辽宁省“十二五”普通高等教育本科省级规划教材

线性代数及其应用

（第二版）

阎慧臻　主　编
张玉杰　副主编

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书依据教育部审定的本科“线性代数课程教学基本要求”，结合编者多年的教学经验编写而成.全书共6章，内容包括行列式、矩阵、n维向量组、线性方程组、相似矩阵与二次型和线性代数的MATLAB实现.各章习题按难易程度分成A、B两类，以适合不同层次读者的需求.本书在强调内容的适用性和通用性的同时，注重代数概念应用背景的介绍和线性代数在各领域中的应用，以及学生计算机应用能力的培养.

本书具有条理清晰、讲述详细、通俗易懂、简约实用、注重应用等特点，可作为应用型本科院校理工类、经管类专业的教材或教学参考书，也可供自学者或科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用 / 阎慧臻主编.—2版.—北京：科学出版社，2016.7
(辽宁省“十二五”普通高等教育本科省级规划教材)
ISBN 978-7-03-049497-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①阎… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第174795号

责任编辑：朱 敏 宋 丽 王 为 / 责任校对：马英菊
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2016年8月第一次印刷 印张：13
字数：262 000

定价：31.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈 〉)
销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62138978-2018

前　言

线性代数是高等院校一门重要的数学基础课，是学习后续课程的工具，在培养大学生的计算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力等方面发挥着重要作用.随着科学技术突飞猛进的发展，特别是电子计算机使用的日益普及，作为处理离散问题工具的线性代数，已经深入到自然科学、社会科学、工程技术、网络信息、经济管理等各个领域，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必不可少的数学工具之一.

线性代数具有较强的抽象性与逻辑性.如何掌握好线性代数的基本概念、基本理论和方法，并能灵活运用线性代数知识解决实际问题，是线性代数教学的主要任务.如何对线性代数这门重要的数学基础课进行改革是一个值得研究的课题.基于这些认识，我们编写了《线性代数及其应用》这本教材.

本书内容的选择与安排既注意保持线性代数本身的完整性和结构的合理性，又考虑到应用型本科大学生学习的实际情况，在编写过程中力求做到“简约实用”：减少了一些抽象的理论推导，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明.在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解.

本书注重代数概念应用背景的介绍，在重要概念引入时尽可能做到简明、自然和浅显.利用对实际问题的讨论，帮助学生理解抽象的代数概念，尽量以提出问题、讨论问题、解决问题的方式来展开教材，努力使学生能知其所以然.在习题中，安排了一些简单的应用题，力求拓宽学生的视野，培养学生利用代数知识解决实际问题的能力.

本书第6章介绍了MATLAB在线性代数计算中的用法，让学生学会如何借助数学软件，应用线性代数知识解决实际问题.同时帮助学生理解抽象的线性代数概念，加深对线性代数理论知识的认识.

本书由大连工业大学应用数学系组织编写.第1、2章由阎慧臻编写，第3、4章由张玉杰编写，第5章由王玮莉编写，第6章由张大海编写.全书由阎慧臻统稿并最后定稿.

由于编者水平有限，书中难免存在不足和疏漏之处，敬请读者批评指正.

编　者

2016年6月

目　录

第 1 章　行　列　式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学的各个领域中，而且在其他各学科中都有广泛的应用，特别在线性代数中更是一个不可缺少的工具.本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克莱姆法则.

1.1　行列式的定义

1.1.1　2 阶和 3 阶行列式

我们从解线性方程组引进 2、3 阶行列式.

含有两个未知量两个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法分别消去方程组(1.1)中的 x_1、x_2，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

是线性方程组(1.1)的解.

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为 2 阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.3)的元素或元.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.2 阶行列式含有两行两列(横排叫做行，竖排叫做列).例如，a_{11}，a_{12} 构成行列式的第一行，a_{12}，a_{22} 构成行列式的第二列.由式(1.3)可知，2 阶行列式是这样两项的代数和：一项是左上角到右下角的对角线(图 1.1 中的实连线，称为主对角线)上的两个数的乘积，取正号；另一项是右上角到左下角(图 1.1 中的虚连线，称为副对角线)上两个数的乘积，取负号.于是 2 阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之

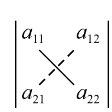


图 1.1

积所得的差.

根据 2 阶行列式的定义,式(1.2)中的两个分子可分别写成

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,则方程组(1.1)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

其中分母是方程组(1.1)的系数按它们在方程组中的次序排列构成的行列式,称为方程组的系数行列式;分子是用常数项 b_1,b_2 分别替换系数行列式中 x_1 所在列的系数和 x_2 所在列的系数后构成的 2 阶行列式.

例 1.1 求解线性方程组 $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$.

解 因为 $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6-4=2$,$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-8=-5$,$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3$,

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}.$$

类似地,对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases},\tag{1.4}$$

其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,表示的代数和为 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$,称为 3 阶行列式.

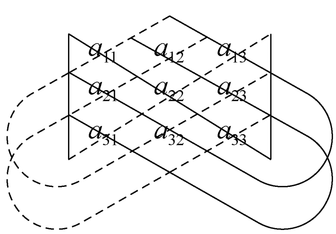


图 1.2

上述定义表明,3 阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则:图中的三条实线看作是平行于主对角线的连线,实线上连接的三个元素的乘积取正号;三条虚线看作是平行于副对角线的连线,虚线上连接的三个元素的乘积取负号.然后这6 项

之和即为3阶行列式的值.

若令 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$,

则当系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组(1.4)的求解公式为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2 求3阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{vmatrix}$ 的值.

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D=&1\times 5\times(-9)+4\times(-8)\times 3+(-7)\times 6\times 2-3\times 5\times(-7) \\ &-2\times 4\times(-9)-1\times(-8)\times 6=0. \end{aligned}$$

注:对角线法则仅适用于2阶与3阶行列式,对于4阶及更高阶的行列式,可以采用递归法做定义.

1.1.2 n 阶行列式的定义

类似于2、3阶行列式,把 n^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

称为 n 阶行列式,简记作 $\det(a_{ij})$.n 阶行列式表示一个数,把这个数称为此行列式的值.行列式通常指所对应的行列式的值.

为了给出 n 阶行列式的值的定义,先给出行列式的元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的余子式与代数余子式的概念.

定义 1.1 把 n 阶行列式(1.5)中的元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列删去后,剩下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式(记做 M_{ij}),即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式,记做 A_{ij}.

下面通过分析2、3阶行列式的展开式,给出 n 阶行列式的定义.

2 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12};$$

3 阶行列式

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

可见,2 阶与 3 阶行列式都等于第一行各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和.这称为行列式按第一行展开,它们都是用一些低阶行列式表示高一阶的行列式.因此,人们自然会想到用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式.

定义 1.2 n 阶行列式(1.5)是一个代数和式.当 $n=1$ 时,定义

$$D=|a_{11}|=a_{11};$$

当 $n\geqslant 2$ 时,定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

其中 $A_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$为 D 中元素 a_{1j} 的代数余子式.

由定义可知,n 阶行列式的值是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$构成的 n 次齐次多项式,它共有 $n!$ 项,每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积,在全部 $n!$ 项中,带正号与带负号的项各占一半(以上结论可根据定义,用数学归纳法证明).当第一行元素为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时,n 阶行列式是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次齐次多项式.

特别注意的是,1 阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$,不要与数的绝对值混淆.

例 1.3 计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$的值.

解 根据定义得

$$\begin{aligned} D&=3\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &=3\times 2\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$=3\times 2\times(-5+4)=-6.$$

例 1.4 证明:下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由定义得

$$D=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得,上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.5 证明:副对角行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$

证 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&=(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}a_{1,n}a_{2,n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4,n-3} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&=\cdots=(-1)^{1+n}\times(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}|a_{n1}| \\
&=(-1)^{(n-1)+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1} \\
&=(-1)^{(n-1)+(n-1)+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1} \\
&=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1} \\
&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.
$$

1.2　行列式的性质

1.2.1　行列式的性质

利用 n 阶行列式的定义,可将 n 阶行列式表示为第一行各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,这个过程可以依次进行下去,直到求出行列式的值.但是当行列式的阶数较高时,计算量是非常大的.为简化行列式的计算,我们将讨论行列式的性质.由于这些性质的证明几乎都可通过对行列式的阶数 n 用数学归纳法来完成,故不再一一写出其证明过程.

设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,记 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

即把 D 的各行换成同序号的列(行列互换),所得到的行列式记为 D^{T},D^{T} 称为 D 的转置行列式.显然,D 与 D^{T} 互为转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1 可知,行列式的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.反之亦然.因此,以下叙述的性质均以行为例来说明.

性质2　互换行列式的两行(列),行列式的值改变符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论　如果行列式有两行(列)对应元素完全相同,则此行列式等于零.

性质3　行列式的某一行(列)的所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特别地,若行列式中有一行(列)的所有元素全为零,则此行列式的值为零.

推论　行列式某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质4　如果行列式中有两行(列)对应元素成比例,则此行列式为零.

性质5　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式可以写成两个行列式的和.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6　将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2.2 利用行列式的性质计算行列式

在行列式的计算中,通常用 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$)表示第 i 行(列)与第 j 行(列)交换;用 $r_i \times k$ ($c_i \times k$)表示用数 k 乘以第 i 行(列)元素;用 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$)表示第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上去.

例 1.6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 $$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+(-2)r_1]{r_3+r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+(-1)r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4.$$

上述解法中,先用了运算 $r_1 \leftrightarrow r_2$,其目的是把 a_{11} 换成 1,从而利用运算 $r_i + (-a_{i1})r_1$,即可把 a_{i1} ($i=2,3,4$)变为 0.第二步把 r_3+r_1 和 $r_4+(-2)r_1$ 写在一起,这是两次运算,并把第一次运算结果的书写省略了.

例 1.7 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 这个行列式的特点是各行 4 个元素之和都是 10.故把第 2,3,4 列同时加到第一列,提出公因子 10.

$$D \xlongequal[\substack{c_1+c_3 \\ c_1+c_4}]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \times \frac{1}{10}} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_1 \\ r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-1)r_1} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \times \frac{1}{2}} 20\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+r_2]{r_3+(-1)r_2} 20\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 20\times 8 = 160.$$

例 1.8　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

解　$D \xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_2 \\ r_2+(-1)r_1}]{r_4+(-1)r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+(-1)r_2]{r_4+(-1)r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+(-1)r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

上述各例都是利用行列式的性质，将行列式化为上(下)三角行列式，而上(下)三角行列式的值等于对角线元素的乘积.

例 1.9　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解　此行列式的特点是除了对角线上的元素外，其余元素全为 3.特别地，第三行及第三列的所有元素均为 3.故可用第三行乘以(−1)加所有行，则此行列式多数元素均变为 0.

$$D_n \xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n+(-1)r_3}]{\substack{r_1+(-1)r_3 \\ r_2+(-1)r_3}} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ c_n+(-1)c_3}]{\substack{c_1+(-1)c_3 \\ c_2+(-1)c_3}} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times(-1)\times 3\times 1\times 2\times\cdots\times(n-3)=6(n-3)!.$$

例 1.10　设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & O & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，证明：$D=D_1\cdot D_2$.

证　对 D_1 作运算 $r_i+\lambda r_j$，把 D_1 化为下三角形行列式，设为 $D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}$；对 D_2 作运算 $c_i+\lambda c_j$，把 D_2 化为下三角形行列式，设为 $D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}$.

于是，对 D 的前 k 行作运算 $r_i+\lambda r_j$，再对后 n 列作运算 $c_i+\lambda c_j$，则 D 可化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & O & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故 $D=p_{11}\cdots p_{kk}\cdot q_{11}\cdots q_{nn}=D_1\cdot D_2$.

例 1.10 可简记为 $D=\begin{vmatrix} D_1 & O \\ * & D_2 \end{vmatrix}=|D_1|\cdot|D_2|$，其中 D_1 是 k^2 个元素 a_{ij} 排成 k 行 k 列；D_2 是 n^2 个元素 b_{ij} 排成 n 行 n 列；$*$ 是任意 $n\times k$ 个元素 c_{ij} 排成 n 行 k 列；O 是 $k\times n$ 个数 0 排成 k 行 n 列.

利用性质1与例1.10的结果,可得

$$D=\begin{vmatrix} D_1 & * \\ O & D_2 \end{vmatrix}=|D_1|\cdot|D_2|.$$

1.3　行列式按行(列)展开

1.3.1　行列式按一行(列)展开

一般来说,低阶行列式比高阶行列式的计算要简单,因此我们考虑用低阶行列式来表示高阶行列式,从而将高阶行列式的计算问题转化为低阶行列式的计算.

引理　一个 n 阶行列式 D,若其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零,则该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证　若 $i=j=1$,则由行列式的定义即知引理成立.否则,设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行,…,2,1 行交换后换到第一行,再把第 j 列依次与第 $j-1$,…,2,1 列交换后换到第一列,则总共经过 $i+j-2$ 次交换后,把 a_{ij} 交换到 D 的左上角,所得行列式记为 D_1.由行列式的性质知,$D=(-1)^{i+j-2}D_1=(-1)^{i+j}D_1$.而元素 a_{ij} 在 D_1 中的余子式仍为 a_{ij} 在 D 中的余子式 M_{ij}.

由于 D_1 中第一行第一列的元素为 a_{ij},第一行其余元素均为0,故由行列式定义知 $D_1=a_{ij}M_{ij}$,故 $D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$.　　证毕

定理1.1　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)$.

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$

同理可得 D 按列展开的公式

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

证毕

这个定理叫做行列式按行(列)展开定理.利用这一定理并结合行列式的性质，可以简化行列式的计算，按行(列)展开计算行列式的方法称为降阶法.

推论　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, i\neq j$ 或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, i\neq j$.

证　将行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的第 j 行的元素换成第 i 行的元素，再按第 j 行展开，有

$$0=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}\quad (i\neq j).$$

同理可得 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad (i\neq j)$.

证毕

综合定理 1.1 及其推论，可得有关代数余子式的一个重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=D\cdot\delta_{ij}=\begin{cases} D, & 当\ i=j \\ 0, & 当\ i\neq j \end{cases} 或 \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=D\cdot\delta_{ij}=\begin{cases} D, & 当\ i=j \\ 0, & 当\ i\neq j \end{cases},$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & 当\ i=j \\ 0, & 当\ i\neq j \end{cases}$.

1.3.2　利用降阶法计算行列式

如果直接应用按行(列)展开定理，把一个 n 阶行列式的计算转化为 n 个 $n-1$ 阶行列式来计算，运算量较大.因此，计算行列式时，通常是先用行列式的性质将行列式中某一行(列)化为仅含有一个非零元素，再按此行(列)展开，这样便可以简化行列式的计算.

例 1.11　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解　$$D\xlongequal[c_4+c_1]{c_2+(-1)c_1}\begin{vmatrix}3&-1&1&3\\1&0&0&0\\2&-1&-1&3\\1&0&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第二行展开}}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&1&3\\-1&-1&3\\0&1&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+(-2)c_2}-\begin{vmatrix}-1&1&1\\-1&-1&5\\0&1&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第三行展开}}-(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1&1\\-1&5\end{vmatrix}=-4.$$

例 1.12　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&n&0&\cdots&0&0\\0&2&n-1&\cdots&0&0\\0&0&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1&2\\1&0&0&\cdots&0&n\end{vmatrix}\quad(n\geqslant 2).$

解　此 n 阶行列式每行(列)都只包含两个非零元素,所以按一行(列)展开即可.而按第一列展开则更方便,因为相应的代数余子式是上(下)三角行列式.

$$D\xlongequal{\text{按第一列展开}}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&n-1&\cdots&0\\0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}n&0&\cdots&0\\2&n-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&2\end{vmatrix}$$

$$=n!\ +(-1)^{n+1}\cdot n!\ =\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\\2n!, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\end{cases}.$$

例 1.13　计算 $2n$ 阶行列式 $D_{2n}=\begin{vmatrix}a&0&\cdots&0&b\\0&a&\cdots&b&0\\\vdots&\ddots&&\iddots&\vdots\\0&&\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}&&0\\\vdots&\iddots&&\ddots&\vdots\\0&c&&d&0\\c&0&&0&d\end{vmatrix}.$

解　由行列式的元素特点,可以看出

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&0&\cdots&0&b\\0&\ddots&&\iddots&0\\\vdots&&D_{2(n-1)}&&\vdots\\0&\iddots&&\ddots&0\\c&0&\cdots&0&d\end{vmatrix},$$

对此行列式按第一行展开,有

$$D_{2n}=a\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}&&&0\\&D_{2(n-1)}&&\vdots\\&&&0\\0&\cdots&0&d\end{vmatrix}+b\cdot(-1)^{1+2n}\cdot\begin{vmatrix}0&&&\\\vdots&D_{2(n-1)}&&\\0&&&\\c&0&\cdots&0\end{vmatrix}.$$

再对上述两个 $2n-1$ 阶行列式,各按最后一行展开,得

$$D_{2n}=adD_{2(n-1)}-bcD_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)},$$

这是一个递推公式,由此可得

$$\begin{aligned}D_{2n}&=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2\\&=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=(ad-bc)^n.\end{aligned}$$

例 1.14　证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).\tag{1.6}$$

其中 $\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$ 表示满足 $n\geqslant i>j\geqslant 1$ 的所有可能的因子 x_i-x_j 的连乘积.

证　用数学归纳法.因为 $D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod\limits_{2\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$,所以当 $n=2$ 时,式(1.6)成立.假设式(1.6)对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立,要证式(1.6)对 n 阶范德蒙德行列式也成立.

对 D_n 从第 n 行开始,上一行乘以$(-x_1)$加到下一行,得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}.$$

按第一列展开,并把每列的公因子(x_i-x_1)提出,得

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

对于上式右端的 $n-1$ 阶范德蒙德行列式,由归纳假设知,其值为 $\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 2}(x_i-x_j)$.

于是 $D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 2}(x_i-x_j)=\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$.

式(1.6)是著名的范德蒙德行列式,其结果在行列式的计算中可作为公式用.

例 1.15 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$,$D$ 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式分别记作 M_{ij} 和 A_{ij},求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解 注意到 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 等于用 1,1,1,1 代替 D 的第一行所得的行列式,即

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_1]{r_3+(-1)r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第三列展开}} (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二列展开}} (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=4;$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41};$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第四行展开}} (-1)^{4+2}\times(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+(-2)r_3} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

1.4 克莱姆法则

在本章 1.1 节中我们已经知道,用 2(3) 阶行列式可以表示二(三)元一次线性方程组的解.类似地,n 元一次线性方程组的解也可以用 n 阶行列式表示.

含有 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,n 个方程的 n 元一次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}. \tag{1.7}$$

定理 1.2(克莱姆法则) 如果线性方程组(1.7)的系数行列式 D 不等于零,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则该方程组有唯一解,且解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}. \tag{1.8}$$

其中,$D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$是用方程组等号右边的常数项列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替系数行列式 D 中第 j 列元素得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 用 D 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 依次乘方程组(1.7)的 n 个方程,然后把它们相加,得到

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}\right)x_n=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}.$$

由定理 1.1 及其推论知,$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & 当\ i=j \\ 0, & 当\ i\neq j \end{cases}$.

故上式为

$$Dx_j=D_j\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1.9}$$

因为 $D\neq 0$,所以方程组(1.9)有唯一解,即 $x_j=\dfrac{D_j}{D},j=1,2,\cdots,n$.

由消元法知,方程组(1.9)与方程组(1.7)是同解方程组.故式(1.8)也是方程组(1.7)的唯一解. 证毕

例 1.16 求解线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=2 \\ 2x_1-x_3+4x_4=4 \\ 3x_1+2x_2+x_3=-1 \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=-4 \end{cases}$.

解 $D=\begin{vmatrix}1&-1&1&-2\\2&0&-1&4\\3&2&1&0\\-1&2&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal[c_2+(-2)c_3]{c_1+(-3)c_3}\begin{vmatrix}-2&-3&1&-2\\5&2&-1&4\\0&0&1&0\\2&4&-1&2\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-2&-3&-2\\5&2&4\\2&4&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\times\frac{1}{2}}2\cdot\begin{vmatrix}-2&-3&-2\\5&2&4\\1&2&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+2r_3}2\begin{vmatrix}0&1&0\\5&2&4\\1&2&1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&4\\1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

同理可得$D_1=\begin{vmatrix}2&-1&1&-2\\4&0&-1&4\\-1&2&1&0\\-4&2&-1&2\end{vmatrix}=-2$；$D_2=\begin{vmatrix}1&2&1&-2\\2&4&-1&4\\3&-1&1&0\\-1&-4&-1&2\end{vmatrix}=4$；

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&2&-2\\2&0&4&4\\3&2&-1&0\\-1&2&-4&2\end{vmatrix}=0;D_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&0&-1&4\\3&2&1&-1\\-1&2&-1&-4\end{vmatrix}=-1.$$

所以得 $x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=-2,x_3=\frac{D_3}{D}=0,x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{1}{2}.$

克莱姆法则在一定条件下给出了线性方程组解的存在性与唯一性，具有重大的理论价值.但需注意它的应用范围：第一，方程组中的方程个数必须等于未知量的个数；第二，系数行列式必须不等于零.当系数行列式等于零时，线性方程组是否有解或有无穷多解，尚不能确定，有关问题将在第 4 章中讨论.

克莱姆法则的逆否命题如下：

定理 1.2′ 如果线性方程组(1.7)无解或有两个不同的解，则其系数行列式 D 必为零.

线性方程组(1.7)右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时，线性方程组(1.7)称为非齐次线性方程组.当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，线性方程组(1.7)称为齐次线性方程组，即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}. \tag{1.10}$$

显然，$x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$ 是齐次线性方程组(1.10)的一个解，称这个解为方程组(1.10)的零解.如果一组不全为零的数是方程组(1.10)的解，则称之为齐次方程组(1.10)的非零解.齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解.将

定理 1.2 应用于齐次线性方程组(1.10),可得:

定理 1.3　如果齐次线性方程组(1.10)的系数行列式 $D\neq 0$,则齐次线性方程组(1.10)只有零解(没有非零解).

其逆否命题如下:

定理 1.3′　如果齐次线性方程组(1.10)有非零解,则其系数行列式 D 必为零.

由此定理可知,系数行列式 $D=0$ 是齐次线性方程组(1.10)有非零解的必要条件.以后还将证明这个条件也是充分条件.

例 1.17　问 λ 为何值时,齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 有非零解?

解　若方程组有非零解,则它的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0.$$

解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$.

不难验证,当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时,该方程组确有非零解.

习　题　1

(A)

1. 利用对角线法则计算下列 3 阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$.

2. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}-2 & 2 & -4 & 0\\ 4 & -1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 5 & 1\end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef\end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}$.

3. 求解下列方程.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & x \\ 1 & 8 & x^2 \end{vmatrix}=0$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}=0$.

4. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^2$；

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$.

5. 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式).

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是 a，未写出的元素都是 0；

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

6. 设 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & p \\ b_1 & b_2 & b_3 & p \\ c_1 & c_2 & c_3 & p \\ d_1 & d_2 & d_3 & p \end{vmatrix}$，求第 1 列各元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$.

7. 用克莱姆法则解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3 \\ 5x_1-2x_2+7x_3=22 \\ 2x_1-5x_2+4x_3=4 \end{cases}$； (2) $\begin{cases} 5x_1+6x_2=1 \\ x_1+5x_2+6x_3=0 \\ x_2+5x_3+6x_4=0 \\ x_3+5x_4=1 \end{cases}$.

8. 讨论 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解，并求解.

9. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+ax_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-ax_3+bx_4=0 \end{cases}$ 有非零解. 则 a,b 应满足什么条件？

10. 一家服装厂共有 3 个加工车间，第一车间用一匹布能生产衬衣 4 件，长裤 15 条和 3 件外衣；第二车间用一匹布能生产衬衣 4 件，长裤 5 条和 9 件外衣；第三车间用一匹布能生产衬衣 8 件，长裤 10 条和 3 件外衣. 现该厂接到一张订单，要求供应 2000 件衬衣，3500 条长裤和 2400 件外衣. 问该厂应如何向 3 个车间安排加工任务，以完成该订单？（提示：设安排第一车间 x_1 匹布，第二车间 x_2 匹布，第三车间 x_3 匹布.）

(B)

1. 计算下列各行列式.

(1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$，其中 $a_k\neq 0(k=0,1,2,3,4)$.

2. 计算下列各阶行列式(D_k 为 k 阶行列式).

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

(2) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. 提示：利用范德蒙德行列式

的结果.

(3) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$,其中未写出的元素都是 0.

3. 证明:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$;

(2) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

4. 已知 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$,求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$,其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为 D 的第四行第 j 列元素的代数余子式.

第 2 章　矩　　阵

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，矩阵的运算是线性代数的基本内容.作为一种非常重要的数学工具，矩阵在数学以至自然科学、工程技术、经济管理等诸多领域都有广泛的应用.

本章主要介绍矩阵的概念，矩阵的各种基本运算、逆矩阵、矩阵的分块及分块矩阵的运算，矩阵的初等变换及矩阵的秩等，为后续内容的学习提供必要的保障与强有力的工具.

2.1　矩阵的基本概念

2.1.1　矩阵的概念

在工程技术和经济领域中有大量与矩形数表有关的问题.

例 2.1　某公司生产甲、乙、丙三种产品，它们的生产成本由原材料费用、人工费用和其他费用三项构成，表 2.1 给出了每种产品的每项费用的预算(单位：百元).

表 2.1

生产成本 \ 产品	甲	乙	丙
原材料费	15	25	20
人工费	4	5	6
其他费用	2	3	3

我们将表 2.1 中主要关心的对象——数据按原来次序排列成矩形数表，并加上括号(以表示这些数据是一个整体)，得到 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}15 & 25 & 20\\ 4 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$.它反映了三种产品的生产成本预算情况.

该公司 2010 年各季度产品的计划生产数如表 2.2 所示(单位：台).

表 2.2

产品 \ 季度	1	2	3	4
甲	300	360	360	300
乙	200	280	240	220
丙	480	540	500	500

同样，由这些数据可得到 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}300 & 360 & 360 & 300\\200 & 280 & 240 & 220\\480 & 540 & 500 & 500\end{pmatrix}$

例 2.2　某航空公司在 1，2，3，4 四个城市之间开辟了若干航线，图 2.1 表示了四城市间的航班情况，若从 i 市到 j 市有航班，则用带箭头的线连接 i 与 j.

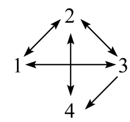


图 2.1

若令 $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有航班}\\0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有航班}\end{cases}$，则图 2.1 可用表 2.3 表示如下.

表 2.3

发站 \ 到站	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	0	0

我们把表 2.3 中的数据按原来次序排列成矩形数表，并加上括号，得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

它反映了四城市间的航班往来情况.

一般地，有：

定义 2.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，为表示它是一个整体，总是加一个括号，并用大写黑体字母表示它，记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，简称为元. a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素或

$\boldsymbol{A}$ 的(i,j)元.以数a_{ij}为(i,j)元的 $m\times n$ 矩阵$\boldsymbol{A}$ 也可简记为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

元素都是实数的矩阵称为实矩阵,元素是复数的矩阵称为复矩阵,本书中的矩阵除特别说明者外,都指实矩阵.

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_n$.在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$排成的对角线称为方阵的主对角线.

所有元素均为零的矩阵称为零矩阵,记作 $\boldsymbol{O}$.

所有元素均为非负数的矩阵称为非负矩阵.

如果两个矩阵的行数相等、列数也相等时,就称它们是同型矩阵.

定义 2.2 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,且对应元素均相等,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.即若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2.1.2 几种特殊矩阵

1) 行矩阵:只有一行的矩阵称为行矩阵或行向量.记作 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

2) 列矩阵:只有一列的矩阵称为列矩阵或列向量,记作 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}$.

3) 三角矩阵:若一个方阵的主对角线下(上)的元素全为零,则此矩阵称为上(下)三角矩阵,上、下三角矩阵统称为三角矩阵.

由此看出,上(下)三角矩阵的定义与上(下)三角行列式的定义类似,即

上三角矩阵 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$;下三角矩阵 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$.

4) 对角矩阵:若一个 n 阶方阵除主对角线上的元素之外,其余元素全部为零,则称此矩阵为对角矩阵,通常用 $\boldsymbol{\Lambda}$ 表示,即 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}$.这里非主对角线上的零元素可以省略不写,或记为 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn})$.

5) 数量矩阵:若对角矩阵中主对角线上元素全部相等,即 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$ 时,则此矩阵称为数量矩阵.

6) 单位矩阵:若数量矩阵中对角线上的元素均为 1,则此矩阵称为单位矩阵,

记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$，即 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$.

7）行阶梯形矩阵：若一个矩阵的每个非零行（元素不全为零的行）的非零首元（第一个非零元素）所在列的下标随着行标的增大而严格增大，并且元素全为零的行（如果有的话）均在所有非零行的下方，则此矩阵称为行阶梯形矩阵.例如，

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 6\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2 & 5 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

8）行最简形矩阵：若一个行阶梯形矩阵的每一个非零行的非零首元为 1，且此非零首元所在列的其余元素均为零，则此矩阵称为行最简形矩阵.例如，

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由定义可知：行最简形（或行阶梯形）矩阵的特点是可画出一条阶梯线，使线的下方全是 0；每个台阶只有一行，台阶数就是非零行的行数.

2.2　矩阵的基本运算

矩阵的基本运算包括矩阵的加法、数与矩阵的乘法、矩阵的乘法、矩阵的转置等.正是有了这些运算，矩阵之间也就有了一些最基本的关系，从而使矩阵能与其他学科的实际问题密切相关，成为方便简捷的表达手段.

2.2.1　矩阵的线性运算

定义 2.3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

即矩阵的加法就是矩阵对应的元素相加.

令 $-\boldsymbol{B}=(-b_{ij})_{m\times n}$，将 $-\boldsymbol{B}$ 叫做 $\boldsymbol{B}$ 的负矩阵.矩阵的减法规定为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

即 $\boldsymbol{A}$ 减 $\boldsymbol{B}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相减.

注：只有两个同型矩阵才能进行加法和减法运算.

定义 2.4　数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积规定为

$$kA=Ak=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

即数 k 与矩阵 A 相乘就是把数 k 与矩阵 A 的每个元素相乘.数与矩阵的乘积运算称为数乘运算.

由定义 2.4 可知,A 的负矩阵 $-A$ 也可以看作(-1)与 A 的乘积;数量矩阵 $\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)$也可写成 aE;当矩阵 A 的所有元素都有公因子 k 时,可将 k 提到矩阵的外面,如

$$\begin{pmatrix}3&6\\9&0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}.$$

注:$\begin{pmatrix}3&6\\9&2\end{pmatrix}\neq3\begin{pmatrix}1&2\\9&2\end{pmatrix}$.

矩阵的加法与矩阵的数乘两种运算统称为矩阵的线性运算.容易证明,矩阵的线性运算满足下列运算规律:

设 A、B、C、O 都是同型矩阵,k,l 为常数,则

(i) $A+B=B+A$;

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(iii) $A+O=A$;

(iv) $A+(-A)=O$;

(v) $1A=A$;

(vi) $k(lA)=(kl)A$

(vii) $(k+l)A=kA+lA$;

(viii) $k(A+B)=kA+kB$.

注:在数学中,把满足上述八条规律的运算称为线性运算.

例 2.3　已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\\1&2\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&3\\0&5\\-1&4\end{pmatrix}$,并且 $2(X-A)+B=3A$,求 X.

解　由已知,得

$$X=\frac{1}{2}(5A-B)=\frac{1}{2}\left(5\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3\\0&5\\-1&4\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}5&-5\\0&15\\5&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3\\0&5\\-1&4\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-8\\0&10\\6&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\0&5\\3&3\end{pmatrix}.$$

2.2.2　矩阵的乘法

定义 2.5　设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$,$B=(b_{ij})_{s\times n}$,规定矩阵 A 与 B 的乘积是一个 $m\times n$ 型矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$,其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$.记作 $AB=C$.

定义 2.5 表明，只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘，且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的行数即是 $\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{C}$ 的列数即是 $\boldsymbol{B}$ 的列数；$\boldsymbol{C}$ 的 (i,j) 元 c_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和.

按此定义，一个 $1\times s$ 行矩阵与一个 $s\times 1$ 列矩阵的乘积是一个 1 阶方阵，也就是一个数.即 $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}$.

由此表明乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 的 (i,j) 元 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的乘积.

例 2.4　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解　由矩阵乘法的定义，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\times(-1)+2\times(-1)+0\times 0 & 1\times 0+2\times 1+0\times 1\\3\times(-1)+(-1)\times(-1)+1\times 0 & 3\times 0+(-1)\times 1+1\times 1\\1\times(-1)+1\times(-1)+1\times 0 & 1\times 0+1\times 1+1\times 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&0\\-2&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此例可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可相乘，但 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不能相乘，这是因为 $\boldsymbol{B}$ 的列数为 2，而 $\boldsymbol{A}$ 的行数为 3.

例 2.5　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解　$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&-32\\8&16\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}-2&-4\\1&2\end{pmatrix}$.

由例 2.5 可知 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，即一般说来，矩阵的乘法不满足交换律.同时看到，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵，但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.因此，对于矩阵乘法，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

对于两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

例 2.6　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\4&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\5&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AC}$ 与 $\boldsymbol{BC}$.

解 $\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}3&1\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\6&6\end{pmatrix}$;$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}2&1\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\6&6\end{pmatrix}$.

由例 2.6 可知,虽然有 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$,但是 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$.即矩阵乘法不满足消去律.

例 2.7 变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\qquad\vdots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}\tag{2.2}$$

称为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换,其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为常数.写出线性变换的矩阵形式.

解 线性变换(2.2)的系数 a_{ij} 构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,称为线性变换的系数矩阵.即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$,则利用矩阵的乘法运算,线性变换(2.2)的矩阵形式为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}.$$

可见,线性变换与其系数矩阵之间存在一一对应关系,因而可利用矩阵来研究线性变换,也可利用线性变换来研究矩阵.

例 2.8(例 2.1 续) 设某公司三种产品的生产成本如表 2.1 所示,该公司 2010 年各季度产品计划生产数如表 2.2 所示.求此公司 2010 年各季度的生产成本各项费用,即原材料费用、人工费用和其他费用分别是多少?

解 由表 2.1 得,矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}15&25&20\\4&5&6\\2&3&3\end{pmatrix}$;由表 2.2 得,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}300&360&360&300\\200&280&240&220\\480&540&500&500\end{pmatrix}$.

