Общее для ЛР2 и ЛР3

Постановка задачи:

Цилинр радиуса R заполнен изулучающим газом, температурное поле T(r) задано.

$z = \frac{r}{R}$ - безразмерная независимая величина, r - радиус слоя, для которого находим зависимые величины.

Требуется вычислить поток излучения $F(z)$ и объёмную плотность излучения $u(z)$ на промежутке $z = 0, 1$

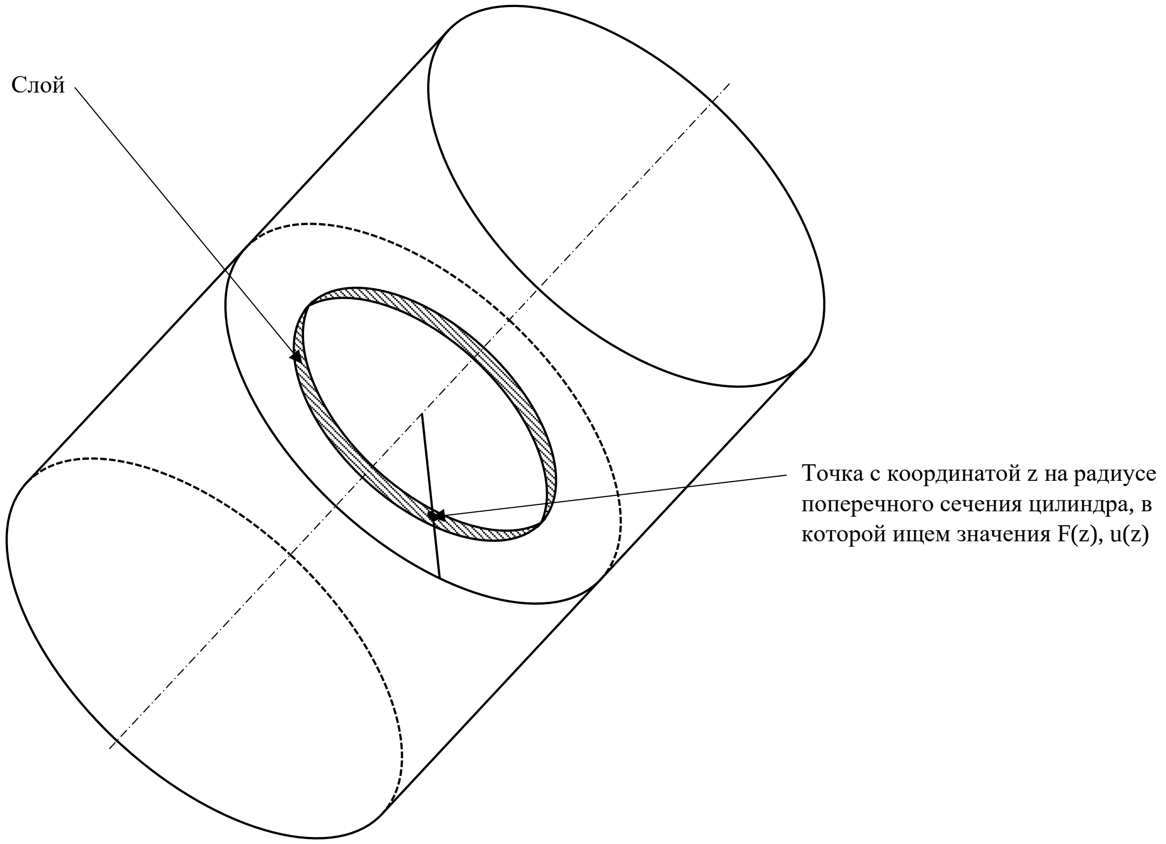


Рис. 1: Визуализация задачи

По смыслу задачи:

$F(z)$ - поток энергии через слой (от оси к стенке цилиндра);

$u(z)$ - объёмная плотность энергии излучения в слое.

Не смотря на размерности потока и объёмной плотности $(\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}\ ,\ \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3})$, задача одномерная (решается относительно z - одной независимой переменной, вдоль радиуса поперечного сечения цилидра).

