Introducción al

ÁLGEBRA DE LO LINEAL

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

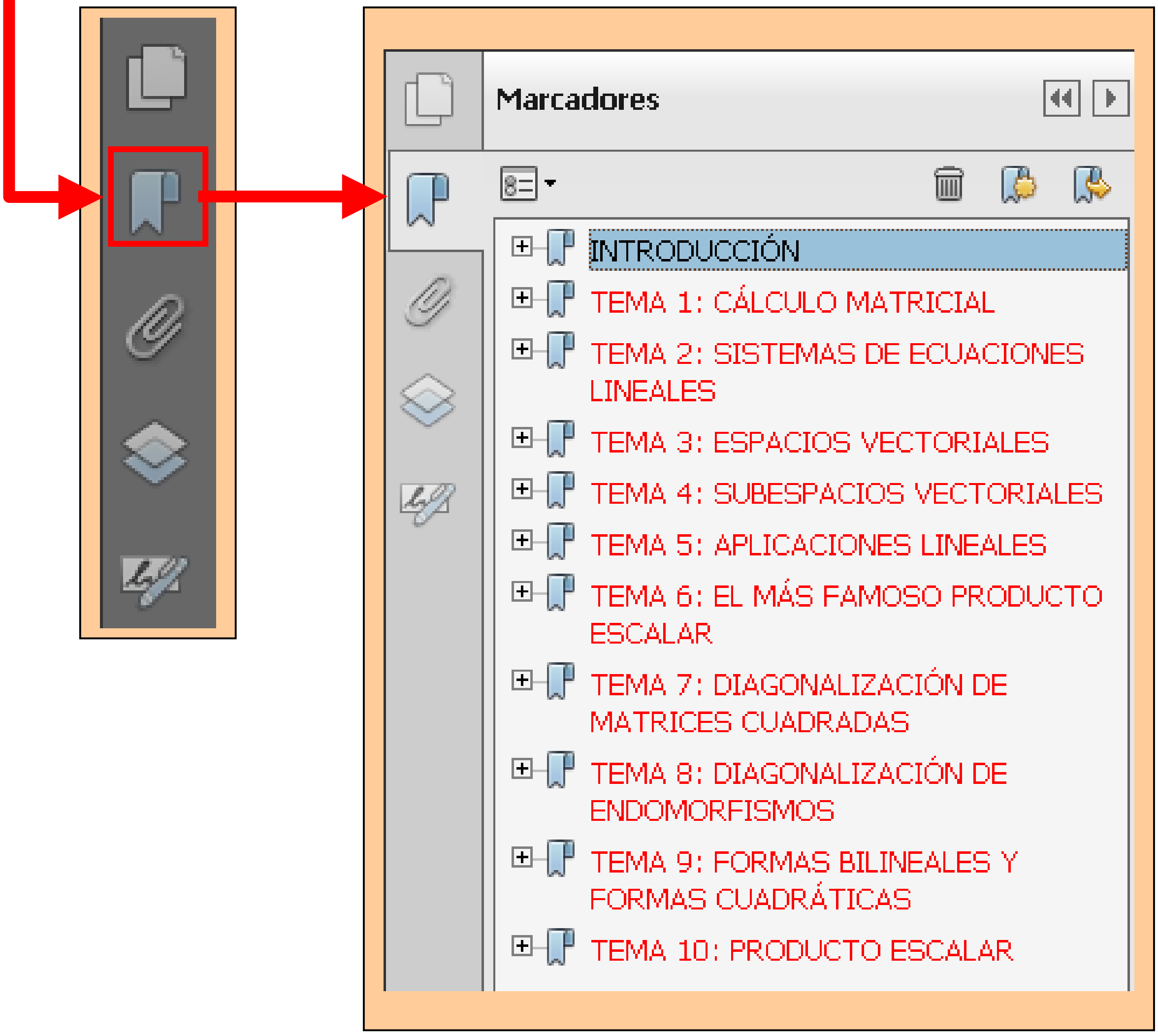
Rafael Cabrejas Hernansanz

fonemato.com

Aquí hay un videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA DE LO LINEAL

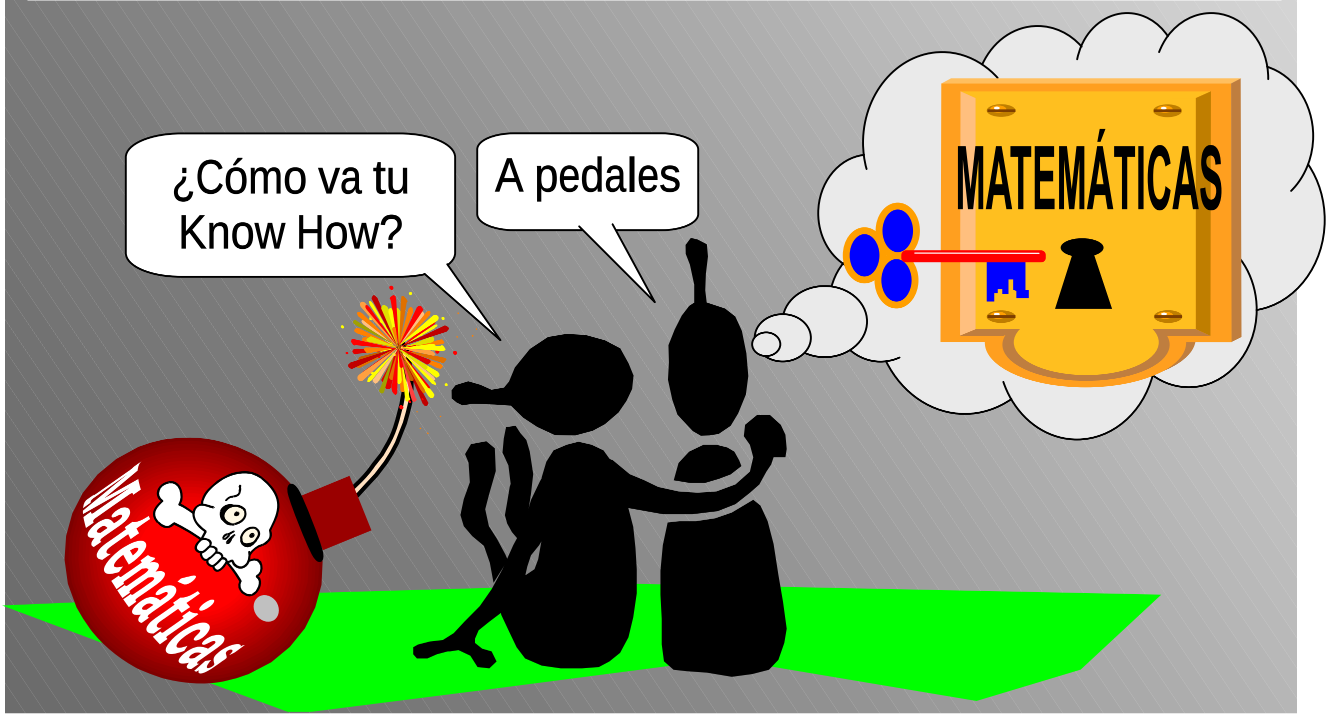
Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



KNOW HOW

La llave que todo lo abre

Lo importante de estas páginas no es el Álgebra Lineal, lo importante tiene que ver con el arte de deslumbrar a tus profesores; o sea, tiene que ver con estar entre los mejores, con espabilar y amueblar la cabeza, con aprender a aprender y a razonar, con la disciplina mental y la tracción a todas las neuronas, con no chuparse el dedo y cazarlas al vuelo, con entropía neuronal nula, con aprender a diferenciarse envolviendo los caramelos con primor... y con todas esas cosas intangibles de las que nadie habla y sin embargo conforman el mágico **KNOW HOW** que posibilita el tránsito rápido y feliz por la Universidad.



INDICE

INTRODUCCIÓN

- El artículo neutro **lo**
- Ojo con la palabra **lineal**
- Las **cajas** llenas de números
- ¿Por qué estudiamos Álgebra de lo Lineal?
- Ordenación de los Temas

TEMA 1
CÁLCULO MATRICIAL

1.01 Recordando la regla de Ruffini
1.02 El cuerpo de los números reales
1.03 Matrices
1.04 Las matrices almacenan información
1.05 Suma de matrices
1.06 Producto de un escalar por una matriz
1.07 Combinación lineal de matrices
1.08 Producto de matrices
1.09 Traspuesta de una matriz
1.10 Matriz simétrica
1.11 Matriz antisimétrica
1.12 Otros tipos de matrices cuadradas
1.13 Transformaciones elementales
1.14 Determinante de una matriz cuadrada
1.15 Adjunta de una matriz cuadrada
1.16 Inversa de una matriz cuadrada
1.17 Matriz ortogonal
1.18 Semejanza y congruencia de matrices cuadradas
1.19 Submatrices y menores de una matriz
1.20 Rango de una matriz

TEMA 2
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2.01 Sistemas de ecuaciones lineales
2.02 ¿Qué es resolver un sistema de ecuaciones?
2.03 Teorema de Rouché-Frobenius
2.04 Sistemas lineales homogéneos
2.05 Regla de Cramer
2.06 Resolución de un caso general
2.07 Resolución de sistemas por sustitución
2.08 Método de Gauss
2.09 El problema inverso
2.10 Combinación lineal de matrices
2.11 Lo que se nos viene encima

TEMA 3
ESPACIOS VECTORIALES

3.01 Espacio vectorial
3.02 Desmitificación de los espacios vectoriales
3.03 Combinación lineal de vectores
3.04 Dependencia e independencia lineal de vectores
3.05 Dimensión de un espacio vectorial
3.06 Sistema de generadores de un espacio vectorial
3.07 Base de un espacio vectorial
3.08 La base canónica
3.09 Coordenadas de un vector respecto de una base
3.10 Ecuación de un cambio de base

TEMA 4
SUBESPACIOS VECTORIALES

4.01 Subespacio vectorial
4.02 Variedad lineal
4.03 Intersección de subespacios
4.04 Suma de subespacios
4.05 Subespacios suplementarios

TEMA 5
APLICACIONES LINEALES

5.01 Correspondencia entre conjuntos
5.02 Aplicación entre conjuntos
5.03 Aplicación lineal
5.04 Expresión de una aplicación lineal
5.05 Núcleo e imagen de una aplicación lineal
5.06 Propiedades de las aplicaciones lineales
5.07 Clasificación de las aplicaciones lineales
5.08 Las aplicaciones lineales y los cambios de base
5.09 Operaciones con aplicaciones lineales
5.10 Composición de aplicaciones lineales

TEMA 6
EL MÁS FAMOSO PRODUCTO ESCALAR

6.01 El más famoso producto escalar de vectores
6.02 Vectores ortogonales
6.03 Subespacios ortogonales
6.04 Base ortogonal
6.05 Ortogonalización de Graam-Schmidt
6.06 Módulo de un vector
6.07 Vectores ortonormales
6.08 Base ortonormal

TEMA 7
DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

7.01 Menores principales de una matriz cuadrada
7.02 El truco del almendruco
7.03 Autovalores y autovectores
7.04 Diagonalización de matrices
7.05 Potencias de una matriz cuadrada
7.06 Teoremas diversos
7.07 Forma canónica de Jordan

TEMA 8
DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS

8.01 Autovalores y autovectores
8.02 Diagonalización de endomorfismos
8.03 Potencias de una matriz cuadrada
8.04 La semejanza de matrices y los endomorfismos
8.05 Teoremas diversos
8.06 Caja de Jordan
8.07 Forma canónica de Jordan

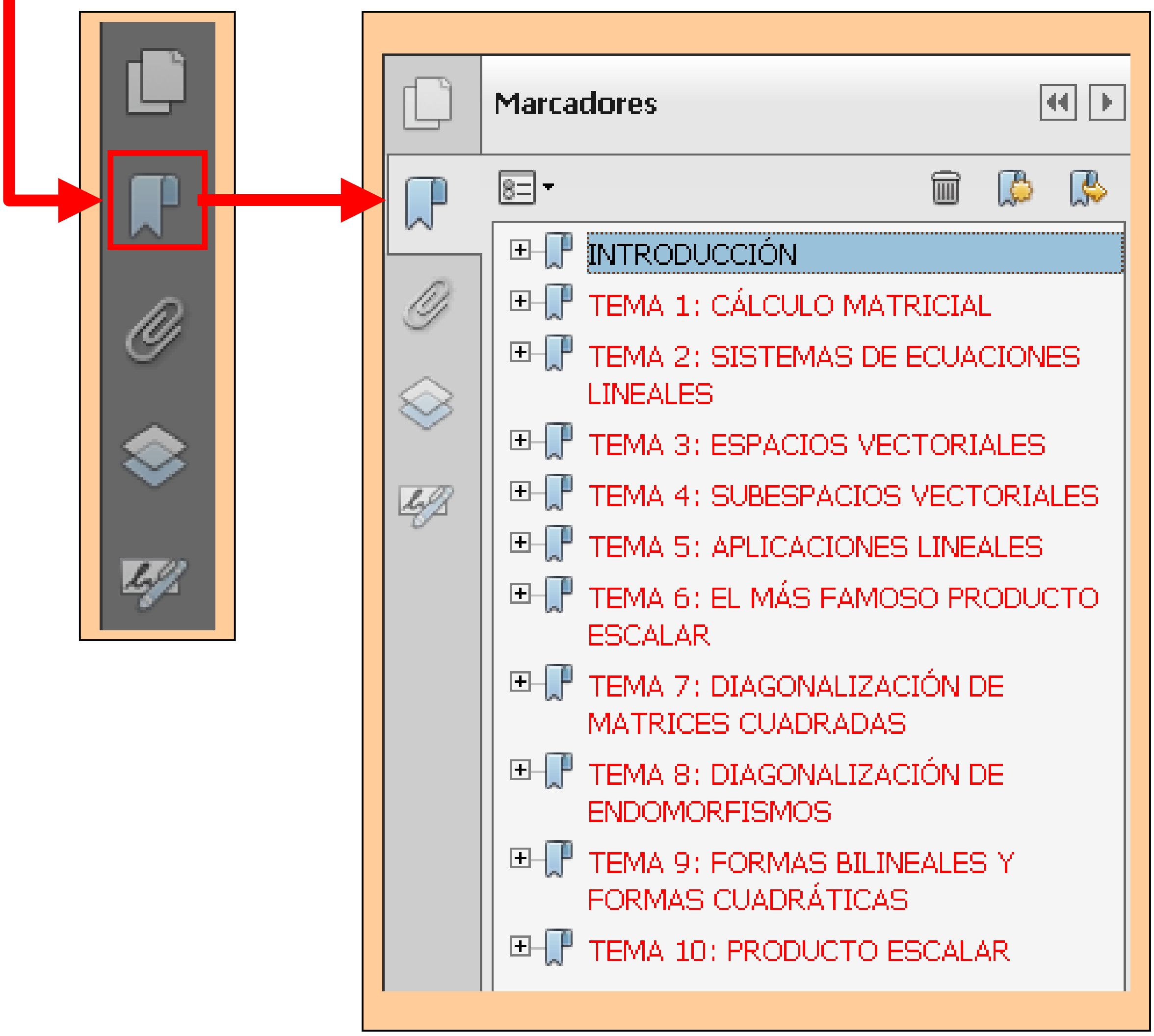
TEMA 9
FORMAS BILINEALES Y FORMAS CUADRÁTICAS

9.01 Forma bilineal
9.02 Expresión de una forma bilineal
9.03 Forma bilineal simétrica
9.04 Forma bilineal antisimétrica
9.05 Operaciones con formas bilineales
9.06 Descomposición de una forma bilineal
9.07 Núcleos de una forma bilineal
9.08 Vectores conjugados
9.09 Subespacios conjugados
9.10 Los cambios de base y las formas bilineales
9.11 Forma cuadrática asociada a una forma bilineal
9.12 Forma cuadrática (sin forma bilineal)
9.13 Los cambios de base y las formas cuadráticas
9.14 Diagonalización de una forma cuadrática
9.15 Diagonalización mediante cambio de base ortonormal
9.16 Diagonalización mediante transformaciones elementales
9.17 Diagonalización de Lagrange
9.18 Diagonalización mediante derivadas parciales
9.19 Rango, índice y signatura de una forma cuadrática
9.20 Clasificación de las formas cuadráticas
9.21 Forma cuadrática restringida a un subespacio

TEMA 10
PRODUCTO ESCALAR

10.01 Producto escalar de vectores
10.02 Espacio vectorial euclídeo
10.03 Módulo de un vector
10.04 Ángulo de dos vectores
10.05 Vectores ortogonales
10.06 Subespacios ortogonales
10.07 Base ortogonal
10.08 Base ortonormal
10.09 Coordenadas contravariantes y covariantes
10.10 Base recíproca

Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



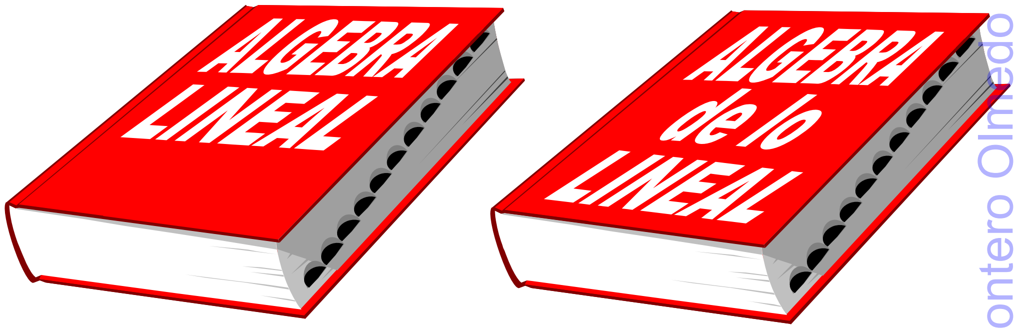
Introducción

- El artículo neutro **lo**
- Ojo con la palabra **lineal**
- Las **cajas** llenas de números
- ¿Por qué estudiamos Álgebra de lo Lineal?
- Ordenación de los Temas

El artículo neutro "lo"

El artículo neutro lo se ha inventado porque es necesario según qué cosa queramos decir. ***Por ejemplo,*** no es lo mismo decir caótico que **lo** caótico... y es claro que la supresión inadecuada del neutro lo puede generar notable confusión, porque, por ejemplo, no es lo mismo decir estudio caótico que decir estudio de lo caótico.

Así las cosas, para que lo sustancial se asimile adecuadamente desde el principio, sería bueno que los profesores de Matemáticas dejáramos de hablar de Álgebra Lineal y habláramos de Álgebra de lo Lineal, pues de inmediato los alumnos nos preguntarían por lo lineal y se sorprenderían de que lo lineal sea tan importante como para dedicarle decenas de horas de estudio.



Ojo con la palabra "lineal"

En el lenguaje coloquial la palabra lineal se usa a veces como sinónimo de constante: cuando se dice que los salarios de una empresa han sufrido una subida lineal de "k" euros, quiere decirse que todos aumentan su salario la misma cantidad "k"; o sea, para todos sucede que:

$$\text{Salario Nuevo} = k + (\text{Salario Viejo})$$

No obstante, si buscas la palabra lineal en el diccionario de la Real Academia, verás que dice:

Lineal: (adjetivo) perteneciente a la línea

El diccionario dedica a la palabra línea casi una página, pero entre el montón de cosas que se dicen sobre línea no hay nada que permita usar la palabra lineal como sinónimo de constante.

¡ESCÚLPELO EN EL CEREBRO!

En Matemáticas, lineal es sinónimo de proporcional.

Por ejemplo, una subida lineal del 25 % en el salario significa que si ganas 120, te suben 30 (pues el 25 % de 120 es 30) y pasas a ganar 150; y si ganas 300, te suben 75 (pues el 25 % de 300 es 75) y pasas a ganar 375; es decir, para todos sucede que:

$$\text{Salario Nuevo} = 1'25 \times (\text{Salario Viejo})$$

O sea, la proporción entre el Salario Nuevo de cada trabajador y su Salario Viejo es 1'25:

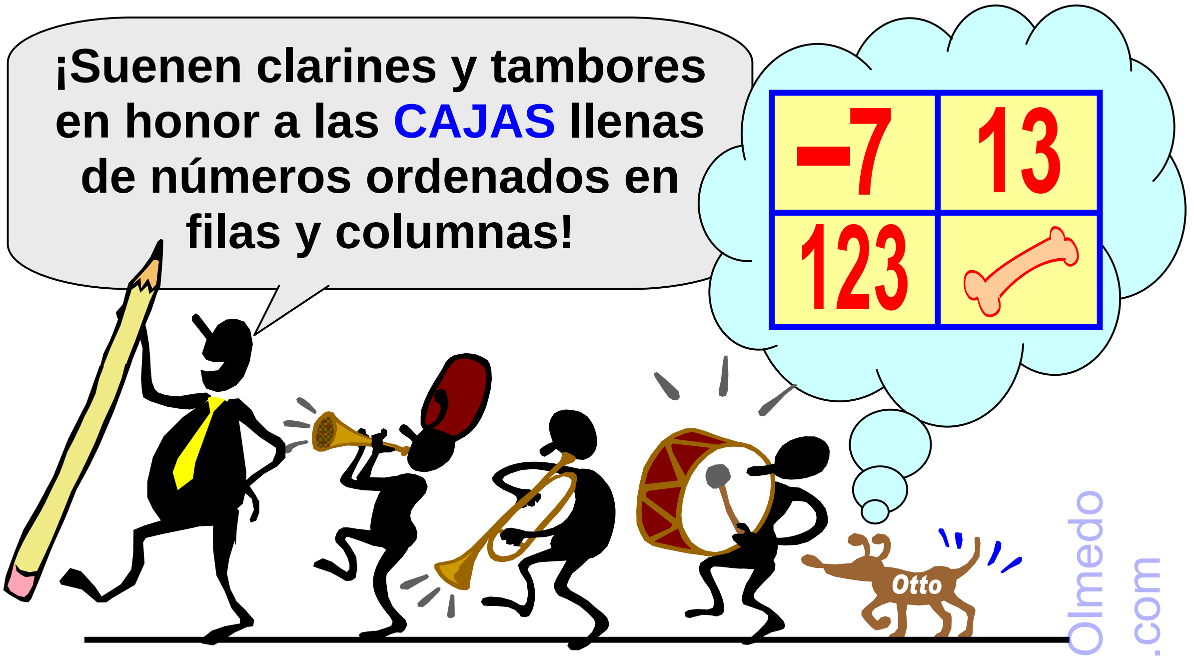
$$\frac{\text{Salario Nuevo}}{\text{Salario Viejo}} = 1'25$$

O al revés: la proporción entre el Salario Viejo de cada trabajador y su Salario Nuevo es 0'8:

$$\frac{\text{Salario Viejo}}{\text{Salario Nuevo}} = \frac{1}{1'25} = 0'8$$

Aunque sea increíble, entre las cosas que dice el diccionario sobre línea, tampoco hay nada que permita usar lineal como sinónimo de proporcional. Sin duda eso se debe a que la aportación del castellano a la construcción del "edificio" de la Matemática ha sido practicamente nula a los largo de los últimos diez siglos... y para que tan penosa situación no dure otros diez siglos, sería bueno que la próxima edición del diccionario pusiera su granito de arena, diciendo que, en Matemáticas, las palabras lineal y proporcional son sinónimas; por tanto, hablar de lo lineal es igual que hablar de lo proporcional.

Las cajas llenas de números



Atent@s: imagina que eres tú quien a final de mes se encarga de pagar a la gente de una empresa que tiene "n" trabajadores cuyos salarios base respectivos son $x_1, x_2, \dots, x_n$, siendo $y_1, y_2, \dots, y_n$ los respectivos complementos salariales.

Para gestionar la información que contienen los "n" números $x_1, x_2, \dots, x_n$ y los "n" números $y_1, y_2, \dots, y_n$, seguro que se te ocurriría ponerlos ordenadamente en sendas cajas "A" y "B":

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \equiv \text{caja de salarios base}$$

$$B = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \equiv \text{caja de complementos salariales}$$

Aunque no tuvieras ni idea de Álgebra de lo Lineal, seguro que te inventarías la operación consistente en sumar cajas, pues eso te permitiría obtener una tercera caja "P" que te diría lo que debes pagar a cada trabajador a final de mes:

$$P = A + B = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & \dots & x_n+y_n \end{bmatrix} \equiv \text{caja de salarios totales}$$

En este contexto, si en la negociación del convenio colectivo se pactan respectivas subidas lineales del 25 % y el 50 % en los salarios base y en los complementos salariales, deberás cambiar las cajas que almacenan la información relativa a esos asuntos: la nueva caja de salarios base será

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1'25.x_1 & 1'25.x_2 & \dots & 1'25.x_n \end{bmatrix}$$

y la nueva caja de complementos salariales será

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1'5.y_1 & 1'5.y_2 & \dots & 1'5.y_n \end{bmatrix}$$

Además, incluso sin saber nada de Álgebra de lo Lineal, **seguro que te inventarías** la **operación** consistente en **multiplicar una caja por un número,** pues dirías que la **caja** A_1 se obtiene multiplicando la **caja** "A" por el número 1'25, y la **caja** B_2 se obtiene multiplicando la **caja** "B" por el número 1'5... y **sin ningún pudor escribirías:**

$$A_1 = 1'25 \bullet A \;\; ; \;\; B_1 = 1'5 \bullet B$$

Incluso dirías que la **caja** A_1 es **proporcional** a la **caja** "A", pues cada elemento de A_1 se obtiene multiplicando por 1'25 su correspondiente elemento de "A"; también dirías que "A" es **proporcional** a A_1, pues cada elemento de "A" se obtiene multiplicando por 0'8 su correspondiente elemento de A_1 .... y lo mismo para las **cajas** "B" y B_1, pero con los números 1'5 y 1/1'5.

Así, llegado fin de mes, podrías obtener la nueva **caja** P_1 de salarios totales

$$P_1 = A_1 + B_1 =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1'25.x_1 & 1'25.x_2 & ..... & 1'25.x_n \end{bmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1'5.y_1 & 1'5.y_2 & ..... & 1'5.y_n \end{bmatrix}}_{B_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1'25.x_1+1'5.y_1 & 1'25.x_2+1'5.y_2 & ..... & 1'25.x_n+1'5.y_n \end{bmatrix} =$$

$$= 1'25 \bullet A + 1'5 \bullet B$$

El Álgebra, para expresar de modo rápido y eficiente que la **información** contenida en la caja P_1 es suma de las respectivas **informaciones** obtenidas al multiplicar la caja "A" por un número (el 1'25) y la caja "B" por otro número (el 1'5), dirá que la caja P_1 es **combinación lineal** de las cajas "A" y "B".

Como escribir $P_1 = A_1 + B_1$ es lo mismo que escribir $P_1 = 1 \bullet A_1 + 1 \bullet B_1$, también diremos que la caja P_1 es **combinación lineal** de las cajas A_1 y A_2, pues la **información** contenida en P_1 es suma de las respectivas **informaciones** obtenidas al multiplicar la caja A_1 por un número (el 1) y la caja B_1 por otro número (el 1). Del mismo modo, para expresar que $P = A + B = 1 \bullet A + 1 \bullet B$, diremos que la caja "P" es **combinación lineal** de las cajas "A" y "B".

¿Por qué estudiamos Álgebra de lo Lineal?

Estudiamos Álgebra de lo Lineal porque la vida está llena de fenómenos lineales que tienen que ver con todas las ramas de la Ciencia y del quehacer humano... nadie puede sustraerse a lo lineal o proporcional.

Por ejemplo: si vas de compras a un hiper, eres protagonista de un fenómeno lineal, pues siendo $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ los precios unitarios (sin impuestos) de los "n" bienes (tomates, pan, etc.) que compras, y $K_1, K_2, \dots, K_n$ las correspondientes cantidades compradas de cada uno de ellos, el valor "V" de tu compra es $V = \gamma_1.K_1 + \gamma_2.K_2 + \dots + \gamma_n.K_n$, que es suma de un número $\gamma_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\gamma_2.K_2$ proporcional a K_2... y de un número $\gamma_n.K_n$ proporcional a K_n.

Del mismo modo, si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ son los respectivos beneficios unitarios que obtiene el hiper por cada unidad que compras, el beneficio total "B" obtenido gracias a tu compra es $B = \delta_1.K_1 + \delta_2.K_2 + \dots + \delta_n.K_n$, que es suma de un número $\delta_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\delta_2.K_2$ proporcional a K_2... y de un número $\delta_n.K_n$ proporcional a K_n.

La cantidad "C" que al hiper le cuesta tu compra es:

$$C = (\gamma_1 - \delta_1).K_1 + (\gamma_2 - \delta_2).K_2 + \dots + (\gamma_n - \delta_n).K_n =$$
$$= \varepsilon_1.K_1 + \varepsilon_2.K_2 + \dots + \varepsilon_n.K_n$$

por comodidad, hacemos $\gamma_1 - \delta_1 = \varepsilon_1, \gamma_2 - \delta_2 = \varepsilon_2, \dots, \gamma_n - \delta_n = \varepsilon_n$

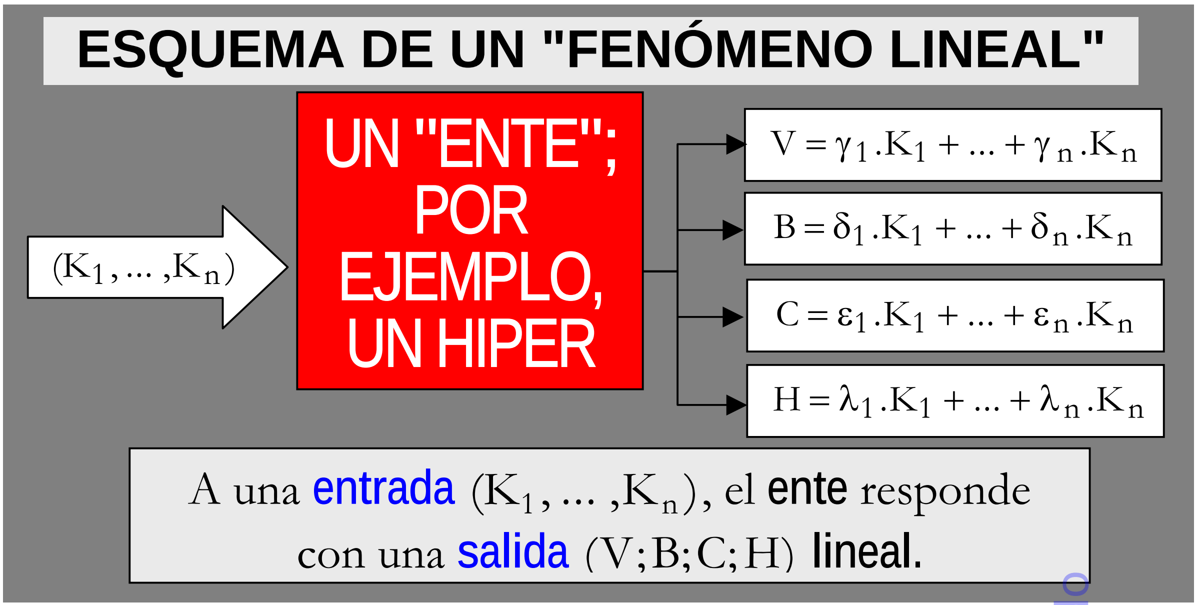
que es suma de un número $\varepsilon_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\varepsilon_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\varepsilon_n.K_n$ proporcional a K_n.

La Hacienda Pública no se queda atrás, pues si $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ son los respectivos tipos de IVA (expresados en "tanto por uno") que soportan los productos que compras, la cantidad "H" que ingresa Hacienda gracias a tu compra:

$$H = \theta_1.\gamma_1.K_1 + \theta_2.\gamma_2.K_2 + \dots + \theta_n.\gamma_n.K_n =$$
$$= \lambda_1.K_1 + \lambda_2.K_2 + \dots + \lambda_n.K_n$$

por comodidad, hacemos $\theta_1.\gamma_1 = \lambda_1, \theta_2.\gamma_2 = \lambda_2, \dots, \theta_n.\gamma_n = \lambda_n$

que es suma de un número $\lambda_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\lambda_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\lambda_n.K_n$ proporcional a K_n.



Como en el hiper no se chupan el dedo, meten en una **caja con diversas filas** toda la información relativa a cantidades compradas, precios unitarios, beneficios unitarios y tipos de IVA, y ello con el fin de gestionar más eficientemente el negocio.

	Artículo	Cantidad comprada	Precio unitario	Beneficio unitario	....	Tipo de IVA
1	Malocotones	K_1	γ_1	δ_1	....	θ_1
2	Servesita	K_2	γ_2	δ_2	....	θ_2
:	::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::
n	Perejil	K_n	γ_n	δ_n	....	θ_n

Así, las cosas, **aunque no se tenga ni idea de Álgebra de lo Lineal, todo el mundo alcanza a entender que:**

- El valor "V" de la compra se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por su correspondiente de la segunda, y sumando después los productos realizados:

$$V = \gamma_1 . K_1 + \dots + \gamma_n . K_n$$

- El beneficio "B" que obtiene el hiper se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por su correspondiente de la tercera, y sumando después los productos realizados:

$$B = \delta_1 . K_1 + \dots + \delta_n . K_n$$

- El ingreso "H" de Hacienda se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por sus correspondientes de las columnas segunda y última, y sumando después los productos realizados:

$$H = \theta_1 . \gamma_1 . K_1 + \dots + \theta_n . \gamma_n . K_n$$

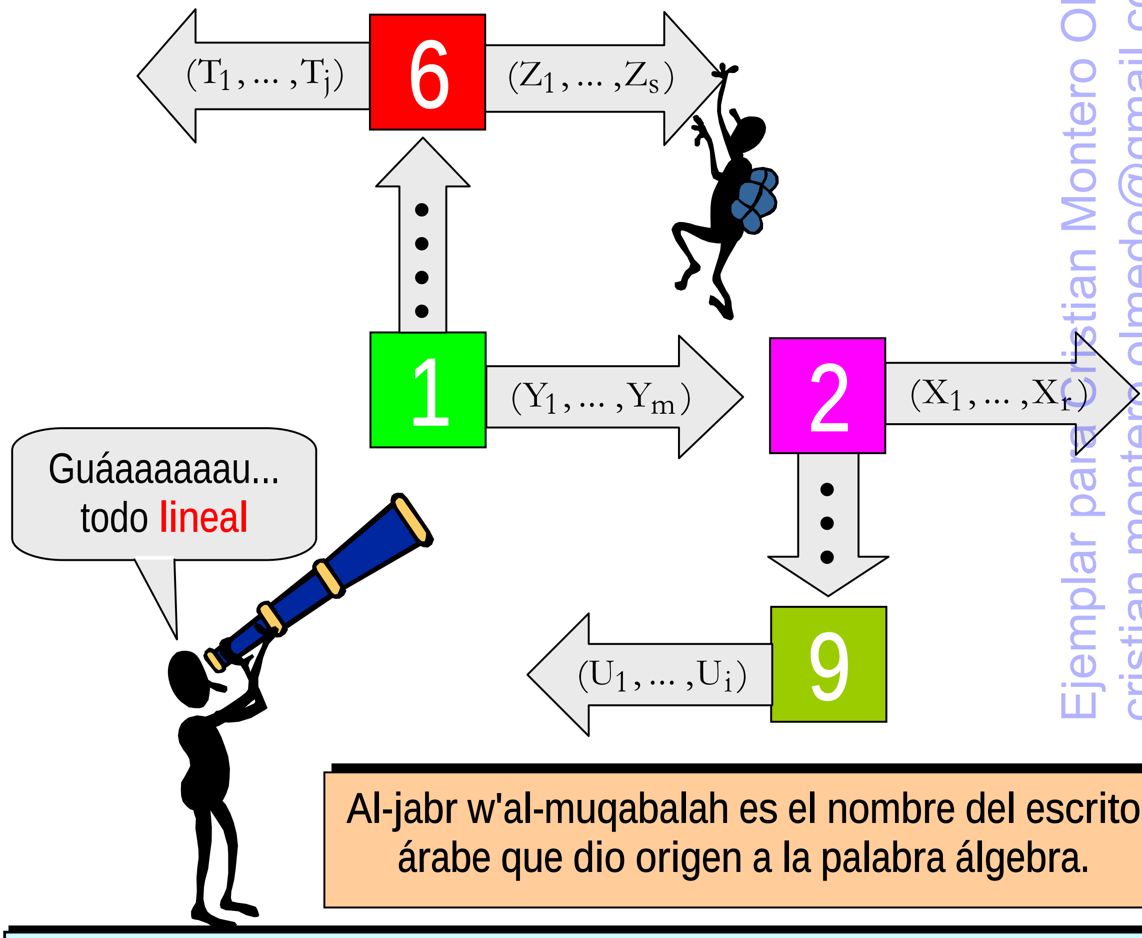
- Multiplicando cada elemento de la 1ª columna por su correspondiente de la columna obtenida al restar la 3ª columna de la 2ª, y sumando después los productos realizados, obtenemos la cantidad "C" que al hiper le cuesta tu compra:

$$C = (\gamma_1 - \delta_1).K_1 + ... + (\gamma_n - \delta_n).K_n$$

Como vemos, a partir de una tabla con números ordenados en filas y columnas puede obtenerse información muy interesante para según qué cosas:

K_1	γ_1	δ_1	....	θ_1
K_2	γ_2	δ_2	....	θ_2
:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::
K_n	γ_n	δ_n	....	θ_n

Además, la realidad es tan compleja que hay en ella cadenas o redes de fenómenos lineales relacionados unos con otros.



Al-jabr w'al-muqabalah es el nombre del escrito árabe que dio origen a la palabra álgebra.

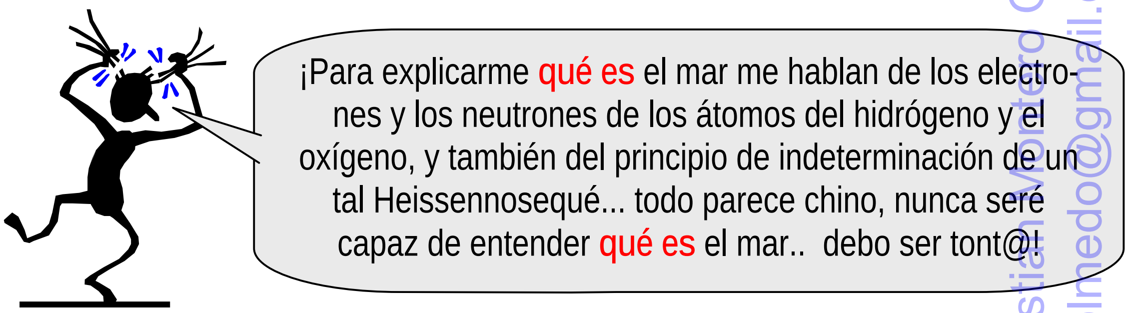
El Álgebra Lineal posibilita la creación de modelos matemáticos que ayudan a comprender y gestionar los fenómenos lineales... y el asunto es tan importante que en tu primer año de Carrera debes lidiar un curso de Álgebra Lineal, donde se amplían los conocimientos adquiridos en el Bachillerato.

Ordenación de los temas

A la hora de explicar Álgebra Lineal, el orden que siguen la práctica totalidad de los libros es el siguiente:

Tema 1: Espacios Vectoriales
Tema 2: Subespacios Vectoriales
Tema 3: Cálculo Matricial
Tema 4: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Al seguir este orden, el Álgebra Lineal se cimenta en el concepto de espacio vectorial, concepto al que se llega tras una singladura en que intervienen un conjunto "Pepe" donde se han definido dos leyes de composición interna y un conjunto "Juan" en el que ha definido una ley de composición interna y una ley de composición externa, y eso de modo que esas leyes satisfagan una batería de 17 propiedades... y presentado así, todo resulta muy espeso y abstracto para muchos principiantes, que ven montañas donde sólo hay granos de arena.



Estudiaremos en el siguiente orden:

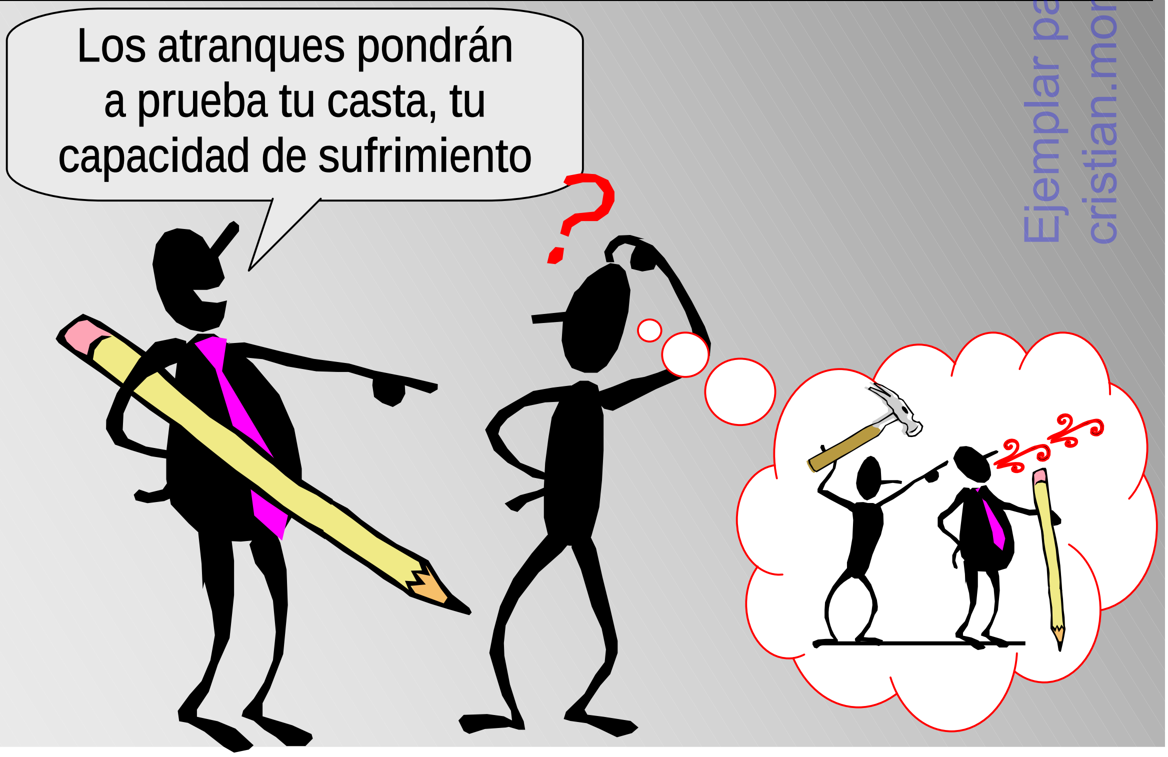
Tema 1: Cálculo Matricial
Tema 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales
Tema 3: Espacios Vectoriales
Tema 4: Subespacios Vectoriales

Así cimentaremos el Álgebra de lo Lineal en los conceptos de fila y columna que todos asimilamos en la infancia temprana. Apoyándonos en estos conceptos elementales es muy fácil entender el concepto de matriz (caja llena de números ordenados en filas y columnas), y también es muy fácil APRENDER A TRABAJAR CON MATRICES: suma de matrices, multiplicación de una matriz por un número, multiplicación de matrices, cálculo del determinante de una matriz cuadrada, cálculo del rango de una matriz, etc.

Cuando sepas trabajar con matrices, sólo necesitarás un rato para aprender a resolver sistemas de ecuaciones lineales, asunto que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices... y el que es artista con los sistemas de ecuaciones lineales se parte de risa cuando ha de lidiar con los espacios vectoriales y el resto del Álgebra Lineal, pues la lidia se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales.

SABER ESTUDIAR

Estudia sin prisas, leyendo despacio y pensando en lo que lees: tras leer cada palabra o cada símbolo matemático, invierte un nanosegundo en comprobar si tu cerebro es capaz de llenarlo de contenido pleno. En caso afirmativo pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso... pero, en caso de atranque, para el reloj y lucha a muerte hasta desatrancarte: invierte el tiempo que sea menester (2 minutos, 2 horas, 2 semanas, 2 meses) en recopilar la información que te permita desatrancarte... y después pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso.



Tema 1
Cálculo matricial

1.01 Recordando la regla de Ruffini
1.02 El cuerpo de los números reales
1.03 Matrices
1.04 Las matrices almacenan información
1.05 Suma de matrices
1.06 Producto de un escalar por una matriz
1.07 Combinación lineal de matrices
1.08 Producto de matrices
1.09 Traspuesta de una matriz
1.10 Matriz simétrica
1.11 Matriz antisimétrica
1.12 Otros tipos de matrices cuadradas
1.13 Transformaciones elementales
1.14 Determinante de una matriz cuadrada
1.15 Adjunta de una matriz cuadrada
1.16 Inversa de una matriz cuadrada
1.17 Matriz ortogonal
1.18 Semejanza y congruencia de matrices cuadradas
1.19 Submatrices y menores de una matriz
1.20 Rango de una matriz

1.1 RECORDANDO LA REGLA DE RUFFINI

LA PREGUNTA DEL MILLÓN

Todo el mundo es capaz de explicar qué es una casa sin emplear jerga de arquitecto; sin embargo, las neuronas de muchos estudiantes se congelan al preguntarles por lo que dirían a su anciana abuelita si tuvieran que explicarle qué es una ecuación, advirtiéndoles que en su respuesta no deben emplear jerga matemática, pues de lo contrario la abuelita no entenderá un pimiento.

No entiendes realmente algo si no eres capaz de explicárselo a tu abuel@.

Einstein

Regla infalible para medir tu solvencia con algo

Dicho congelamiento es síntoma de notable candidez matemática, pues evidencia que a pesar de llevar muchos años trabajando con ecuaciones, estos estudiantes no han aprehendido lo esencial; y ya se sabe: si la esencia no se comprende es imposible comprender los detalles... ¿quién podría comprender realmente qué es una ventana sin antes comprender qué es una casa o habitáculo?

Una ecuación es la expresión matemática de una condición de igualdad.

Hay condiciones que son difícilmente expresables en términos matemáticos; como la condición que impone la ratoncita al ratoncito cuando éste le pregunta:

¿Te quieres casar conmigo?

y ella contesta:

Me casaré contigo si te embelesa el aroma de los narcisos en las noches de plenilunio

Pero a veces la historia es menos poética y la condición puede expresarse en términos matemáticos, como cuando la ratoncita contesta:

Me casaré contigo si al sumar seis al cuadrado de tu peso resulta el quíntuplo del mismo

En este caso, rápidamente, el ratoncito pone nombre a su peso (por ejemplo, lo llama "x")... y al traducir a lenguaje matemático la condición impuesta por su amada, obtiene una hermosa ecuación:

$$6 + x^2 = 5.x$$

Si, por comodidad, queremos que el número 0 aparezca en el segundo miembro de la ecuación, escribimos $x^2 - 5.x + 6 = 0$. Además, también por comodidad, denotando "$f(x)$" al pedrusco $x^2 - 5.x + 6$ que queda en el primer miembro, puede escribirse $f(x) = 0$.

> Cuando te encuentres con una ecuación f(x) = 0, tu trabajo consistirá en resolverla; o sea, deberás determinar, si existen, los valores de "x" que la satisfacen. De esos valores de "x" se dice que son las soluciones o raíces de la ecuación.

Por ejemplo, el número 4 no es solución de la ecuación $x^2 - 5.x + 6 = 0$, pues $4^2 - 5.4 + 6 = 2 \neq 0$; el número 7 tampoco es solución, pues $7^2 - 5.7 + 6 = 13 \neq 0$. Sin embargo, el número 2 es solución de la ecuación, pues $2^2 - 5.2 + 6 = 0$.

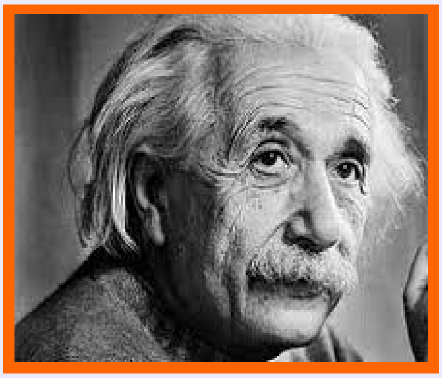
Observa: la condición impuesta por la ratita se refiere a una única característica de los ratones (el peso), pero podría referirse a varias características; así sucedería si la ratita dijera:

Me casaré contigo si el producto de tu peso por tu altura coincide con tu edad

En tal caso, denotando "x" el peso, "z" la altura y "u" la edad, al traducir a lenguaje matemático esta nueva condición, obtenemos otra ecuación:

$$x.z = u$$

Naturalmente, escribimos $x.z - u = 0$ para que el número cero aparezca en el segundo miembro. Además, denotando $f(x;z;u)$ al pedrusco $x.z - u$ que queda en el primer miembro de la ecuación, puede escribirse $f(x;z;u) = 0$.



Si mi teoría de la relatividad es exacta, los alemanes dirán que soy alemán y los franceses que soy ciudadano del mundo. Pero si no, los franceses dirán que soy alemán y los alemanes dirán que soy judío.
Albert Einstein

REGLA DE RUFFINI
VERY IMPORTANT

Muchísimas veces te verás ante el problema de resolver una ecuación $f(x)=0$, siendo $f(x)$ un **polinomio;** o sea, deberás determinar los valores de "x" que cumplen la condición $f(x)=0$. De esos valores de "x" se dice que son las **soluciones o raíces** de la ecuación $f(x)=0$.

1) **Si el polinomio es de grado 1** (o sea, $f(x)=a.x+b$, donde "a" y "b" son constantes, y $a \neq 0$), la ecuación $f(x)=0$ tiene solución única, y su cálculo es asunto fácil: $a.x+b=0 \Rightarrow a.x=-b \Rightarrow x=-b/a$.

2) **Si el polinomio es de grado 2,** o sea, $f(x)=a.x^2+b.x+c$, donde "a", "b" y "c" son constantes y $a \neq 0$, la ecuación $f(x)=0$ tiene 2 soluciones, y las calcularemos usando la "formulita" hiperfamosa que todos conocemos:

$$a.x^2+b.x+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

Ejemplo: $2.x^2-5.x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4.2.3}}{2.2}=\dfrac{5 \pm 1}{4}=\begin{cases} 3/2 \\ 1 \end{cases}$

- **Si el coeficiente de "x"** (o sea, "b") **es un número par** (por ejemplo, $b=2.k$), puedes usar otra **formulita más cómoda:**

$$a.x^2+2.k.x+c=0 \Rightarrow x=\frac{-(2.k) \pm \sqrt{(2.k)^2-4.a.c}}{2.a}=\frac{-k \pm \sqrt{k^2-a.c}}{a}$$

Ejemplo: $1.x^2+6.x+5=0 \Rightarrow x=\dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2-1.5}}{1}=-3 \pm 2=\begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$

El coeficiente de "x" es par $\Rightarrow$ "formulita" cómoda ($2.k=6 \Rightarrow k=3$)

Ejemplo:

$$1.x^2-4.x+13=0 \Rightarrow x=\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-1.13}}{1}=2 \pm \sqrt{-9}=2 \pm \sqrt{(-1).9}=$$

El coeficiente de "x" es par $\Rightarrow$ formulita cómoda ($2.k=-4 \Rightarrow k=-2$)

$$=2 \pm \sqrt{-1}.\sqrt{9}=2 \pm 3.\sqrt{-1}=2 \pm 3.i$$

$\sqrt{-1}$ no es "real", se llama "unidad imaginaria" y se denota "i"

- **Si el término independiente "c" de la ecuación es 0** no necesitamos formulitas, y podemos apostar la vida a que una de las soluciones es $x=0$:

$$a.x^2+b.x=0 \Rightarrow x.(a.x+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ a.x+b=0 \Rightarrow x=-b/a \end{cases}$$

Para que el producto de dos números sea 0 basta que alguno sea 0

3) En general, si $f(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 3$, el cálculo de las "n" soluciones de la ecuación $f(x)=0$ es un petardo, pues no hay ninguna "formulita" que nos ayude. No obstante, **en todos los casos que encontremos** (normalmente será $n=3$ ó $n=4$), **el polinomio f(x) estará preparado para que las soluciones sean números enteros**... y **Ruffini** nos permitirá determinarlas.

FONEMATO 1.1.1 (TODAS LAS RAÍCES ENTERAS)

Resuelva la ecuación $f(x)=0$, siendo $f(x)=2.x^5-10.x^3+8.x$.

SOLUCIÓN

Debemos determinar los valores de "x" que satisfacen la ecuación o condición $f(x)=0$. Como $f(x)$ es un polinomio de grado 5, la ecuación $f(x)=0$ tiene 5 soluciones, pudiendo estar **repetida** alguna de ellas.

¡Qué suerte!: como el término independiente de la ecuación es 0, podemos garantizar que $x=0$ es una de las soluciones:

$$2.x^5-10.x^3+8.x=0 \Rightarrow x.(2.x^4-10.x^2+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2.x^4-10.x^2+8=0 \end{cases}$$

Ahora debemos resolver la ecuación $2.x^4-10.x^2+8=0$, y de nuevo tenemos la suerte de cara, pues como la suma $(2-10+8)$ de los coeficientes de la ecuación es 0, podemos apostar tranquilamente la vida a que x = 1 es una de sus soluciones; es decir, podemos garantizar que el polinomio de grado cuatro $g(x)=2.x^4-10.x^2+8$ es divisible por $x-1$. La Regla de Ruffini nos permite calcular los coeficientes del polinomio h(x) que se obtiene como cociente de dicha división:

coeficientes de g(x)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -10 & 0 & 8 \\ x=1 & & 2 & 2 & -8 & -8 \\ \hline & 2 & 2 & -8 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

Coeficientes de $h(x)=g(x)/(x-1)$ Resto

Así, es $h(x)=g(x)/(x-1)=2.x^3+2.x^2-8.x-8$; o sea:

$$g(x)=(x-1).h(x)=(x-1).(2.x^3+2.x^2-8.x-8)$$

En consecuencia:

$$g(x)=0 \Rightarrow (x-1).(2.x^3+2.x^2-8.x-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 2.x^3+2.x^2-8.x-8=0 \end{cases}$$

Ahora debemos resolver la ecuación $h(x)=2.x^3+2.x^2-8.x-8=0$; y como la suma $2+2-8-8$ de los coeficientes de ésta no es 0, podemos apostar la vida a que $x=1$ no es una de sus soluciones. No obstante, si la ecuación tiene raíces enteras, deben ser divisores del término independiente -8, que son los números $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8$ y -8.

