ЛР3

В этой лабе используем интегро-интерполяционный метод, он же метод баланса, он же метод контрольных объёмов. Суть метода: задаём сетку, для каждого узла сетки определяем окресность* (контрольный объём), интегрируем по этим объёмам - получаем разностную схему.

*окрестность в курсе называется ячейкой

Поскольку имеем диффур второго порядка, интегрируем мы дважды, получая разностные уравнения относительно $F(z)$ и $u(z)$:

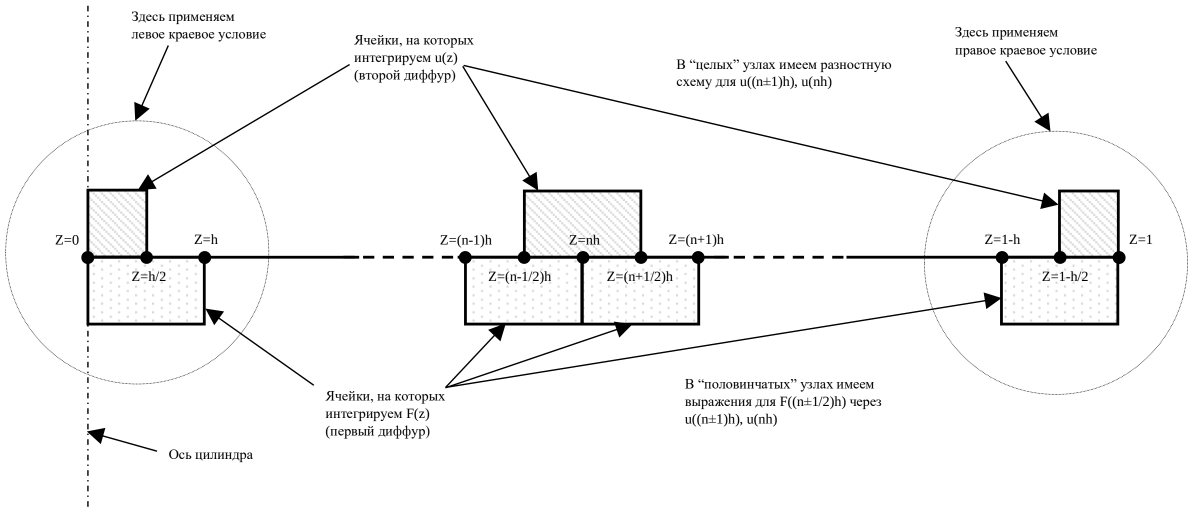

Рис. 1: Вычислительная схема

Первое уравнение задачи:

$$F = a(z)\frac{du}{dz} \Leftrightarrow \frac{F}{a(z)}dz = du \tag{1}$$

Интегрируем (1) на ячейке $z \in \{(n-1)h, nh\}$:

$$\int_{n-1}^{n} \frac{F}{a(z)}\,dz = \int_{n-1}^{n} du$$

$$\int_{n-1}^{n} \frac{F}{a(z)}\,dz \approx F_{n-\frac{1}{2}} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{a(z)}\,dz = u_n - u_{n-1}$$

Можно использовать разные приближения $\int_{n-1}^{n} \frac{1}{a(z)}\,dz$:

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{a(z)}\,dz \approx h\frac{a_n + a_{n-1}}{2a_n a_{n-1}}$$

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{a(z)}\,dz \approx \frac{2h}{a_n + a_{n-1}}$$

Оба сходятся к значению в центре ячейки, но второе вычисляется быстрее (используем его).

На ячейке $z \in \{(n-1)h, nh\}$ получаем:

$$F_{n-\frac{1}{2}} \approx \frac{(a_n + a_{n-1})(u_n - u_{n-1})}{2h} = \alpha_n \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \tag{2}$$

Аналогично, на ячейке $z \in \{nh, (n+1)h\}$:

$$F_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{(a_n + a_{n+1})(u_{n+1} - u_n)}{2h} = \beta_n \frac{u_{n+1} - u_n}{h} \tag{3}$$

$\alpha_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ и $\beta_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ - введённые здесь замены.

Второе уравнение задачи:

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(zF) = b(z)(u_p - u) \Leftrightarrow d(zF) = zb(z)(u_p - u)dz \tag{4}$$

Интегрируем (4) на ячейке $z \in \{(n-1/2)h, (n+1/2)h\}$:

$$\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} d(zF) = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} zb(z)(u_p(z) - u)\, dz$$

$$z_{n+\frac{1}{2}} F_{n+\frac{1}{2}} - z_{n-\frac{1}{2}} F_{n-\frac{1}{2}} \approx \frac{z^2_{n+\frac{1}{2}} - z^2_{n-\frac{1}{2}}}{2} b_n (u_{p_n} - u_n) = \gamma_n b_n (u_{p_n} - u_n)$$

$\gamma_n = \frac{z^2_{n+\frac{1}{2}} - z^2_{n-\frac{1}{2}}}{2}$ - введённая здесь замена.