而所求的该公司 2010 年各季度的生产成本各项费用可归结为矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}15&25&20\\4&5&6\\2&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300&360&360&300\\200&280&240&220\\480&540&500&500\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}19100 & 23200 & 21400 & 20000\\ 5080 & 6080 & 5640 & 5300\\ 2640 & 3180 & 2940 & 2760\end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 $c_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$表示的是该公司 2010 年第 j 季度第 i 项费用支出.如表 2.4 所示(单位:百元).

表 2.4

季度(j) / 生产成本(i)	1	2	3	4
原材料费	19100	23200	21400	20000
人工费	5080	6080	5640	5300
其他费用	2640	3180	2940	2760

矩阵的乘法虽不满足交换律,但由矩阵乘法的定义,可以证明矩阵的乘法满足以下运算规律(假设运算都是可行的):

(i) 结合律:$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

$$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B}),\lambda \text{ 为数}.$$

(ii) 分配律:$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}.$$

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n};\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

或简写成

$$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}.$$

可见单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵乘法中的作用类似于数 1.

2.2.3　方阵的幂

有了矩阵的乘法,就可以定义矩阵的幂,设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,定义

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^1\cdot\boldsymbol{A}^1,\cdots,\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A}^1(\text{其中 } k \text{ 为正整数}).$$

即 $\boldsymbol{A}^k$ 就是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘,显然只有方阵的幂才有意义.

根据矩阵乘法的结合律,容易知道方阵的幂运算满足下列运算规律:

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,k,l 为正整数,则

(i) $\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$;

(ii) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

由于矩阵乘法不满足交换律,因此对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 而言,一般地$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$,这与数的幂运算不同.但当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换时,容易验证下列结论成立:

(i) $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$;

(ii) $(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;

(iii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

例 2.9 设 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,求 $\boldsymbol{\Lambda}^3$.

解 $$\boldsymbol{\Lambda}^2=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^3=\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^3 & & & \\ & \lambda_2^3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^3\end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{diag}(\lambda_1^3,\lambda_2^3,\cdots,\lambda_n^3).$$

由例 2.9 可知,对角阵的幂很容易计算:对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的幂仍是对角阵,且其对角线元素就是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对应元素的同一次幂.

例 2.10 设 $\boldsymbol{A}=(1,2,3),\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$ 及 $(\boldsymbol{BA})^{20}$.

解 $$\boldsymbol{AB}=(1,2,3)\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}=8;\ \boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}(1,2,3)=\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\-1 & -2 & -3\\2 & 4 & 6\end{pmatrix};$$

$$(\boldsymbol{BA})^{20}=\overbrace{(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{BA})\cdots(\boldsymbol{BA})}^{20\text{个}}=\boldsymbol{B}\,\overbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}^{19\text{个}}\boldsymbol{A}$$
$$=8^{19}(\boldsymbol{BA})=8^{19}\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\-1 & -2 & -3\\2 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

例 2.11 某企业对其职工进行分批脱产技术培训,每年从在岗人员中抽调 30%的人员进行培训,而参加培训的职工中有 60%的人结业回岗,假设现有在岗职工 800 人,参加培训人员是 200 人,试问两年以后在岗与脱产培训职工各有多少人?(假设职工人数不变.)

解 用 x_0,y_0 表示目前在岗与脱产职工人数.x_i,y_i 分别表示 i 年后在岗与脱产职工人数,则按题意有

$$\begin{cases}x_i=0.7x_{i-1}+0.6y_{i-1}\\ y_i=0.3x_{i-1}+0.4y_{i-1}\end{cases}.$$

用矩阵表示,有

$$\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.6\\0.3 & 0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{i-1}\\y_{i-1}\end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.67 & 0.66 \\ 0.33 & 0.34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 800 \\ 200 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 668 \\ 332 \end{pmatrix},$$

所以两年后在岗职工 668 人，培训人员 332 人.

2.2.4　矩阵的转置

定义 2.6　把矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行依次换成同序数的列得到的 $n\times m$ 矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 的转置矩阵是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

矩阵的转置也是一种运算，且满足下述运算规律(假设运算都是可行的)：

(i) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(iii) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(iv) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

这里仅证明(iv).设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，记

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n},\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times m}.$$

于是由矩阵乘法的定义，有

$$c_{ji}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}.$$

而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行为$(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{si})$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列为$(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{js})^{\mathrm{T}}$.因此

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

所以

$$d_{ij}=c_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m).$$

即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$.故得$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.　证毕

对于多个矩阵乘法的转置，用数学归纳法容易证明

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

例 2.12　设 $\boldsymbol{A}=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

解　$\boldsymbol{AB}=(1,-1,2)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}=(9,2,-1)$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

显然$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 n 阶方阵,如果$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;如果$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

对称矩阵的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,即以主对角线为对称轴的元素对应相等;反对称矩阵的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,从而 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$,即主对角线上的元素都为 0,其他元素以主对角线为对称轴,对应元素互为相反数.例如,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&2&-1\\5&-1&6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\1&0&2\\3&-2&0\end{pmatrix}.$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,而 $\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵.

例 2.13　证明:任意一个 n 阶方阵都可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

证　任意一个 n 阶方阵都可以写成$\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}+\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$.由于

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}{2}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2},\left(\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}{2}=-\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}.$$

所以$\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$为对称矩阵,$\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$为反对称矩阵.

2.2.5　方阵的行列式

定义 2.7　由 n 阶方阵$\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变),称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,记作$|\boldsymbol{A}|$式 $\det \boldsymbol{A}$.

应当注意:方阵与行列式是两个不同的概念,n 阶方阵是 n^2 个数按一定方式排成的数表,而 n 阶行列式则是这些数(也就是数表 $\boldsymbol{A}$)按一定的运算法则所确定的一个数.利用行列式相应的性质,可得出方阵的行列式满足如下性质(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,λ 为常数):

(i) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$;

(ii) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$;

(iii) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

其中性质(iii)的证明稍难,这里不作证明.应注意的是:对于 n 阶方阵$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,一般来说,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,但总有$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.

例 2.14　设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$,$|\boldsymbol{A}|$中元素 a_{ij} 的代数余子式为A_{ij},作

新矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$,称此矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.证明:$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$.

证　我们只证明 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$.记

$$\boldsymbol{AA}^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n},$$

则

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$

由行列式中关于代数余子式的性质,得 $b_{ij}=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ |\boldsymbol{A}|, & i=j \end{cases}$.即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & & & \\ & |\boldsymbol{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}_{n\times n}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n.$$

同理,可证明 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$.

关于伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$ 是一个极重要的结论.

例 2.15　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,求 $|\boldsymbol{A}^*|$.

解　由于 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$,所以

$$|\boldsymbol{AA}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n|=|\boldsymbol{A}|^n\cdot|\boldsymbol{E}_n|=|\boldsymbol{A}|^n.$$

而 $|\boldsymbol{AA}^*|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|$,故有

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n.$$

由于 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,所以 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

2.2.6　共轭矩阵

当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为复矩阵时,用 $\overline{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数,记 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})$.$\overline{\boldsymbol{A}}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵.例如,若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1-i & i & -i \\ 0 & 3-i & 1 \end{pmatrix}$,则 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1+i & -i & i \\ 0 & 3+i & 1 \end{pmatrix}$.

共轭矩阵满足下述运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为复矩阵,λ 为复数,且运算都是可行的):

(i) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$;

(ii) $\overline{\lambda\boldsymbol{A}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

(iii) $\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$.

2.3　分块矩阵

对于行数和列数较高的矩阵，运算时常采用分块法，即把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算.矩阵分块的方法，不仅可以给计算带来方便，同时也可以揭示出矩阵中某些部分的特性及它们之间的关系.

2.3.1　分块矩阵的概念

定义 2.8　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块.以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例如，$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|ccc}2&0&1&5&4\\ \hline 3&0&2&1&5\\ \hline 0&0&1&-1&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{A}_{32}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_{11}=(2\quad 0)$，$\boldsymbol{A}_{12}=(1\quad 5\quad 4)$，$\boldsymbol{A}_{21}=(3\quad 0)$，$\boldsymbol{A}_{22}=(2\quad 1\quad 5)$，$\boldsymbol{A}_{31}=(0\quad 0)$，$\boldsymbol{A}_{32}=(1\quad -1\quad 0)$；$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

给定一个矩阵，可以根据需要把它写成不同的分块矩阵.下面是几种常用的分块方法.

1. 按列分块

将 $m\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c|c|c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{array}\right)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列.$\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j}\ a_{2j}\ \cdots\ a_{mj})^{\mathrm{T}}$，$j=1,2,\cdots,n$.

2. 按行分块

将 $m\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cccc}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \hline a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \hline \vdots&\vdots&&\vdots\\ \hline a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$，$i=1,2,\cdots,m$.

将矩阵按列或按行进行分块在实际中经常用到，应予以特别重视.

3. 分块对角阵

设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且对角线上的子块都是方阵.即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix},\tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角阵.

当分块对角阵对角线上各子块都是一阶方阵（即数），它就成为对角阵，因而分块对角阵是对角阵概念的推广.例如，

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:ccc:c}1 & 2 & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ \hdashline & & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ \hdashline & & & & & 5\end{array}\right)$$

就是分块对角阵.

分块对角阵具有与对角阵类似的性质，设 $\boldsymbol{A}$ 为形如式(2.3)的分块对角阵，则

(i) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|$；

(ii) $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^k & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^k\end{pmatrix}$，$k$ 为正整数.

4. 分块上(下)三角阵

形如 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss}\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss}\end{pmatrix}$ 的分块矩阵，分别称为分块上三角矩阵或分块下三角矩阵，其中 $\boldsymbol{A}_{ii}(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵.

2.3.2 分块矩阵的运算

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似.分块时要注意,运算的两矩阵按块能运算,并且参与运算的子块也能运算,即内外都能运算.

1. 分块矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,采用相同的分块方法,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ ($i=1,2,\cdots,s$; $j=1,2,\cdots,r$) 同型,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}$.

2. 分块矩阵的数乘

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$,$\lambda$ 为一个数.则 $\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$.

3. 分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 型矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 型矩阵,对 $\boldsymbol{A}$ 的列和 $\boldsymbol{B}$ 的行采用相同的分块方法,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2}\cdots,\boldsymbol{A}_{it}(i=1,2,\cdots,s)$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{tj}(j=1,2,\cdots r)$ 的行数,则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{ij})_{s\times r}$,其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}=\sum\limits_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$.

注:计算乘积 $\boldsymbol{AB}$ 时,对 $\boldsymbol{A}$ 的列和 $\boldsymbol{B}$ 的行要采用相同的分块方法.

4. 分块矩阵的转置

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

注:分块阵转置时,除行要变成列以外,每一子块的行也要变为列.

例 2.16　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$，用分块矩阵计算 $\boldsymbol{AB}$.

解　根据矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特点，将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{E}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{B}_3\end{pmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{B}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_3\end{pmatrix}.$$

而
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2&=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-3&4\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\3&1\end{pmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{pmatrix}.$$

从例 2.16 可以看出，对一些阶数较高的矩阵进行乘法运算时，利用分块方法可以达到降阶的目的.当然分块的原则要使其分块后出现的子块间的运算有意义，同时还要考虑矩阵本身的特点，尽可能地使分块后的子块中有便于利用的特殊矩阵，如单位阵、零矩阵、对角阵、上(下)三角阵等，这样能达到简化运算的效果.

例 2.17　证明：矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是方阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证　条件的必要性是显然的，下面证明条件的充分性.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}.$$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的第(i,j)元为 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j$.因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i,j=1,2,\cdots n)$.

特殊地，有 $\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}(j=1,2,\cdots,n)$，而

$$\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j}\ a_{2j}\ \cdots\ a_{mj})\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2,$$

由 $a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0$,得 $a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0(j=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

2.4　矩阵的初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换是处理矩阵问题的一种基本方法,在化简矩阵、解线性方程组、求逆矩阵和矩阵的秩等问题中起着非常重要的作用.

2.4.1　矩阵的初等变换

定义 2.9　下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(i) 对调两行(对调 i,j 两行,记作 $r_i\leftrightarrow r_j$);

(ii) 以数 $k\neq0$ 乘某一行的所有元素(第 i 行乘 k,记作 $r_i\times k$);

(iii) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上,记作 r_i+kr_j).

把定义中的“行”换成“列”,即得矩阵的初等列变换的定义(所用记号是把“r”换成“c”).

矩阵的初等行变换与初等列变换,统称初等变换.

矩阵的三种初等变换都是可逆的,且其逆变换是同一类型的初等变换.具体地说,有下面性质:

(i) 若 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{A}$,即变换 $r_i\leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身;

(ii) 若 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\times k}\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\xrightarrow{r_i\times\frac{1}{k}}\boldsymbol{A}$,即变换 $r_i\times k$ 的逆变换是 $r_i\times\dfrac{1}{k}$(或记作 $r_i\div k$);

(iii) 若 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\xrightarrow{r_i+(-k)r_j}\boldsymbol{A}$,即变换 r_i+kr_j 的逆变换是 $r_i+(-k)r_j$(或记作 r_i-kr_j).

定义 2.10　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价,记作 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$;如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价,记作 $\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$;如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,矩阵之间的等价关系具有下列性质:

(i) 反身性:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$;

(ii) 对称性:若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$;

(iii) 传递性:若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

数学上把具有上述三条性质的关系叫做等价关系.

2.4.2　矩阵的标准形

一般地,任一非零矩阵经过一系列的初等行变换均可化简为行阶梯形矩阵.

事实上,设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,观察第 1 列元素 $a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1}$,若存在一个元素不为零(否则就按顺序考虑第 2 列元素,依次类推),则通过两行对换,就能使第一列的第一个元素不为零.因此,不妨设 $a_{11}\neq 0$,作初等行变换(iii),将第 1 行元素的 $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 行去($i=2,3,\cdots,m$),这样经 $m-1$ 次的初等行变换可将 $\boldsymbol{A}$ 中的第一列元素中除 a_{11} 之外的其他元素全部变成零,即

$$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c:ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right).$$

然后,对 $\boldsymbol{B}$ 中余下的右下角的子块重复上面的过程,经不断重复作这样的初等行变换,$\boldsymbol{A}$ 终将变成行阶梯形矩阵.

对行阶梯形矩阵再经过一系列初等行变换可将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵.

通过初等行变换化矩阵为行阶梯形和行最简形是矩阵最常用的运算,在求解线性方程组、求矩阵的秩等方面很有用处.

例 2.18　用初等行变换将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

解　$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\underset{\sim}{\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\xrightarrow{r_3+(-3)r_1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}\underset{\sim}{\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

$\boldsymbol{B}$ 即为行阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\underset{\sim}{\xrightarrow{r_2+3r_3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&2&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C},$$

$\boldsymbol{C}$ 即为行最简形矩阵.

注:一个矩阵的行最简形矩阵是唯一确定的,行阶梯形矩阵中非零行的行数也是唯一确定的;但行阶梯形矩阵不唯一.

对行最简形矩阵再施以初等列变换,可将矩阵化为一种形状更简单的矩阵,称为标准形.例如,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+(-2)c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4}$ $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{F}$,矩阵 $\boldsymbol{F}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准形,其特点是:$\boldsymbol{F}$ 的左上角是一个单位矩阵,其余元素全为 0.

一般情况下,一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准形总可写作

$$\boldsymbol{F}=\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\\hdashline 0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{array}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n},$$

且不管初等变换的次序如何,$\boldsymbol{A}$ 的标准形是唯一的.该标准形由 m、n、r 三个数完全确定.其中 r 就是行阶梯形矩阵中的非零行数,在研究矩阵的秩时它将起到重要作用.所有与 $\boldsymbol{A}$ 等价的矩阵组成一个集合,标准形 $\boldsymbol{F}$ 是这个集合中形状最简单的矩阵.

由上面的讨论可以得到以下定理:

定理 2.1　任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵,并进而化为行最简形矩阵.

定理 2.2　任一矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 总可以经过有限次初等变换化为标准形 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$.

定理 2.2 也可叙述如下:

定理 2.2′　任一 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与其标准形矩阵 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$ 等价.

例 2.19　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&4&0\\0&1&2&0\\2&-2&0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&3&0&2\\0&1&-1&2\end{pmatrix}$.问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否

等价？

分析：每个矩阵均与其标准形等价，而矩阵的等价关系具有对称性和传递性.故若两个矩阵有相同的标准形，则必然等价.

解　先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标准形.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&4&0\\0&1&2&0\\2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&1&4&0\\0&1&2&0\\0&-4&-8&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+4r_2}\begin{pmatrix}1&1&4&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)\cdot r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+(-2)c_2]{c_3+(-2)c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};$$

又因为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&3&0&2\\0&1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&-1&2\\0&1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&-4\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_3+c_2\\c_4+(-2)c_2}]{\substack{c_3+(-3)c_1\\c_4+4c_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的标准形，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

2.4.3　初等矩阵

初等变换在矩阵的理论中具有十分重要的意义.矩阵的初等变换不仅可用语言表述，而且可用矩阵的乘法运算来表示.为此引入初等矩阵的概念.

定义 2.11　由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换所得到的矩阵叫做初等矩阵.

与三种初等变换相对应，有以下三种初等矩阵：

(i) 对调单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的 i 和 j 两行(列)所得到的初等矩阵记作 $\boldsymbol{E}(i,j)$，即

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&1&&&\\&&&&1&&&&\\&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\&&&&&1&&&\\&&&1&\cdots&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\第\ i\ 行\\\\\\\\第\ j\ 行\\\\\\\\\end{array};$$

(ii) 将单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(列)乘以非零数 k 得到的初等矩阵记作 $\boldsymbol{E}(i(k))$,即

$$\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行};\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(iii) 用数 k 乘以 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行加到第 i 行上或用数 k 乘以 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列加到第 j 列上得到的初等矩阵记作 $\boldsymbol{E}(ij(k))$,即

$$\boldsymbol{E}(ij(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}.$$

例如,设 $k\neq0,\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{E}(2,3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}(2(k))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}(12(k))=\begin{pmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

可以直接验证,初等矩阵具有以下性质:

(i) 初等矩阵的行列式都不等于零,且

$$|\boldsymbol{E}(i,j)|=-1,\quad |\boldsymbol{E}(i(k))|=k\neq0,\quad |\boldsymbol{E}(ij(k))|=1;$$

(ii) 初等矩阵的转置矩阵仍为初等矩阵,且

$$\boldsymbol{E}(i,j)^{\mathrm{T}}=E(i,j),\quad \boldsymbol{E}(i(k))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}(i(k)),\quad \boldsymbol{E}(ij(k))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}(ji(k)).$$

下面建立初等变换与初等矩阵之间的关系.先看下面的矩阵乘法运算.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$,则有

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}&ka_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{E}(31(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}+ka_{11}&a_{32}+ka_{12}&a_{33}+ka_{13}&a_{34}+ka_{14}\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{AE}(2,4)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{14}&a_{13}&a_{12}\\a_{21}&a_{24}&a_{23}&a_{22}\\a_{31}&a_{34}&a_{33}&a_{32}\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{AE}(3(k))=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{23}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&ka_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&ka_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&ka_{33}&a_{34}\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{AE}(41(k))=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\k&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+ka_{14}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}+ka_{24}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}+ka_{34}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}.$$

从以上计算结果可知，用初等矩阵 $\boldsymbol{E}(1,3)$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于互换 $\boldsymbol{A}$ 的第一，三两行；用初等矩阵 $\boldsymbol{E}(2(k))$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行元素都乘以数 k；用初等矩阵 $\boldsymbol{E}(31(k))$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素的 k 倍加到第三行对应元素上去；而用初等矩阵 $\boldsymbol{E}(2,4)$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于互换 $\boldsymbol{A}$ 的第二，四两列；用初等矩阵 $\boldsymbol{E}(3(k))$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第三列元素都乘以数 k；用初等矩阵 $\boldsymbol{E}(41(k))$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第四列元素的 k 倍加到第一列对应元素上去.这一结论说明对矩阵施行一次初等行变换可通过在其左侧乘以一个相应的初等矩阵来实现，而对矩阵施行一次初等列变换可通过在其右侧乘以一个相应的初等矩阵来实现.一般地，可以验证如下结论：

定理 2.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘上一个相应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘上一个相应的 n 阶初等矩阵.

也就是说：$\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}$ 表示将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i,j 两行交换；

$\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}$ 表示将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以非零数 k；

$\boldsymbol{E}(ij(k))\boldsymbol{A}$ 表示将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去；

$\boldsymbol{AE}(i,j)$表示将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i,j 两列交换;

$\boldsymbol{AE}(i(k))$表示将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以非零数 k;

$\boldsymbol{AE}(ij(k))$表示将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 列的 k 倍加到第 j 列上去.

定理 2.3 告诉我们,对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行(列)变换与用相应的初等矩阵左(右)乘 $\boldsymbol{A}$ 是等价的.值得注意的是,左乘初等矩阵 $\boldsymbol{E}(ij(k))$时变化 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行,右乘初等矩阵 $\boldsymbol{E}(ij(k))$时变化 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列.

2.5　逆　矩　阵

对每一个非零数 a,总存在唯一的数 a^{-1},使 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$,且 $b\div a=ba^{-1}$.那么对非零矩阵 $\boldsymbol{A}$,是否也存在一个矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 呢? 这就引出了可逆矩阵的概念.可逆矩阵求逆是矩阵的一个重要运算,因而逆矩阵在矩阵的理论中占相当重要的地位.

2.5.1　可逆矩阵的定义与性质

定义 2.12　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,简称 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵或逆.

显然定义中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的地位是相同的,故也可说矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆,而 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵,并且从这个定义可知,可逆阵及其逆阵都是方阵.

容易验证,单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵就是其自身.

定理 2.4　若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

证　设 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$,则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{EC}=\boldsymbol{C}.$$

证毕

将 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.即 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

利用定义 2.12,容易证得可逆矩阵的如下性质:

(i) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(ii) 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是可逆矩阵,且$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(iii) 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,λ 是不为零的数,则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 也是可逆矩阵,且$(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(iv) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 也是 n 阶可逆矩阵,且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(v) 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,则$|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$;

(vi) 若 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}_i$ 均可逆$(i=1,2,\cdots,s)$,

则 $\boldsymbol{A}$ 也可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{pmatrix}$；

(vii) 初等矩阵都是可逆的，并且初等矩阵的逆矩阵都是同类的初等矩阵.即 $\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$，$\boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(k^{-1}))$，$\boldsymbol{E}(ij(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(ij(-k))$.

证 仅证性质(iv)，其余性质的证明由读者自己完成.

因为$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AEA}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，同理，有

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{E},$$

所以由定义 2.12 知，$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. 证毕

性质(iv)可推广到任意有限个可逆矩阵的乘积，即 m 个可逆矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 的乘积 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m$ 也可逆，并且有，$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{A}_{m-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

特别地，如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶可逆矩阵，则对任意正整数 k，$\boldsymbol{A}^k$ 也可逆，且有 $(\boldsymbol{A}^k)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^k=\boldsymbol{A}^{-k}$.

这样，当 $\boldsymbol{A}$ 可逆，λ,μ 为整数时，有 $\boldsymbol{A}^{\lambda}\boldsymbol{A}^{\mu}=\boldsymbol{A}^{\lambda+\mu}$，$(\boldsymbol{A}^{\lambda})^{\mu}=\boldsymbol{A}^{\lambda\mu}$.

下面将讨论具备什么条件的方阵才可逆.

2.5.2 矩阵可逆的充分必要条件

定理 2.5 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是$|\boldsymbol{A}|\neq0$，且若$|\boldsymbol{A}|\neq0$，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\boldsymbol{A}^*. \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

证 必要性.因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，从而$|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1$，所以$|\boldsymbol{A}|\neq0$.

充分性.由例 2.14 知，$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.因为$|\boldsymbol{A}|\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

由定义 2.12 知，$\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$. 证毕

定理 2.5 不仅给出了方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件，而且公式(2.4)还提供了求 $\boldsymbol{A}^{-1}$的一种方法，称为伴随矩阵法.

当$|\boldsymbol{A}|=0$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵，否则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.由定理 2.5 可知，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，即可逆矩阵就是非奇异矩阵.

由定理 2.5，可得下述推论：

推论 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$)，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

证 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,所以 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}|=1$,故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.因而 $\boldsymbol{A}^{-1}$存在并且

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

证毕

由此推论可知,对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,只要有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$),则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆且互为逆矩阵.

例 2.20 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,且 $|\boldsymbol{A}|=ad-bc\neq 0$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 由于 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,故 $\boldsymbol{A}^{-1}$存在,容易计算 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 2.21 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆.若可逆,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 容易求得 $|\boldsymbol{A}|=2\neq 0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.又

$$A_{11}=2,\quad A_{21}=6,\quad A_{31}=-4,$$
$$A_{12}=-3,\quad A_{22}=-6,\quad A_{32}=5,$$
$$A_{13}=2,\quad A_{23}=2,\quad A_{33}=-2,$$

所以
$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

故
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 2.22 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:cc} 5 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$.其中 $\boldsymbol{A}_1=(5)$,$\boldsymbol{A}_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,可求得 $\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例 2.23　利用逆阵解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$.

解　利用矩阵乘法,可将此方程组写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}. \tag{2.5}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,式(2.5)两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,得线性方程组的解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

由于$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}=6\neq 0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

所以此线性方程组的解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

即 $x_1=-1, x_2=2, x_3=0$.

例 2.24　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使其满足 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$.

解　若 $\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{B}^{-1}$存在,则用 $\boldsymbol{A}^{-1}$左乘上式,$\boldsymbol{B}^{-1}$右乘上式,得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AXBB}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1},$$

即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$.

由例 2.21 知,$|\boldsymbol{A}|=2\neq 0$,而$|\boldsymbol{B}|=1\neq 0$,故 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

所以 $X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}$.

例 2.25　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$,试证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 均可逆,并求出它们的逆.

证　由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$,得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=4\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$.由定理 2.5 的推论知,$\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

由$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2+(k+1)\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$,取 $k+1=-2$,即 $k=-3$,有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}.$$

即$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$.

由定理 2.5 的推论知,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆,且$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$.

注:(i) 对于类似于本例的问题,都可用此方法同时解决逆阵的存在性及表达式.

(ii) 可逆阵与后面所讲的很多问题有联系,证明一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆有很多种方法,在本节中,应掌握两种方法.

方法 1:通过证明 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 来证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

方法 2:找出方阵 $\boldsymbol{B}$,证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$.

例 2.26　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵,且 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$,求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$ 的值.

解　由可逆矩阵性质可知,$(3\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$.又因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$,所以 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$.所以

$$\begin{aligned}|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|&=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}-2\times\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|\boldsymbol{A}|^{-1}\\&=-\frac{8}{27}\times 2=-\frac{16}{27}.\end{aligned}$$

注:公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 在讨论有关 $\boldsymbol{A}^*$ 的问题时经常用到.

2.5.3　求逆矩阵的初等变换法

用伴随矩阵求逆矩阵的方法,当矩阵的阶数较大时计算量太大.因此,公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$ 主要用于理论推导和求低阶方阵以及特殊方阵的逆矩阵.下面介绍求逆

矩阵的另一种方法——初等变换法.

定理 2.6 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 能表示成有限个初等矩阵的乘积.

证 充分性.设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$,其中 $\boldsymbol{P}_i$ 是初等矩阵($i=1,2,\cdots,l$).因为初等矩阵可逆,且有限个可逆矩阵的乘积仍可逆.故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

必要性.设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}$ 的标准形矩阵为 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}_{n\times n}$.由于 $\boldsymbol{F}\sim\boldsymbol{A}$,可知 $\boldsymbol{F}$ 经有限次初等变换可化为 $\boldsymbol{A}$,即有初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_{s+1}\cdots\boldsymbol{P}_l.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$ 也都可逆,故标准形矩阵 $\boldsymbol{F}$ 可逆,于是 $r=n$.否则,若 $r<n$,则 $|\boldsymbol{F}|=0$,与 $\boldsymbol{F}$ 可逆矛盾.

由于 $r=n$,所以 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}$.从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$. 证毕

上述证明显示,可逆矩阵的标准形矩阵是单位阵.

由定理 2.6 可得以下推论:

推论 1 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左(右)边乘以可逆阵$\Leftrightarrow$对 $\boldsymbol{A}$ 进行有限次初等行(列)变换.

推论 2 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则

(i) $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$;

(ii) $\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$;

(iii) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

推论 3 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{E}$).

证 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow$存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{E}$)$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{E}$). 证毕

对于可逆阵 $\boldsymbol{A}$,显然 $\boldsymbol{A}^{-1}$也可逆.

由于 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$,所以由定理 2.6 的推论 1 可知,用有限次初等行变换可将分块矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$化为$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$.这就为我们提供了一种利用初等行变换求可逆阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的方法.即构造分块矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$,对其作初等行变换,目标是把 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{E}$,当把 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{E}$ 时,$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$中的 $\boldsymbol{E}$ 就化为了 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 2.27 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$,证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆,并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 $$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\underset{\sim}{\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}}\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times 3}\begin{pmatrix}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\-6&9&0&0&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_1}\begin{pmatrix}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&9&-4&0&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times 2}\begin{pmatrix}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&18&-8&0&4&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+9r_2}\begin{pmatrix}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+(-1)r_3]{r_1+2r_3}\begin{pmatrix}3&0&0&18&9&12\\0&-2&0&-8&-4&-6\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{r_1\times\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&0&0&6&3&4\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}6&3&4\\4&2&3\\9&4&6\end{pmatrix}$.

注:(i) 当 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 $n\geqslant 3$ 时,一般用初等行变换的方法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 比用伴随矩阵的方法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 方便.

(ii) 利用初等行变换求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵时,不必预先判断 $\boldsymbol{A}$ 是否是可逆矩阵.

(iii) 也可用初等列变换求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.方法是:$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$.

利用初等行变换不仅可以求可逆阵的逆矩阵,还可求解某些矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

由于 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$.故当用初等行变换将$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$中的 $\boldsymbol{A}$ 化为单位阵 $\boldsymbol{E}$ 时,$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$中的 $\boldsymbol{B}$ 就化为了 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.即$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$.

类似地,利用矩阵的初等列变换可以解某些矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$.由于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{BA}^{-1}\end{pmatrix}$,故当用初等列变换将 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 中的 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{E}$ 时,$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 中的 $\boldsymbol{B}$ 就化为了 $\boldsymbol{BA}^{-1}$.即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{BA}^{-1}\end{pmatrix}.$$

例 2.28　求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\-2&5\end{pmatrix}$.

解　$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2&1&-3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\2&1&-3&1&-1\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&-3&1&-3&-1\\0&5&0&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&5&0&0&5\\0&-3&1&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{5}}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&-3&1&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_1+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}.$$

可见 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.且 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4&2\\0&1\\-3&2\end{pmatrix}$.

例 2.29　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&1&-2\\4&-6&2\end{pmatrix}$的行最简形矩阵为 $\boldsymbol{F}$，求 $\boldsymbol{F}$，并求一个可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{F}$.

分析：由于 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{PA},\boldsymbol{P})=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$，所以当用初等行变换将$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$中的 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形 $\boldsymbol{F}$ 时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$中的 $\boldsymbol{E}$ 就化为了所求的可逆阵 $\boldsymbol{P}$.

解　$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&0&0\\1&1&-2&0&1&0\\4&-6&2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&1&0\\2&-1&-1&1&0&0\\4&-6&2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+(-2)r_1]{r_3+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&1&0\\0&-3&3&1&-2&0\\0&-4&4&-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&1&0\\0&1&-1&3&-2&-1\\0&-4&4&-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+4r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&1&0\\0&1&-1&3&-2&-1\\0&0&0&10&-8&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-3&3&1\\0&1&-1&3&-2&-1\\0&0&0&10&-8&-3\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可逆阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-3&3&1\\3&-2&-1\\10&-8&-3\end{pmatrix}$.

注:上述解中所得$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$,可继续作初等行变换$r_3\times k$,$r_1+kr_3$,$r_2+kr_3$,则$\boldsymbol{F}$不变$\boldsymbol{P}$变.故本例中使$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{F}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$不唯一.

2.5.4 逆矩阵在加密传输中的应用

可逆方阵可用来对需传输的信息进行加密.首先给每个字母指派一个代码,例如将26个字母$a,b,\cdots,y,z$依次对应数字1,2,…25,26且规定“空格”对应数字0.若要发出信息action,首先找到此信息的编码是1,3,20,9,15,14.将此信息对应的编码写成3×2矩阵(按列)$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&9\\3&15\\20&14\end{pmatrix}$.如果直接发送矩阵$\boldsymbol{B}$,这是不加密的信息,容易被破译,无论在军事或商业上均不可行.因此必须对信息进行加密,使得只有知道密钥的接收者才能准确、快速地破译.

为此,任选一个行列式等于±1的整数矩阵$\boldsymbol{A}$作为密钥矩阵,则由$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$可知,$\boldsymbol{A}^{-1}$的元素也均为整数.如取$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$(|\boldsymbol{A}|=-1)$.

令$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&9\\3&15\\20&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}$,将传出信息经过乘$\boldsymbol{A}$编成“密码”后发出,收到的信息为$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}$.

接收者收到矩阵$\boldsymbol{B}$后,用$\boldsymbol{A}^{-1}$解密,$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\3&15\\20&14\end{pmatrix}$.所以经解密后的解码为1,3,20,9,15,14.最后,借助使用的代码将密码恢复为明码,得到信息action.

这里所述仅是加密解密原理,在实际应用中,用于加密的可逆阵$\boldsymbol{A}$的阶数可能很大,其构造也十分复杂.第二次世界大战期间,一些最优秀的数学家都被请来从事对己方信息的加密和对敌方信息的破译工作.

2.6 矩阵的秩

任意矩阵可经过初等行变换化为行阶梯矩阵,这个行阶梯形矩阵所含非零行

的行数实际上就是要讨论的矩阵的秩，它是矩阵的一个数字特征，也是矩阵在初等变换中的一个不变量，对研究矩阵的性质及线性方程组的理论有着重要的作用.

2.6.1　矩阵的秩的概念

定义 2.13　在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k 行与 k 列 $(k\leqslant m, k\leqslant n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式.

例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&4&1&0\\3&6&0&9\end{pmatrix}$，在 $\boldsymbol{A}$ 中抽取第 1，2 行和第 2，3 列，它们交叉位置上的元素构成 $\boldsymbol{A}$ 的一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix}2&0\\4&1\end{vmatrix}=2$.