Por tanto, debemos armarnos de paciencia e ir probando con todos (excepto el 1, que no es solución de $h(x)=2.x^3+2.x^2-8.x-8=0$), rezando para que haya suerte y alguno de ellos sea solución. Es $h(2)=2.2^3+2.2^2-8.2-8=0$, lo que garantiza que $x=2$ es solución de $h(x)=2.x^3+2.x^2-8.x-8=0$ y que el polinomio $h(x) = 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8$ es divisible por $x - 2$; la Regla de Ruffini nos permitirá calcular los coeficientes del polinomio t(x) que se obtiene como cociente de dicha división:

coeficientes de h(x)

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 2 & -8 & -8 \\
x = 2 & & 4 & 12 & 8 \\
\hline
 & 2 & 6 & 4 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Coeficientes de t(x) = h(x)/(x − 2) Resto

Por tanto, es $t(x) = h(x)/(x-2) = 2.x^2 + 6.x + 4$; o sea:

$$h(x) = (x-2).t(x) = (x-2).(2.x^2 + 6.x + 4)$$

En consecuencia:

$$h(x) = 0 \Rightarrow (x-2).(2.x^2 + 6.x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2.x^2 + 6.x + 4 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de $2.x^2 + 6.x + 4 = 0$ son $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 2.4}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Por tanto, las cinco soluciones de la ecuación $2.x^5 - 10.x^3 + 8.x = 0$ son:

$$x = 0 \; ; \; x = 1 \; ; \; x = 2 \; ; \; x = -1 \; ; \; x = -2$$

El que así sean las cosas nos permite escribir la **descomposición factorial** del polinomio $f(x) = 2.x^5 - 10.x^3 + 8.x$:

$$f(x) = 2.x^5 - 10.x^3 + 8.x = \mathbf{2}.(x-0).(x-1).(x-2).(x+1).(x+2)$$

El "2" es el coeficiente del término de mayor grado de f(x)

RAÍCES MÚLTIPLES

Si el polinomio f(x) es tal que $f(x) = (x - a)^k.p(x)$, siendo el polinomio p(x) tal que $p(a) \neq 0$, de "a" se dice **raíz múltiple de orden "k"** de la ecuación $f(x) = 0$.

Por ejemplo:

$$f(x) = x^6 - 4.x^4 = 0 \Rightarrow x^4.(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (cuádruple)} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Por tanto, las 6 raíces de la ecuación $x^6 - 4.x^4 = 0$ son:

$$x = 0 \text{ (cuádruple)} \; ; \; x = 2 \text{ (simple)} \; ; \; x = -2 \text{ (simple)}$$

FONEMATO 1.1.2 (TODAS LAS RAÍCES FRACCIONARIAS)

Resuelva la ecuación $f(x)=0$, siendo $f(x)=12.x^3-4.x^2-3.x+1$.

SOLUCIÓN

La ecuación $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$ carece de raíces enteras, pues ninguno de los divisores del término independiente "1" es solución.

> Si la ecuación admite raíces fraccionarias de la forma "m/n" (siendo "m" y "n" números enteros y "n" distinto de 0 y de 1), entonces "m" es divisor del término independiente (el número 1 en nuestro caso) y "n" es divisor del coeficiente del término de mayor grado (el número 12 en nuestro caso).

Por tanto, las únicas raíces fraccionarias que puede tener la ecuación dada son:

$$\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{6};-\frac{1}{6};\frac{1}{12};-\frac{1}{12}$$

Ahora hay que armarse de paciencia e ir probando a ver si hay suerte y alguna es solución de $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$... y tenemos suerte, pues $x=1/2$ es solución, ya que $12.\,(1/2)^3-4.(1/2)^2-3.(1/2)+1=0$. Con Ruffini obtenemos:

$$\frac{12.x^3-4.x^2-3.x+1}{x-(1/2)}=12.x^2+2.x-2$$

Las soluciones de $12.x^2+2.x-2=0$ son $x=1/3$ y $x=-1/2$; así, la descomposición factorial del polinomio $12.x^3-4.x^2-3.x+1$ es:

$$12.x^3-4.x^2-3.x+1=12.\left(x-\frac{1}{2}\right).\left(x-\frac{1}{3}\right).\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Paolo Ruffini, matemático y médico italiano. Nacido en Valentano, ciudad que pertenecía entonces a los Estados Pontificios, cursó estudios de medicina en la Universidad de Módena, pero una vez finalizados se dedicó casi por entero a la investigación matemática.

Desde 1787 ejerció la docencia como profesor de matemáticas en la Universidad de Módena. Ganó la cátedra de análisis de la escuela militar de esta ciudad, que hubo de abandonar en 1798 al ser expulsado por negarse a pronunciar el juramento de fidelidad a la República Cisalpina creada por Napoleón Bonaparte. Fue restituido en su puesto por las tropas austriacas un año más tarde. Tras recuperar sus dominios, el duque de Módena le nombró rector de la Universidad de Módena (1814), en la que ocupó las cátedras de clínica médica, medicina práctica y matemáticas aplicadas.

Paolo Ruffini es conocido como el descubridor del llamado método de Ruffini que permite hallar los coeficientes del polinomio que resulta de la división de un polinomio cualquiera por el binomio x–a. Sin embargo, no fue ésta su mayor contribución al desarrollo de la matemática. Hacia 1805 elaboró una demostración de la imposibilidad de la solución general de las ecuaciones algebraicas de grados quinto y superiores, aunque cometió ciertas inexactitudes que serían corregidas por el matemático noruego Niels Henrik Abel.

FONEMATO 1.1.3 (RAÍCES COMPLEJAS)

Resuelva la ecuación $x^6 + 64 = 0$.

SOLUCIÓN

Ninguna de las 6 raíces de la ecuación es real: $x^6 + 64 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-64} \notin \Re$

Para calcular $\sqrt[6]{-64}$ consideramos al número -64 como miembro del conjunto de los **números complejos** (de la forma $a + b.i$, siendo $i = \sqrt{-1}$); así, -64 es el número complejo $-64 + 0.i$, cuyo **módulo** es 64 (el módulo de $a + b.i$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$) y cuyo **argumento** es π (el argumento de $a + b.i$ es $\text{arc tg}\ \frac{b}{a}$).

> Un **número complejo** no nulo con módulo "r" y argumento "θ" tiene "n" raíces n-ésimas distintas; el módulo de todas ellas es la raíz n-ésima de "r", y sus respectivos argumentos son:
>
> $$\frac{\theta}{n}\ ;\ \frac{\theta}{n} + 2.\frac{\pi}{n}\ ;\ \frac{\theta}{n} + 4.\frac{\pi}{n}\ ;\ \frac{\theta}{n} + 6.\frac{\pi}{n}\ ;\ ....\ ;\ \frac{\theta}{n} + 2(n-1).\frac{\pi}{n}$$

En nuestro caso es $n = 6$; por tanto, el número -64 (para el que $r = 64$ y $\theta = \pi$) tiene 6 raíces sextas distintas, todas con módulo la raíz sexta de 64 (o sea, 2), y cuyos respectivos argumentos son:

$$\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 2.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 4.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 6.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 8.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 10.\frac{\pi}{6}$$

O sea, los argumentos son:

$$\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{5.\pi}{6}\ ;\ \frac{7.\pi}{6}\ ;\ \frac{3.\pi}{2}\ ;\ \frac{11.\pi}{6}$$

Así, teniendo en cuenta que los números complejos $a + b.i$ y $a - b.i$ se dicen **conjugados** y que si un número complejo "x" tiene módulo "r" y argumento "θ" es $x = r.(\cos\theta + i.\text{sen}\ \theta)$, las 6 raíces sextas de -64 (o sea, las 6 soluciones de la ecuación $x^6 + 64 = 0$) son los siguientes tres pares de complejos conjugados:

$$x = 2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right) = 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i\right) = \sqrt{3} + i$$

$$x = 2.\left(\cos\frac{\pi}{2} + i.\text{sen}\ \frac{\pi}{2}\right) = 2.(0 + 1.i) = 0 + 2.i = 2.i$$

$$x = 2.\left(\cos\frac{5.\pi}{6} + i.\text{sen}\ \frac{5.\pi}{6}\right) = 2.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$x = 2.\left(\cos\frac{7.\pi}{6} + i.\text{sen}\ \frac{7.\pi}{6}\right) = 2.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.i\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$x = 2.\left(\cos\frac{3.\pi}{2} + i.\text{sen}\ \frac{3.\pi}{2}\right) = 2.(0 - 1.i) = 0 - 2.i = -2.i$$

$$x = 2.\left(\cos\frac{11.\pi}{6} + i.\text{sen}\ \frac{11.\pi}{6}\right) = 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.i\right) = \sqrt{3} - i$$

conjugados

conjugados

conjugados

1.2 EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto $\Re$ de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales (tienen un número finito de cifras decimales o son periódicos) y del conjunto de los números irracionales (tienen infinitos decimales y no son periódicos, como los números que se denotan $\sqrt{2}$ y π).

Considera que en el conjunto $\Re$ definimos la suma "+" y el producto "." de números reales que conocemos desde la infancia; así, se dice que estas dos operaciones **confieren** al conjunto $\Re$ la **estructura** de **cuerpo** para expresar de modo rápido y eficiente que dichas operaciones satisfacen las siguientes propiedades:

1) La suma es **conmutativa:** $\forall \alpha, \beta \in \Re$ sucede que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

2) La suma es **asociativa:** $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Re$ sucede que $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

3) La suma admite **elemento neutro**, que es el número real que llamamos **cero** y denotamos "0"; o sea: $\forall \alpha \in \Re$ sucede que $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

4) Cada número real tiene **simétrico** respecto de la suma:
$$\forall \alpha \in \Re, \exists \lambda \in \Re \text{ tal que } \alpha + \lambda = \lambda + \alpha = 0$$
Por ejemplo, el simétrico de "7" es "−7", y el simétrico de "−3" es "3".

5) El producto es **distributivo** respecto de la suma:
$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Re \text{ sucede que } \begin{cases} \alpha.(\beta + \gamma) = (\alpha.\beta) + (\alpha.\gamma) \\ (\beta + \gamma).\alpha = (\beta.\alpha) + (\gamma.\alpha) \end{cases}$$

6) El producto es **asociativo:** $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Re$ sucede que $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$

7) El producto admite **elemento neutro** en el conjunto $\Re - \{0\}$ que forman los números reales distintos de cero; dicho elemento neutro es el número **uno**:
$$\forall \alpha \in \Re - \{0\} \text{ sucede que } \alpha.1 = 1.\alpha = \alpha$$

8) Cada elemento del conjunto $\Re - \{0\}$ tiene **simétrico** respecto del producto:
$$\forall \alpha \in \Re - \{0\}, \exists \varepsilon \in \Re - \{0\} \text{ tal que } \alpha.\varepsilon = \varepsilon.\alpha = 1.$$
Por ejemplo, el simétrico de "7" es "1/7", y el simétrico de "1/8" es "8".

Observa: el número "0" carece de simétrico respecto al producto, pues el cociente "1/0" carece de sentido, ya que está prohibido dividir por "0".

Se dice que el cuerpo de los números reales es **conmutativo** para indicar que el producto de números reales es conmutativo: $\forall \alpha, \beta \in \Re$ es $\alpha.\beta = \beta.\alpha$

TOMA BUENA NOTA

A los elementos de un cuerpo conmutativo se les llama escalares; por eso, es habitual decir que un número real es un escalar.

Como en su momento los conjuntos que se denotan $\Re^2$, $\Re^3$, $\Re^4$ ... $\Re^n$ tendrán protagonismo megaestelar, a continuación se los presentamos al lector.

- El conjunto $\Re^2$ es el producto cartesiano de $\Re$ por si mismo 2 veces:

$$\Re^2 = \Re \times \Re = \{(x_1;x_2) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall\ i = 1,2\}$$

Cada elemento del conjunto $\Re^2$ es un par ordenado de números reales.

- El conjunto $\Re^3$ es el producto cartesiano de $\Re$ por si mismo 3 veces:

$$\Re^3 = \Re \times \Re \times \Re = \{(x_1;x_2;x_3) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall\ i = 1,2,3\}$$

Cada elemento del conjunto $\Re^3$ es una terna ordenada de números reales.

- El conjunto $\Re^4$ es el producto cartesiano de $\Re$ por si mismo 4 veces:

$$\Re^4 = \Re \times \Re \times \Re \times \Re = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall\ i = 1,2,3,4\}$$

Cada elemento del conjunto $\Re^4$ es un cuarteto ordenado de números reales.

- El conjunto $\Re^n$ es el producto cartesiano de $\Re$ por si mismo "n" veces:

$$\Re^n = \underbrace{\Re \times \Re \times \Re \times .... \times \Re}_{\text{"n" veces}} = \{(x_1;x_2; .... ;x_n) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall i = 1,2, ... ,n\}$$

De cada elemento $(x_1;x_2; .... ;x_n)$ del conjunto $\Re^n$ se dice n-upla.

- Hay quien gusta de la verticalidad y escribe apilados los "n" números reales que forman cada elemento del conjunto $\Re^n$; o sea, escribe:

$$\Re^n = \underbrace{\Re \times \Re \times \Re \times .... \times \Re}_{\text{"n" veces}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,/\, x_i \in \Re,\ \forall i = 1,2, ... ,n \right\}$$

pero nosotros no lo haremos, porque ocupa mucho espacio y es poco práctico.

- Llamamos **matriz de orden $m\times n$** a toda disposición rectangular de $m \times n$ números reales ordenados en "m" filas y "n" columnas. El conjunto formado por todas las matrices de orden $m \times n$ se denota $M_{m\times n}$.
  Por ejemplo, al escribir $M_{4\times 5}$ nos referimos al conjunto formado por todas las matrices de 4 filas y 5 columnas.

- Las matrices suelen nombrarse con letras mayúsculas; si

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3} \; ; \; C=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}$$

  la matriz "B" es de orden 2×3 (¡ojo!, de orden 2×3, no de orden 6), y "C" es de orden 3×3 (¡ojo!, de orden 3×3, no de orden 9).

- Para identificar los elementos que forman una matriz "A" usaremos subíndices; en concreto, al hablar del elemento a_{ij} de "A", nos referimos al elemento de "A" que está en la i-ésima fila y en la j-ésima columna.... y escribiremos $A=\{a_{ij}\}$ para referirnos genéricamente a los elementos de una matriz "A".

  Por ejemplo, si

$$A=\{a_{ij}\}=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 10 & 0 & \pi \end{bmatrix} \in M_{4\times 3}$$

  es:

$$a_{11}=4 \; ; a_{12}=7 \; ; a_{13}=8 \; ; a_{21}=9 \; ; a_{22}=5 \; ; a_{23}=6$$
$$a_{31}=1 \; ; a_{32}=3 \; ; a_{33}=2 \; ; a_{41}=10 \; ; a_{42}=0 \; ; a_{43}=\pi$$

- Una matriz se dice **cuadrada de orden "n"** si tiene "n" filas y "n" columnas. En tal caso, los elementos con los dos subíndices iguales forman la **diagonal principal** de la matriz.

  Por ejemplo, la siguiente matriz es cuadrada de orden 3:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 8 & 7 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}$$

  La diagonal principal la forman los elementos $a_{11}=3, a_{22}=0$ y $a_{33}=7$.

- La **traza** de una matriz cuadrada "A" es la suma de los elementos de la diagonal principal, y se denota Tr(A).

  Por ejemplo, para la anterior matriz "A", es $Tr(A)=3+0+7=10$.

- Si una matriz es de orden $1\times n$ se dice **matriz fila;** tal es el caso de las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \in M_{1\times 3} \; ; \; B=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix} \in M_{1\times 4}$$

¡Para el carro!... el conjunto $M_{1\times n}$ que forman las matrices de 1 fila y "n" columnas es el mismo que hace un momento hemos llamado $\Re^n$... porque, por ejemplo, para referirse a mi cesta de la compra, no hay ninguna diferencia entre escribir $(2;4;5)$ ó $[2 \quad 4 \quad 5]$, más allá de separar o no los tres números de la terna mediante ";" y encerrarlos en un paréntesis o en un corchete

- Si una matriz es de orden m×1 se dice matriz columna; tal es el caso de las siguientes matrices:

$$C=\begin{bmatrix}2\\3\\7\end{bmatrix}\in M_{3\times 1}\;;\; D=\begin{bmatrix}7\\6\\5\\0\end{bmatrix}\in M_{4\times 1}$$

• Matrices equidimensionales

Diremos que dos matrices son equidimensionales si tienen el mismo orden, es decir, si las dos tienen el mismo número de filas y las dos tienen el mismo número de columnas. ***Por ejemplo***, si

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\3&5\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}\;;\; B=\begin{bmatrix}1&0\\5&8\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}\;;\; C=\begin{bmatrix}7&6&5\\4&9&9\end{bmatrix}\in M_{2\times 3}$$

las matrices "A" y "B" son equidimensionales; no así "A" y "C" o "B" y "C".

• Matriz opuesta

La matriz opuesta de la matriz "A" se denota $-A$, y es la matriz obtenida al cambiar el signo de los elementos que "A".

Por ejemplo, si $A=\begin{bmatrix}3&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\in M_{2\times 3}$, su matriz opuesta es

$$-A=\begin{bmatrix}-3&-5&-6\\-7&-8&-9\end{bmatrix}\in M_{2\times 3}$$

• Matriz nula

Se llama nula a toda matriz cuyos elementos sean nulos; se denota "0" tenga el orden que tenga.

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0\in M_{2\times 2}\;;\;\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0\in M_{2\times 3}$$

• Igualdad de matrices

Las matrices equidimensionales $A=\{a_{ij}\}$ y $B=\{b_{ij}\}$ son iguales si $a_{ij}=b_{ij}$.

1.4 LAS MATRICES ALMACENAN "INFORMACIÓN"

Es bueno que tengas la percepción de que las historias que estudiaremos sobre las matrices sirven para algo más que dar de comer a profesores de Matemáticas y torturar a estudiantes de "Ciencias". Utilizando brocha gorda y no pincel, diremos que las matrices se han inventado porque son capaces de almacenar información de manera ordenada... y es sabido que la información y el orden son fundamentales para la buena marcha de todo.

La siguiente historieta ilustra la idea

El Tío Pencho tiene una empresa de comercialización de ferritos hipovaligerables y para controlar mejor el negocio ha decidido que se anoten los ingresos y los gastos trimestrales. A tal fin se usan matrices "fila" de orden 1×2, pues cada matriz de este tipo está formada por 2 números reales. Pencho establece el criterio según el cual el primer número del par expresa los ingresos y el segundo expresa los gastos, ambos en millones.

Así las cosas, al final de cada trimestre Pencho pide a su gerente la misma información, siempre la misma pregunta:

¿Cómo ha ido el trimestre?

El gerente consulta sus datos y por toda respuesta entrega a su jefe la matriz de orden 1×2 que expresa los ingresos y los gastos del trimestre en cuestión; así, cuando Pencho recibió ayer un fax con la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix}$ correspondiente al último trimestre, supo al instante los ingresos fueron de 7 millones y los gastos 4 millones.

Naturalmente, como haría cualquiera en su caso, cada año Pencho agrupa los resultados trimestrales y construye una matriz de 4 filas y 2 columnas que expresa lo sucedido en los cuatro trimestres del año en lo que se refiere a los ingresos y gastos de su empresa.

Por ejemplo, si la matriz correspondiente al último año es

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 2}$$

entonces, el que $a_{32} = 6$ indica que los gastos del tercer trimestre fueron de 6 millones, y el que $a_{41} = 8$ indica que los ingresos de cuarto trimestre fueron de 8 millones.

Como vemos, las matrices sirven para almacenar información empleando filas y columnas de números.

1.5 SUMA DE MATRICES

Si $A=\{a_{ij}\}$ y $B=\{b_{ij}\}$ son matrices de orden m×n, su **suma** se denota A+B, y es la matriz de orden m×n tal que $A+B=\{a_{ij}+b_{ij}\}$.

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}2&3&1\\5&4&9\\1&8&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&5&6\\1&2&-4\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+7&3+5&1+6\\5+1&4+2&9-4\\1+0&8+0&0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&7\\6&6&5\\1&9&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&5&1\\4&0&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&3&1\\2&4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+0&5+3&1+1\\4+2&0+4&8-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8&2\\6&4&6\end{bmatrix}$$

- Si "A" y "B" son matrices cuadradas de igual orden, es:

$$Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$$

PROPIEDADES

La suma de matrices tiene idénticas propiedades que la suma de números reales:

1) Es **conmutativa:** $A+B=B+A$
2) Es **asociativa:** $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) Admite **elemento neutro:** $A+0=0+A=A$, siendo "0" la matriz nula de igual orden que "A"
4) Cada matriz tiene **simétrica** respecto de la suma: $A+(-A)=(-A)+A=0$

Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	épsilon
Ζ	ζ	dseta
Η	η	eta
Θ	ϑ, θ	teta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ, ς	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	ypsilon
Φ	φ	fi
Χ	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

1.6 PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Recuerda: un escalar es un elemento de un cuerpo conmutativo...pero para nosotros, escalar es sinónimo de número real.

El producto del escalar "α" por la matriz "A" se denota $\alpha \bullet A$, y es la matriz obtenida al multiplicar por "α" todos los elementos de "A". ***Por ejemplo:***

$$6 \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.2 & 6.3 & 6.4 \\ 6.5 & 6.7 & 6.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 30 & 42 & 48 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

1) Siendo "α" un escalar y "A" y "B" matrices equidimensionales, es

$$\alpha \bullet (A + B) = \alpha \bullet A + \alpha \bullet B$$

2) Siendo "α" y "β" escalares y "A" una matriz, es $(\alpha + \beta) \bullet A = \alpha \bullet A + \beta \bullet A$.

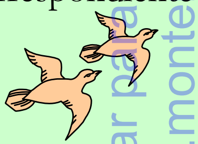
3) Siendo "α" y "β" escalares y "A" una matriz, es $\alpha \bullet (\beta \bullet A) = (\alpha . \beta) \bullet A$.

4) Siendo "α" un escalar y "A" una matriz cuadrada, es $Tr(\alpha \bullet A) = \alpha . Tr(A)$.

La "proporcionalidad" entre matrices

Al definir el "producto de un escalar por una matriz" estamos introduciendo la noción de proporcionalidad entre matrices: si la matriz $C = \{c_{ij}\}$ se obtiene al multiplicar la matriz $A = \{a_{ij}\}$ por el escalar $\alpha \neq 0$, o sea, $C = \alpha \bullet A$, cabe decir que "C" es proporcional a "A", pues cada elemento de "C" se obtiene multiplicando por "α" su correspondiente elemento de "A" (recuerda que $c_{ij} = \alpha . a_{ij}$); también cabe decir que "A" es proporcional a "C", pues cada elemento de "A" se obtiene multiplicando por "$1/\alpha$" su correspondiente elemento de "C":

$$c_{ij} = \alpha . a_{ij} \Rightarrow a_{ij} = \frac{1}{\alpha} . c_{ij} \Rightarrow A = \frac{1}{\alpha} \bullet C$$



Nota bene: en el Tema 3, para indicar de modo rápido y eficiente que la suma y el producto por un escalar (número real) definidos en el conjunto $M_{m \times n}$ satisfacen las propiedades indicadas (salvo las relativas a la "traza"; o sea, salvo $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$ y $Tr(\alpha \bullet A) = \alpha . Tr(A)$), diremos que $M_{m \times n}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\Re$ ... y de cada matriz o caja de $M_{m \times n}$ diremos que es un vector.

FONEMATO 1.6.1

1) Determine "A" y "B" si $A + B = C$ y $2 \bullet A + 3 \bullet B = C$, siendo $C = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.

2) Halle dos matrices "A" y "B", cuadradas de orden 3 y tales que $A - B = D$ y $3 \bullet A + 2 \bullet B = C$, si:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

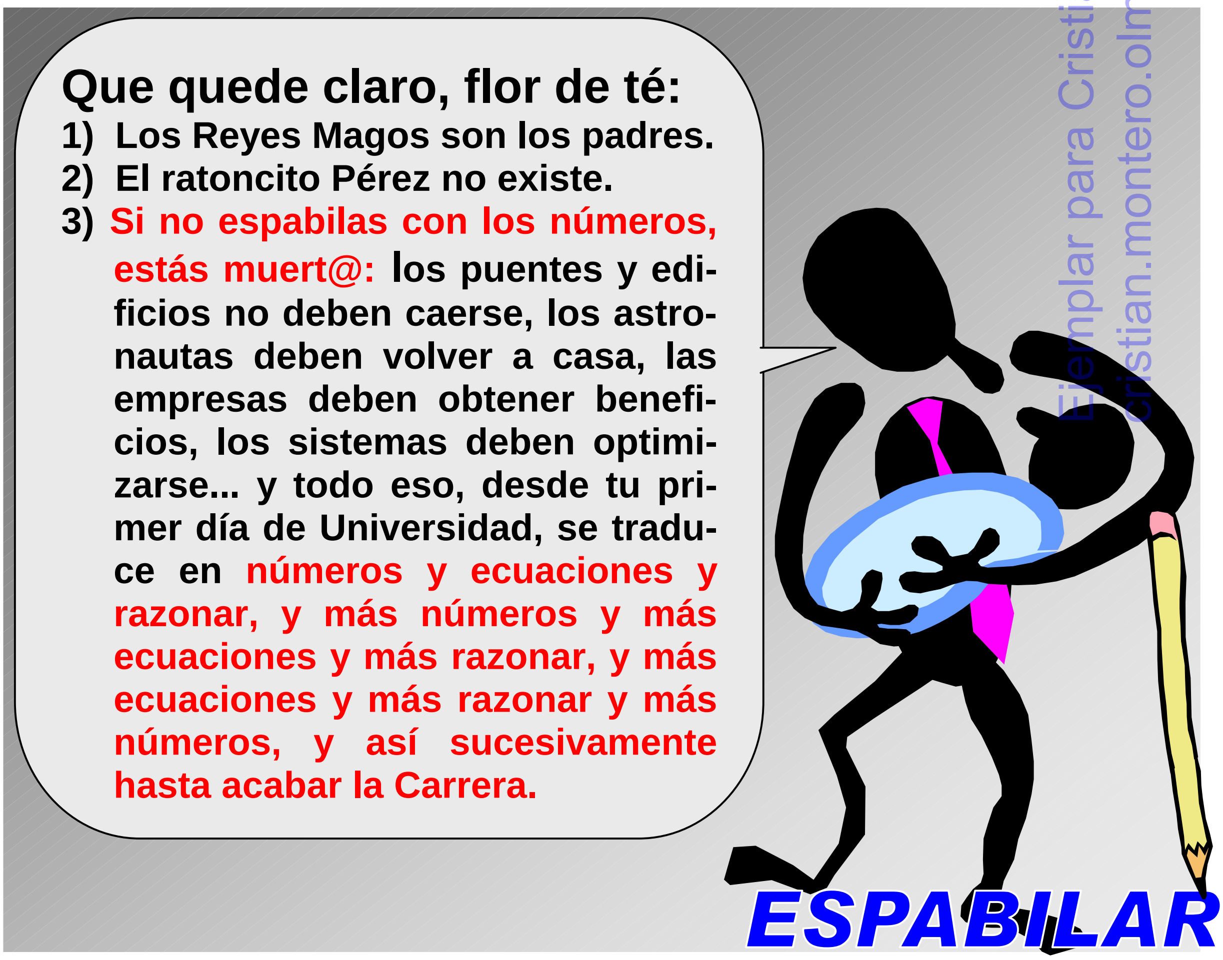
1) Al multiplicar la primera ecuación por 2 y restarle la segunda resulta $B = -C$.
Al sustituir B por $-C$ en la primera ecuación se obtiene $A = 2 \bullet C$.

2) Debemos determinar las matrices "A" y "B" que satisfacen las dos ecuaciones (condiciones de igualdad) matriciales dadas.
De la primera ecuación se deduce que $A = B + D$.
Al sustituir A por B + D en la segunda ecuación, se obtiene:

$$3 \bullet (B + D) + 2 \bullet B = C \Rightarrow 5 \bullet B = C - 3 \bullet D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{5} \bullet (C - 3 \bullet D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B+D}$$



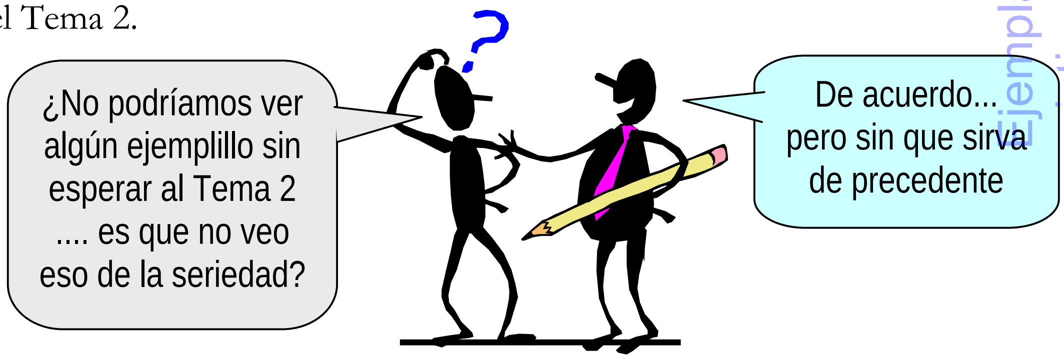
1.7 COMBINACIÓN LINEAL DE MATRICES

Al jugar a la vez con las operaciones llamadas suma de matrices y producto de un escalar por una matriz resulta lo siguiente: siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ escalares (números reales) y $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrices equidimensionales, si la matriz "W" es tal que $W = \alpha_1 \bullet A_1 + \alpha_2 \bullet A_2 + \ldots + \alpha_k \bullet A_k$, entonces "W" es suma de una matriz $\alpha_1 \bullet A_1$ proporcional a A_1, y de una matriz $\alpha_2 \bullet A_2$ proporcional a A_2 .... y de una matriz $\alpha_k \bullet A_k$ proporcional a A_k; en consecuencia, podemos decir que la matriz "W" es suma de matrices respectivamente proporcionales a las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

En el lenguaje del Álgebra de lo Lineal, para indicar de modo rápido y eficiente que sucede tal cosa, se dice que la matriz "W" es combinación lineal (CL) de las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Naturalmente, también podría decirse que "W" es combinación proporcional de $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Observa que lo mismo pasa al comprar: si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ son los respectivos precios unitarios de los "k" bienes que compras y $C_1, C_2, \ldots, C_k$ son las respectivas cantidades compradas de cada uno, la cantidad "T" que deberás pagar es $T = \gamma_1 . C_1 + \gamma_2 . C_2 + \ldots + \gamma_k . C_k$; o sea, "T" es suma de un número $\gamma_1 . C_1$ proporcional a C_1, y de un número $\gamma_2 . C_2$ proporcional a C_2 .... y de un número $\gamma_k . C_k$ proporcional a C_k; o sea, la cantidad "T" que deberás pagar es suma de números proporcionales a las cantidades compradas $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

El problema de averiguar si una matriz "W" es o no combinación lineal (CL) de otras matrices no podremos abordarlo seriamente hasta que aprendamos a resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que sucederá en el Tema 2.



Por ejemplo, si $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ y $W = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$, la matriz "W" es combinación lineal (CL) de las matrices A_1 y A_2, pues es posible encontrar dos números reales α_1 y α_2 tales que $W = \alpha_1 \bullet A_1 + \alpha_2 \bullet A_2$... y eso pueden averiguarlo hasta los niños de teta, pues basta ser capaz de resolver un sistema lineal tontorrón de dos ecuaciones con dos incógnitas α_1 y α_2:

$$W=\alpha_1\bullet A_1+\alpha_2\bullet A_2\Rightarrow\begin{bmatrix}1&4\\8&5\end{bmatrix}=\alpha_1\bullet\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}+\alpha_2\bullet\begin{bmatrix}0&1\\4&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&4\\8&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1&2.\alpha_1\\0&3.\alpha_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\alpha_2\\4.\alpha_2&\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1&2.\alpha_1+\alpha_2\\4.\alpha_2&3.\alpha_1+\alpha_2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}1=\alpha_1\\4=2.\alpha_1+\alpha_2\\8=4.\alpha_2\\5=3.\alpha_1+\alpha_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=1\\\alpha_2=2\end{array}\right\}\Rightarrow W=1\bullet A_1+2\bullet A_2$$

Por ejemplo, si $C_1=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}$, $C_2=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}$ y $U=\begin{bmatrix}1&4\\6&5\end{bmatrix}$, la matriz "U" no es CL de C_1 y C_2, pues no es posible encontrar dos números reales γ_1 y γ_2 tales que $U=\gamma_1\bullet C_1+\gamma_2\bullet C_2$.... y eso es fácil de averiguar, pues basta resolver un sistema lineal tontorrón de 2 ecuaciones con 2 incógnitas γ_1 y γ_2:

$$U=\gamma_1\bullet C_1+\gamma_2\bullet C_2\Rightarrow\begin{bmatrix}1&4\\6&5\end{bmatrix}=\gamma_1\bullet\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}+\gamma_2\bullet\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&4\\6&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_1&2.\gamma_1\\3.\gamma_1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\gamma_2\\2.\gamma_2&\gamma_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_1&2.\gamma_1+\gamma_2\\3.\gamma_1+2.\gamma_2&\gamma_2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}1=\gamma_1\\4=2.\gamma_1+\gamma_2\\6=3.\gamma_1+2.\gamma_2\\5=\gamma_2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Absurdo}\Rightarrow \text{"U" no es CL de } C_1 \text{ y } C_2$$

de la primera ecuación se obtiene $\gamma_1=1$, y de la cuarta se obtiene $\gamma_2=5$, pero estos valores de γ_1 y γ_2 no satisfacen las ecuaciones segunda y tercera

¡Ya lo veo!... si las matrices $W, A_1, A_2, \ldots, A_k$ son de orden $m\times n$, para analizar si "W" es CL de $A_1, A_2, \ldots, A_k$ debemos averiguar si es posible encontrar "k" números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que $W=\alpha_1\bullet A_1+\alpha_2\bullet A_2+\ldots+\alpha_k\bullet A_n$ ..... y eso obliga a resolver un sistema lineal de $m\times n$ ecuaciones con "k" incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$... y eso de momento es infumable a poco grandes que sean los valores de "m", "n" y "k"

Obvio

Como las líneas de una matriz son matrices a su vez, cabe plantearse estudiar si una cierta línea de una matriz es combinación lineal de otras líneas paralelas a ella.

1.8 PRODUCTO DE MATRICES

Si $A = \{a_{ij}\}$ es una matriz de orden m×n y $B = \{b_{ij}\}$ es una matriz de orden n×p, el **producto** de la matriz "A" por la matriz "B" se denota $A \bullet B$, y es la matriz $C = \{c_{ij}\}$ de orden m×p tal que c_{ij} es la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento de la i-ésima fila de "A" por su correspondiente de la j-ésima columna de "B"; es decir:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Un producto de matrices carece de sentido si el número de columnas de la 1ª matriz no coincide con el de filas de la 2ª matriz. ***Por ejemplo:*** si $A_{2\times 3}$ y $B_{3\times 7}$, entonces $A \bullet B$ es una matriz de orden 2×7, pero $B \bullet A$ carece de sentido, pues el número de columnas de la 1ª matriz no coincide con el de filas de la 2ª.

Ejemplos de productos de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5+2.7 & 1.6+2.8 \\ 3.5+4.7 & 3.6+4.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+5.8 & 2.4+5.9 & 2.6+5.2 \\ 7.1+3.8 & 7.4+3.9 & 7.6+3.2 \\ 5.1+0.8 & 5.4+0.9 & 5.6+0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 53 & 22 \\ 31 & 55 & 48 \\ 5 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2+5.7+6.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \text{absurdo} \; ; \; \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{absurdo}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

1) Asociativa: $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$
2) Distributiva respecto de la suma: $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$
3) Como queda dicho, puede suceder que el producto $A \bullet B$ tenga sentido matemático y no lo tenga el $B \bullet A$; por tanto, en general, el producto de matrices no es conmutativo.

Observa: aunque $A \bullet B$ y $B \bullet A$ tengan sentido (sucede eso si "A" es de orden m×n y "B" de orden n×m, en cuyo caso $A \bullet B$ es de orden m×m y $B \bullet A$ es de orden n×n), pueden no ser del mismo orden. Y aunque $A \bullet B$ y $B \bullet A$ sean del mismo orden (lo que sucede sólo si $m = n$; o sea, sólo si "A" y "B" son cuadradas de igual orden), en general no es cierto que $A \bullet B = B \bullet A$ ... pero puede suceder que $A \bullet B = B \bullet A$, y en tal caso se dice que las matrices "A" y "B" conmutan.

Por ejemplo: las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ conmutan, pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Si los productos $A \bullet B$ y $B \bullet A$ tienen sentido, es: $Tr(A \bullet B) = Tr(B \bullet A)$

FONEMATO 1.8.1

1) Si $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ e $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, calcúlense "x" e "y" de modo que:

$$A^2+x\bullet A+y\bullet I=0$$

2) Determínese la matriz "B" si su primera fila es $(1,0)$ y verifica:

$$A\bullet B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\;;\; A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

1) Es $$A^2=A\bullet A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 10\\ -15 & 10\end{bmatrix}$$

Calcularemos "x" e "y" al exigir que $A^2+x\bullet A+y\bullet I=0$:

$$A^2+x\bullet A+y\bullet I=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-5 & 10\\ -15 & 10\end{bmatrix}+x\bullet\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}+y\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x+y-5 & 2.x+10\\ -3.x-15 & 4.x+y+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}x+y-5=0\\ 2.x+10=0\\ -3.x-15=0\\ 4.x+y+10=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=-5\\ y=10\end{cases}$$

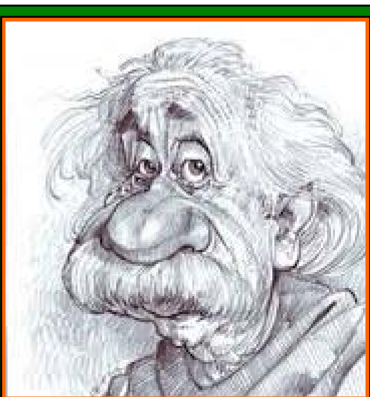
2) Como "A" es de orden 2×3, para que el producto $A\bullet B$ sea de orden 2×2, la matriz "B" debe ser de orden 3×2:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

Exijamos que $A\bullet B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{A}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & b\\ c & d\end{bmatrix}}_{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1+2.a+2.c & 2.b+2.d\\ 2+a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&-1+2.a+2.c=1\\ &2.b+2.d=0\\ &2+a=1\\ &b=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&a=-1\\ &b=0\\ &c=2\\ &d=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$



¿Qué sabe el pez del agua donde nada toda su vida?

Albert Einstein

FONEMATO 1.8.2

1) Determine para qué valores de "a", "b", "c" y "d" se verifica $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2) Determine las matrices "X" de la forma $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3) Sean $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$ matrices cuadradas de orden 3, siendo $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. ¿Podemos afirmar que $A \bullet B = B \bullet A$ para cualquier matriz "B"? ¿Cómo debería ser "A" para que $A \bullet B = B \bullet A$ para cualquier matriz "B"?

SOLUCIÓN

1)
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + b.c & a.b + b.d \\ c.a + c.d & c.b + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b.c = 0 & (1) \\ a.b + b.d = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 & (2) \\ a + d = 0 & (3) \end{cases} \\ c.a + c.d = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 & (4) \\ a + d = 0 & (5) \end{cases} \\ c.b + d^2 = 0 & (6) \end{cases}$$

El desdoblamiento acaecido en las ecuaciones segunda y tercera origina el desdoblamiento del sistema en los siguientes cuatro:

$$(1), (2), (4), (6) :\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a^2 + b.c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$(1), (2), (5), (6) :\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a^2 + b.c = 0 \\ b = 0 \\ a + d = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$(1), (3), (4), (6) :\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a^2 + b.c = 0 \\ a + d = 0 \\ c = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$(1), (3), (5), (6) :\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a^2 + b.c = 0 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a^2 + b.c = 0 \\ a + d = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} d = -a \\ b.c = -a^2 \end{cases}$$

de la 2ª ecuación resulta $d = -a$, y al sustituir en la 3ª, ésta queda como la 1ª

2) $$X^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}a&1&0\\0&b&1\\0&0&c\end{bmatrix}}_{X}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}a&1&0\\0&b&1\\0&0&c\end{bmatrix}}_{X}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a^2&a+b&1\\0&b^2&b+c\\0&0&c^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}a^2=1\\a+b=0\\b^2=1\\b+c=0\\c^2=1\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\ b=-1,\ c=1\\a=-1,\ b=1,\ c=-1\end{cases}$$

3) Si $a_{ij}=0$ si $i\neq j$, es $A=\begin{bmatrix}\mu&0&0\\0&\xi&0\\0&0&\zeta\end{bmatrix}$.

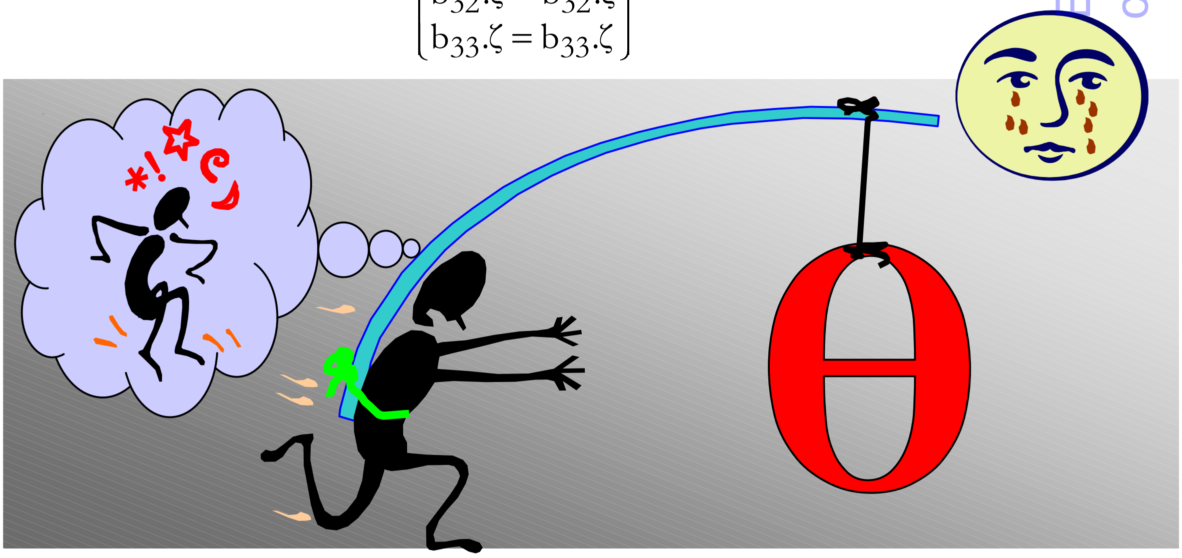
Veamos bajo qué condiciones es $A\bullet B=B\bullet A$ para toda matriz $B=\{b_{ij}\}$:

$$A\bullet B=\begin{bmatrix}\mu&0&0\\0&\xi&0\\0&0&\zeta\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}.\mu&b_{12}.\mu&b_{13}.\mu\\b_{21}.\xi&b_{22}.\xi&b_{23}.\xi\\b_{31}.\zeta&b_{32}.\zeta&b_{33}.\zeta\end{bmatrix}$$

$$B\bullet A=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\mu&0&0\\0&\xi&0\\0&0&\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}.\mu&b_{12}.\xi&b_{13}.\zeta\\b_{21}.\mu&b_{22}.\xi&b_{23}.\zeta\\b_{31}.\mu&b_{32}.\xi&b_{33}.\zeta\end{bmatrix}$$

Exijamos que $A\bullet B=B\bullet A$:

$$\begin{Bmatrix}b_{11}.\mu=b_{11}.\mu\\b_{12}.\mu=b_{12}.\xi\\b_{13}.\mu=b_{13}.\zeta\\b_{21}.\xi=b_{21}.\mu\\b_{22}.\xi=b_{22}.\xi\\b_{23}.\xi=b_{23}.\zeta\\b_{31}.\zeta=b_{31}.\mu\\b_{32}.\zeta=b_{32}.\xi\\b_{33}.\zeta=b_{33}.\zeta\end{Bmatrix}\Rightarrow\mu=\xi=\zeta$$



FONEMATO 1.8.3

Si "A" es una matriz cuadrada de orden dos tal que $A^2 = A$, determínese un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda \bullet A - I)^2 = I$, siendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$(\lambda \bullet A - I)^2 = I \Rightarrow (\lambda \bullet A - I) \bullet (\lambda \bullet A - I) = I \Rightarrow$$

$\boxed{A \bullet I = I \bullet A = A \;\; ; \;\; I \bullet I = I}$

$$\Rightarrow \lambda^2 \bullet A^2 - 2 \bullet \lambda \bullet A + I = I \Rightarrow \lambda^2 \bullet A^2 - 2 \bullet \lambda \bullet A = 0 \Rightarrow$$

$\boxed{\text{pues } A^2 = A}$

$$\Rightarrow \lambda^2 \bullet A - 2 \bullet \lambda \bullet A = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2.\lambda) \bullet A = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2.\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ 2$$

$\boxed{\text{si "A" no es la matriz nula}}$

No vale inventar propiedades inexistentes

La ignorancia es muy atrevida; por eso hay quien con la mayor desfachatez y desvergüenza inventa propiedades inexistentes si sus neuronas se congelan por "algo" que deberían saber y no saben.

Ejemplos de propiedades inexistentes frecuentemente inventadas:

$$|a + b| = |a| + |b|$$

$$\text{sen } (7.x) = 7.\text{sen } x$$

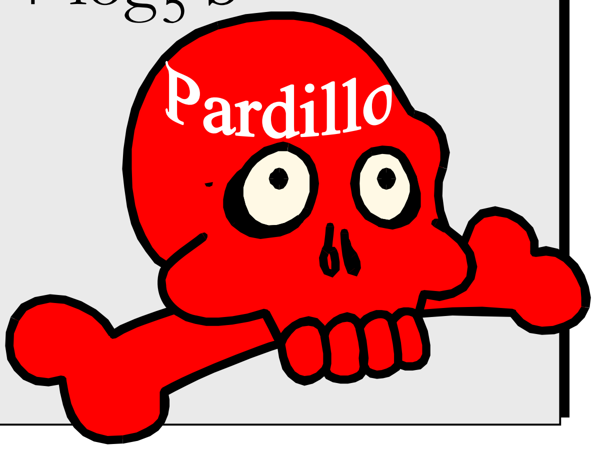
$$\cos (a + b) = \cos a + \cos b$$

$$\log_5 (a + b) = \log_5 a + \log_5 b$$

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{a}{b + c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$



1.9 TRASPUESTA DE UNA MATRIZ

Si en una matriz "A" permutamos filas por columnas conservando el orden de ellas, resulta otra matriz que se llama **traspuesta** de "A" y se denota A^t.

Por ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}1&7&8&5\\7&3&2&0\\9&9&2&4\end{bmatrix}\in M_{3\times4}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}1&7&9\\7&3&9\\8&2&2\\5&0&4\end{bmatrix}\in M_{4\times3}$$

$$B=\begin{bmatrix}8&7&6\\5&4&3\end{bmatrix}\in M_{2\times3}\Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}8&5\\7&4\\6&3\end{bmatrix}\in M_{3\times2}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\in M_{3\times3}\Rightarrow C^t=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\in M_{3\times3}$$

PROPIEDADES

1) La traspuesta de la traspuesta de una matriz "A" es ella misma: $(A^t)^t=A$
2) La traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas: $(A+B)^t=A^t+B^t$
3) Si $\alpha\in\Re$, entonces $(\alpha\bullet A)^t=\alpha\bullet A^t$.
4) La traspuesta de un producto de matrices es el producto de sus traspuestas, pero en orden contrario. ***Por ejemplo:***

$$(A\bullet B\bullet C\bullet D)^t=D^t\bullet C^t\bullet B^t\bullet A^t.$$

1.10 MATRIZ SIMETRICA

Se dice que una matriz cuadrada $A = \{a_{ij}\}$ es **simétrica** si coincide con su matriz traspuesta, lo que sucede sólo si $a_{ij} = a_{ji}$; o sea, "A" es simétrica sólo si los elementos situados simétricamente respecto de la diagonal principal son iguales.

Por ejemplo, son simétricas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 9 & \pi \\ 5 & 6 & \pi & 3 \end{bmatrix} ;\ C = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} ;\ D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para toda matriz "A", la matriz $H = A \bullet A^t$ es simétrica, pues $H^t = H$.
  En efecto:

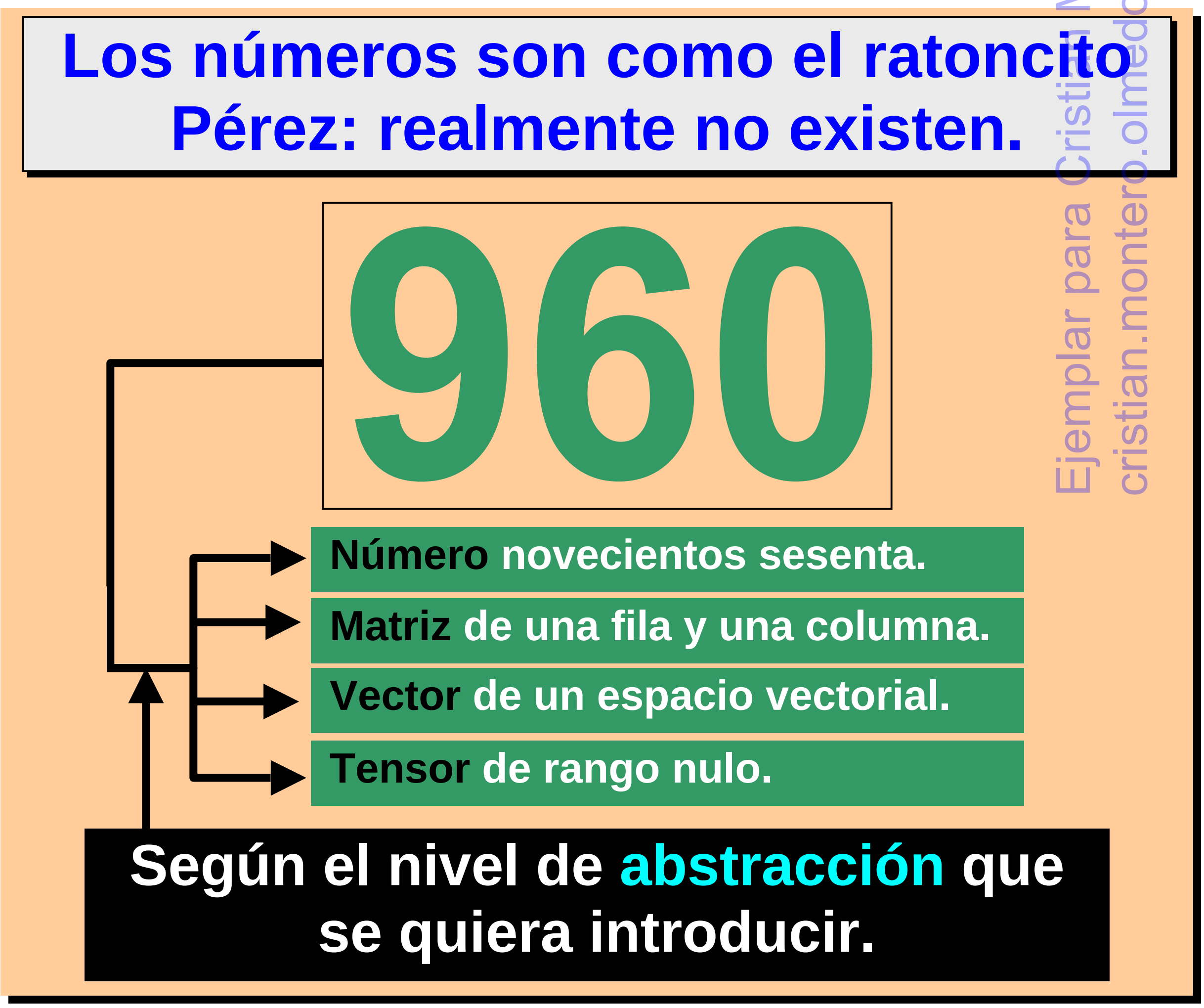
$$H^t = (A \bullet A^t)^t = (A^t)^t \bullet A^t = A \bullet A^t = H$$

traspuesta de un producto = producto de las traspuestas en orden contrario

- Si la matriz "A" es cuadrada, la matriz $N = A + A^t$ es simétrica, pues $N^t = N$.
  En efecto:

$$N^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = N$$

traspuesta de una suma = suma de las traspuestas



1.11 MATRIZ ANTISIMÉTRICA

Una matriz cuadrada "A" es antisimétrica si coincide con su traspuesta cambiada de signo, lo que sucede sólo si $a_{ij} = -a_{ji}$; o sea, si los elementos simétricos respecto de la diagonal principal tiene igual valor absoluto, pero signo distinto.

Observa: los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son nulos:

$$a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2.a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$$

Por ejemplo, son antisimétricas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ 6 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -2 & 5 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & 0 & \pi \\ -5 & 6 & -\pi & 0 \end{bmatrix} ;\ C = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

- Toda matriz cuadrada "A" puede descomponerse en suma de una matriz simétrica "S" y otra antisimétrica "H". En efecto, si $A = S + H$, es:

$$A^t = (S+H)^t = S^t + H^t = S - H$$

por ser simétrica "S", es $S^t = S$
por ser antisimétrica "H", es $H^t = -H$

Sumando miembro a miembro $A = S + H$ y $A^t = S - H$, es $A + A^t = 2 \bullet S$, por lo que:

$$S = \frac{1}{2} \bullet (A + A^t) = \left\{\frac{1}{2}.(a_{ij} + a_{ji})\right\}$$

Restando miembro a miembro $A = S + H$ y $A^t = S - H$, es $A - A^t = 2 \bullet H$, por lo que:

$$H = \frac{1}{2} \bullet (A - A^t) = \left\{\frac{1}{2}.(a_{ij} - a_{ji})\right\}$$

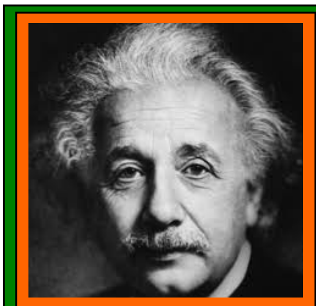
Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, entonces:

$$S = \frac{1}{2} \bullet (A + A^t) = \left\{\frac{1}{2}.(a_{ij} + a_{ji})\right\} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2} \bullet (A - A^t) = \left\{\frac{1}{2}.(a_{ij} - a_{ji})\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo:

$$S + H = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = A$$



Cada día sabemos más y entendemos menos.

Albert Einstein

1.12 OTRAS MATRICES CUADRADAS

- **MATRIZ UNIDAD:** matriz cuadrada con todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1 y los demás elementos de la matriz son 0; se denota "I".

Por ejemplo, la matriz unidad de orden 3 es $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- **MATRIZ ESCALAR:** matriz cuadrada tal que los elementos de la diagonal principal son iguales, siendo nulos los demás elementos. ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ DIAGONAL:** matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos no situados en la diagonal principal. ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ TRIANGULAR:** matriz cuadrada en la que todos los elementos a un lado de la diagonal principal son nulos. ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De "A" se dice triangular inferior (son nulos los elementos situados debajo de la diagonal principal); de "B" se dice triangular superior (son nulos los elementos situados encima de la diagonal principal).

- **MATRIZ IDEMPOTENTE:** matriz cuadrada cuyo cuadrado es ella misma.