Группируем по u:

$$z_{n-\frac{1}{2}} \beta_n u_{n-1} + (h\gamma_n b_n - z_{n-\frac{1}{2}}\beta_n - z_{n+\frac{1}{2}}\alpha_n) u_n + z_{n+\frac{1}{2}} \alpha_n u_{n+1} = h\gamma_n b_n u_{p_n} \tag{5}$$

Уравнение (5) определяет трёх-диагональную матрицу для прогонки, кроме первой и последней строк - они задаются краевыми условиями.

$$\begin{aligned}
&A_n u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} = D_n \\
&A_n = z_{n-\frac{1}{2}} \beta_n \\
&B_n = h\gamma_n b_n - z_{n-\frac{1}{2}}\beta_n - z_{n+\frac{1}{2}}\alpha_n \\
&C_n = z_{n+\frac{1}{2}} \alpha_n \\
&D_n = h\gamma_n b_n u_{p_n}
\end{aligned} \tag{6}$$

Левое краевое условие:

$$z = 0, F(0) = 0$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{zF}{dz}\, dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} zb(z)(u_p(z) - u)\, dz$$

$$z_{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}} - z_{-\frac{1}{2}} F_{-\frac{1}{2}} \approx z_{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}} - z_0 F_0 = z_{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}} = \gamma_0 b_0 (u_p(0) - u_0)$$

Группируем по u:

$$(h\gamma_0 b_0 - z_{\frac{1}{2}}\alpha_0) u_0 + z_{\frac{1}{2}} \alpha_0 u_1 = h\gamma_0 b_0 u_{p_0}$$

$$
\begin{aligned}
&B_0 u_0 + C_0 u_1 = D_0 \\
&A_0 = 0 \\
&B_0 = h\gamma_0 b_0 - z_{\frac{1}{2}}\alpha_0 \\
&C_0 = z_{\frac{1}{2}}\alpha_0 \\
&D_0 = h\gamma_0 b_0 u_{p_0}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Правое краевое условие:

$$z = 1, F(1) = 0.393cu(1)$$

$$\int_{N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{zF}{dz}\, dz = \int_{N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} zb(z)(u_p(z) - u)\, dz$$

$$z_{N+\frac{1}{2}}F_{N+\frac{1}{2}} - z_{N-\frac{1}{2}}F_{N-\frac{1}{2}} \approx z_N F_N - z_{N-\frac{1}{2}}F_{N-\frac{1}{2}} = z_N 0.393cu_N - z_{N-\frac{1}{2}}F_{N-\frac{1}{2}} = \gamma_N b_N(u_{p_N} - u_N)$$

Группируем по u:

$$z_{N-\frac{1}{2}}\beta_N u_{N-1} + (h\gamma_N b_N + z_N 0.393ch - z_{N-\frac{1}{2}}\beta_N)u_N = h\gamma_N b_N u_{p_N} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
&A_N u_{N-1} + B_N u_N = D_N \\
&A_N = z_{N-\frac{1}{2}}\beta_N \\
&B_N = h\gamma_N b_N + z_N 0.393ch - z_{N-\frac{1}{2}}\beta_N \\
&C_N = 0 \\
&D_N = h\gamma_N b_N u_{p_N}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Имеем матричное уравнение:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
B_0 & C_0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
A_1 & B_1 & C_1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & A_2 & B_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \vdots & B_{N-2} & C_{N-2} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \vdots & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\
\hline
0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & A_N & B_N \\
\hline
\end{array}
\times
\begin{array}{|c|}
\hline
u_0 \\ \hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline \vdots \\ \hline u_{N-2} \\ \hline u_{N-1} \\ \hline u_N \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
\hline
D_0 \\ \hline D_1 \\ \hline D_2 \\ \hline \vdots \\ \hline D_{N-2} \\ \hline D_{N-1} \\ \hline D_N \\ \hline
\end{array}
$$

Прогоночные коэффициенты:
$\zeta_0 = -\frac{C_0}{B_0}$, $\xi_0 = \frac{D_0}{B_0}$

$\zeta_i = -\frac{C_i}{B_i + A_i\zeta_{i-1}}$, $\xi_i = \frac{D_i - A_i\xi_{i-1}}{B_i + A_i\zeta_{i-1}}$

Обратный счёт: $u_N = \xi_N$, $u_i = \zeta_i u_{i+1} + \xi_i$

"Разболтки"при решении задачи не происходит, поэтому метод релаксации применять не требуется.