Исходная система уравнений:

$$\begin{cases} F = -\frac{c}{3Rk(T(z))}\frac{du}{dz} \\ \frac{1}{zR}\frac{d}{dz}(zF) = ck(T(z))(u_p - u) \\ T(z) = (T_w - T_0) * z^p + T_0 \\ u_p(z) = \frac{0.0003084}{e^{\frac{47990}{T(z)}} - 1} \end{cases} \tag{1}$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} & z = 0, F(0) = 0 \\ & z = 1, F(1) = 0.393cu(1) \\ & T_w = 2000K \\ & T_0 = 10000K \\ & R = 0.0035m \\ & c = 299792458\frac{m}{s^2} \\ & p = 4 \end{aligned} \tag{2}$$

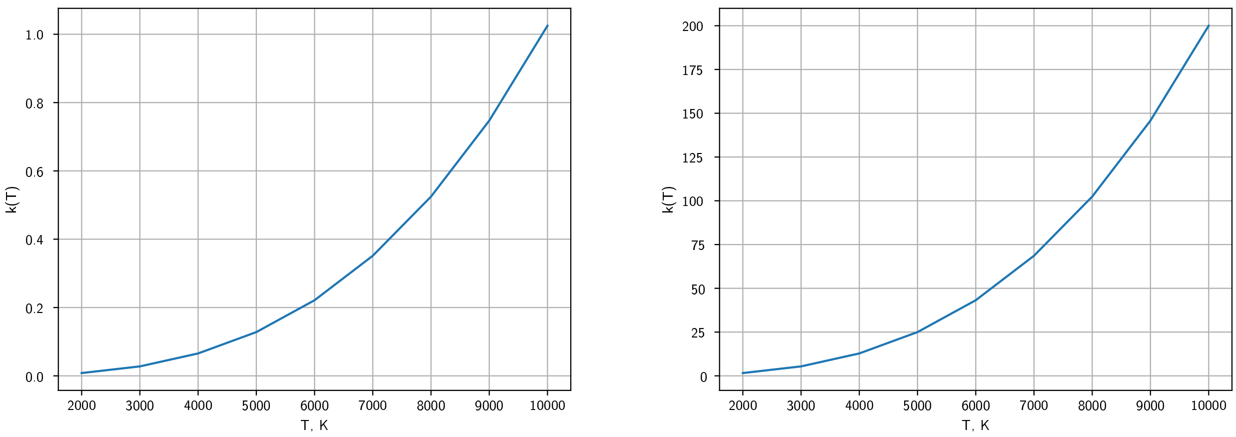
Замены:

$$\begin{aligned} & a(z) = -\frac{c}{3Rk(z)} \\ & b(z) = cRk(z) \end{aligned} \tag{3}$$

Условности нотации:

$$\begin{aligned} & k(z) \equiv k(T(z)) \\ & z_n = h * n, h - \text{шаг численного метода} \\ & a(z_n) \equiv a_n, (\text{аналогично для } b(z), k(z), u_p(z), F(z), u(z)) \end{aligned} \tag{4}$$

$k(T)$ выглядит следующим образом:

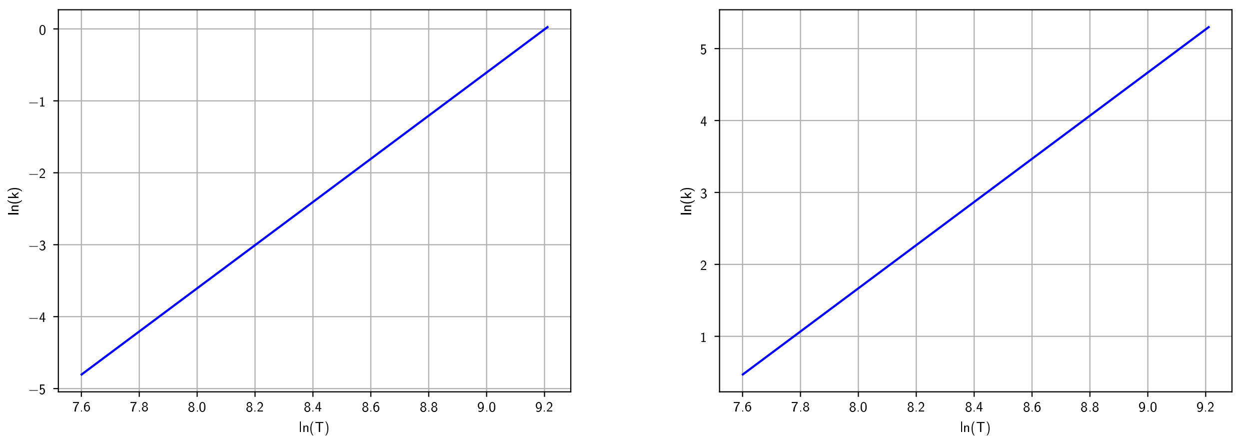


(a) k(T) - Вариант 1

(b) k(T) - Вариант 2

Если интерполировать как на графике (полиномом 1 степени), то получим некоторую ошибку.