Por ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

- **MATRIZ INVOLUTIVA:** matriz cuadrada cuyo cuadrado es la matriz unidad.

Por ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

✓ Si la matriz "A" es idempotente, la matriz $2 \bullet A - I$ es involutiva.
En efecto:

$$(2 \bullet A - I) \bullet (2 \bullet A - I) = 4 \bullet A \bullet A - 4 \bullet A + I = 4 \bullet A - 4 \bullet A + I = I$$

$$\boxed{\text{"A" idempotente} \Rightarrow A \bullet A = A}$$

✓ Si la matriz "A" es involutiva, la matriz $\frac{1}{2} \bullet (A + I)$ es idempotente.

En efecto:

$$\left(\frac{1}{2} \bullet (A + I)\right) \bullet \left(\frac{1}{2} \bullet (A + I)\right) = \frac{1}{4} \bullet (A \bullet A + 2 \bullet A + I) =$$

$$= \frac{1}{4} \bullet (2 \bullet A + 2 \bullet I) = \frac{1}{2} \bullet (A + I)$$

$$\boxed{\text{"A" es involutiva} \Rightarrow A \bullet A = I}$$

1.13 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Las **transformaciones elementales,** que nos facilitarán muchos cálculos que están por venir (cálculo del determinante de una matriz cuadrada y cálculo del rango de una matriz, cuadrada o no), son las siguientes:

1) Trasposición de una matriz.
2) Cambio entre sí de dos filas o columnas de una matriz.
3) Multiplicación de todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz un mismo número $k \neq 0$.
4) Adición a los elementos de una fila (columna) de una matriz de los elementos correspondientes de otra fila (columna) multiplicados por un mismo número.

EL PROFESOR QUE CORRIGE EL EXAMEN

Todos los profesores son de la misma opinión: corregir exámenes no gusta a nadie, no es trabajo agradable enfrentarse por n-ésima vez a la tarea de leer y puntuar un montón de folios escritos por principiantes que en la mayoría de los casos no tienen ni idea y sólo escriben barbaridades y estupideces sobre el asunto de sota, caballo y rey que por j-ésima vez cae en examen. Por eso, **cuando un profe se sienta a corregir exámenes no suele estar de buen humor.**

Así las cosas, lo que escribamos o dibujemos en examen debe **diferenciarnos positivamente** de los demás, y para conseguir tal diferenciación y que **al profe se le caigan los pantalones,** basta **escribir o dibujar pensando que no se lo sabe y por tanto hay que llevarle de la mano,** explicándole todos los aspectos más relevantes de las **conexiones neuronales (CN)** que establezcamos en cada caso.

1.14 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

A cada matriz cuadrada "A", por el simple hecho de ser cuadrada, le asociamos un número que llamamos **determinante** de "A" y denotamos $|A|$. Si $|A| \neq 0$ se dice que "A" es **regular**, y si $|A| = 0$ se dice que "A" es **singular**.

CÁLCULO DE DETERMINANTES

- Si $A = [a_{11}]$, es $|A| = a_{11}$.

  Por ejemplo, si $A = [6]$, es $|A| = 6$.

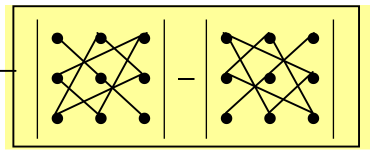
- Si $A = \{a_{ij}\} \in M_{2\times 2}$, es $|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

  Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2.(-5) - (-3).4 = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = (-4).7 - 2.(-5) = -18$$

- **Regla de Sarrus:** si $A = \{a_{ij}\} \in M_{3\times 3}$, es:



$$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{32}.a_{21} -$$
$$-(a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{23}.a_{32}.a_{11} + a_{21}.a_{12}.a_{33})$$

Por ejemplo: si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, es:

$$|A| = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.8.4 - (7.5.3 + 6.8.1 + 4.2.9) = 0$$

Por ejemplo: si $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 9 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, es:

$$|A| = 0.9.1 + 2.6.5 + 3.(-3).(-4) -$$
$$-(5.9.3 + (-3).6.0 + 1.(-4).2) = \text{lo que sea}$$

Para poder calcular determinantes de matrices cuadradas de orden mayor que 3, debemos definir antes los conceptos de **menor complementario** y de **cofactor o adjunto** de un elemento de una matriz cuadrada.

MENOR COMPLEMENTARIO. COFACTOR

Si $A \in M_{n \times n}$, el menor complementario del elemento a_{ij} de "A" se denota α_{ij}, y es el determinante de la matriz cuadrada de orden "n−1" obtenida al suprimir en "A" la i-ésima fila y la j-ésima columna.

El cofactor o adjunto del elemento a_{ij} se denota A_{ij}, siendo $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\alpha_{ij}$.

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

el menor complementario α_{32} del elemento $a_{32} = 6$ es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la tercera fila y la segunda columna de "A"; o sea:

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 3.8 = -19$$

determinante de la matriz obtenida al eliminar 3ª fila y 2ª columna de "A"

El cofactor o adjunto A_{32} de $a_{32} = 6$ es $A_{32} = (-1)^{3+2}.\alpha_{32} = (-1).(-19) = 19$.

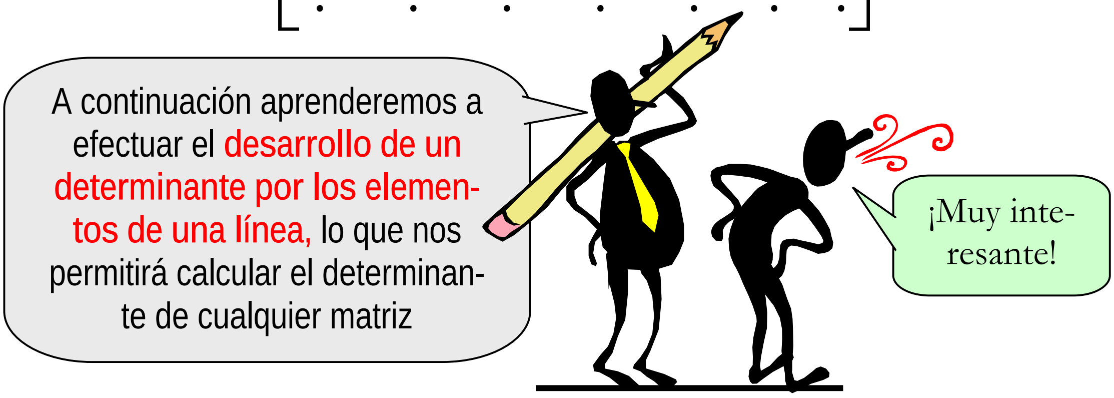
Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 19 & 2 & 3 \\ 4 & 41 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 8 & 9 \\ 23 & 34 & -1 & 14 \end{bmatrix}$, se tiene que:

$$\alpha_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A_{42} = (-1)^{4+2}.\alpha_{42} = 0$$

determinante de la matriz obtenida al eliminar 4ª fila y 2ª columna de "A"

Observa: el valor de $(-1)^{i+j}$ es 1 ó -1 según que el número natural "i+j" sea par o impar; por tanto, la secuencia de los signos de los adjuntos respecto de los menores complementarios es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & . & . \\ - & + & - & + & - & . & . \\ + & - & + & - & + & . & . \\ - & + & - & + & - & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$



DESARROLLO POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

El determinante de una matriz cuadrada es la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento de una cualquiera de las líneas de la matriz por su cofactor o adjunto. Por comodidad, la línea elegida para hacer el desarrollo será la que contenga mayor número de ceros.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

desarrollamos por los elementos de la 3ª columna

$$\Rightarrow |A| = a_{13}.A_{13} + a_{23}.A_{23} + a_{33}.A_{33} =$$

$$= 7.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 8.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -53$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

desarrollamos por los elementos de la 2ª fila

$$\Rightarrow |A| = a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23} + a_{24}.A_{24} =$$

$$= 4.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+4}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -29$$

Observa: el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal, y lo mismo sucede si la matriz es diagonal.

Por ejemplo:

Desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.7.6$$

Desarrollamos por los elementos de la primera columna

Por ejemplo:

Desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.7.6$$

Desarrollamos por los elementos de la primera fila

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

El uso de las siguientes propiedades te **facilitará** el cálculo de determinantes.

1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} \pi & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

2) Si todos los elementos de una línea son cero, el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues la segunda columna está formada por ceros}$$

3) Al cambiar el orden de dos líneas paralelas el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Cambiamos la primera fila por la segunda

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Cambiamos la primera columna por la segunda

4) Si dos líneas paralelas son iguales o proporcionales, el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues las filas primera y tercera son iguales}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues la segunda columna es el triple de la primera}$$

5) Si los elementos de una línea se multiplican (dividen) por un mismo número, el determinante correspondiente se multiplica (divide) por ese número.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \text{ entonces } \begin{vmatrix} 9.2 & 9.3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9.5$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 23, \text{ entonces } \begin{vmatrix} 3 & 4/7 \\ 1 & 9/7 \end{vmatrix} = 23/7$$

Obvio: si la matriz "A" es cuadrada de orden "n" y "k" es un número real, entonces $|k \bullet A| = k^n . |A|$, pues para multiplicar "A" por "k" debemos multiplicar por "k" las "n" líneas de "A".

6) Un determinante no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos o restamos otras líneas paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A la 1ª fila le sumamos el doble de la 2ª más el triple de la 3ª

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A la 3ª columna le restamos el doble de la 1ª

7) Un determinante es cero si una de sus líneas puede obtenerse como suma de otras líneas paralelas a ella, multiplicadas cada una de éstas por un número.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues la tercera columna es suma de las dos primeras}$$

8) Si todos los elementos de una línea de $|A|$ están formados por dos sumandos, $|A|$ puede descomponerse en suma de otros dos determinantes idénticos a $|A|$ salvo en dicha línea, que en el primero (segundo) de los **nuevos** determinantes está formada por los primeros (segundos) sumandos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+7 & 3 \\ 4 & 5+9 & 6 \\ 7 & 8+4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

9) Siendo "A" y "B" matrices cuadradas del mismo orden, es:

$$|A \bullet B| = |A| . |B| .$$

Para calcular determinantes de matrices "gordas" conviene manipular sus líneas (hacer transformaciones elementales) de modo que aparezcan muchos ceros.

- ***Por ejemplo:***

Para que en la primera fila "aparezcan" ceros, hacemos lo siguiente:
- A la segunda columna le restamos el triple de la primera
- A la tercera columna le restamos el cuádruple de la primera
- A la cuarta columna le restamos el doble de la primera

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la primera fila

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la primera columna

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, a la 3ª fila le restamos la 2ª, y a la 2ª fila le restamos el doble de la 1ª

• ***Por ejemplo:***

Para que en la segunda fila "aparezcan" ceros, hacemos lo siguiente:
• A la primera columna le restamos el doble de la segunda
• A la cuarta columna le restamos el triple de la segunda

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la segunda fila

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, a las filas segunda y tercera les restamos la primera

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la primera columna

• ***Por ejemplo:***

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & b \\ b & a-\lambda & b & b \\ b & b & a-\lambda & b \\ b & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

A la 1ª fila le sumamos las filas restantes

$$= \begin{vmatrix} a-\lambda+3.b & a-\lambda+3.b & a-\lambda+3.b & a-\lambda+3.b \\ b & a-\lambda & b & b \\ b & b & a-\lambda & b \\ b & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

Sacamos factor común "$a-\lambda+3.b$" en la primera fila

$$= (a-\lambda+3.b).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a-\lambda & b & b \\ b & b & a-\lambda & b \\ b & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

A las columnas 2ª, 3ª y 4ª les restamos la 1ª

$$= (a-\lambda+3.b).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-\lambda-b & 0 & 0 \\ b & 0 & a-\lambda-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-\lambda-b \end{vmatrix} = (a-\lambda+3.b).(a-\lambda-b)^3$$

El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal

TOMA BUENA NOTA

El polinomio $P(\lambda) = (a-\lambda+3.b).(a-\lambda-b)^3$ se llama **característico** de la matriz cuadrada $A = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$, y las raíces de la ecuación $P(\lambda) = 0$, que son $\lambda = a+3.b$ (simple) y $\lambda = a-b$ (triple) se llaman **autovalores** de "A".

¡En los Temas 7, 8 y 9 jugaremos constantemente con polinomios característicos y autovalores!

• Determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b.(b-a) & c.(c-a) & d.(d-a) \\ 0 & b^2.(b-a) & c^2.(c-a) & d^2.(d-a) \end{vmatrix} =$$

Restamos a cada fila la anterior multiplicada por "a"

Desarrollamos el determinante por los elementos de la 1ª columna

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b.(b-a) & c.(c-a) & d.(d-a) \\ b^2.(b-a) & c^2.(c-a) & d^2.(d-a) \end{vmatrix} =$$

En la 1ª columna sacamos factor común "b − a", en la 2ª sacamos factor común "c − a", y en la 3ª sacamos factor común "d − a"

$$= (b-a).(c-a).(d-a). \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d. \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

Estamos ante otro Vandermonde, pero la matriz es 3 × 3. Repetimos el proceso: a cada fila le restamos la anterior multiplicada por "b"

$$= (b-a).(c-a).(d-a). \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c.(c-b) & d.(d-b) \end{vmatrix} =$$

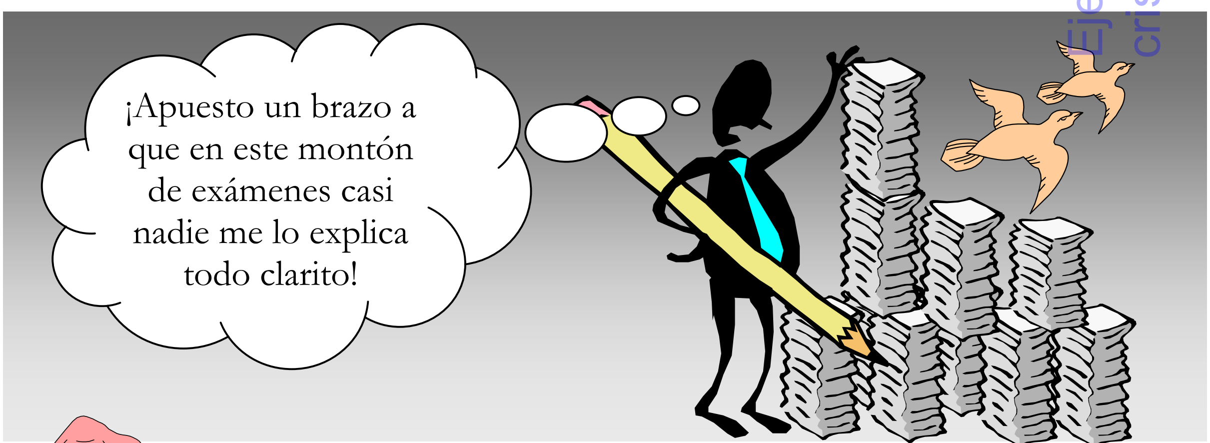
Desarrollamos por los elementos de la 1ª columna

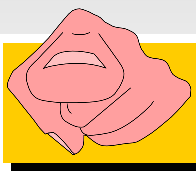
$$= (b-a).(c-a).(d-a). \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c.(c-b) & d.(d-b) \end{vmatrix} =$$

En la 1ª columna sacamos factor común "c − b" y en la 2ª sacamos factor común "d − b"

$$= (b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b). \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b).(d-c)$$





A tu profe le pasa como a ti: cuanto más clarito le explicas las cosas, más contento se pone.

FONEMATO 1.14.1

Resuélvase la ecuación $\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0$

SOLUCIÓN

CN ≡ conexión neuronal

CN: Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor:

$$\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

a la 1ª columna le sumamos la 2ª y la 3ª

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & a & b \\ x & x-b-c & b \\ x & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0$$

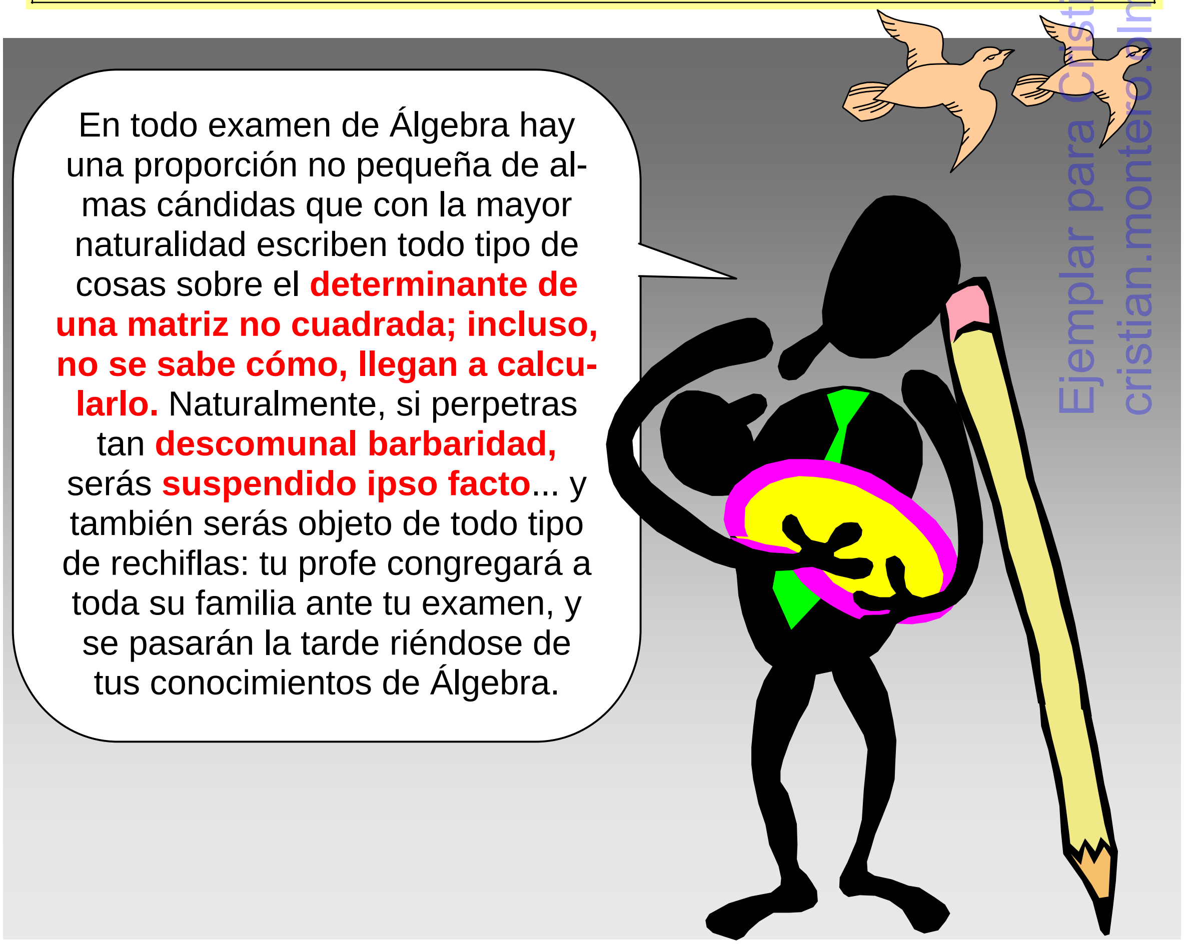
a las filas 2ª y 3ª les restamos la 1ª

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & x-a-b-c & b \\ 0 & 0 & x-a-b-c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x.(x-a-b-c)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a+b+c \text{ (doble)} \end{cases}$$

considerando que la incógnita es "x", y que "a", "b" y "c" son constantes



FONEMATO 1.14.2

Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$.

SOLUCIÓN

CN ≡ conexión neuronal

CN: Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

a las filas segunda y tercera les restamos la primera
a la cuarta fila le restamos el triple de la primera

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ -x-1 & x+1 & 0 & 0 \\ -x-1 & 0 & x+1 & 0 \\ -2.x-6 & x-3 & x-3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

desarrollamos por los elementos de la cuarta columna

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -x-1 & x+1 & 0 \\ -x-1 & 0 & x+1 \\ -2.x-6 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

sacamos factor común "x + 1" en las filas primera y segunda

$$\Rightarrow (x+1)^2 . \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2.x-6 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2.x-6 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} = -12}$$

$$\Rightarrow -12.(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (doble)}$$

FONEMATO 1.14.3

Calcule el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN

La solución es de idea feliz:

a la tercera fila le sumamos la segunda

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c+a & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

pues la tercera fila es proporcional a la primera

Aunque no se te ocurra la idea feliz, el asunto es fácil:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c+a & a-b & a-c \end{vmatrix} =$$

a las columnas segunda y tercera les restamos la primera

en la segunda columna sacamos factor común "b − a"
en la tercera columna sacamos factor común "c − a"

$$= (b-a).(c-a).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ b+c+a & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

pues las columnas segunda y tercera son iguales

FONEMATO 1.14.4

Calcule el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & \cdots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & \cdots & 2.n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 & \cdots & 2.n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & \cdots & 2.n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \cdots & 2.n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$$

Sumamos la 1ª fila a cada una de las restantes filas

el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal; en nuestro caso, el producto 1.2.3....n de los "n" primeros números naturales, que es n!

FONEMATO 1.14.5

Prueba que $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a.(b-a).(c-b).(d-c)$.

SOLUCIÓN

CN ≡ conexión neuronal

CN: Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

a las filas 2ª, 3ª y 4ª les restamos la 1ª

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la 1ª columna

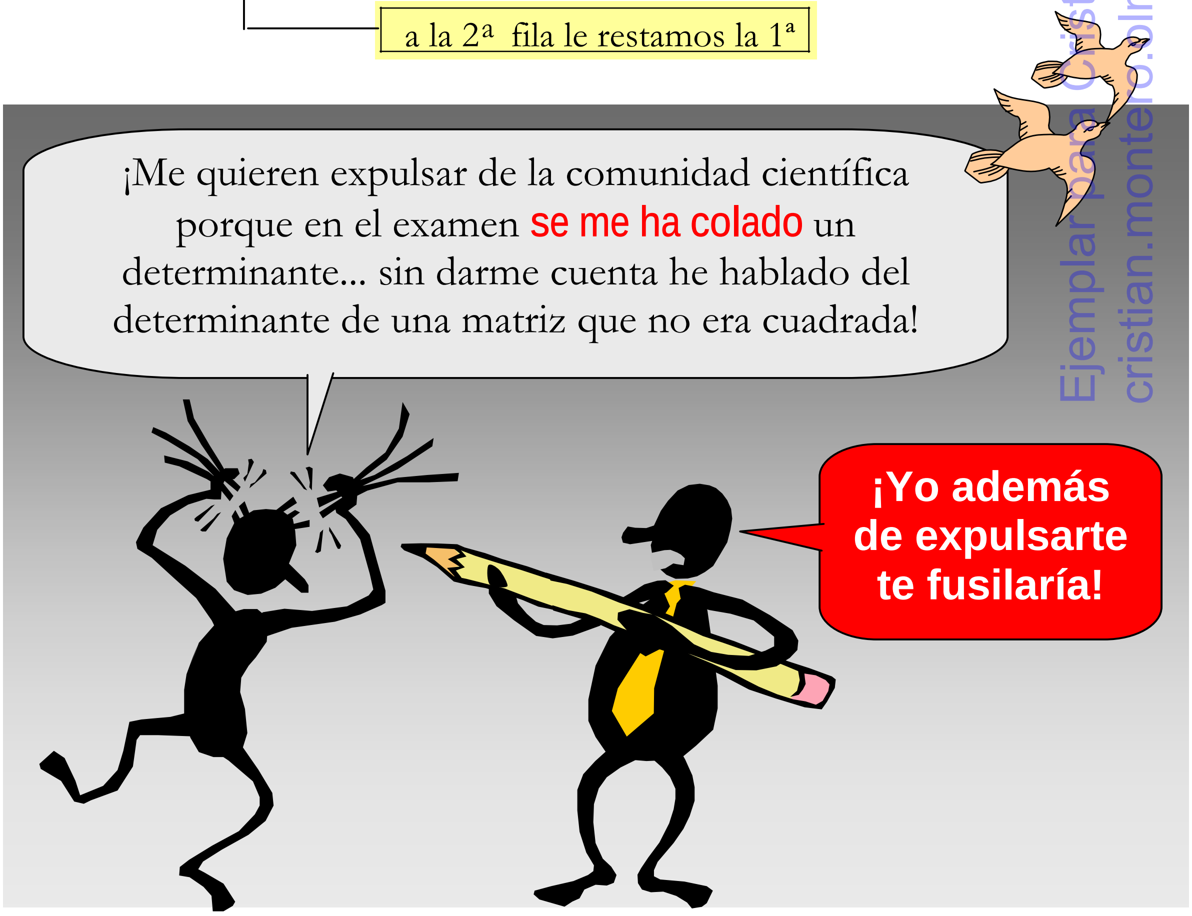
a las filas 2ª y 3ª les restamos la 1ª

$$= a.\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = a.(b-a).\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la 1ª columna

$$= a.(b-a).\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ 0 & d-c \end{vmatrix} = a.(b-a).(c-b).(d-c)$$

a la 2ª fila le restamos la 1ª



FONEMATO 1.14.6

1) Aplicando las propiedades de los determinantes (o sea, sin desarrollar el determinante), calcúlese una solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & \mu & 8 \\ 1 & 8 & \mu^2 \end{vmatrix} = 0$$

2) Determínese la raíz múltiple de la ecuación $\begin{vmatrix} \theta & 1 & 8 & 1 \\ 1 & \theta & 1 & 8 \\ 8 & 1 & \theta & 1 \\ 1 & 8 & 1 & \theta \end{vmatrix} = 0$

SOLUCIÓN

CN ≡ conexión neuronal

1) Nuestra astucia nos hace ver que las columnas 2ª y 3ª son proporcionales si $\mu = 4$; por tanto, podemos garantizar que el determinante se anula si $\mu = 4$.

2) **CN:** Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

$$\begin{vmatrix} \theta & 1 & 8 & 1 \\ 1 & \theta & 1 & 8 \\ 8 & 1 & \theta & 1 \\ 1 & 8 & 1 & \theta \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \theta+10 & \theta+10 & \theta+10 & \theta+10 \\ 1 & \theta & 1 & 8 \\ 8 & 1 & \theta & 1 \\ 1 & 8 & 1 & \theta \end{vmatrix} =$$

a la primera fila le sumamos las restantes

sacamos factor común "x + 10" en la primera fila

$$= (\theta+10).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \theta & 1 & 8 \\ 8 & 1 & \theta & 1 \\ 1 & 8 & 1 & \theta \end{vmatrix} = (\theta+10).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \theta-1 & 0 & 7 \\ 8 & -7 & \theta-8 & -7 \\ 1 & 7 & 0 & \theta-1 \end{vmatrix} =$$

a las columnas segunda, tercera y cuarta les restamos la primera

desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$= (\theta+10).\begin{vmatrix} \theta-1 & 0 & 7 \\ -7 & \theta-8 & -7 \\ 7 & 0 & \theta-1 \end{vmatrix} = (\theta+10).(\theta-8).\begin{vmatrix} \theta-1 & 7 \\ 7 & \theta-1 \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la segunda columna

$$= (\theta+10).(\theta-8).\left((\theta-1)^2 - 49\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta + 10 = 0 \Rightarrow \theta = -10 \\ \theta - 8 = 0 \Rightarrow \theta = 8 \\ (\theta-1)^2 - 49 = 0 \Rightarrow \theta = 6,\ \theta = 8 \end{cases}$$

un producto de diversos factores es 0 siempre que sea 0 algún factor

La única raíz múltiple es $x = 8$.

FONEMATO 1.14.7

1) Si $\begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ halle, sin desarrollarlo, el valor de $\begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 2.\theta+5 & 2.\lambda & 2.\delta+3 \\ \theta+1 & \lambda+1 & \delta+1 \end{vmatrix}$.

2) Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$.

SOLUCIÓN

CN ≡ conexión neuronal

1) el primer determinante es 0, pues sus filas 1ª y 2ª son proporcionales

$$\begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 2.\theta+5 & 2.\lambda & 2.\delta+3 \\ \theta+1 & \lambda+1 & \delta+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 2.\theta & 2.\lambda & 2.\delta \\ \theta+1 & \lambda+1 & \delta+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 5 & 0 & 3 \\ \theta+1 & \lambda+1 & \delta+1 \end{vmatrix} =$$

CN: Si todos los elementos de una línea de |A| están formados por dos sumandos, |A| puede descomponerse en suma de otros dos determinantes idénticos a |A| excepto en dicha línea, que en el primero (segundo) de los nuevos determinantes está formada por los primeros (segundos) sumandos.

$$= \begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 5 & 0 & 3 \\ \theta+1 & \lambda+1 & \delta+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 5 & 0 & 3 \\ \theta & \lambda & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

el primer determinante es 0, pues sus filas 1ª y 3ª son iguales

2) **CN:** Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

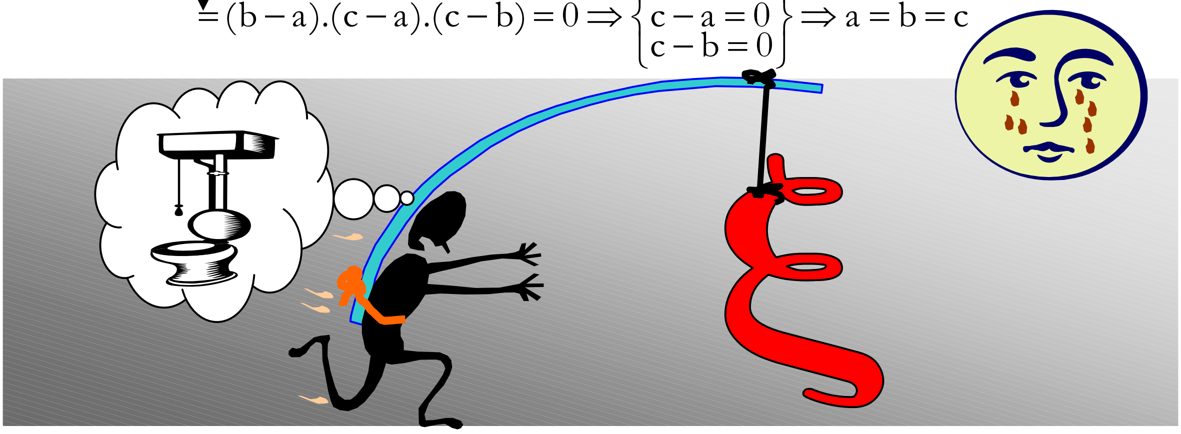
a las columnas 2ª y 3ª les restamos la primera

sacamos factor común "b − a" en la 2ª columna y "c − a" en la 3ª

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b+a).(b-a) & (c+a).(c-a) \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

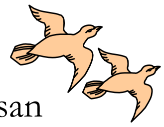
desarrollo por los elementos de la 1ª fila

$$= (b-a).(c-a).(c-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b-a=0 \\ c-a=0 \\ c-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c$$

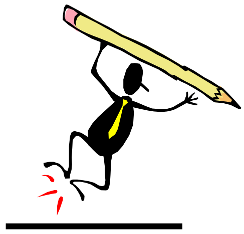


APRENDER A ESCRIBIR

El uso de "sea"... y de los verbos exigir y satisfacer



El asunto de aprender **a** escribir no es ninguna tontería, porque en la Carrera tendrás que superar no pocos exámenes escritos donde pelearás con muchos problemas sobre fenómenos que se expresan mediante números. Así las cosas, para que tus exámenes estén siempre entre los mejores, es esencial que aprendas a escribir sobre los números de modo que parezcas un profesional, y no el pardillete que, por no saber expresarse con soltura en lenguaje matemático, tiene notables dificultades para expresarse con todo lo relacionado con los números.



Los profesionales emplean constantemente el verbo exigir y después el verbo satisfacer... y tú debes aprender a usarlos cuanto antes, porque te darán prestigio y solvencia en millones de ocasiones.

Para resolver un problema hay que suponerlo resuelto, poniendo nombre (por ejemplo "X") a la solución buscada (que puede ser un número, un vector, un tensor, un campo, un... cualquier cosa), y lo haremos diciendo

Sea "X" el ....

Escribimos lo que sea menester para que el ente "X" quede perfectamente identificado; es decir, para que ni el más tonto del planeta pueda confundirlo con ningún otro ente del universo.

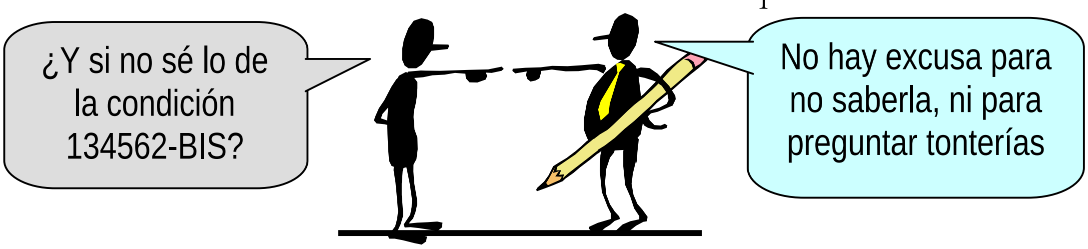
y después llegará un momento en que escribirás:

.... y "X" se determina al exigir que se satisfaga la condición .....

La condición que sea; por ejemplo, la 134562-BIS.

$$\overbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\oiiint_{D\subset\Re^3}\frac{\nabla f(X)}{\partial f/\partial\theta}=\sqrt{b^2-4ac}\prod_{k=1}^{\infty}\oiint_X dt \Rightarrow}^{\text{CONDICIÓN 134562-BIS}}$$

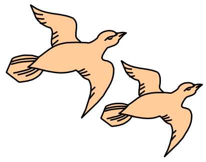
$$\Rightarrow \text{..........................} \Rightarrow X = \text{lo que sea}$$



FONEMATO 1.14.8

Demuestre que si $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, es $A^2-(a+d)\bullet A+|A|\bullet I=0$, siendo:

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ 0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



En examen no importa lo que sabes, importa lo que parece que sabes.

SOLUCIÓN

Como $|A|=a.d-b.c$, es:

$$A^2-(a+d)\bullet A+|A|\bullet I=$$

$$=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-(a+d)\bullet\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+(a.d-b.c)\bullet\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a^2+b.c & a.b+b.d \\ a.c+c.d & b.c+d^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a^2+a.d & a.b+b.d \\ a.c+d.c & a.c+d^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a.d-b.c & 0 \\ 0 & a.d-b.c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.14.9

Dadas las matrices "A" y "B", halle una matriz simétrica "P" que sea regular y tal que $P\bullet B=A\bullet P$, siendo:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Sea $P=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ una matriz simétrica regular; o sea, tal que $|P|=a.c-b^2\neq 0$.

Exijamos que se satisfaga la condición dada::

$$P\bullet B=A\bullet P\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 4.a+6.b & -3.a-5.b \\ 4.b+6.c & -3.b-5.c \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4.a-6.b & 4.b-6.c \\ 3.a-5.b & 3.b-5.c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 12.b & -3.a-9.b+6.c \\ 9.b+6.c-3.a & -6.b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{r} 12.b=0 \\ -3.a-9.b+6.c=0 \\ 9.b+6.c-3.a=0 \\ -6.b=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{r} b=0 \\ -3.a+6.c=0 \\ 6.c-3.a=0 \\ b=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} b=0 \\ a=2.c \end{array}\right\}\Rightarrow P=\begin{bmatrix} 2.c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Hay infinitas matrices que satisfacen la condición $P\bullet B=A\bullet P$; si elegimos $c=1$ (para que "P" sea regular basta que $c\neq 0$), obtenemos una de ellas: $P=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.15 MATRIZ ADJUNTA DE UNA MATRIZ CUADRADA

La adjunta de una matriz cuadrada "A" se denota Adj.(A), y es la matriz cuadrada que resulta al sustituir cada elemento de la matriz traspuesta de "A" por su adjunto o cofactor.

Por ejemplo, si $A=\begin{bmatrix}2 & 8\\ 7 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & -9\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$, es:

$$A^t=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 8 & 6\end{bmatrix}\ ;\ B^t=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -9 & -3\end{bmatrix}\ ;\ C^t=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

y al sustituir en A^t, B^t y C^t cada elemento por su cofactor o adjunto, resulta:

$$\text{Adj.}(A)=\begin{bmatrix}6 & -8\\ -7 & 2\end{bmatrix}\ ;\ \text{Adj.}(B)=\begin{bmatrix}-3 & 9\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\text{Adj.}(C)=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -3\\ 6 & -12 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

1) $A \bullet \text{Adj.}(A)=(\text{Adj.}(A)) \bullet A=|A| \bullet I.$

2) La adjunta de un producto de matrices cuadradas equidimensionales es el producto de sus respectivas adjuntas, pero en orden contrario:

$$\text{Adj.}(A \bullet B \bullet C)=((\text{Adj.}(C)) \bullet ((\text{Adj.}(B)) \bullet ((\text{Adj.}(A))$$

3) Si "A" es cuadrada de orden "n", como $A \bullet \text{Adj.}(A)=|A| \bullet I$, tomando determinantes, resulta ser $|A| . |\text{Adj.}(A)|=||A| \bullet I|=(|A|)^n$; por tanto:

$$|\text{Adj.}(A)|=(|A|)^{n-1}$$

1.16 MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si "A" es una matriz cuadrada de orden "n" e "I" es la matriz unidad del mismo orden que "A", se llama **inversa** de "A" y se denota A^{-1} a la matriz cuadrada de orden "n" tal que $A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = I$. Se demuestra que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \text{Adj.}(A)$$

Como está prohibido dividir por cero, la expresión anterior no tiene sentido si $|A| = 0$; es decir, toda matriz **singular** carece de inversa.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \text{Adj.}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A| = -1 \ ; \ \text{Adj.}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

1) $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
2) Si "A" es simétrica, A^{-1} también lo es, si existe A^{-1}.
3) La inversa de un producto de matrices regulares del mismo orden es el producto de las inversas en orden contrario: $(A \bullet B \bullet C)^{-1} = C^{-1} \bullet B^{-1} \bullet A^{-1}$.
4) Si "A" tiene inversa, es $|A^{-1}| = 1/|A|$; en efecto:

$$A \bullet A^{-1} = I \Rightarrow |A \bullet A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A| . |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|$$

LEY DE SIMPLIFICACIÓN DE NÚMEROS

Si "a" es un número real no nulo y los números reales "b" y "c" son tales que $a.b = a.c$, entonces $b = c$... pero eso no es cierto si $a = 0$, pues el que sea $0.b = 0.c$ no garantiza que $b = c$. Por ejemplo, $0.3 = 0.7$, pero $3 \neq 7$.

5) Si $|A| \neq 0$, es válida la ley de simplificación: si "B" y "C" son matrices cuadradas del mismo orden que "A" y $A \bullet B = A \bullet C$, entonces $B = C$.

"DESPEJAR" EN UN PRODUCTO DE MATRICES

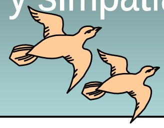
En la ecuación matricial $P \bullet X = Q$ (ó $X \bullet P = Q$) sólo es posible **despejar** "X" si "P" tiene inversa ($\Leftrightarrow$ "P" es cuadrada y $|P| \neq 0$); en tal caso, multiplicando por la izquierda (derecha) ambos miembros por P^{-1}, resulta:

$$P \bullet X = Q \Rightarrow \underbrace{P^{-1} \bullet P}_{I} \bullet X = P^{-1} \bullet Q \Rightarrow X = P^{-1} \bullet Q$$

$$X \bullet P = Q \Rightarrow X \bullet \underbrace{P^{-1} \bullet P}_{I} = Q \bullet P^{-1} \Rightarrow X = Q \bullet P^{-1}$$

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.



Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

Pedrusco "A" = Pedrusco "B" ⇒ Pedrusco "C" = Pedrusco "D"

FONEMATO 1.16.1

Determine "a" para que "A" tenga inversa. Calcule la inversa de "A" si $a = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN ≡ conexión neuronal

CN: Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al exigir que la matriz "A" sea regular (o sea, $|A| \neq 0$), resulta:

$$|A| = a^2 + 4.a - 21 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5 = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

Si $a = 4$, es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \operatorname{Adj}(A) = \frac{1}{11} \bullet \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } a = 4 \Rightarrow |A| = 4^2 + 4.4 - 21 = 11$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

Ventana donde, para facilitar a tu profe la lectura de lo escrito, y diferenciarnos nítidamente de los demás, metemos los calculotes necesarios para resolver la papeleta.

FONEMATO 1.16.2

Determine "a" para que "B" tenga inversa. Calcule la inversa de "B" si $a=1$.

$$B=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ a & 4 & 0\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al exigir que la matriz "B" sea regular (o sea, $|B|\neq 0$), resulta:

$$|B| = a.(a^2-4)\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a\neq 0\\ a^2-4\neq 0 \Rightarrow a\neq \pm 2\end{cases}$$

desarrollamos el determinante por los elementos de la 3ª columna

Si $a=1$, es $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$. Es:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\bullet \mathrm{Adj}(B)=\frac{1}{-3}\bullet\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

VENTANA

Si $a=1\Rightarrow |B|=1.(1^2-4)=-3$

$$B^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{Adj}(B)=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

en B^t sustituimos cada elemento por su adjunto

FONEMATO 1.16.3

Determine "a" para que "C" tenga inversa. Calcule C^{-1}.

$$C=\begin{bmatrix}a & 0 & 1\\ 1 & a & 0\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al exigir que la matriz "C" sea regular, resulta: $|C|=a^3-a+1\neq 0$.

Siendo $a^3-a+1\neq 0$, es:

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}\bullet \mathrm{Adj}(C)=\frac{1}{a^3-a+1}\bullet\begin{bmatrix}a^2 & 1 & -a\\ -a & a^2-1 & 1\\ 1-a & -a & a^2\end{bmatrix}$$

VENTANA

$$C^t=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 0 & a & 1\\ 1 & 0 & a\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{Adj}(C)=\begin{bmatrix}a^2 & 1 & -a\\ -a & a^2-1 & 1\\ 1-a & -a & a^2\end{bmatrix}$$

en C^t sustituimos cada elemento por su adjunto

FONEMATO 1.16.4

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&0&b\end{bmatrix}$.

CN ≡ conexión neuronal

1) ¿Cuándo el determinante de "A" es el seno de algún número real?
2) Calcula la inversa de "A" cuando exista.
3) Determina todos los pares (a,b) para los que "A" coincide con su inversa.

SOLUCIÓN

1) **CN:** El seno toma valores entre -1 y 1, por lo que $|A|=b$ será el seno de algún número real siempre que $-1\leq b\leq 1$.

2) **CN:** La matriz "A" tiene inversa sólo si $|A|=b\neq 0$, y en tal caso:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet \operatorname{Adj}(A)=\frac{1}{b}\bullet\begin{bmatrix}b&0&0\\0&b&0\\-a&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-a/b&0&1/b\end{bmatrix}$$

VENTANA

$$A^t=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&0\\0&0&b\end{bmatrix}\Rightarrow \operatorname{Adj}(A)=\begin{bmatrix}b&0&0\\0&b&0\\-a&0&1\end{bmatrix}$$

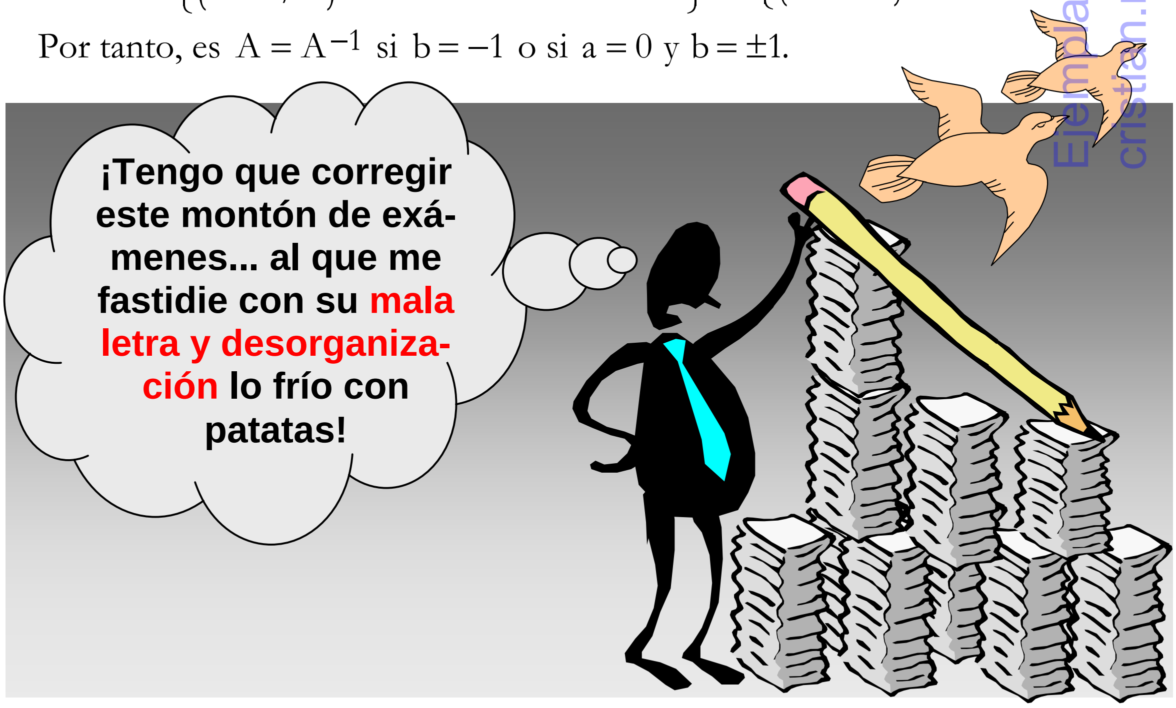
en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

3) Al exigir que $A=A^{-1}$, resulta:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-a/b&0&1/b\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}a=-a/b\Rightarrow\left\{\begin{matrix}a=0\\b=-1\end{matrix}\right\}\\b=1/b\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}a=0\\b=1/b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}a=0\\b^2=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}a=0\\b=\pm 1\end{matrix}\right.\\\left\{\begin{matrix}b=-1\\b=1/b\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}a=0\\b=-1\end{matrix}\right.\\\left\{\begin{matrix}b=\pm 1\\b=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=-1\end{matrix}\right.$$

Por tanto, es $A=A^{-1}$ si $b=-1$ o si $a=0$ y $b=\pm 1$.



FONEMATO 1.16.5

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Si existe, calcule la inversa de "A".

2) Determine una matriz "X" que verifique la ecuación $A \bullet B = A \bullet X \bullet A$.

SOLUCIÓN

1) **CN:** Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

En nuestro caso existe A^{-1}, pues $|A| = 9 \neq 0$. Es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} -4 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

VENTANA

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

2) Se tiene:

premultiplicamos y postmultiplicamos por A^{-1}

$$A \bullet B = A \bullet X \bullet A \Rightarrow A^{-1} \bullet A \bullet B \bullet A^{-1} = X \Rightarrow X = B \bullet A^{-1}$$

como $A^{-1} \bullet A = I \Rightarrow A^{-1} \bullet A \bullet B \bullet A^{-1} = I \bullet B \bullet A^{-1} = B \bullet A^{-1}$

Si admitimos la **división por cero** es el caos, porque entonces 2 = 1.

multiplicamos por "x" ambos miembros

$$\text{Si } x = y \Rightarrow x^2 = x.y \Rightarrow$$

restamos y^2 a ambos miembros

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = x.y - y^2 \Rightarrow$$

$(x^2 - y^2) = (x + y).(x - y)$; $x.y - y^2 = y.(x - y)$

$$\Rightarrow (x+y).(x-y) = y.(x-y) \Rightarrow$$

dividimos ambos miembros por "x − y"

como $x = y$, es $x + y = 2.y$

EL CAOS

$$\Rightarrow x + y = y \Rightarrow 2.y = y \Rightarrow 2 = 1$$

dividimos ambos miembros por "y"

FONEMATO 1.16.6

Siendo $n \in \mathbb{Z}$, sea $A_n = \begin{bmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{bmatrix}$, $x \in \Re$.

Compruebe que $A_n A_m = A_{n+m}$, y como aplicación calcule A_n^{-1}.

SOLUCIÓN

• Es: $A_n \bullet A_m = \begin{bmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos mx & \operatorname{sen} mx \\ -\operatorname{sen} mx & \cos mx \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos nx . \cos mx - \operatorname{sen} nx . \operatorname{sen} mx & \cos nx . \operatorname{sen} mx + \operatorname{sen} nx . \cos mx \\ -\operatorname{sen} nx . \cos mx - \cos nx . \operatorname{sen} mx & -\operatorname{sen} nx . \operatorname{sen} mx + \cos nx . \cos mx \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a . \cos b + \cos a . \operatorname{sen} b \\ \cos(a+b) = \cos a . \cos b - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b \end{array}}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(nx+mx) & \operatorname{sen}(nx+mx) \\ -\operatorname{sen}(nx+mx) & \cos(nx+mx) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n+m)x & \operatorname{sen}(n+m)x \\ -\operatorname{sen}(n+m)x & \cos(n+m)x \end{bmatrix} = A_{n+m}$$

• La matriz A_n tiene inversa para todo "n", pues es regular para todo "n":

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{vmatrix} = \cos^2 nx + \operatorname{sen}^2 nx = 1$$

• Como $A_0 = \begin{bmatrix} \cos 0 & \operatorname{sen} 0 \\ -\operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, entonces:

$$A_n \bullet A_{-n} = A_{n+(-n)} = A_0 = I \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si el producto de las matrices cuadradas regulares } A_n \text{ y } A_{-n} \text{ es} \\ \text{la matriz unidad, entonces } A_n \text{ y } A_{-n} \text{ son inversas una de otra} \end{array}}$$

$$\Rightarrow A_n^{-1} = A_{-n} = \begin{bmatrix} \cos(-nx) & \operatorname{sen}(-nx) \\ -\operatorname{sen}(-nx) & \cos(-nx) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos nx & -\operatorname{sen} nx \\ \operatorname{sen} nx & \cos nx \end{bmatrix} = A_n^t$$

$$\boxed{\cos(-a) = \cos a \; ; \; \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a}$$

Α	α	alfa	Ν	ν	nu
Β	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	Ο	ο	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
Ε	ε	épsilon	Ρ	ρ	rho
Ζ	ζ	dseta	Σ	σ,ς	sigma
Η	η	eta	Τ	τ	tau
Θ	ϑ,θ	teta	Υ	υ	ypsilon
Ι	ι	iota	Φ	φ	fi
Κ	κ	kappa	Χ	χ	ji
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
Μ	μ	mu	Ω	ω	omega

FONEMATO 1.16.7

Si "A" es una matriz invertible tal que $|A+I| \neq 0$ y $|A-I| \neq 0$, demuéstrese que la matriz "B" es singular si se verifica que $A \bullet B = A^{-1} \bullet B$.

SOLUCIÓN

$$A \bullet B = A^{-1} \bullet B \Rightarrow A \bullet A \bullet B = A \bullet A^{-1} \bullet B \Rightarrow A^2 \bullet B = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 \bullet B - B = 0 \Rightarrow (A^2 - I) \bullet B = 0 \Rightarrow (A+I) \bullet (A-I) \bullet B = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{A^2 - I = (A+I) \bullet (A-I)}$$

$$\Rightarrow |A+I| . |A-I| . |B| = 0 \Rightarrow |B| = 0$$

$$\boxed{\text{Es } |A+I| \neq 0 \text{ y } |A-I| \neq 0}$$

FONEMATO 1.16.8

Compruébese que la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & \tau & \eta \\ \tau+\eta & \xi+\eta & \xi+\tau \end{bmatrix}$ carece de inversa.

SOLUCIÓN

CN: Para comprobar que "M" carece de inversa debemos comprobar que su determinante es nulo:

$$\boxed{\text{A la tercera fila le sumamos la segunda}}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & \tau & \eta \\ \tau+\eta & \xi+\eta & \xi+\tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & \tau & \eta \\ \xi+\tau+\eta & \xi+\tau+\eta & \xi+\tau+\eta \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\text{Pues las filas primera y tercera son proporcionales}}$$

FONEMATO 1.16.9

Calcule "k" para que $N=\begin{bmatrix}1 & k & 2\\ k & 3 & k\\ 1 & k & 3\end{bmatrix}$ tenga inversa y, en su caso, calcule N^{-1}.

