МС РК1 ТЕОРИЯ

Содержание

I неравенство Чебышева (НЧI)

Если:

X - СВ

$P\{X < 0\} = 0$

$\exists MX$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$

$<$

(1)$DEF : MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

(2)$f(x) = 0$, при $x < 0$

(1)и(2) $=> MX = \int_{-0}^{\varepsilon} xf(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} xf(x)dx$

$MX \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} xf(x)dx$

$MX \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)dx = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}$

$>$

II неравенство Чебышева (НЧII)

Если:

X - СВ

$\exists MX$

$\exists DX$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

$<$

(1)$Y = (X - MX)^2$

(2)$DEF : DX = MY$

(3)НЧI : $MY \geq \sigma P\{Y \geq \sigma\}$

(4)$LET : \sigma = \varepsilon^2$

$(1), (2), (3), (4) => DX \geq \varepsilon^2 P\{(X - MX)^2 \geq \sigma^2\}$

$\varepsilon > 0 => DX \geq \varepsilon^2 P\{|X - MX| \geq \sigma\}$

$>$

Сходимость последовательности СВ

Если:

$X_1, ..., X_n, ...$ - последовательность СВ на одном вероятностном пространстве

$\forall \varepsilon > 0 : P\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Тогда:

последовательность сходится по вероятности к СВ Z

Если:

$X_1, ..., X_n, ...$ - последовательность СВ на одном вероятностном пространстве

$\forall x \in R : F_Z$ непрерывна в x, $F_{X_1}(x), ..., F_{X_n}(x), ...$ сходится к $F_Z(x)$

Тогда:

последовательность слабо сходится к СВ Z

Закон больших чисел (ЗБЧ)

Если:

$X_1, ..., X_n, ...$ - последовательность СВ на одном вероятностном пространстве
$\forall i \in N : \exists M X_i = m_i$
$\forall \varepsilon > 0 : P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Тогда:

последовательность удовлетворяет ЗБЧ

ЗБЧ в форме Чебышева (ЗБЧЧ)

Если:

$X_1, ..., X_n, ...$ - последовательность независимых СВ
$\forall i \in N : \exists M X_i = m_i, D X_i = \sigma_i^2$
$\exists C > 0 : \forall i \in N : D X_i \leq C$

Тогда:

последовательность удовлетворяет ЗБЧ в форме Чебышева

$<$
$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
$X_i -$ независимы: $M\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i, D\overline{X}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$
НЧН: $P\{|\overline{X}_n - M\overline{X}_n| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2}$
$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2 n}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{C}{n\varepsilon} = 0$
$>$

Следствие ЗБЧ в форме Чебышева (СЗБЧЧ)

Если:

$X_1, ..., X_n, ...$ - одинаково распределённые СВ, удовлетворяющие ЗБЧЧ
$\forall i \in N : M X_i = m$

Тогда:

$\forall \varepsilon > 0 : P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$<$
$M\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = m$
$>$

Закон больших чисел в форме Бернулли (ЗБЧБ)

Если:

p - вероятность успеха, $q = 1 - p$ - вероятность неудачи
$ч_n = \frac{\text{число успехов в первых n экспериментах}}{n}$ - наблюдаемая частота успеха

Тогда:

$ч_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$

$<$
$X_i = \begin{cases} 1 \text{ , в i испытании успех} \\ 0 \text{ , иначе} \end{cases}$
$M X_i = p, D X_i = pq$
последовательность удовлетворяет ЗБЧЧ и следствию I, поэтому
$\forall \varepsilon > 0 : P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$ч_n \xrightarrow{P} p$
$>$

Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Если:

$X_1, ..., X_n, ...$ - одинаково распределённые СВ, удовлетворяющие ЗБЧЧ и следствию
$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
$Y_n = \frac{\overline{X}_n - M\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Тогда:
последовательность СВ Y_n слабо сходится к СВ $Z \sim N(0,1)$, т.е.
$\forall x \in R : F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_Z(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если:

k - число успехов в серии из n
$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$
$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Тогда:

$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$

$<$
Рассметриваем СВ $X_i = \begin{cases} 1 \text{ , в i испытании успех} \\ 0 \text{ , иначе} \end{cases}$
$MX_i = p$
$DX_i = pq$
По ЦПТ:
$P\{k_1 \le k \le k_2\} = P\{k_1 \le \sum_{i=1}^{n} X_i \le k_2\} = P\{\frac{\frac{1}{n}k_1 - p}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} \le \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} \le \frac{\frac{1}{n}k_2 - p}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\}$
$= P\{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\}$
$>$