Применя предложенный в методе метод ($t\_ln = ln(T)$, $k\_ln = ln(k)$), получаем:



(a) k_ln(t_ln) - Вариант 1

(b) k_ln(t_ln) - Вариант 2

Ошибка ожидается около-нулевой, $k(T)$ вычисляется следующим образом:

$k(T) = e^{c_1 * ln(T) + c_0}$

*c_1 и c_0 можно посчитать руками, решив систему уравнений 1 степени для крайних значний $k(2000)$, $k(10000)$. Значния полученные с помощью numpy.polyfit: $c_1 = 2.99996105$, $c_0 = -27.60599153$ - Вариант 1, $c_1 = 3.0$, $c_0 = -22.33270375$ - Вариант 2.

ЛР2

Дифференцируем zF : $\frac{d}{dz}(zF) = F + z * \frac{dF}{dz}$

Получаем:

$$\begin{cases} \frac{du}{dz} = \frac{F}{a(z)} \\ \frac{dF}{dz} = b(z)(u_p - u) - \frac{F}{z} \end{cases} \tag{5}$$

Данная задача решается как задача Коши, если задать начальное условие для u:

$$u(0) = \mathcal{E} u_p(0)$$

Ожидая, что решение может быть найдено при начальном $\mathcal{E} \in \{0..1\}$ и что $u(1)$ монотонно зависит от $\mathcal{E}$, находим решение методом стрельбы + дихотомии:

```
Epsilon1 = 0.0
Epsilon2 = 1.0
Err = inf

цикл пока fabs(Err) > заданная точность

    Epsilon = (Epsilon1 + Epsilon2) / 2
    Err = Рунге-Кутта(Epsilon)

    если Err > 0.0
        Epsilon1 = Epsilon
    иначе
        Epsilon2 = Epsilon
    конец если

конец цикла
```

При этом $Err = \frac{F^{(N)}(1) - 0.393cu^{(N)}(1)}{0.393cu^{(N)}(1)} = \frac{F^{(N)}(1)}{0.393cu^{(N)}(1)} - 1$

Вычисления завершаются на N-ой итерации, когда для очередного приближения $F^{(N)}(z)$, $u^{(N)}(z)$ выполняется $|Err| <= \delta$, где δ - заданная точность.

Для решения задачи Коши используем формулы Рунге-Кутты IV порядка точности для двух зависимых переменных:

```
F = 0
u = Epsilon * u_p(0)
z = 0

пока z <= 1

    P_1 = F / a(z)
    K_1 = b(z) * (u_p(z) - u) - F / z

    z += h / 2

    P_2 = (F + K_1 * h / 2) / a(z)
    K_2 = b(z) * (u_p(z) - u - P_1 * h / 2) - (F + K_1 * h / 2) / z

    P_3 = (F + K_2 * h / 2) / a(z)
    K_3 = b(z) * (u_p(z) - u - P_2 * h / 2) - (F + K_2 * h / 2) / z

    z += h / 2

    P_4 = (F + K_3 * h) / a(z)
    K_4 = b(z) * (u_p(z) - u - P_3 * h) - (F + K_3 * h) / z

    F += (K_1 + 2 * (K_2 + K_3) + K_4) * h / 6
    u += (P_1 + 2 * (P_2 + P_3) + P_4) * h / 6

конец пока
```

При этом на 1-й итерации при вычислении K_1 произойдёт деление на 0, поэтому целесообразно вынести эту итерацию из цикла и проинициализировать $K_1 := b(z) * (u_p(z) - u)$.

*Возможно оптимизировать путем выделения общих для K_2 и K_3, P_2 и P_3 частей, а так же общей для $a(z), b(z)$ части - $Rk(z)$.

Вопросы при защите лабораторной работы

1. Какие способы тестирования программы можете предложить?

Существует вразумительный ответ, но я его забыл)))

Точно не стоит предлагать сравнивать результаты вычислений с реальными измерениями, т.к. мы моделируем специально для того, чтобы не экспериментировать ирл.

Вероятнее всего, речь про тривиальные случаи. Потвикать параметры задачи так, чтобы решение было очевидным, и сравнить с результатом работы программы. Например: задать правое краевое условие $F(1) = 100\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ и проверить, выполняется ли оно в результате работы программы.

2. Приведите классификацию методов решения систем ОДУ для задачи Коши

Аналитические. Можем решить - находим общее решение, используя начальное условие получаем частное решение. (такого почти не бывает)

Приближенно аналитические. Пикар. Если удаётся интегрировать правую часть много раз, получаем сходящийся к точному решению ряд. Сходится плохо. (тоже почти не бывает, но есть исключительные задачи по типу $u'(x) = x^2 + u^2$, для которых решение чисто аналитически не найти).

