

排序

选取：QuickSelect

14-B3

大胆猜测，小心求证

他们在一起谈了一下之后，就转过身来向我表示敬意，对此，我的老师微微一笑；此外，他们还给了我更多的荣誉，因为他们把我列入他们的行列，结果，我就是这样赫赫有名的智者中的第六位。

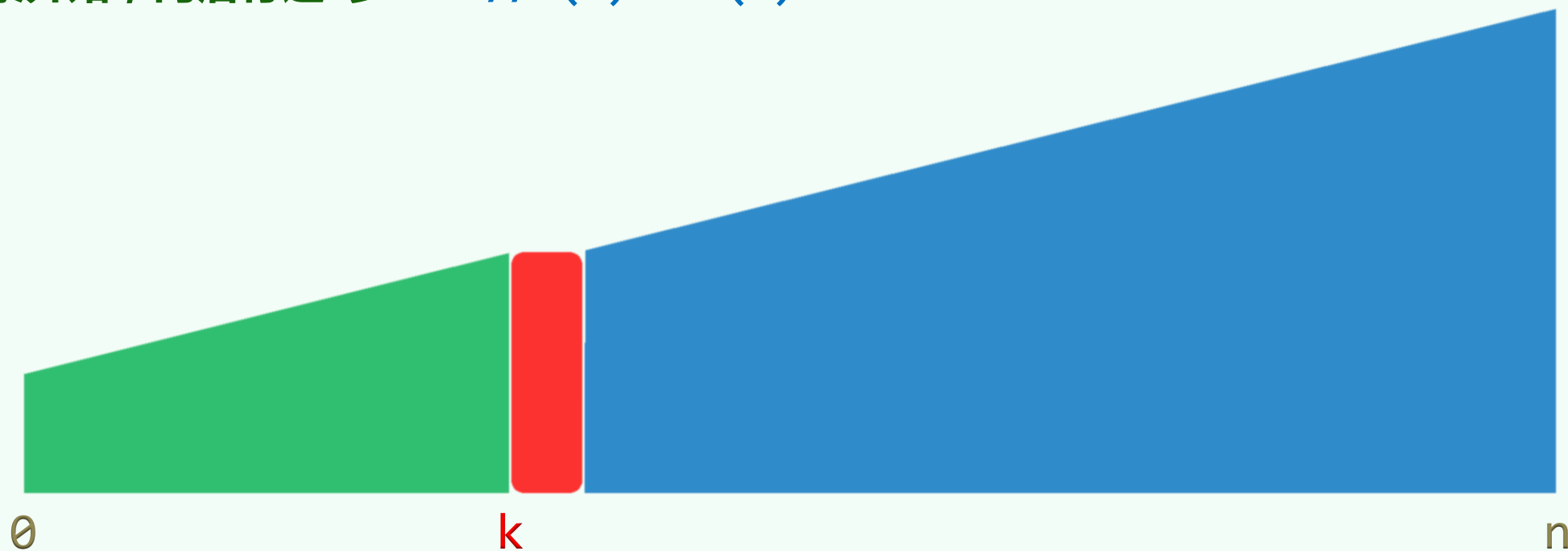
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

