07-D2

图应用

Prim算法：极短跨边

从邻枝上切下的一根枝条，必定也是从整个树上切下的。所以，一个人若同另一个人分离，他也是同整个社会分离。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

割 & 极短跨边

❖ 设(U; V\U)是N的一个割（Cut）

❖ 若uv是该割的一条**极短跨边**

则必**存在**一棵包含uv的MST

❖ 反证：假设uv未被**任何**MST采用...

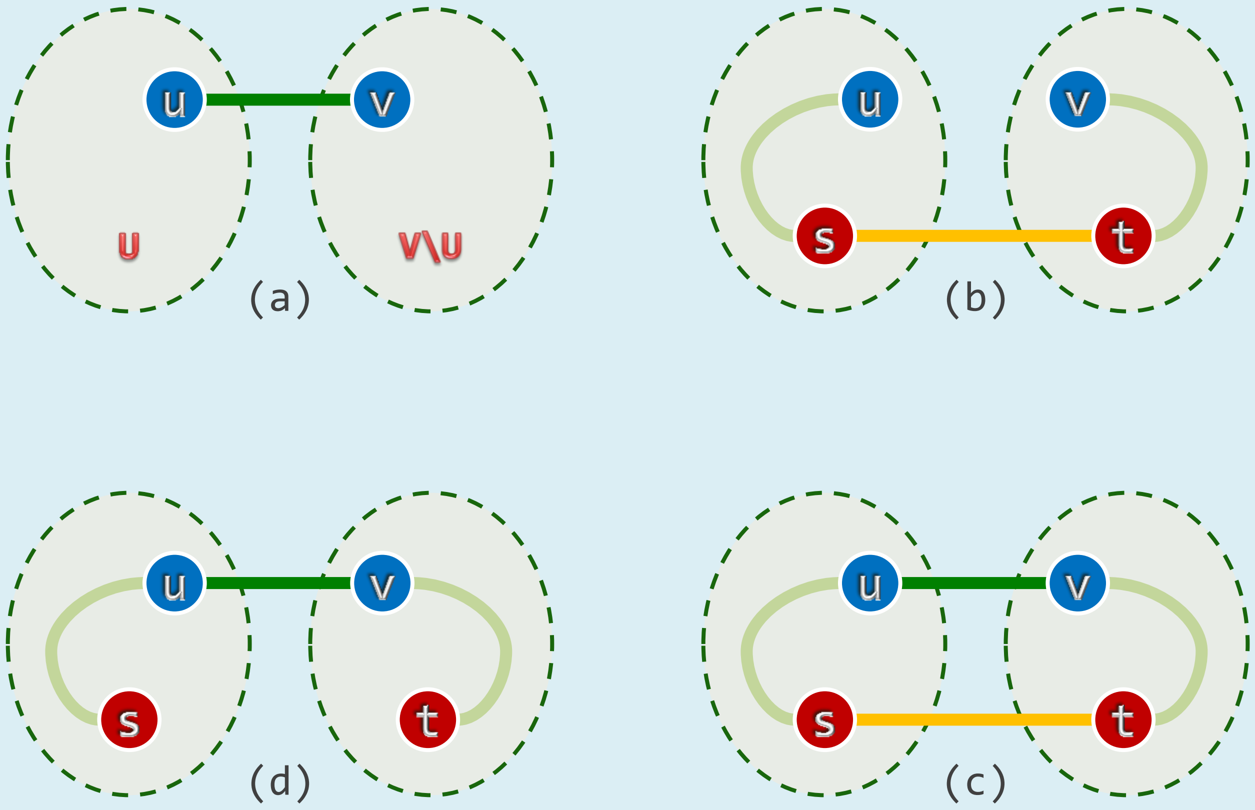
任取一棵MST，将uv加入其中，于是

- 将出现**唯一**的回路，且该回路
- 必经过uv以及**至少**另一跨边st

接下来，摘除st后...

恢复为一棵支撑树，且总权重不致增加

❖ 反之，**任一**MST都必然通过极短跨边联接**每一**割



环 & 极长环边

❖ 设T是N的**一棵**MST，且在N中添加边e后得到N'

❖ 若：沿着e所属的**那条**环路，f为一**极长边**

则：T - {f} + {e}即为N'的**一棵**MST

1）若e为环路上的**最长边**（必有f = e）

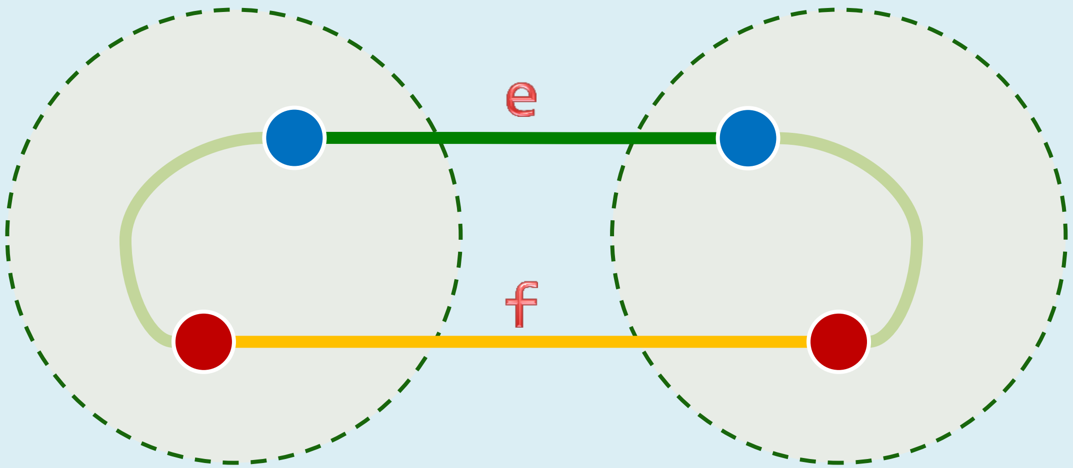
则与前同理，e不可能属于N'的**任何**MST

此时，T（即：T - {f} + {e}）依然是N'的MST

2）否则有：|e| ≤ |f|；移除f后T - {f}一分为二，对应于N/N'的割

在N/N'中，f/e应是该割的**极短跨边**；此割在N和N'中导出的一对互补子图完全一致

故，这对子图各自的MST经e联接后，即是N'的一棵MST



递增式构造

- 首先，任选：$T_1 = (\{v_1\}; \varnothing)$
- 以下，不断地将 T_k 拓展为树 T_{k+1}

$$T_{k+1} = (V_{k+1}; E_{k+1})$$

$$= (V_k \cup \{v_{k+1}\}; E_k \cup \{v_{k+1}u\})$$

其中，$u \in V_k$

- 由此前的分析
  - 只需将(V_k; $V \backslash V_k$)视作原图的一个割
  - 该割所有跨边中的**极短者**即是 $v_{k+1}u$