Случайная выборка

Случайная выборка объёма n из генеральной совокупности X - случайный вектор:

$\overrightarrow{X}_n = (X_1, ..., X_n)$
$X_1, ..., X_n$ - независимые в совокупности СВ, распределённые как X

Выборка

Выборка объёма n - любая возможная реализация случайной выборки $\overrightarrow{X}_n$:

$\overrightarrow{x}_n = (x_1, ..., x_n)$

Вариационный ряд (ВР)

Вариационный ряд выборки $\overrightarrow{x}_n$ - неубывающая последовательность компонент $\overrightarrow{x}_n$:

$x_{(1)}, ..., x_{(n)}$

Функция распределения вероятности случайной выборки

ФР случайной выборки:

$F_{\overrightarrow{X}_n}(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, ..., X_n < x_n\}$

Так как $X_1, ..., X_n$ - независимые в совокупности СВ, распределённые как X (F(x) - их ФР):

$F_{\overrightarrow{X}_n}(x_1, ..., x_n) = F(x_1) * ... * F(x_n)$

Функции распределения вероятности крайних членов ВР

Функция распределения первого члена ВР:

$F_{X_{(1)}}(x) = P\{X_{(1)} < x\} = 1 - P\{X_{(1)} \geq x\} = 1 - P\{X_1 \geq x, ..., X_n \geq x\}$

Так как $X_1, ..., X_n$ - независимые в совокупности СВ, распределённые как X (F(x) - их ФР):

$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$

Функция распределения последнего члена ВР:

$F_{X_{(n)}}(x) = P\{X_{(n)} < x\} = P\{X_1 < x, ..., X_n < x\}$

Так как $X_1, ..., X_n$ - независимые в совокупности СВ, распределённые как X (F(x) - их ФР):

$F_{X_{(n)}}(x) = (F(x))^n$

Начальный выборочный момент порядка k (НМ$_K$)

Начальный выборочный момент порядка k:

$\hat{\mu}_k(\overrightarrow{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

Выборочное среднее ($\overline{X}$)

Выборочное среднее - НМ$_1$:

$\overline{X} = \overline{X}_n = \hat{\mu}_1(\overrightarrow{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Центральный выборочный момент порядка k (ЦМ$_K$)

Центральный выборочный момент порядка k:

$\hat{\nu}_k(\overrightarrow{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$

Выборочная дисперсия

Выборочная дисперсия - ЦМ$_2$:

$\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{X}_n) = \hat{\nu}_2(\overrightarrow{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

Эмпирическая функция распределения (ЭФР)

Эмпирическая функция распределения - функция вида $F_n : R \to R$:

$F_n(x) = \frac{n(x, \overrightarrow{x}_n)}{n}$, где $n(x, \overrightarrow{x}_n)$ - количество результатов выборки, меньших x

Выборочная функция распределения (ВФР)

Выборочная функция распределения:

$\hat{F}(x, \overrightarrow{X}_n) = \frac{n(x, \overrightarrow{X}_n)}{n}$, где $n(x, \overrightarrow{X}_n)$ - количество элементов случаной выборки $\overrightarrow{X}_n$, меньших x

Теорема о сходимости ВФР

$\forall x$ последовательность $\hat{F}(x, \overrightarrow{X}_n)$ сходится по вероятности к $F_X(x)$, т.е.

$\hat{F}(x, \overrightarrow{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F_X(x)$

$<$

При фиксированном x $\hat{F}(x, \overrightarrow{X}_n)$ равна относительной частоте реализации успеха в серии из n испытаний по схеме Бернулли (под успехом понимается $X < x$; вероятность успеха: $F_X(x)$)

ЗБЧБ: $\hat{F}(x, \overrightarrow{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F_X(x)$

$>$

Интервальный статистический ряд (ИСР)

Интервальный статистический ряд, отвечающий выборке $\overrightarrow{x}$ - таблица:

J_1	...	J_m
n_1	...	n_m

n_i - количество элементов выбоки $\overrightarrow{x}$, попавших в $J_i = [a_i, a_{i+1})$ ($J_m = [a_m, a_{m+1}]$ - исключение)

Эмпирическая плотность

Эмпирическая плотность, отвечающая выборке $\overrightarrow{x}$ - функция:

$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta_i} \text{ , } x \in J_i \\ 0 \text{ , иначе} \end{cases}$

Δ_i - ширина i - го интервала

Гистограмма

Гистограмма - график кусочно-постоянной функции $f_n(x)$ (эмпирической плотности)