尝试：蛮力

❖ 对A排序 $// O(n \log n)$

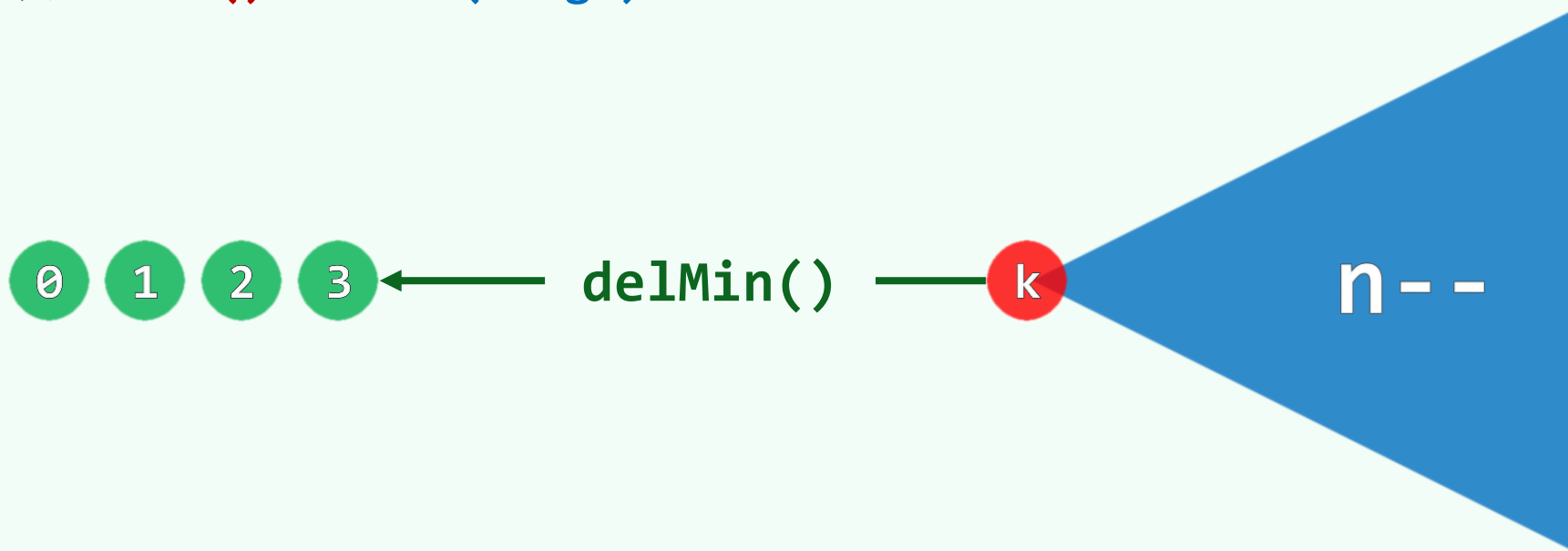
从首元素开始，向后行进k步 $// O(k) = O(n)$



尝试：堆 (A)

❖ 将所有元素组织为小顶堆 $O(n)$

连续调用 $k+1$ 次 `delMin()` $O(k \log n)$



尝试：堆 (B)

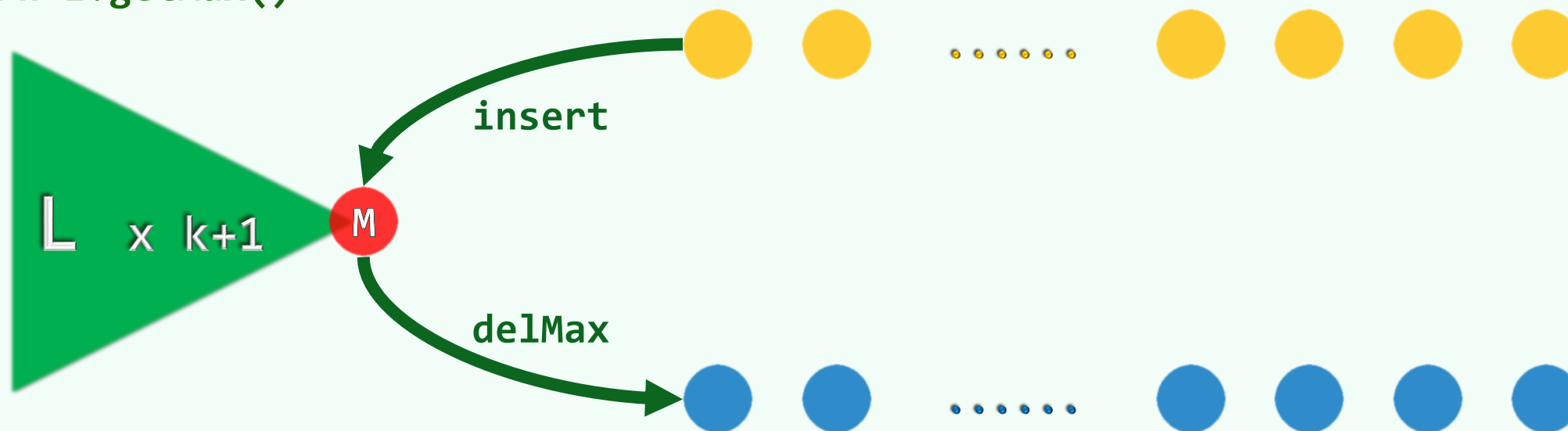
❖ $L = \text{heapify}(A[0, k])$ // 任选 $k+1$ 个元素，组织为**大顶堆**： $O(k)$

❖ for each i in (k, n) // $O(n - k)$

$L.\text{insert}(A[i])$ // $O(\log k)$

$L.\text{delMax}()$ // $O(\log k)$

return $L.\text{getMax}()$



尝试：堆 (C)