显然，$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.特别地，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一个 n 阶子式，即 $|\boldsymbol{A}|$.

定义 2.14　设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，则 D 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式.最高阶非零子式的阶数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 $R(\boldsymbol{A})$，即 $R(\boldsymbol{A})=r$.并规定零矩阵的秩等于 0.

由行列式的性质可知，在 $\boldsymbol{A}$ 中当所有的 $r+1$ 阶子式全等于 0 时，所有高于 $r+1$ 阶的子式也全等于 0，因此把 r 阶非零子式称为最高阶非零子式，而 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数.

由矩阵的秩的定义，可以得出下面结论：

(i) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$.即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩不会超过其行数和列数.

(ii) 若 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不为 0，则 $R(\boldsymbol{A})\geqslant r$；若 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式均为 0，则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant r$；若 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 r 阶子式不为 0，且所有 $r+1$ 阶子式均为 0，则 $R(\boldsymbol{A})=r$.

(iii) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，$R(k\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})(k\neq0)$.

(iv) 若 $\boldsymbol{A}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子块，则 $R(\boldsymbol{A}_1)\leqslant R(\boldsymbol{A})$.

(v) 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，则 $R(\boldsymbol{A})=n$；若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $R(\boldsymbol{A})<n$.

可见，可逆矩阵的秩等于矩阵的阶数，不可逆矩阵的秩小于矩阵的阶数.因此，可逆矩阵又称满秩矩阵，不可逆矩阵又称降秩矩阵.于是对于方阵来说，可逆、非奇异、满秩是等价的概念.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，当 $R(\boldsymbol{A})=m$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵；当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵.显然，满秩矩阵既是行满秩的又是列满秩的.

例 2.30　求下列矩阵的秩.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 6 & 3 & 2 & 8\\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解　对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，容易看出一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 的 3 阶子式只有一个 $|\boldsymbol{A}|$，经计算可知，$|\boldsymbol{A}|=0$，因此 $R(\boldsymbol{A})=2$.

$\boldsymbol{B}$ 是一个行阶梯形矩阵，其非零行有 3 行，因此 $\boldsymbol{B}$ 的所有 4 阶子式全为 0，而以三个非零行的第一个非零元为对角元的 3 阶行列式 $\begin{vmatrix}1 & 6 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$ 是一个上三角行列式，它显然不等于 0.因此 $R(\boldsymbol{B})=3$.

由此例可知，对于行阶梯形矩阵，它的秩就等于非零行的行数.

2.6.2　用初等变换求矩阵的秩

对于一般的矩阵，当行数与列数较多时，用定义求矩阵的秩是很麻烦的，但从上面的例 2.30 可以看出，对于行阶梯形矩阵，它的秩就等于非零行的行数，一看便知，无需计算.因此，自然想到利用初等变换将矩阵化为行阶梯形矩阵，但初等变换是否会改变矩阵的秩呢？这是用初等变换法求矩阵的秩必须要解决的关键问题.因此，我们首先给出相关定理.

定理 2.7　初等变换不改变矩阵的秩.

证　只需证明三种初等变换对子式为零的性质没有影响即可.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换时，如果交换 $\boldsymbol{A}$ 的两行(列)，则与这两行(列)有关的子式的值只改变正、负号；如果用非零常数 k 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(列)，则与该行(列)有关的子式的值必乘以 k；如果用数 k 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(列)再加到 $\boldsymbol{A}$ 的另一行(列)上，则涉及这两行(列)的子式的值不变.总之，对 $\boldsymbol{A}$ 作三种初等行(列)变换时，$\boldsymbol{A}$ 的任何子式的值的“零”与“非零”性都不会改变，从而变换后的矩阵的非零子式的最高阶数不会改变.因此，初等变换不改变矩阵的秩.　　证毕

由此定理可知，矩阵在初等变换中，“秩”是一个不变的量.

由定理 2.7 可以推出以下结论：

推论 1　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

推论 2　设 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{AQ})=R(\boldsymbol{PAQ})$.

根据定理 2.7，为求矩阵的秩，只要把矩阵用初等行变换化为行阶梯形矩阵，则行阶梯形矩阵中非零行的行数即是该矩阵的秩.

例 2.31　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&5&15&4\\1&2&3&5&3\\1&7&8&-10&3\\2&6&8&5&5\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

解　利用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&5&15&4\\1&2&3&5&3\\1&7&8&-10&3\\2&6&8&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&5&3\\2&3&5&15&4\\1&7&8&-10&3\\2&6&8&5&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+(-1)r_1\\r_4+(-2)r_1}]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&5&3\\0&-1&-1&5&-2\\0&5&5&-15&0\\0&2&2&-5&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+5r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&5&3\\0&-1&-1&5&-2\\0&0&0&10&-10\\0&0&0&5&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+\left(-\frac{1}{2}\right)r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&5&3\\0&-1&-1&5&-2\\0&0&0&10&-10\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因为行阶梯形矩阵有 3 个非零行,所以 $R(\boldsymbol{A})=3$.

再求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.由 $R(\boldsymbol{A})=3$ 知,$\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式为 3 阶.

在 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯矩阵中,非零行的第一个非零元分别位于 1,2,4 列.记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)$,则 $\boldsymbol{B}$ 的行阶梯形矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&5\\0&-1&5\\0&0&10\\0&0&0\end{pmatrix}$.显然 $R(\boldsymbol{B})=3$,故 $\boldsymbol{B}$ 中必有 3 阶非零子式.计算 $\boldsymbol{B}$ 的前 3 行构成的子式 $\begin{vmatrix}2&3&15\\1&2&5\\1&7&-10\end{vmatrix}=10\neq0$,则这个子式便是 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

例 2.32　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的秩.

解　对 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换变为行阶梯形矩阵，设 $\boldsymbol{B}$ 的行阶梯形矩阵为 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{b}})$.则 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯矩阵，故可从 $\boldsymbol{B}$ 的行阶梯矩阵同时求出 $R(\boldsymbol{A})$ 及 $R(\boldsymbol{B})$.

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\2&-4&8&0&2\\-2&4&-2&3&3\\3&-6&0&-6&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+2r_1\\ r_4+(-3)r_1}]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&4&2&0\\0&0&2&1&5\\0&0&-6&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&2&1&5\\0&0&-6&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+\left(-\frac{1}{5}\right)r_3}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此，$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{B})=3$.

例 2.33　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&\mu\end{pmatrix}$，已知 $R(\boldsymbol{A})=2$，求 λ 与 μ 的值.

解　$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_3+(-5)r_1]{r_2+(-3)r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&\lambda+3&-4\\0&-4&8&\mu-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&\lambda+3&-4\\0&0&5-\lambda&\mu-1\end{pmatrix}.$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，故 $\begin{cases}5-\lambda=0\\ \mu-1=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\lambda=5\\ \mu=1\end{cases}$.

2.6.3　几个矩阵秩的不等式

下面不加证明地给出几个常用的矩阵秩的不等式(假设其中运算都可行).

(i) $\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

特别地，当 $\boldsymbol{B}$ 为非零列矩阵 $\boldsymbol{b}$ 时，有 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant R(\boldsymbol{A})+1$.

(ii) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

(iii) $R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$.

(iv) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

例 2.34　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant n$.

证　因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{E}$，所以由不等式(ii)知

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R(2\boldsymbol{E})=n,$$

而 $R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，所以 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant n$.

例 2.35　证明：若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{C}$，且 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{C})$.

证　因 $R(\boldsymbol{A})=n$，知 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$，并有 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.所以 $\boldsymbol{PC}=\boldsymbol{PAB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

因 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以由定理 2.7 的推论 2 知，$R(\boldsymbol{C})=R(\boldsymbol{PC})$，而 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{B})$，故

$$R(\boldsymbol{C})=R(\boldsymbol{B}).$$

注：(i) 当 $\boldsymbol{A}$ 为方阵时，本例的结论包含在定理 2.7 的推论 2 中.

(ii) 本例另一种重要的特殊情形是 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$，这时结论为

设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

类似地有：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}$ 为行满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

这两个结论通常称为矩阵乘法的消去律.

习　题　2

(A)

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}$，且 $2(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B})-3\boldsymbol{A}=4(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

2. 计算下列乘积.

(1) $\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$；　(2) $(1,2,3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}(1,2,3)$；

(4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&4&5\\0&1&7&6\\2&3&0&0\end{pmatrix}$；　(5) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

(6) $\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\ \sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^2$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 2\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$,计算行列式 $|\boldsymbol{AB}|$.

5. 已知两个线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_3\\ x_2=2y_2+y_3\\ x_3=2y_1+y_2-y_3\end{cases},\quad \begin{cases}y_1=2z_1+z_2+z_3\\ y_2=z_1-2z_2+z_3\\ y_3=z_1-z_3\end{cases},$$

求从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.问:

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗?

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗?

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗?

7. 举反例说明下列命题是错误的.

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$;

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

8. 计算(n 为正整数).

(1) $\begin{pmatrix}3 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}^n$;　　(2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}^n$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称阵,证明:$\boldsymbol{AB}$ 是对称阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

10. 设列矩阵 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=1$,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{XX}^{\mathrm{T}}$,证明:$\boldsymbol{H}$ 是对称阵,且 $\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$.

11. 计算 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$.求 $|\boldsymbol{A}^8|$ 及 $\boldsymbol{A}^4$.

13. 用初等行变换将下列矩阵化为行最简形矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & -9 & -4 & 3\\ 0 & 4 & 8 & -1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\1&-1&2&-2&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&1\end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix}2&-3&7&4&3\\1&2&0&-2&-4\\-1&5&-7&-6&7\\3&-2&8&3&0\end{pmatrix}$.

14. 求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$；　(5) $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$；

(6) $\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$；　(7) $\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}$　$(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

15. 利用逆阵解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\2x_1+2x_2+5x_3=2\\3x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2\\2x_1-x_2-3x_3=1\\3x_1+2x_2-5x_3=0\end{cases}$.

16. 解下列矩阵方程.

(1) $\begin{pmatrix}-1&1\\-2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\0&-1\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&-2&-5\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1\\1&4\\0&5\end{pmatrix}$；　(4) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{X}$.

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$，求 $|3\boldsymbol{A}^*-4\boldsymbol{A}^{-1}|$.

20. 设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$（$k$ 为正整数），证明：$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$.

21. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 都可逆,并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$.

22. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵,证明 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆,并求 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$.

23. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}$,求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{PA}$ 为行最简形.

24. 在秩是 r 的矩阵中,有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式?有没有等于 0 的 r 阶子式?

25. 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,问 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的秩的关系怎样?

26. 求作一个秩是 4 的方阵,它的两个行向量是 $(1,0,0,1,0)$ 及 $(1,-1,0,1,0)$.

27. 求下列矩阵的秩,并求一个最高阶非零子式.

(1) $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}$.

28. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,证明:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

29. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\3&6&9&k\end{pmatrix}$. 问 k 为何值时,有 $R(\boldsymbol{A})=1$,$R(\boldsymbol{A})=2$,$R(\boldsymbol{A})=3$?

(B)

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^n$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,-2,1)$,$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{B}$.

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}(1,1,1,8)$,且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{B}$.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,证明其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵为 $\boldsymbol{A}^*$,证明:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$;

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

6. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 s 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆,求:

(1) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}$；　　(2) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

8. 证明：$R(\boldsymbol{A})=1$ 的充分必要条件是存在非零列矩阵 $\boldsymbol{a}$ 和非零行矩阵 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$.

9. 证明：$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

10. 证明：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

11. 某港口在某月份运到Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三地的甲、乙两种货物的数量以及两种货物一个单位的价格、重量、体积如表 2.5 所示.

表 2.5

地区 / 出口量 / 货物	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	单位价格/万元	单位重量/吨	单位体积/米^3
甲	2000	1200	800	0.2	0.02	0.12
乙	1200	1400	600	0.35	0.05	0.5

(1) 分别写出表示运到三地货物数量的矩阵 $\boldsymbol{A}$，以及表示货物单位价格、单位重量、单位体积的矩阵 $\boldsymbol{B}$；

(2) 设表示运到三地的货物总价值、总重量、总体积的矩阵为 $\boldsymbol{C}$，写出矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的关系，并由此计算出 $\boldsymbol{C}$.

12. 某城镇有 100000 人具有法定的工作年龄.目前有 80000 人找到了工作，其余 20000 人失业.每年有工作的人中的 10%将失去工作，而失业人口中的 60%将找到工作.假定该镇的工作适龄人口在若干年内保持不变.问三年后该镇工作适龄人口中有多少人失业？

13. 某接收者收到信息 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 43 & 17 & 48 & 25 \\ 105 & 47 & 115 & 50 \\ 81 & 34 & 82 & 50 \end{pmatrix}$，本公司的密钥矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，试破译此信息.

第3章　n 维向量组

本章以平面 $\mathbf{R}^2$ 和空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点为例引入 n 维向量的概念，介绍向量的线性运算法则，给出向量的线性组合与线性表示概念，重点讨论向量组的线性相关性的判定方法和求极大无关组的方法，分析向量组的秩与矩阵的秩的关系，本章最后还介绍实 n 维向量空间的相关知识以及应用实例.

n 维向量组的基本理论不仅是研究线性方程组解的结构的基础，同时在工程学、物理学、仿真学及经济管理等学科领域也有着广泛的应用.

3.1　n 维向量及其运算

3.1.1　n 维向量的概念

在平面 $\mathbf{R}^2$ 中，以点 O 为原点，取定平面直角坐标系，平面上的点 P 与二元有序数组 (x,y) 之间就有一个一一对应，这个数组称为点 P 的坐标.由解析几何知道，点 P 的坐标 (x,y) 也可以用以 O 为起点，以 P 为终点的向量 $\boldsymbol{OP}$ 表示，即 $\boldsymbol{OP}=(x,y)$，该向量称为二维向量.

类似地，在几何空间 $\mathbf{R}^3$ 中，点 P 的坐标可以表示为有序数组 (x,y,z)，也可以用向量表示为 $\boldsymbol{OP}=(x,y,z)$，该向量称为三维向量.

某商场一年中，从1季度到4季度的销售额可以用一个有序数组 (a_1,a_2,a_3,a_4) 来表示；某学校的数学班共招收35名学生，这些学生入学时的数学成绩也可以用一个有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_{35})$ 来表示.有序数组在生产和生活中有着十分广泛的应用，有必要对它们进行进一步的探讨和研究.

定义 3.1　由 n 个数所组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 或 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为 n 维向量，其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为向量的第 i 个分量.排成一列的向量 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 又称为 n 维列向量，一般用小写黑体希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 表示；排成一行的向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 又

称为 n 维行向量，一般用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}},\cdots$表示.$n$ 维向量的分量一般用带有下标的小写字母 $a_i,b_j,c_k,\cdots$表示.

这里的 n 维列向量和行向量也是第 2 章提到的列矩阵和行矩阵.

今后所讨论的向量如不特殊说明，一般都指列向量.为书写方便，也常用行矩阵的转置$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 来表示 n 维列向量.

分量都是实数的向量称为实向量；分量是复数的向量称为复向量，本书中研究的向量如不特殊说明，一般都指实向量.

分量都是 0 的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

n 维实向量的全体构成的集合 $\mathbf{R}^n=\{x\mid \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$称为 n 维向量空间.n 维向量被广泛应用于生产、生活和工程实践中，下面来看一个 n 维向量的实际例子.确定空中飞机的状态，需要以下 6 个参数：

飞机重心在空间的位置参数包括横坐标 x，纵坐标 y 和竖坐标 z，以及机身仰角 $\varphi\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，机翼的转角 $\psi(-\pi\leqslant\psi\leqslant\pi)$和机身的水平转角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$.故要确定飞机的状态，需用 6 维向量 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(x,y,z,\varphi,\psi,\theta)$表示.

3.1.2　n 维向量的线性运算

由于向量是一种特殊的矩阵，因而有关矩阵的运算也适用于向量.

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$.

如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的对应分量都相等，即 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称这两个向量相等，记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的各分量的相反数组成的向量，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记为$-\boldsymbol{\alpha}$，即

$$-\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\vdots\\-a_n\end{pmatrix}.$$

1. 向量的加法与减法运算

定义 3.2　向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的各对应分量分别相加的运算，称为两个向量的加法运算，运算的结果称为两个向量的和，记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}.$$

由向量的加法运算及负向量的定义,可以类似地定义向量的减法运算 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$,即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\\vdots\\a_n-b_n\end{pmatrix}.$$

注:只有维数相同的向量才能进行加法运算和减法运算.

2. 向量的数乘运算

定义 3.3　向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的各个分量都乘以实数 k 后所得的向量,称为数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积,简称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘运算,记为 $k\boldsymbol{\alpha}$,即

$$k\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}.$$

向量的加法和数乘运算,统称为向量的线性运算.

由定义 3.3 易证,向量的线性运算满足以下的运算规律:

(i) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(ii) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$;

(iii) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(iv) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(v) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

(vi) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(vii) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}=l(k\boldsymbol{\alpha})$;

(viii) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

其中,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是任意 n 维向量,k,l 是任意实数.

例 3.1　设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(-1,3,2,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}=(2,0,-1,3)^{\mathrm{T}}$,(1) 求 $2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}+4\boldsymbol{\gamma}$;(2)若向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}-4\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{x}$.

解　(1)

$$\begin{aligned}&2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}+4\boldsymbol{\gamma}\\&=2(1,0,2,5)^{\mathrm{T}}-3(-1,3,2,-2)^{\mathrm{T}}+4(2,0,-1,3)^{\mathrm{T}}\\&=(2,0,4,10)^{\mathrm{T}}-(-3,9,6,-6)^{\mathrm{T}}+(8,0,-4,12)^{\mathrm{T}}\\&=(13,-9,-6,28)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

(2) 由 $3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}-4\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\frac{1}{4}(3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma})\\&=\frac{1}{4}[3(1,0,2,5)^{\mathrm{T}}-(-1,3,2,-2)^{\mathrm{T}}+2(2,0,-1,3)^{\mathrm{T}}]\\&=\left(2,-\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{23}{4}\right)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

3.2　向量组的线性组合与线性表示

向量一般并不孤立存在,而是相互联系着.为研究向量与向量之间的关系,先给出向量组的概念.

3.2.1　向量组

由若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合,称为向量组.

在例 3.1 中,3 个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是 4 维的列向量,它们构成了一个向量组;而向量 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,0)$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1)$ 维数不同,因而不能构成向量组.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 的每一列可以看成一个 m 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$,$j=1,2,\cdots,n$,由它们组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组;反之,n 个 m 维列向量组成的向量组 $\boldsymbol{A}$:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可以对应一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.类似地,$\boldsymbol{A}$ 的每一行也可以看成一个 n 维行向量 $\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$,$i=1,2,\cdots,m$,由它们组成的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组;而由 m 个 n 维行向量组成的向量组 $\boldsymbol{A}$:$\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 也可以对应一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

可见,含有有限个向量的有序向量组可以与矩阵一一对应.

在向量组中,有一个向量组较为特殊,它由 n 维单位矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ 的列向量组 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 构成,称为 n 维单位坐标向量组,其中的每个向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 称为 n 维单位坐标向量.

3.2.2 向量组的线性组合与线性表示

一个向量组内的各向量之间所具有的线性关系是下一章研究线性方程组通解的基础,为此我们先给出线性组合与线性表示的概念.

定义 3.4 给定向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和一组任意实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,则表达式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 称为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个线性组合,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为组合系数(或权重).

如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能够表示为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的线性组合,即存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$,则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示.

在例 3.1 中,向量 $2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}+4\boldsymbol{\gamma}$ 是向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 的一个线性组合.由向量 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{4}(3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma})=\frac{3}{4}\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}$ 可知,向量 $\boldsymbol{x}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

例 3.2 试证:任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 都能由 n 维单位坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表示.

证 由于 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$,故任意 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都能由 n 维单位坐标向量组线性表示.

例 3.3 零向量是任意一个同维数向量组的线性组合.

证 由于 $\boldsymbol{0}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_n$,故结论得证.

例 3.4 向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 都能由该向量组线性表示.

证 由 $\boldsymbol{\alpha}_i=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_i+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_m,i=1,2,\cdots,m$,即可得证.

例 3.5 设有 m 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{3.1}$$

试将该方程组表示为向量组的线性组合.

解　记

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j=1,2,\cdots,n), \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组(3.1)可以表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}. \tag{3.2}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是维数相同的列向量,它们构成了一个向量组.由式(3.2)知,向量 $\boldsymbol{b}$ 是该向量组的一个线性组合.

该例题说明:一方面,讨论线性方程组(3.1)是否有解,就相当于讨论是否存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得线性组合 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 成立.另一方面,若向量 $\boldsymbol{b}$ 能由该向量组线性表示,则说明方程组(3.1)有解.

以上讨论了向量组内向量的线性表示,下面继续讨论向量组之间的线性表示及等价关系.

定义 3.5　给定两个向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$,若 $\boldsymbol{A}$ 组中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j(1\leqslant j\leqslant m)$都能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示,则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示.若这两个向量组能相互线性表示,则称这两个向量组等价,记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

把向量组 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所构成的矩阵分别记为$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$和$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$,若 $\boldsymbol{A}$ 组能由 $\boldsymbol{B}$ 组线性表示,则由定义知每个 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 都能由 $\boldsymbol{B}$ 组线性表示,即存在一组数 $k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{sj}$,使得

$$\boldsymbol{\alpha}_j = k_{1j}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{2j}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_{sj}\boldsymbol{\beta}_s = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{sj} \end{pmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,m$$

则有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m) = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sm} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{K}_{s\times m},$$

矩阵 $\boldsymbol{K}_{s\times m}=(k_{ij})_{s\times m}$ 称为这一线性表示的系数矩阵.

例 3.6 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,且 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$.证明:$\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

证 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 按行分块,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组.

已知 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$,则存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_m=(k_{ij})$,使得 $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,即

$$\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}=k_{i1}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+k_{i2}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+k_{im}\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

可见,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组能由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示.

另一方面,由 $\boldsymbol{P}_m$ 可逆,有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_m^{-1}\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{B}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{A}$,故 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 也能由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 线性表示.从而,$\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

同理,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价,则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是任给的三个向量组,根据定义,可得出向量组之间的等价关系具有的三条基本性质:

(i) 自反性:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$,即任意一个向量组与其自身等价.

(ii) 对称性:若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$.

(iii) 传递性:若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

3.3 向量组的线性相关性

给定一个向量组,在该向量组中可能有向量能由其余向量线性表示,也可能有向量不能由其余向量线性表示,这是向量组的一种重要性质——向量组的线性相关性.这个性质对研究线性方程组解的结构有重要作用,本节就来给出这个性质.

3.3.1 线性相关与线性无关概念

定义 3.6 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,

使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}, \tag{3.3}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

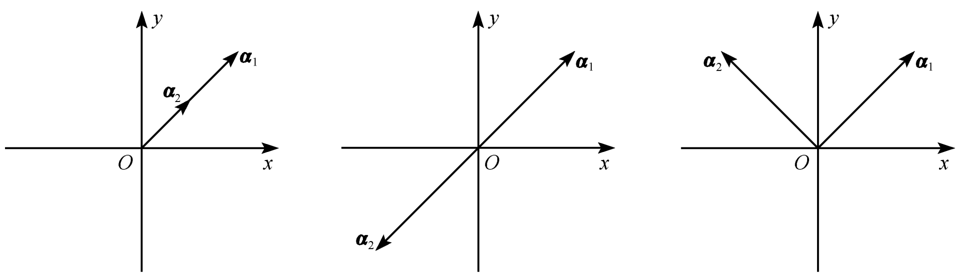
反之,如果只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时,式(3.3)才成立,则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

由定义不难得到以下结论:

(i) 对于只含一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组,当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时,该向量组线性相关;当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时,该向量组线性无关.

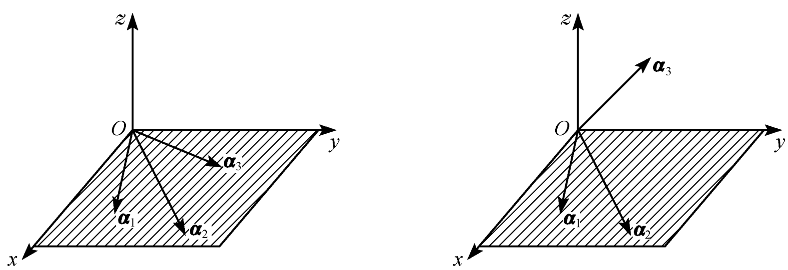
(ii) 对于含有两个向量的向量组,其线性相关的充分必要条件是这两个向量的对应分量成比例.

(iii) 两个向量线性相关的几何意义是这两个向量共线,如图 3.1 所示.三个向量线性相关的几何意义是这三个向量共面,如图 3.2 所示.



$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关　　$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关

图 3.1　两个向量的线性相关与线性无关



$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关　　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

图 3.2　三个向量的线性相关与线性无关

结合解析几何中共线与共面概念,我们还可以进一步得到:

(i) 平面上存在两个线性无关向量;平面上任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线的充分必要条件是 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$,$k\in\mathbf{R}$;平面上任意三个向量都线性相关.

(ii) 空间中存在三个线性无关向量;空间中任意三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$,$k_1,k_2\in\mathbf{R}$;空间中任意四个向量都线性相关.

例 3.7　试证:包含零向量的向量组是线性相关的.

证 不妨设向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{0},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$.因为

$$0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+1\cdot\mathbf{0}+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

其中系数 $0,0,\cdots,1,\cdots,0$ 不全为零,故该向量组线性相关.

例 3.8 判断 n 维单位坐标向量组的线性相关性.

解 不妨设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}\quad 或\quad k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

整理后有$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$,即 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

由线性无关定义可知,n 维单位坐标向量组线性无关.

例 3.9 讨论下列向量组的线性相关性.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,2)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,9,16)^{\mathrm{T}}$,
$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,8,27,64)^{\mathrm{T}}$.

解 (1) 设有一组数 k_1,k_2,k_3,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,即

$$k_1\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad 或\quad \begin{pmatrix}3k_1+2k_2+2k_3\\2k_1+4k_2\\2k_1+2k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

等价于方程组$\begin{cases}3k_1+2k_2+2k_3=0\\2k_1+4k_2=0\\2k_1+2k_3=0\end{cases}$.

由于系数行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&2\\2&4&0\\2&0&2\end{vmatrix}=0$,故齐次线性方程组有非零解.

$k_1=-2,k_2=1,k_3=2$ 就满足上述方程组,故有 $-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的.

(2) 设有一组数 k_1,k_2,k_3,k_4 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$,即

$$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\4\\9\\16\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}1\\8\\27\\64\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad 或\quad \begin{pmatrix}k_1+k_2+k_3+k_4\\k_1+2k_2+4k_3+8k_4\\k_1+3k_2+9k_3+27k_4\\k_1+4k_2+16k_3+64k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

等价于方程组$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=0\\ k_1+2k_2+4k_3+8k_4=0\\ k_1+3k_2+9k_3+27k_4=0\\ k_1+4k_2+16k_3+64k_4=0\end{cases}$.该方程组的系数行列式转置后是范德蒙德行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix},$$

其值 $D^{\mathrm{T}}=(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=12\neq0$.故 $D=D^{\mathrm{T}}\neq0$,由第 1 章定理 1.3 知,该方程组只有零解,即 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ 是其唯一解,从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

3.3.2 向量组的线性相关性的判定

如何进行向量组线性相关性的判定,我们有以下几个实用的定理和结论,从这些定理和结论中也可以看出向量组的线性相关性与线性表示之间的密切关系.

定理 3.1 向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant2)$线性相关的充分必要条件是在该向量组中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证 必要性.由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性相关知,存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$,不妨设 $k_1\neq0$,则有

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-\frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由其余 $m-1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

充分性.设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1=k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$,则有

$$-1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

而$-1,k_2,k_3,\cdots,k_m$ 不全为零,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. 证毕

推论 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant2)$线性无关的充分必要条件是其中任意一个向量都不能由其余的 $m-1$ 个向量线性表示.

定理 3.2 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|\neq0$.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}$,$\cdots$,$\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组,

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 成立,即

$$\begin{pmatrix} k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n} \\ k_1a_{21}+k_2a_{22}+\cdots+k_na_{2n} \\ \vdots \\ k_1a_{n1}+k_2a_{n2}+\cdots+k_na_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

上式等价于齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 只有零解,亦即方程组的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 证毕

推论 1 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

推论 2 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组线性无关.

对于一个给定的向量组,其中的部分向量也能够反映出这个向量组的线性关系,称向量组中的部分向量组成的向量组为原向量组的部分组.

定理 3.3 给定向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,若 $\boldsymbol{A}$ 有一个部分组线性相关,则 $\boldsymbol{A}$ 必线性相关.若 $\boldsymbol{A}$ 线性无关,则其部分组也线性无关.

证 不失一般性,不妨设由 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个向量构成的部分组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\leqslant m)$线性相关.

当 $r=m$ 时,结论显然成立.

当 $r<m$ 时,存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

从而存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,0,\cdots,0$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

因此向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性相关.

“若 $\boldsymbol{A}$ 线性无关,则其部分组也线性无关”是其逆否命题,显然成立. 证毕

定理 3.4 设向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 必能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示,且表示式唯一.

证 由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性相关,则有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_{m+1}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}. \tag{3.4}$$

下面说明 $k_{m+1}\neq 0$.假设 $k_{m+1}=0$,则式(3.4)就变为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$,即 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零,这与已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾.因此,有 $k_{m+1}\neq 0$,由式(3.4)可得

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k_{m+1}}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_{m+1}}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k_{m+1}}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

下面再证表示式唯一.假设有两个表示式 $\boldsymbol{\beta}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+b_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 成立,则有

$$(a_1-b_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(a_2-b_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(a_m-b_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,故有 $a_1-b_1=a_2-b_2=\cdots=a_m-b_m=0$,即 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_m=b_m$.因此,表示式唯一.　证毕

例 3.10　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,证明:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

证　(1) 因 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,由定理 3.3 知,$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,由定理 3.4 知,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) 用反证法.假设 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,由(1)已证得 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,因此,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.这与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关矛盾.

例 3.11　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,试证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

证　设有一组数 k_1,k_2,k_3,k_4,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathbf{0}. \tag{$*$}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,由定理 3.4 知,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,即存在一组数 l_1,l_2,l_3,使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

代入式($*$),有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(\boldsymbol{\alpha}_5-l_1\boldsymbol{\alpha}_1-l_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_3\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$,
整理得 $(k_1-k_4l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-k_4l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-k_4l_3)\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_5=\mathbf{0}$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,得

$$k_1-k_4l_1=k_2-k_4l_2=k_3-k_4l_3=k_4=0,$$

即 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$,因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

将一个已知向量组 $\boldsymbol{A}$ 的每个向量都添加相同个数的分量后得到一个新的向量组 $\boldsymbol{B}$,称向量组 $\boldsymbol{B}$ 为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的延长向量组.

例如,将一个 3 维向量组 $\boldsymbol{A}$ 的每个向量都增加 2 个分量就可以得到一个 5 维的向量组 $\boldsymbol{B}$.

下面就来研究向量组与其延长向量组之间的关系.

定理 3.5　将 r 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的每个向量都添加一个分量,使之变成 $r+1$ 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$.

(i) 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性相关;

(ii) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关.

证　(i) 设 r 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成矩阵 $\boldsymbol{A}$,则 $r+1$ 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,$

$\boldsymbol{\beta}_m$ 构成的矩阵可记为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 是由添加的各个分量依次排列构成的行向量.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关,所以存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0},$$

等价于$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Ak}\\ \boldsymbol{bk}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}$.

由分块阵的乘法运算,可得 $\boldsymbol{Ak}=\boldsymbol{0}$,即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$,其中 k_1,$k_2,\cdots,k_m$ 不全为零.

因此,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性相关.

(ii)是(i)的逆否命题,显然成立.　证毕

推论　将 r 维向量组 $\boldsymbol{A}$ 的每个向量都添加 $n-r$ 个分量,使之变成 n 维向量组 $\boldsymbol{B}$.

(i) 若 n 维向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性相关,则 r 维向量组 $\boldsymbol{A}$ 也线性相关;

(ii) 若 r 维向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关,则 n 维向量组 $\boldsymbol{B}$ 也线性无关.

其证明与定理 3.5 的证明类似,请读者自己完成.

定理 3.6　设向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 n 维向量组,若 $n<m$,则 $\boldsymbol{A}$ 必线性相关.

证　由 $n<m$,对 n 维向量组 $\boldsymbol{A}$ 的每个分量都添加 $m-n$ 个零分量,得到 m 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$.

方阵$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$的后 $m-n$ 行元素全为零,故该 m 阶方阵的行列式等于0.由定理 3.2 的推论 1 知,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.再由定理 3.5 的推论知,向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.　证毕

推论　$n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

定理 3.7　若向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,并且 $m>s$,则向量组 $\boldsymbol{A}$ 必线性相关.

证　已知向量组 $\boldsymbol{A}$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示,则存在矩阵 $\boldsymbol{K}_{s\times m}$,使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{K}_{s\times m}.\tag{3.5}$$

将矩阵 $\boldsymbol{K}_{s\times m}$ 按列向量分块,可得 $\boldsymbol{K}_{s\times m}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m)$,这里每个 $\boldsymbol{\gamma}_i(i=1,2,\cdots,m)$都是 s 维向量.注意到这里 $m>s$,因此由定理 3.6 知 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 线性相关,故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{K}_{s\times m}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

在等式(3.5)的两边同时右乘$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}$,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{K}_{s\times m}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

即有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

因 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零,故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. 证毕

推论 1 若向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,并且向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关,则有 $m\leqslant s$.

推论 2 等价的线性无关的向量组必含有相同个数的向量.

向量组的线性相关性不仅是求解线性方程组的基础,在其他学科和数学的其他分支也有着较重要的应用,下面就来看一个较典型的例子.

例 3.12 求不定积分 $I=\int\frac{A\cos x+B\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$ (其中 $a^2+b^2\neq 0$).

解 分三种情况来讨论.