Полигон частот

Полигон частот - ломанная, звенья которой соединяют середины верхних сторон "прямоугольников"гистограммы

*иначе: p_i - середина интервала J_i. Полигон частот проходит через точки $(p_i, f_n(p_i))$, $i = \overline{1, m}$

Задача идентификации неизвестных параметров ЗР СВ

Если:

X - СВ, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\overrightarrow{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_n)$ неизвестных параметров (известна ФР X : $F(x, \overrightarrow{\theta})$). Если задать значение $\overrightarrow{\theta}$, то ФР X будет известная полностью

Задача:

По известным реализациям СВ X оценить значение $\overrightarrow{\theta}$

Точечная оценка

Точечная оценка параметра θ - статистика $\hat{\theta}(\overrightarrow{X})$, выборочное значение которой принимается в качестве значения θ ($\theta := \hat{\theta}(\overrightarrow{x})$)

Несмещённая точечная оценка

Несмещённая точечная оценка $\hat{\theta}(\overrightarrow{X})$ параметра θ - такая, что $\exists M[\hat{\theta}(\overrightarrow{X})] = \theta$

Смещённость выборочной дисперсии

$M[\sigma^2(\overrightarrow{X})] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[((X_i - m) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m))^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[(X_i - m)^2 - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - m)(X_j - m) + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m)^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1 j\neq k}^{n}(X_k - m)(X_j - m)]$

$M[(X_i - m)^2] = \sigma^2$

$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} M[(X_j - m)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$

$M[(X_k - m)(X_j - m)] = cov(X_k, X_j)$, (т.к. X_k и X_j - независимы)

$\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} M[(X_i - m)(X_j - m)] = \frac{2\sigma^2}{n}$

Таким образом:

$M[\sigma^2(\overrightarrow{X})] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n}] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$

Исправленная (несмещённая) оценка дисперсии:

$S^2(\overrightarrow{X}) = \frac{n}{n-1}\sigma^2(\overrightarrow{X})$

Состоятельная оценка

Состоятельная точечная оценка $\hat{\theta}(\overrightarrow{X})$ параметра θ - такая, что $\hat{\theta}(\overrightarrow{X}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$

Эффективная оценка

Если:

$\hat{\theta}_1(\overrightarrow{X}), \hat{\theta}_2(\overrightarrow{X})$ - несмещённые ТО

$\exists D\hat{\theta}_1(\overrightarrow{X})$, $\exists D\hat{\theta}_2(\overrightarrow{X})$

$D\hat{\theta}_1(\overrightarrow{X}) < D\hat{\theta}_2(\overrightarrow{X})$

Тогда:

$\hat{\theta}_1(\overrightarrow{X})$ более эффективная, чем $\hat{\theta}_2(\overrightarrow{X})$

Несмещённая оценка $\hat{\theta}(\overrightarrow{X})$ называется эффективной, если обладает наименьшей дисперсией среди несмещённых оценок

Теорема о единственности эффективной оценки

Если:

Y - наблюдаемая СВ

$F_Y(x, \beta)$ - функция (закон) р-я Y , зависящая от β

$\beta_1(\overrightarrow{Y_n})$ и $\beta_2(\overrightarrow{Y_n})$ - эффективные оценки β

Тогда:

$P\{\beta_1(\overrightarrow{Y_n}) \neq \beta_2(\overrightarrow{Y_n})\} = 0$

$<$

$\beta_3(\overrightarrow{Y_n}) = \frac{1}{2}(\beta_1(\overrightarrow{Y_n}) + \beta_2(\overrightarrow{Y_n}))$

$M[\beta_3(\overrightarrow{Y_n})] = \beta$ - несмещённая оценка

$D[\beta_3(\overrightarrow{Y_n})] = \frac{1}{4}(D[\beta_1(\overrightarrow{Y_n})] + D[\beta_2(\overrightarrow{Y_n})] + 2cov[\beta_1(\overrightarrow{Y_n}); \beta_2(\overrightarrow{Y_n})])$

$D[\beta_2(\overrightarrow{Y_n})] = \frac{1}{2}(\sigma^2 + cov[\beta_1(\overrightarrow{Y_n}); \beta_2(\overrightarrow{Y_n})])$

$cov[\beta_1(\overrightarrow{Y_n}); \beta_2(\overrightarrow{Y_n})] \leq \sqrt{\beta_1(\overrightarrow{Y_n})\beta_2(\overrightarrow{Y_n})} = \sigma^2$