❖ 将输入任意划分为规模为 k 、 $n-k$ 的子集

分别组织为大、小顶堆

$\text{// } \mathcal{O}(k + (n-k)) = \mathcal{O}(n)$

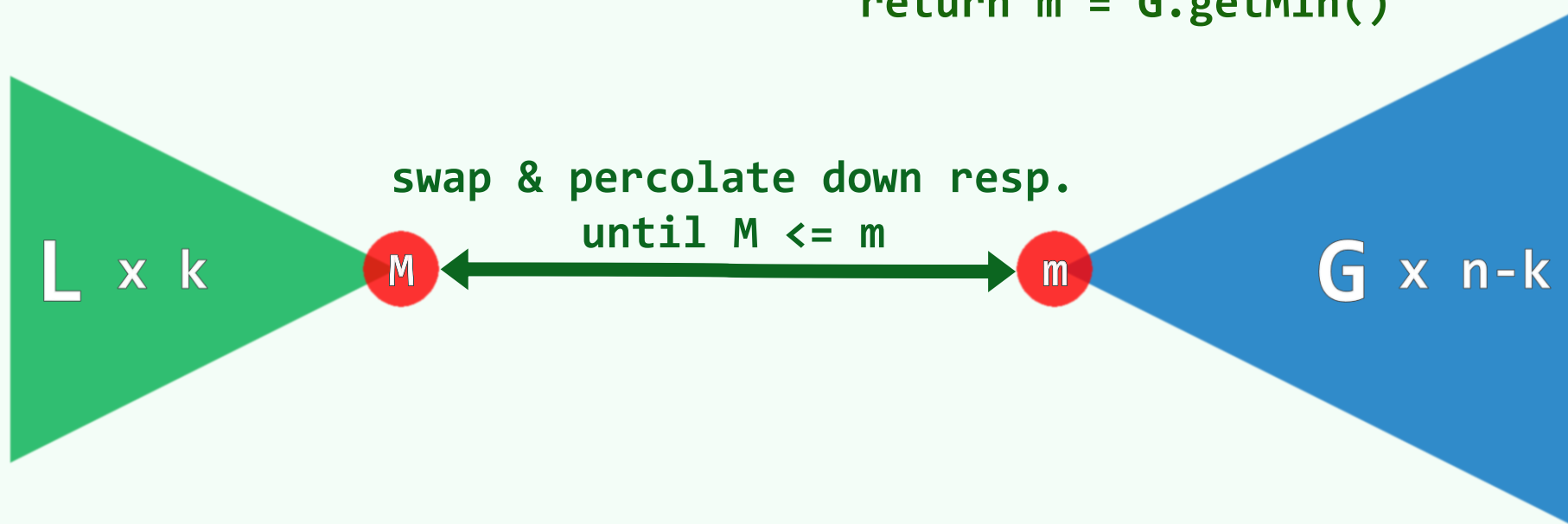
```
❖ while ( m < M )  $\text{// } \mathcal{O}(\min(k, n - k))$ 
```

```
    swap( m, M )
```

```
    L.percolateDown()  $\text{// } \mathcal{O}(\log k)$ 
```

```
    G.percolateDown()  $\text{// } \mathcal{O}(\log(n - k))$ 
```

```
    return m = G.getMin()
```



