10-B5

高级搜索树

B-树：删除

射影，变了形，反而结晶

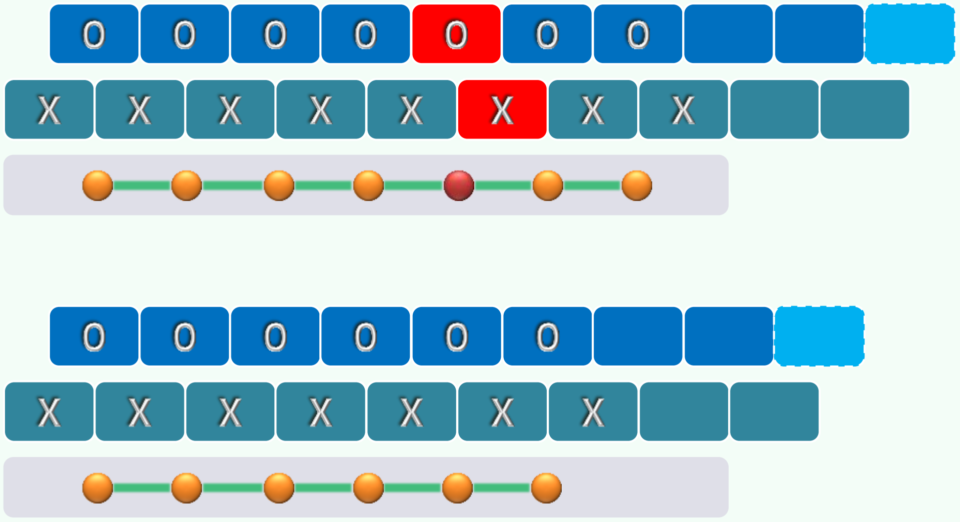
或动了情，也要合并，或归了零

也不愿不生不死不悔的倒影

邓俊辉

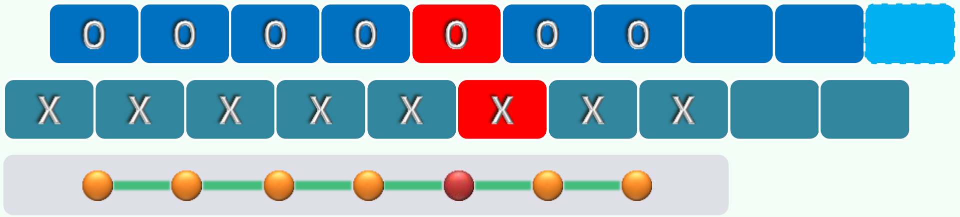
deng@tsinghua.edu.cn

算法：确保目标在叶子中

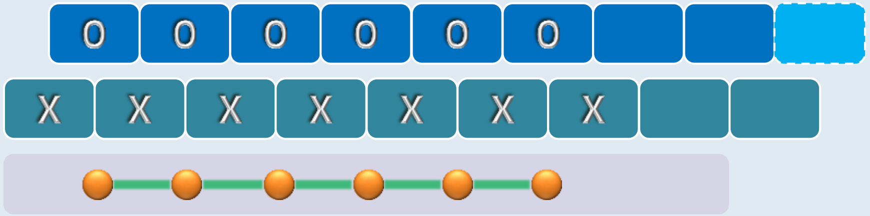



```
template <typename T>
bool BTree<T>::remove( const T & e ) {
   BTNodePosi<T> v = search( e );
   if ( ! v ) return false; //确认e存在
   Rank r = v->key.search(e); //e在v中的秩
   if ( v->child[0] ) { //若v非叶子，则可经过腾挪，确保... */ }
   //assert: 至此，v必位于最底层，且其中第r个关键码就是待删除者
   v->key.remove( r ); v->child.remove( r + 1 ); _size--;
   solveUnderflow( v ); return true; //如有必要，需做旋转或合并
}
```

算法：腾挪 = 与后继交换




```
template <typename T>
bool BTree<T>::remove( const T & e ) {
   /* ...... */
   if ( v->child[0] ) { //若v非叶子，则
      BTNodePosi<T> u = v->child[r + 1]; //在右子树中
      while ( u->child[0] ) u = u->child[0]; //一直向左，即可找到e的后继（必在底层）
      v->key[r] = u->key[0]; v = u; r = 0; //交换
   }
   //assert: 至此，v必位于最底层，且其中第r个关键码就是待删除者
   /* ...... */
}
```



