绪论

迭代与递归：总和最大区段

01-E3

这时，公共智慧的结果便产生理智与意志在社会体中的结合，也才有了各个部分的密切配合，以及最后全体的最大力量。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

问题 + 蛮力算法

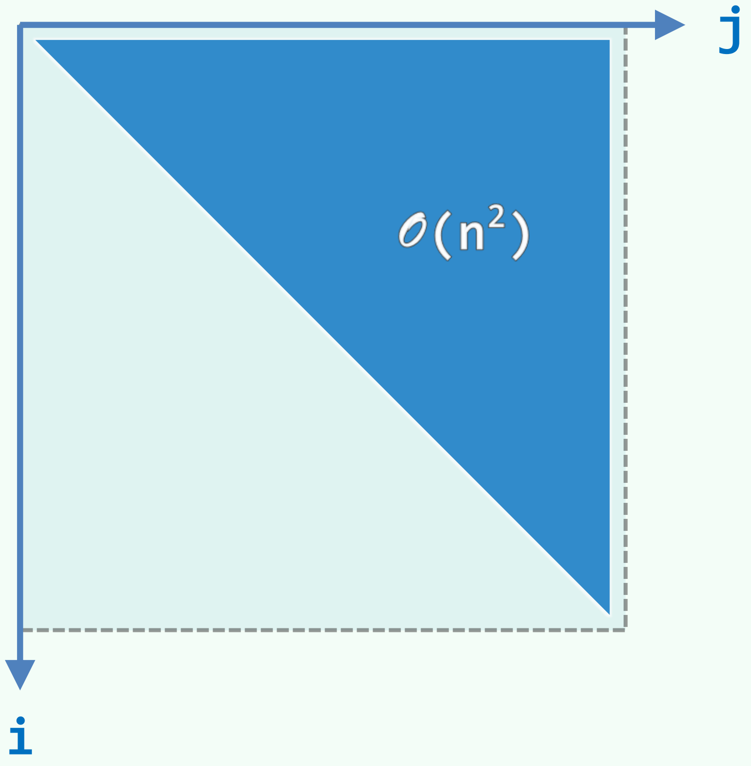
❖ 从整数序列中，找出总和最大的区段（有多个时，短者优先），例（总和最大区间有三个）：

$$\mathcal{A}[0,19) \;=\; \{\, 1,\ -2,\ \underline{7,\ 2,\ 6,\ -9,\ 5,\ 6,}\ -12,\ -8,\ \underline{13,\ 0,\ -3,\ 1,\ -2,\ 8,}\ {\color{red}0},\ -5,\ 3 \,\}$$

```
❖ int gs_BF( int A[], int n ) { //蛮力策略：O(n^3)
     int gs = A[0]; //当前已知的最大和
     for ( int i = 0; i < n; i++ )
        for ( int j = i; j < n; j++ ) { //枚举所有的O(n^2)个区段！
           int s = 0; for ( int k = i; k <= j; k++ ) s += A[k]; //用O(n)时间求和
           if ( gs < s ) gs = s; //择优、更新
        }
     return gs;
  }
```

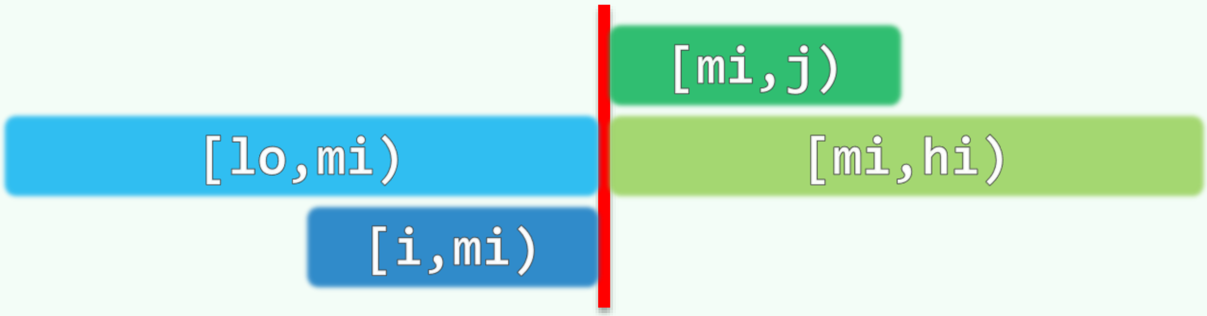
递增策略

```
❖ int gs_IC( int A[], int n ) { //Incremental Strategy: O(n^2)
    int gs = A[0]; //当前已知的最大和
    for ( int i = 0; i < n; i++ ) { //枚举所有起始于i
       int s = 0;
       for ( int j = i; j < n; j++ ) { //终止于j的区间
          s += A[j]; //递增地得到其总和：O(1)
          if ( gs < s ) gs = s; //择优、更新
       }
    }
    return gs;
}
```