Вычислительный алгоритм:

```
1. Задать шаг метода / размер ячейки / N - кол-во узлов ;
2. Вычислить векторы коэффициентов A B C D ;
3. Вычислить прогоночные коэффициенты ;
4. Вычислить значиения функции U обратным ходом ;
5. Вычислить ошибку результата * ;
6. Если ошибка удовлетворительная - 7. Иначе - уменьшить шаг, 1. ;
7. Конец.
```

* Вычислять ошибку можно по разным принципам (уравнения сохранения/баланса), м.б. добавлю позже.

Значения функции $F(z)$ можно получить интегрированием второго диффура задачи, используя найденные значения $u(z)$.

Решения

Решение для варианта 1 совпадает с решением в ЛР2.
Решение для варианта 2:

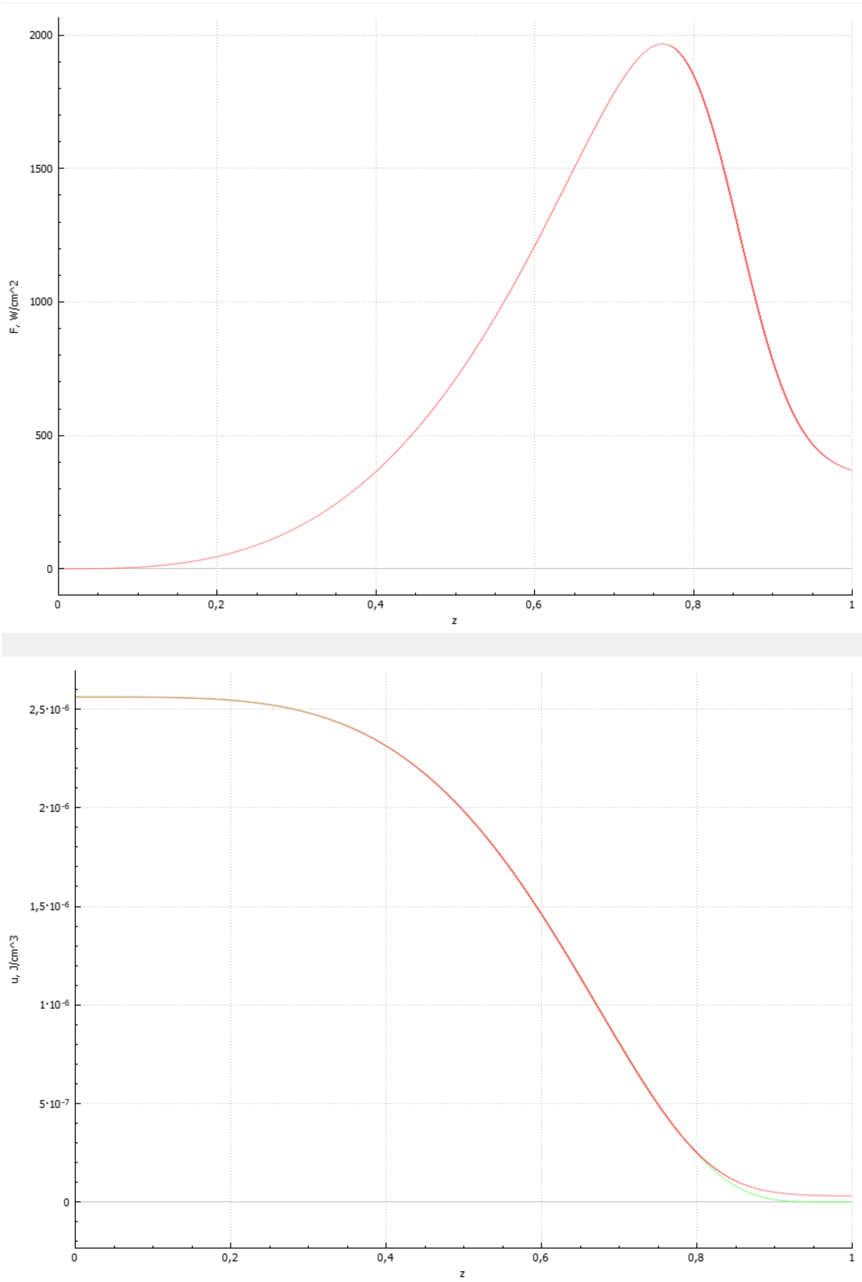

Рис. 2: Вариант 2

*Зелёная кривая - функция Планка ($u_p(z)$).