旋转

❖ 非根节点$\boxed{V}$下溢时，必恰有 $\lceil m/2 \rceil - 2$ 个关键码和 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 个分支

❖ 视其左、右兄弟$\boxed{L}$、$\boxed{R}$的规模，可分三种情况加以处理

1)若$\boxed{L}$存在，且至少包含 $\lceil m/2 \rceil$ 个关键码

- 将$\boxed{P}$中的分界关键码$\boxed{y}$移至$\boxed{V}$中（作为最小关键码）

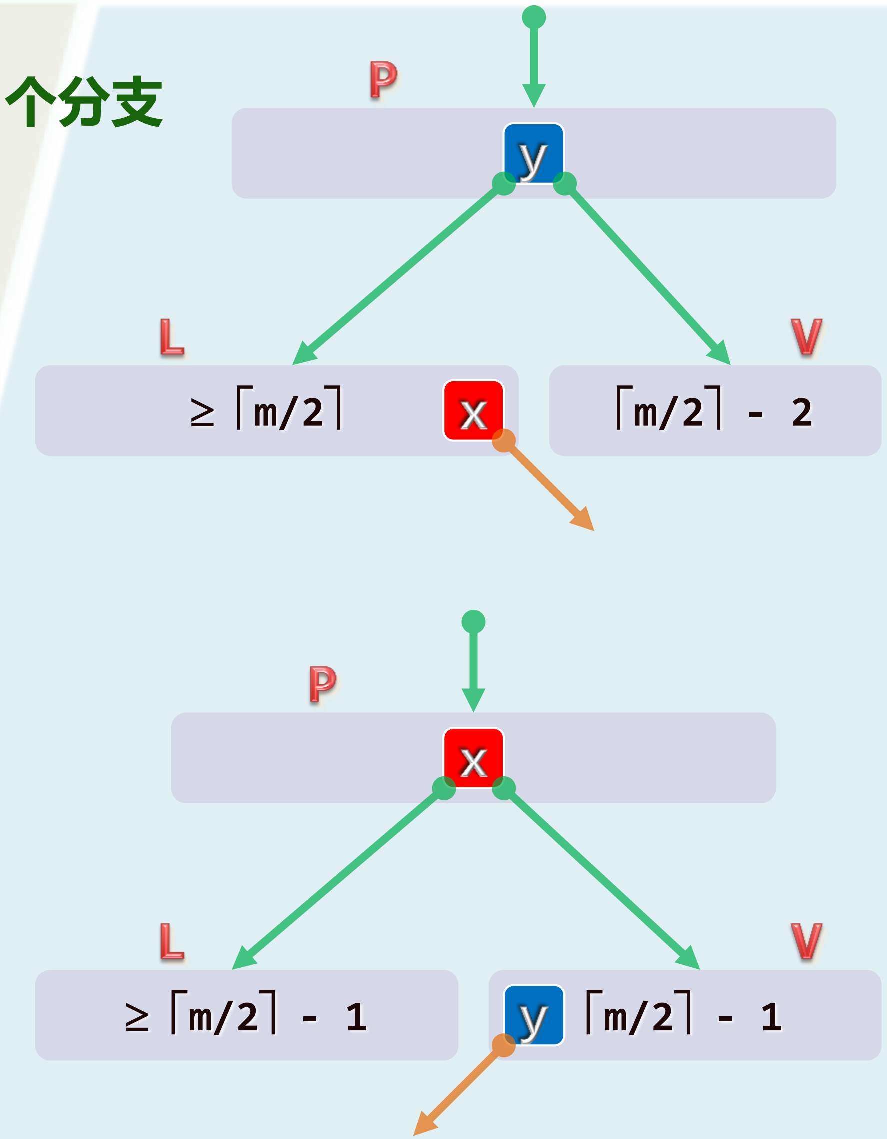
- 将$\boxed{L}$中的最大关键码$\boxed{x}$移至$\boxed{P}$中（取代原关键码$\boxed{y}$）