(i) 若$(A,B)=(a,b)$,则 $I_1=\int\mathrm{d}x=x+C_1,C_1\in\mathbf{R}.$

(ii) 若$(A,B)=(b,-a)$,则 $I_2=\int\frac{b\cos x-a\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2,C_2\in\mathbf{R}.$

(iii) 由 $a^2+b^2\neq0$ 可知向量组$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$线性无关.不妨设$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$,即$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$,应用克莱姆法则,得方程组的解为

$$k_1=\frac{aA+bB}{a^2+b^2},\quad k_2=\frac{bA-aB}{a^2+b^2}.$$

由 $I=\int\frac{A\cos x+B\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=\int A\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x+\int B\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$,可令

$$f(x)=\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x},\quad g(x)=\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x},$$

则

$$\int[af(x)\mathrm{d}x+bg(x)]\mathrm{d}x=I_1,\int\ [bf(x)-ag(x)]\,\mathrm{d}x=I_2.$$

从而

$$\begin{aligned}I&=\int[Af(x)+Bg(x)]\mathrm{d}x=\int(f(x),g(x))\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\mathrm{d}x\\&=\int(f(x),g(x))\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}\mathrm{d}x\\&=\int(af(x)+bg(x),bf(x)-ag(x))\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}\mathrm{d}x\\&=k_1\int[af(x)+bg(x)]\mathrm{d}x+k_2\int[bf(x)-ag(x)]\mathrm{d}x\\&=k_1I_1+k_2I_2.\end{aligned}$$

3.4 极大无关组与向量组的秩

由前面讨论知道,向量组线性相关时,至少有一个向量能由其余向量线性表示,那么进一步考虑能否在一个向量组中找到一个线性无关的部分组,其余向量都能由这个部分组线性表示呢?这就是本节将介绍的向量组的极大无关组概念.

3.4.1 极大无关组

定义 3.7 设有向量组 $\boldsymbol{A}$,如果在 $\boldsymbol{A}$ 中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,满足:

(i) 向量组 $\boldsymbol{A}_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,

(ii) 向量组 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个向量(如果 $\boldsymbol{A}$ 中有 $r+1$ 个向量)都线性相关,

那么称向量组 $\boldsymbol{A}_0$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大线性无关组,简称极大无关组.

注:(i) 只含零向量的向量组是线性相关的,因此它没有极大无关组;而含有非零向量的向量组都有极大无关组.

(ii) 线性无关向量组的极大无关组就是向量组本身.

例 3.13 试求 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组.

解 由例 3.8 可知,n 维单位坐标向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

是线性无关的.

由定理 3.6 的推论可知，任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关.因此，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组.

事实上，$\mathbf{R}^n$ 中任意 n 个线性无关向量构成的向量组都是 $\mathbf{R}^n$ 的极大无关组.

例 3.14　讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ 的线性相关性，并求出一个极大无关组.

解　由于向量组所含向量个数 3 大于向量的维数 2，故由定理 3.6 知，该向量组线性相关.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 构成的矩阵的行列式 $\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是该向量组的一个极大无关组.

同理可得 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是该向量组的极大无关组.

由例 3.13 和例 3.14 可知，一个向量组的极大无关组一般并不唯一.

由定义 3.7 易得极大无关组的以下性质：

(i) 向量组 $\boldsymbol{A}$ 与它的任意一个极大无关组 $\boldsymbol{A}_0$ 等价.

(ii) 向量组的所有极大无关组相互等价.

(iii) 向量组的所有极大无关组所含向量的个数相等.其中，线性无关向量组的极大无关组所含向量个数等于向量组本身所含向量个数；线性相关向量组的极大无关组所含向量个数小于向量组本身所含向量个数.

下面对性质(i)进行证明.

证　一方面，$\boldsymbol{A}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个部分组，故 $\boldsymbol{A}_0$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 线性表示；另一方面，对 $\boldsymbol{A}$ 中任一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$r+1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故由定理 3.4 知，$\boldsymbol{\alpha}$ 能由 $\boldsymbol{A}_0$ 线性表示，即 $\boldsymbol{A}$ 能由 $\boldsymbol{A}_0$ 线性表示.因此，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_0$ 等价.

由向量组等价的传递性可得性质(ii)成立.

由这 3 个性质可知，例 3.14 中的向量组与 3 个极大无关组中的任意一个等价，且这 3 个极大无关组相互等价，所含向量个数都是 2.

由定理 3.4 易得极大无关组的两个等价定义：

等价定义 Ⅰ　设向量组 $\boldsymbol{A}_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个部分组，且满足：

(i) $\boldsymbol{A}_0$ 线性无关，

(ii) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个向量能由 $\boldsymbol{A}_0$ 线性表示，

那么向量组 $\boldsymbol{A}_0$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组.

等价定义 Ⅱ　设向量组 $\boldsymbol{A}_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个部分组，且满足：

(i) $\boldsymbol{A}_0$ 线性无关，

(ii) $\boldsymbol{A}$ 中其余向量能由 $\boldsymbol{A}_0$ 线性表示，

那么向量组 $\boldsymbol{A}_0$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组.

3.4.2 向量组的秩

由极大无关组的性质(iii)可推知,向量组的任意一个极大无关组所含向量的个数是一个反映向量组线性相关性的本质的量,这个量对研究向量组有着十分重要的意义。为此,引入向量组的秩的概念.

定义 3.8 向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组所含向量的个数,称为该向量组的秩,记为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

规定:只含零向量的向量组的秩为 0.

由定义 3.8 易知:

(i) 任意含有非零向量的向量组的秩大于或等于 1.

(ii) 线性无关向量组的秩等于向量组所含向量个数;线性相关向量组的秩小于向量组所含向量个数.

(iii) 在秩为 r 的向量组中,任意 r 个线性无关向量都是这个向量组的极大无关组.

定理 3.8 若向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\leqslant R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$.

证 设向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 的极大无关组分别为 $\boldsymbol{A}_0:\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ip}$ 与 $\boldsymbol{B}_0:\boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jq}$,由极大无关组的性质(i)可知向量组 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_0$ 等价,向量组 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 等价.已知 $\boldsymbol{A}$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 线性表示,故 $\boldsymbol{A}_0$ 可由 $\boldsymbol{B}_0$ 线性表示.又知 $\boldsymbol{A}_0$ 线性无关,故由定理 3.7 的推论 1 可知 $p\leqslant q$.由于 $\boldsymbol{A}_0$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 所含向量的个数 p 和 q 分别等于向量组 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩,因而有

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\leqslant R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s).$$ 证毕

推论 1 等价的向量组的秩相等.

证 设向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价,它们的秩分别为 r 和 s.一方面,$\boldsymbol{A}$ 能由 $\boldsymbol{B}$ 线性表示,则有 $r\leqslant s$;另一方面,$\boldsymbol{B}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 线性表示,故 $s\leqslant r$.综合这两方面的结论,有 $r=s$,即等价的向量组的秩相等. 证毕

以上定义、定理及推论中向量组所含向量的个数都可以推广到无限个。

推论 2 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,则有 $R(\boldsymbol{C})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$(该推论即是第 2 章矩阵秩的不等式之(iii)).

证 由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,知矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示,从而矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组的秩小于等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩,即

$$R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{A}). \tag{3.6}$$

又由于 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,故有 $R(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$,即

$$R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{B}). \tag{3.7}$$

综合式(3.6)和式(3.7),即得 $R(\boldsymbol{C})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$. 证毕

3.4.3　向量组的秩与矩阵的秩的关系

含有限个向量的有序向量组可以构成一个相应的矩阵.矩阵的秩的性质在第 2 章已做了深入研究,因此,可以通过求矩阵的秩来求向量组的秩.

定理 3.9　矩阵的秩等于它的列向量组的秩,也等于它的行向量组的秩.

证　不妨设矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times m}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,且 $R(\boldsymbol{A})=r$.

由矩阵的秩的定义知,存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶子式 $D_r\neq 0$,从而 D_r 所在的 r 个列向量线性无关;又 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式 $D_{r+1}=0$,故 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关.因此,D_r 所在的 r 列就是列向量组的一个极大无关组,所以列向量组的秩等于 r.

同理可证,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩也等于 r.　证毕

推论　矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩.

由上面定理的证明可知,若 D_r 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式,则 D_r 所在的 r 列就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组.

定理 3.10　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的秩 $R(\boldsymbol{A})$小于向量个数 m;向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=m$.

定理 3.11　矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性,并保持线性表示式的系数不变.

证　不妨设将矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times m}$施行一次初等行变换,变为矩阵 $\boldsymbol{B}$.

先将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块,有 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组有线性关系

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},\tag{3.8}$$

即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换相当于用相应的初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$,于是经过一次初等行变换后的矩阵为 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.将 $\boldsymbol{B}$ 按列分块,有 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$.

由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,可得 $\boldsymbol{PA}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,亦即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组也满足线性关系

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}. \tag{3.9}$$

由于初等矩阵都是可逆矩阵,如果式(3.8)成立,则式(3.9)也成立.因此,经过有限次的初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性,并保持线性表示式的系数不变. 证毕

由以上定理,可以得到求向量组的秩和极大无关组的步骤:

(i) 把向量组按列向量构造一个矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(ii) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的首个非零元所在各列对应的 $\boldsymbol{A}$ 中的各列向量构成的向量组就是 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组,行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的行数就是向量组的秩.

(iii) 欲将向量组中其余向量用极大无关组线性表示,则需将行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 继续化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{C}$,写出 $\boldsymbol{C}$ 中非零行的首个系数为 1 的元素所在的列向量与其余列向量之间的线性表示式,由定理 3.10 可知,这个表示式也是 $\boldsymbol{A}$ 中对应列向量之间的线性表示式.

例 3.15 已知 3 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,试判断向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性相关性.

解 方法一.设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.可将已知条件写成矩阵的乘积,即

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&2&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{AK},$$

这里 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&2&2\end{pmatrix}$.

由于 $|\boldsymbol{K}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&2&2\end{vmatrix}=6\neq0$,所以 $\boldsymbol{K}$ 是可逆阵,故有 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{AK})=R(\boldsymbol{A})$.由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故 $R(\boldsymbol{A})=3$,所以 $R(\boldsymbol{B})=3$,又由定理 3.9 知 $\boldsymbol{B}$ 的列秩等于 $\boldsymbol{B}$ 的秩,且 $\boldsymbol{B}$ 中只含 3 个向量,从而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

方法二.不妨设存在三个常数 k_1,k_2,k_3,使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$.将已知条件中的三个等式代入并整理,得

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(2k_2+2k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故有$\begin{cases}k_1+\ k_3=0\\2k_1+\ k_2=0\\2k_2+2k_3=0\end{cases}$.该齐次线性方程组的系数行列式$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&2&2\end{vmatrix}=6\neq0$,由克莱姆法则,得到该方程组的唯一解 $k_1=k_2=k_3=0$,故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

方法三. $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&2&2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{K}.$

这里 $\boldsymbol{K}$ 是可逆阵,并可求得

$$\boldsymbol{K}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

故有$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{K}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$,即

$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{6}(-\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3)$,因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示;又由题设知,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,从而两个向量组等价.故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关.

例 3.16　设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)^{\mathrm{T}}$,求该向量组的秩和一个极大无关组,并把不属于极大无关组的其余向量用极大无关组线性表示.

解　将所给向量构成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$,并进行初等行变换,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-2)r_1\\r_4+(-4)r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4+(-2)r_2\\ r_3\leftrightarrow r_4}]{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\ r_3+(-3)r_2}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

故 $R(\boldsymbol{A})=3$,从而 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$.

$\boldsymbol{B}$ 中三个非零行的首个非零元分别在 1,2,4 列,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为该向量组的一个极大无关组.

为将 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示,继续将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{C}$,即

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow[r_1+(-1)r_3]{r_3\times\left(-\frac{1}{4}\right)}\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4,\boldsymbol{\gamma}_5).$$

易得 $\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=3\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2+\boldsymbol{\gamma}_4$,

所以

$$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4.$$

例 3.17　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(1,2,a),\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(1,1,2)$,问当 a 如何取值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}$ 的秩为 3,并求它的一个极大无关组.

解　将所给向量转置为列向量后,构成一个 3×4 矩阵并施行初等行变换,有

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&1\\1&1&a&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&1\\0&1&a-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&1\\0&0&a-3&0\end{pmatrix}.$$

可见,当 $a\neq3$ 时,该向量组的秩等于 3,且 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 是向量组的一个极大无关组.

由例 3.17 可知,在讨论向量组的线性相关性时,如果所讨论的向量均是行向量,则可以将行向量先转置为列向量,再进行讨论.另外,也可以用初等列变换将行向量构成的矩阵化为列阶梯形和列最简形,但我们一般并不习惯进行初等列变换,建议采用前者进行讨论,更为方便有效.

3.5　向量空间

本章 3.1 节中给出了 n 维向量空间的概念,并讨论了向量的线性运算.实际上,若对任何一个向量集合中的向量进行线性运算后,其结果仍在该集合中,就可以称此向量集合为一个向量空间.本节将介绍向量空间及相关概念.

3.5.1　向量空间

定义 3.9　设 V 为 n 维向量的集合，若 V 非空，且对于向量的加法及数乘两种运算封闭，即满足：

(i) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\beta}\in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$，

(ii) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$k\in\mathbf{R}$，有 $k\boldsymbol{\alpha}\in V$，

就称集合 V 为一个向量空间.

显然，向量空间 V 中向量的线性运算满足 3.1.2 节中介绍的八条运算规律(见 P64).

例 3.18　$V=\{\mathbf{0}\}$ 和 $V=\mathbf{R}^n$ 为向量空间.

证　显然，$V=\{\mathbf{0}\}$ 和 $V=\mathbf{R}^n$ 对向量的线性运算封闭，故为向量空间，这也是前面把全体 n 维向量的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维向量空间的原因.

特别地，称 $V=\{\mathbf{0}\}$ 为零空间，任意一个 n 维向量空间都包含零空间.

对于 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$，当 $n\leqslant 3$ 时，有直观的几何意义：

当 $n=1$ 时，即把实数看作向量，一维向量空间 $\mathbf{R}^1$ 表示数轴；

当 $n=2$ 时，二维向量空间 $\mathbf{R}^2$ 表示平面；

当 $n=3$ 时，三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 表示几何空间；

当 $n>3$ 时，$\mathbf{R}^n$ 没有直观的几何意义，是解析几何中空间概念的推广.

例 3.19　试判断下列集合是否构成向量空间：

(1) $V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,0)\mid x_1,x_2\in\mathbf{R}\}$；

(2) $V_2=\{\boldsymbol{x}=(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$；

(3) $V_3=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$.

解　(1) 对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,0)\in V_1$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,0)\in V_1$，$k\in\mathbf{R}$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,0)\in V_1,\quad k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,0)\in V_1.$$

故 V_1 是向量空间.

(2) 对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}=(1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in V_2$，当 $k\neq 1\in\mathbf{R}$ 时，有 $k\boldsymbol{\alpha}=(k,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}}\notin V_2$，故 V_2 不构成向量空间.

(3) 对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V_3$，$\boldsymbol{\beta}\in V_3$，总有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，则有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_3$；又对 $\forall\,k\in\mathbf{R}$，有 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，故 $k\boldsymbol{\alpha}\in V_3$.

因此，V_3 构成向量空间，即齐次线性方程组的解集构成一个向量空间，该空间称为齐次线性方程组的解空间.

例 3.20　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in R^n$，试证集合 $L=\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2\mid k_1,k_2\in\mathbf{R}\}$ 构成一个向量空间.

证　对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in L$，$k\in\mathbf{R}$，由 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(\lambda_1+\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2+\mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2\in L,\quad k\boldsymbol{\alpha}=(kk_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(kk_2)\boldsymbol{\alpha}_2\in L,$$

故 L 构成一个向量空间.

这个向量空间称为由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 生成的向量空间.

一般地,由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的向量空间为

$$L=\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in\mathbf{R}\}.$$

易证如下结论:等价的向量组生成相同的向量空间.

3.5.2　向量空间的基与维数

通过前面的学习可知,一个向量空间就是一组向量的集合,将向量组的极大无关组及秩的概念推广到向量空间中,就得到向量空间的基与维数的概念.

定义 3.10　设 V 是向量空间,若有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in V$,且满足:

(i) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,

(ii) V 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间 V 的一个基,数 r 称为向量空间 V 的维数,记为 $\dim V=r$,并称 V 为 r 维向量空间.

由于零空间中没有线性无关的向量,故零空间没有基,规定零空间是 0 维向量空间.

向量空间 V 是向量组的集合,故 V 的基就是向量组的极大无关组,V 的维数就等于向量组的秩.由于向量组的极大无关组一般并不唯一,因此 V 的基一般也不唯一.

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基,则 V 可以表示为

$$V=\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r \mid k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbf{R}\}.$$

此时,V 也称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 生成的向量空间.

例 3.21　求下列向量空间的一个基,并指出该空间的维数.

(1) 向量空间 $\mathbf{R}^n$;

(2) 向量空间 $V=\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$.

解　(1) $\mathbf{R}^n$ 中的单位坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关,且对于 $\forall\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,都有 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$.

由定义 3.10 知,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基,且 $\mathbf{R}^n$ 的基含有 n 个向量,因此 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维向量空间.

由例 3.13 可知,任意 n 个线性无关的 n 维向量构成的向量组都是 $\mathbf{R}^n$ 的极大无关组,因此也是 $\mathbf{R}^n$ 的基.

(2) V 的一个基可以取为 $\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,由此知 V 的维数是 $n-1$.

考虑例 3.19 中齐次线性方程组的解空间 $S=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$,若能找到解空间的一个基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$,则解空间就可表示为

$$S=\{\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} \mid c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}\in\mathbf{R}\}.$$

定义 3.11　如果在向量空间 V 中取定一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，则对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in V$，$\boldsymbol{x}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，且表示式唯一，即存在唯一一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

称数组 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标.

特别地，在 $\mathbf{R}^n$ 中取定单位坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为基，则以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为分量的向量 $\boldsymbol{x}$ 可以表示为 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$，可见向量在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标就是该向量的分量.把 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的标准基.

例 3.22　考虑 $\mathbf{R}^2$ 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$，且 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{x}$.又知 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{y}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标.

解　由已知可得 $\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2=4\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

设 $\boldsymbol{y}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标为 $(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}$，则有 $y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{y}$，即

$$y_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},$$

于是，有

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

因此，$\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $\boldsymbol{y}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

3.5.3　基变换与坐标变换

任意一个向量在所在的向量空间中的一组基下坐标唯一，而在不同基下对应不同的坐标，下面就来介绍基变换与坐标变换及过渡矩阵等概念.

定义 3.12　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的两个基，且有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases},\tag{3.10}$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\tag{3.11}$$

或

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}.$$

式(3.10)和式(3.11)称为基变换公式.而 $\boldsymbol{T}=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

由定义 3.11 可知,向量空间 V 中任意两个基之间的过渡矩阵是可逆的.

每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 在标准基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 下的坐标向量就是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 本身.因此,标准基到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$.

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,基变换公式为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AT}$,则应用矩阵的初等行变换即可求出过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$,其求法同第 2 章利用初等变换解矩阵方程的方法:$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{T})$.

定理 3.12　设 $\boldsymbol{T}$ 为向量空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 到另一组基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的过渡矩阵,V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标向量分别为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$,则有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ty}. \tag{3.12}$$

称式(3.12)为坐标变换公式.

例 3.23　已知 $\mathbf{R}^3$ 中的两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$和 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均为 $\mathbf{R}^3$ 的基.

(2) 求 $\boldsymbol{r}_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{r}_2=(-9,-8,-13)^{\mathrm{T}}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

(3) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵,并写出坐标变换公式.

解　(1) 事实上,由 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{vmatrix}=-6\neq 0$,$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{vmatrix}=4\neq 0$ 知,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均为线性无关的向量组,故它们都是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

(2) 设 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标分别为$(x_{11},x_{21},x_{31})^{\mathrm{T}}$ 和$(x_{12},x_{22},x_{32})^{\mathrm{T}}$,即$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$,记作 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{R}$.

对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{R})$施行初等行变换，有$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{R})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&3&-3\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标分别为$(2,3,-1)^{\mathrm{T}}$ 和$(3,-3,-2)^{\mathrm{T}}$.

(3) 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$，则有$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{T}$，记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AT}$.

对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$施行初等行变换，得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&2&3&1&2&3\\-1&1&1&2&3&4\\0&3&2&1&4&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\\0&0&1&1&\frac{1}{2}&2\end{pmatrix},$$

从而过渡矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{3}\\-\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\\1&\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}.$$

设 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标分别为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 和$(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{3}\\-\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\\1&\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

下面介绍一个应用实例——图像的伸缩，作为向量和向量空间知识的拓展.

图像(指位图)是由一系列点构成的，每个点都看成几何空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一个向量.不考虑图像的色彩特征，只考虑图像的形状，就可以将图像看作是由有限个点的位置向量构成的集合.

图像的伸缩是将图像沿着 x,y,z 轴方向分别进行拉伸或压缩，以改变图像的形状.设三维图像中任一点为 $P:(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，伸缩后坐标为 $P':(x',y',z')^{\mathrm{T}}$，则有$(x',y',z')^{\mathrm{T}}=(k_xx,k_yy,k_zz)^{\mathrm{T}}$，用向量和矩阵乘积表示为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_x&0&0\\0&k_y&0\\0&0&k_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}k_x&0&0\\0&k_y&0\\0&0&k_z\end{pmatrix}\text{(伸缩矩阵)}$$

先把三维图像中的所取点表示成矩阵

$$A=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix},$$

再利用伸缩变换关系式,就可求得伸缩后的图像对应的矩阵 $\boldsymbol{B}$,即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{KA}=\begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} k_x x_0 & k_x x_1 & \cdots & k_x x_n \\ k_y y_0 & k_y y_1 & \cdots & k_y y_n \\ k_z z_0 & k_z z_1 & \cdots & k_z z_n \end{pmatrix}.$$

习　题　3

(A)

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,且有 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{x})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{x})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{x})$,求向量 $\boldsymbol{x}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,a)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(3,-2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\gamma}=(b,4,3)^{\mathrm{T}}$ 满足 $5\boldsymbol{\alpha}+c\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$,求常数 a,b,c.

3. 判断下列给定向量 $\boldsymbol{\eta}$ 是否可以由相应的向量组线性表示.

(1) $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,向量组是 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,向量组是 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,向量组是 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. 已知$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3 \end{cases}$,证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价.

5. 判断下列向量组的线性相关性.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,10)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,4,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,2)^{\mathrm{T}}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,3),\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(2,4,5),\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(1,-1,0),\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(2,2,6)$.

6. 问 a 取何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a)^{\mathrm{T}}$ 线性相关?

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,k+1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(k,2,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(k,1,0)^{\mathrm{T}}$,试问 k 为何值时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关? k 为何值时,线性无关?

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,求向量 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示的表达式.

9. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$.证明:向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

10. 设 $c_1,c_2,\cdots,c_s(s\leqslant n)$是互不相同的数,$\boldsymbol{\alpha}_i=(1,c_i,c_i^2,\cdots,c_i^{n-1})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,s)$.试证:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

11. 设 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量组.若 $\mathbf{A}$ 的每行元素之和均为 0,证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

12. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,且有 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$,试证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 也线性无关.

13. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,且 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$,证明存在某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$ $(2\leqslant k\leqslant m)$,使得 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1}$ 线性表示.

14. 求下列向量组的秩,并求一个极大无关组.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,4,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-6,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-2,2,-9)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,-2,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(2,4,4,9)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,1),\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=(-1,-1,-1),\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}=(-1,1,-2),\boldsymbol{\beta}_4^{\mathrm{T}}=(1,-3,3)$.

15. 已知参数 a,b 互异,试求向量组$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix}$的一个极大无关组.

16. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 的一个极大无关组.

17. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,b,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(2,3,1)^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2,求参数 a,b 的值.

18. 设 a,b 为参数,讨论向量组$(2,5,6)^{\mathrm{T}},(0,a,0)^{\mathrm{T}},(b,0,1)^{\mathrm{T}}$ 的秩,且当 a,b 满足什么条件时,该向量组是线性无关的?

19. 求下列向量组的一个极大无关组,并把不属于极大无关组的其余向量用该极大无关组线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(25,75,75,25)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(31,94,94,32)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(17,53,54,20)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(43,132,134,48)^T$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(2,5,-1,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,3,-1)^T$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,-1,-3,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,2,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,2,5,6,2)^T$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,-2,-2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,5,6)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-2,-1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_5=(1,1,3,3)^T$.

20. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda+3,\lambda,3(\lambda+1))^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\lambda-1,\lambda)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,\lambda+1,\lambda+3)^T,\boldsymbol{\beta}=(\lambda,2\lambda,0)^T$.问 λ 取何值时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,且表达式唯一;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,且表达式不唯一;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

21. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,1,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,1,8)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(5,-1,2,1)^T$ 生成的向量空间的维数,并求出一组基.

22. 判断下列向量集合是否为向量空间?若是向量空间,求出其维数,并求一组基.

(1) $V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$;

(2) $V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$.

23. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,2)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,4)^T$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的两个基,若 $\boldsymbol{\xi}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(1,1,1)^T$,求 $\boldsymbol{\xi}$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

24. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)^T$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,3,1)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,0,0)^T,\boldsymbol{\beta}_4=(0,1,-1,-1)^T$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的两组基,求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵,并给出向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0,-1)^T$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标.

(B)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1,a_2,a_3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(b_1,b_2,b_3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(c_1,c_2,c_3)^T$,证明:3 条直线 $a_ix+b_iy+c_i=0(a_i^2+b_i^2\neq0)(i=1,2,3)$ 交于一点的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,若存在正整数 $k(k\geqslant2)$,使得 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,但 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$(其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量).证明:$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

3. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&2\\-2&2&3\end{pmatrix}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,求

a 的值.

4. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，$m>n$，且 $R(\boldsymbol{BA})=n$，试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和行向量组的线性相关性.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 为 $s+1$ 个列向量，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，试讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性相关性.

6. 求单位向量 $\boldsymbol{\beta}_3$，使向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0), \boldsymbol{\beta}_2=(1,1,1), \boldsymbol{\beta}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1), \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)$ 的秩相同，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

7. 已知向量组 $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{B}: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$；$\boldsymbol{C}: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$.若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，$R(\boldsymbol{C})=4$，试证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

8. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基，且有 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\end{cases}$.证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基.

第 4 章　线性方程组

线性方程组的理论广泛应用于数学各分支及其他科学技术和应用领域,解线性方程组也是线性代数最主要的任务之一.前面已经应用克莱姆法则求解了系数行列式不为零的一类较特殊的线性方程组,本章利用矩阵理论和向量组线性相关性理论继续深入探讨线性方程组无解、有唯一解或有无穷多解的充分必要条件,并给出线性方程组解的结构及通解的求法.

4.1　线性方程组的消元法

本节将介绍线性方程组的相关概念及求解线性方程组一般解的高斯(Gauss)消元法,为后继研究线性方程组解的结构打下基础.

4.1.1　线性方程组相关概念及其矩阵表示

含有 m 个方程 n 个未知数的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{4.1}$$

令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,则方程组(4.1)可写成向量方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.分别称 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为线性方程组(4.1)的系数矩阵,未知数向量和常数向量.称矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$为线性方程组(4.1)的增广矩阵.

定义 4.1　若线性方程组(4.1)右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零,则称方程组(4.1)为非齐次线性方程组;若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零,则称方程组(4.1)为齐次线性方程组,此时,向量形式为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \tag{4.2}$$

满足线性方程组(4.1)的一个 n 元有序数组称为该方程组的一个解，一般用列向量 $\boldsymbol{\xi}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$ 表示，也称 $\boldsymbol{\xi}$ 是方程组(4.1)的一个解向量.

当线性方程组(4.1)有无穷多个解时，其所有解的集合称为方程组的通解或一般解.

如果线性方程组(4.1)有解，就称方程组(4.1)是相容的；否则，就称方程组(4.1)是不相容的.

由于齐次线性方程组(4.2)至少有一个零解，故齐次线性方程组(4.2)总是相容的.

4.1.2　线性方程组的 Gauss 消元法

初等数学中时曾用 Gauss 消元法求解过一般的二元或三元线性方程组，下面先通过一个例题回顾一下该方法.

例 4.1　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 & ①\\ x_1+2x_2-x_3=2. & ②\\ x_1+x_2-3x_3=3 & ③\end{cases}$$

解　将方程①乘以(−1)分别加到方程②和方程③上，得

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 & ④\\ 3x_2-2x_3=1. & ⑤\\ 2x_2-4x_3=2 & ⑥\end{cases}$$

将方程⑥乘以 $\frac{1}{2}$，再与方程⑤交换位置，得

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 & ⑦\\ x_2-2x_3=1. & ⑧\\ 3x_2-2x_3=1 & ⑨\end{cases}$$

将方程⑧乘以(−3)加到方程⑨，得

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 & ⑩\\ x_2-2x_3=1\quad. & ⑪\\ 4x_3=-2 & ⑫\end{cases}$$

由方程⑫，得 $x_3=-\frac{1}{2}$，回代入方程⑪，得 $x_2=0$；再将 $x_2=0,x_3=-\frac{1}{2}$ 回代入方程⑩，得 $x_1=\frac{3}{2}$.即方程组的解为 $x_1=\frac{3}{2},x_2=0,x_3=-\frac{1}{2}$.

通过上面的计算可知，Gauss 消元法就是逐步消除变元的系数，把原方程组化为同解的三角方程组，再通过逐步回代，进而求出线性方程组的解的方法.

例 4.1 中，共对方程施行了三种变换，即

(i) 对调两个方程的位置,

(ii) 用一个不为零的数去乘某个方程,

(iii) 用一个数去乘某个方程再加到另一个方程上.

这三种变换也可称为线性方程组的初等变换,或同解变换.从求解过程可知,在对上例进行变换时,实际上只对方程组的系数和常数进行了运算,未知数并未参与运算.因此,对上述方程组的初等变换,完全可以转换为对增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$的初等行变换,即

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&2&-1&2\\1&1&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&3&-2&1\\0&2&-4&2\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_3\times\frac{1}{2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&1&-2&1\\0&3&-2&1\end{pmatrix}\overset{r_3+(-3)r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&1&-2&1\\0&0&4&-2\end{pmatrix},$$

与上述行阶梯形矩阵对应的方程组为$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=1\\ \quad x_2-2x_3=1\\ \qquad 4x_3=-2\end{cases}$.

欲求此方程组的解,还需对行阶梯形矩阵继续施行初等行变换,将其化为行最简形矩阵,过程为

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&1&-2&1\\0&0&4&-2\end{pmatrix}\overset{r_3\times\frac{1}{4}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&1&-2&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\underset{r_1+(-1)r_3}{\overset{\substack{r_2+2r_3\\ r_1+r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

与上述行最简形矩阵对应的方程组的解为$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}\\x_2=0\\x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

这与消元法的运算结果完全相同.

由上例可见,用消元法解线性方程组的实质就是对该线性方程组的增广矩阵作初等行变换,将其化为行阶梯形矩阵的过程.

下面给出定理,以保证对增广矩阵作初等行变换后得到的方程组与原方程组同解.

定理 4.1　设线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$经过初等行变换后得到方程组$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$,则方程组$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$与$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$是同解方程组.

证　由题设可知,$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{b}_1)$,知存在可逆阵$\boldsymbol{P}$,满足

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{PA},\boldsymbol{Pb})=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{b}_1),$$

即

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{PA},\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{Pb} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{b}_1.$$

若 $\boldsymbol{\xi}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则有 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b}$ 成立，从而有 $\boldsymbol{PA\xi}=\boldsymbol{Pb}$，即 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{b}_1$ 成立，因此，$\boldsymbol{\xi}$ 也是方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 的解.

反之，若 $\boldsymbol{\xi}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 的解，则有 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{b}_1$ 成立，从而有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{b}_1$，即 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b}$ 成立.因此，$\boldsymbol{\xi}$ 也是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

综合上述结论可知，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 是同解方程组.　　证毕

例 4.2　解线性方程组 $\begin{cases}3x_1+5x_2+6x_3=-2\\2x_1+2x_2+4x_3=-8\\x_1+2x_2+2x_3=1\end{cases}$.

解　对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 施行初等行变换，将其化为行最简形矩阵，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}3&5&6&-2\\2&2&4&-8\\1&2&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\1&1&2&-4\\3&5&6&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-1&0&-5\\0&-1&0&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&-9\\0&1&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

上述最简形矩阵对应的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+2x_3=-9\\x_2=5\end{cases}$.

取 x_3 为自由未知量，得方程组的解为 $\begin{cases}x_1=-2x_3-9\\x_2=5\end{cases}$，即方程组有无穷多组解.若令 $x_3=c$，则这无穷多个解可以表示为 $\begin{cases}x_1=-2c-9\\x_2=5\\x_3=c\end{cases}$，也可以用向量表示为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9\\5\\0\end{pmatrix}.$$

4.2　齐次线性方程组

给定含 m 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases},\tag{4.3}$$

其向量形式为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 即零向量总是齐次线性方程组(4.2)的解向量,因而,以下主要讨论方程组(4.2)是否有非零解以及有非零解时解的结构问题.

首先,探讨齐次线性方程组有非零解的充分必要条件.

定理 4.2 齐次线性方程组(4.2)有非零解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩$R(\boldsymbol{A})<n$.

证 将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块,有 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解$\Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零

$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow$向量组的秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<n$

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})<n$. 证毕

推论 1 齐次线性方程组(4.2)只有零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$.

推论 2 当方程的个数 m 小于未知数个数 n 时,齐次线性方程组(4.2)必有非零解.

其次,还要探讨如下的问题:若齐次线性方程组(4.2)有非零解,则非零解有多少个?这些非零解之间有何种关系?这就是接下来要研究的齐次线性方程组解的结构问题.

在讨论齐次线性方程组解的结构问题之前,先来证明齐次线性方程组的解具有的两个重要性质:

性质 1 若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是齐次线性方程组(4.2)的解,则 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是该方程组的解.

证 已知 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是(4.2)的解,故有 $\boldsymbol{A\xi}_1=\mathbf{0},\boldsymbol{A\xi}_2=\mathbf{0}$.又 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{A\xi}_1+A\boldsymbol{\xi}_2$,故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是方程组(4.2)的解. 证毕

性质 2 若 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是齐次线性方程组(4.2)的解,k 为实数,则 $k\boldsymbol{\xi}_1$ 也是该方程组的解.

证 已知 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是(4.2)的解,故有 $\boldsymbol{A\xi}_1=\mathbf{0}$.又 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\xi}_1)=k(\boldsymbol{A\xi}_1)$,故 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\xi}_1)=\mathbf{0}$,即 $k\boldsymbol{\xi}_1$ 也是该方程组的解. 证毕

推论 3 若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 是齐次线性方程组(4.2)的 r 个解,$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 为实数,则线性组合 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\xi}_r$ 也是该方程组的解.

