

词典

排解冲突：双向平方试探

11-C5

伺候父亲躺下，我正准备离去，父亲拉住了我的手，轻轻地问我，丫儿，你知道什么是无枝可栖吗？

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

策略：间或地沿两个方向试探，同方向按平方确定距离

$$[\text{hash}(\text{key}) - 1^2] \% M$$

$$[\text{hash}(\text{key}) + 1^2] \% M$$

$$[\text{hash}(\text{key}) - 2^2] \% M$$

$$[\text{hash}(\text{key}) + 2^2] \% M$$

$$[\text{hash}(\text{key}) - 3^2] \% M$$

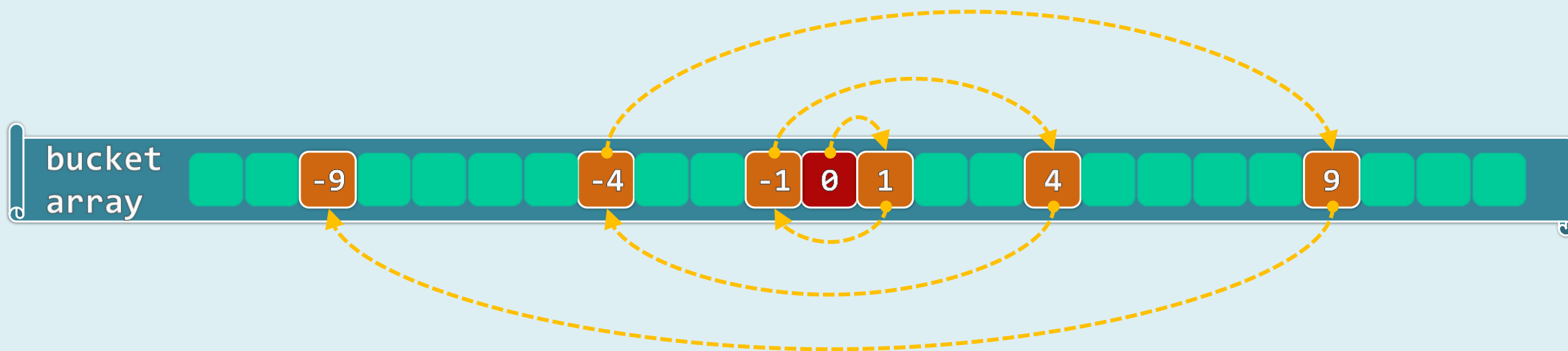
$$[\text{hash}(\text{key}) + 3^2] \% M$$

$$[\text{hash}(\text{key}) - 4^2] \% M$$

$$[\text{hash}(\text{key}) + 4^2] \% M$$

...

...



子试探链，彼此独立？

❖ 正向和反向的子试探链，各自包含 $\lceil \mathcal{M}/2 \rceil$ 个互异的桶

$$\underbrace{-\lceil \mathcal{M}/2 \rceil, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \lfloor \mathcal{M}/2 \rfloor}$$

| $\pm i^2$ | | -36 | -25 | -16 | -9 | -4 | -1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
|-----------|----|-----|-----|-----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|
| M | 5 | | | | | 1 | 4 | 0 | 1 | 4 | | | | |
| | 7 | | | | 5 | 3 | 6 | 0 | 1 | 4 | 2 | | | |
| | 11 | | 8 | 6 | 2 | 7 | 10 | 0 | 1 | 4 | 9 | 5 | 3 | |
| | 13 | 3 | 1 | 10 | 4 | 9 | 12 | 0 | 1 | 4 | 9 | 3 | 12 | 10 |

❖ 除了起点0，这两个序列是否还有...其它公共的桶？

$$4k + 3$$

❖ 两类素数： $3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29 \quad 31$

❖ 表长取作素数 $\mathcal{M} = 4 \cdot k + 3$ ，即必然可以保证试探链的前 \mathcal{M} 项均互异

| $\pm i^2$ | | -36 | -25 | -16 | -9 | -4 | -1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
|-----------|----|-----|-----|-----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|
| M | 5 | | | | | 1 | 4 | 0 | 1 | 4 | | | | |
| | 7 | | | | 5 | 3 | 6 | 0 | 1 | 4 | 2 | | | |
| | 11 | | 8 | 6 | 2 | 7 | 10 | 0 | 1 | 4 | 9 | 5 | 3 | |
| | 13 | 3 | 1 | 10 | 4 | 9 | 12 | 0 | 1 | 4 | 9 | 3 | 12 | 10 |

❖ 反之， $\mathcal{M} = 4 \cdot k + 1$ 就...必然不能使用？

Two-Square Theorem of Fermat

❖ 任一素数 p 可表示为一对整数的平方和，当且仅当

$$p \equiv 1 \pmod{4}$$

❖ 只要注意到：

$$\begin{aligned}(u^2 + v^2) \cdot (s^2 + t^2) &= (us + vt)^2 + (ut - vs)^2 \\ &= (us - vt)^2 + (ut + vs)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2^2 + 3^2) \cdot (5^2 + 8^2) &= (10 + 24)^2 + (16 - 15)^2 \\ &= (10 - 24)^2 + (16 + 15)^2\end{aligned}$$

❖ 就不难推知：

- 自然数 n 可表示为一对整数的平方和，当（且**仅当**）
- 它的每一 $M = 4 \cdot k + 3$ 类的素因子均为**偶数**次方

$$\begin{aligned}1 &= 1^2 + 0^2 \\ 2 &= 1^2 + 1^2 \\ 3 &= \\ 4 &= 2^2 + 0^2 \\ 5 &= 2^2 + 1^2 \\ 6 &= \\ 7 &= \\ 8 &= 2^2 + 2^2 \\ 9 &= 3^2 + \\ 10 &= 3^2 + \\ 11 &= \\ &\vdots\end{aligned}$$