$D[\beta_3(\overrightarrow{Y_n})] \leq \sigma^2$ - эффективная оценка

$cov[\beta_1(\overrightarrow{Y_n}); \beta_2(\overrightarrow{Y_n})] = \sigma^2 => \beta_1(\overrightarrow{Y_n}) = \alpha\beta_2(\overrightarrow{Y_n}) + \gamma$

Оценки $\beta_1(\overrightarrow{Y_n})$ и $\beta_2(\overrightarrow{Y_n})$ несмещённые и эффективные $=> \alpha = 1; \gamma = 0$

$>$

Класс линейных оценок

Оценка $\hat{\theta}(\overrightarrow{X}) = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n$ - линейная

Если:

X - СВ

$\exists MX = m$

Тогда:

$m_1(\overrightarrow{X}) = \overline{X}$ - эффективная оценка в классе линейных несмещённых оценок

$<$

Т.к. $\hat{m}(\overrightarrow{X})$ - несмещённая:

$M[\hat{m}] = m\sum_{i=1}^n \lambda_i = m$

$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

Дисперсия $\hat{m}$:

$D[\hat{m}] = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$

Для нахождения коэффициентов λ_i эффективной оценки требуется решить:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \longrightarrow min \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Функция Лагранжа:

$L(\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \mu(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1) \longrightarrow min$

Условия экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta \lambda_i} = 0 \text{ , } i = \overline{1, n} \\ \frac{\delta L}{\mu} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{\mu}{2} \text{ , } i = \overline{1, n} \\ \mu = \frac{2}{n} \end{cases}$$

$\lambda_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1, n}$

$\hat{m}(\overrightarrow{X}) = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}$

$>$

Метод моментов

Если:

ξ - наблюдаемая СВ

$f_\xi(x,\beta)$ - её ФПРВ, зависящая от параметра β

$m_k(\beta) = M[\xi^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\beta(x,\beta)dx$ - начальный момент порядка k

$\mathring{m}_k(\beta) = M[(\xi - M[\xi])^k] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M[\xi])^k f_\beta(x,\beta)dx$ - центральный момент порядка k

Тогда:

Метод моментов заключается в решении системы уравний типа $m_k(\beta) = \mu_k(\overrightarrow{\xi_n})$ и $\mathring{m}_k(\beta) = \nu_k(\overrightarrow{\xi_n})$, где требуемые выборочные моменты получены на основе выборки $\overrightarrow{\xi_n}$

Иначе:

Теоретические моменты приравниваются к выборочным, решением составленной системы уравнений является выборочное значение (точечная оценка, выраженная через выборочные моменты) параметра/параметров закона распределения

Пример:

ξ - СВ, меющая гамма-распределение с параметрами α, λ:

$$f_\xi(x,\alpha,\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

$$m_1(\alpha,\lambda) = \int_0^\infty x \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty (x\lambda)^\alpha e^{-x\lambda}d(x\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$m_2(\alpha,\lambda) = \int_0^\infty x^2 \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty (x\lambda)^{\alpha+1} e^{-x\lambda}d(x\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}$$

$\mu_1(\overrightarrow{\xi_n}) = \overline{\xi_n}$

$\nu_2(\overrightarrow{\xi_n}) = \hat{\sigma}^2(\overrightarrow{\xi_n})$

Можно показать, что:

$\mathring{m}_2(\alpha,\lambda) = m_2(\alpha,\lambda) - m_1^2(\alpha,\lambda)$

Поэтому:

$\mathring{m}_2(\alpha,\lambda) = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} == \frac{\alpha}{\lambda^2}$

По методу моментов имеем:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\lambda} = \overline{\xi_n} \\ \frac{\alpha}{\lambda^2} = \hat{\sigma}^2(\overrightarrow{\xi_n}) \end{cases}$$

$\alpha = \frac{(\overline{\xi_n})^2}{\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{\xi_n})}$

$\lambda = \frac{\overline{\xi_n}}{\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{\xi_n})}$

Метод максимального правдоподобия

Функция правдоподобия случайной выборки $\overrightarrow{X}$:

$\mathcal{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{\theta}) = p(X_1, \overrightarrow{\theta}) * ... * p(X_n, \overrightarrow{\theta})$

$$p(x, \overrightarrow{\theta}) = \begin{cases} P\{X = x\} \text{ , X - дискретная СВ} \\ f_X(x, \overrightarrow{\theta}) \text{ , X - непрерывная СВ} \end{cases}$$

Метод заключается в использовании в качестве оценки вектора $\overrightarrow{\theta}$ такого его значения, при котором значение $\mathcal{L}(\overrightarrow{X})$ максимально, т.е.