SOLUCIÓN

CN: Para que "N" tenga inversa ha de ser regular (o sea, $|N|\neq 0$):

$$|N|=\begin{vmatrix}1 & k & 2\\ k & 3 & k\\ 1 & k & 3\end{vmatrix}=3-k^2\neq 0 \text{ siempre que } k\neq\pm\sqrt{3}$$

CN ≡ conexión neuronal

Si $k\neq\pm\sqrt{3}$, es:

$$N^{-1}=\frac{1}{|N|}\bullet \text{Adj.}(N)=\frac{1}{3-k^2}\bullet\begin{bmatrix}9-k^2 & -k & k^2-6\\ -2.k & 1 & k\\ k^2-3 & 0 & 3-k^2\end{bmatrix}$$

VENTANA

$$\text{Adj.}(N)=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}3 & k\\ k & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}k & k\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}k & 3\\ 2 & k\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}k & 1\\ k & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & k\\ 2 & k\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}k & 1\\ 3 & k\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ k & k\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & k\\ k & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.10

Calcúlense "X" e "Y" tales que $2\bullet X+3\bullet Y=A$ y $-3\bullet X+Y=B$, siendo:

$$A=\begin{bmatrix}8 & 13\\ -7 & 6\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Se trata de calcular "X" e "Y" de modo que se satisfagan las condiciones (ecuaciones) $2\bullet X+3\bullet Y=A$ y $-3\bullet X+Y=B$. Como todas las matrices de la historia aparecen únicamente multiplicadas por constantes, podremos resolver la papeleta multiplicando las ecuaciones por números adecuados para que, tras sumarlas o restarlas, desaparezca alguna de las incógnitas "X" o "Y":

$$\left.\begin{array}{r}2\bullet X+3\bullet Y=A\\ -3\bullet X+Y=B\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Multiplicamos por -3 la segunda ecuación

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\bullet X+3\bullet Y=A\\ 9\bullet X-3\bullet Y=-3\bullet B\end{array}\right\}\Rightarrow 11\bullet X=A-3\bullet B\Rightarrow$$

Sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro

$$\Rightarrow 11\bullet X=\begin{bmatrix}8 & 13\\ -7 & 6\end{bmatrix}-3\bullet\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 22\\ -22 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

De la segunda ecuación dada se deduce que:

$$Y=B+3\bullet X=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}+3\bullet\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.11

Calcúlense "X" e "Y" tales que $X + A \bullet Y = I$ y $X - 3 \bullet Y = 0$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \;;\; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;;\; 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Se trata de calcular "X" e "Y" de modo que se satisfagan las **condiciones** (ecuaciones) $X + A \bullet Y = I$ y $X - 3 \bullet Y = 0$... y no hace falta ser un lince para darse cuenta de que como "X" aparece sola en ambas ecuaciones, si restamos las ecuaciones miembro a miembro **desaparece** la incógnita "X":

$$\left.\begin{array}{r} X + A \bullet Y = I \\ X - 3 \bullet Y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A \bullet Y + 3 \bullet Y = I \Rightarrow (A + 3 \bullet I) \bullet Y = I \Rightarrow$$

En este trance, al sacar factor común "Y" por la derecha, siempre hay algún **pardillo** que escribe $A \bullet Y + 3 \bullet Y = (A + 3) \bullet Y$, con lo que obtiene una suma absurda: la suma de la matriz "A" (cuadrada de orden 2) y el número 3. **Lo correcto** es:

$$A \bullet Y + 3 \bullet Y = A \bullet Y + 3 \bullet I \bullet Y = (A + 3 \bullet I) \bullet Y$$

$$\Rightarrow (A + 3 \bullet I)^{-1} \bullet (A + 3 \bullet I) \bullet Y = (A + 3 \bullet I)^{-1} \Rightarrow$$

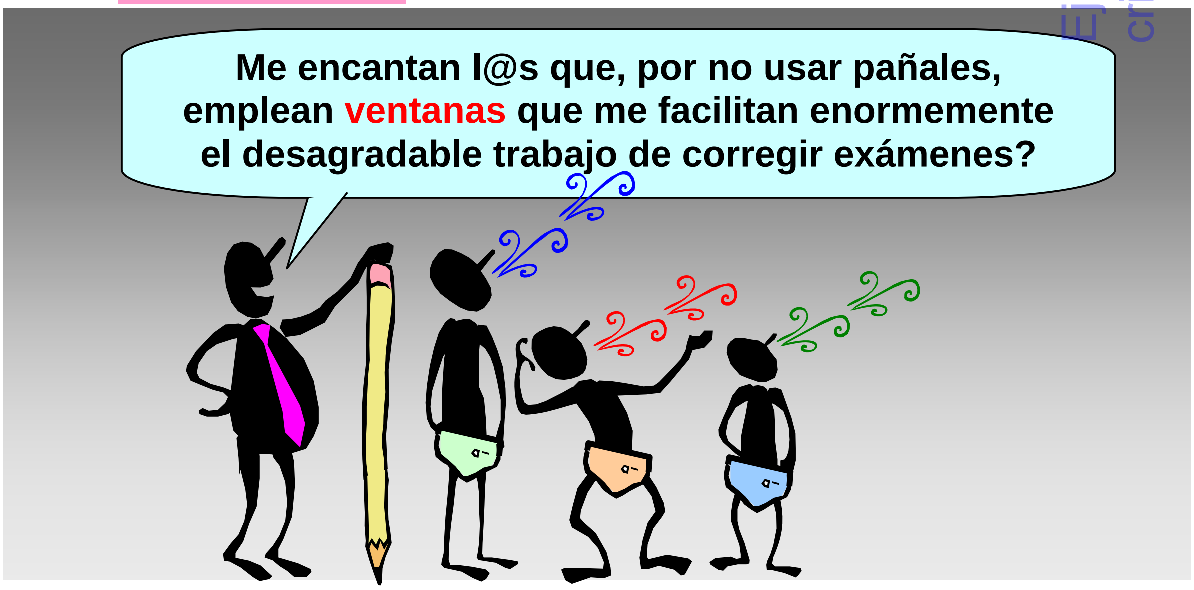
Para despejar "Y" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por $(A + 3 \bullet I)^{-1}$, pues $(A + 3 \bullet I)^{-1} \bullet (A + 3 \bullet I) = I$

$$\Rightarrow Y = (A + 3 \bullet I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \Rightarrow X = 3 \bullet Y = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Si $H = A + 3 \bullet I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \dfrac{1}{|H|} \bullet \text{Adj.}(H) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$

$$|H| = 20 \;;\; \text{Adj.}(H) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

VENTANAS



FONEMATO 1.16.12

¿Para qué valores de "k" la matriz "A" carece de inversa? Calcule A^{-1} si $k = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & k & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular:

$$|A| = 9 - 3.k \neq 0 \Rightarrow k \neq 3$$

Si $k = 4$, es $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{-3} \bullet \begin{bmatrix} 7 & -9 & 8 \\ -3 & 3 & -3 \\ 12 & -15 & 12 \end{bmatrix}$$

VENTANA

Si $k = 4$, entonces es $|A| = -3$

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 7 & -9 & 8 \\ -3 & 3 & -3 \\ 12 & -15 & 12 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

FONEMATO 1.16.13

Resuelva razonadamente la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Debemos determinar la matriz "X" que satisface la ecuación (condición de igualdad) matricial dada:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

para despejar "X" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros por la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \ldots$$

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es regular $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet Adj(A) = \frac{1}{|A|} \bullet \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

FONEMATO 1.16.14

Encuentre dos matrices "X" e "Y", de orden 2×2 con coeficientes reales tales que $AX + BY = C$ y $AX = Y$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Debemos determinar las matrices "X" e "Y" que satisfacen las dos ecuaciones (condiciones de igualdad) matriciales dadas.

Sustituyendo AX por Y en la primera ecuación, resulta:

$$Y + BY = C \Rightarrow (I + B)Y = C \Rightarrow Y = (I + B)^{-1}C = ...$$

para despejar "Y" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros por la inversa de la matriz $I + B$

Como $AX = Y$ e $Y = (I + B)^{-1}C$, resulta ser:

$$AX = (I + B)^{-1}C \Rightarrow X = A^{-1}(I + B)^{-1}C = ...$$

para despejar "X" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros por la inversa de la matriz A

FONEMATO 1.16.15

Sea la ecuación matricial $X \bullet A = B$, siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

1) ¿Cuáles son las dimensiones de una matriz solución de la ecuación anterior?
2) Calcula una solución. ¿Es única la solución? Razona la respuesta.

SOLUCIÓN

1) Si "X" es de orden $m \times n$, para que el producto $X \bullet A$ tenga sentido debe ocurrir que el número "n" de columnas de "X" sea igual al de filas de "A"; por tanto, debe ser $n = 2$. Siendo "X" de orden $m \times 2$, para que $X \bullet A$ sea una matriz de orden 3×2 (como es "B") debe ocurrir que $m = 3$.

2) **CN:** Se trata de encontrar una matriz "X" que satisfaga la condición (ecuación) dada $X \bullet A = B$; para despejar "X" postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) por A^{-1} los dos miembros de $X \bullet A = B$:

$$X \bullet A = B \Rightarrow X = B \bullet A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -5 \\ 13 & -7 \end{bmatrix}$$

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es regular $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{|A|} \bullet \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

• La solución es única, pues la matriz "A" es regular.

FONEMATO 1.16.16

Calcule todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa, determinando el cuadrado de dichas matrices.

SOLUCIÓN

- Siendo $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ tal que $|A| = a.b \neq 0$, al exigir que $A^{-1} = A$, resulta:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{a.b} \bullet \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/a = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ 1/b = b \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \end{cases}$$

Así, hay cuatro matrices diagonales de orden 2 que coinciden con su inversa:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Si $A = A^{-1} \Rightarrow A \bullet A = A \bullet A^{-1} = I$.

FONEMATO 1.16.17

Despeje X en la ecuación matricial $(A \bullet X - C)^{-1} - B^{-1} = 0$.

SOLUCIÓN

$$(A \bullet X - C)^{-1} - B^{-1} = 0 \Rightarrow (A \bullet X - C)^{-1} = B^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\text{Pepa})^{-1} = (\text{Juana})^{-1} \Rightarrow \text{Pepa} = \text{Juana}}$$

$$\Rightarrow A \bullet X - C = B \Rightarrow A \bullet X = B + C \Rightarrow$$

premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, supuesto que existe A^{-1}

$$\Rightarrow A^{-1} \bullet A \bullet X = A^{-1} \bullet (B + C) \Rightarrow X = A^{-1} \bullet (B + C)$$

$$\boxed{A^{-1} \bullet A = I}$$

FONEMATO 1.16.18

Sean A, B y X matrices cuadradas de orden "n", siendo A regular.
Despeje X en la ecuación matricial $(X - 3 \bullet I) \bullet A - B \bullet A = I$.

SOLUCIÓN

$$(X - 3 \bullet I) \bullet A - B \bullet A = I \Rightarrow (X - 3 \bullet I) \bullet A = I + B \bullet A \Rightarrow$$

postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, que existe, pues "A" es regular

$$\Rightarrow (X - 3 \bullet I) \bullet A \bullet A^{-1} = (I + B \bullet A) \bullet A^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{A \bullet A^{-1} = I}$$

$$\Rightarrow X - 3 \bullet I = (I + B \bullet A) \bullet A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 3 \bullet I + (I + B \bullet A) \bullet A^{-1} = 3 \bullet I + A^{-1} + B$$

LA INEFICIENCIA SEGÚN MURPHY

Para estimar el tiempo que requiere una tarea, estímese el tiempo que debería requerir, multiplíquese por dos y elévese la medición a la mayor unidad subsiguiente. Así, asignamos dos días para una tarea de una hora.

FONEMATO 1.16.19

Sean A y B matrices regulares de orden "n".
Despeje X en la ecuación matricial $(X \bullet B^{-1} - I) \bullet A = I.$

SOLUCIÓN

$$(X \bullet B^{-1} - I) \bullet A = I \Rightarrow$$

postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, que existe, pues "A" es regular

$$\Rightarrow (X \bullet B^{-1} - I) \bullet A \bullet A^{-1} = A^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{A \bullet A^{-1} = I}$$

$$\Rightarrow X \bullet B^{-1} - I = A^{-1} \Rightarrow X \bullet B^{-1} = I + A^{-1} \Rightarrow$$

postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros de la ecuación por "A"

$$\Rightarrow X \bullet B^{-1} \bullet B = (I + A^{-1}) \bullet B \Rightarrow X = (I + A^{-1}) \bullet B$$

$$\boxed{B^{-1} \bullet B = I}$$

FONEMATO 1.16.20

Despeje X en la ecuación matricial $(A^t \bullet A \bullet X)^{-1} = (A^t \bullet B)^{-1}.$

SOLUCIÓN PROFESIONAL (CON VENTANAS)

$$(A^t \bullet A \bullet X)^{-1} = (A^t \bullet B)^{-1} \Rightarrow A^t \bullet A \bullet X = A^t \bullet B \Rightarrow$$

$$\boxed{(\text{Pepa})^{-1} = (\text{Juana})^{-1} \Rightarrow \text{Pepa} = \text{Juana}}$$

Supuesto que "A" es regular ($\Rightarrow A^t$ también lo es $\Rightarrow$ existe $(A^t)^{-1}$), premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por $(A^t)^{-1}$

$$\Rightarrow (A^t)^{-1} \bullet A^t \bullet A \bullet X = (A^t)^{-1} \bullet A^t \bullet B \Rightarrow$$

$$\boxed{(A^t)^{-1} \bullet A^t = I}$$

$$\Rightarrow A \bullet X = B \Rightarrow X = A^{-1} \bullet B$$

SOLUCIÓN SALIVAZO (SIN VENTANAS)

$$(A^t \bullet A \bullet X)^{-1} = (A^t \bullet B)^{-1} \Rightarrow A^t \bullet A \bullet X = A^t \bullet B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^t)^{-1} \bullet A^t \bullet A \bullet X = (A^t)^{-1} \bullet A^t \bullet B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \bullet X = B \Rightarrow X = A^{-1} \bullet B$$

FONEMATO 1.16.21

Despeje X en la ecuación matricial $B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = A$.

SOLUCIÓN PROFESIONAL (CON VENTANAS)

$$B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = A \Rightarrow$$

premultiplicamos los dos miembros por "B"

$$\Rightarrow B \bullet B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = B \bullet A \Rightarrow X^{-1} \bullet A - B \bullet A = B \bullet A \Rightarrow$$

$\boxed{B \bullet B^{-1} = I}$

supuesto que "A" es regular, postmultiplicamos los dos miembros por A^{-1}

$$\Rightarrow X^{-1} \bullet A = 2 \bullet B \bullet A \Rightarrow X^{-1} \bullet A \bullet A^{-1} = 2 \bullet B \bullet A \bullet A^{-1} \Rightarrow$$

$\boxed{A \bullet A^{-1} = I}$

$\boxed{\text{Pepa} = \text{Juana} \Rightarrow (\text{Pepa})^{-1} = (\text{Juana})^{-1}}$

$$\Rightarrow X^{-1} = 2 \bullet B \Rightarrow (X^{-1})^{-1} = (2 \bullet B)^{-1} \Rightarrow X = (2 \bullet B)^{-1} = \frac{1}{2} \bullet B^{-1}$$

VENTANA

$$(2 \bullet B)^{-1} = \frac{\text{Adj.}((2 \bullet B)}{|2 \bullet B|} = \frac{2^{k-1}.\text{Adj.}(B)}{2^k.|B|} = \frac{\text{Adj.}(B)}{2.|B|} = \frac{1}{2}.B^{-1}$$

Supuesto que "B" es cuadrada de orden "k", se tiene que:

$$|2 \bullet B| = 2^k.|B| \;;\; \text{Adj.}(2 \bullet B) = 2^{k-1}.\text{Adj.}(B)$$

Siendo $2 \bullet B = \{2.b_{ij}\}$, el adjunto del elemento $2.b_{ij}$ se obtiene al multiplicar por 2 las "$k-1$" líneas del adjunto del elemento b_{ij} de la matriz "B"

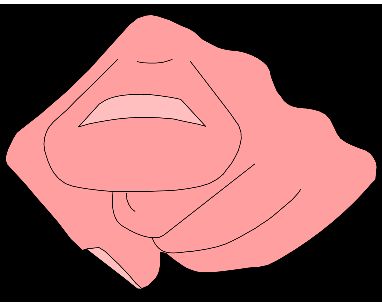
SOLUCIÓN SALIVAZO (SIN VENTANAS)

$$B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \bullet B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = B \bullet A \Rightarrow X^{-1} \bullet A - B \bullet A = B \bullet A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^{-1} \bullet A = 2 \bullet B \bullet A \Rightarrow X^{-1} \bullet A \bullet A^{-1} = 2 \bullet B \bullet A \bullet A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^{-1} = 2 \bullet B \Rightarrow (X^{-1})^{-1} = (2 \bullet B)^{-1} \Rightarrow X = (2 \bullet B)^{-1} = \frac{1}{2} \bullet B^{-1}$$



Si fueras tú el profe, ¿qué solución preferirías corregir?

FONEMATO 1.16.22

Despeje X en la ecuación matricial $(B \bullet A - B \bullet X) \bullet A^{-1} = (A \bullet B^{-1})^{-1}$.

SOLUCIÓN PROFESIONAL (CON VENTANAS)

$$(B \bullet A - B \bullet X) \bullet A^{-1} = (A \bullet B^{-1})^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{postmultiplicamos los dos miembros por "A"}}$$

$$\Rightarrow B \bullet A - B \bullet X = (A \bullet B^{-1})^{-1} \bullet A \Rightarrow$$

$$\boxed{(A \bullet B^{-1})^{-1} = (B^{-1})^{-1} \bullet A^{-1} = B \bullet A^{-1}}$$

$$\Rightarrow B \bullet A - B \bullet X = B \bullet A^{-1} \bullet A \Rightarrow$$

$$\boxed{A \bullet A^{-1} = I}$$

$$\Rightarrow B \bullet A - B \bullet X = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \bullet X = B \bullet A - B \Rightarrow X = B^{-1} \bullet (B \bullet A - B) \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{premultiplicamos los dos miembros por } B^{-1}}$$

$$\Rightarrow X = B^{-1} \bullet B \bullet A - B^{-1} \bullet B \Rightarrow X = A - I$$

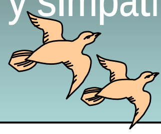
$$\boxed{B^{-1} \bullet B = I}$$

SOLUCIÓN SALIVAZO (SIN VENTANAS)

$$(B \bullet A - B \bullet X) \bullet A^{-1} = (A \bullet B^{-1})^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B \bullet A - B \bullet X = (A \bullet B^{-1})^{-1} \bullet A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B \bullet A - B \bullet X = B \bullet A^{-1} \bullet A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B \bullet A - B \bullet X = B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B \bullet X = B \bullet A - B \Rightarrow X = B^{-1} \bullet (B \bullet A - B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = B^{-1} \bullet B \bullet A - B^{-1} \bullet B \Rightarrow X = A - I$$

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.



Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

Pedrusco "A"= Pedrusco "B" ⇒ Pedrusco "C"= Pedrusco "D"

FONEMATO 1.16.23

Sea $B \in M_{n\times 1}$ tal que $B^t \bullet B = 1$ e "I" la matriz unidad de orden "n".
Si $A = I - 2 \bullet B \bullet B^t$, demuestre que "A" es simétrica y que $A \bullet A^t = I$.

SOLUCIÓN

- **CN:** Demostraremos que "A" es simétrica si demostramos que $A^t = A$:

La traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas; es $I^t = I$

$$A^t = (I - 2 \bullet B \bullet B^t)^t = I - 2 \bullet (B \bullet B^t)^t =$$

Traspuesta de un producto = Producto de las traspuestas en orden contrario

$$= I - 2 \bullet (B^t)^t \bullet B^t = I - 2 \bullet B \bullet B^t = A$$

- Demostremos que $A \bullet A^t = I$:

$$A \bullet A^t = (I - 2 \bullet B \bullet B^t) \bullet (I - 2 \bullet B \bullet B^t) = I - 4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet B^t \bullet B \bullet B^t =$$
$$= I - 4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet (B^t \bullet B) \bullet B^t = I - 4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet B^t = I$$

Según se nos dice, es $B^t \bullet B = 1$

FONEMATO 1.16.24

Sea "C" una matriz regular tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$ y $C^{-1} \bullet B \bullet C = H$, siendo "D" y "H" matrices diagonales. Demuéstrese que $A \bullet B = B \bullet A$.

SOLUCIÓN

CN: Despejemos "A" y "B" y efectuemos los productos $A \bullet B$ y $B \bullet A$:

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = D \Rightarrow C \bullet C^{-1} \bullet A \bullet C \bullet C^{-1} = C \bullet D \bullet C^{-1} \Rightarrow A = C \bullet D \bullet C^{-1}$$

Premultiplicamos por "C" y postmultiplicamos por C^{-1}

$$C^{-1} \bullet B \bullet C = H \Rightarrow C \bullet C^{-1} \bullet B \bullet C \bullet C^{-1} = C \bullet H \bullet C^{-1} \Rightarrow B = C \bullet H \bullet C^{-1}$$

Es:

$$\left.\begin{array}{l} A \bullet B = (C \bullet D \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet H \bullet C^{-1}) = C \bullet D \bullet H \bullet C^{-1} \\ B \bullet A = (C \bullet H \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet H \bullet D \bullet C^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow A \bullet B = B \bullet A$$

Siendo "diagonales" las matrices "D" y "H", es $D \bullet H = H \bullet D$

1.17 MATRIZ ORTOGONAL

Siendo "A" una matriz cuadrada con determinante no nulo e "I" es la matriz unidad del mismo orden que "A", se dice que "A" es **ortogonal** si $A \bullet A^t = I$, o lo que es igual: $A^t = A^{-1}$.

Por ejemplo, las siguientes matrices son ortogonales:

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

1) El determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1.

En efecto, si $A \bullet A^t = I$, es

$$|A|.|A^t| = |I| = 1$$

y como $|A| = |A^t|$, resulta:

$$|A|.|A| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

2) Si "A" es ortogonal, A^{-1} también lo es, y para demostrarlo debemos demostrar que $A^{-1} \bullet (A^{-1})^t = I$.

En efecto:

$$\boxed{\text{"A" ortogonal} \Rightarrow A^{-1} = A^t}$$

$$A^{-1} \bullet (A^{-1})^t = A^{-1} \bullet (A^t)^t = A^{-1} \bullet A = I$$

$$\boxed{\text{Siempre es } (A^t)^t = A}$$

3) Si "A" es ortogonal, A^t también lo es, y para demostrarlo debemos demostrar que $A^t \bullet (A^t)^t = I$.

En efecto:

$$A^t \bullet (A^t)^t = A^t \bullet A = A^{-1} \bullet A = I$$

$$\boxed{\text{Es sabido que } (A^t)^t = A} \qquad \boxed{\text{"A" ortogonal} \Rightarrow A^t = A^{-1}}$$

4) Si "A" y "B" son ortogonales del mismo orden, $A \bullet B$ también es ortogonal, y para demostrarlo debemos demostrar que $(A \bullet B) \bullet (A \bullet B)^t = I$.

En efecto, si $A \bullet A^t = I$ y $B \bullet B^t = I$, es:

$$(A \bullet B) \bullet (A \bullet B)^t = (A \bullet B) \bullet B^t \bullet A^t = A \bullet (B \bullet B^t) \bullet A^t = A \bullet A^t = I$$

$$\boxed{(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t} \qquad \boxed{B \bullet B^t = I}$$

FONEMATO 1.17.1

1) Sean A, B y C matrices cuadradas de orden "n", siendo B regular y C ortogonal. Despéjese X en la ecuación matricial $C \bullet (A - X) \bullet B = B$.

2) Sean A, B y C matrices cuadradas de orden "n", siendo B regular y C ortogonal. Despéjese X en la ecuación matricial $B \bullet (A - 3 \bullet X) \bullet C^t = I$.

SOLUCIÓN

1)

$$C \bullet (A - X) \bullet B = B \Rightarrow$$

postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros de la ecuación por B^{-1}, que existe, pues "B" es regular

$$\Rightarrow C \bullet (A - X) \bullet B \bullet B^{-1} = B \bullet B^{-1} \Rightarrow C \bullet (A - X) = I \Rightarrow$$

$$\boxed{B \bullet B^{-1} = I}$$

premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por C^{-1}, que existe, pues "C" es ortogonal

$$\Rightarrow C^{-1} \bullet C \bullet (A - X) = C^{-1} \Rightarrow A - X = C^{-1} \Rightarrow X = A - C^{-1}$$

$$\boxed{\text{"C" ortogonal} \Rightarrow C^{-1} \bullet C = I}$$

2)

$$B \bullet (A - 3 \bullet X) \bullet C^t = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1} \bullet B \bullet (A - 3 \bullet X) \bullet C^t = B^{-1} \Rightarrow$$

premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por B^{-1}, que existe, pues "B" es regular

$$\Rightarrow (A - 3 \bullet X) \bullet C^t = B^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{B^{-1} \bullet B = I}$$

postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros de la ecuación por $(C^t)^{-1}$, que existe, pues C^t es ortogonal, por serlo "C"

$$\Rightarrow (A - 3 \bullet X) \bullet C^t \bullet (C^t)^{-1} = B^{-1} \bullet (C^t)^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{C^t \bullet (C^t)^{-1} = I}$$

$$\Rightarrow A - 3 \bullet X = B^{-1} \bullet (C^t)^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{"C" ortogonal} \Rightarrow C^t = C^{-1} \Rightarrow (C^t)^{-1} = (C^{-1})^{-1} = C}$$

$$\Rightarrow A - 3 \bullet X = B^{-1} \bullet C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \bullet X = A - B^{-1} \bullet C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{3} \bullet (A - B^{-1} \bullet C)$$

FONEMATO 1.17.2

Siendo A una matriz ortogonal, despeje X en la siguiente ecuación matricial:

$$I+(A^t\bullet X\bullet A)^{-1}+A^2=(A^t-2\bullet I)\bullet A+(A+I)^2$$

SOLUCIÓN

$$I+(A^t\bullet X\bullet A)^{-1}+A^2=(A^t-2\bullet I)\bullet A+(A+I)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I+(A^t\bullet X\bullet A)^{-1}+A^2=A^t\bullet A-2\bullet A+A^2+2\bullet A+I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^t\bullet X\bullet A)^{-1}=A^t\bullet A\Rightarrow (A^t\bullet X\bullet A)^{-1}=I\Rightarrow A^t\bullet X\bullet A=I\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{"A" ortogonal}\Rightarrow A^t\bullet A=I}$$

$$\Rightarrow (A^t)^{-1}\bullet A^t\bullet X\bullet A\bullet A^{-1}=(A^t)^{-1}\bullet I\bullet A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=(A^t)^{-1}\bullet A^{-1}=(A^{-1})^{-1}\bullet A^{-1}=A\bullet A^{-1}=I$$

$$\boxed{\text{"A" ortogonal}\Rightarrow A^t=A^{-1}}$$

FONEMATO 1.17.3

Despeje X en la ecuación matricial $(A-I)^{-1}\bullet X\bullet A^t=A^t+I$, siendo A y X matrices cuadradas de orden "n", con A ortogonal y $(A-I)$ regular.

SOLUCIÓN PROFESIONAL (CON VENTANAS)

$$(A-I)^{-1}\bullet X\bullet A^t=A^t+I\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{premultiplicamos los dos miembros por "}A-I\text{"}}$$

$$\Rightarrow X\bullet A^t=(A-I)\bullet(A^t+I)=A\bullet A^t+A-A^t-I=I+A-A^t-I\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{"A" ortogonal}\Rightarrow A^t\bullet A=I}$$

$$\Rightarrow X\bullet A^t=A-A^t\Rightarrow X\bullet A^t\bullet(A^t)^{-1}=(A-A^t)\bullet(A^t)^{-1}\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{postmultiplicamos los dos miembros por }(A^t)^{-1}}$$

$$\Rightarrow X=(A-A^t)\bullet(A^t)^{-1}\Rightarrow X=(A-A^t)\bullet A\Rightarrow X=A^2-A^t\bullet A\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{"A" ortogonal}\Rightarrow A^t=A^{-1}\Rightarrow (A^t)^{-1}=(A^{-1})^{-1}=A}$$

$$\boxed{\text{"A" ortogonal}\Rightarrow A\bullet A^t=I}$$

$$\Rightarrow X=A^2-I$$

SOLUCIÓN SALIVAZO (SIN VENTANAS)

$$(A-I)^{-1}\bullet X\bullet A^t=A^t+I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X\bullet A^t=(A-I)\bullet(A^t+I)=A\bullet A^t+A-A^t-I=I+A-A^t-I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X\bullet A^t=A-A^t\Rightarrow X\bullet A^t\bullet(A^t)^{-1}=(A-A^t)\bullet(A^t)^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=(A-A^t)\bullet(A^t)^{-1}\Rightarrow X=(A-A^t)\bullet A\Rightarrow X=A^2-A^t\bullet A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=A^2-I$$

FONEMATO 1.17.4

1) Si las matrices A y C conmutan y las matrices $B - C$ y B son ortogonales, despéjese A en la ecuación matricial $B \bullet A - A \bullet C = B$.

2) Sea "B" una matriz de orden $n \times 1$ tal que $B^t \bullet B = 1$ e "I" la matriz unidad de orden "n". Si $A = I - 2 \bullet B \bullet B^t$, demuestre que "A" es simétrica y ortogonal.

SOLUCIÓN

1)

$$B \bullet A - A \bullet C = B \Rightarrow B \bullet A - C \bullet A = B \Rightarrow$$

$A \bullet C = C \bullet A$, pues "A" y "C" conmutan

$(B - C)^{-1} \bullet (B - C) = I$

$$\Rightarrow (B - C) \bullet A = B \Rightarrow (B - C)^{-1} \bullet (B - C) \bullet A = (B - C)^{-1} \bullet B \Rightarrow$$

premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la la ecuación por $(B - C)^{-1}$, que existe, pues "$B - C$" es ortogonal

"$B - C$" ortogonal $\Rightarrow (B - C)^{-1} = (B - C)^t$

$$\Rightarrow A = (B - C)^{-1} \bullet B \Rightarrow A = (B - C)^t \bullet B \Rightarrow$$

$(B - C)^t = B^t - C^t$

$$\Rightarrow A = (B^t - C^t) \bullet B \Rightarrow A = B^t \bullet B - C^t \bullet B \Rightarrow A = I - C^t \bullet B$$

"B" ortogonal $\Rightarrow B^t \bullet B = I$

2) **CN:** Demostraremos que "A" es simétrica si demostramos que $A^t = A$:

La traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas; es $I^t = I$

$$A^t = (I - 2 \bullet B \bullet B^t)^t = I - 2 \bullet (B \bullet B^t)^t =$$

Traspuesta de un producto = Producto de las traspuestas en orden contrario

$$= I - 2 \bullet (B^t)^t \bullet B^t = I - 2 \bullet B \bullet B^t = A$$

- **CN:** Demostraremos que "A" es ortogonal si demostramos que $A \bullet A^t = I$:

$$A \bullet A^t = (I - 2 \bullet B \bullet B^t) \bullet (I - 2 \bullet B \bullet B^t) =$$
$$= I - 4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet B^t \bullet B \bullet B^t =$$
$$= I - 4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet (B^t \bullet B) \bullet B^t =$$

Según se nos dice, es $B^t \bullet B = 1$

$$= I - 4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet B^t = I$$

OBSERVACIÓN DE MURPHY

Nunca hay tiempo para hacerlo bien, pero siempre lo hay para hacerlo dos veces.

FONEMATO 1.17.5

1) Sea "C" una matriz regular tal que $C^{-1}\bullet A\bullet C = D$ y $C^{-1}\bullet B\bullet C = H$, siendo "D" y "H" matrices diagonales. Demuestre que $A\bullet B = B\bullet A$.
2) Demuestre que una matriz cuadrada "A" es simétrica si existe una matriz ortogonal "P" tal que $P^t\bullet A\bullet P = D$, siendo "D" una matriz diagonal.

SOLUCIÓN

1) **CN:** Despejemos "A" y "B" y efectuemos los productos $A\bullet B$ y $B\bullet A$:

$$C^{-1}\bullet A\bullet C = D \Rightarrow C\bullet C^{-1}\bullet A\bullet C\bullet C^{-1} = C\bullet D\bullet C^{-1} \Rightarrow A = C\bullet D\bullet C^{-1}$$

Premultiplicamos por "C" y postmultiplicamos por C^{-1}

$$C^{-1}\bullet B\bullet C = H \Rightarrow C\bullet C^{-1}\bullet B\bullet C\bullet C^{-1} = C\bullet H\bullet C^{-1} \Rightarrow B = C\bullet H\bullet C^{-1}$$

Es:

$$\left.\begin{array}{l} A\bullet B = (C\bullet D\bullet C^{-1})\bullet(C\bullet H\bullet C^{-1}) = C\bullet D\bullet H\bullet C^{-1} \\ B\bullet A = (C\bullet H\bullet C^{-1})\bullet(C\bullet D\bullet C^{-1}) = C\bullet H\bullet D\bullet C^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow A\bullet B = B\bullet A$$

Siendo "diagonales" las matrices "D" y "H", es $D\bullet H = H\bullet D$

2) **CN:** Demostraremos que "A" es simétrica si demostramos que $A^t = A$:

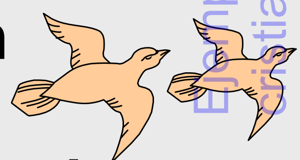
Para despejar "A" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) por "P" y postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) por P^t

$$P^t\bullet A\bullet P = D \Rightarrow P\bullet P^t\bullet A\bullet P\bullet P^t = P\bullet D\bullet P^t \Rightarrow A = P\bullet D\bullet P^t \Rightarrow$$

Como "P" es ortogonal, entonces $P\bullet P^t = P^t\bullet P = I$

$$\Rightarrow A^t = (P\bullet D\bullet P^t)^t = (P^t)^t\bullet D^t\bullet P^t = P\bullet D\bullet P^t = A$$

Traspuesta de un producto = Producto de las traspuestas en orden contrario



El primer objetivo de quien no se chupa el dedo es averiguar cuanto antes si se ha equivocado de Carrera o no... y eso te lo dicen las Matemáticas, no las asignaturas fáciles que aprueba todo el mundo.

1.18 SEMEJANZA Y CONGRUENCIA DE MATRICES CUADRADAS

- Las matrices $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ se dicen **semejantes** si existe una matriz $P_{n\times n}$ tal que $B = P^{-1} \bullet A \bullet P$.

  Dos matrices semejantes tienen igual determinante e igual traza.

  En efecto, si $B = P^{-1} \bullet A \bullet P$, es:

$$|B| = |P^{-1} \bullet A \bullet P| = |P^{-1}|.|A|.|P| = |A|$$

$$\boxed{|P^{-1}|.|P| = 1}$$

$$tr(B) = tr(P^{-1} \bullet A \bullet P) = tr(P^{-1} \bullet (A \bullet P)) = tr((A \bullet P) \bullet P^{-1}) =$$

$$\boxed{Tr(Pepa \bullet Juana) = Tr(Juana \bullet Pepa)}$$

$$= tr(A \bullet P \bullet P^{-1}) = tr(A)$$

$$\boxed{P \bullet P^{-1} = I \Rightarrow A \bullet P \bullet P^{-1} = A}$$

AVISO A NAVEGANTES 1

En el Tema 8 trabajaremos con unas criaturas llamadas endomorfismos: cada endomorfismo lleva pegadas a su espalda infinidad de matrices que lo identifican, y éstas son semejantes.

- Las matrices $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ se dicen **congruentes** si existe una matriz $H_{n\times n}$ tal que $B = H^t \bullet A \bullet H$.

AVISO A NAVEGANTES 2

En el Tema 9 trabajaremos con unas criaturas llamadas formas cuadráticas: cada forma cuadrática lleva pegadas a su espalda infinidad de matrices simétricas que la identifican, y éstas son congruentes.

1.19 SUBMATRICES Y MENORES DE UNA MATRIZ

Si en la matriz "A" seleccionamos los elementos que **a la vez** están en "r" cualquiera de sus filas y en "s" cualquiera de sus columnas, obtenemos una matriz de orden $r \times s$ de la que se dice que es una **submatriz** de "A".

Por ejemplo, si en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 0 & 9 & \pi \end{bmatrix}$$

seleccionamos los elementos que **a la vez** están en la segunda o tercera fila y en la segunda o tercera o cuarta columnas, resulta la submatriz "P"; y si en "A" seleccionamos los elementos que a la vez están en la primera o segunda o cuarta fila y en la segunda o tercera o quinta columna, obtenemos la submatriz "M":

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} ; \; M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

Se llama **menor de orden "k"** de una matriz "A" al determinante de toda submatriz cuadrada de "A" formada por "k" filas y "k" columnas.
Obvio: cada elemento "A" es un menor de orden 1.

- ***Por ejemplo,*** si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, los siguientes determinantes son algunos menores de orden 2 de "A":

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \; ; \; \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \; ; \; \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

El determinante de "A" es el **único menor de orden 3** que tiene "A", siendo obvio que "A" carece de menores de orden superior a 3, pues sólo tiene 3 filas.

- ***Por ejemplo,*** si $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$, los siguientes determinantes son algunos menores de orden 2 de "B":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 18 \; ; \; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -6 \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 22 \; ; \; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Los siguientes determinantes son algunos menores de orden 3 de "B":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 12 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -26 \; ; \; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \end{vmatrix} = -144$$

Obvio: "B" carece de menores de orden superior a 3, pues sólo tiene 3 filas.

- ***Por ejemplo,*** si $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, los siguientes determinantes son algunos menores de orden 2 de "C":

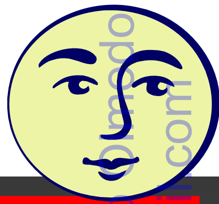
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 \ ; \ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Los siguientes determinantes son algunos menores de orden 3 de "C":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Los siguientes determinantes son algunos menores de orden 4 de "C":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



EXITO SEGURO

Ese es el premio para l@s que educan su voluntad en el rigor: no contentarse nunca con entender a medias; dedicar el tiempo que haga falta, pero comprender, asimilar, progresar.

El rango de la matriz "A" se denota rg(A), y es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

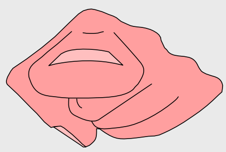
Al afirmar que rg(A) = k se afirma que en "A" hay al menos un menor no nulo de orden "k", siendo nulos todos los menores de orden superior a "k" (si los hay).

Por ejemplo, el que $\mathrm{rg}(A) = 3$ significa que en "A" hay AL MENOS un menor no nulo de orden 3, siendo nulos TODOS los menores de orden superior a 3 (si los hay).

Obvio: es $\mathrm{rg}(A) = 0$ sólo si "A" es la matriz nula; y si "A" no es la matriz nula entonces $\mathrm{rg}(A) \geq 1$. Siendo "A" de orden $m \times n$, es $\mathrm{rg}(A) \leq \text{mín.}\{m; n\}$.

PROPIEDADES DEL RANGO

1) El rango de una matriz coincide con el de su matriz traspuesta.
2) El rango de una matriz no varía si cambiamos el orden de filas o columnas.
3) El rango de una matriz no varía si multiplicamos una línea por un número distinto de cero.
4) El rango de una matriz no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos otras paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera.
5) El rango de una matriz no varía si suprimimos una línea de ceros.
6) Si una línea es suma de otras paralelas a ella multiplicadas por ciertos números, el rango de una matriz no varía si suprimimos dicha línea.



Toma buena nota de las propiedades del rango: te ahorrarán mucho trabajo.

Por ejemplo, sea el problema de calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 9 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Siendo "A" de orden 5×7, es $\mathrm{rg}(A) \le \text{mín.}\{5;7\} = 5$... y vemos que:

- Las columnas 1ª, 3ª y 6ª son iguales; por eso podemos eliminar dos de ellas sin que se altere el rango. Eliminamos las columnas 3ª y la 6ª; o sea:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 9 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

- La 3ª columna de A_1 está formada por ceros; por eso podemos eliminar dicha columna sin que se altere el rango; o sea:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A_2}$$

- La 3ª columna de A_2 es el triple de la 2ª; por eso podemos eliminar una de ellas sin que se altere el rango. Eliminamos la 5ª columna:

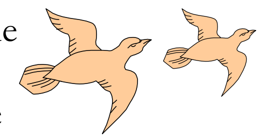
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_2) = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A_3}$$

- La 3ª columna de A_3 es suma de la 1ª y la 2ª; por eso podemos eliminar la 3ª columna sin que se altere el rango:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_2) = \mathrm{rg}(A_3) = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}}_{A_4} = 2$$

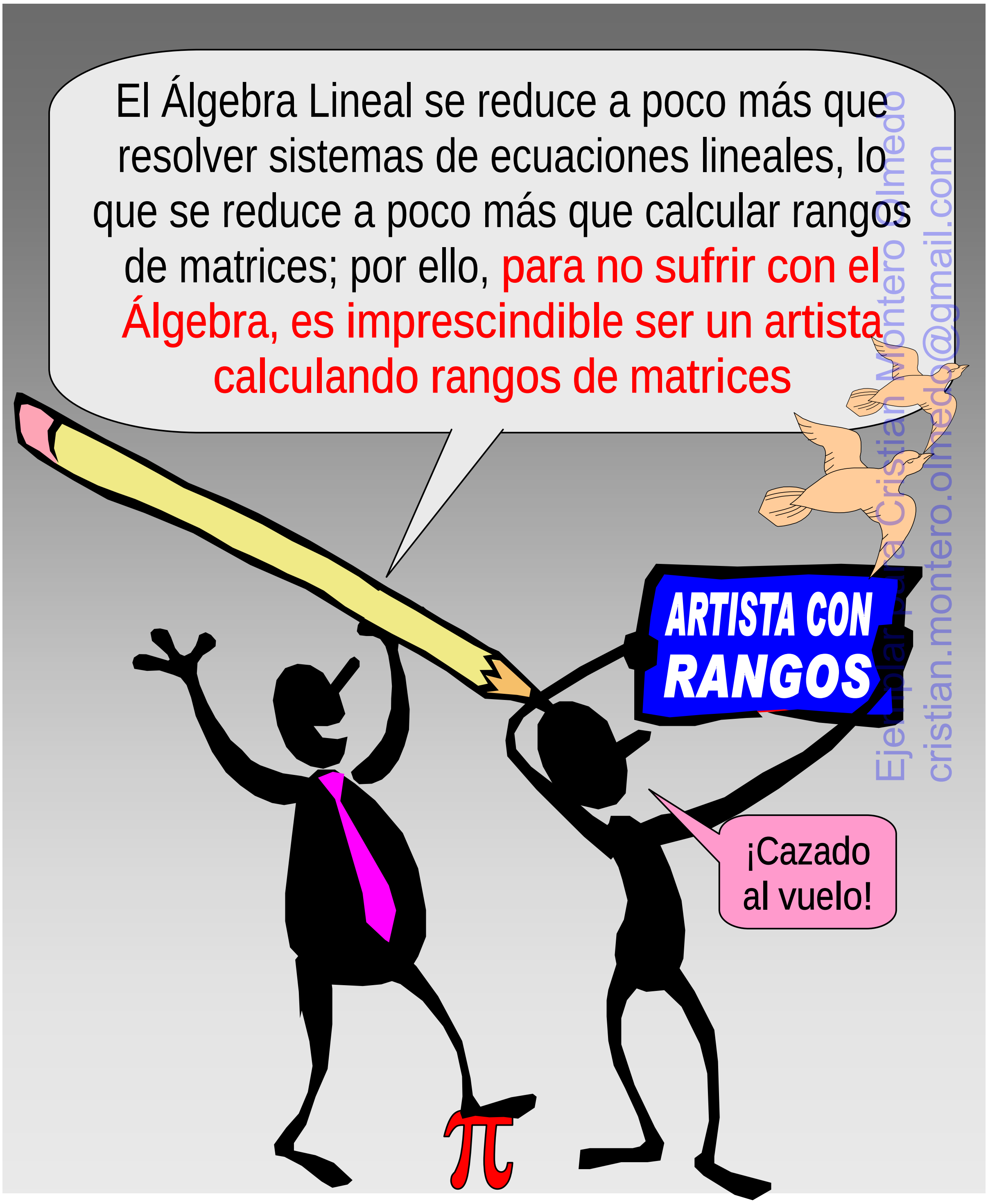
$\boxed{\text{pues } \mathrm{rg}(A_4) \le 2 \text{ y el menor de orden 2 indicado es no nulo}}$

- **Toma muy buena nota:** la matriz "A" tiene un montón de menores de orden 3, un montón de menores de orden 4 y un montón de menores de orden 5... y como sabemos que $\mathrm{rg}(A) = 2$, sin calcular ninguno de dichos menores, podemos apostar tranquilamente la vida a que todos son nulos.



CÁLCULO DEL RANGO

Dada una matriz "A", el cálculo de su rango (orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden) podemos hacerlo calculando ordenadamente menores de "A" (ejercicios 1.20.1 a 1.20.18) o realizando transformaciones elementales con los elementos de "A" (ejercicios 1.20.19 a 1.20.21).



FONEMATO 1.20.1

Calcúlese el rango de la matriz $A=\begin{bmatrix}1&1&3&1&3&1\\2&1&5&3&4&0\\3&1&7&5&5&-1\end{bmatrix}$.

SOLUCION

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden. Como "A" es de orden 3×6, carece de menores de orden 4; por tanto, el máximo rango que puede tener es 3. En "A" seleccionamos, si existe, un menor no nulo de orden 2. Por ejemplo, elegimos el menor H_1 correspondiente a la esquina superior izquierda de "A":

$$H_1=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\neq 0$$

Al haber encontrado en "A" un menor no nulo de orden 2, podemos afirmar que $rg(A)\geq 2$... y nos importa un pito si en "A" hay o no otros menores no nulos de orden 2; lo que ahora nos preocupa es saber si en "A" hay algún menor no nulo de orden 3, pues si encontramos algún menor no nulo de orden 3, podremos asegurar que $rg(A)=3$ (ya que $rg(A)<4$); y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 3, podremos afirmar que $rg(A)=2$.

Para construir menores de orden 3, orlamos el menor no nulo H_1 (formado por las filas primera y segunda) con la tercera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A". O sea, a la matriz cuadrada cuyo determinante es H_1 le añadimos la tercera fila de "A" y sucesivamente cada una de las restantes columnas de "A"; así obtenemos los siguientes menores de orden 3:

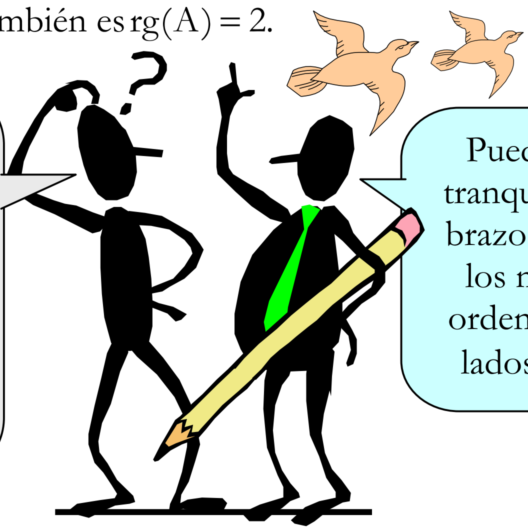
$$\begin{vmatrix}1&1&3\\2&1&5\\3&1&7\end{vmatrix}=0\;;\;\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&3\\3&1&5\end{vmatrix}=0\;;\;\begin{vmatrix}1&1&3\\2&1&4\\3&1&5\end{vmatrix}=0\;;\;\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&0\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar el menor no nulo H_1 con la tercera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A", significa que podemos eliminar dicha tercera fila sin que se altere el rango de la matriz; es decir, las matrices A y A_1 tienen igual rango:

$$A_1=\begin{bmatrix}1&1&3&1&3&1\\2&1&5&3&4&0\end{bmatrix}$$

Por tanto, como $rg(A_1)=2$, también es $rg(A)=2$.

¡Para el carro!... además de los 4 menores de orden 3 que hemos calculado, la matriz dada $A_{3\times 6}$ tiene otro montón de menores de orden 3 que no hemos calculado... ¿Seguro que son nulos todos?



Puedes apostar tranquilamente un brazo a que todos los menores de orden 3 no calculados son nulos

FONEMATO 1.20.2

Calcúlese el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCION

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden. Como "A" es de orden 3×6, carece de menores de orden 4; por tanto, el máximo rango que puede tener es 3.

En "A" seleccionamos, si existe, un menor no nulo de orden 2. Por ejemplo, elegimos el menor H_1 correspondiente a la esquina inferior izquierda de "A":

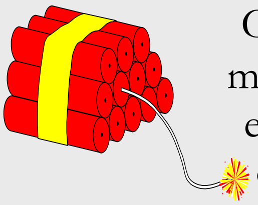
$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Habiendo encontrado en "A" un menor no nulo de orden 2, podemos afirmar que rg(A)≥ 2... e importa un pito si en "A" hay o no otros menores no nulos de orden 2; lo que ahora nos preocupa es saber si en "A" hay o no algún menor no nulo de orden 3, pues si encontramos algún menor no nulo de orden 3, podremos asegurar que $\text{rg}(A) = 3$ (ya que $\text{rg}(A) < 4$); y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 3, podremos afirmar que $\text{rg}(A) = 2$.

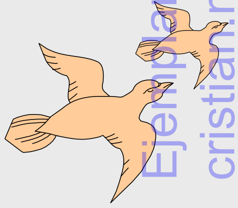
Para construir menores de orden 3, orlamos el menor no nulo H_1 (formado por las filas segunda y tercera) con la primera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A". O sea, a la matriz cuadrada cuyo determinante es H_1 le añadimos la primera fila de "A" y sucesivamente cada una de las restantes columnas de "A"; así obtenemos los siguientes menores de orden 3:

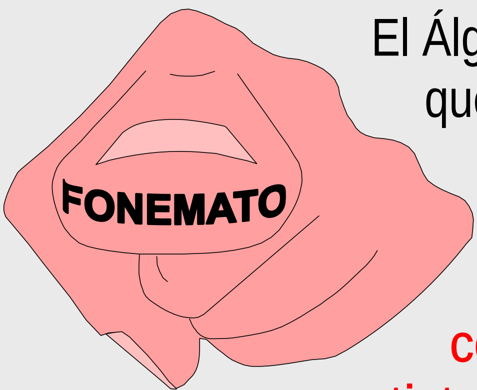
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Es $\text{rg}(A) = 3$, pues hemos localizado un menor no nulo de orden 3.



Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.





El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.

FONEMATO 1.20.3

Calcúlese el rango de $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&-2\\2&1&-1\end{bmatrix}$ y de $B=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&-2\\1&0&-1\end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

El rango de una matriz es el orden del menor no nulo que tenga mayor orden.

- Como "A" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $\mathrm{rg}(A)\geq 2$:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&-2\\2&1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow H_1=\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \mathrm{rg}(A)\geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_1 con la tercera fila y la tercera columna de "A", resulta el determinante de "A", que es nulo:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&-2\\2&1&-1\end{vmatrix}=0$$

Así, podemos eliminar la tercera fila de "A" sin que se altere su rango; o sea:

$$\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}=2$$

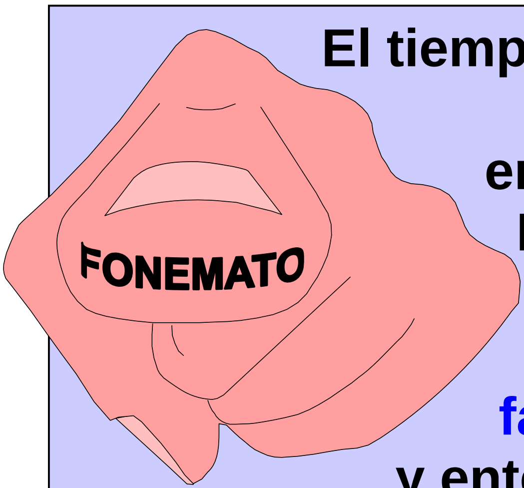
- Como "B" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $\mathrm{rg}(B)\geq 2$:

$$B=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&-2\\1&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow H_2=\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \mathrm{rg}(B)\geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_2 con la primera fila y la tercera columna de "B", resulta el determinante de "B", que es no nulo:

$$|B|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&2&-2\\1&0&-1\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

Por tanto, $\mathrm{rg}(B)=3$, pues en "B" hay un menor no nulo de orden 3.



El tiempo que dediques a estudiar Matemáticas es el mejor empleado, pues estudiando Matemáticas desarrollarás al máximo tu capacidad de abstracción y tu facultad de razonamiento... y entendiendo de "números" te será muy fácil entender de cualquier asunto que se exprese mediante números.

FONEMATO 1.20.4

Calcúlese el rango de las siguientes matrices:

$$1)\ C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ 2)\ D=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\ ;\ 3)\ E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

1) Como "C" es de orden 3×4, el máximo rango que puede tener es 3, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $\mathrm{rg}(C)\geq 2$:

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow H_1=\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 3 & 4 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \mathrm{rg}(C)\geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_1 con la tercera fila de "C" y cada una de las restantes columnas de "C", resultan los siguientes menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar H_1 con la tercera fila de "C" y cada una de las restantes columnas de "C", significa que podemos eliminar dicha tercera fila sin que se altere el rango de "C"; o sea:

$$\mathrm{rg}(C)=\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}=2$$

2) Como "D" es de orden 4×4, el máximo rango que puede tener es 4, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $\mathrm{rg}(D)\geq 2$:

$$D=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\Rightarrow H_2=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \mathrm{rg}(D)\geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_2 con la segunda fila y la tercera columna de "D", obtenemos un menor no nulo de orden 3, lo que garantiza que $\mathrm{rg}(D)\geq 3$:

$$H_3=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \mathrm{rg}(D)\geq 3$$

Al orlar el menor no nulo H_3 con la primera fila y la cuarta columna de "D", obtenemos $|D|$, que es no nulo, por lo que $\mathrm{rg}(D)=4$:

a las filas primera y segunda les sumamos la tercera

$$|D|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=12\neq 0$$

desarrollamos por los elementos de la primera fila

3) Como "E" es de orden 4×4, el **máximo rango** que puede tener es 4, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $\mathrm{rg}(E) \geq 2$:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow H_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(E) \geq 2$$

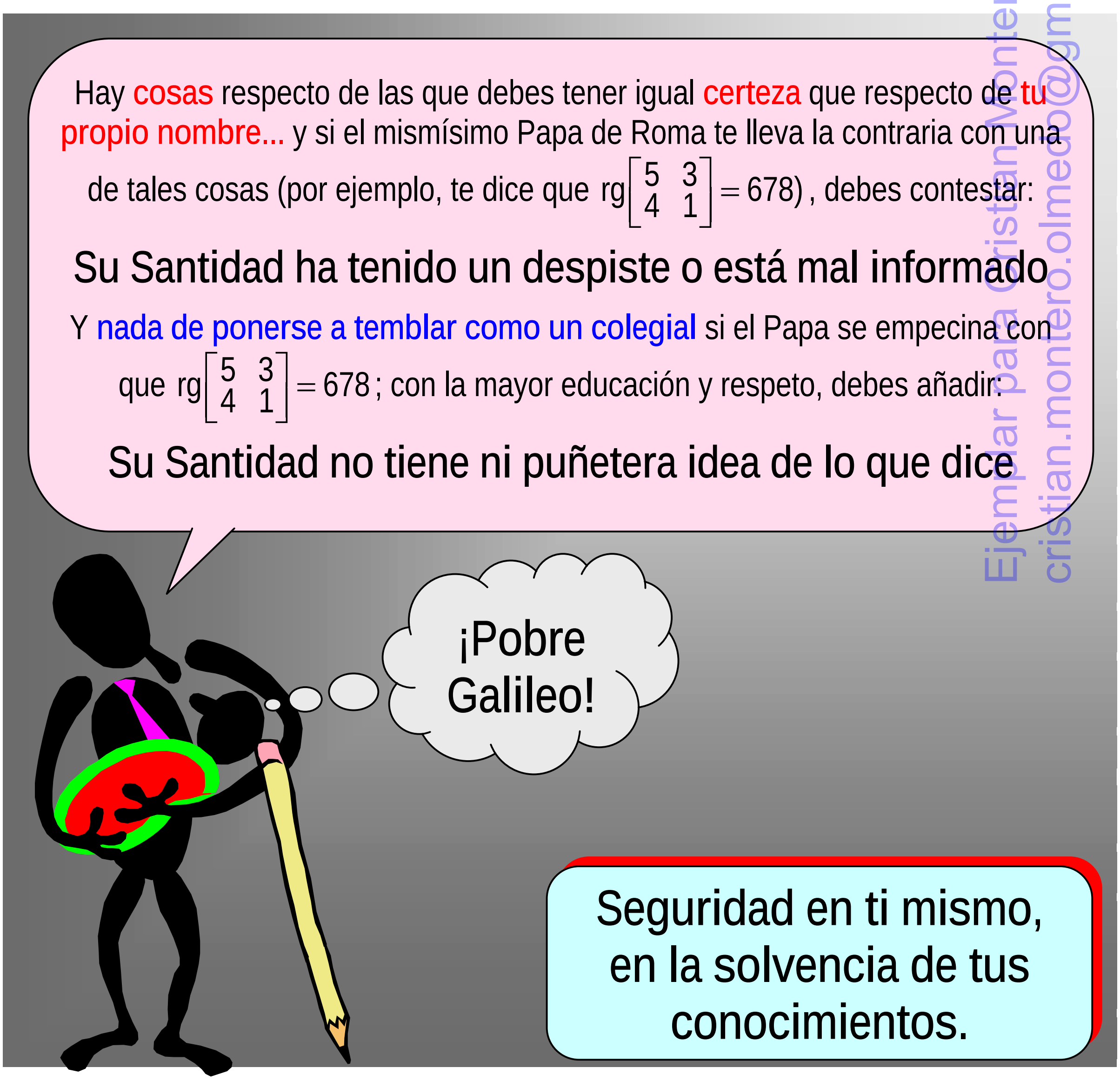
Al **orlar** el menor no nulo H_4 con la tercera fila y la tercera columna de "E", obtenemos un menor no nulo de orden 3, lo que garantiza que $\mathrm{rg}(E) \geq 3$

$$H_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(E) \geq 3$$

Al **orlar** el menor no nulo H_5 con la cuarta fila y la cuarta columna de "E", obtenemos el determinante de "E", que resulta ser nulo:

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, podemos **eliminar** la cuarta fila de "E" sin que se altere el rango de la matriz; así, es $\mathrm{rg}(E) = 3$.