Численные методы:

- одношаговые (для вычисления значений в следующем узле требуется знать значения только в предыдущем узле) / многошаговые (для вычисления значений в следующем узле требуется знать значения в нескольких предыдущих узлах).
- явные ($u_n = \psi(x_{n-1}, u_{n-1}, f(x_{n-1}, u_{n-1}))$) / неявные ($u_n = \psi(x_{n-1}, u_{n-1}, f(x_n, u_n))$). В случае явных следующее значание выражается через предыдущее. В случае неявных следующее значание выражается через предыдущее И производную следующего - нельзя применить 'как есть' , нужно искать решение уравнения - не всегда возможно. Как правило, неявные методы более устойчивые. Зачастую (всегда, в случае монотонных функций) явный и неявный метод сходятся к решению с разных сторон, поэтому можно использовать совместно для отыскания интервала, в котором находится точное решение.

3. Получите систему разностных уравнений для решения сформулированной задачи неявным методом Эйлера. Опишите алгоритм реализации полученных уравнений.

Неявный метод Эйлера для двух переменных:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + hf^{'}(x_n, f_n, t_n) \\ t_n = t_{n-1} + ht^{'}(x_n, t_n, f_n) \end{cases} \tag{6}$$

Для нашей задачи получаем:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + h(b(z_n)(u_{p_n} - u_n) - \frac{F_n}{z_n}) \\ u_n = u_{n-1} + h\frac{F_n}{a(z_n)} \end{cases} \tag{7}$$

Подставляем (6.2) в (6.1):

$$F_n = F_{n-1} + h(b(z_n)(u_{p_n} - u_{n-1} - \frac{F_n}{a(z_n)}h) - \frac{F_n}{z_n}) \tag{8}$$

Выражаем F_n из (7):

$$F_n = \frac{F_{n-1} + hb_n(u_{p_n} - u_{n-1})}{1 + \frac{h}{z_n} + \frac{h^2 b_n}{a_n}} \tag{9}$$

Система разностных уравнений:

$$\begin{cases} F_n = \frac{F_{n-1}+hb_n(u_{p_n}-u_{n-1})}{1+\frac{h}{z_n}+\frac{h^2b_n}{a_n}} \\ u_n = u_{n-1} + h\frac{F_n}{a(z_n)} \end{cases} \tag{10}$$

Алгоритм реализции: 1. Инициализировать F_0, u_0 2. Пока $z <= 1$ вычисляем F_n, u_n

4. Получите систему разностных уравнений для решения сформулированной задачи неяв-ным методом трапеций. Опишите алгоритм реализации полученных уравнений.

Неявный метод трапеций для двух переменных:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + h\frac{f^{'}(x_{n-1},f_{n-1},t_{n-1})+f^{'}(x_n,f_n,t_n)}{2} \\ t_n = t_{n-1} + h\frac{t^{'}(x_{n-1},t_{n-1},f_{n-1})+t^{'}(x_n,t_n,f_n)}{2} \end{cases} \tag{11}$$

Для нашей задачи получаем:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + h\frac{b(z_{n-1})(u_{p_{n-1}}-u_{n-1})-\frac{F_{n-1}}{z_{n-1}}+b(z_n)(u_{p_n}-u_n)-\frac{F_n}{z_n}}{2} \\ u_n = u_{n-1} + h\frac{\frac{F_{n-1}}{a(z_{n-1})}+\frac{F_n}{a(z_n)}}{2} \end{cases} \tag{12}$$

Подставляем (11.2) в (11.1) и выражаем F_n, получаем систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} F_n = \frac{F_{n-1}(1-\frac{h}{2z_{n-1}}-\frac{h^2b_n}{4a_{n-1}})+\frac{h}{2}(b_{n-1}u_{p_{n-1}}+b_nu_{p_n}-u_{n-1}(b_{n-1}+b_n))}{1+\frac{h}{2z_n}+\frac{h^2b_n}{4a_n}} \\ u_n = u_{n-1} + h\frac{\frac{F_{n-1}}{a(z_{n-1})}+\frac{F_n}{a(z_n)}}{2} \end{cases} \tag{13}$$

Алгоритм реализции: $-//-$, поскольку в (12.1) есть деление на z_{n-1}, надо на 1-й итерации не поделить на 0 (вынести за цикл)

5. Из каких соображений проводится выбор численного метода того или иного порядка точности, учитывая, что чем выше порядок точности метода, тем он более сложен и требует, как правило, больших ресурсов вычислительной системы?

Для некоторых задач не является целесообразным использовать методы более высокого порядка точности.

Если аналитически или по найденным решениям можно сделать вывод о том, что $u^{(P)}(z) \equiv 0$, то метод порядка точности P - избыточен. Он будет давать точность меньшую, чем оправдана объёмом вычислений.

От метода порядка точности P мы ожидаем, что погрешность решения убывает в k^P раз при уменьшении шага в k раз. Если этого не наблюдается на больших шагах, то метод избыточен и его использовать не стоит.