$\mathcal{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{\theta}) \longrightarrow max$

или

$ln\mathcal{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{\theta}) \longrightarrow max$

Если:

$\mathcal{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{\theta})$ и $ln\mathcal{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{\theta})$ дифференцируемы по $\theta_1, ..., \theta_k$

Тогда необходимые условия экстремума:

$\begin{cases} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\theta_1} = 0 \\ ... \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\theta_k} = 0 \end{cases}$
или
$\begin{cases} \frac{\delta ln\mathcal{L}}{\delta\theta_1} = 0 \\ ... \\ \frac{\delta ln\mathcal{L}}{\delta\theta_k} = 0 \end{cases}$
Пример:
$X \sim \mathit{\Pi}(\lambda)$, $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, ...$
$\mathcal{L}(\overrightarrow{X_n}, \lambda) = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{X_1+...+X_n}}{X_1! * ... * X_n!}$
$ln\mathcal{L}(\overrightarrow{X_n}, \lambda) = -n\lambda + (X_1 + ... + X_n)ln(\lambda) - ln(X_1! * ... * X_n!)$
$\frac{\delta ln\mathcal{L}}{\delta\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\lambda} - n$
$\frac{\delta^2 ln\mathcal{L}}{\delta\lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\lambda^2}$
При $\hat{\lambda}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X_n}$:
$\frac{\delta ln\mathcal{L}}{\delta\lambda} = 0$
$\frac{\delta^2 ln\mathcal{L}}{\delta\lambda^2} < 0$
Т.е. функция правдоподобия имеет максимум.

Цетральная статистика

Статистика $g(\overrightarrow{X}, \theta)$ называется центральной, если закон её распределения не зависит от θ

γ-доверительный интервал

γ-доверительным интервалом параметра θ называется интервал $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X}), \overline{\theta}(\overrightarrow{X}))$ такой, что $P\{\theta \in (\underline{\theta}(\overrightarrow{X}), \overline{\theta}(\overrightarrow{X}))\} = \gamma$

Алгоритм построения для скалярного параметра

Если:
$g(\overrightarrow{X}, \theta)$ - центральная статистика
$g(\overrightarrow{X}, \theta)$ - монотонная по θ
$\alpha + \beta = 1 - \gamma$
q_α - квантиль уровная α распределения g
Тогда:

$$\gamma = P\{q_\alpha < g(\overrightarrow{X}, \theta) < q_{1-\beta}\} = \begin{cases} P\{g^{-1}(\overrightarrow{X}, q_\alpha) < \theta < g^{-1}(\overrightarrow{X}, q_{1-\beta})\}, \ g \text{ - возр. по } \theta \\ P\{g^{-1}(\overrightarrow{X}, q_\alpha) > \theta > g^{-1}(\overrightarrow{X}, q_{1-\beta})\}, \ g \text{ - убыв. по } \theta \end{cases}$$

Границы интервала:

$$\underline{\theta}(\overrightarrow{X}) = \begin{cases} g^{-1}(\overrightarrow{X}, q_\alpha), \ g \text{ - возр. по } \theta \\ g^{-1}(\overrightarrow{X}, q_{1-\beta}), \ g \text{ - убыв. по } \theta \end{cases}$$

$$\overline{\theta}(\overrightarrow{X}) = \begin{cases} g^{-1}(\overrightarrow{X}, q_{1-\beta}), \ g \text{ - возр. по } \theta \\ g^{-1}(\overrightarrow{X}, q_\alpha), \ g \text{ - убыв. по } \theta \end{cases}$$

Алгоритм построения для МО НСВ при известной дисперсии

Алгоритм построения для МО НСВ при неизвестной дисперсии

Алгоритм построения для Д НСВ

Количество информации по Фишеру

Количество информации по Фишеру в n наблюдениях:

$I(\theta) = M\{[\frac{\delta ln\mathcal{L}(\overrightarrow{X},\theta)}{\delta\theta}]^2\}$

Неравенство Рао-Крамера

Если:

Рассматриваемая параметрическая модель - регулярная

$\hat{\theta}(\overrightarrow{X})$ - несмещённая точечная оценка θ

Тогда:

$D[\hat{\theta}(\overrightarrow{X})] \geq \frac{1}{I(\theta)}$

Показатель эффективности точечной оценки по Рао-Крамеру:

