D	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
V	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
N	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
T	0	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3
A	0	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4
G	0	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4
E	0	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4

歧义

复杂度



❖ 单调性：每经一次比对，至少一个序列的长度缩短一个单位

❖ 最好情况，只需 $\mathcal{O}(n+m)$ 时间 //比如...

❖ 然而最坏情况下，子问题数量不仅会增加，且可能大量雷同

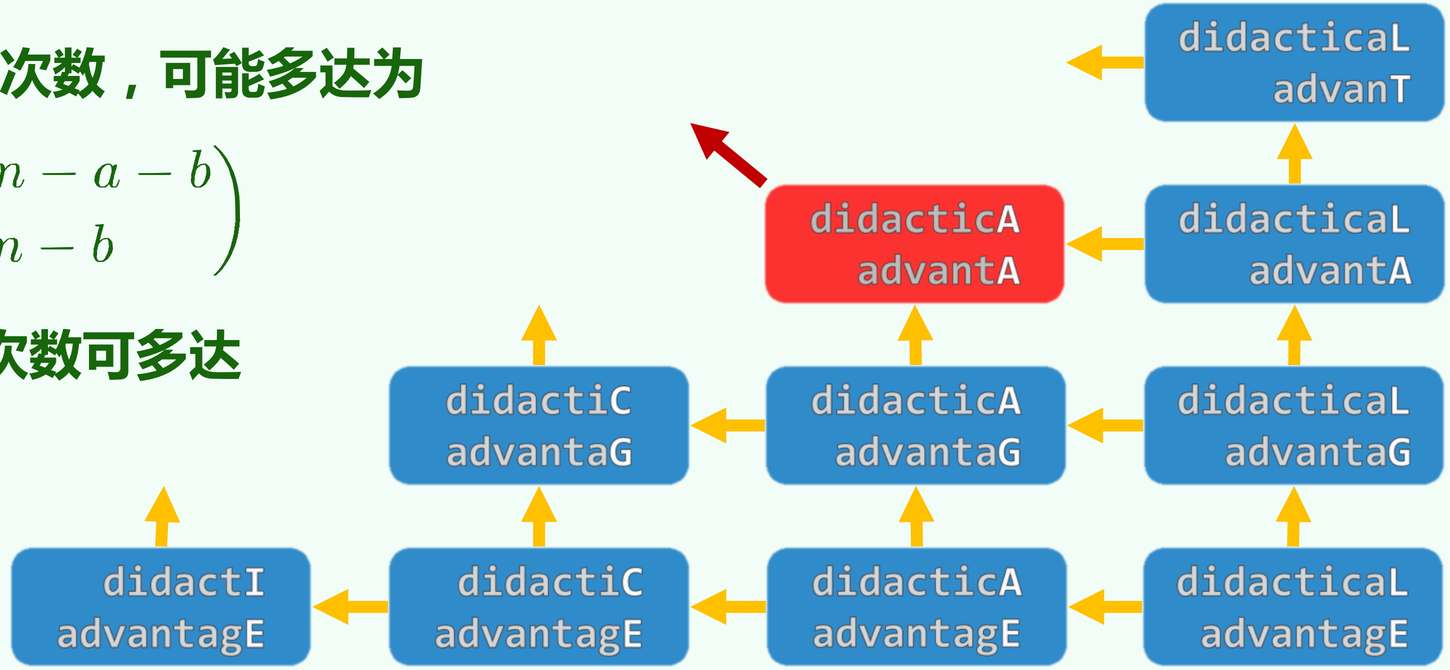
子任务LCS(A[a],B[b])重复的次数，可能多达为

$$\binom{n+m-a-b}{n-a} = \binom{n+m-a-b}{m-b}$$

特别地，LCS(A[0], B[0])的次数可多达

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$$

当n = m时，为 $\Omega(2^n)$



动态规划

❖ 与fib()类似，这里也有大量重复的递归实例（子问题）

各子问题，分别对应于A和B的某个前缀组合

因此实际上，总共不过 $\mathcal{O}(n \cdot m)$ 种

❖ 采用动态规划的策略

只需 $\mathcal{O}(n \cdot m)$ 时间即可计算出所有子问题

❖ 为此，只需

- 将所有子问题（假想地）列成一张表

- 颠倒计算方向：从LCS(0,0)出发，**依次**计算出所有项——直至LCS(n,m)

		d	i	d	a	c	t	i	c	a	l
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
d	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
v	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
n	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
t	0	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3
a	0	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4
g	0	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4
e	0	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4

课后

- 温习：程序设计基础（第3版）之第11章（动态规划）
- 自学：Introduction to Algorithms, §15.1, §15.3, §15.4
- 本节所介绍的迭代式LCS算法，似乎需要记录每个子问题的局部解，从而导致空间复杂度激增
  试改进该算法，使得每个子问题只需常数空间，即可保证最终得到LCS的组成（而非仅仅长度）
- 考查序列 A = "immaculate" 和 B = "computer"
  - 它们的LCS是什么？
  - 这里的解是否唯一？是否有歧义性？按本节所给的算法，找出的是其中哪一个解?
- 实现LCS算法的递归版和迭代版，并通过实测比较其运行时间
- 采用Memoization策略，实现fib与LCS算法