FONEMATO 1.20.5

Calcula los valores de "a" y "b" para los que la matriz "A" tiene rango 2.

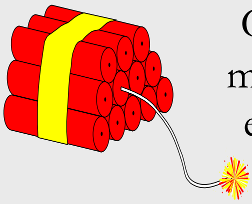
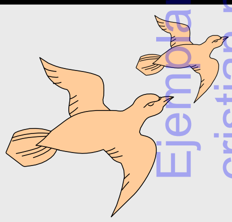
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 5 & 1 & 3+b+2.a \\ 1 & 0 & b \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

Como $H_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, es $rg(A) \geq 2$. Será $rg(A) = 2$ si son nulos todos los menores de orden 3 que resultan al orlar H_1, lo que sucede sólo si $a = b$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 5 & 1 & 3+b+2.a \end{vmatrix} = b - a = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b - a = 0$$


Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.


El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.

FONEMATO 1.20.6

Estúdiese el rango de las siguientes matrices según el valor del número real "k":

$$1)\ A=\begin{bmatrix}6&k&0\\2&k&0\\0&-2&2\end{bmatrix};\ 2)\ B=\begin{bmatrix}0&k&0\\2&-1&-k\\k&-2&2\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

1) Como "A" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "k" que anulan dicho determinante: $|A|=8.k=0\ \Rightarrow\ k=0$

- Si $k\neq 0\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=3$.
- Si $k=0$, la matriz "A" se convierte en $A=\begin{bmatrix}6&0&0\\2&0&0\\0&-2&2\end{bmatrix}$.

Es $rg(A)=2$, pues $|A|=0$ y el menor de orden 2 indicado es no nulo.

2) Como "B" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá solo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "k" que anulan dicho determinante:

$$|B|=-k.(k^2+4)=0\ \Rightarrow\ k=0$$

La ecuación $k.(k^2+4)=0$ tiene dos raíces imaginarias a las que no hacemos caso, pues se nos dice que $k\in\Re$

- Si $k\neq 0$ es $rg(B)=3$, pues $|B|\neq 0$.
- Si $k=0$, la matriz "B" se convierte en $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&-1&0\\0&-2&2\end{bmatrix}$.

Como $|B|=0$ y el menor de orden dos indicado es no nulo, es $rg(B)=2$.

FONEMATO 1.20.7

Estúdiese el rango de la matriz "C" según el valor del número real "k".

$$C=\begin{bmatrix} 2.k+2 & k & 2 \\ 2 & 2-k & 0 \\ k+1 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

Como "C" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "k" que anulan dicho determinante:

A la primera columna le restamos la tercera

$$|C|=\begin{vmatrix} 2.k+2 & k & 2 \\ 2 & 2-k & 0 \\ k+1 & 0 & k+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2.k & k & 2 \\ 2 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix}=$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera fila

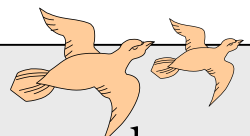
$$=(k+1).(2.k.(2-k)-2.k)=2.k.(k+1).(1-k)=0\Rightarrow k=0,1,-1$$

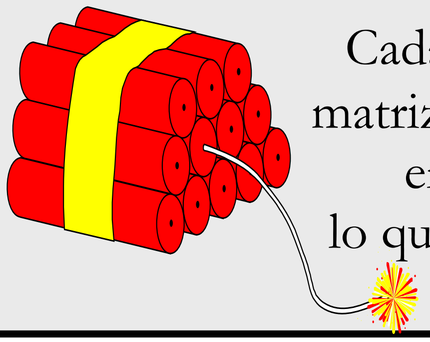
- Si "k" es distinto de 0, de 1 y de -1, es $rg(C)=3$, pues $|C|\neq 0$.
- Si $k=0$, la matriz "C" se convierte en $C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

  Como ahora es $|C|=0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0\Rightarrow rg(C)=2$.
- Si $k=1$, la matriz "C" se convierte en $C=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

  Como ahora es $|C|=0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0\Rightarrow rg(C)=2$.
- Si $k=-1$, la matriz "C" se convierte en $C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

  Como ahora $|C|=0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0\Rightarrow rg(C)=2$.





Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.

FONEMATO 1.20.8

Estúdiese el rango de la matriz "D" según el valor del número real "k".

$$D=\begin{bmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Como "D" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo.

$$|D|=\begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ k+1 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} =$$

A la tercera fila le sumamos las dos primeras

Muy astutamente, sacamos factor común "$k+1$" en la tercera fila

$$=(k+1).\begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k+1).\begin{vmatrix} k-2 & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

A las columnas primera y segunda les restamos la tercera columna

$$=(k+1).(k-2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=2 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Se dice que la solución $k=2$ es "doble" para poner de manifiesto que el factor "$k-2$" aparece elevado al cuadrado

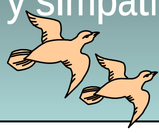
- Siendo "k" distinto de -1 y de 2, es $rg(D)=3$, pues $|D|\neq 0$
- Si $k=-1$, la matriz "D" se convierte en $D=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

  Como ahora $|D|=0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0 \Rightarrow rg(D)=2$.
- Si $k=2 \Rightarrow D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(D)=rg\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=rg\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=1$

  eliminamos las filas 2ª y 3ª, por ser iguales a la 1ª

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.



Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación.

Pedrusco "A"= Pedrusco "B" $\Rightarrow$ Pedrusco "C"= Pedrusco "D"

FONEMATO 1.20.9

Estúdiese el rango de la matriz "E" según el valor del número real "k".

$$E=\begin{bmatrix}3 & k & k\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Como "E" es de orden 4×3, el **máximo rango** que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si "E" si tiene algún menor no nulo de orden 3.

$$E=\begin{bmatrix}3 & k & k\\ 2 & -1 & 0\\ \boxed{\begin{matrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{matrix}} & & \begin{matrix}2\\ 0\end{matrix}\end{bmatrix}$$

El menor de orden 2 indicado es no nulo para todo "k"; así es $\operatorname{rg}(E)\geq 2$ para todo "k". Al **orlar** ese menor con la 3ª fila y la 3ª columna de "E" se obtiene un menor de orden 3 que es $\neq 0$ para todo "k"; por tanto, $\operatorname{rg}(E)=3,\ \forall\, k\in\Re$:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}\neq 0$$

FONEMATO 1.20.10

Estúdiese el rango de $F=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2 \end{bmatrix}$ según el valor del real "k".

SOLUCIÓN

Como "F" es de orden 4×4, el máximo rango que puede tener es 4, lo que sucederá solo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "k" que anulan dicho determinante:

$$|F|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2 \end{vmatrix}=\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & k^2-5 \end{vmatrix}}^{M}=$$

A la 2ª fila le restamos el triple de la 1ª
A las filas 3ª y 4ª les restamos la 1ª

desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 1 & k+3 & k^2-5 \end{vmatrix}=(k+1).\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & k^2-5 \end{vmatrix}=$$

desarrollamos por los elementos de la segunda fila

$$=(k+1).(k^2-1)=0\Rightarrow\begin{cases} k=1 \\ k=-1\,(\text{doble}) \end{cases}$$

- Siendo "k" distinto de 1 y de -1, es $rg(F)=4$, pues $|F|\neq 0$.
- Si $k=1$, la matriz "F" se convierte en $F=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

  Como ahora $|F|=0$ y el menor de orden 3 indicado es $\neq 0 \Rightarrow rg(F)=3$
- Si $k=-1$, la matriz "F" es:

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(F)=rg\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Eliminamos la tercera fila de "F", por ser igual a la primera

Es $rg(F)=2$, pues el menor de orden 2 indicado es no nulo, y son nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar el citado menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

NOTA: Hemos hecho el pardillo con el rango cuando $k=\pm 1$, pues las matrices "F" y "M" tienen el mismo rango, pero "M" es más cómoda a efectos del cálculo del rango si $k=\pm 1$.

FONEMATO 1.20.11

Estudie el rango de $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{bmatrix}$ según los valores de $a, b \in \Re$.

SOLUCIÓN

Como "M" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo. Determinemos para qué valores de "a" y "b" se anula dicho determinante:

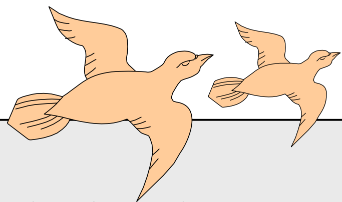
$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & b+1 & 0 \\ 4 & -a-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

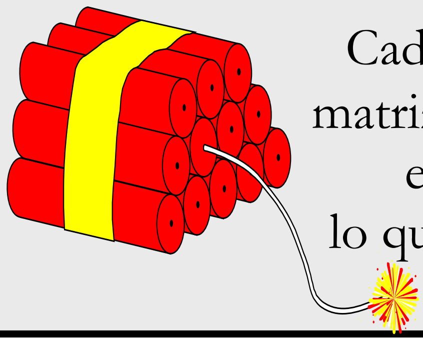
A la 2ª fila de restamos la 1ª, y a la 3ª de sumamos la 1ª

$$= a - 4.b - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 + 4.b$$

- Si $a \neq 3 + 4.b \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 3$.
- Si $a = 3 + 4.b \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -3-4.b & -1 \end{bmatrix}$.

  Como ahora $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \forall b$, entonces, si $a = 3 + 4.b$, es $rg(M) = 2$ para todo valor de "b".





Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.

El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.

FONEMATO 1.20.12

Estudie el rango de $N=\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a.b & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix}$ según los valores de $a,b\in\Re$.

SOLUCIÓN

Como "N" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "a" y "b" que anulan dicho determinante:

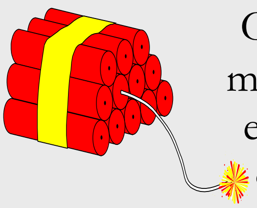
$$|N|=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a.b & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}=b.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=b.(a^3-3.a+2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b=0 \\ a^3-3.a+2=0\Rightarrow a=-2 \text{ ó } a=1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

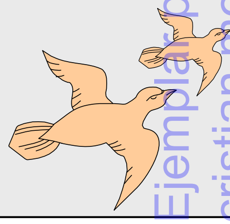
- Si $b\neq 0$ y "a" es distinto de 1 y de -2, es $rg(N)=3$, pues $|N|\neq 0$.
- Si $b=0\Rightarrow N=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}\Rightarrow rg(N)=rg\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}=\begin{cases} 1 \text{ si } a=1 \\ 2 \text{ si } a\neq 1 \end{cases}$.

  Por tanto, si $b=0$ y $a=1$ es $rg(N)=1$, y es $rg(N)=2$ si $b=0$ y $a\neq 1$.
- Si $a=1\Rightarrow N=\begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(N)=rg\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=1,\ \forall b.$

  eliminamos la 3^a columna (igual a la 1^a) y la 2^a (proporcional a la 1^a)
- Si $a=-2\Rightarrow N=\begin{bmatrix} -2 & b & 1 \\ 1 & -2.b & 1 \\ 1 & b & -2 \end{bmatrix}$. Como $|N|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0,\ \forall b$, es $rg(N)=2$ para todo valor de "b".



Cada vez que calcules el rango de una matriz **te juegas la vida:** si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.



El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, **para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.**

FONEMATO 1.20.13

Estudie el rango de $S=\begin{bmatrix} 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ según los valores de $a, b \in \Re$.

SOLUCIÓN

Como "S" es de orden 4×3, el **máximo rango** que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si en "S" hay algún menor no nulo de orden 3.

$$S=\begin{bmatrix} 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & \boxed{\begin{matrix} -2 & -5 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \\ 3 & & \end{bmatrix}$$

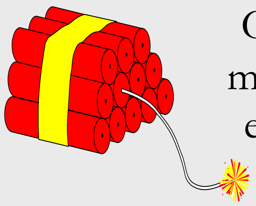
Es $rg(S)\geq 2$, pues menor de orden 2 indicado es no nulo para cualesquiera valores de "a" y "b". Al **orlar** dicho menor con las filas 1ª y 2ª de "S" se obtienen los siguientes menores de orden 3:

$$H_1=\begin{vmatrix} 1 & -b & 1 \\ a & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=9+a+15.b+a.b$$

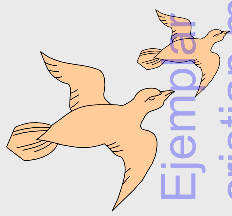
$$H_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2.a-18$$

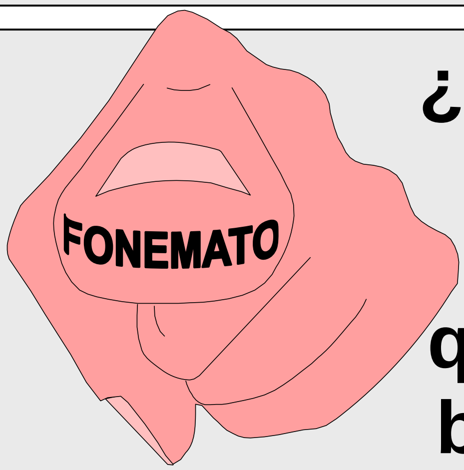
Si ambos son nulos será $rg(S)=2$, y si alguno es no nulo será $rg(S)=3$; así:

- Si $a\neq -9 \Rightarrow H_2\neq 0 \Rightarrow rg(S)=3$.
- Si $a=-9$ es $H_2=0$ y $H_1=9-9+15.b-9.b=6.b$; en consecuencia:
  - ∗ Si $a=-9$ y $b\neq 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} H_1\neq 0 \\ H_2=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow rg(S)=3$.
  - ∗ Si $a=-9$ y $b=0 \Rightarrow H_1=H_2=0 \Rightarrow rg(S)=2$.



Cada vez que calcules el rango de una matriz **te juegas la vida:** si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.





¿Cuántas veces hay que repetirte algo importante hasta que te dignas tomar buena nota de ello?

FONEMATO 1.20.14

Calcule el rango de $A=\begin{bmatrix}1 & a^2-1 & a\\ 1 & 2.a^2-2 & 2.a-1\\ 1 & 0 & a^2\end{bmatrix}$ según los valores de $a\in\Re$.

SOLUCIÓN

Como "A" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucede sólo si $|A|\neq 0$. Determinemos los valores de "a" tales que $|A|=0$:

a las filas segunda y tercera les restamos la primera

$$|A| = (a^2-1).\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 2 & 2.a-1\\ 1 & 0 & a^2\end{vmatrix} = (a^2-1).\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & a-1\\ 0 & -1 & a^2-a\end{vmatrix} =$$

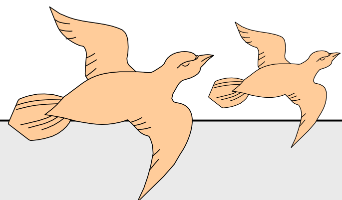
sacamos factor común a^2-1 en la segunda columna

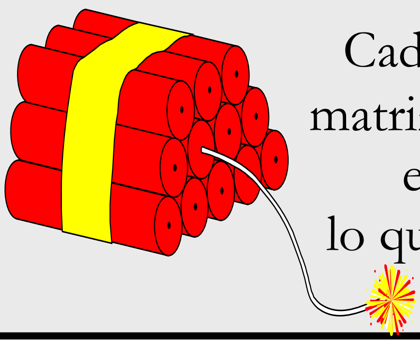
$$= (a^2-1)^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ (dobles)}$$

desarrollamos el determinante por los elementos de la 1ª columna

Por tanto:

- Si $a\neq\pm 1 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$.
- Si $a=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=1$.
- Si $a=-1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2$, pues $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\neq 0$.





Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.

En fonemato.com tienes el videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

FONEMATO 1.20.15

Calcular el rango de $A=\begin{bmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix}$ según los valores de $a\in\Re$.

SOLUCIÓN

Como "A" es de orden 3×4, su máximo rango es 3.

$$H=\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-a^2-a+1=0\Rightarrow a=\begin{cases}1\ (\text{doble})\\ -1\end{cases}$$

Por tanto:

- Si $a\neq\pm1\Rightarrow H\neq 0\Rightarrow rg(A)=3.$
- Si $a=1$ es $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=rg\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=1$

a efectos del cálculo del rango de "A", podemos eliminar las columnas segunda, tercera y cuarta, pues son iguales a la primera

- Si $a=-1$ es $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=rg\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2$

a efectos del cálculo del rango de "A", podemos eliminar las columnas tercera y cuarta, pues respectivamente son proporcionales a la primera y la segunda

FONEMATO 1.20.16

Determine la relación que debe existir entre los parámetros "θ", "λ" y "τ" para que $A=\begin{bmatrix}1&1&\theta\\1&0&\lambda\\1&1&\tau\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}2&0&\theta\\0&-1&\lambda\\3&1&\tau\end{bmatrix}$ tengan rango 2.

SOLUCIÓN

Es $rg(A)\geq 2$, pues $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0$; por tanto, será $rg(A)=2$ si $|A|=0$:

$$|A|=0\Rightarrow \theta-\tau=0 \quad (I)$$

Es $rg(B)\geq 2$, pues $\begin{vmatrix}2&0\\0&-1\end{vmatrix}\neq 0$; por tanto, será $rg(B)=2$ si $|B|=0$:

$$|B|=0\Rightarrow 3.\theta-2.\lambda-2.\tau=0 \quad (II)$$

Es $rg(A)=rg(B)=2$ si los valores de "θ", "λ" y "τ" satisfacen las ecuaciones (I) y (II), lo que sucede sólo si $\theta=\tau=2.\lambda$.

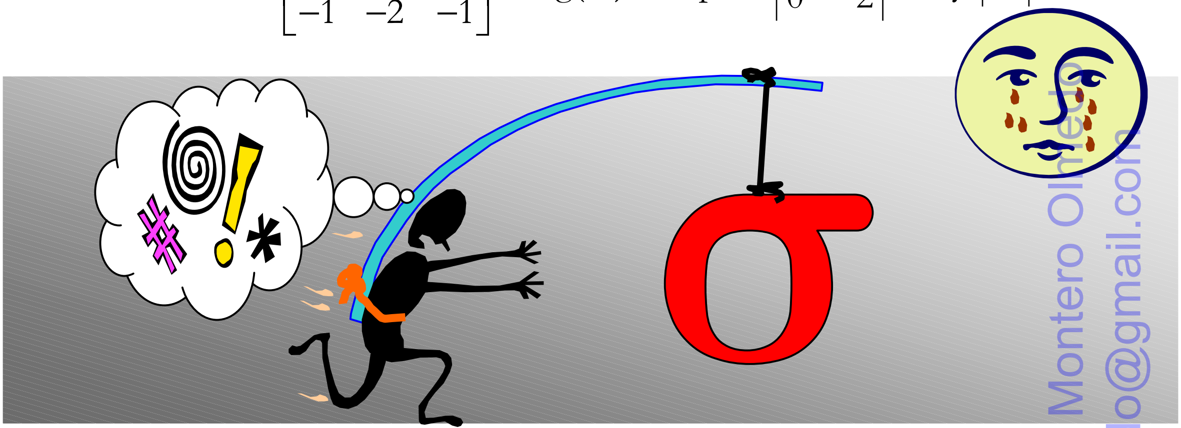
FONEMATO 1.20.17

Determine el rango de $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & \sigma & \sigma\\ -1 & \sigma & -1\end{bmatrix}$ según los valores de $\sigma\in\Re$.

SOLUCIÓN

Como "A" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, y sucede tal cosa sólo si $|A|=-\sigma^2-2.\sigma\neq 0\Rightarrow\sigma\neq 0,-2$.

- Si $\sigma=0\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{rg}(A)=2$, pues $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\neq 0$ y $|A|=0$.
- Si $\sigma=-2\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{rg}(A)=2$, pues $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix}\neq 0$ y $|A|=0$.



LETANÍA

- Inteligencia, dime el nombre exacto de las cosas.
- Astucia, dime qué errores no debo cometer.
- Sabiduría, resista yo la dulce tentación de lo fácil.
- Lucidez, asísteme en los momentos de pánico.
- Estrategia, dime qué batallas no han de preocuparme.
- Supervivencia, identifique yo al mortal enemigo.
- Estupidez, no dé yo valor a lo que nada vale.
- Fortaleza, dame sombra en el desierto.
- Inmadurez, no te poses en mi hombro.
- Desaliento, no serás mi confidente.
- Miedo, sólo a ti temeré.

FONEMATO 1.20.18

Siendo "μ", "γ" y "ψ" tres números reales arbitrarios, calcula A^n para todo número natural "n", siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mu & \gamma \\ 0 & 0 & \Psi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea "B" una matriz 3×3 arbitraria. Indica, justificando la respuesta, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones

1) Si el rango de "B" es 2, el rango de B^2 también es 2.

2) Si el rango de "B" es 3, el rango de B^3 también es 3.

SOLUCIÓN

La matriz A^n es la nula si $n \geq 3$:

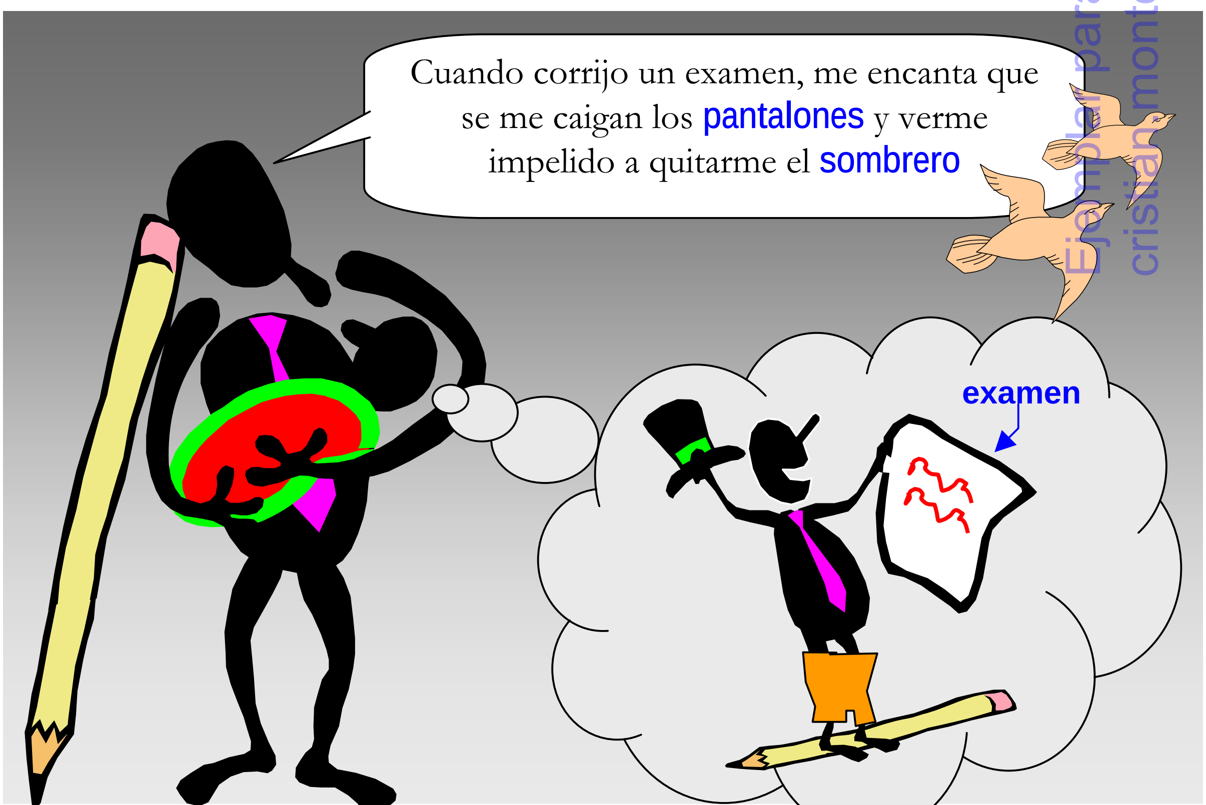
$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \mu & \gamma \\ 0 & 0 & \Psi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & \mu & \gamma \\ 0 & 0 & \Psi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu.\Psi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \bullet A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu.\Psi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & \mu & \gamma \\ 0 & 0 & \Psi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Es falso que $rg(B) = 2 \Rightarrow rg(B^2) = 2$. Para demostrarlo vale el siguiente contraejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2 \; ; \; B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7.\pi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B^2) = 1$$

2) Si $B \in M_{3\times 3}$ y $rg(B) = 3 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow |B^3| = |B|.|B|.|B| \neq 0 \Rightarrow rg(B^3) = 3.$

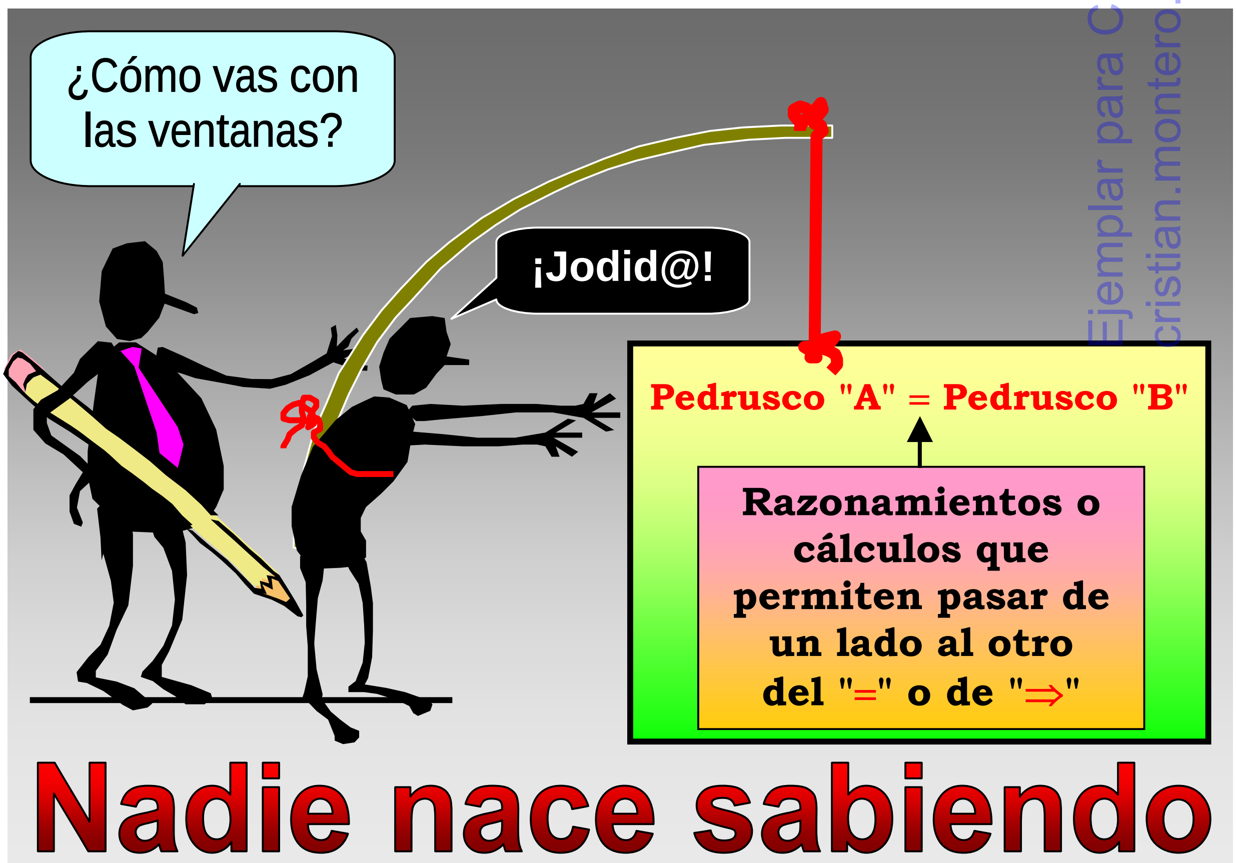


CALCULO DEL RANGO MEDIANTE TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Para calcular el rango de una matriz "A" que, por ejemplo, tiene 20 filas y 69 columnas, lo más eficiente es hacer transformaciones elementales con los elementos de "A" para así obtener otras matrices que tienen igual rango que "A" pero que, por contener gran cantidad de ceros, son más cómodas a la hora de calcular de su rango.

La secuencia de trabajo es la siguiente:

1) Haciendo los cambios de filas y columnas que sean menester, colocamos en la posición a_{11} de "A" un elemento no nulo. Mejor que mejor si tal elemento no nulo es el número 1, pues así no hará falta el siguiente paso.
2) Si la matriz "A" es tan perversa que ningún elemento de ella es el número 1, dividimos la primera fila por a_{11}, y así conseguimos que el número 1 sea el elemento que está en la primera fila y en la primera columna.
3) Reducimos a cero los elementos de la primera columna (salvo el número 1 que ocupa la posición a_{11}) restando a las filas segunda, tercera.... n-ésima, los elementos de la primera fila multiplicados respectivamente por los números $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$.
4) Repetimos las operaciones anteriores para las restantes columnas.
5) El proceso acaba cuando sea fácil calcular del rango de alguna de las matrices intermedias que van apareciendo.



FONEMATO 1.20.19

Determínese el rango de las siguientes matrices:

$$1)\ A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&8&9\end{bmatrix}\ ;\ 2)\ B=\begin{bmatrix}3&2&5\\3&3&6\\7&1&8\end{bmatrix}\ ;\ 3)\ C=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&4&3&2\\3&2&1&3\\6&8&7&5\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

1) Es:

¡Qué suerte!, el elemento a_{11} es el número 1; para conseguir "ceros" en la primera columna, a la segunda fila le restamos el doble de la primera, y a la tercera fila le restamos el triple de la primera

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&8&9\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&2&0\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&-2\end{bmatrix}=3$$

(tercera fila) – (doble de la segunda)

La última matriz tiene determinante no nulo (observa que es "triangular")

2) Es:

Cambiamos la primera fila por la tercera

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix}3&2&5\\3&3&6\\7&1&8\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}7&1&8\\3&3&6\\3&2&5\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&7&8\\3&3&6\\2&3&5\end{bmatrix}=$$

Cambiamos la primera columna por la segunda

Para conseguir "ceros" en la primera columna, a la segunda fila le restamos el triple de la primera, y a la tercera fila le restamos el doble de la primera

$$=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&7&8\\0&-18&-18\\0&-11&-11\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&7&8\\0&-18&-18\end{bmatrix}=2$$

Eliminamos la tercera fila, por ser proporcional a la segunda

3) Es:

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, a la segunfa fila le restamos el doble de la primera, a la tercera fila le restamos el triple de la primera, y a la cuarta fila le restamos el séxtuplo de la primera

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&4&3&2\\3&2&1&3\\6&8&7&5\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&-3&2\\0&-4&-8&3\\0&-4&-11&5\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&-3&2\\0&-4&-8&3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}=$$

A la cuarta fila le restamos la tercera

Eliminamos la cuarta fila, por ser igual a la segunda

$$=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&-3&2\\0&-4&-8&3\end{bmatrix}=3$$

Pues el menor de orden 3 indicado es no nulo

FONEMATO 1.20.20

Determínese el rango de la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 9 & -1 & -2\\ 3 & 4 & -4 & -5 & 4\end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Para que en la 1ª columna "aparezcan" ceros, a la 2ª fila le restamos el doble de la 1ª, a la 3ª fila le restamos la 1ª, y a la 4ª fila le restamos el triple de la 1ª

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 9 & -1 & -2\\ 3 & 4 & -4 & -5 & 4\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4 & 1\\ 0 & -1 & -7 & 10 & -2\\ 0 & 1 & 6 & 3 & -3\\ 0 & -2 & -13 & 7 & 1\end{bmatrix}=$$

Para que en la segunda columna "aparezcan" ceros, a la tercera fila le sumamos la segunda, y a la cuarta fila le restamos el doble de la segunda

Eliminamos la cuarta fila, por ser proporcional a la tercera

$$=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4 & 1\\ 0 & -1 & -7 & 10 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 13 & -5\\ 0 & 0 & -1 & -13 & 5\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -7\\ 0 & 0 & -1\end{matrix}} & \begin{matrix}-4 & 1\\ 10 & -2\\ 13 & -5\end{matrix}\end{bmatrix}=3$$

Pues el menor de orden 3 indicado es no nulo

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.

Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

Pedrusco "A" = Pedrusco "B" $\Rightarrow$ Pedrusco "C" = Pedrusco "D"

El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.

FONEMATO 1.20.21

Determínese el rango de la matriz $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Cambiamos la primera columna por la cuarta

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

A las filas tercera y cuarta les restamos la primera

Eliminamos la cuarta fila, por ser proporcional a la tercera

$$= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

Cambiamos las filas segunda y tercera

$$= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

A la tercera fila le sumamos el doble de la segunda, y a la cuarta fila le restamos el triple de la segunda

$$= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3$$

Eliminamos la cuarta fila, por ser proporcional a la tercera

Pues el menor de orden 3 indicado es no nulo

MAGIA POTAGIA

Considera un número natural "Pepe" de tres cifras que escrito al revés da un número inferior (o sea, la última cifra de "Pepe" es menor que la primera); por ejemplo 584, que escrito al revés da 485. Pues bien, si restamos 584 y 485 (584 – 485 = 099), invertimos la diferencia (o sea, 990) y la sumamos a la resta (o sea, sumamos 099), se obtiene el número 1089... y eso mismo pasa con cualquier otro natural de tres cifras que escrito al revés dé un número inferior. Otro ejemplo: 872 – 278 = 594, que invertido es 495, y al sumarlo a la resta 594 también se obtiene de nuevo el número 1089.

EJERCICIOS RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA PÁGINA WEB

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Ejercicio 08.01

Siendo $C = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, determínense las matrices "A" y "B" tales que:

$$A + B = C \;;\; 2 \bullet A + 3 \bullet B = C$$

Ejercicio 08.02

Halla las matrices "A" y "B" tales que $A - B = D$ y $3 \bullet A + 2 \bullet B = C$, siendo:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \;;\; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 08.03

Halla "A" y "B" si $A - B = D$ y $3 \bullet A + 4 \bullet B = C$, siendo:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \;;\; D = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 08.04

Sean $A = \begin{bmatrix} \sigma & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, siendo σ y θ parámetros reales.

Determine σ y θ si $3 \bullet A - 2 \bullet B = C$.

Ejercicio 08.05

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & \delta \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, siendo δ y θ parámetros reales.

Determine δ y θ si $2 \bullet A + 3 \bullet B = C$.

COMBINACIÓN LINEAL (CL) DE MATRICES

Ejercicio 09.01

Analice si $W = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ es CL de $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 09.02

Analice si $U = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ es CL de $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 09.03

Determine "ε" y "θ" de modo que W sea CL de A_1 y A_2.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 2 & \theta \end{bmatrix} \;;\; A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \;;\; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

Ejercicio 10.01

Sean $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

Calcule "x" e "y" de modo que $A^2+x\bullet A+y\bullet B=0$.

Ejercicio 10.02

Si $A=\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&0\end{bmatrix}$, halle la matriz "T" si su 2ª fila es $(0,1)$ y $A\bullet T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

CÁLCULO DE DETERMINANTES

Ejercicio 19.01

Calcule el determinante de $A=\begin{bmatrix}1&3&4&2\\2&7&9&8\\1&5&5&4\\0&2&1&1\end{bmatrix}$.

Ejercicio 19.02

Calcule el determinante de $A=\begin{bmatrix}3&1&4&7\\2&1&0&3\\7&3&1&9\\5&2&1&8\end{bmatrix}$.

Ejercicio 19.03

Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix}x-a-b&a&b\\c&x-b-c&b\\c&a&x-a-c\end{vmatrix}=0$.

Ejercicio 19.04

Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix}x+2&1&1&1\\1&x+2&1&1\\1&1&x+2&1\\x&x&x&3\end{vmatrix}=0$.

Ejercicio 19.05

Pruebe que $\begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}=a.(b-a).(c-b).(d-c)$.

Ejercicio 19.06

Determine una matriz simétrica "P" que sea regular y tal que $P\bullet B=A\bullet P$.

$$A=\begin{bmatrix}4&-6\\3&-5\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}4&-3\\6&-5\end{bmatrix}$$

Ejercicio 19.07

Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$.

Ejercicio 19.08

Si $I \in M_{n\times n}$, los autovalores de $A \in M_{n\times n}$ son las soluciones de $|A - \lambda \bullet I| = 0$. Halle los autovalores de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 19.09

Si $I \in M_{n\times n}$, los autovalores de $C \in M_{n\times n}$ son las soluciones de $|C - \lambda \bullet I| = 0$.

Calcule los autovalores de $C = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$.

Ejercicio 19.10

Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Ejercicio 19.11

Demuestre que si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, es $A^2 - (a+d) \bullet A + |A| \bullet I = 0$

MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Ejercicio 21.01

Determine "θ" para que $A = \begin{bmatrix} \theta & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \theta \end{bmatrix}$ tenga inversa. Calcule A^{-1} si $\theta = 4$.

Ejercicio 21.02

Determine "a" y "b" de modo que $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{bmatrix} = C^{-1}$.

Ejercicio 21.03

Determine "X" tal que $A \bullet X \bullet A = A \bullet B$.

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ;\ 2)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 21.04

Sea $A \in M_{n\times n}$ tal que $A^2 = A$; o sea, "A" es una matriz idempotente.

Demuestre que $B = I - A$ es idempotente y $A \bullet B = B \bullet A = 0$.

Demuestre que si $C = 2 \bullet A - I$, es $C^2 = I$.

Ejercicio 21.05

Sea "A" una matriz regular tal que $|A + I| \neq 0$ y $|A - I| \neq 0$.

Demuestre que si $A \bullet B = A^{-1} \bullet B$, la matriz "B" es singular.

Ejercicio 21.06

Si $P = \begin{bmatrix} a^2 & a.b & a.c \\ a.b & b^2 & b.c \\ a.c & b.c & c^2 \end{bmatrix}$, demuestre que $P^k = P$ si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 21.07

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, halle "X" e "Y" tales que $X + A \bullet Y = 2 \bullet I$ y $X + 4 \bullet Y = I$

Ejercicio 21.08

1) Determine las matrices simétricas no diagonales de orden dos que coinciden con su inversa.
2) Halle las matrices simétricas de $M_{2\times 2}$ que coinciden con su inversa.

Ejercicio 21.09

Resuelva la ecuación matricial $A \bullet X - B = C$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 21.10

Despeje X en la ecuación matricial $(A \bullet X - C)^{-1} - B^{-1} = 0$.

Ejercicio 21.11

Sean A, B y X matrices cuadradas de orden "n", siendo A regular.

Despeje X en la ecuación matricial $(X - 3 \bullet I) \bullet A - B \bullet A = I$.

Ejercicio 21.12

Sean A y B matrices regulares de orden "n".
Despeje X en la ecuación matricial $(X \bullet B^{-1} - I) \bullet A = I$.

Ejercicio 21.13

Despeje X en la ecuación matricial $(A^t \bullet A \bullet X)^{-1} = (A^t \bullet B)^{-1}$.

Ejercicio 21.14

Despeje X en la ecuación matricial $B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = A$.

Ejercicio 21.15

Despeje X en la siguiente ecuación matricial:

$$(B \bullet A - B \bullet X) \bullet A^{-1} = (A \bullet B^{-1})^{-1}$$

RANGO DE UNA MATRIZ SIN ELEMENTOS LOCOS

Ejercicio 25.01

Calcule el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 25.02

Calcule el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 25.03

Calcule el rango de $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **y de** $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 25.04

Calcule el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 25.05

Calcule el rango de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

RANGO DE UNA MATRIZ CON ELEMENTOS LOCOS

Ejercicio 26.01

Estudie el rango de "A" según el valor de $\Psi \in \Re$.

$$1)\ A = \begin{bmatrix} \Psi & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \ ;\ 2)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2.\Psi & 2 & 6 \\ \Psi & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

[Ejercicio 26.02]

Compruebe que "P" tiene rango 2 sólo si $a = b = 0$.

$$1)\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a \\ 5 & b+a & b \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \ ;\ 2)\ P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 5 & 0 & b+2.a \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

[Ejercicio 26.03]

Estudie el rango de $A = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 9 & k & k \\ k & -2 & 1 \end{bmatrix}$ según el valor de $k \in \Re$.

[Ejercicio 26.04]

Estudie el rango de $A = \begin{bmatrix} k-3 & 1 & 1 \\ 1 & k-3 & 1 \\ 1 & 1 & k-3 \end{bmatrix}$ según el valor de $k \in \Re$.

[Ejercicio 26.05]

Estudie el rango de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2 \end{bmatrix}$ según el valor de $k \in \Re$.

[Ejercicio 26.06]

Estudie el rango de $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{bmatrix}$ según los valores de $a, b \in \Re$.

[Ejercicio 26.07]

Estudie el rango de $M = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a.b & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix}$ según los valores de $a, b \in \Re$.

[Ejercicio 26.08]

Estudie el rango de "M" según los valores de $a \in \Re$.

$$1)\ M = \begin{bmatrix} a & a & 1 & a \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix} \ ;\ 2)\ M = \begin{bmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix}$$

[Ejercicio 26.09]

Estudie el rango de $M = \begin{bmatrix} 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ según los valores de $a, b \in \Re$.

Ejercicio 29.01

Sean A, B y C matrices cuadradas de orden "n", siendo B regular y C ortogonal. Despeje X en la ecuación $C \bullet (A - X) \bullet B = B$.

Ejercicio 29.02

Sean A, B y X matrices cuadradas de orden "n", siendo A regular. Despeje X en la ecuación matricial $(X - 3 \bullet I) \bullet A - B \bullet A = I$.

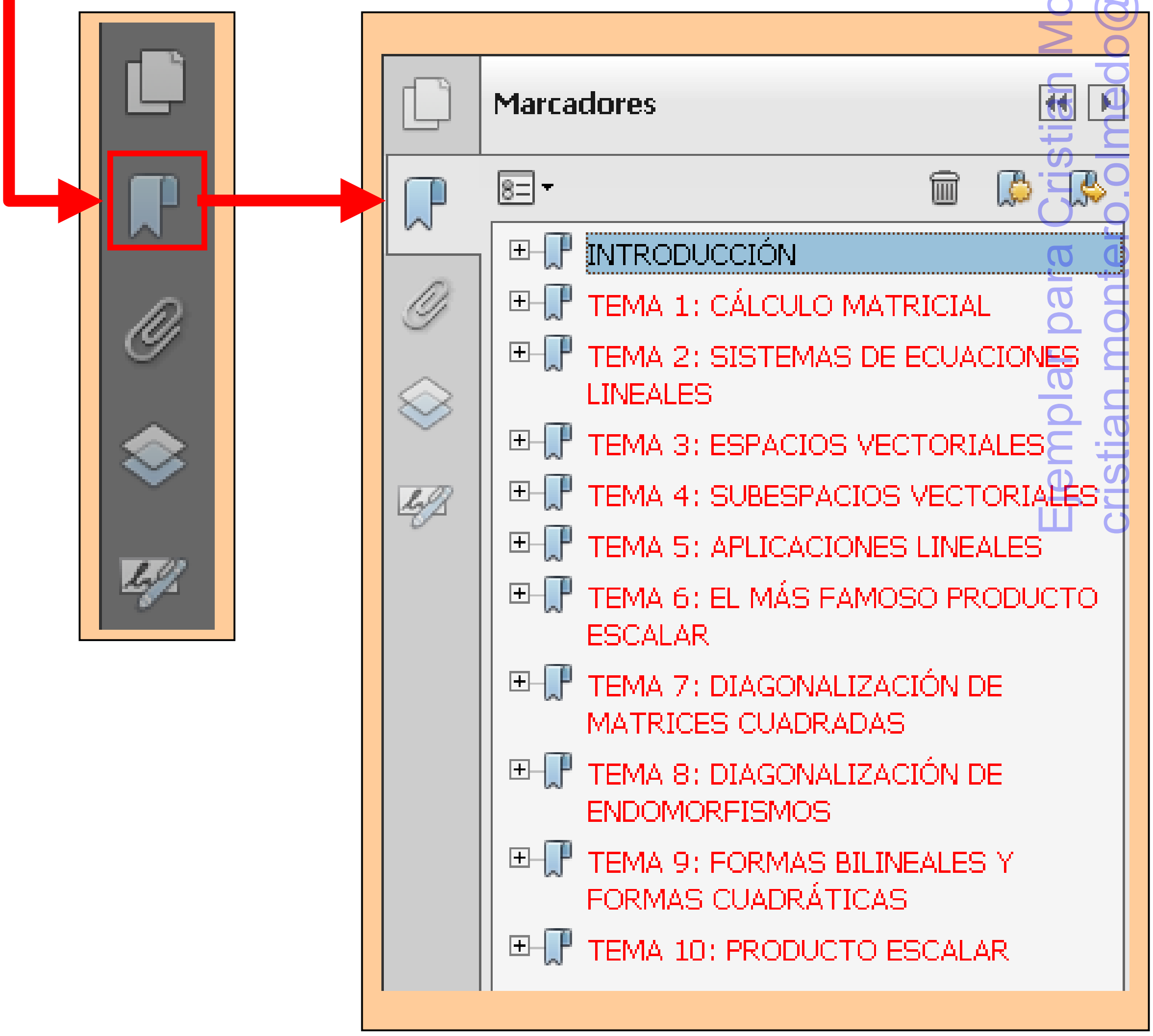
Ejercicio 29.03

Siendo A una matriz ortogonal, despeje X en la siguiente ecuación matricial: $I + (A^t \bullet X \bullet A)^{-1} + A^2 = (A^t - 2 \bullet I) \bullet A + (A + I)^2$

Ejercicio 29.04

Siendo $A, X \in M_{n\times n}$, con A ortogonal y $(A - I)$ regular, despeje X en la ecuación matricial $(A - I)^{-1} \bullet X \bullet A^t = A^t + I$.

Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



AUTOCOMPROBACIÓN

Las soluciones están en los test de la web.

01) Para poder entender qué es una "matriz" basta entender previamente los conceptos de "fila" y de "columna".

a) Falso ; b) Verdadero

02) El orden de la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & -6 \end{bmatrix}$ es:

a) 6 ; b) 3×2 ; c) 2×3

03) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & -5 \end{bmatrix} \in M_{2\times3}$. Señale la falsa:

a) $a_{12} = 5$ y $a_{21} = 6$; b) $a_{22} = 7$ y $a_{23} = -5$
c) $a_{12} = 6$ y $a_{21} = 5$

04) ¿Cuál de las siguientes matrices no es cuadrada?

a) $P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$; b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$; c) $H = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

05) ¿Qué valor tiene la traza de la matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$?

a) 16 ; b) 13 ; c) 15

06) Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, señale la falsa:

a) $4 \bullet A = \begin{bmatrix} 12 & 28 \\ -16 & 12 \end{bmatrix}$; b) $(-5) \bullet A = \begin{bmatrix} -15 & -35 \\ 20 & -15 \end{bmatrix}$
c) $\frac{1}{3} \bullet A = \begin{bmatrix} 1 & 7/3 \\ -4/3 & 0 \end{bmatrix}$

07) Sean $A = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8/3 & 2 \end{bmatrix}$.

¿Para qué valor real de "k" es $2 \bullet A = 3 \bullet B$?

a) $k = 9/2$; b) $k = 7/2$; c) Para ningún valor real de "k"

08) Sean $A = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ k & 3 \end{bmatrix}$.

¿Para que valor real de "k" es $3 \bullet A = 2 \bullet B$?

a) $k = 2$; b) $k = 9/2$; c) Para ningún valor real de "k"

09) Sean $A = \begin{bmatrix} k^2 - 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix}$.

¿Para que valor real de "k" es $3 \bullet A = 2 \bullet B$?

a) $k = 3$; b) $k = \pm\sqrt{3}$; c) Para ningún valor real de "k"

10) Sean $A = \begin{bmatrix} k^2 + 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix}$.

¿Para que valor real de "k" es $3 \bullet A = 2 \bullet B$?

a) $k = 5$; b) $k = \pm\sqrt{5}$; c) Para ningún valor real de "k"

11) Si $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -4 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, es:

a) $A+B=\begin{bmatrix}7 & 7\\ -3 & -5\end{bmatrix}$; b) $A+C=\begin{bmatrix}5 & 9\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

c) $A+B+C=\begin{bmatrix}7 & 13\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

12) Si $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 0\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}3 & 7\\ -4 & 3\end{bmatrix}$, es:

a) $2\bullet A+3\bullet B=\begin{bmatrix}15 & 25\\ -20 & 8\end{bmatrix}$; b) $3\bullet A+(-2)\bullet B=\begin{bmatrix}3 & -8\\ -8 & -6\end{bmatrix}$

c) $4\bullet A+3\bullet B=\begin{bmatrix}21 & 29\\ -28 & 9\end{bmatrix}$

13) ¿Son ciertas las siguientes propiedades?

1) $\forall A,B\in M_{m\times n}$ es $A+B=B+A$
2) $\forall A,B,C\in M_{m\times n}$ es $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) $\exists 0\in M_{m\times n}$ tal que $A+0=0+A=A,\ \forall A\in M_{m\times n}$
4) $\forall A\in M_{m\times n}$ es $A+(-A)=(-A)+A=0$

a) No ; b) Si

14) ¿Son ciertas las siguientes propiedades?

1) $\forall \alpha\in\Re$ y $\forall A,B\in M_{m\times n}$ es $\alpha\bullet(A+B)=\alpha\bullet A+\alpha\bullet B$
2) $\forall \alpha,\beta\in\Re$ y $\forall A\in M_{m\times n}$ es $(\alpha+\beta)\bullet A=\alpha\bullet A+\beta\bullet A$
3) $\exists\forall \alpha,\beta\in\Re$ y $\forall A\in M_{m\times n}$ es $\alpha\bullet(\beta\bullet A)=(\alpha.\beta)\bullet A$
4) $\forall \alpha\in\Re$ y $\forall A\in M_{n\times n}$ es $Tr(\alpha\bullet A)=\alpha.Tr(A)$

a) No ; b) Si

15) ¿En qué caso la matriz $H=\begin{bmatrix}6 & 7\\ 2 & 9\end{bmatrix}$ es CL lineal de "U" y "V"?

a) $U=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$; b) $U=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

c) $U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

16) Si $H=\begin{bmatrix}k & 8\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ es combinación lineal de $U=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ y $V=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, entonces:

a) $k=9$; b) $k=2$; c) Las anteriores son falsas

17) Si $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 7\\ -4 & 6\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}3 & 7 & 1\\ -4 & 3 & 0\end{bmatrix}$, señale la falsa:

a) $A\bullet B=\begin{bmatrix}4 & 33\\ -16 & -28\end{bmatrix}$; b) $B\bullet A=\begin{bmatrix}-16 & 8\\ -36 & -8\end{bmatrix}$

c) $A\bullet C=\begin{bmatrix}1 & 27 & 3\\ -12 & -28 & 0\end{bmatrix}$

18) Sean $P\in M_{2\times 3}$, $Q\in M_{3\times 4}$ y $H\in M_{4\times 3}$. Señale la falsa:

a) $P\bullet Q\in M_{2\times 4}$; b) $Q\bullet H\in M_{3\times 3}$

c) $P\bullet Q\bullet H\in M_{2\times 3}$; d) $Q\bullet P\bullet H\in M_{3\times 2}$

19) Sea $Z = P \bullet Q \bullet H$, siendo:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ y } Q = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es:

a) $Z = \begin{bmatrix} 22 & 6 & 30 \\ -40 & -56 & -72 \end{bmatrix}$; b) $Z = \begin{bmatrix} 22 & 26 & 30 \\ -40 & -56 & -72 \end{bmatrix}$

c) $Z = \begin{bmatrix} 22 & 26 & 30 \\ 0 & -56 & -72 \end{bmatrix}$

20) Para las matrices "A" y "B", ¿cuándo es $Tr(A \bullet B) = Tr(B \bullet A)$?

a) Siempre ; b) Nunca

c) Sólo si "A" y "B" son cuadradas de igual orden

21) Si $P \in M_{m\times n}$ y $Q, H \in M_{n\times r}$.

¿Es cierto que $P \bullet (Q + H) = (P \bullet Q) + (P \bullet H)$?

a) No ; b) Si ; c) A veces

22) Si $P \in M_{m\times n}$, $Q \in M_{n\times r}$ y $H \in M_{r\times s}$.

¿Es cierto que $P \bullet (Q \bullet H) = (P \bullet Q) \bullet H$?

a) Si ; b) A veces ; c) No

23) Si $A, B, C, D \in M_{163\times 163}$, señale la falsa.

a) $(6 \bullet A + 7 \bullet B) \bullet (8 \bullet C + 9 \bullet D) =$
$= 48 \bullet (A \bullet C) + 54 \bullet (A \bullet D) + 56 \bullet (B \bullet C) + 63 \bullet (B \bullet D)$

b) $(6 + 7 \bullet B) \bullet (8 \bullet C + 9 \bullet D) =$
$= 48 \bullet C + 54 \bullet D + 56 \bullet (B \bullet C) + 63 \bullet (B \bullet D)$

c) $(6 \bullet A - 7 \bullet B) \bullet (-8 \bullet C + 9 \bullet D) =$
$= -48 \bullet (A \bullet C) + 54 \bullet (A \bullet D) + 56 \bullet (B \bullet C) - 63 \bullet (B \bullet D)$

24) Si $\begin{bmatrix} 2 & k \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$, es:

a) $k = 3$; b) $k \neq 3$; c) $k = -3$

25) Si $\begin{bmatrix} 2 & k \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 14 & k \end{bmatrix}$, es:

a) $k = 2$; b) $k = 7$; c) Las anteriores son falsas

26) Si $P \in M_{3\times 4}$, $Q \in M_{4\times 3}$ y $H \in M_{4\times 3}$, ¿es $P \bullet (Q \bullet H) = (P \bullet Q) \bullet H$?

a) Si ; b) A veces ; c) No

27) Sean $P \in M_{m\times n}$ y $Q \in M_{r\times s}$. Si $P \bullet Q \in M_{1\times 1}$ y $Q \bullet P \in M_{2\times 2}$, es:

a) $m = r = 1$ y $n = s = 2$; b) $m = s = 1$ y $r = n = 2$

c) $m = s = 2$ y $n = r = 1$

28) Sean P y Q matrices cuadradas equidimensionales.

a) Puede ser $P \bullet Q = Q \bullet P$; b) Nunca es $P \bullet Q = Q \bullet P$

c) Siempre es $P \bullet Q = Q \bullet P$

29) Si $P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ y $Q=\begin{bmatrix}u & v\\ z & t\end{bmatrix}$ conmutan (o sea, $P\bullet Q=Q\bullet P$), es:

a) $z=0$ y $2.u-v-2.t=0$; b) $t=0$ y $2.u-v-2.z=0$

c) $v=0$ y $2.u-z-t=0$

30) Sean P y Q matrices cuadradas equidimensionales. Es:

a) $(P-Q)^2=P^2-Q^2$; b) $(P-Q)^2=P^2+Q^2-2\bullet P\bullet Q$

c) $(P-Q)^2=P^2+Q^2-P\bullet Q-Q\bullet P$

31) Sean P y Q matrices cuadradas equidimensionales que conmutan.

a) $(P+Q)^2=P^2+Q^2$; b) $(P+Q)^2=P^2+Q^2+2\bullet P\bullet Q$

c) Las anteriores son falsas

32) Sean P y Q matrices cuadradas de orden "n". Es:

a) $(P+Q)\bullet(P-Q)=P^2-Q^2$; b) $(P+Q)^2=P^2+2\bullet P\bullet Q+Q^2$

c) $(P-Q)^2=(Q-P)^2$

33) Siendo P una matriz tal que $P^2=P$, si $Q=P-I$, es:

a) $Q^2=-Q$; b) $Q^2=I$; c) $Q^2=Q$

34) Sean P y Q matrices cuadradas equidimensionales que conmutan.

a) $(P+Q)\bullet(P-Q)=P^2-Q^2$; b) $(P-Q)^2=P^2+Q^2+2\bullet P\bullet Q$

c) $(P+Q)^2=P^2+Q^2$

35) Si $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$, es:

a) $P^t=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$; b) $P^t=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}$

c) Las anteriores son falsas

36) ¿Son ciertas todas las siguientes propiedades?