$e(\hat{\theta}) = \frac{1}{I(\theta)D[\hat{\theta}]}$

Оценка, для которой $e(\hat{\theta}) = 1$ - эффективная по Рао-Крамеру

Построение доверительных интервалов*

Общий вид закона распр. ген. сов. X	Параметры	Центральная статистика и ее закон распределения
$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	μ – неизв., σ – изв. **Оценить** μ. μ – изв., σ – неизв. **Оценить** σ.	$\dfrac{\mu-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}\sim \mathrm{N}(0,1)$
	μ – неизв., σ – неизв. **Оценить** μ.	$\dfrac{\mu-\bar{X}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}\sim \mathrm{St}(n-1)$
	μ – неизв., σ – неизв. **Оценить** σ.	$\dfrac{S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2}(n-1)\sim \chi^2(n-1)$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	λ – неизв. **Оценить** λ.	$2\lambda n\bar{X}\sim \chi^2(2n)$

Проверка статистических гипотез*

для нормально распределенной генеральной совокупности $X\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$

	Основная гипотеза H_0	Конкур. гипотеза H_1	Статистика $T(\vec{X}_n)$ и ее закон распределения при H_0	Условие, определяющее критическую область W
I. σ изв.	$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$\dfrac{\mu_0-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}\sim \mathrm{N}(0,1)$	$T(\vec{X}_n)\geqslant u_{1-\alpha}$
		$\mu>\mu_0$		$T(\vec{X}_n)\leqslant -u_{1-\alpha}$
		$\mu\neq\mu_0$		$\lvert T(\vec{X}_n)\rvert\geqslant u_{1-\alpha/2}$
II. σ неизв.	$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$\dfrac{\mu_0-\bar{X}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}\sim \mathrm{St}(n-1)$	$T(\vec{X}_n)\geqslant t_{1-\alpha}$
		$\mu>\mu_0$		$T(\vec{X}_n)\leqslant -t_{1-\alpha}$
		$\mu\neq\mu_0$		$\lvert T(\vec{X}_n)\rvert\geqslant t_{1-\alpha/2}$
III. σ1 и σ2 изв.	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})=$ $=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim \mathrm{N}(0,1)$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\geqslant u_{1-\alpha}$
		$\mu_1\neq\mu_2$		$\lvert T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\rvert\geqslant u_{1-\alpha/2}$
IV. σ1 и σ2 неизв.	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\times$ $\times\dfrac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1})+(n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}}$ $\sim \mathrm{St}(n_1+n_2-2)$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\geqslant t_{1-\alpha}$
		$\mu_1\neq\mu_2$		$\lvert T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\rvert\geqslant t_{1-\alpha/2}$
V.	$\sigma=\sigma_0$	$\sigma>\sigma_0$	$\dfrac{S^2(\vec{X}_n)}{\sigma_0^2}(n-1)\sim \chi^2(n-1)$	$T(\vec{X}_n)\geqslant h_{1-\alpha}$
		$\sigma<\sigma_0$		$T(\vec{X}_n)\leqslant h_{\alpha/2}$
		$\sigma\neq\sigma_0$		$[T\leqslant h_{\alpha/2}]\vee[T\geqslant h_{1-\alpha/2}]$
VI.	$\sigma_1=\sigma_2$	$\sigma_1>\sigma_2$ $\sigma_1<\sigma_2$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})=$ $=\dfrac{\max\{S_1^2(\vec{X}_{n_1}),S_2^2(\vec{Y}_{n_2})\}}{\min\{S_1^2(\vec{X}_{n_1}),S_2^2(\vec{Y}_{n_2})\}}\sim$ $\sim \mathrm{F}(n_1-1,n_2-1)$	$T(\vec{X}_{n_1},\vec{Y}_{n_2})\geqslant \mathrm{F}_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
		$\sigma_1\neq\sigma_2$		$T\geqslant \mathrm{F}_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

* $\bar{X}$ – выборочное среднее, S^2 – исправленная выборочная дисперсия,
α – уровень значимости критерия, u_q, t_q, h_q, F_q – квантили уровня q соответствующих распределений.