❖ 如此旋转之后，局部乃至全树都重新满足B-树条件

下溢修复完毕

2)若$\boxed{R}$存在，且至少包含 $\lceil m/2 \rceil$ 个关键码

- 也可旋转，完全对称



合并

3) $\boxed{\text{L}}$和$\boxed{\text{R}}$或不存在，或均不足 $\lceil m/2 \rceil$ 个关键码——即便如此

- $\boxed{\text{L}}$和$\boxed{\text{R}}$仍必有其一（不妨以$\boxed{\text{L}}$为例），且
- 恰含 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 个关键码

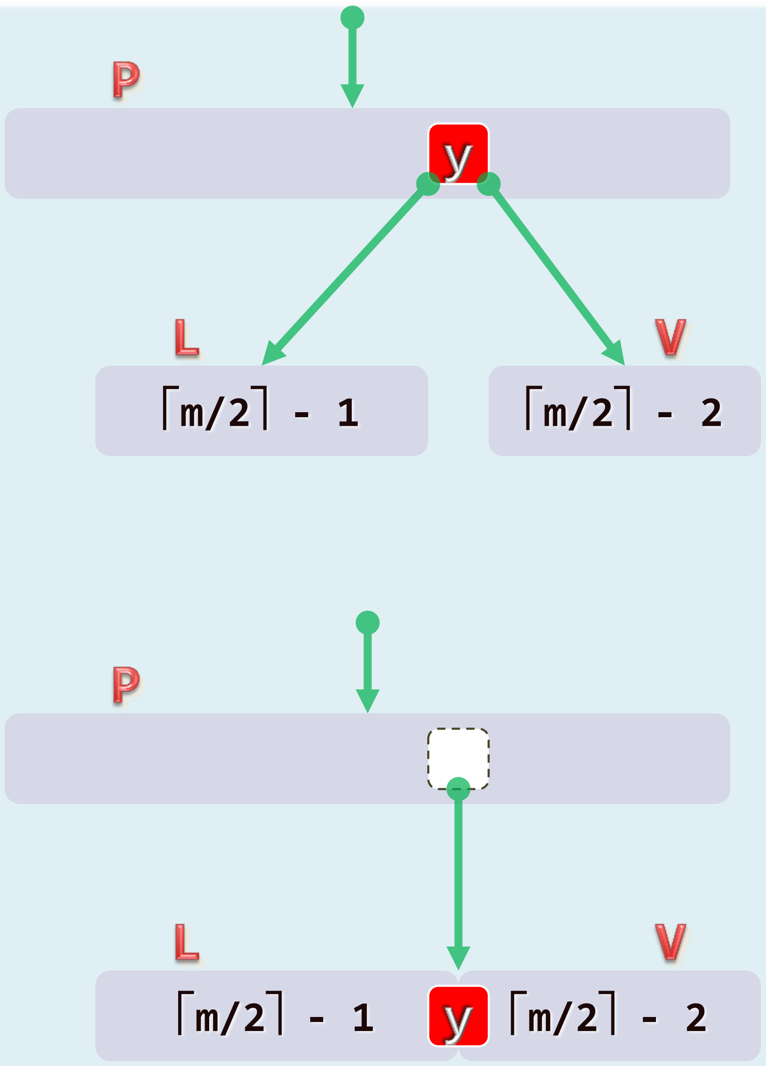
❖ 从$\boxed{\text{P}}$中抽出介于$\boxed{\text{L}}$和$\boxed{\text{V}}$之间的分界关键码$\boxed{\text{y}}$

- 通过$\boxed{\text{y}}$做粘接，将$\boxed{\text{L}}$和$\boxed{\text{V}}$合成一个节点
- 同时合并此前$\boxed{\text{y}}$的孩子引用