以上推论说明,齐次线性方程组非零解的任意一个线性组合仍是该方程组的

解.因此,齐次线性方程组若有一个非零解,则它就有无穷多个解,这无穷多个解构成了齐次线性方程组的解空间.若能求出该解空间的一个基,亦即求得解向量组的一个极大无关组,就能用它来表示齐次线性方程组的全部解.

定义 4.2　设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组解向量,如果满足:

(i) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 线性无关,

(ii) 方程组(4.2)的任意一个解向量 $\boldsymbol{\xi}$ 都能由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 线性表示,

则称 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 为齐次线性方程组(4.2)的一个基础解系.

由定义知,基础解系实际上就是齐次线性方程组的解向量组的一个极大无关组,因而也是解空间的一个基.可见,解齐次线性方程组的关键在于求出它的一个基础解系.基础解系一般并不唯一,只需求出一个形式简捷,易于计算的即可.

定理 4.3　若齐次线性方程组(4.2)有非零解,且系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r$,则方程组(4.2)的基础解系一定存在,且基础解系中含有 $n-r$ 个解向量,亦即齐次线性方程组(4.2)的解集 $\boldsymbol{S}$ 的秩 $R(\boldsymbol{S})=n-r$.

证　齐次线性方程组(4.2)有非零解,且 $R(\boldsymbol{A})=r$,则可知,$R(\boldsymbol{A})=r<n$.不妨设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个列向量线性无关.

对 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$进行初等行变换,化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$,则有

$$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&b_{1,r+1}&\cdots&b_{1n}\\0&1&\cdots&0&b_{2,r+1}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&b_{r,r+1}&\cdots&b_{rn}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

与 $\boldsymbol{B}$ 对应的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+b_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{1n}x_n=0\\x_2+b_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{2n}x_n=0\\\quad\vdots\\x_r+b_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{rn}x_n=0\end{cases},$$

把 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 作为自由未知数,则

$$\begin{cases}x_1=-b_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{1n}x_n\\x_2=-b_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{2n}x_n\\\quad\vdots\\x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{rn}x_n\end{cases}.\tag{4.4}$$

分别取$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,并代入方程组(4.4)中,依次得到$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} -b_{1n} \\ -b_{2n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \end{pmatrix}$,合起来便得到方程组(4.2)的$n-r$个解

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\begin{pmatrix} -b_{1n} \\ -b_{2n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

下面证明这$n-r$个解$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$就是方程组(4.2)的一个基础解系.

由于$n-r$个$n-r$维向量$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$线性无关.由第3章定理3.5的推论可知,$n-r$个$n$维向量$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$也线性无关.

其次,设$\boldsymbol{\xi}=(k_1,k_2,\cdots,k_r,k_{r+1},\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$是方程组(4.2)的任意一个解向量,代入方程组(4.2)的同解方程组(4.4)中,有

$$\begin{cases} k_1=-b_{1,r+1}k_{r+1}-\cdots-b_{1n}k_n \\ k_2=-b_{2,r+1}k_{r+1}-\cdots-b_{2n}k_n \\ \qquad\vdots \\ k_r=-b_{r,r+1}k_{r+1}-\cdots-b_{rn}k_n \end{cases},$$

写成向量形式为

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-b_{1,r+1}k_{r+1}\\-b_{2,r+1}k_{r+1}\\\vdots\\-b_{r,r+1}k_{r+1}\\k_{r+1}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b_{1,r+2}k_{r+2}\\-b_{2,r+2}k_{r+2}\\\vdots\\-b_{r,r+2}k_{r+2}\\0\\k_{r+2}\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}-b_{1n}k_n\\-b_{2n}k_n\\\vdots\\-b_{rn}k_n\\0\\0\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{\xi}=k_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+k_{r+2}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\xi}_{n-r}.$$

这说明方程组的任意一个解向量均可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示.因此，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组(4.2)的基础解系，且基础解系中含有 $n-r$ 个解向量，亦即方程组(4.2)的解集的秩 $R(\boldsymbol{S})=n-r$. 证毕

该定理的证明过程中给出了求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的方法，并给出了齐次线性方程组的解的结构：$\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，其中 $c_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,n-r$，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组(4.2)的基础解系.

例 4.3　求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$ 的解.

解　先把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=2<4$，故方程组有非零解，且同解方程组为 $\begin{cases}x_1=2x_3+\frac{5}{3}x_4\\x_2=-2x_3-\frac{4}{3}x_4\end{cases}$，这里 x_3,x_4 是自由未知数.

分别取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，依次可得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$.于是得齐次线性方程组的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\\0\\1\end{pmatrix},$$

故所求通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\quad (k_1,k_2\in\mathbf{R}).$$

例 4.4 当 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+\ x_2-2x_3=0\\6x_1+3x_2-\lambda x_3=0\\5x_1+2x_2-4x_3=0\end{cases}$$

(1) 只有零解?(2) 有非零解? 并求出其通解.

解 方法一 由于所给方程组是方程组个数与未知量个数相同的特殊情形,故可以通过判断行列式来考察其是否有非零解.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&-2\\6&3&-\lambda\\5&2&-4\end{vmatrix}=6-\lambda.$$

(1) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,即 $\lambda\neq 6$ 时,只有零解.

(2) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$,即 $\lambda=6$ 时,有非零解,此时系数阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\6&3&-6\\5&2&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=2x_3\end{cases}$.

取 x_3 为自由未知数,当 $x_3=1$ 时,有 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$,得齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$,故所求通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\boldsymbol{\xi}=k\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\quad (k\in\mathbf{R}).$$

方法二　把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\6&3&-\lambda\\5&2&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&-1&2\\0&0&6-\lambda\end{pmatrix}$$

(1) 当 $6-\lambda\neq0$，即 $\lambda\neq6$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$，方程组只有零解.

(2) 当 $6-\lambda=0$，即 $\lambda=6$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2<3$，方程组有非零解，求方程组的通解方法参见前面方法一，不再赘述.

例 4.5　已知非零矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda-3)x_1-x_2=0\\4x_1+(\lambda+1)x_2=0\\-4x_1+8x_2+(\lambda+2)x_3=0\end{cases}$$

的解，求 λ 的值并求 $|\boldsymbol{B}|$.

解　已知 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不全为零，由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组的解，因此该方程组有非零解，其系数行列式等于 0，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\4&\lambda+1&0\\-4&8&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0,$$

解得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$.

由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 可知 $R(\boldsymbol{A})<3$，再由第 3 章定理 3.9，可知 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})<3$，故 $|\boldsymbol{B}|=0$.

例 4.6　已知矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times l}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证　设 $R(\boldsymbol{A})=r$，记 $\boldsymbol{B}_{n\times l}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),$$

即 $\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{0}(i=1,2,\cdots,l)$，表明 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,l)$ 都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.因此，$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,l)$ 可由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示.故有

$$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)\leqslant R(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r})=n-r=n-R(\boldsymbol{A}),$$

即 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

注：本例题给出了第 2 章中矩阵秩的不等式(iv)的证明.

4.3　非齐次线性方程组

给定含 m 个方程 n 个未知数的非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases},$$

其向量形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}. \tag{4.5}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$，这里 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零.

在 4.1 节中讨论了用消元法解非齐次线性方程组，这个方法应用时较为方便，但还有以下三个问题并未解决，这里将就这三个问题逐一研究解决.

这三个问题是，非齐次线性方程组(4.5)

(i) 在什么情况下无解？

(ii) 在什么情况下有解？有解时是有唯一解还是有无穷多解？

(iii) 在有无穷多解时，解的结构是怎样的？

下面将利用系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的秩的关系，讨论非齐次线性方程组无解、有唯一解以及有无穷多解的充分必要条件.

定理 4.4 非齐次线性方程组(4.5)

(i) 无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$；

(ii) 有唯一解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$；

(iii) 有无穷多解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$.

证 充分性.设 $R(\boldsymbol{A})=r$，应用矩阵的初等行变换，将增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$化为行最简形矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$，并不妨设行最简形矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 为

$$(\boldsymbol{A},b)\overset{r}{\sim}\widetilde{\boldsymbol{B}}=\left(\begin{array}{cccccccc}1&0&\cdots&0&c_{1,r+1}&\cdots&c_{1n}&d_1\\0&1&\cdots&0&c_{2,r+1}&\cdots&c_{2n}&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&c_{r,r+1}&\cdots&c_{rn}&d_r\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&d_{r+1}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\end{array}\right],$$

对应的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1\qquad\quad+c_{1,r+1}x_{r+1}+c_{1,r+2}x_{r+2}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1\\\quad x_2\qquad+c_{2,r+1}x_{r+1}+c_{2,r+2}x_{r+2}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2\\\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\\qquad\quad x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+c_{r,r+2}x_{r+2}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r\\\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}\end{cases}. \tag{4.6}$$

由于 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 是行最简形矩阵，故 d_{r+1}可能的取值只有 1 和 0.

(i) 若 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，则此时必有 $d_{r+1}=1\neq0$，亦即 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的第 $r+1$ 行对应了

矛盾方程 0=1,故方程组(4.5)无解.

(ii) 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$,则此时必有 $d_{r+1}=d_{n+1}=0$,且行最简形矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 变为 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & d_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$,同解方程组为 $\begin{cases}x_1=d_1\\ x_2=d_2\\ \quad\vdots\\ x_n=d_n\end{cases}$.

故方程组(4.5)有唯一解.

(iii) 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r<n$,则此时 $d_{r+1}=0$,行最简形矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-c_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{1n}x_n+d_1\\ x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-c_{2,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{2n}x_n+d_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-c_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{rn}x_n+d_r\end{cases}.$$

这里 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 是自由未知数,任意给定这些自由未知数的值,按上式就可得到 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的一组值,从而得到方程组(4.5)的一个解.由于 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 可任意取值,故方程组(4.5)有无穷多解.

必要性由前面讨论过程易证,略.　证毕

例 4.7　下列线性方程组是否有解?若有解,求出其全部解.

(1) $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=2\\ 3x_1-x_2=3\\ 4x_1+2x_2-x_3=0\end{cases}$;　(2) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4\\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2\end{cases}$.

解　(1) 对增广矩阵施行初等行变换,得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-4)r_1]{r_2+(-3)r_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -10 & 3 & -3\\ 0 & -10 & 3 & -8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -10 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{pmatrix},$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=2<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$,故由定理 4.4 知方程组无解.

(2) 先将增广矩阵化为行阶梯形矩阵,有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4\\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 5 & -2\\ 0 & 7 & -5 & 9 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<4$,故由定理 4.4 知方程组有无穷多解.

再将上述矩阵继续化为行最简形矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 + \frac{6}{7} \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3 - \frac{9}{7}x_4 - \frac{5}{7} \end{cases}.$$

x_3, x_4 为自由未知数,不妨设为 k_1, k_2,则此方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}k_1 + \frac{1}{7}k_2 + \frac{6}{7} \\ \frac{5}{7}k_1 - \frac{9}{7}k_2 - \frac{5}{7} \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R}.$$

一般情况下,自由未知数的选取方法并不唯一,比如该例题中也可以选取其他未知数作为自由未知数.若将该例题中的增广矩阵化为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & -\frac{7}{5} & 1 & -\frac{9}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + 1 \\ x_3 = \frac{7}{5}x_2 + \frac{9}{5}x_4 + 1 \end{cases},$$

可选取 x_2, x_4 为自由未知数,不妨设为 k_3, k_4,则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}k_3 + \frac{2}{5}k_4 + 1 \\ k_3 \\ \frac{7}{5}k_3 + \frac{9}{5}k_4 + 1 \\ k_4 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ \frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_3, k_4 \in \mathbf{R}.$$

与前一解法的区别是自由未知数选取不同,因此通解的形式不同.

从此例题也可以看出，线性方程组的通解形式上并不唯一.

与非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，称为非齐次线性方程组的导出方程组，简称导出组.

为进一步研究非齐次线性方程组的解的结构，先来探讨一下非齐次线性方程组的解与它的导出组的解之间的关系.

性质 1　若 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组(4.5)的一个解，$\boldsymbol{\xi}$ 是其导出组的一个解，则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 也是非齐次线性方程组(4.5)的一个解.

证　已知 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 分别是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，故有 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$.从而有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{A\xi}+\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b},$$

即 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.　证毕

性质 2　若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组(4.5)的任意两个解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是其导出组的解.

证　已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，故有 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b}$.从而有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.　证毕

性质 3　若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$ 为非齐次线性方程组(4.5)的解，则 $\dfrac{1}{r}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\boldsymbol{\eta}_r)$ 也是非齐次线性方程组(4.5)的解

证　已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，故有 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{A\eta}_2=\cdots=\boldsymbol{A\eta}_r=\boldsymbol{b}$.从而有

$$\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{r}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\boldsymbol{\eta}_r)\right]=\frac{1}{r}(\boldsymbol{A\eta}_1+\boldsymbol{A\eta}_2+\cdots+\boldsymbol{A\eta}_r)=\frac{1}{r}\cdot r\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b},$$

即 $\dfrac{1}{r}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\boldsymbol{\eta}_r)$ 也是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.　证毕

定理 4.5　若非齐次线性方程(4.5)有解，则其通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^*$，其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是导出组的通解，而 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组(4.5)的一个特解.

证　由性质 1 可知，$\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^*$ 是方程组(4.5)的一个解.设 $\boldsymbol{\eta}$ 是方程组(4.5)的任意一个解，则由性质 2 知，$\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}^*$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.又已知 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解，故 $\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}^*$ 也可以用通解 $\boldsymbol{\xi}$ 来表示，即 $\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}^*=\boldsymbol{\xi}$，从而 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组(4.5)的通解.　证毕

由以上的几个定理，可以归纳出求非齐次线性方程组通解的步骤：

(i) 用初等行变换将增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$化为行阶梯形矩阵，并比较 $R(\boldsymbol{A})$与 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$的大小；

(ii) 若 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，则方程组无解；若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r$，则进一步把行阶梯形矩阵化为行最简形矩阵，进而写出同解方程组.当 $r=n$ 时，方程组有唯一解；当 $r<n$ 时，把 r 个非零行的非零首元对应的未知数取作非自由未知数，其余 $n-r$ 个未知数取作自由未知数.先令自由未知数都等于 0，求出非齐次线性方程

组(4.5)的一个特解,再求出导出组的通解,两组解作和,即得到 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

例 4.8 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量,其中 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\\0\end{pmatrix}$,且 $R(\boldsymbol{A})=3$,求此方程组的通解.

解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3$ 是 4 维向量,即 $n=4$,故导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只含 $n-R(\boldsymbol{A})=4-3=1$ 个解向量.

由性质 3 知,$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解.

再由性质 2 知,$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\\4\end{pmatrix}\neq 0$ 是导出组的一个非零解,由于基础解系只含一个解向量,故 $\boldsymbol{\xi}$ 就可作为导出组的基础解系,故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_1=k\begin{pmatrix}0\\4\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\quad(k\in\mathbf{R}).$$

例 4.9 求非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-5\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=-7\end{cases}$的通解.

解 用初等行变换将增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$化为行阶梯形矩阵,有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&-1\\0&1&2&2&6&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<5$,知方程组有无穷多解.继续将行阶梯形矩阵化为行最简形矩阵,有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-3\\0&1&2&2&6&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可得同解方程组

$$\begin{cases}x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 3\\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 2\end{cases}. \tag{4.7}$$

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$，得方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\eta}^* = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

由方程组(4.7)，可得导出组的同解方程组 $\begin{cases}x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5\\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5\end{cases}$. 分别取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$，即可得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

从而方程组的通解为

$$\boldsymbol{\eta} = k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{R}.$$

例 4.10　已知线性方程组 $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1\\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1\end{cases}$，问 a, b 如何取值时，方程组(1)有唯一解？(2)无解？(3)有无穷多解？并求出通解.

解　利用初等行变换，将增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 化为行阶梯形矩阵

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b\\ 3 & 2 & 1 & a & -1\end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $a \neq 1$ 时，$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 4$，方程组有唯一解.

(2) 当 $a = 1$ 且 $b \neq -1$ 时，$R(\boldsymbol{A}) = 2 < R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$，方程组无解.

(3) 当 $a=1$ 且 $b=-1$ 时,$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<4$,方程组有无穷多解,此时,继续将行阶梯形矩阵化为行最简形矩阵,有

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

同解方程组为$\begin{cases}x_1=\quad x_3+\ x_4-1\\x_2=-2x_3-2x_4+1\end{cases}$.

令 $x_3=x_4=0$,得方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

此时,导出组的同解方程组为$\begin{cases}x_1=\quad x_3+\ x_4\\x_2=-2x_3-2x_4\end{cases}$.分别取$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$,即可得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

从而方程组的通解为

$$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}^*=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\in\mathbf{R}.$$

例 4.11 已知平面上三条不同直线的方程分别是 $l_1:ax+2by+3c=0$,$l_2:bx+2cy+3a=0$,$l_3:cx+2ay+3b=0$,试证这三条直线交于一点的充分必要条件是 $a+b+c=0$.

证 必要性.设三直线交于一点,则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c\\bx+2cy=-3a\\cx+2ay=-3b\end{cases}$$

有唯一解,故 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$.因此,有

$$\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0.$$

若$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$,则有 $a=b=c(\neq 0)$,此时 $R(\boldsymbol{A})=1$,矛盾.因此,$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$,从而有 $a+b+c=0$.

充分性.若 $a+b+c=0$,则有 $\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=0$,于是 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$.另一方面,有 $c=-a-b$,则 $\boldsymbol{A}$ 有一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=2[a(-a-b)-b^2]$$
$$=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0.$$

因此,$2\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant 2$,即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$.从而方程组有唯一解,即三条直线交于一点.

例 4.12(**线性方程组的应用——交通流量模型**)　图 4.1 是某城市部分单行街道的交通流量(每小时过车数).

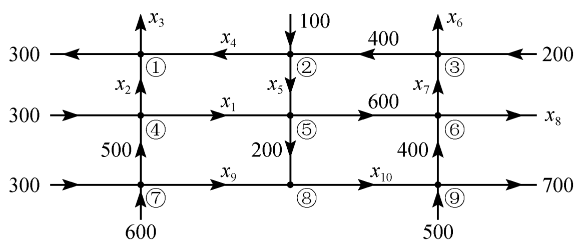


图 4.1

这里假设:全部流入网络的流量等于全部流出网络的流量;全部流入一个节点(道路交汇处)的流量等于全部流出此节点的流量.试建立数学模型确定该交通网络中未知部分的流量.

解　图 4.1 中①～⑨代表 9 个节点,依题意假设,按照总流量及 9 个节点的流入流出网络的流量相等,可以列出方程组

$$\begin{cases} 100+200+300+300+600+500=300+x_3+x_6+x_8+700 \\ x_2+x_4=300+x_3 \\ 100+400=x_4+x_5 \\ 200+x_7=400+x_6 \\ 300+500=x_1+x_2 \\ x_1+x_5=200+600 \\ 600+400=x_7+x_8 \\ 300+600=500+x_9 \\ 200+x_9=x_{10} \\ 500+x_{10}=400+700 \end{cases},$$

化简可得

$$\begin{cases} x_3+x_6+x_8=1000 \\ x_2-x_3+x_4=300 \\ x_4+x_5=500 \\ -x_6+x_7=200 \\ x_1+x_2=800 \\ x_1+x_5=800 \\ x_7+x_8=1000 \\ x_9=400 \\ -x_9+x_{10}=200 \\ x_{10}=600 \end{cases}.$$

应用初等行变换,将增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$化为行最简形矩阵后,可得方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_5=800 \\ x_2-x_5=0 \\ x_3=200 \\ x_4+x_5=500 \\ x_6+x_8=800 \\ x_7+x_8=1000 \\ x_9=400 \\ x_{10}=600 \end{cases},$$

由此解得方程组的一个特解 $\boldsymbol{\eta}^*=(800,0,200,500,0,800,1000,0,400,600)^{\mathrm{T}}$,并可解得导出组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,-1,1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=(0,0,0,0,0,-1,-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$,从而可得原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}^*,\quad k_1,k_2\in\mathbf{R}.$$

交通流量模型有一定的应用价值,它可以为交通规划部门提供解决交通拥堵问题的方法,并通过加宽道路,建立交桥等方式为城镇交通建设提供科学的指导意见.

该类实际问题由于未知量较多,一般可以利用数学软件借助于计算机进行求解,该例题利用 MATLAB 求解的方法见第 6 章例 6.18.

以上研究了线性方程组的理论,这些理论在科学技术和生产实践中有着极其广泛的应用.不仅如此,线性方程组理论在研究矩阵方程是否有解以及考查向量组的线性相关性等方面也有着重要的应用,下面就这两个方面补充一些相关定理和结论.

为研究方便起见,把定理 4.4 的(ii)和(iii)合并为一个定理,则得到

定理 4.6　非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

推论　向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})$ 的秩.

定理 4.7　矩阵方程 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times l}=\boldsymbol{B}_{m\times l}$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

证　必要性.设 $R(\boldsymbol{A})=r$.将 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}$ 按列分块,有

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_l),\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l).$$

用初等行变换把 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 化为行最简形矩阵 $(\widetilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_l)$.若矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{\beta}_i\,(i=1,2,\cdots,l)$ 有解.

由定理 4.6,可得 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_i)=R(\boldsymbol{A})$,从而

$$R(\widetilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i)=R(\widetilde{\boldsymbol{A}}),\ i=1,2,\cdots,l.$$

即 $(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_l)$ 的后 $m-r$ 行全为零行.故 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_l)=r$,从而 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r=R(\boldsymbol{A})$.

充分性易证,请读者自己完成.　证毕

推论 1　向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 的秩等于矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$ 的秩,即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

推论 2　向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 等价的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是向量组 $\boldsymbol{A}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$ 所构成的矩阵.

证　因 $\boldsymbol{A}$ 组与 $\boldsymbol{B}$ 组能相互线性表示,由推论 1 可知,$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 且 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$,因 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$,故合起来有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$,即为 $\boldsymbol{A}$ 组与 $\boldsymbol{B}$ 组等价的充分必要条件.　证毕

例 4.13　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-6,3,0,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,证明向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,并求出表示式.

证　根据定理 4.6 的推论,需证矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 与 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 的秩相等.为此,把 $\boldsymbol{B}$ 化为行最简形

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}0&1&-6&-1\\1&0&3&1\\2&1&0&1\\3&2&-3&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&-6&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,因此 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$,得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}\ \text{或}\ x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta},$$

欲求 $\boldsymbol{\beta}$ 的表示式,只需求出上述方程组的通解.

由行最简形,可得同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-3x_3+1\\ x_2=\quad 6x_3-1\end{cases},$$

令 $x_3=k$,则通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3k+1\\6k-1\\k\end{pmatrix},\quad k\in\mathbf{R}.$$

从而 $\boldsymbol{\beta}=(-3k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(6k-1)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k 可任意取值.

例 4.14 已知向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(3,2,-1)^{\mathrm{T}}$,证明:向量组Ⅰ与Ⅱ等价.

证 设向量组Ⅰ构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$,向量组Ⅱ构成矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.把 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 化为行阶梯形矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}0&1&-1&1&3\\1&1&0&2&2\\1&0&1&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&1&-1\\0&1&-1&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

易知 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$,故 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$;又知 $\boldsymbol{B}$ 中至少有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix}-1&1\\0&2\end{vmatrix}=-2\neq0$,故 $R(\boldsymbol{B})\geqslant2$.从而 $R(\boldsymbol{B})=2$.

因此 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.由定理 4.7 的推论 2 可知,向量组Ⅰ与Ⅱ等价.

习 题 4

(A)

1. 用消元法求下列方程组的解.

(1) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0\\2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0\\7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\\4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\x_1+3x_2\qquad\quad-3x_4=1\\\qquad x_2-x_3+x_4=-3\\\qquad 7x_2-3x_3-x_4=3\end{cases}$;

(4) $\begin{cases} x_1-x_2-\ x_3+\ x_4=0 \\ x_1-x_2+\ x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

2. 求下列齐次线性方程组的基础解系和通解.

(1) $\begin{cases} x_1+\ 2x_2+x_3-\ x_4=0 \\ 3x_1+\ 6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-\ x_3-7x_4=0 \\ 3x_1+\ x_2+2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1+\ x_2-3x_3+6x_4=0 \\ x_1-2x_2+5x_3-5x_4=0 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-\ x_4=0 \\ 3x_1-\ x_2+5x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+\ x_2+2x_3-2x_4=0 \end{cases}$.

3. 求解下列非齐次线性方程组.

(1) $\begin{cases} 2x_1+\ x_2-\ x_3+\ x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 5x_1+\ x_2-\ x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-\ x_2+\ x_3-3x_4=4 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x_1+x_2 \qquad -2x_4+\ x_5=-1 \\ -2x_1-x_2+x_3-4x_4+2x_5=1 \\ -x_1+x_2-x_3-2x_4+\ x_5=2 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} 2x+\ y-\ z+\ w=1 \\ 3x-2y+\ z-3w=4 \\ x+4y-3z+5w=-2 \end{cases}$.

4. 写出一个以 $X=k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$为通解的齐次线性方程组.

5. 求解线性方程组$\begin{cases} x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5=a \\ 3x_1+2x_2+\ x_3+\ x_4-3x_5=0 \\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-\ x_5=2 \end{cases}$.

6. λ 为何值时,线性方程组 $\begin{cases}(2\lambda+1)x_1 - \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda-1 \\ (\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda \\ (2\lambda-1)x_1+(\lambda-1)x_2+(2\lambda-1)x_3=\lambda\end{cases}$ 有唯一解?无解?无穷多解?在有无穷多解时,求其通解.

7. 问 a、b 为何值时,方程组 $\begin{cases}x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b\end{cases}$ 有唯一解?有无穷多解?无解?

8. 讨论线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+ax_2+x_3+x_4=a \\ x_1+x_2+ax_3+x_4=a^2 \\ x_1+x_2+x_3+ax_4=a^3\end{cases}$ 解的情况,并求出有无穷多解时的通解.

9. 设有向量组 $\boldsymbol{A}$:$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\alpha \\ 2 \\ 10\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-2 \\ 1 \\ 5\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1 \\ 1 \\ 4\end{pmatrix}$及向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1 \\ \beta \\ -1\end{pmatrix}$,问 α,β 为何值时:

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示;

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示,且表示式唯一;

(3) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示,且表示式不唯一,并求一般表示式.

(B)

1. 已知下列非齐次线性方程组

(Ⅰ) $\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3\end{cases}$, (Ⅱ) $\begin{cases}x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=-t+1\end{cases}$.

(1) 求解方程组(Ⅰ),并用其导出组的基础解系表示通解;

(2) 当方程组(Ⅱ)中的参数 m,n,t 为何值时,方程(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

2. 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3, \\ x_4-x_5=a_4 \\ x_5-x_1=a_5\end{cases}$$

求证该方程组有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$,并在有解时,求出其一般解.

3. 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0\\\qquad\vdots\\nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}\quad(n\geqslant 2),$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

4. 已知四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 之秩为 3,又 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量,其中 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,0,1,3)^{\mathrm{T}}$,试求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

5. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

第 5 章　相似矩阵与二次型

在矩阵理论中，为研究矩阵的性质，经常需要把矩阵化简，同时又保持原矩阵的尽可能多的性质.最简单的矩阵之一就是对角矩阵，这就需要讨论矩阵相似于对角矩阵的条件；而矩阵能否对角化与矩阵的特征值和特征向量密切相关.

本章先介绍矩阵的特征值和特征向量、相似矩阵、实对称矩阵的对角化，再讨论实二次型化标准形的问题.这些内容是线性代数中十分重要的一部分，它们在工程技术、经济理论、生态问题以及其他许多学科中都有着广泛的应用.

5.1　方阵的特征值与特征向量

特征值与特征向量是非常重要的概念，它不仅在讨论方阵的对角化问题中起着实质的作用，而且在数学的其他分支以及许多实际问题中都有着广泛的应用.

5.1.1　特征值与特征向量的概念

如果把方阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{x}$ 相乘，相当于对向量 $\boldsymbol{x}$ 作了一个线性变换，得到的仍然是一个向量 $\boldsymbol{Ax}$，我们关注的是这种线性变换后与原向量方向相同或相反的向量，即与 $\boldsymbol{x}$ 平行的向量，用方程来表示，就是 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，$\lambda$ 为一系数，对于这样的向量 $\boldsymbol{x}$ 及数 λ，给出下面的定义.

定义 5.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$，使关系式 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 成立，那么数 λ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，非零向量 $\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

例如，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$，有 $\lambda_1=2$，$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，使 $\boldsymbol{Ax}_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{x}_1$，所以 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 2 的特征向量.

还有 $\lambda_2=3$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$，使 $\boldsymbol{Ax}_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}=3\boldsymbol{x}_2$，所以 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量.

注：(i) 特征值问题是对方阵而言的；

(ii) 特征向量一定非零，即 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$.

5.1.2　特征值与特征向量的计算

现在要解决的问题是如何来求一个矩阵的特征值及其对应的特征向量,下面从定义出发来讨论这个问题.

由定义 5.1,如果 λ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量,那么 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$,上式可改写成 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,这是含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组,方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量 $\boldsymbol{x}$ 就是齐次线性方程组的非零解.而齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于零,即有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

由于行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的主对角线上元素都是 λ 的一次式,故展开后是一个关于 λ 的 n 次多项式 $f(\lambda)$,从而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 是一个关于 λ 的 n 次方程 $f(\lambda)=0$,为了便于进一步讨论,引入如下定义.

定义 5.2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,称 λ 的 n 次多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式,称方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

从上面的讨论可知,方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的根.而方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量 $\boldsymbol{x}$ 就是齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.于是,得到求方阵 A 的特征值和特征向量的步骤为

(i) 计算方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$;

(ii) 解方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,它的全部根就是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(iii) 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ,求出相应的齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_t$,则 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的全部特征向量就是 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{p}_t$,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是不全为零的常数.

例 5.1　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&4\\0&6&0\\4&0&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 0 & -4\\ 0 & \lambda-6 & 0\\ -4 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-6)\begin{vmatrix}\lambda-3 & -4\\ -4 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)[(\lambda-3)^2-16]=(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+1),$$

令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=6,\lambda_3=7$.

当 $\lambda_1=-1$ 时,解方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&0&-4\\0&-7&0\\-4&0&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得其基础解系为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,所以 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq0)$是对应于 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=6$ 时,解方程组$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&-4\\0&0&0\\-4&0&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得其基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,所以 $k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq0)$是对应于 $\lambda_2=6$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_3=7$ 时,解方程组$(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&-4\\0&1&0\\-4&0&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得其基础解系为 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,所以 $k_3\boldsymbol{p}_3(k_3\neq0)$是对应于 $\lambda_3=7$ 的全部特征向量.

例 5.2　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1&-1\\4&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda+1)(\lambda-3)+4]=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

令$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时,解方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得其基础解系为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,所以 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq0)$是对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时,解方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得其基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$,所以 $k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq0)$是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

例 5.3　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&2\\2&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4&2&-2\\-2&\lambda&-2\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_2+\lambda r_3]{r_1+2r_3}\begin{vmatrix}\lambda-2&0&2\lambda-4\\\lambda-2&0&\lambda(\lambda-1)-2\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2&2\lambda-4\\\lambda-2&\lambda(\lambda-1)-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda(\lambda-1)-2-(2\lambda-4)]$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

令$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=1$ 时,解方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&2&-2\\-2&1&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得其基础解系为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$,所以 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq0)$是对应于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时,解方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&2&-2\\-2&2&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得其基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,所以 $k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3$($k_2$,$k_3$ 不同时为 0)是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量.

5.1.3 特征值与特征向量的性质

性质 1 设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_l$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于同一特征值 λ 的有限个特征向量,则其任意一个非零线性组合 $\boldsymbol{p}=k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{p}_l$ 仍是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

性质 2 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则对于正整数 m,λ^m 是矩阵 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值,对于任意常数 k,$k\lambda$ 是矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值.

定义 5.3 设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 为 x 的 m 次多项式,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,记 $\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$,$\varphi(\boldsymbol{A})$称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次多项式.

性质 3 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\varphi(x)$是 x 的多项式,则 $\varphi(\lambda)$是矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值.

上述性质利用特征值与特征向量的定义不难证明,下面仅证明性质 3.

证 设 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$,$\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$,则

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}&=(a_0E+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m)\boldsymbol{p}=a_0\boldsymbol{p}+a_1\boldsymbol{Ap}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{p}\\&=a_0\boldsymbol{p}+a_1\lambda\boldsymbol{p}+\cdots+a_m\lambda^m\boldsymbol{p}=(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m)\boldsymbol{p}=\varphi(\lambda)\boldsymbol{p},\end{aligned}$$

所以 $\varphi(\lambda)$是 $\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值. 证毕

性质 4 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与其转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值.

证 因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|^{\mathrm{T}}=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征多项式,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值. 证毕

性质 5 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的特征值,则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

证 由行列式的定义,有

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix},$$

其展开式中,主对角元素的乘积为$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$,其余各项至多包含 $n-2$ 个主对角线上的元素,因此关于 λ 的次数最多为 $n-2$,所以特征多项式中含 λ^n 和 λ^{n-1}的项只能出现在主对角元素的连乘积项中,它们是 $\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}$;而在特征多项式中,只需令 $\lambda=0$,即得常数项为$|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$.因此,

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，故 $f(\lambda)$ 可以表示为

$$\begin{aligned}f(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\&=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\end{aligned}$$

比较以上两式中 λ 的同次项的系数，即可得到

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},\quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|.$$

证毕

注：特征值的这一性质正好反映了矩阵的特征值和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素的关系.

性质 6　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 的特征向量，则向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

证　用数学归纳法.

当 $m=1$ 时，因为特征向量为非零向量，即 $\boldsymbol{p}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{p}_1$ 线性无关.

假设 $m=k-1$ 时，$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{k-1}$ 线性无关，当 $m=k$ 时，设

$$x_1\boldsymbol{p}_1+x_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_{k-1}\boldsymbol{p}_{k-1}+x_k\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{0},\tag{5.1}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式，并注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i(i=1,2,\cdots,k)$，得

$$x_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1+x_2\lambda_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_k\lambda_k\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{0}.\tag{5.2}$$

式(5.2)减去式(5.1)的 λ_k 倍，得

$$x_1(\lambda_1-\lambda_k)\boldsymbol{p}_1+x_2(\lambda_2-\lambda_k)\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\boldsymbol{p}_{k-1}=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{k-1}$ 线性无关，所以 $x_i(\lambda_i-\lambda_k)=0(i=1,2,\cdots,k-1)$.而 $\lambda_i-\lambda_k\neq0$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$，于是得 $x_i=0(i=1,2,\cdots,k-1)$，代入式(5.1)，得 $x_k\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{p}_k\neq\boldsymbol{0}$，于是得 $x_k=0$.所以，向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_k$ 线性无关.　证毕

性质 7　如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{is_i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的线性无关的特征向量，则向量组 $\boldsymbol{p}_{11},\cdots,\boldsymbol{p}_{1s_1},\boldsymbol{p}_{21},\cdots,\boldsymbol{p}_{2s_2},\cdots\boldsymbol{p}_{m1},\cdots,\boldsymbol{p}_{ms_m}$ 也线性无关.