分治策略：构思

- ❖ 不妨将计算的范围，一般化为：$\mathcal{A}[lo, hi) \ = \ \mathcal{A}[lo, mi) \cup \mathcal{A}[mi, hi) \ = \ \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$
- ❖ 于是借助递归，可求得$\mathcal{P}$、$\mathcal{S}$内部的GS



- ❖ 而剩余的（也是实质的）任务无非是：
  - 求得跨越前、后缀的GS
  - 准确地说，需要考察那些“覆盖”$\mathcal{A}[mi, mi)$ 的区段：$\mathcal{A}[i, j) \ = \ \mathcal{A}[i, mi) + \mathcal{A}[mi, j)$
- ❖ 实际上，必然有：$S[i, mi) \ = \ \max\{ \ S[k, mi) \ | \ lo \le k < mi \ \}$

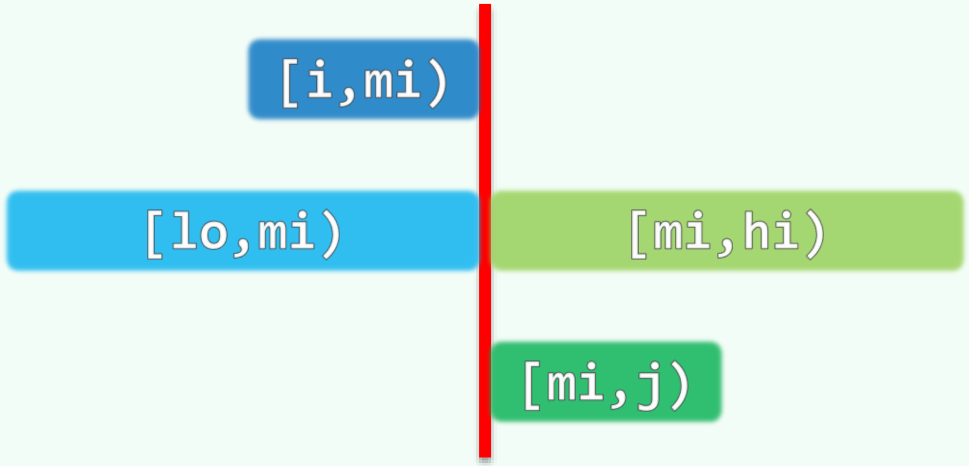
$$S[mi, j) \ = \ \max\{ \ S[mi, k) \ | \ mi \le k < hi \ \}$$

- ❖ 更好的消息是，二者均可独立计算，且累计耗时不过$\mathcal{O}(n)$

  于是总体复杂度也优化为$\mathcal{O}(n \cdot \log n)$

分治策略：实现

```
❖ int gs_DC( int A[], int lo, int hi ) { //Divide-And-Conquer: O(n*logn)
      if ( hi - lo < 2 ) return A[lo]; //递归基
      int mi = (lo + hi) / 2; //在中点切分
      int gsL = A[mi-1], sL = 0, i = mi; //枚举
      while ( lo < i-- ) //所有[i, mi)类区段
         if ( gsL < (sL += A[i]) ) gsL = sL;
      int gsR = A[mi], sR = 0, j = mi-1; //枚举
      while ( ++j < hi ) //所有[mi, j)类区段
         if ( gsR < (sR += A[j]) ) gsR = sR; //更新
      return max( gsL + gsR, max( gs_DC(A,lo,mi), gs_DC(A,mi,hi) ) ); //递归
  }
```



减治策略：构思

❖ 考查**最短的**总和非正的后缀$\mathcal{A}[k,hi)$，以及总和最大的区段$GS(lo,hi) = \mathcal{A}[i,j)$

后者要么是前者的（真）**后缀**，要么与前者**无交**

❖ [反证]

[lo,hi)

假若二者确有非空的公共部分：

S(k,hi) <= 0

$\mathcal{A}[k,j),\ k < j < hi$

GS(lo,hi) = A[i,j)

❖ 由 $GS[lo,hi)$ 的最大性（及最短性），必有

S(k,j) > 0

S(j,hi) < 0

$S(k,j) > 0$，即 $S(j,hi) < 0$ ——这与$\mathcal{A}[k,hi)$ 的**最短性**矛盾

❖ 基于以上事实，完全可以采用“减而治之”的策略，通过**一趟**线性扫描在**线性**时间内找出GS...

减治策略：实现

```
❖ int gs_LS( int A[], int n ) { //Linear Scan: O(n)
     int gs = A[0], s = 0, i = n;
     while ( 0 < i-- ) { //在当前区间内
        s += A[i]; //递增地累计总和
        if ( gs < s ) gs = s; //并择优、更新
        if ( s <= 0 ) s = 0; //剪除负和后缀
     }
     return gs;
  }
```