ЛР3

В этой лабе используем интегро-интерполяционный метод, он же метод баланса, он же метод контрольных объёмов. Суть метода: задаём сетку, для каждого узла сетки определяем окресность* (контрольный объём), интегрируем по этим объёмам - получаем разностную схему.

*окрестность в курсе называется ячейкой

Поскольку имеем диффур второго порядка, интегрируем мы дважды, получая разностные уравнения относительно $F(z)$ и $u(z)$:

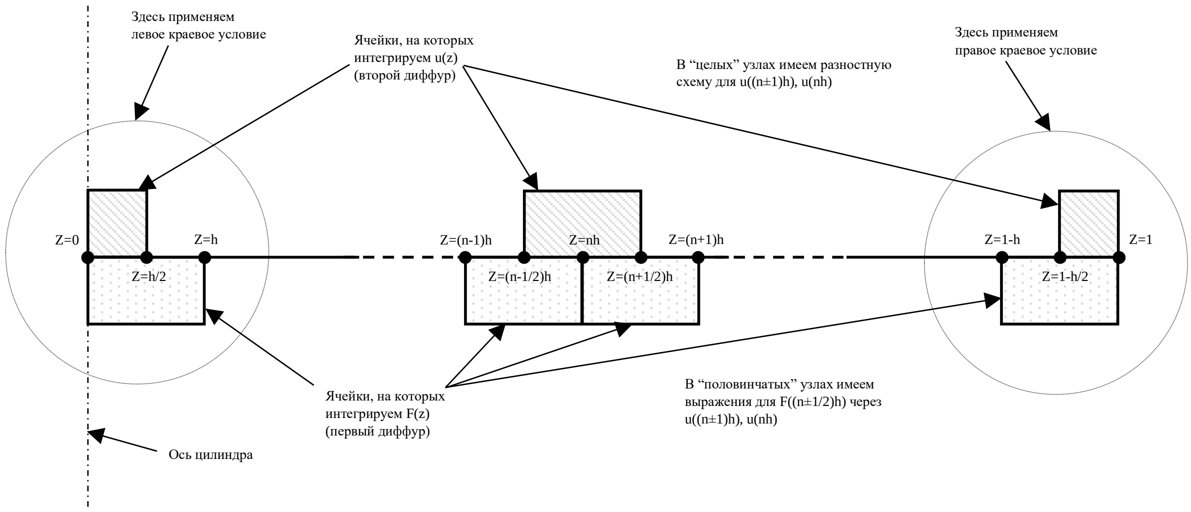

Рис. 1: Вычислительная схема

Первое уравнение задачи:

$$F = a(z)\frac{du}{dz} \Leftrightarrow \frac{F}{a(z)}dz = du \tag{1}$$

Интегрируем (1) на ячейке $z \in \{(n-1)h, nh\}$:

$$\int_{n-1}^{n} \frac{F}{a(z)}\,dz = \int_{n-1}^{n} du$$

$$\int_{n-1}^{n} \frac{F}{a(z)}\,dz \approx F_{n-\frac{1}{2}} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{a(z)}\,dz = u_n - u_{n-1}$$

Можно использовать разные приближения $\int_{n-1}^{n} \frac{1}{a(z)}\,dz$:

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{a(z)}\,dz \approx h\frac{a_n + a_{n-1}}{2a_n a_{n-1}}$$

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{a(z)}\,dz \approx \frac{2h}{a_n + a_{n-1}}$$

Оба сходятся к значению в центре ячейки, но второе вычисляется быстрее (используем его).
На ячейке $z \in \{(n-1)h, nh\}$ получаем:

$$F_{n-\frac{1}{2}} \approx \frac{(a_n + a_{n-1})(u_n - u_{n-1})}{2h} = \alpha_n \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \tag{2}$$

Аналогично, на ячейке $z \in \{nh, (n+1)h\}$:

$$F_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{(a_n + a_{n+1})(u_{n+1} - u_n)}{2h} = \beta_n \frac{u_{n+1} - u_n}{h} \tag{3}$$

$\alpha_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ и $\beta_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ - введённые здесь замены.