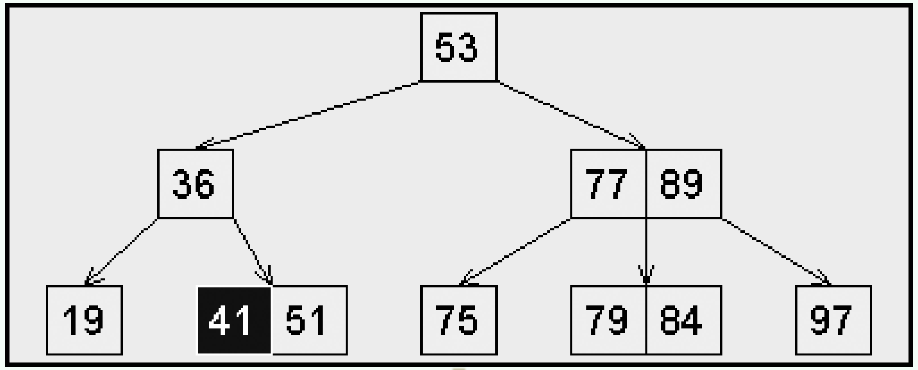
❖ 此处下溢得以修复，但可能继而导致$\boxed{\text{P}}$下溢

若果真如此，大可套用前法，继续旋转或合并

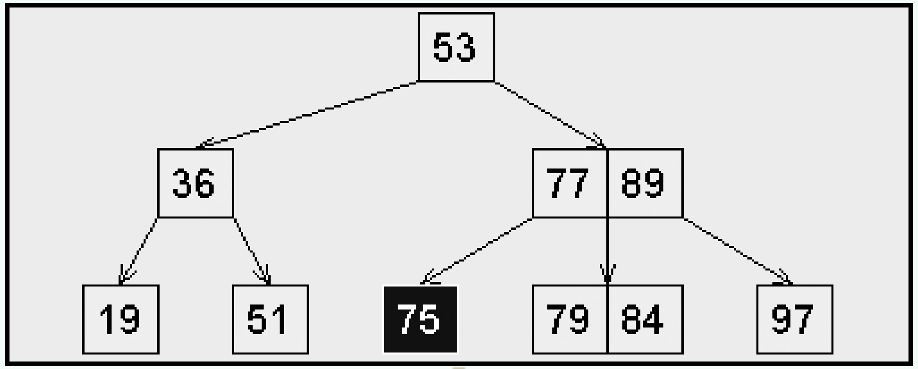
❖ 下溢可能持续发生并向上**传播**；但至多不过$\boxed{\mathcal{O}(\text{h})}$层