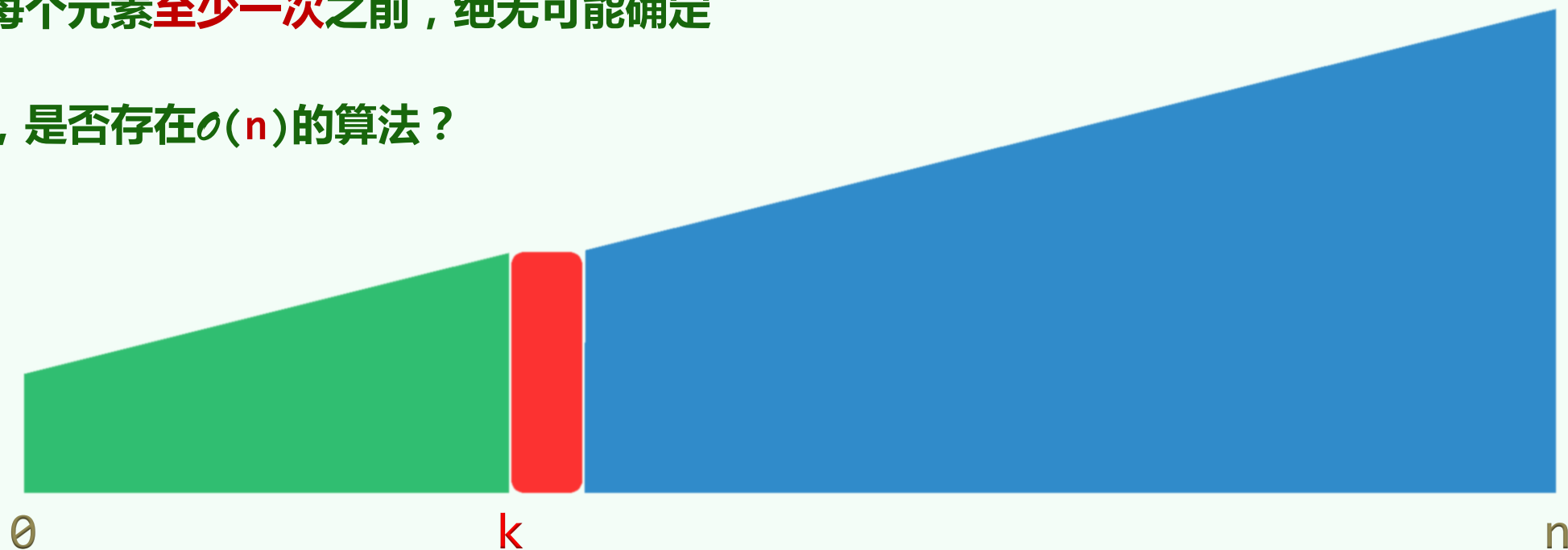
下界与最优

❖ 是否存在更快的算法？当然，最快也不至于快过 $\Omega(n)$ ！

❖ 所谓第 k 小，是相对于序列整体而言，所以...

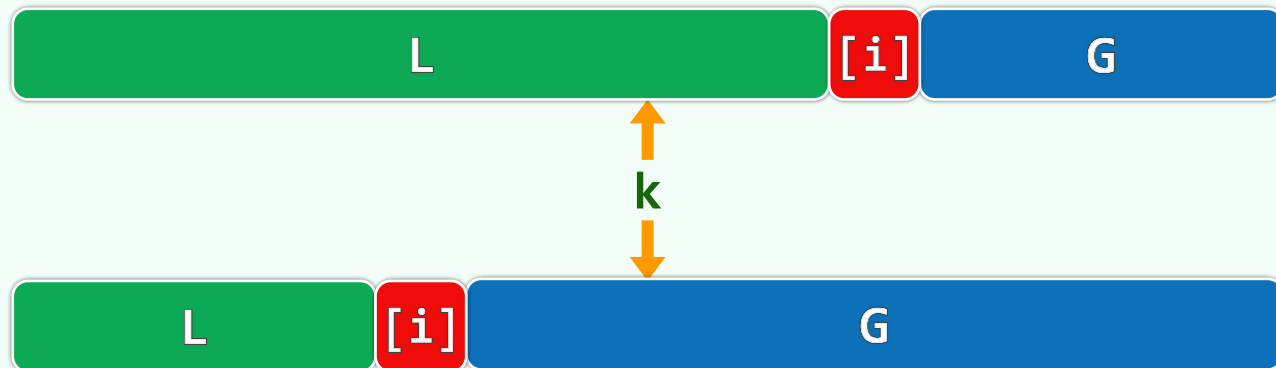
在访问每个元素至少一次之前，绝无可能确定

❖ 反过来，是否存在 $\mathcal{O}(n)$ 的算法？



quickSelect()

```
template <typename T> void quickSelect( Vector<T> & A, Rank k ) {  
    for ( Rank lo = 0, hi = A.size() - 1; lo < hi; ) {  
        Rank i = lo, j = hi; T pivot = A[lo]; //大胆猜测  
        while ( i < j ) { //小心求证:  $O(hi - lo + 1) = O(n)$   
            while ( i < j && pivot <= A[j] ) j--; A[i] = A[j];  
            while ( i < j && A[i] <= pivot ) i++; A[j] = A[i];  
        } //assert: quit with i == j  
        A[i] = pivot;  
        if ( k <= i ) hi = i - 1;  
        if ( i <= k ) lo = i + 1;  
    } //A[k] is now a pivot  
}
```



期望性能

❖ 记期望的比较次数为 $T(n)$

$$T(1) = 0, T(2) = 1, \dots$$

❖ 可以证明： $T(n) = \mathcal{O}(n)$...

$$T(n) = (n-1) + \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} \max\{T(k), T(n-k-1)\} \leq (n-1) + \frac{2}{n} \times \sum_{k=n/2}^{n-1} T(k)$$

❖ 事实上，不难验证： $T(n) < 4 \cdot n$...

$$T(n) \leq (n-1) + \frac{2}{n} \times \sum_{k=n/2}^{n-1} 4k \leq (n-1) + 3n < 4n$$