1) La traspuesta de la traspuesta de una matriz es ella misma.
2) La traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas.
3) Si $\alpha\in\Re$ y $P\in M_{m\times n}$, es $(\alpha\bullet P)^t=\alpha\bullet P^t$
4) La traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas.
5) Si $P\in M_{n\times n}$, entonces $Tr(P)=Tr(P^t)$

a) Sí ; b) No

37) Sean $P,Q\in M_{n\times n}$ y $H\in M_{n\times r}$, es:

a) $((P^t+2\bullet Q)\bullet H)^t=P\bullet H^t+2\bullet(Q^t\bullet H^t)$

b) $((P^t+2\bullet Q)\bullet H)^t=H^t\bullet P+2\bullet(H^t\bullet Q^t)$

38) ¿Cuál de las siguientes matrices no es simétrica?

a) $P=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 5 & 2\end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix}1 & 4 & 8\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 6 & 0\end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & 5\\ -2 & 0 & 2 & 8\\ 4 & 2 & 0 & 6\\ 5 & 8 & 7 & 3\end{bmatrix}$

39) Para toda matiz P, la matriz $P+P^t$ es simétrica.

a) Sí ; b) No

40) Para toda matriz P, la matriz $P \bullet P^t$ es simétrica.

a) Sí ; b) No

41) ¿Cuál de las siguientes matrices no es antisimétrica?

a) $P=\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 0 & 6 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \\ -4 & -2 & 0 & 6 \\ 5 & -8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

42) ¿Cuál de las siguientes matrices no es antisimétrica?

a) $P=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix} 0 & \pi & -9 \\ -\pi & 0 & 3 \\ 9 & -3 & 0 \end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \\ -4 & -2 & 0 & 6 \\ 5 & -8 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

43) Toda matriz P es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

a) Verdadero ; b) Falso

44) ¿Cuál de las siguientes matrices es escalar?

a) $P=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

45) ¿Cuál de las siguientes matrices es diagonal?

a) $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

46) ¿Cuál de las siguientes matrices es triangular?

a) $P=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

47) ¿Cuál de las siguientes matrices es idempotente?

a) $P=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; b) $P=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; c) $P=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

48) ¿Cuál de las siguientes matrices es regular?

a) $P=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

49) ¿Cuál de las siguientes matrices es singular?

a) $P=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

50) ¿Cuál de las siguientes matrices es regular?

a) $P=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

51) ¿Cuál de las siguientes matrices es singular?

a) $P=\begin{bmatrix}3&2&5\\2&4&6\\4&5&7\end{bmatrix}$; b) $Q=\begin{bmatrix}3&5&8\\6&1&7\\4&2&-1\end{bmatrix}$; c) $H=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&1&-1\\4&5&6\end{bmatrix}$

52) La matriz $P=\begin{bmatrix}0&k&0\\9&k&k\\k&-2&1\end{bmatrix}$ es singular si:

a) $k=0,\ 3,\ -3$; b) $k=1,\ 3,\ -3$; c) $k=4,\ 2,\ -5$

53) La matriz $P=\begin{bmatrix}0&1&3\\1&2&u\\5&u+v&v\end{bmatrix}$ es regular si:

a) $4.u+v=15$; b) $4.u+v\neq 15$; c) $u+v\neq 0$

54) Si $D=\begin{bmatrix}0&1&3\\4&2&7\\5&9&8\end{bmatrix}$, el menor complementario de $d_{21}=4$ es:

a) 0 ; b) -19 ; c) 19

55) Si $D=\begin{bmatrix}0&3&1\\4&2&7\\5&9&8\end{bmatrix}$, el cofactor o adjunto del elemento $d_{12}=1$ es:

a) 7 ; b) -3 ; c) 3

56) Si $D=\begin{bmatrix}0&1&12&-5\\4&2&7&\pi\\5&9&8&3\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$, el menor complementario de $d_{23}=7$ es:

a) -10 ; b) 10 ; c) 12

57) Si $D=\begin{bmatrix}0&1&12&-5\\4&2&7&\pi\\5&9&8&3\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$, el cofactor del elemento $d_{24}=\pi$ es:

a) -7 ; b) 5 ; c) 7

58) El determinante de una matriz cuadrada es la suma de los productos obtenidos al multiplicar por su menor complementario cada elemento de una cualquiera de las líneas de la matriz.

a) Verdadero ; b) Falso

59) Si $P=\begin{bmatrix}0&1&0&-5\\4&2&7&0\\5&1&4&3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}$, es:

a) $|P|=93$; b) $|P|=92$; c) $|P|=90$

60) Si $P=\begin{bmatrix}0&9&0&0\\4&2&7&12\\0&1&4&3\\0&6&0&2\end{bmatrix}$, es:

a) $|P|=288$; b) $|P|=0$; c) $|P|=-288$

61) Son ciertas las siguientes propiedades de los determinantes?

1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
2) Si todos los elementos de una línea son cero, el determinante es cero.
3) Al cambiar el orden de dos líneas paralelas el determinante no varia.
4) Si dos líneas paralelas son iguales o proporcionales, el determinante es 0.
5) Si los elementos de una línea se multiplican (dividen) por un mismo número, el determinante se multiplica (divide) por ese número.

$$\text{Si } A \in M_{n\times n} \text{ y } k \in \Re, \text{ es } \left| k \bullet A \right| = k^n . \left| A \right|$$

6) Un determinante no varía si a una de sus líneas le sumamos o restamos otras líneas paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera.
7) Un determinante es 0 si una de sus líneas puede obtenerse como suma de otras líneas paralelas a ella, multiplicadas cada una de éstas por un número.
8) Siendo "A" y "B" matrices cuadradas del mismo orden, es $\left| A \bullet B \right| = \left| A \right| . \left| B \right|$.

a) Sí ; b) No

62) ¿Cuál de las siguientes matrices tiene determinante no nulo?

$$\text{a) } P = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \text{ b) } Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} ; \text{ d) } U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

63) ¿Cuál de las siguientes matrices tiene determinante no nulo?

$$\text{a) } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix} ; \text{ b) } Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 6 \end{bmatrix} ; \text{ d) } U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

64) Siendo $P \in M_{7\times 7}$, sea Q la matriz que resulta al permutar en P las filas 2ª y 3ª y las columnas 4ª y 5ª, es:

a) $\left| P \right| = -\left| Q \right|$; b) $\left| P \right| = \left| Q \right|$; c) $\left| P \right| = 7.\left| Q \right|$

65) Si el determinante de una matriz vale 2 y multiplicamos dos de sus columnas por 3, las permutamos y sumamos a la 3ª fila la 4ª fila multiplicada por -2, el determinante de la nueva matriz vale:

a) -18 ; b) 18 ; c) -36

66) En una matriz cuyo determinante es 12 trasponemos la matriz, permutamos las filas 1ª y 2ª y las columnas 3ª y 4ª, y multiplicamos la 5ª fila por $1/2$. El determinante de la nueva matriz vale:

a) -6 ; b) 6 ; c) -12

67) En una matriz cuyo determinante es 12 trasponemos la matriz, permutamos las filas 2ª y 4ª, y a la 3ª columna le sumamos la 4ª columna multiplicada por $1/2$. El determinante de la nueva matriz vale:

a) 0 ; b) 12 ; c) -12

68) En una matriz cuyo determinante es 10, permutamos las filas 3ª y 4ª, y a la 5ª columna le sumamos la 3ª columna mas dos veces la 1ª columna. El determinante de la nueva matriz vale:

a) -10 ; b) 10 ; c) 0

69) La matriz adjunta de $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ es:

a) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

70) La matriz adjunta de $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ es:

a) $\begin{bmatrix} -5 & 18 & 15 \\ 3 & -26 & 14 \\ 4 & 19 & 12 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -5 & -18 & 15 \\ 3 & -26 & 14 \\ 4 & 19 & -12 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -5 & -18 & -15 \\ 3 & -26 & 14 \\ 4 & 19 & -12 \end{bmatrix}$

71) La matriz inversa de $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ es:

a) $\begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -4/7 & 5/7 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 5/7 & -2/7 \\ -4/7 & 3/7 \end{bmatrix}$

72) La matriz inversa de $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ es:

a) $\begin{bmatrix} 0 & -24/9 & 15/9 \\ 3/9 & -26/9 & 14/9 \\ 0 & 21/9 & -12/9 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 24/9 & 15/9 \\ 3/9 & -26/9 & 14/9 \\ 0 & 21/9 & -12/9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & -24/9 & 15/9 \\ 3/9 & -26/9 & 14/9 \\ 0 & -21/9 & -12/9 \end{bmatrix}$

73) Si la matriz $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix}$ tiene inversa, entonces:

a) $k \neq 0$; b) $k = 0$; c) La pregunta es una estupidez

74) La matriz $P = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ tiene inversa sólo si:

a) $k = 8$; b) $k \neq 8$; c) $k = 0$

75) La matriz $P = \begin{bmatrix} k & 10 \\ 5 & 2.k \end{bmatrix}$ carece de inversa sólo si:

a) $k = 5$; b) $k = \pm 5$; c) $k = -5$

76) La matriz $P = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ tiene inversa sólo si:

a) $k \neq 1, -2$; b) $k = 1, -2$; c) $k \neq -1, 2$

77) ¿Cuándo tiene inversa la matriz $P = \begin{bmatrix} k & -1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

a) $k \neq 1$; b) $k = 1$; c) $\forall k \in \Re$

78) Señale la correcta:

a) El rango de la matriz P es el orden del mayor menor no nulo.
b) El rango de la matriz P es el orden del menor no nulo de mayor orden.
c) El rango de la matriz P es el menor no nulo de mayor orden.

79) ¿Son ciertas todas las siguientes afirmaciones?

1) El rango de una matriz coincide con el de su traspuesta.
2) El rango de una matriz no varía si cambiamos el orden de líneas paralelas.
3) El rango de una matriz no varía si multiplicamos una línea por un número.
4) El rango de una matriz no varía si a una de las líneas le sumamos otras paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera.
5) El rango de una matriz no varía si suprimimos una línea de ceros.
6) Si una línea de una matriz es suma de otras paralelas a ella multiplicadas por ciertos números, el rango no varía al suprimir dicha línea.

a) Sí ; b) No

80) Sean $P, Q \in M_{n \times n}$.

a) $rg(P + Q) = rg(P) + rg(Q)$; b) $rg(P \bullet Q) = rg(P).rg(Q)$

c) En general, las anteriores son falsas

81) Sean $P \in M_{n \times m}$ y $\theta \in \Re$.

a) $rg(\theta \bullet P) = \theta.rg(P)$; b) $rg(\theta \bullet P) = \theta + rg(P)$

c) En general, las anteriores son falsas

82) Sean $P \in M_{n \times m}$ y $\theta \in \Re$.

¿Puede ser $rg(\theta \bullet P) = \theta.rg(P)$ en algún caso?

a) Sí ; b) No

83) Sean $P \in M_{n\times m}$ y $\theta \in \Re$.
¿Puede ser $rg(\theta \bullet P) = \theta + rg(P)$ en algún caso?
a) Sí ; b) No

84) Sea $P \in M_{m\times n}$.
a) $rg(3 \bullet P) = rg(P)$; b) $rg(3 \bullet P) = 3.rg(P)$
c) Las anteriores son falsas

85) Sea $P \in M_{4\times 5}$. Señale la opción que no puede suceder.
a) $rg(P) = 3$; b) $rg(P) = 0$; c) $rg(P) = 5$

86) Sean $P, Q \in M_{3\times 5}$ tales que $rg(P) = rg(Q) = 3$.
¿Puede ser $rg(P + Q) = 0$?
a) Sí ; b) No

87) Sean $P, Q \in M_{3\times 5}$ tales que $rg(P) = 2$ y $rg(Q) = 3$.
¿Puede ser $rg(P + Q) = 0$?
a) Sí ; b) No

88) Sea $P \in M_{4\times 4}$ tal que $rg(P) = 2$.
a) La inversa de P no existe ; b) $rg(P^{-1}) \leq 4$; c) $rg(P^{-1}) = 2$

89) $P \in M_{5\times 7}$ tiene un menor de orden 3 no nulo y un menor de orden 4 nulo.
a) $rg(P) = 3$; b) $rg(P) \leq 4$; c) $3 \leq rg(P) \leq 5$

90) Sea $P \in M_{4\times 4}$ una matriz regular.
a) $rg(P^{-1}) = 4$; b) Puede ser $rg(P^{-1}) = 3$
c) Las anteriores son falsas

91) Sean $P, Q \in M_{4\times 4}$ matrices regulares.
a) Puede ser $rg(P \bullet Q) = 2$; b) $rg(P \bullet Q) = 4$
c) Las anteriores son falsas

92) Sean $P, Q \in M_{4\times 4}$, siendo Q singular.
a) $rg(P \bullet Q) < 4$; b) $rg(P \bullet Q) \leq 4$; c) Las anteriores son falsas

93) Sea $P \in M_{4\times 4}$ una matriz singular.
a) $rg(Adj.(P)) < 4$; b) $rg(Adj.(P)) \leq 4$
c) Las anteriores son falsas

94) Sea "P" una matriz cuadrada de orden "n".
a) $|P|.|Adj.(P)| = (|P|)^{n-1}$; b) $|Adj.(P)| = (|P|)^n$
c) $|Adj.(P)| = (|P|)^{n-1}$

95) Sean $P, Q \in M_{n\times n}$ tales que $P \bullet Q = P$ y $Q \bullet P = Q$.
a) $P = I$ y $Q = I$; b) "P" y "Q" son idempotentes
c) Si "P" y "Q" son simétricas, $P \bullet Q$ y $Q \bullet P$ también lo son

96) Una matriz cuadrada P se dice ortogonal si:
a) $P^{-1} = P$; b) $P^{-1} = P^t$; c) $P^{-1} = P \bullet P^t$

97) ¿Son ciertas las siguientes propiedades?

1) El determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1.

2) Si "P" es ortogonal, P^{-1} y P^t también lo son.

3) Si $P,Q \in M_{n\times n}$ son ortogonales, $P\bullet Q$ también lo es.

a) Sí ; b) No

98) Si $P,Q \in M_{n\times n}$, ¿son ciertas todas las siguiente propiedades?

1) $P \bullet Adj.(P) = (Adj.(P)) \bullet P = |P| \bullet I$.

Si $|P| = 0$, es $P \bullet Adj.(P) = (Adj.(P)) \bullet P = 0$.

2) $|Adj.(P)| = (|P|)^n$. Es $Adj.(P \bullet Q) = ((Adj.(Q)) \bullet ((Adj.(P))$.

a) Sí ; b) No

99) Si la matriz "A" conmuta con "C", las matrices "B–C" y "B" son ortogonales y $X = I$, despejando "A" en la ecuación $B \bullet X \bullet A - A \bullet C = B$, se obtiene:

a) $A = I - C^t \bullet B$; b) $A = C^t \bullet B$; c) $A = C^t \bullet B - I$

100) Sea $P \in M_{3\times 3}$ una matriz ortogonal.

a) $(Adj.(P)) \bullet P^t = 3 \bullet I$; b) $(Adj.(P)) \bullet P = I$ ó $-I$

c) $(Adj.(P^{-1})) \bullet P = I$ ó $-I$

101) Sean "A" y "B" matrices equidimensionales, con "A" regular y $|B^t| = 1/|B|$.

a) $|A^t \bullet B^{-1} \bullet A^{-1}| = -1$; b) $|A^t \bullet B^{-1} \bullet A^{-1}| = 1$ ó -1

c) $|A^t \bullet B^{-1} \bullet A^{-1}| = 1$

102) Si la matriz "A" conmuta con la matriz "C", la matriz "$B - C$" es ortogonal, $C^t \bullet B = I$ y $X = I$, al despejar "A" en la ecuación $B \bullet X \bullet A - A \bullet C = B$, se obtiene:

a) $A = I - B^t \bullet B$; b) $A = B^t \bullet B$; c) $A = B^t \bullet B - I$

103) Sea $P \in M_{n\times n}$ tal que $P^4 = I$.

a) $P = I$; b) $P^{-1} = P^3$; c) $|P| = 1$

104) Sean "A" y "B" matrices cuadradas de orden 3, siendo $|A| = 3$ y $|B| = -2$.

a) $|A \bullet B \bullet A^{-1}| = -18$; b) $|A - B| = 5$; c) $|B \bullet (Adj.B)^t| = -8$

105) Si "A" es ortogonal y "D" es diagonal del mismo orden que "A", entonces:

a) $A \bullet D$ es simétrica ; b) $A^{-1} \bullet D \bullet A$ es simétrica

c) $A^t \bullet D = D \bullet A^t$

106) Sean "A", "B" y "C" matrices cuadradas del mismo orden.

a) $A \bullet (B \bullet C) = (B \bullet C) \bullet A$; b) $|A \bullet (B \bullet C)| = |(B \bullet C) \bullet A|$

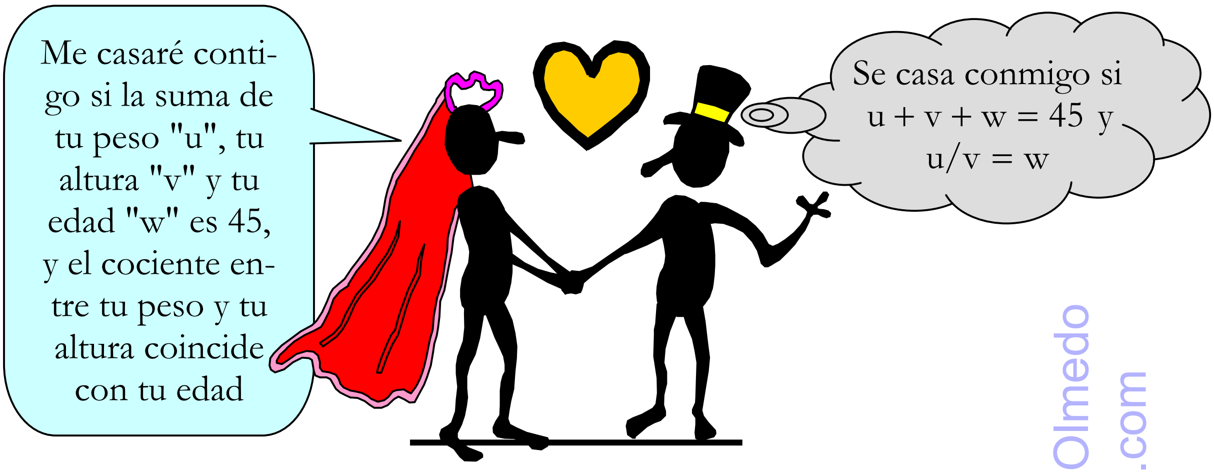
c) $A + (B \bullet C) = A \bullet B + A \bullet C$

Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.01 Sistemas de ecuaciones lineales
2.02 ¿Qué es resolver un sistema de ecuaciones?
2.03 Teorema de Rouché-Frobenius
2.04 Sistemas lineales homogéneos
2.05 Regla de Cramer
2.06 Resolución de un caso general
2.07 Resolución de sistemas por sustitución
2.08 Método de Gauss
2.09 El problema inverso
2.10 Combinación lineal de matrices
2.11 Lo que se nos viene encima

Una ecuación es la expresión matemática de una condición de igualdad... y un sistema de "k" ecuaciones es la expresión matemática de un sistema de "k" condiciones de igualdad.



2.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Hablar de un sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas x_1, $x_2, \dots ,x_n$ es hablar de "m" ecuaciones (condiciones) cuya estructura es tal que todas las incógnitas siempre aparecen elevadas a exponente unidad y multiplicadas por constantes; o sea, así:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots + a_{mn}.x_n = b_m \end{array}\right\} \text{(I)}$$

donde los a_{ij} y los b_i $(i = 1,2,\dots,m\ ;\ j = 1,2,\dots,n)$ son números reales constantes.

Toma buena nota: la proporcionalidad está en cada ecuación del sistema:

$$\underbrace{a_{k1}.x_1}_{\text{proporcional a } x_1} + \overbrace{a_{k2}.x_2}^{\text{proporcional a } x_2} + \dots + \underbrace{a_{kn}.x_n}_{\text{proporcional a } x_n} = b_k$$

Es lineal el siguiente sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas x_1, x_2, x_3:

$$\left.\begin{array}{r} 2.x_1 + 3.x_2 - 7.x_3 = 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 = 9 \end{array}\right\}$$

No es lineal ninguno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 5.x_1^2 + 3.x_2 - 7.x_3 &= 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \text{ no es "lineal" debido a } x_1^2$$

$$\left.\begin{aligned} 5.x_1.x_2 - 7.x_3 &= 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \text{ no es "lineal" debido a } x_1.x_2$$

$$\left.\begin{aligned} 5.x_1 + 2.x_2 - 7.\mathrm{Ln}\, x_3 &= 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \text{ no es "lineal" debido a } \mathrm{Ln}\, x_3$$

$$\left.\begin{aligned} 5.x_1 + 2.x_2 - 7.\mathrm{sen}\, x_3 &= 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \text{ no es "lineal" debido a } \mathrm{sen}\, x_3$$

Un sistema lineal de ecuaciones siempre puede expresarse en forma matricial, pues podemos expresar el sistema lineal (I) en la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b} \Rightarrow A \bullet X = b$$

De "A" se dice matriz de los coeficientes, de "X" se dice matriz de las incógnitas, de "b" se dice matriz de los términos independientes. Si a la matriz "A" le añadimos la columna de los términos independientes, obtenemos la llamada matriz ampliada u orlada del sistema.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + 3.x_2 + 4.x_3 &= 6 \\ 5.x_1 + 7.x_2 + 0.x_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por razones de economía, también se escribe $A / B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 5.u + 2.v + 4.w - 5.z &= 7 \\ 4.u + 7.v + w + 5.z &= 3 \\ u + v + w - z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

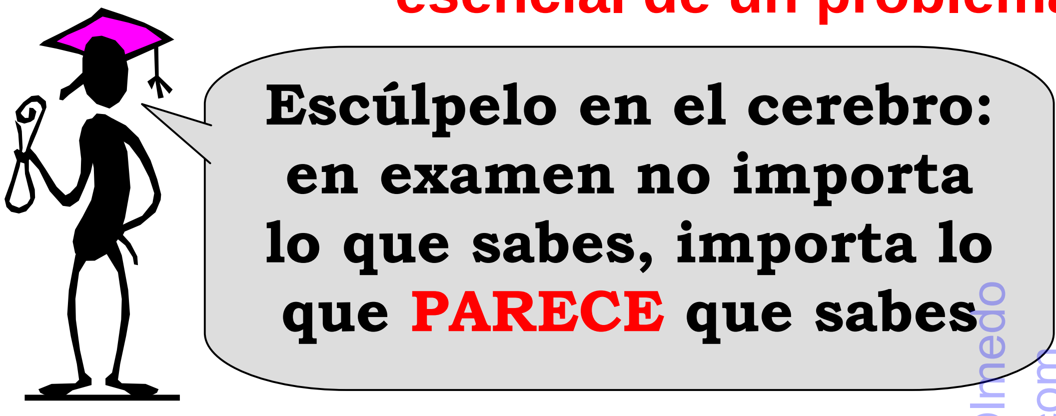
Las correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & -5 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En examen debe quedar escrito todo lo relevante que pase por el cerebro.

LOS LATIGUILLOS

Un latiguillo es un párrafo corto o un esquema que explica lo esencial de un problema.



Los latiguillos son las herramientas que usaremos para transmitir vibraciones positivas al profesor que corrija los exámenes y para conseguir que nuestro examen se distinga de los demás y parezca que sabemos más. Además, los latiguillos son muy eficaces para protegernos de las consecuencias de los errores de cálculo que todos cometemos inevitablemente: un profesor mentalmente equilibrado jamás te suspenderá por un error de cálculo si con los latiguillos le has vendido la moto de que sabes lo que llevas entre manos.

Lo mejor para ilustrarte es un ejemplo

EJERCICIO

Determínense los valores de "a" para que la matriz "A" tenga inversa, calculando dicha inversa de "A" si $a = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN "ESCUPITAJO"

$$|A| = a^2 + 4.a - 21 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \neq -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5 = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

$$\text{Si } a = 4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11} \bullet \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

Es la solución del que no sabe sacar el máximo partido a sus conocimientos... y pueden presentarse dos situaciones:

1) Si los cálculos son correctos, al profesor le asaltará la duda sobre si hemos copiado del vecino o sabemos realmente lo que estamos haciendo.

2) Si los cálculos no son correctos, el profesor nos pone un cero patatero, pues la solución sólo incluye números y los números están mal.

SOLUCIÓN "PROFESIONAL"

Latiguillo para explicar el concepto de inversa de una matriz cuadrada: Siendo "A" una matriz de orden $n \times n$, su inversa A^{-1} es la matriz de orden $n \times n$ tal que $A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = I$, donde "I" es la matriz unidad de orden $n \times n$.

Latiguillo para explicar que no todas las matrices cuadradas tienen inversa: Como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A)$$

y en Matemáticas está prohibido dividir por cero, la matriz A^{-1} existe sólo si "A" es regular (o sea, $|A| \neq 0$); al exigir que $|A| \neq 0$, resulta:

$$|A| = a^2 + 4.a - 21 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5 = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

Si $a = 4$, es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, siendo:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{11} \bullet \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Si $a = 4 \Rightarrow |A| = 4^2 + 4.4 - 21 = 11$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

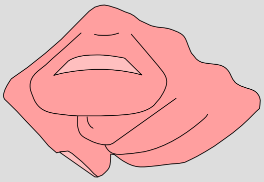
Ventana donde explicamos quién es la matriz Adj.(A) y la calculamos

COMENTARIO

Es la solución del que sabe envolver caramelos con primor: los cálculos se adornan con latiguillos y explicaciones que evidencian la claridad **(?)** de nuestras ideas, además empleamos ventanas que facilitan la lectura de lo escrito .... y también pueden presentarse dos situaciones:

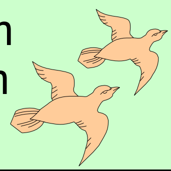
1) Si los cálculos son correctos, el profesor que corrija el examen, quitándose el sombrero ante lo que hemos escrito, nos pondrá un 10... y será feliz durante unos instantes al comprobar que algunos sí entienden lo que él explica.

2) Si los cálculos no son correctos, el profesor, que también comete errores de cálculo, y lo sabe, pensará: ¡qué pena!, est@ alumn@ es de los pocos que acreditan tener las ideas perfectamente claras, pero a causa de su error de cálculo no puedo darle un 10; no obstante, sería muy injusto tratarle como al de la solución escupitajo, le daré un... ¿6?, ¿un 7?, ¿un 5 pelao?... lo que sea, pero un aprobado.



TODO ERROR CONCEPTUAL GORDO ANULA EL EFECTO DE LOS LATIGUILLOS Y TE DEJA CON EL CULO AL AIRE.

En toda asignatura dura hay "cosas" que caen en examen con mucha frecuencia; tu trabajo es averiguar cuáles son y preparar los correspondientes latiguillos para ellas.



Entropía: medida del desorden de un sistema

El 2º principio de la Termodinámica postula que la entropía de universo siempre aumenta.

2.2 ¿QUÉ ES RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES?

Resolver un sistema de ecuaciones (lineales o no) con "n" incógnitas es encontrar un valor particular de cada incógnita de modo que al sustituir cada incógnita por su correspondiente valor particular ocurre algo mágico: todas las ecuaciones se convierten en identidades; o sea, todas las ecuaciones quedan de la forma $3 = 3$ ó $7 = 7$ ó $-3 = -3$ ó $0 = 0$ ó ..... Del conjunto de dichos valores particulares de las incógnitas se dice que es una solución del sistema.

De Perogrullo: cada solución del sistema es un elemento del conjunto $\Re^n$.

Por ejemplo, en el siguiente sistema lineal con 4 incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4

$$\left.\begin{array}{r} 1.x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 + 2.x_4 = 6 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 + 1.x_4 = 5 \\ 3.x_1 - 1.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 = 1 \end{array}\right\} \text{(II)}$$

puedes comprobar que si hacemos $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 3$ y $x_4 = 0$, ocurre que todas las ecuaciones de (II) se transforman en identidades; y por ello se dice que $(2;5;3;0) \in \Re^4$ es una solución del sistema de ecuaciones (II).

También puedes comprobar que si hacemos $x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 7$ y $x_4 = 8$, no ocurre que todas las ecuaciones de (II) se transforman en identidades; y por ello se dice que $(6;2;7;8) \in \Re^4$ no es solución del sistema (II).

Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Se dice que un sistema de ecuaciones es incompatible si no tiene solución; o sea, es imposible encontrar valores particulares de las incógnitas que transformen en identidades a todas las ecuaciones del sistema.

Se dice que un sistema de ecuaciones es compatible si tiene solución, o sea, es posible encontrar valores particulares de las incógnitas que transformen en identidades a todas las ecuaciones del sistema. En tal caso, se dice que el sistema es determinado si tiene una única solución; si tiene infinitas soluciones se dice que es indeterminado.

Sistemas Equivalentes

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Teorema de Equivalencia de Sistemas Lineales

Si en un sistema lineal de ecuaciones sustituimos una ecuación cualquiera por la ecuación que resulta al multiplicarla por un número cualquiera no nulo y sumarla miembro a miembro a otras ecuaciones del sistema (después de multiplicar estas últimas por un número cualquiera), el nuevo sistema lineal que obtenemos es equivalente al primero (tiene las mismas soluciones que el primero).

Por ejemplo, si en el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} 1.x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 + 2.x_4 &= 6 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 + 1.x_4 &= 5 \\ 3.x_1 - 1.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

sustituimos la primera ecuación por la que resulta al sumar miembro a miembro el doble de la primera ecuación y el triple de la segunda, obtenemos el sistema lineal (III), que es equivalente al (II):

$$\left.\begin{aligned} 11.x_1 - 2.x_2 + 5.x_3 + 7.x_4 &= 27 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 + 1.x_4 &= 5 \\ 3.x_1 - 1.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

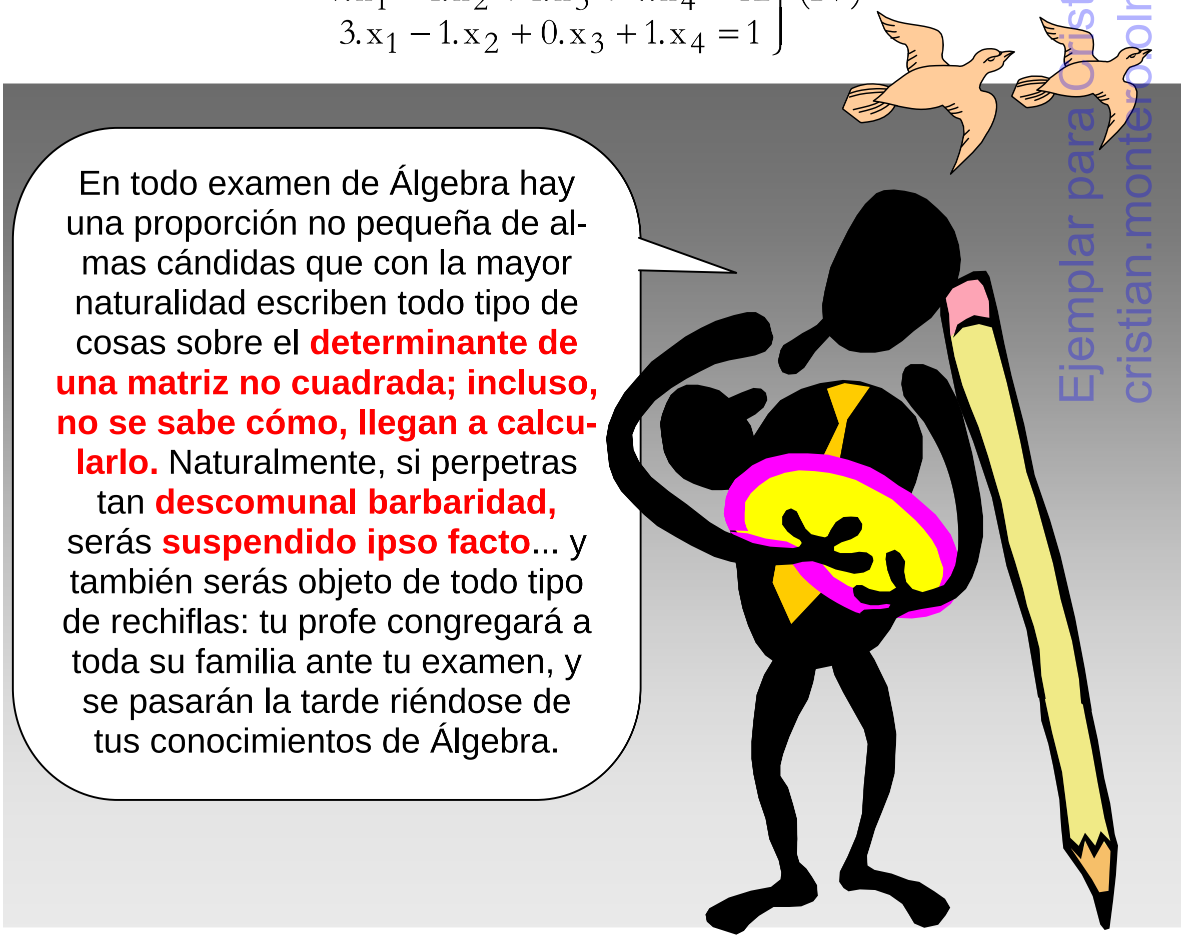
Observa atentamente: las matrices ampliadas de los sistemas (II) y (III) son:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ;\ N = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 5 & 7 & 27 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y como la primera fila de "N" es la suma del doble de la primera fila de "M" y el triple de la segunda fila de "M", apostamos la vida a que las matrices "M" y "N" tienen el mismo rango, pues se pasa de una a otra haciendo transformaciones elementales.

Otro ejemplo: si en el sistema lineal (II) sustituimos la segunda ecuación por la que resulta al sumar miembro a miembro todas las ecuaciones, obtenemos el sistema lineal (IV), que es equivalente al (II) y al (III):

$$\left.\begin{aligned} 1.x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 + 2.x_4 &= 6 \\ 7.x_1 - 1.x_2 + 1.x_3 + 4.x_4 &= 12 \\ 3.x_1 - 1.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$



2.3 TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

La condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas y matriz de coeficientes "A" y ampliada "B" sea compatible (tenga solución) es que "A" y "B" tengan igual rango; en tal caso:

$$\text{Si } rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow \text{solución única}$$

$$\text{Si } rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow \text{infinitas soluciones}$$

Si $rg(A) \neq rg(B)$, el sistema carece de solución.

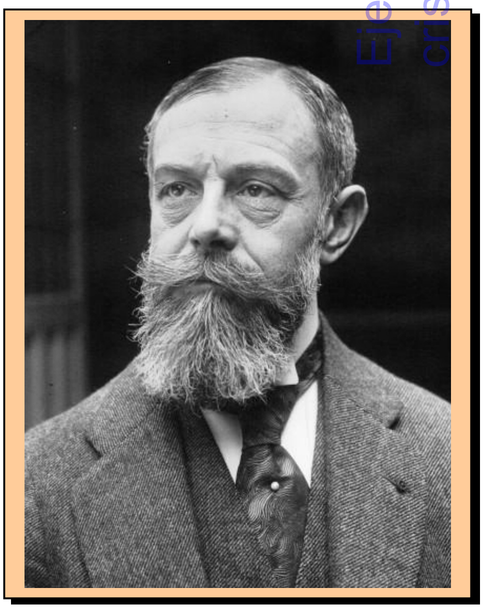
¡La madre del cordero de los sistemas de ecuaciones lineales y, por extensión, la madre del cordero del Álgebra Lineal!

Eugène Rouché era hijo de un terrateniente de Sommieres. Estudio en la "Ècole Polytechnique" donde consiguió el doctorado en ciencias.

En 1873 fue nombrado presidente de la Societé Mathematique de Francia y más tarde en 1896 fue elegido de la Academia de Ciencias francesa.

No fue el único en probar el teorema que lleva su nombre, también Georges Fontené enunció este teorema y reivindico su prioridad, pero Rouché fue el primero en enunciarlo. Más tarde el matemático Fröbenius en 1905 discrepó este teorema, tanto a Rouché como a Fontené, y propuso una demostración alternativa. Su hijo Jacques Rouché fue director de la Opera de París.

Ferdinand Georg Fröbenius era hijo de un pastor protestante. Entró en la escuela Joachimsthal Gymnasium en 1860 con once años de edad y se graduó en 1867. Ese mismo año, entró en la universidad de Göttingen, pero sólo estuvo un semestre, siguiendo sus estudios en la universidad de Berlín donde obtuvo su doctorado. Fue profesor en varias escuelas hasta que en 1874 fue aceptado en la universidad de Berlín como profesor extraordinario de matemáticas. Solo un año después se va a Zürich como profesor ordinario de la Eidgenössische Polytechnikum, donde estará 17 años. Allí se casó, tuvo familia y realizó un importante trabajo de investigación. Durante 25 años Fröbenius fue la figura líder, la que dirigió la enseñanza universitaria de la matemática en Berlín.



2.4 SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

Se dice que un sistema lineal es homogéneo si son nulos los términos independientes de todas las ecuaciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}\cdot x_1+\ldots\ldots+a_{1n}\cdot x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1+\ldots\ldots+a_{mn}\cdot x_n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{0} \Rightarrow A \bullet X = 0$$

Acostúmbrate a escribir SLH para referirte a un sistema lineal homogéneo... y SLNH para un sistema lineal no homogéneo

En un SLH, la matriz de los coeficientes y la ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros, y por ello tienen igual rango; así, todo SLH es compatible: al menos tiene la solución

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

que es la llamada solución trivial. Por tanto, según el Rouché-Frobenius, para un SLH con "n" incógnitas y matriz de coeficientes "A", se tiene que:

$$\text{Si } rg(A) = n \Rightarrow \text{solución trivial}$$
$$\text{Si } rg(A) < n \Rightarrow \text{infinitas soluciones}$$

2.5 LA REGLA DE CRAMER

Sea un sistema lineal $A \bullet X = b$ de "n" ecuaciones con "n" incógnitas (el mismo número de ecuaciones que de incógnitas) cuya matriz de coeficientes "A" (cuadrada) es regular, o sea, $|A| \neq 0$. Sea "B" la matriz ampliada del sistema.

Si $|A| \neq 0$, es $rg(A) = n$, y como "B" tiene "n" filas y "$n+1$" columnas, también es $rg(B) = n$; por tanto, en un sistema lineal de "n" ecuaciones con "n" incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo, siempre ocurre que $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas. Así, según Rouché-Frobenius, el sistema siempre tiene solución única: es compatible y determinado.

La regla de Cramer permite calcular la solución

El valor de la incógnita x_k es el resultado de dividir dos determinantes, el denominador es el determinante de la matriz "A" de los coeficientes del sistema, y el numerador es determinante de la matriz que resulta al sustituir la k-ésima columna de "A" (formada por los coeficientes de la incógnita x_k) por la columna "b" que forman los términos independientes del sistema.

El matemático suizo Gabriel Cramer fue catedrático de Matemáticas (1724-1727) y de Filosofía (1750-1752) en la Universidad de Ginebra.

En 1750 expuso en *Introducción al análisis de las curvas algebraicas* la teoría newtoniana referente a las curvas algebraicas, clasificán-dolas según el grado de la ecuación.

Reintrodujo el determinante, algoritmo que Leibniz ya había utilizado al final del siglo XVII para resolver sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas, y editó las obras de Jakob Bernoulli y parte de la correspondencia de Leibniz.

FONEMATO 2.5.1

Resuélvase el sistema $\left\{\begin{aligned} 2.x_1 - x_2 + 3.x_3 = 4 \\ 4.x_1 + x_2 - 5.x_3 = 6 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 2.x_3 = 2 \end{aligned}\right\}$

SOLUCIÓN

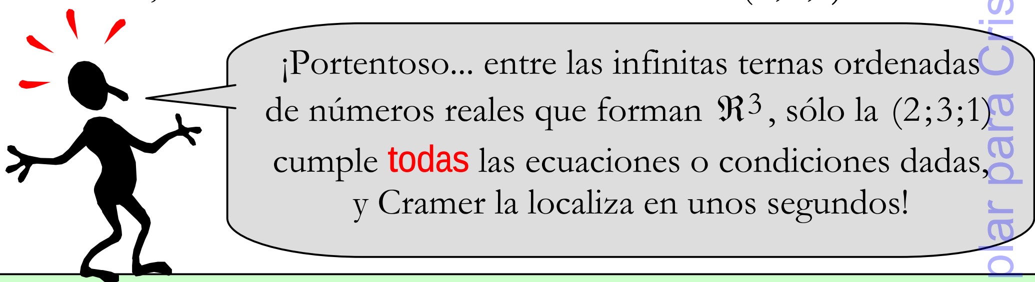
- Estamos ante un **sistema lineal** con igual número de ecuaciones (condiciones) que de incógnitas... y **rezamos** para que la matriz de los coeficientes tenga determinante no nulo, pues en tal caso el sistema tendrá **solución única,** que determinaremos mediante la **regla de Cramer.**
- Expresión matricial del sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b} \Rightarrow A \bullet X = b$$

Como $|A| = -26 \neq 0$, la matriz de coeficientes y la ampliada tienen rango 3, que coincide con el número de incógnitas; por tanto, el sistema tiene solución única .... y la obtenemos mediante la **regla de Cramer:**

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 \ ; \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 3 \ ; \ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 1$$

En definitiva, la única solución del sistema es la terna $(2;3;1) \in \Re^3$.



Puedes **comprobar que no hay errores de cálculo** sin más que comprobar que la terna $(2;3;1)$ transforma todas las ecuaciones en identidades:

$$\left\{\begin{aligned} 2.x_1 - x_2 + 3.x_3 = 4 \\ 4.x_1 + x_2 - 5.x_3 = 6 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 2.x_3 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2.2 - 3 + 3.1 = 4 \\ 4.2 + 3 - 5.1 = 6 \\ 3.2 - 2.3 + 2.1 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 4 = 4 \\ 6 = 6 \\ 2 = 2 \end{aligned}\right.$$

NOTA: Todo sistema lineal que pueda resolverse mediante **Cramer** se puede resolver también por el método de la **matriz inversa:** si $A \bullet X = b$, **despejando la matriz de incógnitas** X, resulta $X = A^{-1} \bullet b$ (observa que si la matriz "A" tiene determinante no nulo, seguro que existe su inversa). En nuestro caso:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 2.5.2

Calcúlese "k" para que el siguiente sistema lineal de ecuaciones tenga solución única. Determínese la solución cuando exista.

$$\begin{aligned} x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2.x_3 &= 0 \\ 2.x_1 + x_2 + k.x_3 &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

- El sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Sea "A" su matriz de coeficientes y "B" su matriz ampliada.
- El sistema tiene solución única si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{número de incógnitas} = 3$. Es $\text{rg}(A) = 3$ si $|A| = 15 - 3.k \neq 0 \Rightarrow k \neq 5$.
- Si $k \neq 5$, la única solución del sistema la obtenemos mediante Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}}{|A|} \;;\; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix}}{|A|} \;;\; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Al hacer los cálculos, resulta:

$$x_1 = -\frac{k+2}{15-3.k} \;;\; x_2 = \frac{4-k}{15-3.k} \;;\; x_3 = \frac{3}{15-3.k}$$

Comprobación de que no hay errores de cálculo

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2.x_3 &= 0 \\ 2.x_1 + x_2 + k.x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} -\frac{k+2}{15-3.k} + 2.\frac{4-k}{15-3.k} + 3.\frac{3}{15-3.k} &= 1 \\ -\frac{k+2}{15-3.k} - \frac{4-k}{15-3.k} + 2.\frac{3}{15-3.k} &= 0 \\ -2.\frac{k+2}{15-3.k} + \frac{4-k}{15-3.k} + k.\frac{3}{15-3.k} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Por ejemplo, la única solución del sistema si $k = 4$, es:

$$x_1 = -\frac{4+2}{15-3.4} = -2 \;;\; x_2 = \frac{4-4}{15-3.4} = 0 \;;\; x_3 = \frac{3}{15-3.4} = 1$$

Por ejemplo, si $k = 2$, la única solución del sistema es:

$$x_1 = -\frac{2+2}{15-3.2} = -\frac{4}{9} \;;\; x_2 = \frac{4-2}{15-3.2} = \frac{2}{9} \;;\; x_3 = \frac{3}{15-3.2} = \frac{3}{9}$$

- Si $k = 5$ $(\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 3)$ el sistema es incompatible, pues "A" y "B" tienen distinto rango.

  En efecto, si $k = 5$, la matriz "B" se convierte en $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, es $\text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A)$.

2.6 RESOLUCIÓN DEL CASO GENERAL

A continuación describimos la secuencia de trabajo para resolver un sistema lineal de "k" ecuaciones con "n" incógnitas cuya matriz de coeficientes es "A" y cuya matriz ampliada es "B":

1) Calculamos los rangos de las matrices "A" y "B".
2) Si $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(B)$, el sistema es incompatible, carece de solución.
3) Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = n \equiv$ número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado, tiene solución única.

Cálculo de la única solución

a) Si $n = k$, podemos calcular la solución ipso facto mediante la regla de Cramer o mediante el método de la matriz inversa.

b) Si $n < k$, seleccionamos las "n" ecuaciones correspondientes a cualesquiera "n" filas de "A" con las que se pueda formar un menor no nulo de orden "n", las restantes ecuaciones del sistema se eliminan. Así resulta un sistema equivalente al sistema dado, pero con igual número de ecuaciones que de incógnitas. A continuación empleamos la regla de Cramer o el método de la matriz inversa para obtener la solución del nuevo sistema.

4) Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = h < n$ ($n \equiv$ número de incógnitas), el sistema es compatible e indeterminado, tiene infinitas soluciones.

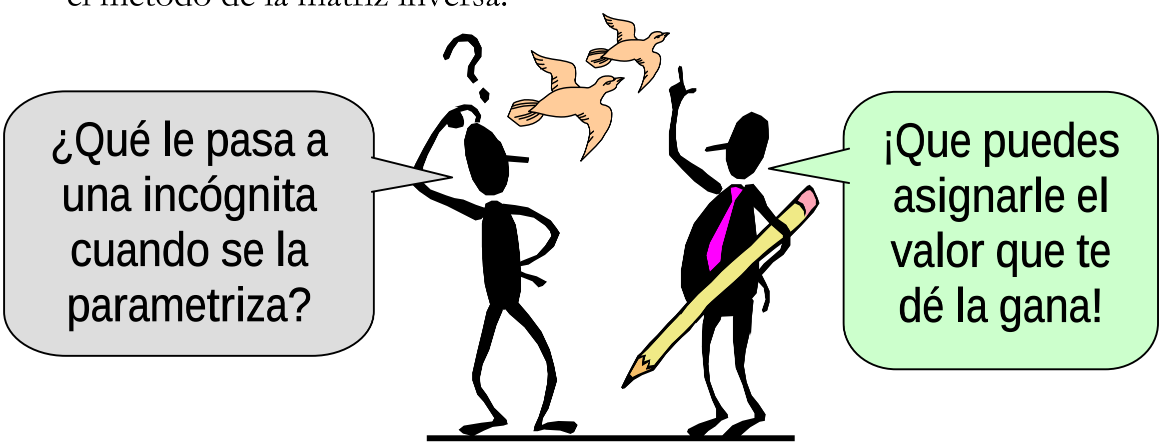
Cálculo de las infinitas soluciones

ESENCIAL

a) Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = h < n \Rightarrow$ en la matriz de coeficientes "A" tendremos localizado un menor no nulo de orden "h".

b) Seleccionamos las "h" ecuaciones correspondientes a las "h" filas del citado menor no nulo de orden "h", y eliminamos las restantes ecuaciones del sistema; así obtendremos un sistema lineal equivalente al dado, pero sólo con "h" ecuaciones.

c) Seleccionamos las "h" incógnitas que corresponden a las "h" columnas del citado menor no nulo de orden "h", y parametrizamos las restantes "$n - h$" incógnitas, pasándolas a los segundos miembros de las ecuaciones. Así resulta un sistema lineal con "h" ecuaciones, "h" incógnitas y "$n - h$" parámetros; sistema éste que resolveremos mediante la regla de Cramer o mediante el método de la matriz inversa.



FONEMATO 2.6.1

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$1)\ \begin{cases} 2.x + 3.y + 4.z + 5.t = 1 \\ 3.x + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases} ;\ 2)\ \begin{cases} x + 2.y = 3 \\ 2.x + y = 6 \\ 3.x + y = 9 \\ x + 4.y = 3 \end{cases} ;\ 3)\ \begin{cases} x + 2.y = 3 \\ 2.x + 4.y = 6 \\ 3.x + y = 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) Estamos ante un sistema lineal no homogéneo (SLNH) de 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ;\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

Como $rg(A) \neq rg(B)$, el sistema **carece de solución.**

2) Estamos ante un sistema lineal no homogéneo (SLNH) de 4 ecuaciones y 2 incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ;\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = rg(B) = 2 =$ número de incógnitas, el sistema es **compatible y determinado: tiene solución única.** Para calcularla, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos primeras filas, nos quedamos las dos primeras ecuaciones y eliminamos las restantes; resulta:

$$\begin{cases} x + 2.y = 3 \\ 2.x + y = 6 \end{cases}$$

La solución del anterior SLNH obtenemos mediante la **regla de Cramer:**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 3 \ ;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

3) Estamos ante un sistema lineal no homogéneo (SLNH) de 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ;\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = rg(B) = 2 =$ número de incógnitas, el sistema es **compatible y determinado: tiene solución única.** Para calcularla, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos últimas filas, nos quedamos las dos últimas ecuaciones y eliminamos las restantes; resulta:

$$\begin{cases} 2.x + 4.y = 6 \\ 3.x + y = 4 \end{cases}$$

La solución del anterior SLNH obtenemos mediante la **regla de Cramer:**

$$x = 1 \ ;\ y = 1$$

FONEMATO 2.6.2

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ 2.x+2.y+z&=9\\ 3.x+y+z&=8\\ x+4.y&=9 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=3 \;\; ; \;\; B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6\\ 2 & 2 & 1 & 9\\ 3 & 1 & 1 & 8\\ 1 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=3$$

Como $rg(A)=rg(B)=3=$ número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado: tiene solución única. Para calcularla, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo y lo forman las tres últimas filas de "A", nos quedamos con tres últimas ecuaciones y eliminamos las restantes:

$$\begin{aligned} 2.x+2.y+z&=9\\ 3.x+y+z&=8\\ x+4.y&=9 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1\\ 8 & 1 & 1\\ 9 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}=1 \;\; ; \;\; y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1\\ 3 & 8 & 1\\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}=2 \;\; ; \;\; z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 9\\ 3 & 1 & 8\\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}=3$$

FONEMATO 2.6.3

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$6.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 = 0 \;;\; 2.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \;;\; 8.x_1 - 2.x_3 = 0$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: como el sistema es lineal homogéneo, la matriz de coeficientes y la ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros; por tanto, tienen igual rango. Así, el sistema es compatible: al menos admite la solución trivial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

La matriz "A" de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2.$

Como $rg(A) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

Cálculo de las infinitas soluciones

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos primeras filas de "A", nos quedamos con las dos primeras ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_2 (2ª columna de "A") y x_3 (3ª columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_1) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_2 y x_3 y un parámetro x_1:

$$\begin{aligned} 2.x_2 - 3.x_3 &= -6.x_1 \\ -2.x_2 + x_3 &= -2.x_1 \end{aligned}$$

La solución la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -6.x_1 & -3 \\ -2.x_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = 3.x_1 \;;\; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6.x_1 \\ -2 & -2.x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = 4.x_1$$

Siendo "S" el subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones, es:

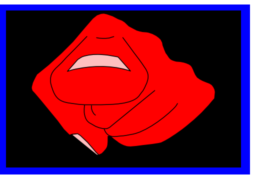
$$S = \{(x_1 ; 3.x_1 ; 4.x_1), \forall x_1 \in \Re\} \subset \Re^3$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

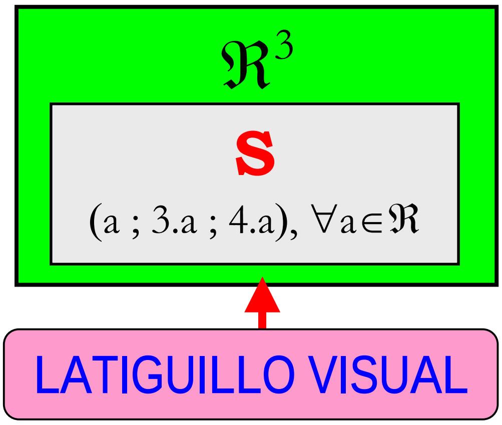
También así:

$$S = \{(a ; 3.a ; 4.a), \forall a \in \Re\} \subset \Re^3$$
$$S = \{(\lambda ; 3.\lambda ; 4.\lambda), \forall \lambda \in \Re\} \subset \Re^3$$

En examen no importa lo que sabes, importa lo que parece que sabes.