此性质是性质 6 的推广，证明与性质 6 类似，这里从略.

例 5.4　设 λ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，证明：

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；　(2) $\dfrac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证　(1) 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，结合性质 5，有 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均不为零.由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$，可得 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$，因为 $\lambda\neq0$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{p}$，所以 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

(2) 由(1)可知 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，而 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，由性质 2 可知 $\dfrac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

例 5.5 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,−1,2,求$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

解 因为$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2\neq0$,故 $\boldsymbol{A}^{-1}$存在,从而 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-2\boldsymbol{A}^{-1}$.故

$$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|-2\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}^{-1}||-2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}|.$$

记 $\varphi(\boldsymbol{A})=-2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}$.由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1,−1,2,知,$\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值分别为 $\varphi(1)=-1,\varphi(-1)=3,\varphi(2)=6$,故$|-2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}|=\varphi(1)\varphi(-1)\varphi(2)=-18$.又由于$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}=-\dfrac{1}{2}$,所以$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-18)=9$.

例 5.6 设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$,证明 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证 假设 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,则应存在数 λ,使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)=\lambda(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)=\lambda\boldsymbol{p}_1+\lambda\boldsymbol{p}_2$,又 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2\boldsymbol{p}_2$,两式相减可得 $(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{p}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}$,因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 线性无关,应有 $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$,即 $\lambda_1=\lambda_2$ 与已知条件矛盾.所以 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

注:结合性质 1 和例 5.6 我们看到,方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是该特征值的特征向量;但对应于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量之和不再是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

方阵的特征值与特征向量的理论与方法具有十分广泛的应用,下面仅举一个简单的例子来说明方阵的特征值与特征向量在实际问题中的应用.

例 5.7 某地区以粮食生产和钢铁为经济主体.当钢铁、粮食和劳动力的投入量分别为 x_1,x_2,x_3 个单位时,对应的产出量分别为 y_1,y_2,y_3 个单位,已知投入量和产出量之间符合下面的数学模型 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$,其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.4&0&0.1\\0&0.1&0.8\\0.5&0.7&0.1\end{pmatrix},$$

问怎样投入时,该地区的经济发展速度 a 最大?即满足 $y_i=ax_i(i=1,2,3)$的 a 最大?

解 已知 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.若发展速度为 a,则 $\boldsymbol{y}=a\boldsymbol{x}$,于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\cdot a\boldsymbol{x}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{a}\boldsymbol{x}$.可见$\dfrac{1}{a}$是 $\boldsymbol{A}$ 的一个正特征值.由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-0.4&0&-0.1\\0&\lambda-0.1&-0.8\\-0.5&-0.7&\lambda-0.1\end{vmatrix}=(\lambda-0.9)(\lambda^2+0.3\lambda-0.25)=0,$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为

$$\lambda_1=0.9,\lambda_2\approx0.372,\lambda_3\approx-0.672(\text{不符合题意舍去}).$$

分别解方程组$(0.9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,$(0.372\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得对应于 λ_1,λ_2 的全部

特征向量分别为

$$k_1\begin{pmatrix}0.2\\1\\1\end{pmatrix}(k_1\neq 0),\quad k_2\begin{pmatrix}1\\-0.823\\-0.28\end{pmatrix}(k_2\neq 0).$$

因为投入量 $x_i(i=1,2,3)$不能为负,所以只有$\dfrac{1}{a}=0.9$,即 $a=\dfrac{10}{9}$,从而当钢铁、粮食和劳动力以 0.2∶1∶1 的比例投入时,该地区有最快的经济发展速度$\dfrac{10}{9}$,而且将以$\dfrac{10}{9}$的速度持续发展.

该例题利用 MATLAB 求解的方法见第 6 章例 6.19(P180).

上面给出的例子是特征值与特征向量知识在经济领域中的一个简单应用,用线性代数理论研究这类问题所得到的结论在宏观调控和价格调整等方面发挥着非常重要的作用.此外,特征值与特征向量还被用来研究微分方程和动力系统,为工程设计提供关键知识;生态学家也曾用特征值和特征向量的知识,建立物种动态变化的数学模型,研究生物种群的长期行为,预测某种物种受外界影响时的灭绝和兴旺.

5.2　相似矩阵与矩阵的对角化

本节利用矩阵的特征值与特征向量,来讨论满足一定条件的 n 阶矩阵可以化为对角矩阵,并仍保持矩阵原来性质的问题,这就需要引入相似矩阵的概念.

5.2.1　相似矩阵的概念

关系式 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$可以看作是对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一种分解,这种分解有时可以使我们能够了解到有关矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的信息;另外,利用上面的分解式在 n 较大时能快速计算$\boldsymbol{A}^n$,这正是线性代数中某些应用的基本思想.对于关系式 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,给出下面的定义.

定义 5.4　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,若有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵,或称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换,可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵.

例如,矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$,取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$,则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$,所以,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似.

注:$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 显然表示对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一系列的初等行变换与初等列变换,因此相似变换是一种特殊的初等变换,也就是说,矩阵之间的相似是矩阵之间等价的

一种特殊情形.

5.2.2 相似矩阵的性质

性质 1 相似矩阵有相等的行列式.

性质 2 两个相似矩阵或者都可逆,或者都不可逆.若都可逆,则其逆阵也相似.

性质 3 相似矩阵有相同的特征多项式,从而有相同的特征值.

上述性质利用相似矩阵的定义不难证明,下面仅证明性质 3.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.于是

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|&=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式,从而有相同的特征值. 证毕

推论 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 相似,则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

证 容易求得 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的 n 个特征值,由性质 3 可知,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 也就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 证毕

5.2.3 矩阵对角化的条件

如果一个矩阵与对角矩阵相似,那么该矩阵称为可对角化矩阵.下面讨论矩阵的对角化问题.首先给出矩阵可对角化的充分必要条件;然后介绍当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时,如何求相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

定理 5.1 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证 先证必要性.设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 相似,那么存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,于是 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$.将矩阵 $\boldsymbol{P}$ 按列分块成 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$,便有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$,故 $(\boldsymbol{Ap}_1,\boldsymbol{Ap}_2,\cdots,\boldsymbol{Ap}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n)$,于是 $\boldsymbol{Ap}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i(i=1,2,\cdots,n)$.

因为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆,所以 $\boldsymbol{p}_i\neq\boldsymbol{0}(i=1,2,\cdots,n)$ 且向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关.又由 $\boldsymbol{Ap}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i$ 知,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 分别为对应的特征向量.所以 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

再证充分性.设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量,其对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i(i=1,2,\cdots,n)$.构造矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n)\\&=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n)=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P\Lambda}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关,故 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$　　证毕

由此定理,并结合第 5.1 节性质 6,可得下面的重要推论.

推论 1　如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相等,则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值时,利用第 5.1 节性质 7,可得以下推论.

推论 2　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值,其重数分别为 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 且 $s_1+s_2+\cdots+s_m=n$.若对应 s_i 重特征值 λ_i 有 s_i 个线性无关的特征向量 $(i=1,2,\cdots,m)$,则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.

注:(i) 由上述定理和推论可知,如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的根都是单根,那么 $\boldsymbol{A}$ 就有 n 个互不相等的特征值(如例 5.1),从而 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化;如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有重根,那么就要看能否找到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量,若能找到(如例 5.3),则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化;若找不到(如例 5.2),则 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

(ii) 定理 5.1 的推导过程不仅给出了方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化的充分必要条件,而且从其推导过程还可以知道:相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量为列向量构成的矩阵;而对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角线上的元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

例 5.8　判断矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&2\\2&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$ 能否对角化?若能,求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解　由例 5.3 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$,相应的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

由于对应于 2 重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 有两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$,故 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,相应地取 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

注:在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序应与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中各个对应特征值的排列顺序相一致.

例 5.9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$,问 x 为何值时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

解 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-1&\lambda-1&-x\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,可求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$.

对应单根 $\lambda_1=-1$,可求得 1 个特征向量,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是对应重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$,有两个线性无关的特征向量,即方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解,亦即系数矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$.由

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&-x\\-1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&x+1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

要使 $R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,只需 $x+1=0$,即 $x=-1$.所以,当 $x=-1$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化.

例 5.10 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1\\-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3),$$

令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,可求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$,故 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

当 $\lambda_1=2$ 时,解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得 $\lambda_1=2$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=3$ 时,解方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得 $\lambda_2=3$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$,则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

利用上式可得 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$，而 $\boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^n=$

$$\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n & 2^n-3^n\\ -2^{n+1}+2\times 3^n & -2^n+2\times 3^n\end{pmatrix}.$$

由此题可看出，计算对角阵的 n 次幂 $\boldsymbol{\Lambda}^n$ 比计算一般矩阵的 n 次幂 $\boldsymbol{A}^n$ 要简便，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，则可以通过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角化来简化 $\boldsymbol{A}^n$ 的计算.

我们可用例 5.10 中计算 $\boldsymbol{A}^n$ 的方法来计算 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$，这就是

(i) 如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m\\&=\boldsymbol{P}a_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{P}a_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}+\cdots+\boldsymbol{P}a_m\boldsymbol{\Lambda}^m\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1};\end{aligned}$$

(ii) 如果 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角阵，则 $\boldsymbol{\Lambda}^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，从而

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})&=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{\Lambda}+\cdots+a_m\boldsymbol{\Lambda}^m\\&=a_0\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 5.11　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^9+5\boldsymbol{A}^8$.

解　先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -2\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}\lambda-5 & -1 & -2\\ \lambda-5 & \lambda-2 & -2\\ \lambda-5 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & \lambda-2 & -2\\ 1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，可求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=5$，故 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

当 $\lambda_1=-1$ 时，解方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得 $\lambda_1=-1$ 对应的特征向

量$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$;

当$\lambda_2=1$时,解方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得$\lambda_2=1$对应的特征向量$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$;

当$\lambda_3=5$时,解方程组$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得$\lambda_3=5$对应的特征向量$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\-2&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$,则有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,于是$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

利用上式可得$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$,而$\varphi(-1)=12$,$\varphi(1)=0$,$\varphi(5)=0$,$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-3&3&0\\2&2&2\end{pmatrix}$,所以$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\-3&3&0\\2&2&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}$.

下面给出矩阵的相似对角化在实际问题中的一个应用

例 5.12 人类隐性连锁基因是位于X染色体的基因,例如,色盲就是一种隐性连锁基因.为了描述某地区居民中色盲的变化情况与性别的关系,我们假设这一地区男性与女性的比例为1∶1,并且第一代男性与女性带有色盲基因的比例不相等,以下每一代的比例不变,预测世代增加时,在男性与女性中具有色盲基因的比例情况.

解 设第一代男性和女性居民带有色盲的基因比例为$x_1^{(0)}$和$x_2^{(0)}$,则$x_1^{(0)}\neq x_2^{(0)}$设第$n+1$代男性和女性居民带有色盲的基因比例为$x_1^{(n)}$和$x_2^{(n)}$,因男性从母亲接受一个X染色体,故第二代色盲男性的比例$x_1^{(1)}$与第一代带有色盲基因的女性的比例$x_2^{(0)}$相等;因女性从父母双方各接受一个X染色体,第二代带有色盲基因的女性的比例$x_2^{(1)}$应为$x_1^{(0)}$与$x_2^{(0)}$的平均值.故有

$$\begin{cases}x_1^{(1)}=x_2^{(0)}\\x_2^{(1)}=\dfrac{1}{2}x_1^{(0)}+\dfrac{1}{2}x_2^{(0)}\end{cases}.\quad 记\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}^{(n)}=\begin{pmatrix}x_1^{(n)}\\x_2^{(n)}\end{pmatrix}.$$

由于以下每一代的比例不变,所以$\boldsymbol{x}^{(n)}=\boldsymbol{Ax}^{(n-1)}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}^{(n-2)}=\cdots=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}^{(0)}$.

下面求$\boldsymbol{A}^n$,先将$\boldsymbol{A}$相似对角化.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -\dfrac{1}{2} & \lambda-\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)=0$，可求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$.

解方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；

解方程组$\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得 $\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$.

利用上式可得 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$，而 $\boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} & 2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\\1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & 2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

于是，有 $\boldsymbol{x}^{(n)}=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}^{(0)}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} & 2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\\1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & 2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(0)}$，即

$$\begin{cases}x_1^{(n)}=\dfrac{1}{3}\left[x_1^{(0)}+2x_2^{(0)}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}x_1^{(0)}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}x_2^{(0)}\right]\\x_2^{(n)}=\dfrac{1}{3}\left[x_1^{(0)}+2x_2^{(0)}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}x_1^{(0)}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}x_2^{(0)}\right]\end{cases}.$$

可见，当 $n\to\infty$时，$x_1^{(n)}\to\dfrac{1}{3}(x_1^{(0)}+2x_2^{(0)})$，$x_2^{(n)}\to\dfrac{1}{3}(x_1^{(0)}+2x_2^{(0)})$.

上式表明，当世代增加时，在男性与女性中具有色盲基因的比例将趋于相同的值.

例 5.12 涉及的是隐性连锁基因问题.在种群迁移、市场预测、生态与环境保护、生物繁殖、物种培育、遗传病的预防与控制等问题的研究中都经常用到类似例 5.12 的研究方法.

5.3 实对称矩阵的对角化

在 5.2 节中,我们已经知道,一个 n 阶矩阵不一定可以对角化.然而,实对称矩阵的特征值、特征向量具有特殊的性质,使其一定可以对角化.为了讨论这一问题,首先引入向量的内积、正交向量组和正交矩阵的概念.

5.3.1 向量的内积、正交向量组和正交矩阵

1. 向量的内积

我们已经熟悉了二维和三维空间中的长度、夹角和垂直等几何概念.本节在 $\mathbf{R}^n$ 空间中引入类似的概念,这些概念为解决实际问题提供了有力的几何工具.而这三个概念都是建立在两个向量的内积的基础之上,下面先给出内积的概念.

定义 5.5 设 n 维向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,称$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积.

用矩阵乘法表达内积运算,显然有$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

向量的内积具有下列性质(其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 为 n 维向量,k 为实数):

(i) $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}]$;

(ii) $[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}]+[\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$;

(iii) $k[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=[k\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{x},k\boldsymbol{y}]$;

(iv) $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]\geqslant 0$;当且仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时等号成立;

(v) $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]^2\leqslant[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}][\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}]$.

定义 5.6 设 n 维向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,称 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度(模或范数).长度为 1 的向量称为单位向量.若 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$,则$\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ 是与 $\boldsymbol{x}$ 同方向的单位向量,称之为 $\boldsymbol{x}$ 的单位化向量.记为 $\boldsymbol{x}^0$,即 $\boldsymbol{x}^0=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$.

向量的长度具有下列性质(其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为 n 维向量,k 为实数):

(i) **非负性** 当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时,$\|\boldsymbol{x}\|>0$;当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时,$\|\boldsymbol{x}\|=0$;

(ii) **齐次性** $\|k\boldsymbol{x}\|=|k|\,\|\boldsymbol{x}\|$;

(iii) **三角不等式**　$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

定义 5.7　设 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 是 n 维非零向量，称 $\theta=\arccos\dfrac{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的夹角.

如果 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交.规定零向量与任意向量正交.

可以看出，当且仅当 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=0$ 时，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，故向量的正交也可以定义为若向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=0$，则称向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交.

例如，在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中，设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，有 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=0$，则向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交.其几何意义是，在空间直角坐标系中，连接原点和点(1，1，1)，(1，－2，1)的两条有向线段互相垂直.

在 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，两个向量正交的概念正是三维空间中这一概念的推广.

2. 正交向量组

定义 5.8　如果非零向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 中的向量两两正交，那么向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 称为正交向量组.特别地，如果正交向量组中的每个向量都是单位向量，那么称此向量组为单位正交向量组(或标准正交向量组).

例如，$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ 为正交向量组；$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$ 为单位正交向量组.

注：(i) 正交向量组中的每个向量均要求是非零向量；

(ii) 由单个非零向量组成的向量组也是正交向量组.

显然，如果 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是一个单位正交向量组，则必有

$$[\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j]=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } i\neq j \text{ 时}\end{cases},\quad i,j=1,2,\cdots,r.$$

正交向量组有下面的重要定理：

定理 5.2　正交向量组是线性无关的.

证　设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是一个正交向量组,并有 $k_1,k_2,\cdots,k_r$,使 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}$.用 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,r)$与等式两边的向量作内积,$[\boldsymbol{a}_i,k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots k_r\boldsymbol{a}_r]=[\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{0}]$.

由内积的性质与正交向量组的定义,得 $k_i[\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i]=0$.由于 $\boldsymbol{a}_i\neq\boldsymbol{0}$,$[\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i]>0$,故 $k_i=0(i=1,2,\cdots,r)$.所以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关.　证毕

定理 5.2 的逆命题不成立,即线性无关的向量组不一定正交,如 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,显然它们是线性无关的,但$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]=1\neq0$,所以不是正交向量组.

然而对于任意一个线性无关的向量组,我们可以通过某些步骤,找到一个与它等价的正交向量组,这种步骤叫做把线性无关的向量组正交化,下面介绍一种常用的方法——施密特(Schimidt)正交化方法.

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是线性无关向量组,取

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1.$$

设 $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+k\boldsymbol{b}_1$,使 $\boldsymbol{b}_2$ 与 $\boldsymbol{b}_1$ 正交,即$[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_1]=0$,由此求得 $k=-\dfrac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}$,即取

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1.$$

再设 $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2$,使 $\boldsymbol{b}_3$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 都正交,即$[\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_1]=0$,$[\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_2]=0$,由此求得 $k_1=-\dfrac{[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}$,$k_2=-\dfrac{[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}$,即取

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2.$$

继续上述步骤,最后设 $\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_r+k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{b}_{r-1}$,使 $\boldsymbol{b}_r$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{r-1}$ 都正交,即$[\boldsymbol{b}_r,\boldsymbol{b}_1]=0$,$[\boldsymbol{b}_r,\boldsymbol{b}_2]=0$,$\cdots$,$[\boldsymbol{b}_r,\boldsymbol{b}_{r-1}]=0$,由此求得 $k_1=-\dfrac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}$,$k_2=-\dfrac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_2]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}$,$\cdots$,$k_{r-1}=-\dfrac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_{r-1}]}{[\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{b}_{r-1}]}$,即取

$$\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_r-\frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_2]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_{r-1}]}{[\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{b}_{r-1}]}\boldsymbol{b}_{r-1}.$$

这样可以得到正交向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$，再把它们单位化，即取 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{b}_r\|}\boldsymbol{b}_r$，就得到一个单位正交向量组.

从正交化的过程可知，向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 可以相互线性表示，所以它们是等价的，并且还满足：对任何 $l(1\leqslant l\leqslant r)$，向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 与向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_l$ 等价.

例 5.13　试求与向量组 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$等价的单位正交向量组.

解　取 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.设 $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+k\boldsymbol{b}_1$，由$[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_1]=0$，得 $k=-\dfrac{1}{2}$，故

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+k\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2$，由$[\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_1]=0,[\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_2]=0$，得 $k_1=-\dfrac{1}{2},k_2=-\dfrac{1}{3}$，故

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

再将 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 单位化

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 即为与 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 等价的单位正交向量组.

例 5.13 中的 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 也可直接用施密特正交化方法中推得的公式求出.

例 5.14　已知向量 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，求向量 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$，使 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为正交向量组.

解 由题意,$\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 应满足方程 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即 $x_1-x_2-x_3=0$.它的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

将基础解系正交化,有

$$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{[\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1]}{[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1]}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$即为所求的正交向量组.

以上给出了如何由一组线性无关的向量得到一组正交向量的方法.既然正交向量组是线性无关的,那么就可以用正交向量组作向量空间的基,称为向量空间的正交基.

设 n 维向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是向量空间 $V(V\subset\mathbf{R}^n)$的一个基,如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 两两正交,且都是单位向量,则称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是 V 的一个规范正交基.

若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是向量空间 V 的一个基,要求 V 的一个规范正交基,可应用上面的施密特正交化方法将所给的基正交化,再单位化.这样的问题称为把 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 这个基规范正交化.

当 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是 V 的一个规范正交基时,V 中任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 线性表示,设 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{e}_r$,可以用下面的方法求系数 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$:用 $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}$ 左乘上式,有 $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\lambda_i\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_i=\lambda_i$,即 $\lambda_i=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_i](i=1,2,\cdots,r)$.这就是向量在规范正交基中的坐标计算公式.利用这个公式能方便地求得向量的坐标,因此,在给向量空间取基时常常取规范正交基.

3. 正交矩阵

定义 5.9 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$(即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$),那么称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵,简称正交阵.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 按列进行分块,那么

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n),\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1] & [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2] & \cdots & [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_n]\\ [\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1] & [\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2] & \cdots & [\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_n]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_1] & [\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_2] & \cdots & [\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_n]\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 的充分必要条件是 $[\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j]=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } i\neq j \text{ 时}\end{cases}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是单位正交向量组.

考虑到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 等价，所以上述结论对 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组也成立，于是有下列定理.

定理 5.3　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组或行向量组为单位正交向量组.

例如，矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，它的每个列向量都是单位向量，且两两正交，所以 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵.

正交矩阵具有下列性质：

(i) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，那么 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$；

(ii) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，那么 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{*}$ 都是正交矩阵；

(iii) 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同阶正交矩阵，那么 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$ 也是正交矩阵.

上述性质利用正交矩阵的定义不难证明，下面仅证明性质(iii)：

证　因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，故 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，所以

$\boldsymbol{AB}$ 仍是正交矩阵.

同理可证,$\boldsymbol{BA}$ 也是正交矩阵. 证毕

定义 5.10 如果 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,则线性变换 $\boldsymbol{y}=\mathbf{P}\boldsymbol{x}$ 称为正交变换.

由于 $\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=\|\boldsymbol{x}\|$,可见正交变换保持向量的长度不变,还可证明正交变换保持向量的内积和夹角不变.这正是正交变换的优良特性,在研究二次型的标准形时起着重要作用.

5.3.2 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵是一类比较重要的矩阵,在许多问题中经常遇到.实对称矩阵不仅一定可以对角化,而且对于任一实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,总可以找到正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

1. 实对称矩阵的特征值与特征向量

实对称矩阵不但具备通常矩阵所有的关于特征值与特征向量的性质,并且还具有以下特殊的性质.

定理 5.4 实对称矩阵的特征值都是实数.

证 设 λ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量,则有 $\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$.由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}=\bar{\boldsymbol{A}}$ 及 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

两边取共轭,$\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}}=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}$,再取转置,$\bar{\lambda}(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}=(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

两边右乘向量 $\boldsymbol{x}$,$\bar{\lambda}(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x}=\lambda(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

由于特征向量 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$,故$(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\cdot x_i>0$.所以 $\lambda=\bar{\lambda}$,λ 是实数. 证毕

显然对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,由于它的特征值 λ 为实数,齐次线性方程组$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是实系数方程组,所以对应的特征向量可以取实向量.

定理 5.5 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的.

证 设 λ_1,λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个互异特征值,$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1,λ_2 的特征向量,则有 $\lambda_1\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1$,$\lambda_2\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2$,$\lambda_1\neq\lambda_2$.

对前一式两边取转置,$\lambda_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

上式两边右乘 $\boldsymbol{p}_2$,$\lambda_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\lambda_2\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2$,从而$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=0$.

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=0$,所以 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交. 证毕

定理 5.6 如果 λ 是 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值,则 $R(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-k$,从而对应于 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量

这个定理不予证明.

2. 实对称矩阵的对角化

根据前面的讨论,对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,不但存在可逆矩阵,使其可以对角化,而

且存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 成为对角阵.这是由于:实对称矩阵的特征值为实数,也就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有 n 个实根.若这 n 个实根是单根,则由定理 5.5,它们所对应的一组特征向量必正交,可以把这一组正交向量单位化,以它们为列构成的矩阵就是相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$;若有重根,设重数为 k,则由定理 5.6,对应于这 k 重根恰有 k 个线性无关的特征向量,可以把它们正交化,再单位化,则仍可得到 n 个两两正交的单位特征向量.故有下面的定理.

定理 5.7　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,那么一定存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元的对角阵.

综上所述,可以得到求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,将实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的步骤为

(i) 由特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$.

(ii) 对每个特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$,求方程 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,若 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $k(k\geqslant 2)$ 重特征值,则将基础解系中的 k 个特征向量正交化;若 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的单重特征值,则不需要正交化.

(iii) 将上面得到的 n 个特征向量单位化.

(iv) 将单位化后的 n 个特征向量作为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量组,可得正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,并按与特征向量次序相对应的特征值作为对角线上元素可得对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,从而有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

例 5.15　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$,求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解　由

$$
|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&-1\\1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\\lambda-1&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}
$$

$$
\overset{r_2+(-1)r_1}{=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\0&\lambda-3&-2\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}
$$

$$
=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,
$$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$,解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$
\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},
$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.将 $\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化,取

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{[\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta}_1]}{[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1]}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},$$

再将 $\boldsymbol{\eta}_1$,$\boldsymbol{\eta}_2$ 单位化,得

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

对应于 $\lambda_3=4$,解方程组$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.由

$$4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.将 $\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化,得 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

$$令\ \boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$

有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

例 5.16 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵,且有相同的特征多项式,求证:必有正交阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

证 由已知可得,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,以它们的特征值为对角元素构成的

对角阵记为 $\boldsymbol{\Lambda}$，再由定理 5.8 知，必有正交阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$，使

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda},\quad \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{\Lambda}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}.$$

注：例 5.16 说明，当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵时，5.2 节中性质 3 的逆命题成立.

对称矩阵常常出现在线性代数在工程(如标准设计和优化)和信号处理(如输出的噪声功率)的应用中，也常常出现在物理学(如动能和势能)、微分几何(如曲面的法曲率)、经济学(如效用函数)和统计学(如置信椭圆体)中，某些这类应用实例的数学背景很容易转化为对对称矩阵的研究.

5.4　二次型及其标准形

在力学、物理学以及数学的其他分支中常需要通过坐标变换把一个二次齐次多项式的非平方项去掉，变成只含有平方项的二次齐次式，这样可以使问题简化.

二次型就是含有 n 个变量的二次齐次多项式.本节将利用矩阵这一工具来研究把二次型化为标准形的理论与方法，因此下面首先给出二次型的矩阵表示.

5.4.1　二次型及其矩阵表示

1. 二次型的概念

定义 5.11　含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\ &a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\&+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+a_{nn}x_n^2\end{aligned}\tag{5.3}$$

称为一个 n 元二次型，简称二次型.

当系数 a_{ij} 为复数时，f 称为复二次型；当系数 a_{ij} 为实数时，f 称为实二次型.本章仅讨论实二次型.

例如，下列二(三)元多项式都是二次型：

$$f(x,y)=x^2+5xy-3y^2;$$
$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_3+x_2^2-x_3^2;$$
$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+3x_1x_3+5x_2x_3.$$

而下列二(三)元多项式都不是二次型：

$$f(x,y)=x^2+5xy-y^2+1;$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3x_3.$$

注:定义 5.11 中非平方项的系数采用 $2a_{ij}$ 主要是为了后面矩阵表示的方便.

2. 二次型的矩阵表示

在讨论二次型时,矩阵是一个有力的工具,因此我们先把二次型用矩阵来表示.

在式(5.3)中,取 $a_{ij}=a_{ji}$,那么 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$.于是式(5.3)可写成

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&+\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
=&x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)\\
&+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)\\
&+\cdots\cdots\\
&x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)\\
=&(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}\\
=&(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,则二次型可记作 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

这就是二次型的矩阵表示式.对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵,二次型 f 称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型.对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩.

例如,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+3x_2x_3$ 的矩阵表示式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&\frac{3}{2}\\0&\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

注：(i) 由 $a_{ij}=a_{ji}$ 可知，二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定是对称矩阵；

(ii) 二次型与它的矩阵之间存在着一一对应关系，即任给一个二次型，就唯一地确定一个对称矩阵；反之，任给一个对称矩阵，也可唯一地确定一个二次型.

5.4.2 二次型的标准形

在二次型中，形状最简单的是只含有平方项的二次型，即 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$，这种只含有平方项的二次型，称为二次型的标准形(或法式).

对于二次型，我们讨论的主要问题是寻求一个可逆的线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 可逆)，使二次型只含有平方项，从而得到二次型的标准形.

二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后，得 $f=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

由于 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，这表明 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，从而 $\boldsymbol{B}$ 仍是二次型的矩阵.

如果 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是对角阵，即 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，那么二次型 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=$

$(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ 就化为标准形了.

由 5.3 节定理 5.7 可知，对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，必有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成为对角阵，此时线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 是正交变换，于是有下面的定理：

定理 5.8　任给二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

注：在上面的讨论中，要求所作的线性变换是可逆的，这是因为：若 $\boldsymbol{C}$ 可逆，则由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 可得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$，这也是一个线性变换，它可把所得的二次型还原，这样就可以使我们从所得的二次型的性质推知原来的二次型的一些性质.

在上面的讨论过程中，又得到矩阵之间的一种关系：$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，对于这种关系，给出下面的定义.

定义 5.12　对于两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如果存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，那么称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 合同.

注：(i) 矩阵之间的合同关系与矩阵之间的相似关系是两种不同的关系；

(ii) 易证,矩阵之间的合同关系是矩阵之间等价的一种特殊情形,因而合同矩阵有相同的秩;

(iii) 由于合同矩阵有相同的秩,因而二次型经过可逆线性变换化成标准形后,二次型的秩不变,即标准形中所含的项数是确定的.

下面通过举例介绍化二次型为标准形的常用方法.

5.4.3 用正交变换法化二次型为标准形

从上面的讨论可以看出,如果用正交变换法把二次型化成标准形,只要把二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化,所以把二次型化标准形问题实际上是实对称矩阵的对角化问题.

例 5.17 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,把二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

解 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$,与 5.3 节例 5.15 所给的矩阵相同.

按例 5.15 的结果,有正交阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.于是有正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

把二次型 f 化成标准形 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$

例 5.18 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 经正交变换化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求正交变换矩阵.

解　二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$.

由已知条件及定理 5.8 知,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

对应于 $\lambda_1=1$,解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可求得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$,将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 单位化,得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;

对应于 $\lambda_2=2$,解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可求得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,这已是单位向量,故取 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;

对应于 $\lambda_3=5$,解方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可求得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,将 $\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化,得 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

所以,所求的正交变换矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

注:当采用正交变换化二次型为标准形时,则标准形中平方项的系数就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.此题中给了标准形就相当于给了 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,此时应注意 $\boldsymbol{P}$ 中特征向量的顺序应与标准形中特征值的顺序相一致.

5.4.4　用配方法化二次型为标准形

上面介绍的是用正交变换化二次型成标准形的方法.如果不限于用正交变换,那么还可以有其他的方法,下面举例说明用拉格朗日配方法化二次型成标准形的方法.

例 5.19　用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 成标准形,并求出所用的可逆线性变换.

解　先将含有 x_1 的各项归并在一起,并配成完全平方项,得

$$\begin{aligned} f&=[2x_1^2+4x_1(x_2-x_3)+2(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2-x_2^2-x_3^2+8x_2x_3\\ &=2(x_1+x_2-x_3)^2-3x_2^2-3x_3^2+12x_2x_3,\end{aligned}$$

再对后三项中含 x_2 的项配方,得

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2-3(x_2-2x_3)^2+9x_3^2.$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3\\ y_2=x_2-2x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$,即 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2-y_3\\ x_2=y_2+2y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$.记 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$,$|\boldsymbol{C}|=1\neq 0$,那么所用的可逆线性变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$.将二次型化成了标准形 $f=2y_1^2-3y_2^2+9y_3^2$.

注:在利用"配方法"化二次型成标准形时,不一定完全按照 x 的下标的顺序来配完全平方,也可以根据配方的难易程度来选择次序.当然,这样获得的标准形就会不唯一.

例 5.20　用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 成标准形,并求出所用的可逆线性变换.

解　在 f 中不含平方项,但含有 x_1x_2 乘积项,因此先作一个可逆线性变换,使它出现平方项.令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$,即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 且 $|\boldsymbol{C}|=-2\neq 0$.

代入,得

$$\begin{aligned} f&=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3\\ &=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3,\end{aligned}$$

再配方,得

$$\begin{aligned} f&=2(y_1^2-2y_1y_3+y_3^2)-2y_2^2+8y_2y_3-2y_3^2\\ &=2(y_1-y_3)^2-2(y_2^2-4y_2y_3+4y_3^2)+6y_3^2\\ &=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.\end{aligned}$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$. 写成矩阵形式为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{z}$，其中 $\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{C}_2| = 1 \neq 0$.就把 f 化成了标准形 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$.

这里将二次型化成标准形经过两次可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{z}$ 于是 $\boldsymbol{x} = C_1 C_2 \boldsymbol{z}$ 就是将二次型化为标准形的可逆线性变换，其中的变换矩阵为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{C}_1||\boldsymbol{C}_2| = -2 \neq 0$.

一般地，任意二次型都可用上面两例的方法找到可逆线性变换，把二次型化成标准形.

5.4.5 用初等变换法化二次型为标准形

用配方法化二次型为标准形往往比较麻烦，求所用的可逆线性变换即相应的可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 也比较麻烦.下面介绍的初等变换法就是要借助矩阵方法的优越性，利用初等变换，直接求出可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$.

根据前面的讨论我们知道，二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 化成标准形 $f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$ 的问题实质上就是要找一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$ 成为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的问题.由于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，则存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_k$，使 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_k$，即

$$(\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_k^{\mathrm{T}} \cdots \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{\Lambda},$$

而 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{E} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_k$.

以上二式表明，在对 $\boldsymbol{A}$ 施行一系列相同的初等行变换与初等列变换将 $\boldsymbol{A}$ 变成对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 时，只要对 $\boldsymbol{E}$ 仅施行与 $\boldsymbol{A}$ 相同的初等列变换就得到了可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$.我们通过下面的例题来说明这种方法.