Второе уравнение задачи:

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(zF) = b(z)(u_p - u) \Leftrightarrow d(zF) = zb(z)(u_p - u)dz \tag{4}$$

Интегрируем (4) на ячейке $z \in \{(n-1/2)h, (n+1/2)h\}$:

$$\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} d(zF) = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} zb(z)(u_p(z) - u)\, dz$$

$$z_{n+\frac{1}{2}} F_{n+\frac{1}{2}} - z_{n-\frac{1}{2}} F_{n-\frac{1}{2}} \approx \frac{z^2_{n+\frac{1}{2}} - z^2_{n-\frac{1}{2}}}{2} b_n(u_{p_n} - u_n) = \gamma_n b_n (u_{p_n} - u_n)$$

$\gamma_n = \frac{z^2_{n+\frac{1}{2}} - z^2_{n-\frac{1}{2}}}{2}$ - введённая здесь замена.

Группируем по u:

$$z_{n-\frac{1}{2}}\beta_n u_{n-1} + (h\gamma_n b_n - z_{n-\frac{1}{2}}\beta_n - z_{n+\frac{1}{2}}\alpha_n)u_n + z_{n+\frac{1}{2}}\alpha_n u_{n+1} = h\gamma_n b_n u_{p_n} \tag{5}$$

Уравнение (5) определяет трёх-диагональную матрицу для прогонки, кроме первой и последней строк - они задаются краевыми условиями.

$$\begin{aligned}
&A_n u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} = D_n \\
&A_n = z_{n-\frac{1}{2}}\beta_n \\
&B_n = h\gamma_n b_n - z_{n-\frac{1}{2}}\beta_n - z_{n+\frac{1}{2}}\alpha_n \\
&C_n = z_{n+\frac{1}{2}}\alpha_n \\
&D_n = h\gamma_n b_n u_{p_n}
\end{aligned} \tag{6}$$

Левое краевое условие:

$$z = 0, F(0) = 0$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{zF}{dz}\, dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} zb(z)(u_p(z) - u)\, dz$$

$$z_{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}} - z_{-\frac{1}{2}} F_{-\frac{1}{2}} \approx z_{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}} - z_0 F_0 = z_{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}} = \gamma_0 b_0 (u_p(0) - u_0)$$

Группируем по u:

$$(h\gamma_0 b_0 - z_{\frac{1}{2}}\alpha_0)u_0 + z_{\frac{1}{2}}\alpha_0 u_1 = h\gamma_0 b_0 u_{p_0}$$

$$
\begin{aligned}
&B_0 u_0 + C_0 u_1 = D_0 \\
&A_0 = 0 \\
&B_0 = h\gamma_0 b_0 - z_{\frac{1}{2}}\alpha_0 \\
&C_0 = z_{\frac{1}{2}}\alpha_0 \\
&D_0 = h\gamma_0 b_0 u_{p_0}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Правое краевое условие:

$$z = 1, F(1) = 0.393cu(1)$$

$$\int_{N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{zF}{dz}\,dz = \int_{N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} zb(z)(u_p(z) - u)\,dz$$

$$z_{N+\frac{1}{2}}F_{N+\frac{1}{2}} - z_{N-\frac{1}{2}}F_{N-\frac{1}{2}} \approx z_N F_N - z_{N-\frac{1}{2}}F_{N-\frac{1}{2}} = z_N 0.393cu_N - z_{N-\frac{1}{2}}F_{N-\frac{1}{2}} = \gamma_N b_N(u_{p_N} - u_N)$$

Группируем по u:

$$z_{N-\frac{1}{2}}\beta_N u_{N-1} + (h\gamma_N b_N + z_N 0.393cu_N h - z_{N-\frac{1}{2}}\beta_N)u_N = h\gamma_N b_N u_{p_N} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
&A_N u_{N-1} + B_N u_N = D_N \\
&A_N = z_{N-\frac{1}{2}}\beta_N \\
&B_N = h\gamma_N b_N + z_N 0.393cu_N h - z_{N-\frac{1}{2}}\beta_N \\
&C_N = 0 \\
&D_N = h\gamma_N b_N u_{p_N}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Имеем матричное уравнение:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
B_0 & C_0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
A_1 & B_1 & C_1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & A_2 & B_1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \vdots & B_{N-2} & B_{N-2} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \vdots & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\
\hline
0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & A_N & B_N \\
\hline
\end{array}
\times
\begin{array}{|c|}
\hline
u_0 \\ \hline
u_1 \\ \hline
u_2 \\ \hline
\vdots \\ \hline
u_{N-2} \\ \hline
u_{N-1} \\ \hline
u_N \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
\hline
D_0 \\ \hline
D_1 \\ \hline
D_2 \\ \hline
\vdots \\ \hline
D_{N-2} \\ \hline
D_{N-1} \\ \hline
D_N \\ \hline
\end{array}
$$

Прогоночные коэффициенты:
$\zeta_0 = -\frac{C_0}{B_0}$, $\xi_0 = \frac{D_0}{B_0}$

$\zeta_i = -\frac{C_i}{B_i + A_i\zeta_{i-1}}$, $\xi_i = \frac{D_i - A_i\xi_{i-1}}{B_i + A_i\zeta_{i-1}}$

Обратный счёт: $u_N = \xi_N$, $u_i = \zeta_i u_{i+1} + \xi_i$

Так же, как и в методе стрельбы, итерация вычислений по методу даёт лишь следующее приближение интегральной кривой, поэтому также нужно использовать критерий точности.