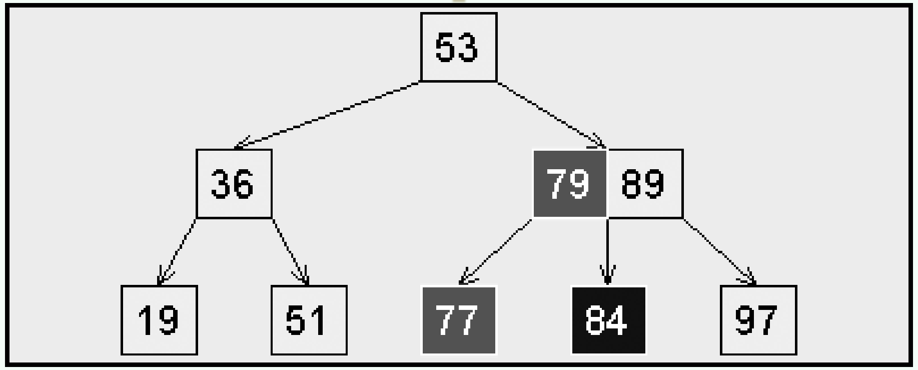
实例：(2,3)-树：底层节点



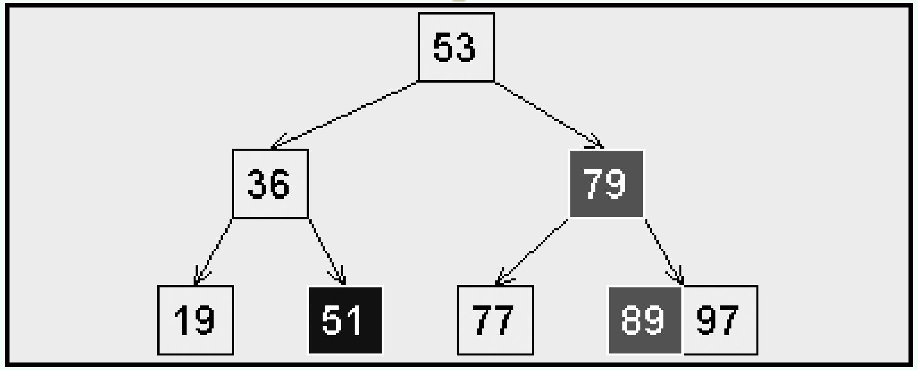
remove(41) //直接删除



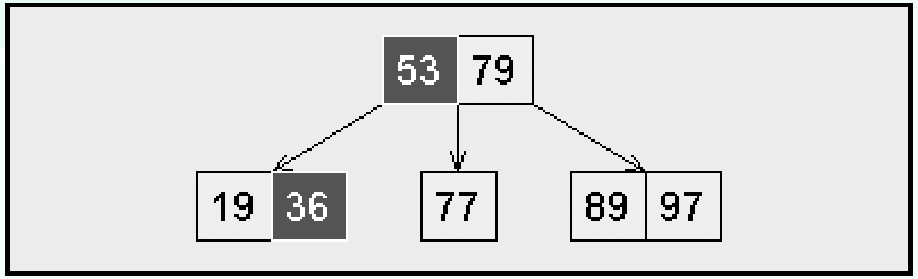
remove(75) //旋转



remove(84) //单次合并



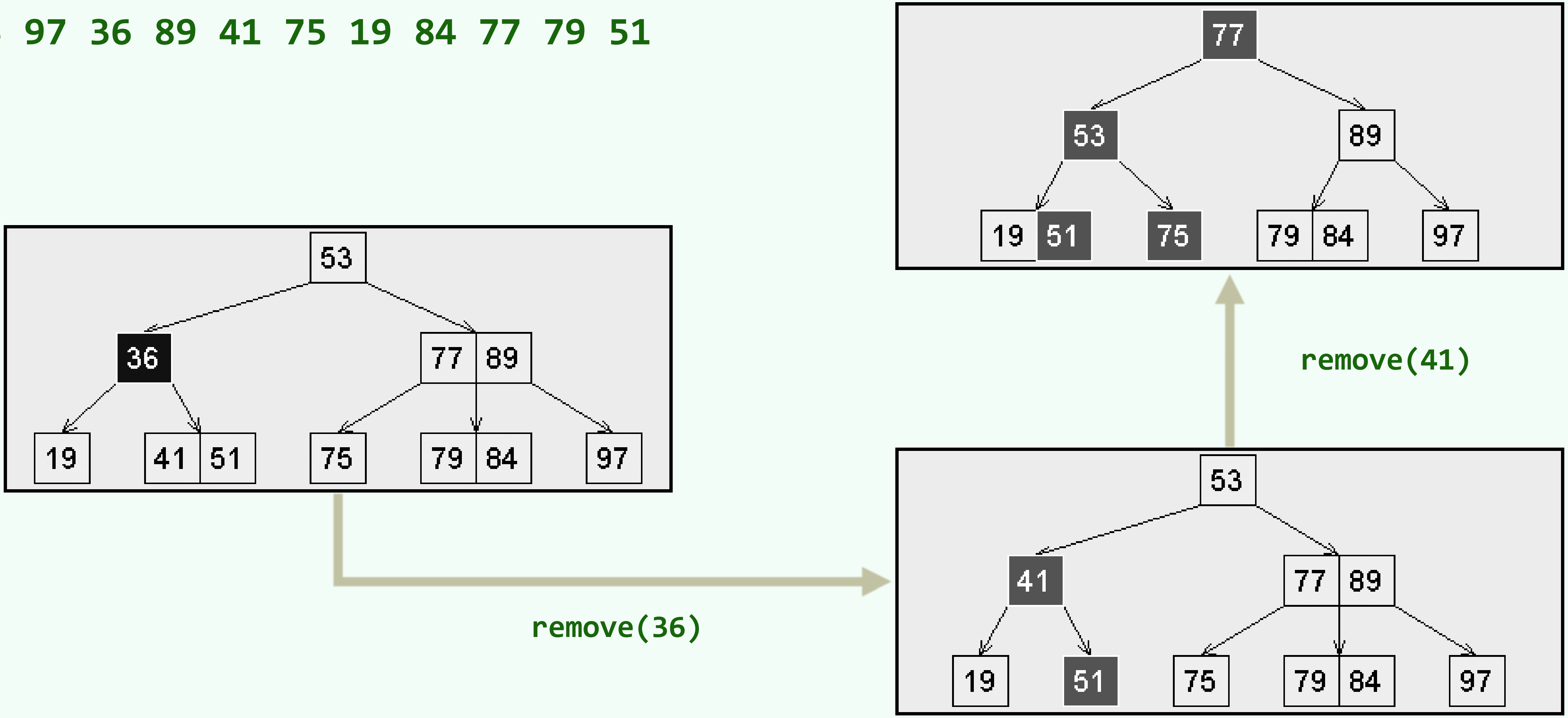
remove(51) //多次合并



❖ 53 97 36 89 41 75 19 84 77 79 51

实例：(2,3)-树：非底层节点

- 53 97 36 89 41 75 19 84 77 79 51



下溢修复

```
❖ template <typename T> void BTree<T>::solveUnderflow( BTNodePosi<T> v ) {
    if ( (_order + 1) / 2 <= v->child.size() ) return; //递归基：v并未下溢
    BTNodePosi<T> p = v->parent; if ( !p ) { /* 递归基：已到根节点 */ }
    Rank r = 0; while ( p->child[r] != v ) r++; //确定v是p的第r个孩子
    if ( 0 < r ) { /* 情况 #1：若v的左兄弟存在，且... */ }
    if ( p->child.size() - 1 > r ) { /* 情况 #2：若v的右兄弟存在，且... */ }
    if ( 0 < r ) { /* 与左兄弟合并 */ } else { /* 与右兄弟合并 */ } //情况 #3
    solveUnderflow( p ); //上升一层，继续分裂——至多递归O(logn)层——典型尾递归
    return;
}
```

下溢修复：情况#1：旋转（向左兄弟借关键码）

```
❖ if (0 < r) { //若v不是p的第一个孩子，则
    BTNodePosi<T> ls = p->child[r - 1]; //左兄弟必存在
    if ( (_order + 1) / 2 < ls->child.size() ) { //若该兄弟足够“胖”，则
      v->key.insert( 0, p->key[r-1] ); //p借出一个关键码给v（作为最小关键码）
      p->key[r - 1] = ls->key.remove( ls->key.size() - 1 ); //ls的最大关键码转入p
      v->child.insert( 0, ls->child.remove( ls->child.size() - 1 ) );
        //同时ls的最右侧孩子过继给v（作为v的最左侧孩子）