Значение функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
	Десятые доли x									
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000^{8}

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

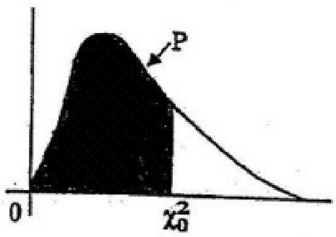
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	1,00	0,841345	2,00	0,977250
0,05	0,519939	1,05	0,853141	2,05	0,979818
0,10	0,539828	1,10	0,864334	2,10	0,982136
0,15	0,559618	1,15	0,874928	2,15	0,984222
0,20	0,579260	1,20	0,884930	2,20	0,986097
0,25	0,589706	1,25	0,894350	2,25	0,987776
0,30	0,617911	1,30	0,903200	2,30	0,989276
0,35	0,636831	1,35	0,911492	2,35	0,990613
0,40	0,655422	1,40	0,919243	2,40	0,991802
0,45	0,673645	1,45	0,926471	2,45	0,992857
0,50	0,691463	1,50	0,933193	2,50	0,993790
0,55	0,708840	1,55	0,939429	2,55	0,994614
0,60	0,725747	1,60	0,945201	2,60	0,995339
0,65	0,742154	1,65	0,950528	2,65	0,995975
0,70	0,758036	1,70	0,955434	2,70	0,996533
0,75	0,773373	1,75	0,959941	2,75	0,997020
0,80	0,788145	1,80	0,964070	2,80	0,997445
0,85	0,802338	1,85	0,967843	2,85	0,997814
0,90	0,815940	1,90	0,971283	2,90	0,998134
0,95	0,828944	1,95	0,974412	2,95	0,998411
				3,00	0,998650

Таблица 3. Квантили распределения $t(\nu)$

ν	P								ν
	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999	0.9995	
1	3,0777	6,3138	12,706	31,821	63,657	127,32	318,31	636,62	1
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	14,089	22,327	31,599	2
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,215	12,924	3
4	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103	4
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688	5
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2076	5,9588	6
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,0293	4,7853	5,4079	7
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	3,8325	4,5008	5,0413	8
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,7809	9
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869	10
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0247	4,4370	11
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,9296	4,3178	12
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,8520	4,2208	13
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,3257	3,7874	4,1405	14
15	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,7328	4,0728	15
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6862	4,0150	16
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224	3,6458	3,9651	17
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216	18
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834	19
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495	20
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,1352	3,5272	3,8193	21
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921	22
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676	23
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7454	24
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251	25
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669	3,4350	3,7066	26
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,4210	3,6896	27
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739	28
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,0380	3,3962	3,6594	29
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6459	30
31	1,3095	1,6955	2,0395	2,4528	2,7440	3,0221	3,3749	3,6334	31
32	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,0150	3,3653	3,6218	32
33	1,3077	1,6924	2,0345	2,4448	2,7333	3,0082	3,3563	3,6109	33
34	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,0020	3,3479	3,6007	34
35	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	2,9960	3,3400	3,5911	35
36	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	2,9905	3,3326	3,5821	36
37	1,3049	1,6871	2,0262	2,4314	2,7154	2,9852	3,3256	3,5737	37
38	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	2,9803	3,3190	3,5657	38
39	1,3036	1,6849	2,0227	2,4258	2,7079	2,9756	3,3128	3,5581	39
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	2,9712	3,3069	3,5510	40
41	1,3025	1,6829	2,0195	2,4208	2,7012	2,9670	3,3013	3,5442	41
42	1,3020	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	2,9630	3,2960	3,5377	42
43	1,3016	1,6811	2,0167	2,4162	2,6951	2,9592	3,2909	3,5316	43
44	1,3011	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	2,9555	3,2861	3,5258	44
45	1,3006	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	2,9521	3,2815	3,5202	45
46	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870	2,9488	3,2771	3,5150	46
47	1,2998	1,6779	2,0117	2,4083	2,6846	2,9456	3,2729	3,5099	47
48	1,2994	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822	2,9426	3,2689	3,5051	48
49	1,2991	1,6766	2,0096	2,4049	2,6800	2,9397	3,2651	3,5004	49
50	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	2,9370	3,2614	3,4960	50