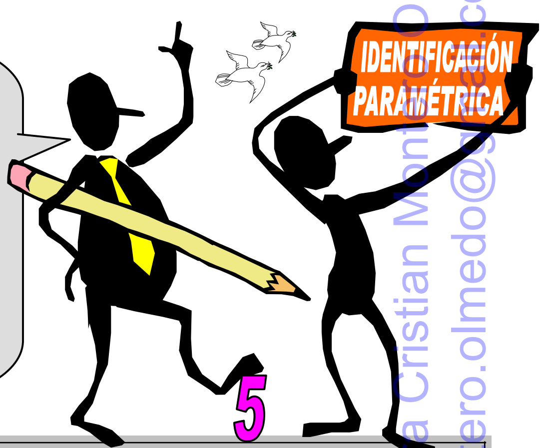
La diferencia está sólo en el nombre asignado al parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLH... pero con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el subconjunto "S" de $\Re^3$ que forman las soluciones del SLH dado es el constituido por las ternas ordenadas de números reales en que el 2º número es el triple del 1º, y el 3º es el cuádruple del 1º. Basta asignar valores arbitrarios al parámetro para ir obteniendo las infinitas soluciones del sistema:



$$* \text{ si } a = 1 \Rightarrow (1;3.1;4.1) \equiv (1;3;4) \text{ es una solución del sistema}$$
$$* \text{ si } a = 3 \Rightarrow (3;3.3;4.3) \equiv (3;9;12) \text{ es una solución del sistema}$$
$$* \text{ si } a = ...$$

Y así, hasta aburrirte, puedes perder el tiempo calculando más y más soluciones del SLH dado... como hay infinitas, tienes entretenimiento hasta la 3ª edad.

<u>Observa</u>: el conjunto "S", formado por las infinitas ternas ordenadas de números reales que son solución del SLH, queda identificado en forma paramétrica, pues damos el valor de los tres números de una terna genérica de "S" en función del valor que arbitrariamente se asigne a un parámetro real



NOTA IMPORTANTE PARA LA TRANQUILIDAD DEL LECTOR

El resultado es el mismo con independencia del menor no nulo de orden 2 que se elija en el proceso de cálculo del conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del SLH dado; o sea, el conjunto "S" no depende de qué menor no nulo de orden 2 se elija en el proceso de cálculo. ***Por ejemplo,*** siendo

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos primeras filas de "A", nos quedamos con las dos primeras ecuaciones del SLNH y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (1ª columna de "A") y x_2 (2ª columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_3) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_2 y un parámetro x_3:

$$\begin{aligned} 6.x_1 + 2.x_2 &= 3.x_3 \\ 2.x_1 - 2.x_2 &= -x_3 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3.x_3 & 2 \\ -x_3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{4} \; ; \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3.x_3 \\ 2 & -x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{3.x_3}{4}$$

Denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLNH, es:

$$S = \{(x_3/4 ; 3.x_3/4 ; x_3), \forall x_3 \in \Re\} \subset \Re^3$$

o también así:

$$S = \{(b/4 ; 3.b/4 ; b), \forall b \in \Re\} \subset \Re^3$$

$$S = \{(\theta/4 ; 3.\theta/4 ; \theta), \forall \theta \in \Re\} \subset \Re^3$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia radica sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLH .... pero con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el subconjunto "S" de $\Re^3$ que forman las soluciones del SLH es el constituido por las ternas ordenadas de números reales en que el primer número se obtiene multiplicando el tercero por 1/4, y el segundo se obtiene multiplicando el tercero por 3/4.

$\Re^3$		$\Re^3$
S $(a ; 3.a ; 4.a), \forall a \in \Re$	$\equiv$	**S** $(b/4 ; 3.b/4 ; b), \forall b \in \Re$

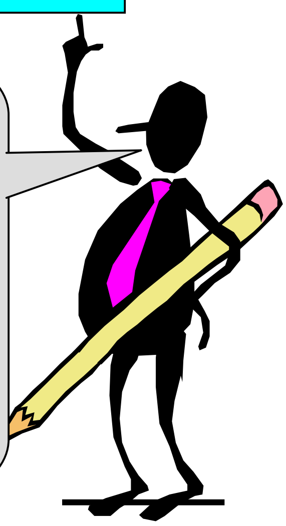
Se pasa de uno a otro sin más que llamar "b" a "4. a":
$b = 4.a \Rightarrow a = b/4 \Rightarrow 3.a = 3.b/4$

Para comprobar que no hay errores de cálculo, comprobamos que el habitante genérico $(a ; 3.a ; 4.a)$ del conjunto "S" satisface todas las ecuaciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 6.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 = 0 \\ 2.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ 8.x_1 - 2.x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 6.(a) + 2.(3.a) - 3.(4.a) = 0 \\ 2.(a) - 2.(3.a) + (4.a) = 0 \\ 8.(a) - 2.(4.a) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\boxed{\text{si } x_1 = a, \; x_2 = 3.a \text{ y } x_3 = 4.a}$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{NO HAY ERROR}$$



Por ejemplo, siendo

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ \boxed{\begin{matrix}2\\8\end{matrix}} & \begin{matrix}-2\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman dos últimas filas de "A", nos quedamos con las dos últimas ecuaciones del SLNH y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (1ª columna de "A") y x_3 (3ª columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_2) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_3 y un parámetro x_2:

$$\begin{aligned} 2.x_1 + x_3 &= 2.x_2 \\ 8.x_1 - 2.x_3 &= 0 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 2.x_2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{x_2}{3} \;;\; x_3=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2.x_2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{4.x_2}{3}$$

Denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLH, es:

$$S=\{(x_2/3;x_2;4.x_2/3),\ \forall x_2\in\Re\}\subset\Re^3$$

o así:

$$S=\{(c/3;c;4.c/3),\ \forall c\in\Re\}\subset\Re^3$$

$$S=\{(\delta/3;\delta;4.\delta/3),\ \forall \delta\in\Re\}\subset\Re^3$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia radica sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLH .... pero con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el subconjunto "S" de $\Re^3$ que forman las soluciones del SLNH es el constituido por las ternas ordenadas de números reales en que el primer número se obtiene multiplicando el segundo por 1/3, y el tercero se obtiene multiplicando el segundo por 4/3.

$\Re^3$

S

$(a\ ;\ 3.a\ ;\ 4.a),\ \forall a\in\Re$

$\equiv$

$\Re^3$

S

$(c/3\ ;\ c\ ;\ 4.c/3),\ \forall c\in\Re$

Se pasa de uno a otro sin más que llamar "c" a "3. a":

$c=3.\,a \Rightarrow a=c/3 \Rightarrow 4.\,a=4.c/3$

Observa atentísimamente:

Siendo

$$S=\{(\lambda;3.\lambda;4.\lambda),\ \forall\lambda\in\Re\}\subset\Re^3$$

sin más que sacar factor común λ, podemos escribir:

$$S=\{\lambda\bullet(1;3;4),\ \forall\lambda\in\Re\}\quad(*)$$

Al loro: la terna ordenada (1;3;4) es una solución del sistema (la obtenida para $\lambda=1$)... y la expresión (*) indica que toda terna ordenada que sea solución del SLH puede obtenerse o generarse multiplicando la terna (1;3;4) por un número real; o sea: cualquier terna ordenada de números reales que sea solución del SLH es PROPORCIONAL a la terna (1;3;4).

FONEMATO
TODO KLARITO

DISCIPLINA MENTAL
Lo más valioso de tu formación

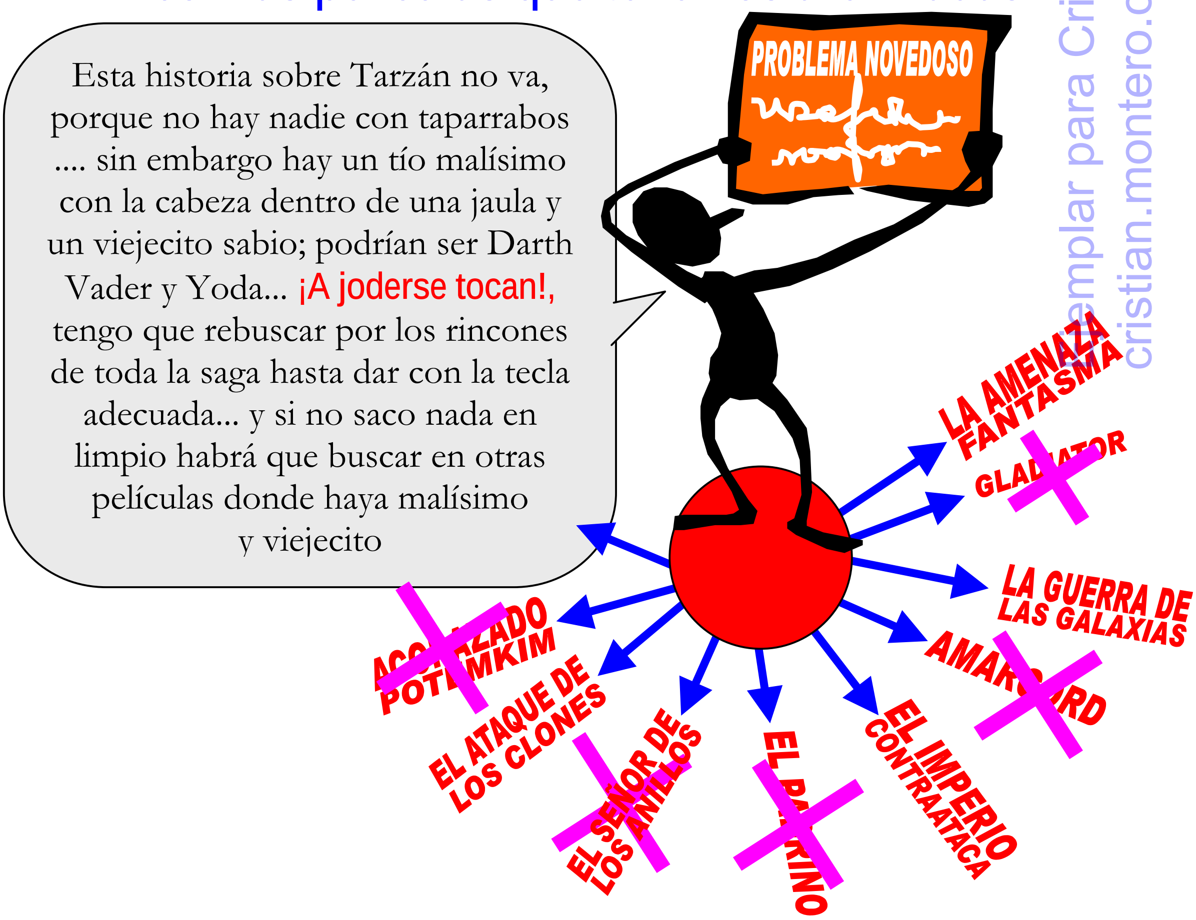
APRENDER A SUFRIR

Los exámenes se aprueban en el aula de examen el día del examen; por tanto el tiempo que dediques a prepararte para tan especial día tienen carácter de entrenamiento, y ya se sabe: **entrenar es sufrir.**

Cuando durante un entrenamiento **Mikelmenos** se ve desbordado por un **problema novedoso** que no es exactamente igual a otros ya vistos, de inmediato se hace la pregunta maldita: **¿Qué hago?...** y como esta pregunta no tiene respuesta, Mikelmenos se deprime y abandona la lucha al cabo de unos segundos; así, sus neuronas no se curten, no espabilan.

Mikelmás sabe que sólo deja huella en nosotros lo que nos putea y hace sufrir; por eso, cuando está entrenando en casa y ese mismo **problema novedoso** le desborda la cabeza, lucha a muerte con él, y la lucha dura todo el tiempo que sea necesario (una tarde, un fin de semana .... cuanto más tiempo luchemos más cicatrices quedarán en nuestro cerebro, más se curtirán nuestras neuronas) y es una **búsqueda comparativa constante** entre el abanico finito de posibilidades que se abre cuando en una encrucijada no vemos claro qué camino seguir. La pregunta no es ¿qué hago?, la pregunta es ¿qué puedo hacer?... y la respuesta siempre es la misma:

¡Buscar las palabras clave del enunciado y comparar con las películas que tenemos archivadas!



FONEMATO 2.6.4

Resuélvase el sistema $\begin{cases} -2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3.x_5 = 0 \\ -2.x_1 + x_2 + 2.x_3 + x_4 - 3.x_5 = 0 \\ 2.x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 + 6.x_5 = 0 \\ -2.x_1 + x_2 + 2.x_3 - 2.x_4 + 6.x_5 = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN

Latiguillo: como el sistema es lineal homogéneo, la matriz de coeficientes y la ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros; por tanto, tienen igual rango. Así, el sistema es compatible: al menos admite la solución trivial $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

La matriz "A" de los coeficientes Es:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

Como $rg(A) = 3 <$ nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

Cálculo de las infinitas soluciones

Como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo y lo forman las tres primeras filas de "A", nos quedamos con las tres primeras ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_2, x_3 y x_4 (2ª, 3ª y 4ª columnas de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_1 y x_5) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas x_2, x_3 y x_4 y dos parámetros x_1 y x_5:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - x_4 &= 2.x_1 - 3.x_5 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 2.x_1 + 3.x_5 \\ -x_2 - x_3 - 2.x_4 &= -2.x_1 - 6.x_5 \end{aligned}$$

La matriz A_1 de coeficientes del nuevo sistema es $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

La solución del sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2.x_1 - 3.x_5 & 1 & -1 \\ 2.x_1 + 3.x_5 & 2 & 1 \\ -2.x_1 - 6.x_5 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 2.x_1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2.x_1 - 3.x_5 & -1 \\ 1 & 2.x_1 + 3.x_5 & 1 \\ -1 & -2.x_1 - 6.x_5 & -2 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 0 \ ; \ x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2.x_1 - 3.x_5 \\ 1 & 2 & 2.x_1 + 3.x_5 \\ -1 & -1 & -2.x_1 - 6.x_5 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 3.x_5$$

Siendo "S" el subconjunto de $\Re^5$ que forman las infinitas soluciones del SLH, es:

$$S = \{(x_1 ; 2.x_1 ; 0 ; 3.x_5 ; x_5),\ \forall x_1, x_5 \in \Re\}$$

o también:

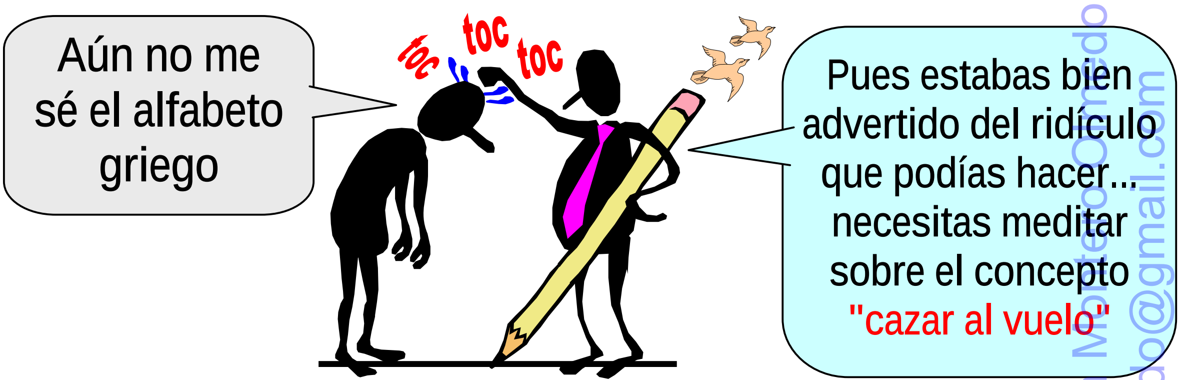
$$S = \{(\nu ; 2.\nu ; 0 ; 3.\xi ; \xi),\ \forall \nu, \xi \in \Re\}$$

$$S = \{(\lambda ; 2.\lambda ; 0 ; 3.\theta ; \theta),\ \forall \lambda, \theta \in \Re\}$$

$$S = \{(\mu ; 2.\mu ; 0 ; 3.\zeta ; \zeta),\ \forall \mu, \zeta \in \Re\}$$

$$S = \{(\tau ; 2.\tau ; 0 ; 3.\chi ; \chi),\ \forall \tau, \chi \in \Re\}$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"



La diferencia sólo está en el nombre asignado a los 2 parámetros introducidos para calcular las infinitas soluciones del SLH... pero con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el subconjunto "S" de $\Re^5$ que forman las soluciones del SLH es el constituido por los quintetos ordenados de números reales en que el 2º número es el doble del 1º, el 3º es cero, y el 4º es el triple del 5º. Las infinitas soluciones se van obteniendo al asignar valores a los dos parámetros:

$\Re^5$

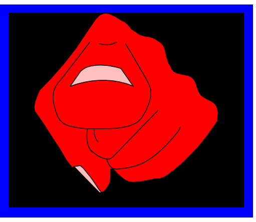
S

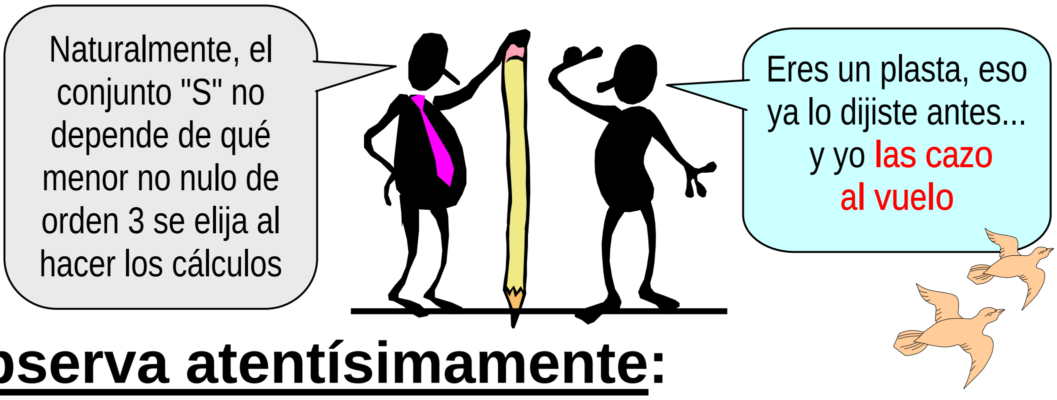
$(a ; 2.a ; 0 ; 3.b ; b),\ \forall a,b \in \Re$

LATIGUILLO VISUAL

* si $\lambda = 1$ y $\theta = 0 \Rightarrow (1;2;0;0;0)$ es una solución del sistema
* si $\lambda = 0$ y $\theta = 1 \Rightarrow (0;0;0;3;1)$ es una solución del sistema
* si $\lambda = 2$ y $\theta = 1 \Rightarrow (2;4;0;3;1)$ es una solución del sistema
* si ...

En examen no hay que desaprovechar ninguna ocasión para acreditar que no somos del montón.





Observa atentísimamente:

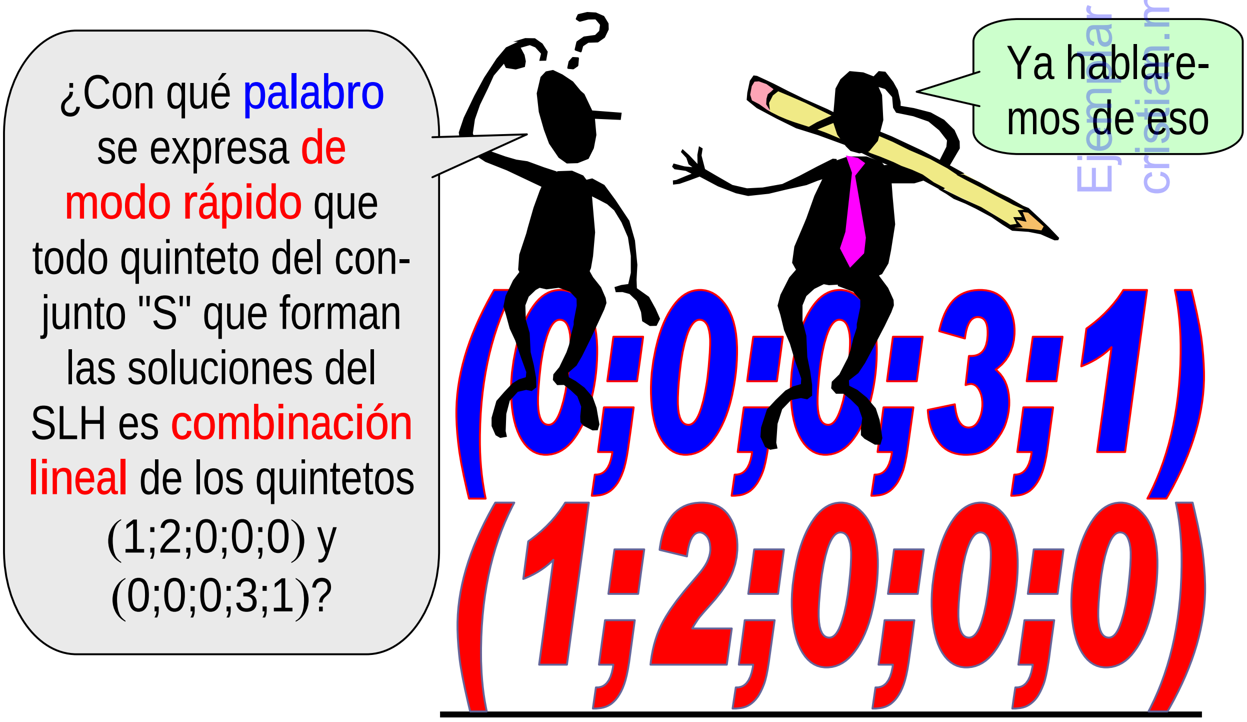
Si $S=\{(\lambda;2.\lambda;0;3.\theta;\theta),\ \forall\lambda,\theta\in\Re\}$, desagregando los parámetros λ y θ, podemos escribir

$$S=\{(\lambda;2.\lambda;0;0;0)+(0;0;0;3.\theta;\theta),\ \forall\lambda,\theta\in\Re\}$$

y sacando factor común, resulta:

$$S=\{\ \underbrace{\lambda\bullet(1;2;0;0;0)}_{\text{proporcional a }(1;2;0;0,0)}+\underbrace{\theta\bullet(0;0;0;3;1)}_{\text{proporcional a }(0;0;0;3,1)},\ \forall\lambda,\theta\in\Re\ \}\quad(*)$$

Atent@: los quintetos ordenados (1;2;0;0;0) y (0;0;0;3;1) son soluciones del sistema (el primero corresponde a $\lambda=1$ y $\theta=0$; el segundo a $\lambda=0$ y $\theta=1$) ... y la expresión (*) indica que todo quinteto ordenado de números reales que sea solución del SLH puede obtenerse o generarse sumando un quinteto PROPORCIONAL a (1;2;0;0;0) y otro PROPORCIONAL a (0;0;0;3;1); de otro modo, hablando como aprendimos en el tema anterior, todo quinteto ordenado que sea solución del SLH es COMBINACIÓN LINEAL de los quintetos (1;2;0;0;0) y (0;0;0;3;1).



Confesión de Galileo ante la Inquisición

Yo, Galileo Galilei, hijo del difunto florentino Vicente Galilei, de 70 años de edad, comparecido personalmente en juicio ante este tribunal, y puesto de rodillas ante vosotros, los Eminentísimos y Reverendísimos señores Cardenales Inquisidores generales de la República cristiana universal, respecto de materias de herejía, con la vista fija en los Santos Evangelios, que tengo en mis manos, declaro que yo siempre he creído y creo ahora y que con la ayuda de Dios continuaré creyendo en lo sucesivo, todo cuanto la Santa Iglesia Apostólica Católica Romana cree, predica y enseña. Más por cuanto este Santo Oficio ha mandado judicialmente, que abandone la falsa opinión que he sostenido, de que el Sol está en el centro del Universo e inmóvil; que no profese, defienda, ni de cualquier manera que sea, enseñe, ni de palabra ni por escrito, dicha doctrina, prohibida por ser contraria a las Sagradas Escrituras; por cuanto yo escribí y publiqué una obra, en la cual trato de la misma doctrina condenada, y aduzco con gran eficacia argumentos a favor de ella, sin resolverla; y atendiendo a que me he hecho vehementemente sospechoso de herejía por este motivo, o sea, porque he sostenido y creído que el Sol está en el centro del mundo e inmóvil y la Tierra no está en el centro del Universo, y que se mueve.

En consecuencia, deseando remover de la mente de Vuestras Eminencias y de todos los cristianos católicos esa vehemente sospecha legítimamente concebida contra mí, con sinceridad de corazón y fe no fingida, abjuro, maldigo y detesto los arriba mencionados errores y herejías, y en general cuales-quiera otros errores y sectas contrarios a la referida Santa Iglesia, y juro para lo sucesivo nunca más decir ni afirmar de palabra ni por escrito cosa alguna que pueda despertar semejante sospecha contra mí, antes, por el contrario, juro denunciar cualquier hereje o persona sospechosa de herejía, de quien tenga yo noticia, a este Santo Oficio, o a los Inquisidores, o al juez eclesiástico del punto en que me halle. Juro además, y prometo cumplir y observar exactamente todas las penitencias que se me han impuesto o que se impusieren por este Santo Oficio.

Mas en el caso de obrar yo en oposición con mis promesas, protestas y juramentos, lo que Dios no permita, me someto desde ahora a todas las penas y castigos decretados y promulgados contra los delincuentes de esta clase por los Sagrados Cánones y otras constituciones generales y disposiciones particulares. Así me ayude Dios y los Santos Evangelios sobre los cuales tengo extendidas las manos.

Yo, Galileo Galilei, arriba mencionado, juro, prometo y me obligo en el modo y forma que acabo de decir, y en fe de estos mis compromisos, firmo de propio puño y letra mi abjuración, que he recitado palabra por palabra.

FONEMATO 2.6.5

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ; \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado: **tiene infinitas soluciones.**

Cálculo de las infinitas soluciones

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos primeras filas de "A", nos quedamos con las dos primeras ecuaciones del SLNH y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (1ª columna de "A") y x_2 (2ª columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_3), y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así resulta un SLNH de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_2 y un parámetro x_3:

$$x_1 + 2.x_2 = 3 - x_3$$
$$x_1 - x_2 = 2.x_3$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 - x_3 & 2 \\ 2.x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1 + x_3 \ ; \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - x_3 \\ 1 & 2.x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1 - x_3$$

Denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLNH, podemos escribir:

$$S = \{(1 + x_3 ; 1 - x_3 ; x_3), \forall x_3 \in \Re\}$$

También así:

$$S = \{(1 + a ; 1 - a ; a), \forall a \in \Re\}$$

$$S = \{(1 + \lambda ; 1 - \lambda ; \lambda), \forall \lambda \in \Re\}$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia está sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones de SLNH... pero con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el subconjunto "S" de $\Re^3$ que forman las soluciones del SLNH es el constituido por las ternas ordenadas de números reales en que el primer número es una unidad superior al tercero, y el segundo se obtiene restando el tercero del número 1. Basta asignar valores arbitrarios al parámetro para ir obteniendo las infinitas soluciones del sistema:

$\Re^3$

S

$(1+a\ ;\ 1-a\ ;\ a),\ \forall a \in \Re$

$$
\begin{aligned}
&* \text{ si } \lambda = 1 \Rightarrow (1+1;1-1;1) \equiv (2;0;1) \text{ es una solución del sistema}\\
&* \text{ si } \lambda = 3 \Rightarrow (1+3;1-3;3) \equiv (4;-2;3) \text{ es una solución del sistema}\\
&* \text{ si } \lambda = 0 \Rightarrow (1+0;1-0;0) \equiv (1;1;0) \text{ es una solución del sistema}\\
&* \text{ si } \lambda = \ldots
\end{aligned}
$$

Y así puedes perder el tiempo calculando más y más soluciones del SLNH .... como hay infinitas, si te va la marcha, tienes entretenimiento de por vida.

Fíjate MUY bien: si $S = \{(1+\lambda;1-\lambda;\lambda),\ \forall \lambda \in \Re\}$, es trivial escribir:

$$S = \{(1;1;0) + (\lambda;-\lambda;\lambda),\ \forall \lambda \in \Re\}$$

O sea:

$$S = \{(1;1;0) + \underbrace{\lambda \bullet (1;-1;1)}_{\boxed{\text{proporcional a } (1;-1;1)}},\ \forall \lambda \in \Re\} \quad (*)$$

La terna (1;1;0) es solución del SLNH (corresponde a $\lambda = 0$), pero no sucede eso con (1;–1;1), pues no satisface la 1ª ecuación: 1 + 2.(–1) + 1 = 0 ≠ 3 ... pero siendo obvio que S* = { $\lambda \bullet (1;-1;1),\ \forall \lambda \in \Re$ } es el conjunto de las infinitas soluciones del SLH obtenido al anular los términos independientes del SLNH dado, también resulta obvio que (1;–1;1) es solución de dicho SLH (la correspondiente

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{array}\right\}}_{\text{SLNH}} \Rightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right.}_{\text{SLH ASOCIADO}}$$

a $\lambda = 1$). Por tanto, la expresión (*) indica que toda terna ordenada que sea solución del SLNH puede obtenerse sumando la terna (1;1;0), que es solución del SLNH, y otra terna $\lambda \bullet (1;-1;1)$, que es solución del SLH asociado.

Observa: la terna $\lambda \bullet (1;-1;1)$ es PROPORCIONAL a la (1;–1;1).

NOTA IMPORTANTE PARA LA TRANQUILIDAD DEL LECTOR

El resultado es igual con independencia del menor no nulo de orden 2 que se elija en el proceso de cálculo del conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema; o sea, el conjunto "S" no depende de qué menor no nulo de orden 2 se elija en el proceso de cálculo. ***Por ejemplo,*** siendo

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos últimas filas de "A", nos quedamos con las dos últimas ecuaciones del SLNH y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_2 (2ª columna de "A") y x_3 (3ª columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_1) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente SLNH de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_2 y x_3 y un parámetro x_1:

$$\begin{aligned} -x_2-2.x_3&=-x_1 \\ x_2-x_3&=3-2.x_1 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} -x_1 & -2 \\ 3-2.x_1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=2-x_1 \;\;;\;\; x_2=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -x_1 \\ 1 & 3-2.x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=x_1-1$$

Denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones, es:

$$S=\{(x_1;2-x_1;x_1-1),\ \forall x_1\in\Re\}\subset\Re^3$$

También así:

$$S=\{(b;2-b;b-1),\ \forall b\in\Re\}\subset\Re^3$$

$$S=\{(\theta;2-\theta;\theta-1),\ \forall \theta\in\Re\}\subset\Re^3$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia radica sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLNH .... pero con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el subconjunto "S" de $\Re^3$ que forman las soluciones del SLNH es el constituido por las ternas ordenadas de números reales en que el segundo número de la terna se obtiene al restar el primer número del número 2, y el tercer número se obtiene al restar 1 al primer número.

$\Re^3$

S

$(1+a\,;\,1-a\,;\,a),\ \forall a\in\Re$

$\equiv$

$\Re^3$

S

$(b\,;\,2-b\,;\,b-1),\ \forall b\in\Re$

Se pasa de uno a otro sin más que llamar "b" a "1+a":

$b=1+a\Rightarrow a=b-1\Rightarrow 1-a=1-(b-1)\Rightarrow a=2-b$

Por ejemplo, siendo

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ \boxed{1} & -1 & \boxed{-2}\\ \boxed{2} & 1 & \boxed{-1}\end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman dos últimas filas de "A", nos quedamos con las dos últimas ecuaciones del SLNH y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (1ª columna de "A") y x_3 (3ª columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_2) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente SLNH de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_3 y un parámetro x_2:

$$\begin{aligned} x_1-2.x_3&=x_2\\ 2.x_1-x_3&=3-x_2\end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}x_2 & -2\\ 3-x_2 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=2-x_2\ ;\ x_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & x_2\\ 2 & 3-x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=1-x_2$$

Denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLNH, es:

$$S=\{(2-x_2;x_2;1-x_2),\ \forall x_2\in\Re\}\subset\Re^3$$

También así:

$$S=\{(2-c;c;1-c),\ \forall c\in\Re\}\subset\Re^3$$

$$S=\{(2-\delta;\delta;1-\delta),\ \forall \delta\in\Re\}\subset\Re^3$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia radica sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLNH... pero con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el subconjunto "S" de $\Re^3$ que forman las soluciones del SLNH es el constituido por las ternas ordenadas de números reales en que el primer número de la terna se obtiene al restar el segundo número de 2, y el tercer número se obtiene al restar el segundo número de 1.

$\Re^3$

S

$(1+a\ ;\ 1-a\ ;\ a),\ \forall a\in\Re$

$\equiv$

$\Re^3$

S

$(2-c\ ;\ c\ ;\ 1-c),\ \forall c\in\Re$

Se pasa de uno a otro sin más que llamar "c" a "1–a":

$c=1-a\Rightarrow a=1-c\Rightarrow 1+a=1+(1-c)=2-c$

FONEMATO 2.6.6

Resuélvase el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 4.x_5 = 5 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 - 4.x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 + x_5 = 1 \\ 3.x_1 + x_2 + 2.x_3 - 2.x_4 - 7.x_5 = 7 \end{cases}$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -7 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

Como $rg(A) = rg(B) = 3 < n^o$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

Cálculo de las infinitas soluciones

Como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo y lo forman las tres primeras filas de "A", nos quedamos con las tres primeras ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1, x_2 y x_3 (1ª, 2ª y 3ª columnas de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_4) y x_5 y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente SLNH de 3 ecuaciones con 3 incógnitas x_1, x_2 y x_3 y dos parámetros x_4 y x_5:

$$\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + x_3 &= 5 + x_4 + 4.x_5 \\ x_2 + 2.x_3 &= 1 - x_4 + 4.x_5 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 + 2.x_4 - x_5 \end{aligned}$$

La matriz A_1 de coeficientes del nuevo sistema es:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La solución la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}5+x_4+4.x_5 & 1 & 1\\ 1-x_4+4.x_5 & 1 & 2\\ 1+2.x_4-x_5 & -1 & -1\end{vmatrix}}{|A_1|}=2+x_4+x_5$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5+x_4+4.x_5 & 1\\ 0 & 1-x_4+4.x_5 & 2\\ 1 & 1+2.x_4-x_5 & -1\end{vmatrix}}{|A_1|}=1-x_4\ ;\ x_3=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 5+x_4+4.x_5\\ 0 & 1 & 1-x_4+4.x_5\\ 1 & -1 & 1+2.x_4-x_5\end{vmatrix}}{|A_1|}=2.x_5$$

Siendo "S" el subconjunto de $\Re^5$ que forman las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S=\{(2+x_4+x_5;1-x_4;2.x_5;x_4;x_5),\ \forall x_4,x_5\in\Re\}$$

También así:

$$S=\{(2+a+b;1-a;2.b;a;b),\ \forall a,b\in\Re\}$$

$$S=\{(2+\lambda+\theta;1-\lambda;2.\theta;\lambda;\theta),\ \forall\lambda,\theta\in\Re\}$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia está sólo en el nombre de los dos parámetros introducidos para calcular las infinitas soluciones del SLNH... pero con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el subconjunto "S" de $\Re^5$ que forman las soluciones del SLNH es el constituido por los quintetos ordenados de números reales en que el número 3º es el doble del 5º, el 2º se obtiene restando el 4º de 1, y el 1º se obtiene sumando 2 a la suma de 4º y 5º. Basta asignar valores arbitrarios a los parámetros para ir obteniendo las infinitas soluciones del sistema:

$\Re^5$

S

$(2+a+b\ ;\ 1-a\ ;\ 2.b\ ;\ a\ ;\ b),\ \forall a,b\in\Re$

* si $\lambda=0$ y $\theta=0\Rightarrow(2;1;0;0;0)$ es una solución del sistema
* si $\lambda=1$ y $\theta=1\Rightarrow(4;0;2;1;1)$ es una solución del sistema
* si $\lambda=0$ y $\theta=2\Rightarrow(4;1;4;0;2)$ es una solución del sistema
* si ....

NOTA IMPORTANTE PARA LA TRANQUILIDAD DEL LECTOR

El resultado es el mismo con independencia del menor no nulo de orden 3 que se elija en el proceso de cálculo del conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema; o sea, el conjunto "S" no depende de qué menor no nulo de orden 3 se elija en el proceso de cálculo.

Fíjate: si $S=\{(2+\lambda+\theta;1-\lambda;2.\theta;\lambda;\theta),\ \forall\lambda,\theta\in\Re\}$, es trivial escribir

$$S=\{(2;1;0;0;0)+(\lambda+\theta;-\lambda;2.\theta;\lambda;\theta),\ \forall\lambda,\theta\in\Re\}=$$
$$=\{\ (2;1;0;0;0)+\underbrace{(\lambda;-\lambda;0;\lambda;0)}_{\boxed{\text{proporcional a }(1;-1;0;1;0)}}+\underbrace{(\theta;0;2.\theta;0;\theta)}_{\boxed{\text{proporcional a }(1;0;2;0;1)}},\ \forall\lambda,\theta\in\Re\ \}$$

O sea:

$$S=\{\ (2;1;0;0;0)+\underbrace{\lambda\bullet(1;-1;0;1;0)+\theta\bullet(1;0;2;0;1)}_{\boxed{\text{combinación lineal de }(1;-1;0;1;0)\text{ y }(1;0;2;0;1)}},\ \forall\lambda,\theta\in\Re\ \}\quad (*)$$

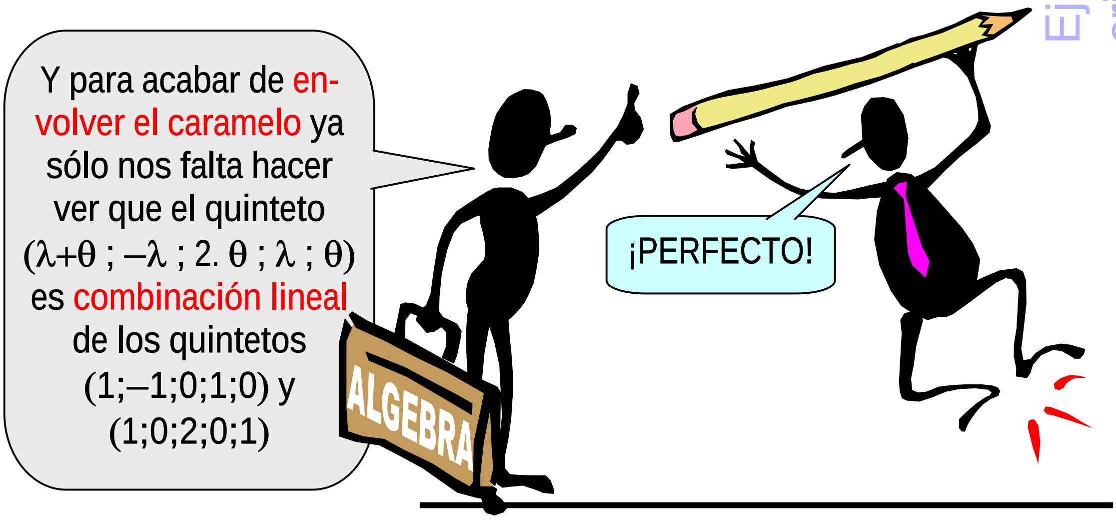
Atent@: el quinteto (2;1;0;0;0) es solución del SLNH (obtenida para $\lambda=0$ y $\theta=0$), pero no sucede eso con los quintetos (1;–1;0;1;0) y (1;0;2;0;1), pues ninguno satisface la 1ª ecuación:

$$2.\ 1+(-1)+0-1-4.0=0\neq 5$$
$$2.\ 1+0+2-0-4.1=0\neq 5$$

Siendo obvio que $S^*=\{\ \lambda\bullet(1;-1;0;1;0)+\theta\bullet(1;0;2;0;1),\ \forall\lambda,\theta\in\Re\ \}$ es el conjunto de las infinitas soluciones del SLH obtenido al anular los términos independientes del SLNH dado, también resulta obvio que los quintetos (1;–1;0;1;0) y

$$\underbrace{\left.\begin{array}{r} 2.x_1+x_2+x_3-x_4-4.x_5=5\\ x_2+2.x_3+x_4-4.x_5=1\\ x_1-x_2-x_3-2.x_4+x_5=1\\ 3.x_1+x_2+2.x_3-2.x_4-7.x_5=7 \end{array}\right\}}_{\text{SLNH}} \Rightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{r} 2.x_1+x_2+x_3-x_4-4.x_5=0\\ x_2+2.x_3+x_4-4.x_5=0\\ x_1-x_2-x_3-2.x_4+x_5=0\\ 3.x_1+x_2+2.x_3-2.x_4-7.x_5=0 \end{array}\right.}_{\text{SLH ASOCIADO}}$$

(1;0;2;0;1) son soluciones de dicho SLH (obtenido el 1º para $\lambda=1$ y $\theta=0$, y el 2º para $\lambda=0$ y $\theta=1$). Como vemos, todo quinteto ordenado que sea solución del SLNH puede obtenerse sumando el quinteto (2;1;0;0;0), que es solución del SLNH, y un quinteto ($\lambda+\theta$; $-\lambda$; 2. θ ; λ ; θ) que es solución del SLH asociado.



FONEMATO 2.6.7

1) Resuélvase la ecuación matricial $A\bullet X-2\bullet B=C$, siendo:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\1&2&3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1&1&4\\-1&1&-2\\1&-1&0\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

2) Resuélvase la ecuación matricial $X\bullet(A+B)=3\bullet C$.

SOLUCIÓN

1) La ecuación matricial $A\bullet X-2\bullet B=C$ tiene solución única:

$$A\bullet X-2\bullet B=C\Rightarrow A\bullet X=C+2\bullet B\Rightarrow X=A^{-1}\bullet(C+2\bullet B)=$$

premultiplicamos los dos miembros por A^{-1}, lo que es legítimo, pues como "A" es regular, tiene inversa

$$=\frac{1}{-2}\bullet\begin{bmatrix}-5&-4&3\\1&2&-1\\1&0&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3&3&9\\-3&3&-4\\2&-2&2\end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\bullet\begin{bmatrix}-3&33&23\\5&-11&1\\-1&-5&-7\end{bmatrix}$$

$$C+2\bullet B=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}+2\bullet\begin{bmatrix}1&1&4\\-1&1&-2\\1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&9\\-3&3&-4\\2&-2&2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet Adj(A)=\frac{1}{-2}\bullet\begin{bmatrix}-5&-4&3\\1&2&-1\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

para calcular Adj.(A), en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

2) La ecuación $X\bullet(A+B)=3\bullet C$ no puede resolverse como la anterior, pues como la matriz $A+B$ es singular (compruébalo tú), carece de inversa. Por tanto, para averiguar si existe alguna matriz "X" que cumpla la condición $X\bullet(A+B)=3\bullet C$, debemos lidiar a lo bestia:

$$X\bullet(A+B)=3\bullet C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{bmatrix}}_{X}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}2&3&5\\-1&0&-1\\2&1&3\end{bmatrix}}_{A+B}=\underbrace{\begin{bmatrix}3&3&3\\-3&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}}_{C}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{r}2.x_1-x_2+2.x_3=3\\3.x_1+x_3=3\\5.x_1-x_2+3.x_3=3\end{array}\right\}\\\left\{\begin{array}{r}2.x_4-x_5+2.x_6=-3\\3.x_4+x_6=3\\5.x_4-x_5+3.x_6=0\end{array}\right\}\\\left\{\begin{array}{r}2.x_7-x_8+2.x_9=0\\3.x_7+x_9=0\\5.x_7-x_8+3.x_9=6\end{array}\right\}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{carece de solución}$$

pues el primero de los tres sistema lineales carece de solución, ya que sus matrices de coeficientes y ampliada tienen distinto rango

FONEMATO 2.6.8

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$1)\left\{\begin{array}{r} -3.x+y+2.z=1 \\ x+5.y-z=4 \\ -4.x-2.y+3.z=-1 \end{array}\right. ;\ 2)\left\{\begin{array}{r} x+2.y+z=1 \\ 2.x+y+2.z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right. ;\ 3)\left\{\begin{array}{l} x+2.y+2.z+3.w=6 \\ 2.x+4.y+3.z+5.w=10 \\ x+2.y-z=0 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN

Arranco con el latiguillo de los SLNH: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

1) Como la matriz de los coeficientes del SLNH es regular ($|A| \neq 0$), resulta ser $rg(A) = rg(B) = 3 = n^o$ de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado: su única solución la obtenemos mediante la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 \ ;\ y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = 1 \ ;\ z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = 3$$

2) Es:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ;\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = rg(B) = 2 < n^a$ de incógnitas, el SLNH tiene infinitas soluciones.

Latiguillo: Para calcular las infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros; resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x+2.y=1-z \\ 2.x+y=2-2.z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-z \\ y=0 \end{array}\right.$$

Por tanto, siendo "S" el conjunto de las infinitas soluciones del SLNH, es:

$$S = \underbrace{\{(1-z;0;z), \forall z \in \Re\}} =$$

Identificación de "S" en forma paramétrica

solución del SLNH obtenida al hacer $z=0$

LATIGUILLO

$$= \{ (1;0;0) + (-z;0;z), \forall z \in \Re \} =$$

$S^* = \{(-z;0;z), \forall z \in \Re\} \equiv$ Soluciones del SLH correspondiente

$$= \{(1;0;0) + z \bullet (-1;0;1), \forall z \in \Re\} \subset \Re^3$$

3) Es:

$$A=\begin{bmatrix}1 & \boxed{2 \quad 2} & 3\\ 2 & \boxed{4 \quad 3} & 5\\ 1 & 2 \quad -1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 3 & 6\\ 2 & 4 & 3 & 5 & 10\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<n^{o}$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. **Latiguillo:** Para calcular las **infinitas soluciones,** como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** las incógnitas "x" y "w", pasándolas a los segundos miembros:

$$\left.\begin{array}{l}2.y+2.z=6-x-3.w\\ 4.y+3.z=10-2.x-5.w\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=(2-x-w)/2\\ z=2-w\end{array}\right.$$

Denotando "S" al conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S=\underbrace{\{(x;(2-x-w)/2;2-w;w),\forall\, x,w\in\mathfrak{R}\}}_{\text{Identificación de "S" en forma paramétrica}}=$$

LATIGUILLO

solución del SLNH obtenida al hacer $x=w=0$

$$=\{\overbrace{(0;1;2;0)}+\underbrace{(x;-(x+w)/2;-w;w)}\,,\forall\, x,w\in\mathfrak{R}\}=$$

$S^*=\{(x;-(x+w)/2;-w;w),\forall\, x,w\in\mathfrak{R}\}$ es el conjunto de soluciones del SLH correspondiente al SLNH dado

$$=\{(0;1;2;0)+(x;-x/2;0;0)+(0;-w/2;-w;w),\forall\, x,w\in\mathfrak{R}\}=$$

$$=\{(0;1;2;0)+x\bullet(1;-1/2;0;0)+w\bullet(0;-1/2;-1;1),\forall\, x,w\in\mathfrak{R}\}\subset\mathfrak{R}^4$$

En definitiva, todo cuarteto ordenado que sea solución del SLNH puede obtenerse sumando el cuarteto (0;1;2;0), que es solución del SLNH, y un cuarteto $\underbrace{(x;-(x+w)/2;-w;w)}$ que es solución del SLH asociado.

Combinación lineal de $(1;-1/2;0;0)$ y $(0;-1/2;-1;1)$

FONEMATO 2.6.9

Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b \\ a \end{bmatrix}$

1) Calcula los valores de "a" y "b" sabiendo que el par $(2;-1)$ satisface la primera ecuación y el par $(2;0)$ satisface la segunda.
2) ¿Es compatible y determinado el sistema que resulta al sustituir los valores de "a" y "b" calculados?

SOLUCIÓN

1) Se tiene que: $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + a.y = 1-b \\ b.x + y = a \end{cases}$

Si el par $(2;-1)$ satisface la primera ecuación, ha de ser: $2-a=1-b$ (I)

Si el par $(2;0)$ satisface la segunda ecuación, ha de ser: $2.b=a$ (II)

La solución del sistema de ecuaciones que forman (I) y (II) es $a=2$, $b=1$.

2) Si $a=2$ y $b=1$, el sistema se convierte en $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, que es compatible y determinado, pues $rg\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = rg\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$ nº de incógnitas.

FONEMATO 2.6.10

Halla las soluciones comunes a los sistemas:

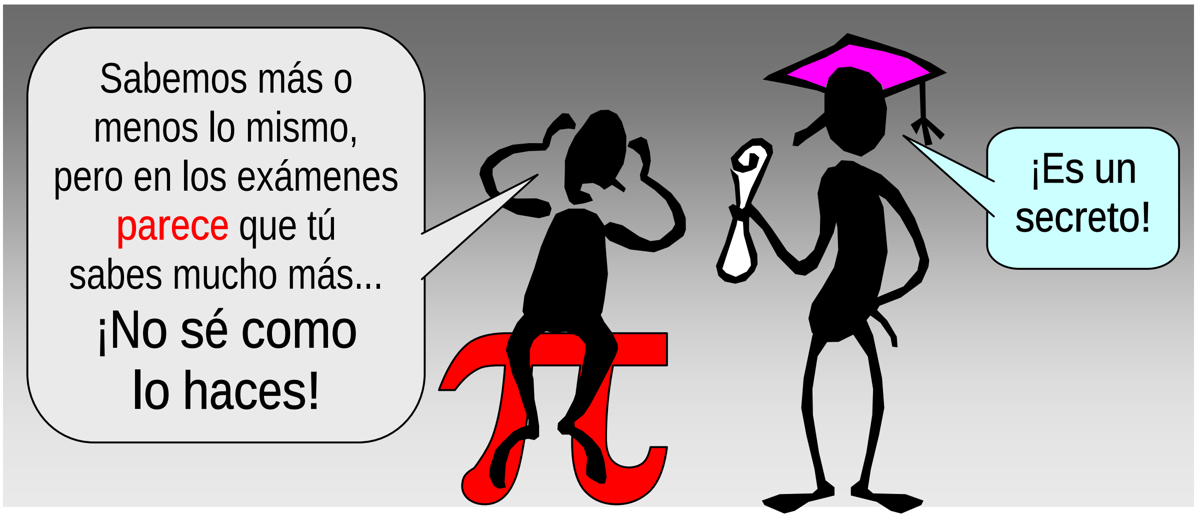
$$S_1:\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=1 \end{cases} ; \quad S_2:\begin{cases} 3.x+y+z=5 \\ 2.x-4.y-4.z=0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Las soluciones comunes son las ternas que satisfacen todas las ecuaciones; o sea, las soluciones del SLNH obtenido al reunir las ecuaciones de S_1 y las de S_2:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x-y-z=1 \\ 3.x+y+z=5 \\ 2.x-4.y-4.z=0 \end{array}\right\} \text{(I)}$$

El sistema (I) es incompatible, pues su matriz de coeficientes tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 3; así, los sistemas dados carecen de soluciones comunes.



FONEMATO 2.6.11

Una empresa fabrica tres tipos de fertilizantes (I, II y III) con tres compuestos químicos A, B y C, en los porcentajes de composición indicados en la tabla. Mezclando los tres tipos de fertilizantes, la empresa quiere obtener otro que contenga el 8 % de cada uno de los tres compuestos químicos. ¿Qué cantidad debe utilizar de cada fertilizante para obtener 100 kg. del nuevo?

	I	II	III
A	6%	8%	12%
B	6%	12%	8%
C	8%	4%	12%

SOLUCIÓN

Siendo "x", "y" y "z" las cantidades (en kilogramos) utilizadas respectivamente de los fertilizantes (I), (II) y (III), según se nos dice, debe ser $x+y+z=100$ (a)

Si el nuevo fertilizante ha de contener un 8% de cada uno de los compuestos A, B y C, es obvio que en 100 kg. de dicho fertilizante ha de haber 8 kg. de cada compuesto químico A, B y C... y al **exigir** que se satisfaga esta condición, resulta:

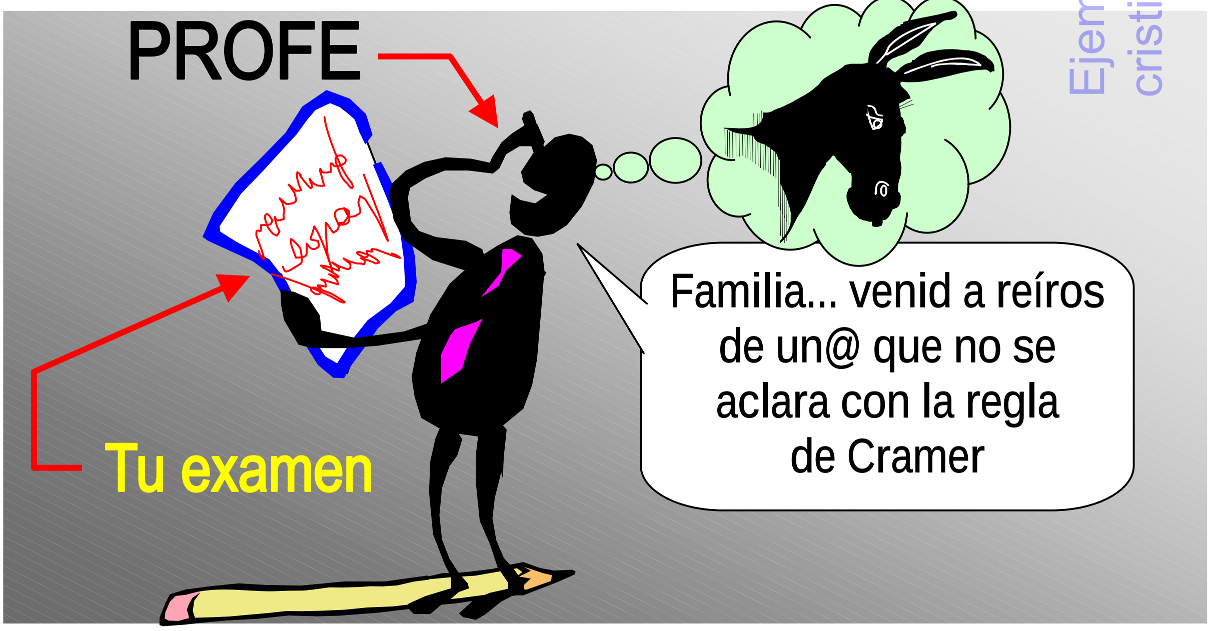
$$\begin{aligned} 0'06.x+0'08.y+0'12.z&=8 \quad (b)\\ 0'06.x+0'12.y+0'08.z&=8 \quad (c)\\ 0'08.x+0'04.y+0'12.z&=8 \quad (d)\end{aligned}$$

Debemos calcular, si existe, la solución del SLNH de 4 ecuaciones con 3 incógnitas que forman (a), (b), (c) y (d)... y la solución es única, pues

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0'06 & 0'08 & 0'12\\ 0'06 & 0'12 & 0'08\\ 0'08 & 0'04 & 0'12\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 6 & 8 & 12\\ 6 & 12 & 8\\ 8 & 4 & 12\end{bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100\\ 6 & 8 & 12 & 8\\ 6 & 12 & 8 & 8\\ 8 & 4 & 12 & 8\end{bmatrix}=3$$

Obtenemos la solución mediante la **regla de Cramer** tras **eliminar** la 4ª ecuación, pues no forma parte del menor no nulo de orden 3 indicado:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 & 1\\ 800 & 8 & 12\\ 800 & 12 & 8\end{vmatrix}}{H}=50\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1\\ 6 & 800 & 12\\ 6 & 800 & 8\end{vmatrix}}{H}=25\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 100\\ 6 & 8 & 800\\ 6 & 12 & 800\end{vmatrix}}{H}=25$$



EL ARTE DE PREPARAR UN EXAMEN

Para preparar el examen de una asignatura "dura" conviene saber que:

a) En la Universidad suelen hacerse pocos problemas, y los que se hacen pueden no ser representativos de lo que cae en examen.

b) No hagas caso a lo que los repetidores cuentan sobre los exámenes: no es verdad que en los exámenes haya mala leche, ni es cierto que su nivel objetivo de dificultad sea insalvable para los que actúan de modo inteligente y entrenan suficientemente.

c) La categoría SSLF: en los exámenes siempre ponen lo mismo: no menos del 85 % de todo examen trata sobre las historias de sota caballo y rey que forman el núcleo de la asignatura y conoce todo el que se haya preparado seriamente. Diremos que un asunto tiene categoría SSLF si, por versar sobre el núcleo de la asignatura, es accesible a todo cerebro medio que haya preparado el examen con seriedad.