例 5.21　用初等变换法将例 5.19 中的二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 8x_2 x_3$ 化成标准形，并写出所用的可逆线性变换.

解　二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{变换}]{\substack{c_2 + (-1)c_1 \\ c_3 + c_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{不变换}]{\substack{r_2+(-1)r_1\\ r_3+r_1}}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&6\\0&6&-3\\1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{变换}]{c_3+2c_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&6&9\\1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{不变换}]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&9\\1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$,$|\boldsymbol{C}|=1\neq0$,所以所用的可逆线性变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,将二次型化成了标准形 $f=2y_1^2-3y_2^2+9y_3^2$.

注:将 $\boldsymbol{A}$ 化为对角阵时,要既作初等列变换,又作同类型的初等行变换.而对 $\boldsymbol{E}$ 则只作初等列变换,不可作初等行变换.

例 5.22 用初等变换法将例 5.20 中的二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 化成标准形,并写出所用的可逆线性变换.

解 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{变换}]{c_3+(-1)c_2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-3\\1&-3&3\\1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{不变换}]{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-3\\0&-3&6\\1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{变换}]{c_3+3c_1}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&-3&6\\1&0&3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{不变换}]{r_3+3r_1}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&6\\1&0&3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{变换}]{c_1+c_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&6\\1&0&3\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{不变换}]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&0\\0&0&6\\1&0&3\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{变换}]{c_2+\left(-\frac{1}{2}\right)c_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\\1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{不变换}]{r_2+\left(-\frac{1}{2}\right)r_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\\1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

记 $C=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{1}{2} & 3\\ 1 & \dfrac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$|C|=1\neq0$，所以所用的可逆线性变换为 $x=Cy$，将二次型化成了标准形 $f=2y_1^2-\dfrac{1}{2}y_2^2+6y_3^2$.

注：(i) 本例求得的标准形在形式上与例 5.20 求得的结果不同，这说明用不同的可逆线性变换化二次型，所得的标准形一般不同，即二次型的标准形不是唯一的；

(ii) 注意本例用初等变换将第一行第一列位置的元素由 0 换成非零的方法.

如果对角线上还有其他的非零元素，也可用如下行、列互换的方法，$\begin{pmatrix}0 & a\\ a & b\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}b & a\\ a & 0\end{pmatrix}$.

5.5　正定二次型

本节在二次型中引入正定、负定等概念，实质上是对二次型进行一种分类.在这些类中以正定二次型最为重要，应用也最广，因此下面主要研究的问题是正定二次型的判定.

5.5.1　惯性定理和规范形

二次型的标准形虽然不是唯一的，但标准形中所含项数是确定的，而且，同一个二次型所化成的不同标准形中，正平方项的项数和负平方项的项数是不变的.如 5.4 节例 5.20 和例 5.22 都是两个正平方项，一个负平方项.这不是偶然的，我们有下面的定理.

定理 5.9　对于任意一个 n 元实二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$，不论做怎样的可逆线性变换使之化成标准形，其中正平方项的项数与负平方项的项数都是唯一确定的.

这个定理称为惯性定理，这里不予证明.

二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的标准形中，正平方项的项数称为二次型(或矩阵 A)的正惯性指数，负平方项的项数称为二次型(或矩阵 A)的负惯性指数.

推论 1　任给秩为 r 的 n 元二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$，总有可逆线性变换 $x=Cy$，使二次型的标准形中非零项的系数为 1 或 −1，即 $f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$，其中 p 为 f 的正惯性指数.称上式为二次型的规范形.

证　因为 f 的秩为 r，不妨设 f 经可逆线性变换 $x=Pz$ 得到的标准形为

$$f=\lambda_1z_1^2+\cdots+\lambda_pz_p^2-\lambda_{p+1}z_{p+1}^2-\cdots-\lambda_rz_r^2\quad(\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,r),$$

再作可逆线性变换$\begin{cases} z_1=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}y_1 \\ \vdots \\ z_r=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_r}}y_r \\ z_{r+1}=y_{r+1} \\ \vdots \\ z_n=y_n \end{cases}$,即 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$,

则 $f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$.

记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}$,则可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化二次型为规范形. 证毕

推论 2 二次型的规范形是唯一的.

注:由于二次型的标准形不唯一,引入规范形的概念是为了寻找一个不变量.

5.5.2 正定二次型的概念

应用比较广泛的二次型是标准形的系数全为正或全为负的二次型,我们有下述定义.

定义 5.13 设有二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,都有 $f(\boldsymbol{x})>0$,则称 f 为正定二次型,并称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的;如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,都有 $f(\boldsymbol{x})<0$,则称 f 为负定二次型,并称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的.

例如,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2$ 是正定二次型.实际上,对于任意的 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$,都有 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2>0$;而二次型 $g(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-3x_3^2$ 不是正定二次型.实际上,如果取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$,有 $g(x_1,x_2,x_3)=-3<0$.

上面的例子说明,由二次型的标准形或规范形很容易判断其正定性.

5.5.3 正定二次型的判定

定理 5.10 n 元二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是它的标准形的 n 个系数全为正.

证 设可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,使 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}k_iy_i^2$.

先证充分性.设 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.任给 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 故 $f(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{n}k_iy_i^2>0$.

再证必要性.用反证法,假设有 $k_s\leqslant 0$,则当 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_s$(单位坐标向量)时,$f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_s)=k_s\leqslant 0$,显然 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_s\neq\boldsymbol{0}$,这与 f 为正定相矛盾.故 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.　证毕

推论 1　n 元二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是其规范形 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$.

推论 2　n 元二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是其正惯性指数等于 n.

推论 3　n 元二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是它的矩阵的特征值全为正.

用以上定理和推论判定二次型的正定性较麻烦,下面介绍一种较简便的方法.

定理 5.11　实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全为正,即 $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$;$f$ 为负定的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式全为负,而偶数阶顺序主子式全为正,即 $(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0(r=1,2,\cdots,n)$.

这个定理称为赫尔维茨定理,这里不予证明.

例 5.23　判断下列实二次型的正定性.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$.

解　(1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$d_1=2>0,d_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3>0,d_3=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=3>0,$$

所以,$f(x_1,x_2,x_3)$为正定二次型.

(2) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$d_1=-5<0,d_2=\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=26>0,d_3=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-80<0.$$

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$为负定二次型.

(3) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\end{pmatrix}$.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$d_1=1>0,d_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0,d_3=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\end{vmatrix}=0,$$

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$即不是正定的,也不是负定的.

例 5.24　当 t 取何值时,实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定二次型.

解　二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&t&-1\\t&2&2\\-1&2&3\end{pmatrix}$.为了使 $f(x_1,x_2,x_3)$为正定二次型,$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都应大于零,即

$$d_1=1>0,d_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&2\end{vmatrix}=2-t^2>0,d_3=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&2&2\\-1&2&3\end{vmatrix}=-(3t^2+4t)>0.$$

由$\begin{cases}2-t^2>0\\3t^2+4t<0\end{cases}$,得$-\dfrac{4}{3}<t<0$.于是当$-\dfrac{4}{3}<t<0$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)$为正定二次型.

除了正定二次型,负定二次型之外,还有其他类型的二次型,它们的定义如下:

定义 5.14　设有二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant 0$,则称二次型 f 为半正定的,对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为半正定矩阵;

如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant 0$,则称二次型 f 为半负定的,对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为半负定矩阵;

如果二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 既不是半正定的,又不是半负定的,则称二次型 f 为不定的,对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为不定矩阵.

二次型的研究起源于解析几何中化二次曲线和二次曲面的方程为标准形的问题,所以二次型的理论可用来解决平面二次曲线、空间二次曲面的分类问题.下面给出二次型化标准形的一个应用问题.

例 5.25　某大型艺术建筑需要制作一个模型并取得有关的数据,我们采取的方法是通过不同位置的多幅摄影或录像,来获得在每个特殊位置的局部建筑的相关记录数据,同时制作出局部建筑的模型部件;进而根据局部建筑在整体建筑结构中的相对位置来确定对它们在全局结构中的记录数据,然后再对各部件进行拼接以获得该大型艺术建筑的模型.

如果我们在空间直角坐标系中来考察这个问题，则模型部件在全局结构中位置的确定事实上是一个空间图形移动后新位置的确定.这种移动可以看作是平移和旋转的结合.平移是简单的，而绕轴的旋转则较为复杂.

现在，假定艺术建筑的某个局部为一二次曲面，其在空间直角坐标系下的方程为 $3x^2+4y^2+5z^2+4xy+4yz-1=0$，需要判断这个二次曲面的类型.

解　把所给的二次曲面方程化为 $3x^2+4y^2+5z^2+4xy+4yz=1$.方程的左端为一二次型，只要利用正交变换化成标准形，便可判断二次曲面的类型.

方程左端的二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&4&2\\0&2&5\end{pmatrix}$，由

$$
\begin{aligned}
|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-2&\lambda-4&-2\\0&-2&\lambda-5\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)-4(\lambda-5)-4(\lambda-3)\quad(\text{直接用对角线法则})\\
&=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)-8(\lambda-4)\\
&=(\lambda-4)(\lambda^2-8\lambda+7)\\
&=(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-7)=0,
\end{aligned}
$$

得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=7$.

解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，单位化得

$$
\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix};
$$

解方程组 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda_2=4$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$，单位化得

$$
\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix};
$$

解方程组$(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得$\lambda_3=7$对应的特征向量$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$,单位化得

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

故可取正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$,其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

经过此正交变换(相当于进行了坐标轴的旋转),二次曲面的方程化为

$$x'^2+4y'^2+7z'^2=1,$$

由此可判断出这个二次曲面为椭球面.

例5.25所解决的问题只是制作模型部件过程中的一个小步骤,当然还需要进行其他的工作.在制图、自动化、动画技术、造像术等实用课题的研究中都会直接或间接碰到类似的问题.

例5.25中强调用正交变换化二次型成标准形,是由于正交变换保持向量的长度和夹角不变,所以经正交变换后曲面的形状也不会改变.此外,当需要判断二次曲线或二次曲面是否是椭圆或椭球面时,也可以利用二次型的正定性来判断.不难得出下面的结论:当二次曲线或二次曲面方程中的二次型部分是正定或负定二次型时,相应的二次曲线或二次曲面是椭圆或椭球面.

习　题　5

(A)

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 1 & -2\\0 & -2 & 0\end{pmatrix}$；　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 2\\0 & -1 & 1 & 3\\0 & 0 & 2 & 5\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$的特征向量,求对应的特征值 λ 和数 k 的值.

3. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,2,求行列式$|\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$,$|2\boldsymbol{A}^{-1}+(\boldsymbol{A}^*)^2|$.

4. 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,证明：

(1) λ^2 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值；

(2) $k\lambda$ 是矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值.

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明:$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0 或 1.

6. 证明:一个特征向量不能属于不同的特征值.

7. 判断下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化;若可以对角化,求出相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 5 & -2\\-2 & 4 & -1\end{pmatrix}$；　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 3 & -1\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\3 & 1 & x\\4 & 0 & 5\end{pmatrix}$可相似对角化,求 x.

9. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 1 & -2\\0 & -2 & x\end{pmatrix}$相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & -2\end{pmatrix}$,求 x.

10. 三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2,−3,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值. $\boldsymbol{B}$ 能否对角化？为什么？

11. 证明:(1) 相似矩阵的行列式相等;(2) 相似矩阵的秩相等.

12.(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{10}$；

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}$,求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^9$.

13. 试用施密特正交化方法,将下列向量组正交化：

(1) $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$.

14. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & b & c\\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & d\end{pmatrix}$是正交矩阵,求 a,b,c,d 的值.

15. 证明:如果 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵,则其行列式的值等于 1 或 -1.

16. 试求一个正交的相似变换矩阵,将下列对称阵化为对角阵:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

17. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$,对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$.

18. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5 & & \\ & -4 & \\ & & y\end{pmatrix}$相似,求 x,y;并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

19. 在某省,每年有 20%的农村居民移居城镇,有 10%的城镇居民移居农村.假设该省总人口数不变,且上述人口迁移的规律也不变.把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 y_n($x_n+y_n=1$).

(1) 求关系式$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$中的矩阵$\boldsymbol{A}$;

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等,即$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,求$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

20. 将下列二次型写成矩阵形式:

(1) $f=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_1x_3+4x_2x_3+4x_3^2$;

(2) $f=2x_1^2-x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$;

(3) $f=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$.

21. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$；　　(2) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

22. 用正交变换法将下列二次型化为标准形,并求出所用的正交变换.

(1) $f=4x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$；

(2) $f=x_1^2+2x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$.

23. 用配方法将下列二次型化为标准形,并求出所用的可逆线性变换.

(1) $f=x_1^2-3x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$；

(2) $f=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

24. 用初等变换法将第 23 题中的二次型化成标准形,并求出所用的可逆线性变换.

25. 求出第 22 题中各二次型的规范形,并写出各二次型的秩及正、负惯性指数.

26. 判断下列二次型的正定性：

(1) $f=3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$；

(2) $f=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$；

(3) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$.

27. 当 t 取何值时,下列二次型为正定二次型.

(1) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$；

(2) $f=(2-t)x_1^2+x_2^2+(3+t)x_3^2+2x_1x_2$.

28. 将下列二次曲面的方程化简,并判断方程表示什么类型的曲面.

(1) $x^2+y^2+z^2-2xz-5=0$；

(2) $2x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz=1$.

(B)

1. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & -2 & 0\\ b & 1 & -2\\ c & -2 & 0\end{pmatrix}$ 的三个特征值为 $4,1,-2$,求 a、b、c.

2. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量,求 x 的值.

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化,问矩阵 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{E}$ 能否对角化?

4. 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是对应于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量;$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是对应于特征值 λ_2 的线性无关的特征向量,证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

5. 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,证明:矩阵 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 为正交

矩阵.

6. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$,令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$,证明:$\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

7. 已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换化为标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$,试求参数 a,b 及所用的正交变换.

8. 已知二次型 $f=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2,求 a 的值,并求正交变换把 f 化为标准形.

9. 证明:二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

10. 证明:对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是存在可逆阵 $\boldsymbol{U}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同.

第 6 章　线性代数的 MATLAB 实现

MATLAB(Matrix Laboratory)是 MathWorks 公司于 1982 年推出的一套高性能的数值计算和可视化软件,它集数值分析、矩阵运算、信号处理和图形显示等多种功能于一体,构成了一个方便的、界面友好的用户环境.MATLAB 语言易学易用,不要求用户有高深的数学和程序语言知识,不需要用户深刻了解算法及编程技巧,目前已成为科学家和工程技术人员解决实际问题的重要计算数学软件.

前面的章节中已经系统地介绍了线性代数的理论和计算方法.在有关线性代数问题的实际计算过程中,MATLAB 为我们提供了非常好的计算机工具.借助 MATLAB 可以快速准确地求解前面遇到的各种问题,还可以解决更加复杂的线性代数问题.

MATLAB 既是一种编程环境,又是一种程序设计语言,与其他语言(如 C、C++等)相比,它更接近于数学表示,因此使用更为简便,为用户编程及计算提供了极大的便利.

6.1　MATLAB 的基本操作

6.1.1　MATLAB 软件的启动

电脑安装好 MATLAB 后,双击桌面的 MATLAB 图标或从“开始”菜单中选择 MATLAB 快捷启动 MATLAB.启动 MATLAB 后,就进入 MATLAB 的默认界面,包含 4 个子窗口,如图 6.1 所示为 MATLAB 7.10.1(R2010a)版本,分别是当前文件夹窗口(Current Folder),命令窗口(Command Window),工作空间窗口(Workspace)和历史窗口(Command History).

当前文件夹窗口显示当前存储文件或数据的目录,用户也可自行修改目录位置.

命令窗口是 MATLAB 进行操作的主要窗口,窗口中的≫为命令输入的提示符,用户在≫后输入命令,按回车键(Enter),命令自动执行,并输出运算结果.

工作空间窗口内列出内存中 MATLAB 定义的所有变量的变量名、值、尺寸、字节数和类型,便于用户及时了解内存中变量信息.

历史窗口列出在命令窗口中执行过的 MATLAB 命令行的记录.

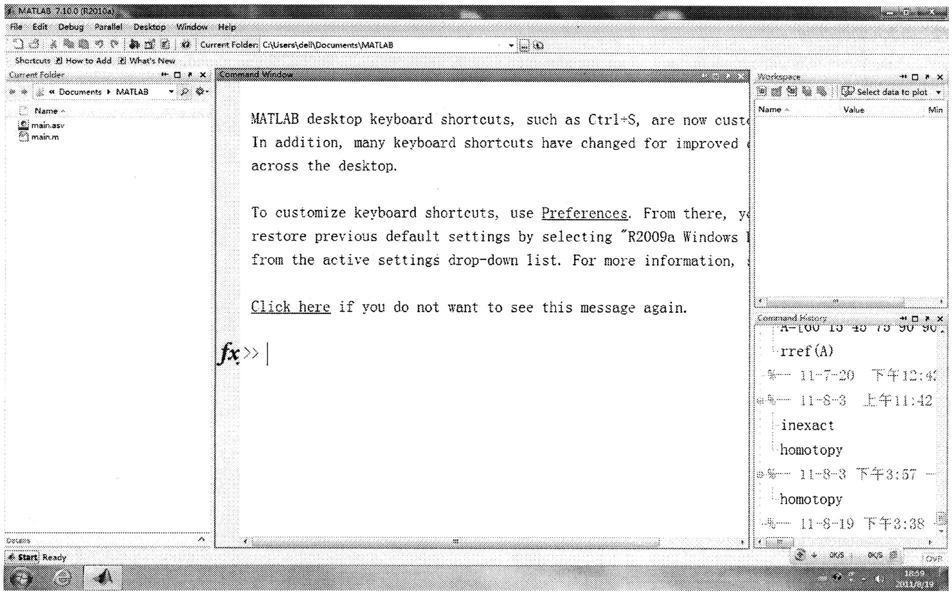


图 6.1　MATLAB 7.10 的默认窗口

6.1.2　变量的命名和定义

在使用 MATLAB 之前,用户应该对 MATLAB 的变量有一个基本的了解.像任何其他计算机语言一样,MATLAB 也有变量命名规则.变量名必须是不含有空格的单个词,命名规则如下:

(i) 变量名区分字母大小写,如 Algebra 和 algebra 是不同的变量;

(ii) 变量名最多不超过 31 个字符,第 31 个字符后面的字符将被忽略;

(iii) 变量名必须以字母打头,之后可以是字母、数字或下划线,如 a1,a_b_c_1,MA12;

(iv) 标点符号在 MATLAB 中有特殊的含义,所以变量名中不允许使用标点符号.

除了这些命名规则,MATLAB 还有几个特殊变量,见表 6.1.

表 6.1　常用特殊变量表

特殊变量	取　值	特殊变量	取　值
ans	用于结果的默认变量名	i、j	$i=j=\sqrt{-1}$
pi	圆周率 π	nargin	所用函数的输入变量数目
eps	计算机的最小数 ε	nargout	所用函数的输出变量数目
flops	浮点运算数	realmin	最小可用正实数
Inf	无穷大,如 1/0	realmax	最大可用正实数
NaN	不定量,如 0/0	—	—

特殊变量在启动 MATLAB 后便自动赋予表 6.1 中的值.如果用户定义了相同

名字的变量,则初始取值将会被替换,清除所有变量或重新启动 MATLAB 后将恢复初始值.一般来说,应尽量避免重新定义特殊变量.

与其他语言不同,MATLAB 定义数值型变量时不需要变量声明,系统自动进行内存管理,为用户编程提供了很大的方便.

6.1.3　注释和符号

MATLAB 的注释符号是%,%后面的所有语句不能执行.如输入:

```
>>x=3+2  %计算 3+2 的值
```

运行后返回

```
x=
     5
```

MATLAB 中大部分标点符号都有其特殊的含义,在使用中要特别注意.比如在同一行运行多条命令,命令中间可用逗号或分号隔开.用逗号显示结果,分号禁止显示结果.如输入:

```
>>a=2,b=3;c=5
```

运行后返回

```
a=
     2
c=
     5
```

可以看出,输出结果并没有显示 b 的结果,但 b 的值仍然被保存了起来,可以直接调用,用户也可以在工作空间窗口中查看该变量的信息.编程时若不希望显示中间结果,可以在相应的命令后面用分号结束语句.更多的符号的说明见表 6.2.

注:所有符号都必须是英文输入状态下输入.

表 6.2　符号说明

符　号	说　明	符　号	说　明
=　等号	赋值	%　百分号	用于注释,其后文字、命令不执行
空格	输入量与输入量之间的分隔符; 数组元素分隔符	''　单引号对	字符串标记符
,　逗号	输入量与输入量之间的分隔符; 数组元素分隔符	'　单引号	矩阵转置
.　句号	数值运算的小数点;	[ ]　方括号	矩阵标志
;　分号	不显示计算结果的命令结束标志; 矩阵行与行之间的分隔符	()　圆括号	用于运算式中的优先级控制; 用在函数名后
:　冒号	生成一维数组; 索引的特殊用法	…　续行号	用于长命令的续行

6.1.4　常用数学函数

MATLAB 软件中包含了大量的函数,一些常用数值计算数学函数见表 6.3. 注意,MATLAB 只对弧度操作.

表 6.3　常用数学函数表

命　令	说　明	命　令	说　明	命　令	说　明
abs(x)	绝对值或复数的模	atanh(x)	反双曲正切	ceil(x)	对$+\infty$方向取整数
acos(x)	反余弦	conj(x)	复数共轭	fix(x)	对零方向取整数
acosh(x)	反双曲余弦	cos(x)	余弦	exp(x)	指数函数 e^x
asin(x)	反正弦	sin(x)	正弦	sqrt(x)	平方根
asinh(x)	反双曲正弦	tan(x)	正切	log(x)	自然对数
atan(x)	反正切	cot(x)	余切	log10(x)	常用对数

有了以上的基本介绍,我们可以利用 MATLAB 进行一些简单的数值计算.如要计算 $e^{2\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sqrt{3}\right)}+\arcsin\dfrac{1}{2}$,我们可以在命令窗口里输入:

```
>>exp(2*(cos(pi/5)+sqrt(3)))+asin(1/2)
```

运行后返回

```
ans=
  161.6414
```

6.1.5　帮助系统

MATLAB 是一个集合了大量工具箱的综合性软件,包含大量的函数和命令,这些函数和命令的调用有严格要求,使用时可以参考在线帮助文档.事实上,MATLAB 本身的在线帮助系统是学习掌握 MATLAB 软件的最有效的方法.当用户在编程过程中遇到困难,可以随时利用 MATLAB 帮助命令查询相关的解决方案,既方便又准确.常用的命令有 help、lookfor 等,具体使用方法为

```
>>help                    %显示 MATLAB 及其工具箱的主题目录
>>help 命令或函数          %显示该命令或函数的详细使用说明
>>lookfor 关键词           %显示与关键词相关的命令或函数信息
>>demo                    %演示 MATLAB 基本功能
```

除了使用命令进行帮助查询外,用户也可以直接单击菜单栏中的 help 进行各种在线学习或帮助查询.

例如,我们想进一步了解 MATLAB 矩阵求秩命令的具体用法,可以在命令窗口输入:

```
>>help rank
```

运行后返回

```
RANK  Matrix rank.
    RANK(A)provides an estimate of the number of linearly
    independent rows or columns of a matrix A.
    RANK(A,tol)is the number of singular values ofA
    that are larger than tol.
    RANK(A)uses the default tol=max(size(A)) * norm(A) * eps.

Overloaded methods
    help sym/rank.m
    help rptcp/rank.m
```

输出结果显示了调用 rank 命令的参数设置方法和意义，同时还给出了和 rank 命令相关的函数名.再如，若用户不知道 rank 这个命令，想了解 MATLAB 中和秩相关的命令，可以在命令窗口中输入相应关键词：

```
>>lookfor rank
```

运行后返回

```
CHOLUPDATE Rank 1 update to Cholesky factorization.
QRUPDATE Rank 1 update to QR factorization.
RANK  Matrix rank.
SPRANK Structural rank.
GFRANK Compute the rank of a matrix over a Galois field.
vrank.m:%function out=vrank(mat)
FRANKE Franke'S bivariate test function.
RANKSUM Wilcoxon rank sum test that two populations are identical.
SIGNRANK Wilcoxon signed rank test of equality of medians.
TIEDRANK Compute the ranks of a sample,adjusting for ties
RANK  Symbolic matrix rank.
RANK returns position of component in child list
FRANK Frank matrix.
```

输出结果显示了与秩相关的各种函数名和该函数的简单说明，如果需要进一步了解该函数，可以使用 help 命令查询函数具体使用方法.

6.2　矩阵的基本运算及行列式计算

6.2.1　矩阵的生成

矩阵是线性代数的基础，同时也是 MATLAB 的基础.MATLAB 的强大之处就在于它是以矩阵(数组)作为变量来进行运算的，进而使得面对大量数据时变的得心应手.MATLAB 的矩阵用[]表示，MATLAB 可以自行解读矩阵的行、列标志

和元素.定义矩阵的原则是矩阵元素间用空格或逗号隔开,行用分号隔开.

例 6.1　用 MATLAB 生成以下矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&8&3&2\\0&1&5&5\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$;　　(4) $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&4&\frac{2}{3}&9\end{pmatrix}$.

解　在 MATLAB 命令窗口里直接输入以下命令:

(1)
```
>>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9] %命令中凡是“[]”括起来的都表示矩阵,元素必须
                          符合矩阵格式要求
A=
  1    2    3
  4    5    6
  7    8    9
```
(2)
```
>>B=[2,8,3,2;0,1,5,5]   %逗号分隔同一行元素,分号分隔不同行元素,且
                          必须在英文状态下输入
B=
  2    8    3    2
  0    1    5    5
```
(3)
```
>>C=[1;4;3]
C=
  1
  4
  3
```
(4)
```
>>D=[1,4,2/3,9]          %MATLAB默认保留小数点后四位有效数字
D=
    1.0000    4.0000    0.6667    9.0000
```

通过例 6.1 可以发现,生成矩阵的命令比较简单,但如果要生成大型或特殊的矩阵用以上方法比较麻烦,MATLAB 定义了一些特殊矩阵,且调用方式类似.读者应记住常用函数名,在实际使用中可以调用帮助功能查询这些函数的使用方法.特殊矩阵定义见表 6.4.

表 6.4　特殊矩阵生成函数

命　令	说　明
A=[ ]	空矩阵
A=eye(n)	n 阶单位矩阵

续表

命　令	说　明
A＝ones(n,m)	全部元素都为 1 的 $n\times m$ 矩阵
A＝rand(n,m)	元素服从 0 和 1 之间均匀分布的随机矩阵
A＝randn(n,m)	元素服从零均值单位方差正态分布的随机矩阵
A＝zeros(n,m)	全部元素都为 0 的矩阵
A＝diag([…])	主对角元素为指定数的对角矩阵

例 6.2　生成如下特殊矩阵：

（1）3 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　（2）零矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$；

（3）全 1 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$；　（4）对角矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

解　在 MATLAB 命令窗口里直接输入以下命令：

（1）
```
>>E=eye(3)            %生成主对角线元素全为 1 的特殊矩阵,圆括号内为参数

E=

    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
```

（2）
```
>>A=zeros(3,2)        %生成元素全为 0 的特殊矩阵,括号内逗号前为行数,逗号后为列数

A=

    0    0
    0    0
    0    0
```

（3）
```
>>B=ones(2,3)         %生成元素全为 1 的特殊矩阵,括号内逗号前为行数,逗号后为列数

B=

    1    1    1
    1    1    1
```

（4）
```
>>C=diag([1,3,6])     %生成主对角元素为指定数的对角矩阵,参数需为矩阵形式

C=

    1    0    0
    0    3    0
    0    0    6
```

6.2.2　矩阵基本运算

掌握了基本的矩阵输入后,可以对定义的矩阵进行一系列运算.矩阵运算包括矩阵与标量、矩阵与矩阵的运算,下面分别加以说明.

1. 矩阵与标量的运算

矩阵与标量的运算主要包括+、-、×、÷等运算.MATLAB中矩阵与标量的运算定义为矩阵的每个元素对该标量的相应运算,这与线性代数中的概念是不太一样的.运算符号分别为+、-、*、/.如已知

```
a=
    1    2    3    4
    5    6    7    8
```

则

(i) 输入:

```
>>a-2      %a 中每个元素分别减 2
```

运行后返回

```
ans=
   -1    0    1    2
    3    4    5    6
```

(ii) 输入:

```
>>a*2    %a 中每个元素分别乘以 2,相当于矩阵的数乘运算
```

运行后返回

```
ans=
    2    4    6    8
   10   12   14   16
```

(iii) 输入:

```
>>a/2      %a 中每个元素分别除以 2
```

运行后返回

```
ans=
    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000
    2.5000    3.0000    3.5000    4.0000
```

2. 矩阵与矩阵的运算

MALTAB中矩阵与矩阵的运算符合线性代数中矩阵运算的定义,即矩阵与矩阵加(减)要求两个矩阵是同型矩阵;矩阵与矩阵相乘要求左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数.在MATLAB中矩阵与矩阵的运算主要有加、减、乘、逆、转置、

幂,运算符号分别为"+、-、* 、inv(A)、'、^".具体使用方法见例 6.3.

例 6.3　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.2 & 3 & 11\\1 & 7 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\1 & 0 & 0\\2 & 0 & 3\end{pmatrix}$,计算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{ABC}$,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,$2\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}^2$.

解　输入:

```
>>A=[1,2;4,6];B=[0.2,3,11;1,7,1];C=[2,1,4;1,0,0;2,0,3];
                                            %命令以";"结束,不返回结果
>>E=eye(2);                                 %产生 2×2 的单位矩阵
>>D=A+E,F=A*B,G=A*B*C,L=B',M=2*B,X=C^2
                                            %MATLAB 中的矩阵相乘的*号不能省略
```

运行后返回

```
D=
    2    2
    4    7
F=
    2.2000    17.0000    13.0000
    6.8000    54.0000    50.0000
G=
    47.4000   2.2000     47.8000
   167.6000   6.8000    177.2000
L=
    0.2000    1.0000
    3.0000    7.0000
   11.0000    1.0000
M=
    0.4000    6.0000    22.0000
    2.0000   14.0000     2.0000
X=
    13    2    20
     2    1     4
    10    2     1
```

注:如果矩阵 $\boldsymbol{C}$ 不是方阵,则使用 X=C^2 时会返回错误信息.如输入:

```
>>C=[1,2,3;4,5,6]
```

运行后返回

```
C=
    1     2    3
    4     5    6
```

再输入：

```
>>X=C^2
```

运行后返回

```
???Error using==>^
Matrix must be square.
```

MATLAB 提示用户计算 $\boldsymbol{C}$ 的 2 次幂，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 必须是方阵.

例 6.4　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\1 & 0 & 0\\2 & 0 & 3\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $\boldsymbol{C}^*$(伴随矩阵).

解　输入：

```
>>A=[1,2;4,6];C=[2,1,4;1,0,0;2,0,3];a=inv(A),b=inv(C)*det(C)
                                          %命令 inv(C)*det(C)返回方阵 C*
```

运行后返回

```
a=
    -3.0000      1.0000
     2.0000     -0.5000
b=
     0     -3      0
    -3     -2      4
     0      2     -1
```

注：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵或者不可逆，则使用 inv(A)是返回错误信息.MATLAB 提供了强大的矩阵运算功能，但并不是所有的问题都可以直接求解，有时我们需要利用线性代数的理论知识结合 MATLAB 来解决实际问题.例 6.4 中求解矩阵的伴随矩阵时，我们就是借助矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的逆和其行列式的乘积来进行求解，而非直接求解.

一般情况下，基本的运算符号都是对矩阵进行的以上定义的运算，这要求用户在使用时要注意是否满足矩阵运算的基本定义.为了编程的需要，MATLAB 还定义了一种特殊矩阵运算，称为数组运算，实现矩阵与矩阵对应元素的运算.

3. 矩阵的数组运算

矩阵的数组运算不同于矩阵运算，它是同型矩阵之间的运算，主要包括四则运算和幂运算.具体定义为

(i) 数组的加减运算符号+、−相当于矩阵的加减运算；

(ii) 数组的乘除运算符号 * 、/实现对应元素的乘除；

(iii) 数组的幂运算符号^实现矩阵的每个元素的幂运算.

例如，输入：

```
>>a=[1,2;3,4];b=[2,2;2,2];
```

```
>>a+b,a-b,a.*b,a./b,a.^2
```

运行后返回

```
ans=
     3     4
     5     6
ans=
    -1     0
     1     2
ans=
     2     4
     6     8
ans=
     0.5000    1.0000
     1.5000    2.0000
ans=
     1     4
     9    16
```

另外,矩阵的数组幂运算还可以计算矩阵的矩阵次幂,定义为对应元素的幂.例如,输入:

```
>>b.^a
```

运行后返回

```
ans=
      2     4
      8    16
```

6.2.3　行列式的计算

行列式是线性代数中非常重要的一个概念,它可以看作是方阵元素的一种特定运算.在实际求解高阶行列式时,人工计算会遇到困难,而 MATLAB 中的命令简单易学.MATLAB 中定义的行列式计算命令是 det(A),其中 A 为任意的方阵.

例 6.5　计算下列行列式的值:$D_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix}1&0&8&2\\0&2&4&8\\9&7&7&3\\3&4&3&5\end{vmatrix}$.

解　输入:

```
>>a=[1,2,3;4,5,6;7,8,9];b=[1,0,8,2;0,2,4,8;9,7,7,3;3,4,3,5];
>>d1=det(a),d2=det(b)  %"det"是求解行列式的命令,参数只能为方阵
```

运行后返回

```
d1=
    0
d2=
  192
```

除了可以计算数值型方阵的行列式结果外,MATLAB 还可以计算符号变量行列式,这要求首先定义符号变量,一般可使用“syms+符号变量”的方式定义符号变量.

例 6.6 计算下列行列式的值:$D_1=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 2 & c & 4 \\ 3 & d & e \end{vmatrix}$.