"Разболтки"при решении задачи не происходит, поэтому метод релаксации применять не требуется.

Решения

Решение для варианта 1 совпадает с решением в ЛР2.
Решение для варианта 2:

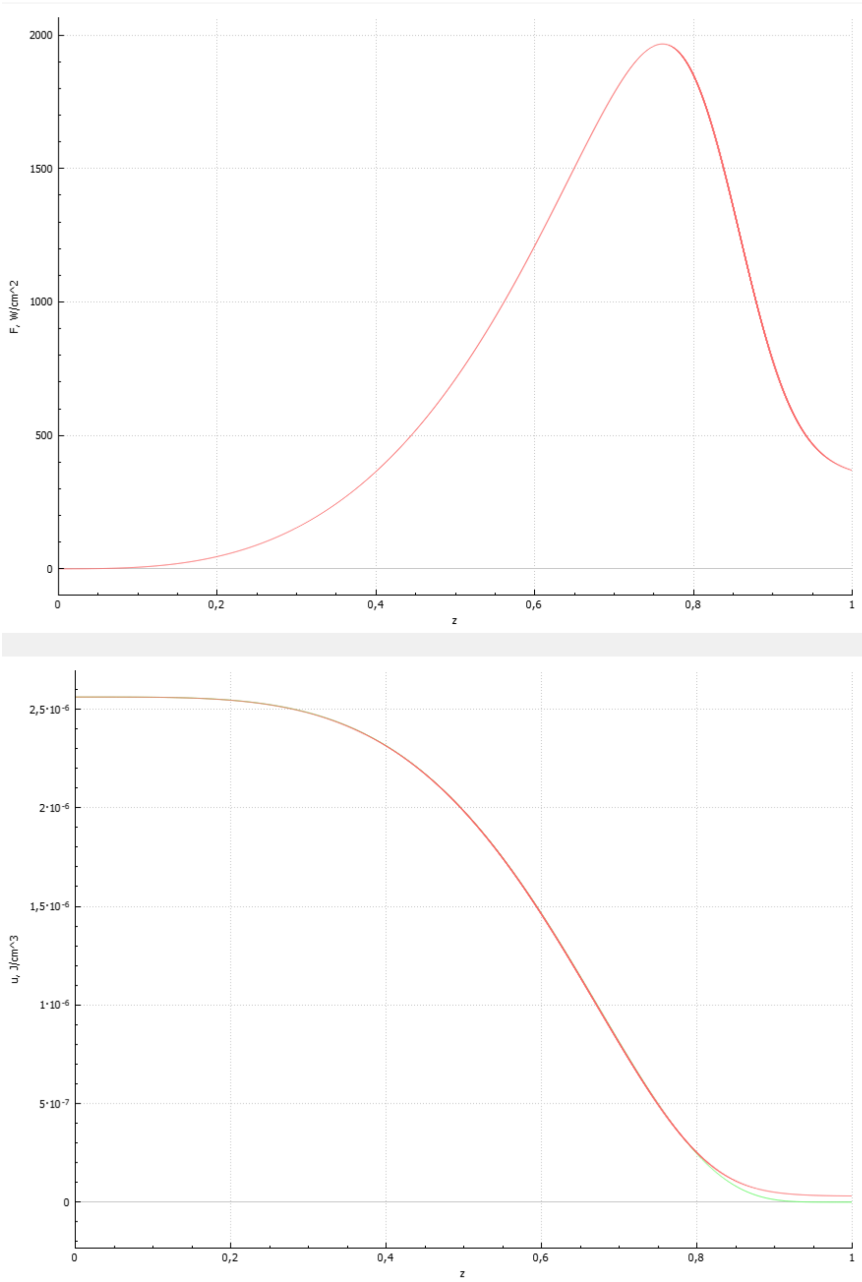

Рис. 2: Вариант 2

*Зелёная кривая - функция Планка ($u_p(z)$).