      if ( v->child[0] ) v->child[0]->parent = v;
      return; //至此，通过右旋已完成当前层（以及所有层）的下溢处理
    }
  } //情况#2完全对称
```

下溢修复：情况#3：合并（1/2）

```
❖ if (0 < r) { //与左兄弟合并
    BTNodePosi<T> ls = p->child[r-1]; //左兄弟必存在
    ls->key.insert( ls->key.size(), p->key.remove(r - 1) );
    p->child.remove( r ); //p的第r - 1个关键码转入ls，v不再是p的第r个孩子
    ls->child.insert( ls->child.size(), v->child.remove( 0 ) );
    if ( ls->child[ ls->child.size() - 1 ] ) //v的最左侧孩子过继给ls做最右侧孩子
       ls->child[ ls->child.size() - 1 ]->parent = ls;
    /* ... TBC ... */
  } else { /* 与右兄弟合并，完全对称 */ }
```

下溢修复：情况#3：合并（2/2）

```
❖ if (0 < r) { //与左兄弟合并
    /* ...... */
    while ( !v->key.empty() ) { //v剩余的关键码和孩子，依次转入ls
      ls->key.insert( ls->key.size(), v->key.remove(0) );
      ls->child.insert( ls->child.size(), v->child.remove(0) );
      if ( ls->child[ ls->child.size() - 1 ] )
        ls->child[ ls->child.size() - 1 ]->parent = ls;
    }
    release(v); //释放v
  } else { /* 与右兄弟合并，完全对称 */ }
```

探究

❖ 举例说明，在最坏情况下，一次插入操作会引发 $\Omega(\log n)$ 次分裂

- 在连续的插入操作过程中，发生这种情况的概率有多大？
- 就连续意义而言，其间每次插入操作平均会引发多少次分裂？

❖ 就原理而言，与下溢修复一样，上溢修复既可做旋转，也可做分裂

- 试扩充 `BTree::solveOverflow()` 接口，加入这种策略
- 这一对称的策略，因何未被普遍采用？

❖ B^*-Tree

- 联合分裂：节点上溢后未必独自分裂，而是由k个兄弟共同均摊溢出的关键码
- 得到k+1个相邻节点，各至少含有 $\lfloor (m-1) \cdot k/(k+1) \rfloor$ 个关键码
- 如此，可将空间使用率从50%提高至 $k/(k+1)$