解 输入:

```
>>syms a b c d e                    %定义符号变量
>>x=[a,b;c,d],y=[a,0,b;2,c,4;3,d,e],d1=det(x),d2=det(y)
                                    %生成并计算带有符号的矩阵及行列式
```

运行后返回

```
x=
    [a,b]
    [c,d]
y=
    [a,0,b]
    [2,c,4]
    [3,d,e]
d1=
    a*d-b*c
d2=
    a*c*e-4*a*d+2*b*d-3*b*c
```

6.3 矩阵的初等变换及矩阵的秩

初等变换是矩阵变换里最重要的一种变换方式,通过求解矩阵的行最简形,我们可以更清楚地了解矩阵的性质,进而解决很多重要问题.MATLAB 为我们提供了矩阵初等行变换的命令,可以求解复杂矩阵的初等变换问题.定义如下:

(i) R=rref(A),返回 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形,其中 $\boldsymbol{A}$ 为任意矩阵.

(ii) [R,s]=rref(A),返回 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形和非零首元的列号,分别赋值给 R 和 s.

例 6.7　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\1 & 1 & -2\\4 & -6 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\3 & -2 & 3 & 6 & -1\\2 & 0 & 1 & 5 & -3\\1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$的行最简形.

解　输入：

```
>>a=[2,-1,-1;1,1,-2;4,-6,2];b=sym([3,2,0,5,0;3,-2,3,6,-1;2,0,1,5,-
  3;1,6,-4,-1,4]);    %sym(·)定义符号型矩阵
A=rref(a),B=rref(b)   %"rref"命令求解矩阵的行最简形,参数可为任意矩阵
```

运行后返回

```
A=
     1  0 -1
     0  1 -1
     0  0  0
B=
   [1,  0,   1/2,  0,   7/2]
   [0,  1,  -3/4,  0,  -1/4]
   [0,  0,     0,  1,    -2]
   [0,  0,     0,  0,     0]
```

注：如用“rrefmovie”命令代替“rref”，同时可以看到化简的过程.

例 6.8　求下列矩阵的秩：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\1 & 1 & -2\\4 & -6 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\3 & -2 & 3 & 6 & -1\\2 & 0 & 1 & 5 & -3\\1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

解　由例 6.7 的结果可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 3.另外矩阵的秩也可以在 MATLAB 中直接求解.定义如下：rank(A)，其中 $\mathbf{A}$ 为任意矩阵.

输入：

```
>>A=rank(a),B=rank(b)  %"rank"命令求解矩阵的秩,参数可以是任意矩阵
```

运行后返回

```
A=
     2
B=
     3
```

6.4　向量组的线性相关性及线性方程组

6.4.1　向量组的线性相关性

根据线性代数的相关定理，我们知道向量组线性相关的一个充要条件是该向

量组的秩小于向量组中向量的个数,线性无关的充要条件是该向量组的秩等于向量组中向量的个数.根据这一定理,我们可以借助 MATLAB 来判断一个向量组的线性相关性.类似的,要寻找向量组的一个极大无关组,只需要对该向量组确定的矩阵进行初等行变换,直到化为行最简形后,非零首元所在的列所对应的向量则为原向量组的一个极大无关组.

例 6.9 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,试确定向量组的秩和线性相关性,并求极大线性无关组.

解 先写出向量组对应的矩阵,然后求矩阵的秩及行最简形,最后判断线性相关性及极大无关组.

输入:

```
>>A=[1,2,0,1;0,1,1,1;1,0,1,1];  %产生向量组所对应的矩阵
>>rank(A),[R,s]=rref(A)         %[R,s]=rref(A)返回 A 的行最简形和非零
                                  首元的列号,分别赋给 R 和 s
```

运行后返回

```
ans=
     3
R=
   [1,  0,  0,1/3]
   [0,  1,  0,1/3]
   [0,  0,  1,2/3]
s=
     1   2   3
```

由运行结果可知,该向量组的秩为 3,秩小于向量的个数,故由定理知向量组线性相关.由向量组的行最简形可知该向量组的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

6.4.2 线性方程组

线性方程组是线性代数中的主要内容之一,其理论部分已经比较完善.在 MATLAB 中包含多种处理线性方程组的命令.部分定义如下:

(i) 命令 null(A),给出齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

(ii) 命令 A\b,给出非齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解.

若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆方阵时,A\b 给出非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的唯一解;

若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时,A\b 给出一个具有最多零元素的特解;

若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解时,A\b 给出最小二乘近似解.

(iii) 命令 rref([A,b])可以化增广矩阵为行最简形.这个方法提供了解线性方程组的最可行和常用的方法.

例 6.10 求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_2-x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4=2 \end{cases}$的通解及对应的齐次

线性方程组的基础解系.

解　先求出增广矩阵的行最简形,然后根据线性代数知识求解.

输入:

```
>>B=[0,1,-1,-2,0;2,3,1,4,2];R=rref(B)  %求增广矩阵的行最简形
```

运行后返回

```
R=
     1    0     2     5    1
     0    1    -1    -2    0
```

此时可知方程组有无穷多解.令 $x_3=x_4=0$,得方程组的一个特解为:$\boldsymbol{\eta}^*=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行最简形最后一列换为 0 后,可以求出原方程组对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=(-5,2,0,1)^{\mathrm{T}}$.故非齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}^*$,$c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

也可以用 MATLAB 提供的求解方程组基础解系和特解的命令直接求解,程序如下:

```
>>A=[0,1,-1,-2;2,3,1,4];b=[0;2];   %生成系数矩阵和常数向量
>>x0=A\b                            %用矩阵左除(\)求 AX=b 的特解 x0
x0=
         0
    0.4000
         0
    0.2000
>>x=null(A,'r')                     %得到齐次线性方程组 Ax=0 的基础解系
x=
    -2   -5
     1    2
     1    0
     0    1
```

故原方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-5\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0.4\\0\\0.2\end{pmatrix}$,$c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

6.5　矩阵的特征值与二次型

6.5.1　特征值与特征向量

在 MATLAB 中,提供了多种关于矩阵特征值处理的函数,用户可以使用这些

函数来分析矩阵的特征值.关于矩阵的特征值和特征向量的命令具体的调用格式如下:

(i) d=eig(A)　仅计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,并且以向量的形式输出;

(ii) [V,D]=eig(A)　计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量矩阵 $\boldsymbol{V}$ 和特征值对角阵 $\boldsymbol{D}$,满足 AV=VD;

(iii) [V,D]=eig(A,'nobalance')　当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中截断误差数量级相差不大时,该指令更加精确.

注:当用户只需要了解矩阵的特征值的时候,推荐使用第一条命令.这样可以节约系统的资源.

例 6.11　计算矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&4\\0&3&6\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解　输入:

```
>>A=[1,0,0;0,2,4;0,3,5];  %定义矩阵
>>r=eig(A),[V,D]=eig(A)   %[V,D]=eig(A)命令,V的列为矩阵A的单位特征向
                            量,与D中特征值一一对应,D为A特征值所构成的
                            对角阵.
```

运行后返回

```
r=
    7.2749
   -0.2749
    1.0000
V=
         0         0    1.0000
    0.6042    0.8693         0
    0.7968   -0.4944         0
D=
    7.2749         0         0
         0   -0.2749         0
         0         0    1.0000
```

例 6.12　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$,计算 $\boldsymbol{A}$,$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{A}^2$,$\boldsymbol{A}^3$ 的特征值.

解　输入程序及返回结果如下:

```
>>A=[1,1,2;- 1,2,1;0,1,3];eig(A)  %返回A的特征值向量
ans=
    1.0000
```

```
    2.0000
    3.0000
>>eig(2*A+3*eye(3))             %返回 2A+3E 的特征值向量
ans=
    5.0000
    7.0000
    9.0000
>>eig(A^2),eig(A^3)             %返回 A²,A³ 的特征值向量
ans=
    9.0000
    4.0000
    1.0000
ans=
   27.0000
    8.0000
    1.0000
```

通过此例可以进一步验证矩阵特征值的相关性质，即：设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对任意正整数 k 有，λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值；$a\lambda+b$ 是 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}$ 的特征值.

6.5.2　相似变换及二次型

由前几章内容知道，若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.实对称矩阵一定与对角阵相似，且存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.利用 MATLAB 我们可以求解方阵的相似对角矩阵及相似变换矩阵.

例 6.13　设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&1\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$，求一个可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解　输入：

```
>>clear                          %清除内存变量
>>A=[4,1,1;2,2,2;2,2,2];
>>A=sym(A);[P,X]=eig(A)          %用 sym 处理后,输出的特征向量没有
                                  单位化
```

运行后返回

```
P=
  [ 0,  1,  -1]
  [-1,  1,   1]
  [ 1,  1,   1]
X=
  [0,0,0]
```

```
    [0,6,0]
    [0,0,2]
```

因此,特征值是 0,6,2.对应的特征向量是$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.由线性代数理论知矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$就是要求的相似变换矩阵.为了验证 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵,可以输入:

```
>>inv(P)*A*P
```

运行后返回

```
ans=
  [0,0,0]
  [0,6,0]
  [0,0,2]
```

因此,方阵 $\boldsymbol{A}$ 在相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的作用下可化为对角矩阵.

例 6.14　已知方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似,求 x,y.

解　注意到 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵,特征值为-1,2,y,很容易得知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为-2.由已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,知 $y=-2$,且-1,2 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

输入:

```
>>clear
>>syms x                   %定义 x 为符号变量
>>A=[-2,0,0;2,x,2;3,1,1];B=diag([-1,2,-2]);
>>det(A),det(B)            %计算 A 的行列式,B 的行列式
```

运行后返回

```
ans=
 -2*x+4
ans=
       4
```

然后再输入:

```
>>solve('-2*x+4=4')   %求解联立的方程|A|=|B|的解
```

运行后返回

```
ans=
0
```

由程序结果得,$x=0$.故原题中 $x=0$,$y=-2$.

例 6.15　求二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 的标准形，并判断其正定性.

解　二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，利用 MATLAB 求其特征值，输入：

```
>>A=[2,0,0;0,3,2;0,2,3];
>>[P,X]=eig(A)
```

运行后返回

```
P=
          0    1.0000         0
    -0.7071         0    0.7071
     0.7071         0    0.7071
X=
     1.0000         0         0
          0    2.0000         0
          0         0    5.0000
```

则二次型的标准形为 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，且由于特征值全大于 0，故为正定二次型.

另外，变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 恰为二次型化为标准形的正交变换.为了验证这一点，我们可以在命令窗口里输入：

```
>>P'*P
```

运行后返回

```
ans=
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
```

返回结果说明 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，即相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵.

6.6　线性代数解应用问题的 MATLAB 实现

例 6.16（克莱姆法则在资源分配中的应用）　一家服装厂共有三个加工车间，第一车间用一匹布能生产衬衣 4 件，长裤 15 条和 3 件外衣；第二车间用一匹布能生产衬衣 4 件，长裤 5 条和 9 件外衣；第三车间用一匹布能生产衬衣 8 件，长裤 10 条和 3 件外衣.现该厂接到一张订单，要求供应 2000 件衬衣，3500 条长裤和 2400 件外衣.问该厂如何向三个车间安排加工任务，以完成该订单？

解　设分给第一车间 x_1 匹布，第二车间 x_2 匹布，第三车间 x_3 匹布，则可得方程组

$$\begin{cases} 4x_1+4x_2+8x_3=2000 \\ 15x_1+5x_2+10x_3=3500. \\ 3x_1+9x_2+3x_3=2400 \end{cases}$$

可用 MATLAB 来求解,首先验证系数行列式是否为零.在命令窗口输入:

```
>>d=[4,4,8;15,5,10;3,9,3];
>>det(d)
```

运行后返回

```
ans=
    600
```

结果显示系数行列式不等于零,根据克莱姆法则可知,线性方程组有唯一解,可以按照公式计算结果.在命令窗口输入:

```
>>d1=[2000,4,8;3500,5,10;2400,9,3];
>>d2=[4,2000,8;15,3500,10;3,2400,3];
>>d3=[4,4,2000;15,5,3500;3,9,2400];
>>x1=det(d1)/det(d),x2=det(d2)/det(d),x3=det(d3)/det(d)
                                                  %克莱姆法则的公式
```

运行后返回

```
x1=
    100
x2=
    200
x3=
    100
```

由以上结果知,该厂应分配给 3 个车间的加工任务分别是 100 匹、200 匹、100 匹布.

注:该例题为第 1 章习题 1(A)第 10 题的 MATLAB 实现.

例 6.17(矩阵的应用问题)　某城镇有 100000 人具有法定的工作年龄.目前有 80000 人找到了工作,其余 20000 人失业.每年有工作的人中的 10%将失去工作而失业人口中的 60%将找到工作.假定该镇的工作适龄人口在若干年内保持不变.问三年后该镇工作适龄人口中有多少人失业?

解　由题意,设三年后找到工作的人为 x,失业的人为 y,则可以用矩阵表示为

$$(x,y)=(80000,20000)\begin{pmatrix} 90\% & 10\% \\ 60\% & 40\% \end{pmatrix}^3.$$

用 MATLAB 进行求解,输入:

```
>>a=[80000,20000];
>>b=[0.9,0.1;0.6,0.4];
```

```
>>sym(a*b^3)
```

运行后返回

```
ans=
[85560,14440]
```

由以上结果可知，三年后该镇工作适龄人口有 14440 人将失业.

注：该例题为第 2 章习题 2(B)第 12 题的 MATLAB 实现.

例 6.18（**线性方程组理论在交通流量中的应用**）　图 6.2 是某城市部分单行街道的交通流量图（每小时过车数）。这里假设：①全部流入网络的流量等于全部流出网络的流量；②全部流入一个节点（道路交汇处）的流量等于全部流出此节点的流量.试建立数学模型确定该交通网络中未知数的流量.

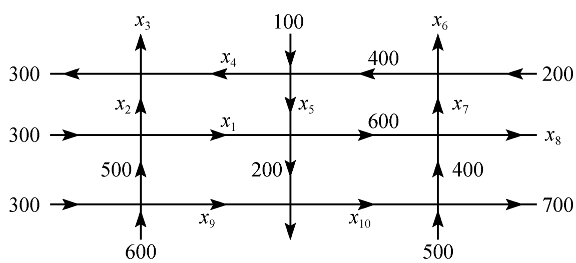


图 6.2

解　依题意假设，按照总流量及 9 个节点的流入流出网络的流量相等可以得出方程组

$$
\begin{cases}
100+200+300+300+600+500=300+x_3+x_6+x_8+700 \\
x_2+x_4=300+x_3 \\
100+400=x_4+x_5 \\
200+x_7=400+x_6 \\
300+500=x_1+x_2 \\
x_1+x_5=200+600 \\
600+400=x_7+x_8 \\
300+600=500+x_9 \\
200+x_9=x_{10} \\
500+x_{10}=400+700
\end{cases},
$$

化简，得

$$\begin{cases} x_3+x_6+x_8=1000 \\ x_2-x_3+x_4=300 \\ x_4+x_5=500 \\ -x_6+x_7=200 \\ x_1+x_2=800 \\ x_1+x_5=800 \\ x_7+x_8=1000 \\ x_9=400 \\ -x_9+x_{10}=200 \\ x_{10}=600 \end{cases}.$$

用 MATLAB 对上面方程组的增广矩阵进行初等行变换,并求其通解.首先新建 M 文件,并保存为 jiaotong.m,在 M 文件中输入下面的程序:

```
B=[0,0,1,0,0,1,0,1,0,0,1000;
   0,1,-1,1,0,0,0,0,0,0,300;
0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,500;
0,0,0,0,0,-1,1,0,0,0,200;
1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,800;
1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,800;
0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1000;
0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,400;
0,0,0,0,0,0,0,0,-1,1,200;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,600];   %定义增广矩阵
[C,s]=rref(B);              %化增广矩阵为行最简形矩阵,记录非零首元列号
r=rank(B)                   %求矩阵的秩
x1=C(1:r,1:10)\C(1:r,11)    %求非齐次线性方程组得一个特解
A=sym(B(:,1:10));           %取出系数矩阵并定义为符号形式矩阵
null(A)                     %求基础解系
```

运行后返回

```
r=
      8
x1=
          0
  800.0000
  200.0000
 -300.0000
  800.0000
          0
```

```
  200.0000
  800.0000
  400.0000
  600.0000
ans=
[-1,0]
[1, 0]
[0, 0]
[-1,0]
[1, 0]
[0,-1]
[0,-1]
[0, 1]
[0, 0]
[0, 0]
```

故得对应齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,-1,1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(0,0,0,0,0,-1,-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}=(0,800,200,-300,800,0,200,800,400,600)^{\mathrm{T}}$，但此时特解并不符合实际意义，需重新选择分量全部大于等于零的特解，故在上面 M 文件中加入如下程序：

```
x=zeros(10,1);  %定义全为零的列向量
for i=1:r
x(s(i),1)=C(i,11)  %确定特解,s(i)为非自由变量编号
end
```

运行后返回

```
x=
  800
  0
  200
  500
  0
  800
  1000
  0
  400
  600
```

故方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*=(800,0,200,500,0,800,1000,0,400,600)^{\mathrm{T}}$，方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}^*$，$c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

例 6.19（**特征值在经济中的应用**）　某地区以生产粮食和钢铁为经济主体.当

钢铁、粮食和劳动力的投入量分别为 x_1, x_2, x_3 个单位时，对应的产出量分别为 y_1, y_2, y_3 个单位，已知投入量和产出量之间符合的数学模型 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.4&0&0.1\\0&0.1&0.8\\0.5&0.7&0.1\end{pmatrix},$$

问怎样投入时，该地区的经济发展速度 a 最大？即满足 $y_i=ax_i(i=1,2,3)$ 的 a 最大？

解 由已知条件 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，若发展速度为 a，则 $\boldsymbol{y}=a\boldsymbol{x}$，于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}a\boldsymbol{y}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\frac{1}{a}\boldsymbol{y}$，可见 $\frac{1}{a}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.用 MATLAB 求 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值和特征向量.输入：

```
>>A=[0.4,0,0.1;0,0.1,0.8;0.5,0.7,0.1]
>>[x,y]=eig(A)
```

运行后返回

```
x=
   -0.1400    -0.7547    -0.0646
   -0.7001     0.6211    -0.7181
   -0.7001     0.2112     0.6930
y=
    0.9000          0          0
         0     0.3720          0
         0          0    -0.6720
```

由以上结果可知 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $0.9, 0.372, -0.672$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$ 的三个列向量.根据实际意义可知 $\frac{1}{a}=0.9$，即 $a=\frac{10}{9}$.故当钢铁、粮食和劳动力以 $0.2:1:1$ 的比例投入时，该地区有最快的经济发展速度 $\frac{10}{9}$，而且将以 $\frac{10}{9}$ 的速度持续发展.

习 题 6

(A)

1. 在 MATLAB 中定义以下矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}=(1\quad 2\quad 3\quad 4)$；　　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&4\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&0&1\\3&2&2\end{pmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$；

(5) $\boldsymbol{F}=(0\quad 0\quad 0\quad 0)$；　　(6) $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2/3&0&0\\0&0&4/7&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2. 用 MATLAB 计算以下行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix}0&0&0&0&1\\0&2&3&0&1\\1&4&3&2&3\\1&1&1&0&8\\2&3&4&0&7\end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix}x&y&0&0&0\\0&x&y&0&0\\0&0&x&y&0\\0&0&0&x&y\\y&0&0&0&x\end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix}a_0&1&1&1&1\\1&a_1&0&0&0\\1&0&a_2&0&0\\1&0&0&a_3&0\\1&0&0&0&a_4\end{vmatrix}$.

3. 利用克莱姆法则求解下列方程组.

(1) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3-2x_4=2\\2x_1-x_3+4x_4=4\\3x_1+2x_2+x_3=-1\\-x_1+2x_2-x_3+2x_4=-4\end{cases}$；

(2) $\begin{cases}-23x_1-13x_2+14x_3+14x_4-7x_5=-104\\-2x_1-2x_2+x_3+6x_4-14x_5=-114\\-4x_1-5x_2-9x_3+2x_4-9x_5=-212\\-4x_1-7x_2+x_3=-56\\9x_1-x_2+x_3-9x_4+10x_5=120\end{cases}$.

4. 利用 MATLAB 求解下列矩阵的行最简形及秩.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&3&2&3&4\\4&2&1&2&3\\4&2&3&2&1\\2&1&7&3&2\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&-2&4&-2\\3&0&6&-1\\2&1&4&2\end{pmatrix}$.

5. 利用 MATLAB 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$的秩及一个极大无关组.

6. 利用 MATLAB 求方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\x_1+x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$的基础解系及其通解.

7. 利用 MATLAB 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

8. 用正交变换法将二次型

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4)=&x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3\\ &-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4 \end{aligned}$$

化为标准形.

(B)

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}$,请分别用矩阵乘法和矩阵的数组运算计算它们的内积.

2. 解方程$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2-x^2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 7-x^2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0$.

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & t & -1 \end{pmatrix}$的秩为 2,求常数 t 的值.

4. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0.823\\0.2798\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0.09\\1\\0.965\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0.9\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\0.372\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-0.672\end{pmatrix},$$

证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价.

习题参考答案

习 题 1

(A)

1. (1) -7； (2) $3abc-a^3-b^3-c^3$； (3) $(a-b)(b-c)(c-a)$.
2. (1) -270； (2) -8； (3) $4abcdef$； (4) $abcd+ab+cd+ad+1$.
3. (1) $x=1,2$； (2) $x=\pm1,\pm2$.
4. (略)
5. (1) $a^{n-2}(a^2-1)$； (2) $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$； (3) $n!\left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)$.
6. 0.
7. (1) $x_1=1,x_2=2,x_3=3$；

   (2) $x_1=-\frac{151}{211},x_2=\frac{161}{211},x_3=-\frac{109}{211},x_4=\frac{64}{211}$.
8. $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，有唯一解，$x_1=\frac{-\lambda-1}{\lambda+2},x_2=\frac{1}{\lambda+2},x_3=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$.
9. $a^2-4a+4b-1=0$.
10. 安排第一车间 100 匹布，第二车间 200 匹布，第三车间 100 匹布.

(B)

1. (1) x^5+y^5； (2) $a_1a_2a_3a_4\left(a_0-\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a_k}\right)$.
2. (1) $a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$； (2) $\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant1}(i-j)$； (3) $\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$.
3. (略)
4. $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,A_{44}+A_{45}=18$.

习 题 2

(A)

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (1) $\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$; (2) 10; (3) $\begin{pmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}5&6&4&5\\6&10&7&6\end{pmatrix}$;

(5) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$;

(6) $\begin{pmatrix}\cos2\varphi & -\sin2\varphi\\ \sin2\varphi & \cos2\varphi\end{pmatrix}$.

3. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&5\\4&-3\\5&5\end{pmatrix}$;$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&17\\2&8\end{pmatrix}$.

4. 140.

5. $\begin{cases}x_1=2z_1+3z_2-z_3\\ x_2=3z_1-4z_2+z_3\\ x_3=4z_1+4z_3\end{cases}$.

6. (略)

7. (1) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$,而 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$;

(2) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,有 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$,而 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$;

(3) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,有 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$,而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$.

8. (1) $\begin{pmatrix}3^n&&\\&(-1)^n&\\&&2^n\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix}$.

9、10. (略)

11. $\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix}$.

12. $|\boldsymbol{A}^8|=10^{16}$;$\boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix}5^4&0&0&0\\0&5^4&0&0\\0&0&2^4&0\\0&0&2^6&2^4\end{pmatrix}$.

13. (1) $\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

14. (1) $\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}\frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2}\\-1 & -1 & 2\\-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\-\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\-16 & 7 & -1\end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -4\\0 & 1 & 0 & -1\\-1 & -1 & 3 & 6\\2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}$； (6) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\-2 & 5 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & -3\\0 & 0 & -5 & 8\end{pmatrix}$；

(7) $\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n}\end{pmatrix}$.

15. (1) $x_1=1,x_2=0,x_3=0$； (2) $x_1=5,x_2=0,x_3=3$.

16. (1) $\begin{pmatrix}2 & 0\\5 & -1\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\4 & 6 & 5\\4 & 0 & 2\end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix}5 & 3\\0 & 2\\3 & 0\end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\-\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

18. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 3 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

19. 3^5.

20. (略)

21. $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$；$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})$.

22. $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$.提示:$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}$.

23. $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 7 & -6 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

24. 都可能有.

25. $R(\boldsymbol{A})-1\leqslant R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})$.

26. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

27. (1) $R=2$,$\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0$;　(2) $R=3$,$\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 7 & 0 & -8\end{vmatrix}\neq 0$;

(3) $R=3$,$\begin{vmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & -2 & 6\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}\neq 0$;(4) $R=3$,$\begin{vmatrix}2 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 3\end{vmatrix}\neq 0$.

28. (略)

29. $k=12$ 时,$R(\boldsymbol{A})=1$;$k\neq 12$ 时,$R(\boldsymbol{A})=2$;任何时候不可能有 $R(\boldsymbol{A})=3$.

(B)

1. $\lambda^{n-2}\begin{pmatrix}\lambda^2 & n\lambda & \dfrac{n(\lambda-1)}{2}\\ 0 & \lambda^2 & n\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$.

2. $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(2,-4,2)$.提示:在所给方程两边左乘 $\boldsymbol{A}$,右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,再利用$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

3. $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(6,6,6,-1)$.提示:利用 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

4、5. (略)

6. (1) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$.

提示:设$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}$.

7. $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}24 & 0 & 0 & 0\\ -12 & 12 & 0 & 0\\ -12 & -4 & 8 & 0\\ 3 & -5 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

8～10.（略）

11.（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2000 & 1200\\ 1200 & 1400\\ 800 & 600\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.02 & 0.12\\ 0.35 & 0.05 & 0.5\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}820 & 100 & 840\\ 730 & 94 & 844\\ 370 & 46 & 396\end{pmatrix}$.

12. 14440 人．提示：令 a_n，b_n 分别表示该镇 n 年后就业和失业人口数.

令 $\boldsymbol{x}_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.9 & 0.6\\ 0.1 & 0.4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n$. 求出 $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}85560\\ 14440\end{pmatrix}$.

13. send money.

习　题　3

（A）

1. $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.
2. $a=1$，$b=-1$，$c=-2$.
3. （1）η 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；（2）η 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示；

   （3）η 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.
4. （略）
5. （1）线性相关；（2）线性相关；（3）线性无关；（4）线性相关.
6. $a=0$ 或 $a=+1$ 或 $a=-1$.
7. $k=-4$ 或 $k=\dfrac{3}{2}$时，线性相关；$k\neq-4$ 且 $k\neq\dfrac{3}{2}$时，线性无关.
8. $\boldsymbol{\beta}=c\boldsymbol{\alpha}_1-(1+c)\boldsymbol{\alpha}_2$，$c\in\mathbf{R}$.

9～13.（略）

14. （1）秩为 3，极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$；（2）秩为 3，极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$；

    （3）秩为 2，极大无关组 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}$.
15. $\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\ b\end{pmatrix}$就是一个极大无关组.
16. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大无关组.
17. $a=2$，$b=3$.
18. $b=\dfrac{1}{3}$时，秩等于 2；$a\neq0$ 且 $b\neq\dfrac{1}{3}$时，秩等于 3，此时向量组线性无关.
19. （1）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\dfrac{8}{5}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是极大无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是极大无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_4=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是极大无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=-\frac{5}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_4$.

20. (1) $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq3$;(2) $\lambda=0$;(3) $\lambda=3$.

21. 维数是 2,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一组基

22. (1) V_1 是向量空间,且 $\dim(V_1)=n-1$,$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$是一组基;

(2) V_2 不是向量空间.

23. $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

24. $\boldsymbol{T}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&7&2&-1\\1&-1&2&3\\-1&3&0&-1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标为$\left(-2,-\frac{1}{2},4,-\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(B)

1、2. (略)

3. $a=2$.

4. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关,$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关.

5. 向量组线性无关.

6. $\boldsymbol{\beta}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$或 $\boldsymbol{\beta}_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

7、8. (略)

习 题 4

（A）

1.（1）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$；

（2）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$；

（3）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$；

（4）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

2.（1）通解$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbf{R}, \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$是基础解系；

（2）通解$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}, \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$是基础解系；

(3) 通解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbf{R}, \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是基础解系.

3. (1) $R(\boldsymbol{A}) = 3 < R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 4$,故无解;

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$;

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

4. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$.

5. $a = 1$ 且 $b = 3$ 时,有无穷多解,通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}.$$

6. (1) $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \pm 1$ 时,有唯一解;

(2) $\lambda = 0$ 时,无解;

(3) $\lambda = 1$ 时,无解;

(4) $\lambda = -1$ 时,有无穷多解,且通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}.$$

7. (1) $a\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时,有唯一解;
   (2) $a=0$ 或 $a=b\neq 1$ 时,无解;
   (3) $a=b=1$ 时,有无穷多解.

8. 当 $a\neq -3$ 且 $a\neq 1$ 时,方程组有唯一解;当 $a=-3$ 时,无解;当 $a=1$ 时,有无穷多解,通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}.$$

9. (1) 当 $\alpha\neq -4$ 且 $\beta\neq 0$ 时;
   (2) 当 $\alpha=-4$ 时.
   (3) 当 $\alpha=-4$ 且 $\beta=0$ 时,表示式不唯一,$\vec{b}=k\vec{a}_1-(2k+1)\vec{a}_2+\vec{a}_3$,$k\in\mathbf{R}$.

(B)

1. (1) $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$;

   (2) 当 $\begin{cases}t=6\\n=4\\m=2\end{cases}$ 时,方程(Ⅰ)与方程(Ⅱ)同解.

2. $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4\\a_2+a_3+a_4\\a_3+a_4\\a_4\\0\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}.$$

3. 当 $a=0$ 时,通解 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}$,$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in\mathbf{R}$,其中
$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\cdots$,$\boldsymbol{\eta}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$;
当 $a\neq 0$ 时,通解 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\eta}$,$\boldsymbol{\eta}=(1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$,且 $k\in\mathbf{R}$.

4. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)^{\mathrm{T}}+k(0,-1,1,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$.

5. $x=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.

习　题　5

(A)

1. (1) $\lambda_1=-2$,对应的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}(k_1\neq0)$;$\lambda_2=\lambda_3=1$,对应的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$($k_2,k_3$ 不同时为 0);

(2) $\lambda=-1$ 为三重根,对应的全部特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}(k\neq0)$;

(3) $\lambda_1=-2$,对应的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}(k_1\neq0)$;$\lambda_2=1$,对应的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}(k_2\neq0)$;$\lambda_3=4$,对应的全部特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}(k_3\neq0)$;

(4) $\lambda_1=1$,对应的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}(k_1\neq0)$;$\lambda_2=-1$,对应的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}(k_2\neq0)$;$\lambda_3=\lambda_4=2$,对应的全部特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}(k_3\neq0)$.

2. $k=1,\lambda=4$ 或 $k=-2,\lambda=1$.

3. 396,72.

4～6. (略)

7. (1) 可以对角化,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$;

(2) 不能对角化.

8. $x=3$.

9. $x=0$.

10. $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\varphi(1)=2,\varphi(2)=8,\varphi(-3)=-2$,由于 $\boldsymbol{B}$ 有 3 个互不相同的特征值,故可对角化.

11.(略)

12.(1)$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^{10} & 2^{10} \end{pmatrix}$; (2)$-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13.(1)$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

(2)$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

14. $a=b=-\frac{6}{7},c=-\frac{3}{7},d=-\frac{6}{7}$.

15.(略)

16.(1)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

(2)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} 10 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

17. $\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

18. $x=4, y=5, P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

19. (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$;(2) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2+\left(\frac{7}{10}\right)^n \\ 4-\left(\frac{7}{10}\right)^n \end{pmatrix}$.

20. (1) $f=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(2) $f=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(3) $f=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

21. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

22. (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, f=4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$;

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, f=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

23. (1) $f=y_1^2-4y_2^2+2y_3^2$,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

(2) $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

24. (1) $f=y_1^2+y_2^2-8y_3^2$,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

(2) $f=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2$,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

25. (1) $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$,秩为 3,正惯性指数为 3,负惯性指数为 0;

(2) $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$,秩为 3,正惯性指数为 2,负惯性指数为 1.

26. (1) 既不正定,也不负定; (2) 正定; (3) 负定.

27. (1) $-\frac{4}{5}<t<0$; (2) $-3<t<1$.

28. (1) $x'^2+2y'^2=5$ 椭圆柱面; (2) $x'^2+3y'^2+4z'^2=1$ 椭球面.

(B)

1. $a=2,b=-2,c=0$.提示:利用特征值的计算,λ 满足 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

2. $x=0$.提示:先求出特征值,再根据 $\boldsymbol{A}$ 应具有的线性无关的特征向量个数确定 x.

3. $f(\boldsymbol{A})$能对角化.提示:利用矩阵多项式的计算可推出 $f(\boldsymbol{A})$与对角阵相似.

4. 提示:利用特征值、特征向量的定义和线性无关的定义证明.

5. 提示:利用正交矩阵定义证明.

6. 提示:需证①$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}$;②$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}$.

7. $a=b=0$,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,其中,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

8. $a=0$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，其中，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. 提示：利用二次型可由正交变换化成标准形(即定理 5.8)及正交变换保持向量的长度不变的结论证明.

10. 提示：充分性可先证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定的，从而由定义知 $\boldsymbol{A}$ 的正定性；必要性可由对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角化 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 及正定矩阵的特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 全为正，从而 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}_1^2=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\cdot\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$ 来证得.

习　题　6

(略)

参考文献

北京大学数学系.1998.高等代数.2 版.北京:高等教育出版社.

陈殿友,术洪亮.2006.线性代数.北京:清华大学出版社.

陈维新.2008.线性代数简明教程.2 版.北京:科学出版社.

陈杰.2008.MATLAB 宝典.北京:电子工业出版社.

李乃华,赵芬霞,刘振航.2010.线性代数及其应用.北京:高等教育出版社.

上海交通大学数学系.2007.线性代数.2 版.北京:科学出版社.

同济大学数学系.2004.线性代数及其应用.北京:高等教育出版社.

同济大学数学系.2007.线性代数.5 版.北京:高等教育出版社.

同济大学数学系.2008.线性代数及其应用.2 版.北京:高等教育出版社.

王建军.2005.线性代数及其应用.上海:上海交通大学出版社.

王亮,冯国臣,王兵团.2008.基于 MATLAB 的线性代数实用教程.北京:科学出版社.

徐秀娟.2007.线性代数.北京:科学出版社.

姚喜研,王济荣.2009.线性代数.北京:北京大学出版社.

章栋恩,马玉兰,等.2008.MATLAB 高等数学实验.北京:电子工业出版社.

David C.Lay.2005.线性代数及其应用.北京:机械工业出版社.