ν	P								ν
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999	0,9995	
51	1,2984	1,6753	2,0076	2,4017	2,6757	2,9343	3,2579	3,4918	51
52	1,2980	1,6747	2,0066	2,4002	2,6737	2,9318	3,2545	3,4877	52
53	1,2977	1,6741	2,0057	2,3988	2,6718	2,9293	3,2513	3,4838	53
54	1,2974	1,6736	2,0049	2,3974	2,6700	2,9270	3,2481	3,4800	54
55	1,2971	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682	2,9247	3,2451	3,4764	55
56	1,2969	1,6725	2,0032	2,3948	2,6665	2,9225	3,2423	3,4729	56
57	1,2966	1,6720	2,0025	2,3936	2,6649	2,9204	3,2395	3,4696	57
58	1,2963	1,6716	2,0017	2,3924	2,6633	2,9184	3,2368	3,4663	58
59	1,2961	1,6711	2,0010	2,3912	2,6618	2,9164	3,2342	3,4632	59
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	2,9146	3,2317	3,4602	60
61	1,2956	1,6702	1,9996	2,3890	2,6589	2,9127	3,2293	3,4573	61
62	1,2954	1,6698	1,9990	2,3880	2,6575	2,9110	3,2270	3,4545	62
63	1,2951	1,6694	1,9983	2,3870	2,6561	2,9093	3,2247	3,4518	63
64	1,2949	1,6690	1,9977	2,3860	2,6549	2,9076	3,2225	3,4491	64
65	1,2947	1,6686	1,9971	2,3851	2,6536	2,9060	3,2204	3,4466	65
66	1,2945	1,6683	1,9966	2,3842	2,6524	2,9045	3,2184	3,4441	66
67	1,2943	1,6679	1,9960	2,3833	2,6512	2,9030	3,2164	3,4417	67
68	1,2941	1,6676	1,9955	2,3824	2,6501	2,9015	3,2145	3,4394	68
69	1,2939	1,6672	1,9949	2,3816	2,6490	2,9001	3,2126	3,4372	69
70	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	2,8987	3,2108	3,4350	70
71	1,2936	1,6666	1,9939	2,3800	2,6469	2,8974	3,2090	3,4329	71
72	1,2934	1,6663	1,9935	2,3793	2,6459	2,8961	3,2073	3,4308	72
73	1,2933	1,6660	1,9930	2,3785	2,6449	2,8949	3,2057	3,4289	73
74	1,2931	1,6657	1,9925	2,3778	2,6439	2,8936	3,2041	3,4269	74
75	1,2929	1,6654	1,9921	2,3771	2,6430	2,8924	3,2025	3,4250	75
76	1,2928	1,6652	1,9917	2,3764	2,6421	2,8913	3,2010	3,4232	76
77	1,2926	1,6649	1,9913	2,3758	2,6412	2,8902	3,1995	3,4214	77
78	1,2925	1,6646	1,9908	2,3751	2,6403	2,8891	3,1980	3,4197	78
79	1,2924	1,6644	1,9905	2,3745	2,6395	2,8880	3,1966	3,4180	79
80	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	2,8870	3,1953	3,4163	80
81	1,2921	1,6639	1,9897	2,3733	2,6379	2,8860	3,1939	3,4147	81
82	1,2920	1,6636	1,9893	2,3727	2,6371	2,8850	3,1926	3,4132	82
83	1,2918	1,6634	1,9890	2,3721	2,6364	2,8840	3,1913	3,4116	83
84	1,2917	1,6632	1,9886	2,3716	2,6356	2,8831	3,1901	3,4102	84
85	1,2916	1,6630	1,9883	2,3710	2,6349	2,8822	3,1889	3,4087	85
86	1,2915	1,6628	1,9879	2,3705	2,6342	2,8813	3,1877	3,4073	86
87	1,2914	1,6626	1,9876	2,3700	2,6335	2,8804	3,1866	3,4059	87
88	1,2912	1,6624	1,9873	2,3695	2,6329	2,8795	3,1854	3,4045	88
89	1,2911	1,6622	1,9870	2,3690	2,6322	2,8787	3,1843	3,4032	89
90	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	2,8779	3,1833	3,4019	90
91	1,2909	1,6618	1,9864	2,3680	2,6309	2,8771	3,1822	3,4007	91
92	1,2908	1,6616	1,9861	2,3676	2,6303	2,8763	3,1812	3,3994	92
93	1,2907	1,6614	1,9858	2,3671	2,6297	2,8755	3,1802	3,3982	93
94	1,2906	1,6612	1,9855	2,3667	2,6291	2,8748	3,1792	3,3971	94
95	1,2905	1,6611	1,9853	2,3662	2,6286	2,8741	3,1782	3,3959	95
96	1,2904	1,6609	1,9850	2,3658	2,6280	2,8734	3,1773	3,3948	96
97	1,2903	1,6607	1,9847	2,3654	2,6275	2,8727	3,1764	3,3937	97
98	1,2902	1,6606	1,9845	2,3650	2,6269	2,8720	3,1755	3,3926	98
99	1,2902	1,6604	1,9842	2,3646	2,6264	2,8713	3,1746	3,3915	99
100	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	2,8707	3,1737	3,3905	100

χ^2 Distribution



The table below gives the value x_0^2 for which $P[x^2 < x_0^2] = P$ for a given number of degrees of freedom and a given value of P.

Degrees of Freedom	Values of P									
	0.005	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**
1	---	---	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997