SSLF ≡ SUICÍDATESILOFALLAS

Olvídate de lo que no sea SSLF: si en examen cae algo raro o difícil, el 99 % de la gente lo dejará en blanco, y a nadie suspenderán por ello. Sin embargo, es suspenso seguro no hacer bien las cosas normalitas que, por tener categoría SSLF, hace bien el 20 % de los que se examinan.

¡La clave del examen es no fallar nada con categoría SSLF... si no fallas lo SSLF el notable es seguro!

d) De c) se deduce que no nos comeremos una rosca si no averiguamos con precisión cuál es el núcleo conceptual de la asignatura. Por tanto, antes que nada, los que no se chupan el dedo remueven Roma con Santiago buscando exámenes de años anteriores; llegado el caso, si tropiean con algún fenicio insolidario, pagan lo que pida por esta maravillosa información y la convierten en brújula-linterna que guía su proceso de aprendizaje.

Naturalmente, si no conseguimos exámenes anteriores, nos resultará imposible separar el grano de la paja que hay en la asignatura, por lo que estudiaremos a ciegas y nos daremos muchos más coscorrones.

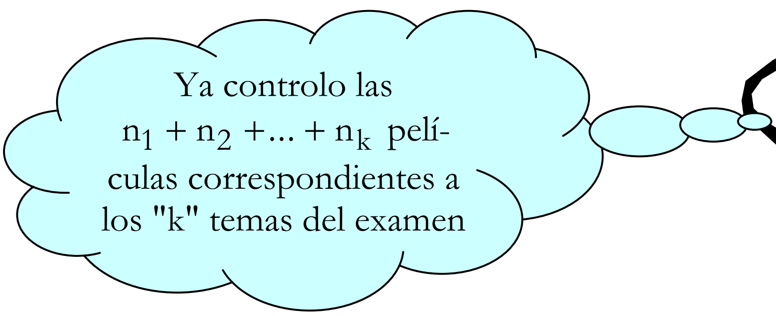
Una vez tenemos los exámenes de años anteriores, lo que queda es fácil:

1) Estudiamos el primer tema; para ello nos metemos en la cabeza las n_1 películas que lo forman... y como para poder razonar es imprescindible tener las ideas muy claras, no hace falta decir que para cada una de dichas n_1 películas asimilamos perfectísimamente:

- El contexto general de la película
- Los protagonistas de la película
- Las relaciones entre los protagonistas de la película
- Los "latiguillos" para "vender imagen" en el examen

2) Buscamos los problemas de examen que correspondan al primer tema y luchamos a muerte con ellos hasta vencerlos a todos. Si no podemos con alguno, pedimos ayuda al profe de la asignatura, lo que servirá para que nos conozca y vea nuestro interés por las cosas que explica en clase.

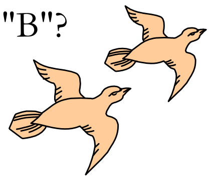
3) Repetimos el proceso con cada tema.



EL VIAJE MÁS LARGO SE INICIA CON UN SOLO PASO

En los ejercicios siguientes lidiaremos sistemas lineales cuyas matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" contienen parámetros (números reales) desconocidos... y como los valores de estos parámetros pueden influir en el rango de "A" y de "B", pueden influir en las soluciones del sistema.

Pregunta: ¿Qué rango estudiamos primero, el de "A" o el de "B"?
Respuesta: Si el máximo rango de "A" es igual (menor) que el máximo rango de "B", comenzaremos estudiando el rango de "A" (de "B").



FONEMATO 2.6.12

Discuta y resuelva el $\left\{\begin{array}{r} 3.x+m.y=1 \\ 2.x-y+m.z=1 \\ m.x-3.y+2.z=1 \end{array}\right\}$ sistema según los valores $m \in \Re$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso, es $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & m & 0 & 1 \\ 2 & -1 & m & 1 \\ m & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$.

El rango máximo de "A" es 3, lo mismo que el de "B", por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "m" que lo anulan: $|A| = m^3 + 5.m - 6 = 0 \Rightarrow m = 1$. ¡Ojo!: la ecuación $|A| = 0$ tiene dos raíces imaginarias, pero no les hacemos caso, pues dicen que "m" es real.

Análisis si $m \neq 1$

Si $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(B) =$ nº de incógnitas. Por tanto, el sistema tiene solución única (es compatible y determinado), y Cramer nos la da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 + m - 2}{m^3 + 5.m - 6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & m \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 - 3.m + 2}{m^3 + 5.m - 6} \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ m & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 - m}{m^3 + 5.m - 6}$$

Por ejemplo, si $m = 2$, la única solución del sistema es:

$$x = \frac{2^2 + 2 - 2}{2^3 + 5.2 - 6} = \frac{1}{3} \; ; \; y = \frac{2^2 - 3.2 + 2}{2^3 + 5.2 - 6} = 0 \; ; \; z = \frac{2^2 - 2}{2^3 + 5.2 - 6} = \frac{1}{6}$$

Análisis si $m = 1$

Si $m = 1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -3 \end{matrix} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = 2 = rg(B) <$ nº de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones.

Latiguillo: Para calcular las soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{matrix} 3.x + y = 1 \\ 2.x - y = 1 - z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = (2 - z)/5 \\ y = (3.z - 1)/5 \end{matrix}\right.$$

Así, denotando $S_{m=1}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLNH cuando $m = 1$, es:

$$S_{m=1} = \underbrace{\left\{\left(\frac{2-z}{5}; \frac{3.z-1}{5}; z\right), \forall z \in \Re\right\}}_{\text{Identificación en forma paramétrica}} =$$

LATIGUILLO

$$= \left\{\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}; 0\right) + \left(-\frac{z}{5}; \frac{3.z}{5}; z\right), \forall z \in \Re\right\} =$$

Si haces esto parecerás un catedrático

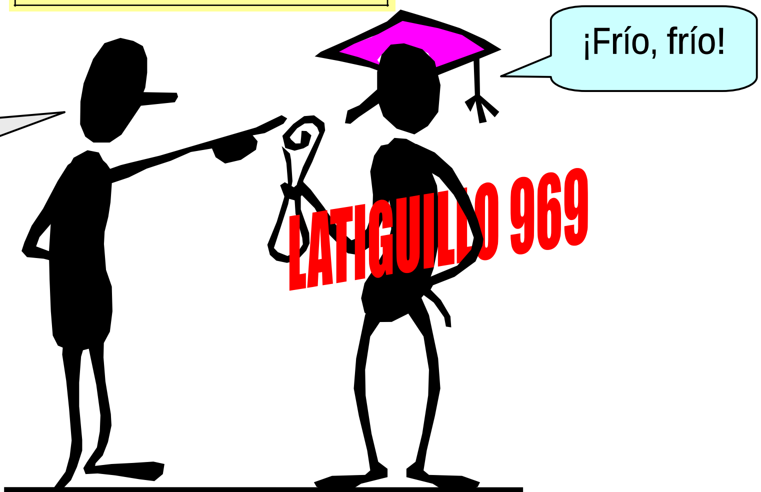
para más comodidad, hacemos $z = 5.\lambda$

solución del SLNH obtenida para $\lambda = 0$

$$= \left\{\overbrace{\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}; 0\right)} + \underbrace{(-\lambda; 3.\lambda; 5.\lambda)}, \forall \lambda \in \Re\right\} =$$

$S^* = \{(-\lambda; 3.\lambda; 5.\lambda), \forall \lambda \in \Re\}$ es el conjunto de las infinitas soluciones del SLH correspondiente al SLHN dado

$$= \left\{\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}; 0\right) + \underbrace{\lambda \bullet (-1; 3; 5)}_{\text{proporcional a } (-1;3;5)}, \forall \lambda \in \Re\right\} \subset \Re^3$$

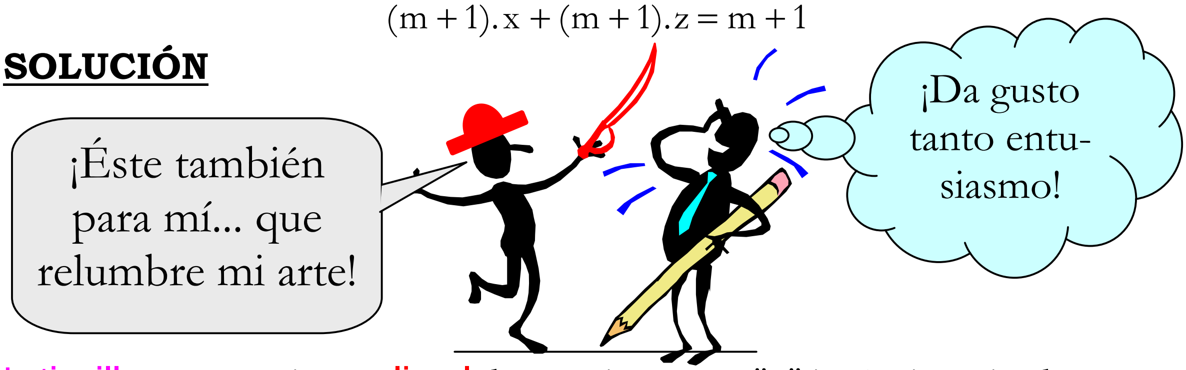


FONEMATO 2.6.13

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro real "m":

$$\begin{gathered}(2.m+2).x+m.y+2.z=2.m-2\\ 2.x+(2-m).y=0\\ (m+1).x+(m+1).z=m+1\end{gathered}$$

SOLUCIÓN



Latiguillo: para un sistema **lineal** de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso: $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2.m+2 & m & 2 & 2.m-2 \\ 2 & 2-m & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 & m+1 \end{array}\right]$

El rango máximo de "A" y de "B" es 3, por tanto, **empezamos estudiando el rango de "A";** para ello calculamos $|A|$ y los valores de "m" que lo anulan:

$$|A| = -2.m^3 + 2.m = 0 \Rightarrow m = 0, 1, -1$$

$\boxed{\text{Análisis si } m \neq 0 \text{ y } m \neq \pm 1}$

Si "m" es distinto de $0, 1$ y $-1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(B) = n^o$ de incógnitas. Por tanto, el SLNH tiene solución única, y **Cramer** nos la da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2.m-2 & m & 2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{|A|} = ... \;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 2.m+2 & 2.m-2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ m+1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{|A|} = ...$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2.m+2 & m & 2.m-2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{|A|} = ...$$

$\boxed{\text{Análisis si } m = 0}$

Si $m = 0$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;;\; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

Como $rg(A) \neq rg(B)$, el SLNH es incompatible: carece de solución.

Análisis si m = 1

Si $m = 1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

Como $rg(A) \neq rg(B)$, el SLNH es incompatible: carece de solución.

Análisis si m = −1

Si $m = -1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = 2 = rg(B) <$ nº de incógnitas, el SLNH tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado). Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros; resulta:

$$\left.\begin{array}{l} -y = -4 - 2.z \\ 2.x + 3.y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -6 - 3.z \\ y = 4 + 2.z \end{array}\right.$$

Denotando $S_{m=-1}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLNH cuando $m = -1$, es

$$S_{m=-1} = \underbrace{\{(-6 - 3.z ; 4 + 2.z ; z), \; \forall z \in \Re\}}_{\text{Identificación en forma paramétrica}} =$$

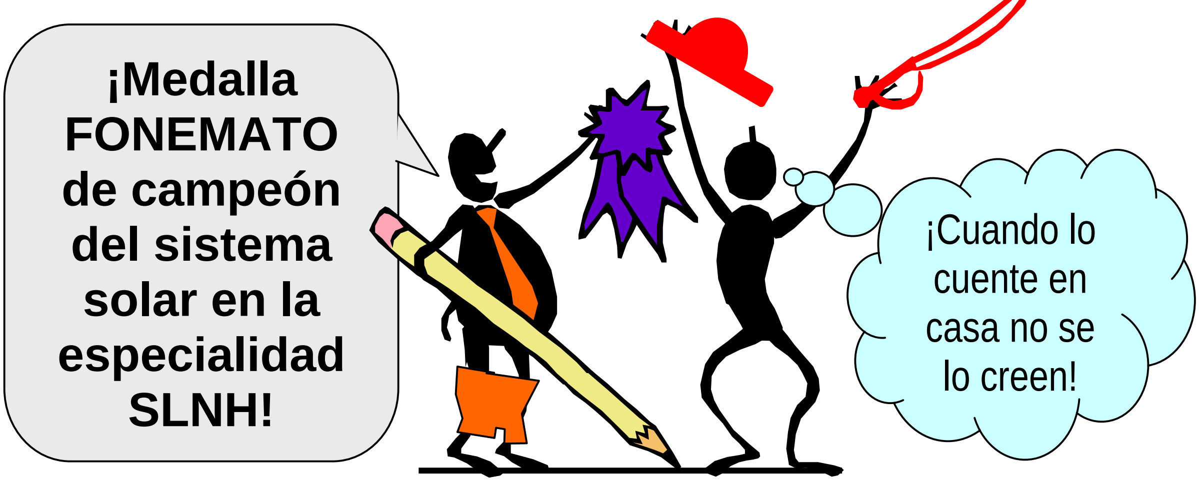
$$= \{(-6 ; 4 ; 0) + (-3.z ; 2.z ; z), \; \forall z \in \Re\} =$$

$$= \{(-6 ; 4 ; 0) + z \bullet (-3 ; 2 ; 1), \; \forall z \in \Re\} \subset \Re^3$$

La terna $(-6 ; 4 ; 0)$ es la solución del SLNH obtenida al hacer $z = 0$, y el conjunto $S^*_{m=-1}$ de las infinitas soluciones del SLH correspondiente al SLNH dado, es

$$S^*_{m=-1} = \{(3.z ; 4 + 2.z ; z), \; \forall z \in \Re\} = \{z \bullet (-3 ; 2 ; 1), \; \forall z \in \Re\} \subset \Re^3$$

O sea, $S^*_{m=-1}$ lo forman las ternas **proporcionales** a la $(-3 ; 2 ; 1)$; es decir, las ternas que son **combinación lineal** de la terna $(-3 ; 2 ; 1)$.



FONEMATO 2.6.14

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro real "m":

$$\begin{gathered} m.x + y + z = x \\ x + m.y + z = y \\ x + y + m.z = z \end{gathered}$$

SOLUCIÓN

El sistema de ecuaciones dado es lineal homogéneo: $\begin{cases}(m-1).x + y + z = 0 \\ x + (m-1).y + z = 0 \\ x + y + (m-1).z = 0\end{cases}$.

Latiguillo: las matrices de coeficientes y ampliada de un SLH sólo se diferencian en una columna de ceros; por tanto, tienen igual rango. Así, el sistema es compatible: al menos admite la solución trivial $x = y = z = 0$.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{bmatrix}$.

Estudiemos el rango de "A" según el valor de "m": calculamos $|A|$ y los valores de "m" que lo anulan: $|A| = m^3 - 3.m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = -1, 2$ (doble).

Análisis si $m \neq -1$ y $m \neq 2$

Siendo "m" distinto de 2 y -1, es $|A| \neq 0$, por lo que $rg(A) = 3 = n^o$ de incógnitas. Así, el SLH tiene solución única, que es la trivial $x = y = z = 0$.

Análisis si $m = 2$

Si $m = 2$ la matriz "A" se convierte en $A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $rg(A) = 1 < n^o$ de incógnitas, el SLH tiene infinitas soluciones. Para hallarlas, como el menor de orden 1 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 2ª y 3ª ecuaciones y parametrizamos las incógnitas "y" y "z", pasándolas al segundo miembro de la ecuación; resulta $x = -y - z$. Así, denotando $S_{m=2}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLH cuando $m = 2$, es:

$$S_{m=2} = \{(-y-z;y;z), \forall y,z \in \Re\} = \{(-y;y;0) + (-z;0;z), \forall y,z \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{m=2} = \{y \bullet (-1;1;0) + z \bullet (-1;0;1), \forall y,z \in \Re\} \subset \Re^3 \quad (*)$$

La terna $(-1;1;0)$ es solución del SLH (se obtiene al hacer $y = 1, z = 0$), y la terna $(-1;0;1)$ también lo es (se obtiene al hacer $y = 0, z = 1$); así, (*) expresa que toda solución del SLH es combinación lineal de las soluciones $(-1;1;0)$ y $(-1;0;1)$.

Análisis si $m = -1$

Si $m = -1$ es $|A| = 0$, y la matriz "A" se convierte en:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$$

Como $rg(A) = 2 < n^o$ de incógnitas, el SLH tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado). Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado en

"A" es no nulo, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros; resulta:

$$\left.\begin{array}{r} -2.x + y = -z \\ x - 2.y = -z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array}\right.$$

Denotando $S_{m=-1}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLH cuando $m = -1$, es:

$$S_{m=-1} = \{(z;z;z), \forall z \in \Re\} = \{z \bullet (1;1;1), \forall z \in \Re\} \subset \Re^3 \quad (**)$$

La terna $(1;1;1)$ es solución del SLH (se obtiene al hacer $z = 1$); así, (**) expresa que toda solución del SLH es proporcional a la solución $(1;1;1)$; o sea, es combinación lineal de dicha terna.

Olvídate de lo que no sea SSLF

Si en examen cae algo realmente difícil, el 99 % de la gente lo dejará en blanco y a nadie suspenderán por ello... pero es suspenso seguro no hacer bien las cosas normalitas que, por tener categoría SSLF, hace bien el 20 % de los que se examinan.

FONEMATO 2.6.15

Discútanse y resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "n" y "k":

$$1)\begin{cases} x-y-z=7 \\ 5.x-2.y+z=9 \\ x+y+z=4 \\ 2.x-y+2.z=k \end{cases} ;\ 2)\begin{cases} x+y-z=3 \\ 3.x+4.y-z=5 \\ x+y+k.z=3 \\ x+2.y+(k+2).z=k^2-2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & k \end{bmatrix}$

El máximo rango de "A" es 3 y el de "B" es 4, por tanto, empezamos estudiando el rango de "B"; para ello calculamos $|B|$ y los valores de "k" que lo anulan: $|B| = -6.k - 54 = 0 \Rightarrow k = -9$.

Análisis si $k \neq -9$

Si $k \neq -9 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 4 \neq rg(A)$. Así, el SLNH es incompatible.

Análisis si $k = -9$

Si $k = -9$ es $|B| = 0$, y como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, resulta $rg(A) = rg(B) = 3 =$ nº de incógnitas; así, el SLNH tiene solución única. Para calcularla, como el menor de orden 3 indicado es no nulo, eliminamos la 4ª ecuación y resolvemos por Cramer; resulta $x = 11/2,\ y = 17/3,\ z = 43/6$.

3) Es: $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2 \end{array}\right]$

El máximo rango de "A" es 3 y el de "B" es 4, por tanto, empezamos estudiando el rango de "B"; para ello calculamos $|B|$ y determinamos los valores de "k" que lo anulan:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & k^2-5 \end{vmatrix} = (k+1).(k^2-1) = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

A la 2ª fila le restamos el triple de la 1ª
A las filas 3ª y 4ª les restamos la 1ª

Análisis si $k \neq \pm 1$

Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 4 \neq rg(A)$. Por tanto, el SLNH es incompatible.

Análisis si $k = 1$

Si $k = 1$ es $|B| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $|B| = 0$ y el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, resulta ser $rg(A) = rg(B) = 3 = n^o$ de incógnitas. Por tanto, el SLNH tiene solución única (es compatible y determinado); para calcularla, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 4ª ecuación del sistema y resolvemos por Cramer; resulta: $x = 7, y = -4, z = 0$.

Análisis si $k = -1$

Si $k = -1$ es $|B| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = rg(B) = 2 < n^o$ de incógnitas, el SLNH tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado).

Para calcularlas las infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos las ecuaciones 3ª y 4ª y parametrizamos "z", pasándola a los segundos miembros:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z + 3 \\ 3.x + 4.y &= z + 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + 3.z \\ y = -2.z - 4 \end{cases}$$

Denotando $S_{k=-1}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLNH cuando $k = -1$, es:

$$S_{k=-1} = \{(3.\theta + 7; -2.\theta - 4; \theta), \forall \theta \in \Re\} =$$
$$= \{(7; -4; 0) + \theta \bullet (3; -2; 1), \forall \theta \in \Re\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 2.6.16

Discuta y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "n" y "k":

$$\begin{cases} x - n.y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ k.x - 2.y - 5.z = 0 \\ 3.x + y + z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: el sistema es lineal homogéneo; así, la matriz de coeficientes y la ampliada se diferencian en una columna de ceros; por tanto, tienen igual rango y el sistema es compatible: al menos admite la solución trivial $x = y = z = 0$.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, es $rg(A) \geq 2, \forall k$. Al orlar el menor no nulo H_1 obtenemos los siguientes menores de orden 3:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & -2 & -5 \end{vmatrix} = n.k - 9 - 5.n - k \ ; \ H_3 = \begin{vmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.n$$

Por tanto:

- Si $n \neq 0 \Rightarrow H_3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = n^o$ de incógnitas. Por tanto, el SLH es compatible y determinado: sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Si $n = 0 \Rightarrow H_3 = 0$ y $H_2 = -9 - k$; así, si $k \neq -9$ es $H_2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 =$ número de incógnitas. Por tanto, el SLH es compatible y determinado: sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Si $n = 0$ y $k = -9 \Rightarrow H_2 = H_3 = 0 \Rightarrow rg(A) = 2 < n^o$ de incógnitas. Por tanto, el SLH tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado); para calcularlas, a la vista del menor no nulo H_1, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos la incógnita "y", pasándola a los segundos miembros:

$$\left.\begin{matrix} x + z = 0 \\ x - z = -y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -y/2 \\ z = y/2 \end{cases}$$

Denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del SLH cuando $n = 0$ y $k = -9$, es:

$$S = \{(-y/2;y;y/2), \forall y \in \Re\} = \{(-\theta;2.\theta;\theta), \forall \theta \in \Re\} \Rightarrow$$

$\boxed{\text{por comodidad, hacemos } y = 2.\theta}$

$$\Rightarrow S = \{\theta \bullet (-1;2;1), \forall \theta \in \Re\} \subset \Re^3 \quad (*)$$

La terna $(-1;2;1)$ es solución del SLH (se obtiene al hacer $\theta = 1$); así, (*) expresa que toda solución del SLH es proporcional a la solución $(-1;2;1)$; o sea, es combinación lineal de $(-1;2;1)$.

FONEMATO 2.6.17

Discuta y resuelva el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{r} 3.x - y + a.z = 1 \\ x + 4.y + z = 3 \\ 2.x - 5.y + z = b \end{array}\right\}$ según los valores de los parámetros reales "a" y "b":

SOLUCIÓN

Es: $$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & a & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & b \end{array}\right]$$

El rango máximo de "A" y de "B" es 3, por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" que lo anulan:

$$|A| = 26 - 13.a = 0 \Rightarrow a = 2$$

Análisis si $a \neq 2$

Si $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(B) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas. Por tanto, el siste-ma tiene solución única (es compatible y determinado), y Cramer nos la da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & 4 & 1 \\ b & -5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & b \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots$$

Análisis si $a = 2$

Si $a = 2$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \; ; \; B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & b \end{bmatrix}$$

Como $\text{rg}(A) = 2$ y "B" puede tener rango 3, ahora debemos estudiar el rango de "B" en función de los valores de "b": al orlar el menor no nulo de orden 2 indica-do en "B", resultan los siguientes menores de orden 3:

$$H_1 = |A| = 0, \forall b \; ; \; H_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & b \end{vmatrix} = 13.b + 26$$

Se tiene que:

- Si $b \neq -2 \Rightarrow H_2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A) \Rightarrow$ sistema incompatible.
- Si $b = -2 \Rightarrow H_2 = 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 2 = \text{rg}(A) < \text{n}^{\text{a}}$ de incógnitas; por tanto, el sis-tema tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado). Para calcu-larlas, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la 3^{a} ecuación y parametrizamos "z", pasándola a los segundos miembros:

$$\left.\begin{array}{l} 3.x - y = 1 - 2.z \\ x + 4.y = 3 - z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = (7 - 9.z)/13 \\ y = (8 - z)/13 \end{array}\right.$$

En definitiva, denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema cuando $a = 2$ y $b = -2$, es

$$S = \left\{ \left(\frac{7 - 9.\lambda}{13}; \frac{8 - \lambda}{13}; \lambda\right), \forall \lambda \in \Re \right\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 2.6.18

Discútanse los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "a" y "b":

$$1)\begin{cases} 3.x-y+z=0 \\ 2.x+b.y+z=0 \\ x-a.y-z=0 \end{cases} ;\ 3)\begin{cases} a.x+b.y+z=1 \\ x+a.b.y+z=b \\ x+b.y-a.z=1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) Latiguillo: el sistema es lineal homogéneo; así, la matriz de coeficientes y la ampliada se diferencian en una columna de ceros; por tanto, tienen igual rango y el sistema es compatible: al menos admite la solución trivial $x = y = z = 0$.

Es: $$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{bmatrix}$$

Estudiemos el rango de "A" para los distintos valores de "a" y "b"; a tal fin, calculamos $|A|$ y los valores de "a" y "b" que lo anulan: $|A| = a-4.b-3=0$.

- Siendo "a" y "b" tales que $a-4.b-3\neq 0$, es $rg(A)=3=$ nº de incógnitas; por tanto, el sistema sólo tiene la solución trivial.
- Siendo "a" y "b" tales que $a-4.b-3=0$, es $rg(A)=2<$ nº de incógnitas; por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

2) Es $$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & a.b & 1 & b \\ 1 & b & -a & 1 \end{array}\right]$$

El rango máximo de "A" y de "B" es 3, por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" y "b" que lo anulan:

$$|A| = b.(a^3-3.a+2)=0 \Rightarrow b=0,\ a=1\ (\text{doble}), -2.$$

$\boxed{\text{Análisis si } b\neq 0 \text{ y } a\neq 1 \text{ y } a\neq -2}$

Si $b\neq 0$ y $a\neq 1$ y $a\neq -2 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=$ número de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado (tiene solución única).

$\boxed{\text{Análisis si } b=0}$

Si $b=0$ es $|A|=0$ y $B=\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right]$.

Como $rg(A)<3$ y "B" puede tener rango 3, ahora debemos estudiar el rango de "B" en función de los valores de "a": como el menor de orden 3 indicado $H=2.a-2$ se anula sólo si $a=1$, entonces:

- Si $a\neq 1 \Rightarrow |H|\neq 0 \Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $a=1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=1 \;\; ; \;\; B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

O sea, resulta $rg(A)\neq rg(B)$; por tanto, el sistema es incompatible.

Análisis si $a=1$

Si $a=1$ es $|A|=0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1 & b & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & b & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=1,\ \forall b$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & b & 1 & 1\\ 1 & b & 1 & b\\ 1 & b & 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=rg\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & b\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{cases}1 \text{ si } b=1\\ 2 \text{ si } b\neq 1\end{cases}$$

Así:

- Si $b=1\Rightarrow rg(A)=rg(B)=1<$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.
- Si $b\neq 1\Rightarrow rg(B)=2\neq rg(A)\Rightarrow$ el sistema carece de solución.

Análisis si $a=-2$

Si $a=-2$ es $|A|=0$, y la matriz "B" se convierte en:

$$B=\begin{bmatrix}-2 & b & 1 & 1\\ 1 & -2.b & 1 & b\\ 1 & b & -2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)\geq 2,\ \forall b, \text{ pues } H_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\neq 0,\ \forall b$$

Al orlar el menor no nulo H_1 se obtienen los siguientes menores de orden 3:

$$H_2=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & b\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-3.(b+2) \text{ que se anula sólo si } b=-2$$

$$H_3=\begin{vmatrix}b & 1 & 1\\ -2.b & 1 & b\\ b & -2 & 1\end{vmatrix}=3.b.(b+2) \text{ que se anula sólo si } b=0 \text{ ó } b=-2$$

En consecuencia:

- Si $b\neq -2\Rightarrow H_2\neq 0\Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A)\Rightarrow$ sistema incompatible.
- Si $b=-2\Rightarrow H_2=H_3=0\Rightarrow rg(B)=2=rg(A)<$ nº de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

FONEMATO 2.6.19

Discútase el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+2.y=1 \\ x+y+t=1 \\ x+3.y+2.a.z+2.t=1 \\ 2.x+6.y+2.z+a.t=b \end{cases}$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Es: $$A/B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2.a & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & a & b \end{array}\right]$$

El rango máximo de "A" y de "B" es 4, por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" que lo anulan:

$$|A| = 6-4.a-2.a^3 = 0 \Rightarrow a = 1, -3$$

$\boxed{\text{Análisis si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -3}$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 4 = \text{n}^\text{o}$ de incógnitas; así, el sistema compatible y determinado: tiene solución única.

$\boxed{\text{Análisis si } a = 1}$

Si $a = 1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 3 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & b \end{bmatrix}$$

Como $\mathrm{rg}(A) = 3$ y "B" podría tener rango 4, ahora debemos estudiar el rango de "B" en función de los valores de "b". En la matriz "B" es:

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & b \end{vmatrix} = 2-b \text{ que se anula sólo si } b = 2$$

Por tanto:

- Si $b \neq 2 \Rightarrow H_1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(B) = 4 \neq \mathrm{rg}(A) \Rightarrow$ el SLNH es incompatible.
- Si $b = 2 \Rightarrow H_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(B) = 3 = \mathrm{rg}(A) < \text{n}^\text{o}$ de incógnitas; por tanto, el SLNH es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

Análisis si $a = -3$

Si $a = -3$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

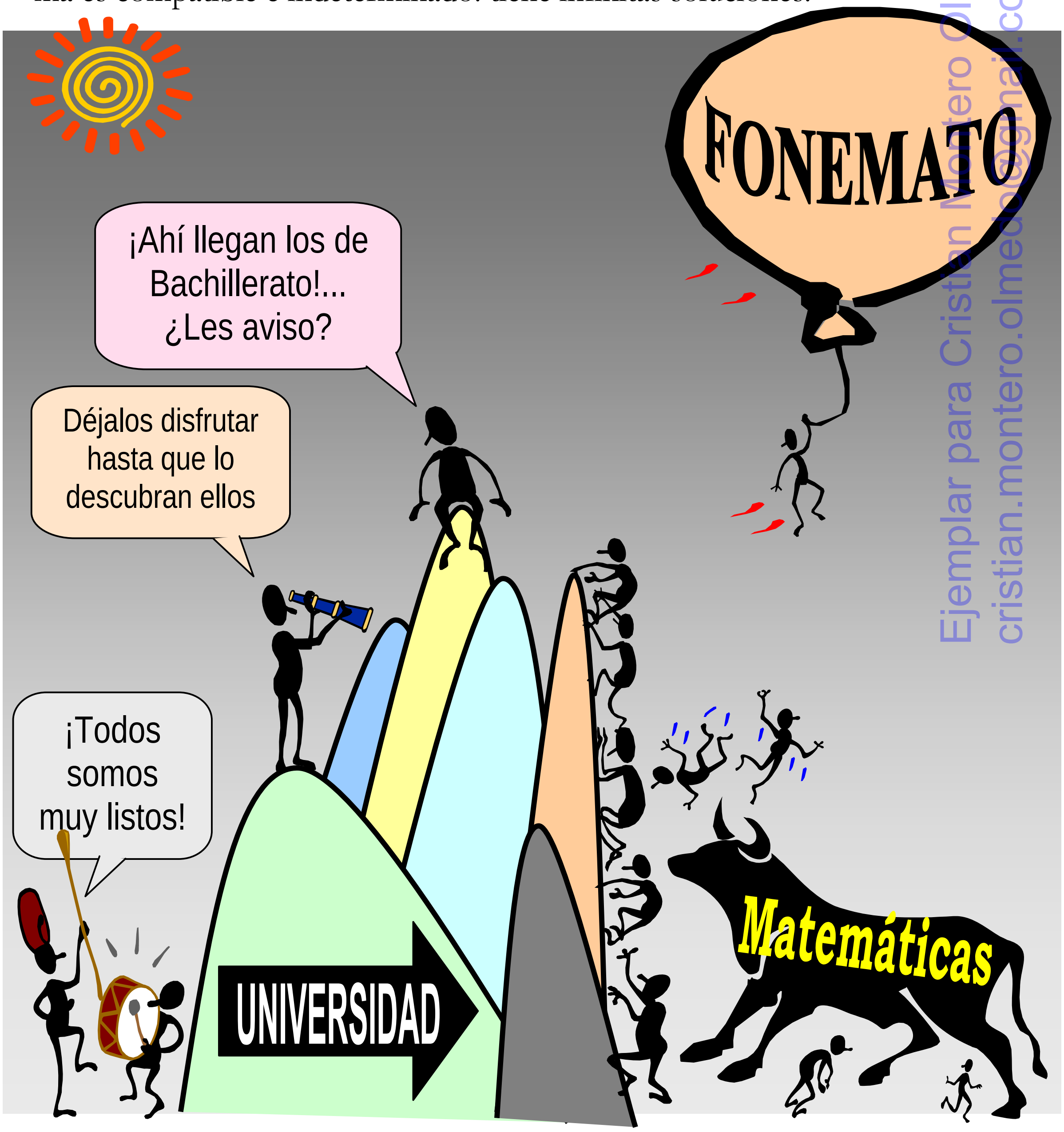
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 3 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & -3 & b \end{bmatrix}$$

Como $\mathrm{rg}(A) = 3$ y "B" puede tener rango 4, ahora debemos estudiar el rango de "B" en función de los valores de "b". En la matriz "B" es:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & b \end{vmatrix} = 6.(b-2) \text{ que se anula sólo si } b = 2$$

Por tanto:

- Si $b \neq 2 \Rightarrow H_2 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(B) = 4 \neq \mathrm{rg}(A) \Rightarrow$ sistema incompatible.
- Si $b = 2 \Rightarrow H_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(B) = 3 = \mathrm{rg}(A) <$ nº de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.



FONEMATO 2.6.20

Discútase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+z=c \\ x+y+2.t=0 \\ b.x+y+2.z+t=0 \\ a.x+2.y+z+3.t=c \end{cases}.$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Es: $$A / B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ b & 1 & 2 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right]$$

El rango máximo de "A" y de "B" es 4, por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" y "b" que lo anulan:

$$|A| = b - a = 0 \Rightarrow a = b$$

Análisis si $a \neq b$

Si $a \neq b \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 4 = n^o$ de incógnitas; así, el sistema es compatible y determinado: tiene solución única.

Análisis si $a = b$

Si $a = b$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ b & 1 & 2 & 1 \\ b & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ b & 1 & 2 & 1 & 0 \\ b & 2 & 1 & 3 & c \end{bmatrix}$$

Como $rg(A) = 3$ (pues el menor indicado es no nulo) y "B" puede tener rango 4, ahora debemos estudiar el rango de "B" en función de los valores de "b" y "c".

En la matriz "B" es $H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & c \end{vmatrix} = 2.c$, que se anula sólo si $c = 0$; por tanto:

- Si $c \neq 0 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 4 \neq rg(A) \Rightarrow$ sistema incompatible.
- Si $c = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow rg(B) = 3 = rg(A) < n^o$ de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

FONEMATO 2.6.21

Discútase el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2.x + a.y + z = 7 \\ x + a.y + z + t = b \\ x + 2.a.y + t = -1 \\ b.x + a.y = b \end{cases}$

SOLUCIÓN

Es: $$A/B = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & a & 1 & 0 & 7 \\ 1 & a & 1 & 1 & b \\ 1 & 2.a & 0 & 1 & -1 \\ b & a & 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

El rango máximo de "A" y de "B" es 4, por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" y "b" que lo anulan:

$$|A| = 2.a.(1-b) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ó } b = 1$$

- Si $a \neq 0$ y $b \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 4 = \text{n}^{\circ}$ de incógnitas; así, el sistema es compatible y determinado: tiene solución única.
- Si $a = 0$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ b & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Como $\text{rg}(A) = 3$ (pues el menor indicado es no nulo) y "B" podría tener rango 4, ahora debemos estudiar el rango de "B" según el valor de "b". En "B", es:

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ b & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b.(b-4) \text{ que se anula sólo si } b = 0 \text{ ó } b = 4$$

Por tanto:

* Si $b \neq 0$ y $b \neq 4 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 4 \neq \text{rg}(A) \Rightarrow$ sistema incompatible.
* Si $b = 0$ ó $b = 4 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 3 = \text{rg}(A) <$ número de incógnitas; así, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

- Si $b = 1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 2.a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3, \forall a, \text{ pues } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 & 0 & 7 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2.a & 0 & 1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema es incompatible, pues $\text{rg}(B) = 4 \neq \text{rg}(A)$, ya que el menor de orden 4 indicado es no nulo para todo valor de "a".

FONEMATO 2.6.22

1) Discútase el siguiente sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} 2.x + y = 0 \\ x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + 2.y = k \end{cases}$

2) Siendo "A" y "B" matrices cuadradas equidimensionales, demuéstrese que "B" es la matriz nula si "A" es regular y $A \bullet B = 0$.

SOLUCIÓN

1) Las matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son $A/B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{array}\right]$.

El sistema es incompatible para todo valor de "k", pues $\text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A)$, ya que el menor de orden 3 indicado es no nulo para todo valor de "k".

2) Supuesto que $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$ son cuadradas de orden 2, se tiene que:

$$A \bullet \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \underbrace{A \bullet \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{SLH}} \\ \overbrace{A \bullet \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\text{SLH}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{11} = b_{21} = 0 \\ b_{12} = b_{22} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pues la matriz de coeficientes "A" tiene determinante no nulo

FONEMATO 2.6.23

Discútase el siguiente sistema según los valores de "k", resolviéndolo si $k=1$.

$$\begin{aligned} k.x+2.z&=0 \\ k.y-z&=k \\ x+3.y+z&=5 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A)\neq rg(B)\Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A)=rg(B)=n\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A)=rg(B)<n\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso, es $A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$.

El rango máximo de "A" y de "B" es 3, por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "k" que lo anulan:

$$|A|=k^2+k=0\Rightarrow k=0,-1$$

En consecuencia:

- Si $k\neq 0$ y $k\neq -1\Rightarrow rg(A)=3=rg(B)=$ nº de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado: tiene solución única.
- Si $k=0$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

  Como $rg(A)=rg(B)=2<$ nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

- Si $k=-1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=3$$

  Como $rg(A)\neq rg(B)$, el sistema es incompatible: carece de solución.

- Si $k=1$ sistema tiene solución única, y Cramer nos la da; siendo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

  es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=-2\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=2\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A|}=1$$

FONEMATO 2.6.24

Clasifíquese el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b":

$$\begin{aligned} a.x + y + b.z &= 1 \\ x + a.y + b.z &= 1 \\ x + y + a.b.z &= b \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso, es $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & a.b & b \end{array}\right]$.

El rango máximo de "A" y de "B" es 3, por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" y "b" que lo anulan:

$$|A| = b.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = b.(a^3 - 3.a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -2, 1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

En consecuencia:

- Si $b \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 = n^o$ de incógnitas; así, el sistema es compatible y determinado: tiene solución única.
- Si $b = 0$ ($\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) \underset{\uparrow}{=} rg \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eliminamos la 3ª columna, por ser de ceros

Como $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2.a = 0 \Rightarrow a = 1$, se tiene que:

∗ Si $a \neq 1$ es $rg(B) = 3 \neq rg(A)$; así, el sistema es incompatible.

∗ Si $a = 1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1 \;;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

El sistema es incompatible, pues $rg(A) \neq rg(B)$.

- Si $a = 1$ ($\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&b\\1&1&b\\1&1&b\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=1,\ \forall\ b\ ;\ B=\begin{bmatrix}1&1&b&1\\1&1&b&1\\1&1&b&b\end{bmatrix}$$

Ahora estudiamos el rango de "B":

$$rg(B)=rg\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&b\end{bmatrix}$$

eliminamos la 2ª columna, por ser igual a la 1ª
eliminamos la 3ª columna, por ser proporcional a la 1ª

Por tanto:

* Si $b\neq 1$ es $rg(B)=2\neq rg(A)$; así, el sistema es incompatible.
* Si $b=1$ es $rg(B)=1=rg(A)<$ nº de incógnitas; así, el sistema es compatible e indeterminado.

- Si $a=-2$ ($\Rightarrow |A|=0\Rightarrow rg(A)\leq 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}-2&1&b\\1&-2&b\\1&1&-2.b\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2,\ \forall\ b\ ;\ B=\begin{bmatrix}-2&1&b&1\\1&-2&b&1\\1&1&-2.b&b\end{bmatrix}$$

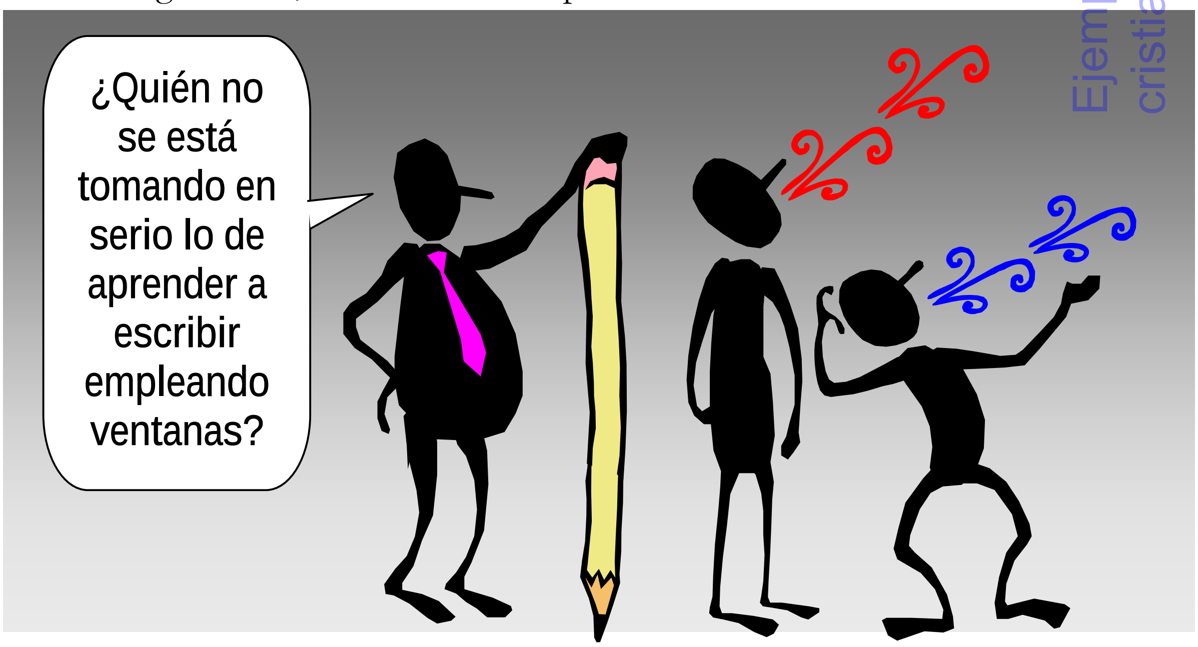
pues $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\neq 0,\ \forall\ b$

Como $rg(A)<3$ (pues $|A|=0$) y "B" puede tener rango 3, ahora estudiamos el rango de "B", calculando el siguiente menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&b\end{vmatrix}=3.b+6\neq 0\Rightarrow b\neq -2$$

Por tanto:

* Si $b\neq -2\Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A)\Rightarrow$ y el sistema es incompatible.
* Si $b=2$, como $rg(A)=2$ para todo "b", resulta $rg(A)=rg(B)=2<$ nº de incógnitas; así, el sistema es compatible e indeterminado.



FONEMATO 2.6.25

Discútanse los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores del parámetro "a", hallando todas sus soluciones cuando sea compatible e indeterminado.

$$1)\begin{cases} a.x+a.y=a \\ (1-a).z=a+1 \\ y+z=a-1 \end{cases};\quad 2)\begin{cases} a.x+y+z=a \\ x+a.y-z=1 \\ 3.x+y+a.z=2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A)\neq rg(B)\Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A)=rg(B)=n\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A)=rg(B)<n\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

1) Es:
$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} a & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-a & a+1 \\ 0 & 1 & 1 & a-1 \end{array}\right]$$

El rango máximo de "A" y de "B" es 3, por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" que lo anulan:

$$|A|=a.(a-1)=0\Rightarrow a=0,1$$

En consecuencia:

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 1\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=$ número de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado: tiene solución única.

- Si $a=0$ $(\Rightarrow|A|=0\Rightarrow rg(A)\leq 2)$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<n^{\circ}$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 1ª ecuación y parametrizamos la incógnita "x", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} z=1 \\ y+z=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} y=-2 \\ z=1 \end{cases}$$

Denotando $S_{a=0}$ al conjunto de las infinitas soluciones cuando $a=0$, es:

$$S_{a=0}=\{(x;-2;1),\ \forall\ x\in\Re\}\subset\Re^3$$

- Si $a=1$ $(\Rightarrow|A|=0\Rightarrow rg(A)\leq 2)$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=3$$

El sistema es incompatible, pues $rg(A)\neq rg(B)$.

2) Es $$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a\\ 1 & a & -1 & 1\\ 3 & 1 & a & 2\end{array}\right]$$

El rango máximo de "A" es 3, lo mismo que el de "B"; por tanto, empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" que lo anulan: $|A| = a^3 - 3.a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2, -1$ (doble). En consecuencia:

- Si $a \neq 2$ y $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 =$ nº de incógnitas. Así, el sistema es compatible y determinado: tiene solución única.
- Si $a = 2$ ($\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:
$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=3$$
El sistema es incompatible, pues $rg(A) \neq rg(B)$.
- Si $a = -1$ ($\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:
$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=2$$
Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 1ª ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones:
$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 + z\\ 3.x + y = 2 + z\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = (3 + 2.z)/4\\ y = -(1 + 2.z)/4\end{array}\right.$$
Denotando $S_{a=-1}$ al conjunto de las infinitas soluciones cuando $a = -1$, es:
$$S_{a=-1} = \{((3+2.z)/4; -(1+2.z)/4; z)),\ \forall z \in \Re\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 2.6.26

Discuta el sistema $\left\{\begin{matrix} x+y+a.z=1 \\ x+y+b.z=a \\ x+a.y+z=a \end{matrix}\right\}$ en función de los parámetros "a" y " b":

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema **lineal** de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Es:
$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b & a \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right]$$

El rango máximo de "A" y de "B" es 3, por tanto, **empezamos estudiando el rango de "A":** calculamos $|A|$ y los valores de "a" y "b" que lo anulan.

$$|A| = b + a^2 - a - a.b = b.(1-a) - a.(1-a) = (b-a).(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = a \\ a = 1 \end{cases}$$

En consecuencia:

- Si $b \neq a$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 3 = \text{n}^\text{a}$ de incógnitas; por tanto, el SLNH tiene solución única, y **Cramer** nos la da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots$$

- Si $a = b$ $(\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \leq 2)$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el máximo que ahora puede tener "A" es 2 y "B" puede tener rango 3, **ahora estudiamos el rango de "B";** es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 2.a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ (doble)}$$

Por tanto:

* Si $a \neq 1$ es $\text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A)$; así, el sistema es incompatible.

* Si $a = 1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 1 < \text{n}^\text{o}$ de incógnitas, el SLNH es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 1 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** las ecuaciones 2ª y 3ª y **parametrizamos** las incógnitas "x" y "z", pasándolas al segundo miembro de la ecuación; resulta: $y = 1 - x - z$. Por tanto, denotando $S_{a=b=1}$ el conjunto de las infinitas soluciones cuando $a = b = 1$, es:

$$S_{a=b=1} = \{(x;1-x-z;z), \forall\, x,z \in \Re\} =$$
$$= \{(0;1;0) + x \bullet (1;-1;0) + z \bullet (0;-1;1), \forall\, x,z \in \Re\} \subset \Re^3$$

- Si $a = 1$ ($\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \le 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obvio: para todo "b" es $rg(A) = rg(B)$; así, si $a = 1$, el sistema es compatible para todo "b" .... pero suceden cosas distintas según sea $b = 1$ ó $b \ne 1$:

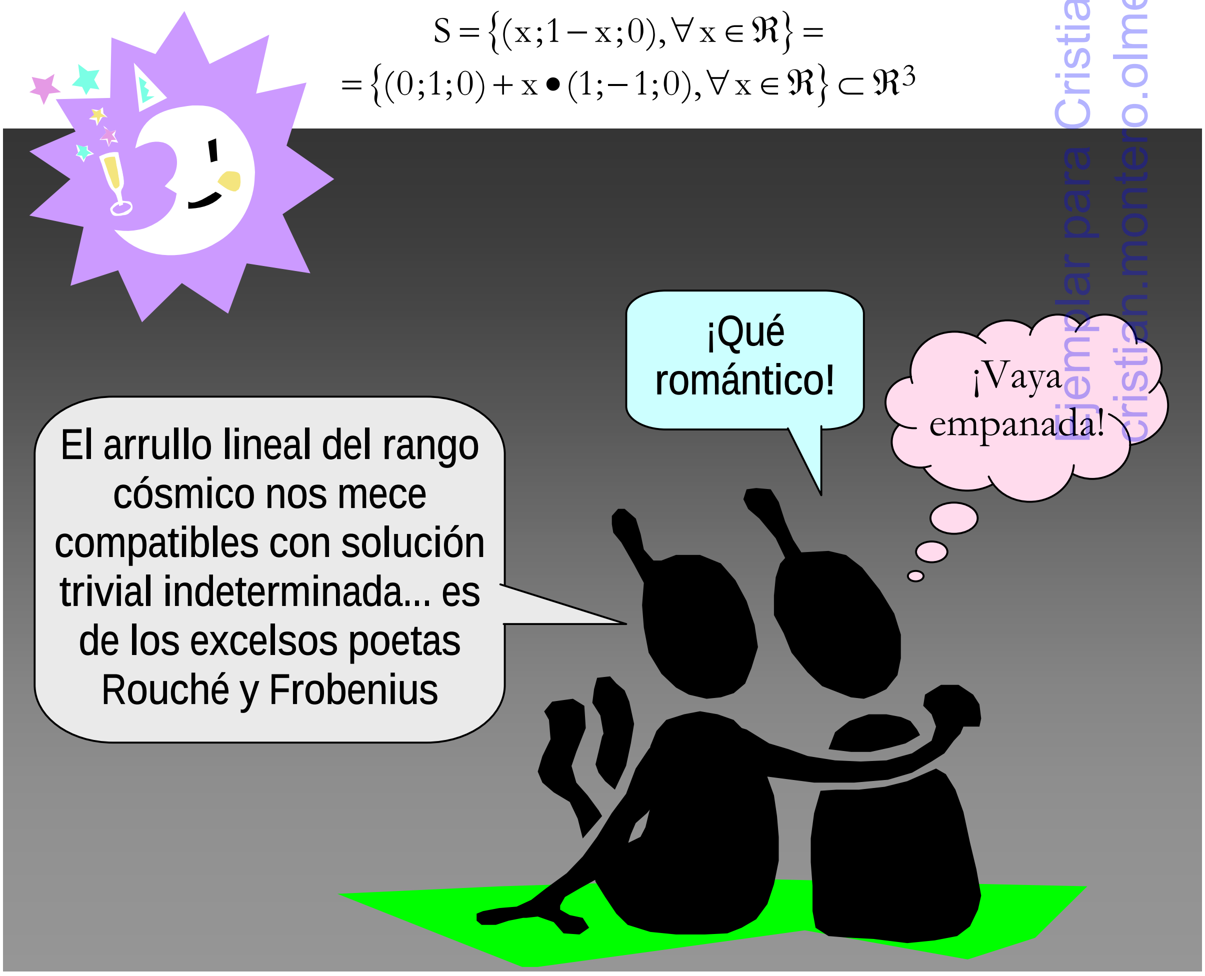
* Si $b = 1$ estamos en el caso anterior ($a = b = 1$).

* Si $b \ne 1 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 2 <$ nº de incógnitas; así, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** la incógnita "x", pasándola a los segundos miembros:

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 - x \\ y + b.z = 1 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 1 - x \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Denotando "S" al conjunto de las infinitas soluciones del SLNH cuando $a = 1$ y $b \ne 1$, es:

$$S = \{(x;1-x;0), \forall\, x \in \Re\} =$$
$$= \{(0;1;0) + x \bullet (1;-1;0), \forall\, x \in \Re\} \subset \Re^3$$



FONEMATO 2.6.27

Estúdiese el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro real "a", resolviéndolo cuando sea compatible.

$$1)\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} \;;\; 2)\begin{cases} y + a.z = -a \\ x + a.y + z = 0 \\ x - a.y + a.z = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema **lineal** de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

1) Es:
$$A / B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 & a \\ -1 & -1 & 2 & a \end{array}\right]$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, y para todo "a" es $|A| = 0$, entonces $\text{rg}(A) = 2, \forall a$. El el rango de "B" está determinado por el menor

$$H = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = 9.a$$

En consecuencia:

- Si $a \neq 0 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A) \Rightarrow$ sistema incompatible.
- Si $a = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 2 = \text{rg}(A) <$ nº de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular las infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} 2.x - y = z \\ -x + 2.y = z \end{cases}\right\} \Rightarrow x = y = z$$

Denotando "S" al conjunto de las infinitas soluciones cuando $a = 0$, es:

$$\underbrace{S = \{(z;z;z), \forall\, z \in \Re\}}_{\boxed{\text{Identificación paramétrica}}} =$$

$$= \{z \bullet (1;1;1), \forall\, z \in \Re\} \subset \Re^3$$

2) Es:
$$A / B = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a & -a \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -a & a & 2 \end{array}\right]$$

El rango máximo de "A" es 3, lo mismo que el de "B"; por tanto, **empezamos estudiando el rango de "A";** para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" y "b" que lo anulan: $|A| = -2.a^2 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1/2, -1$.

En consecuencia:

- Si $a \neq 1/2$ y $a \neq -1$ es $rg(A) = 3 = rg(B) = n^o$ de incógnitas; así, el sistema tiene solución única (es compatible y determinado), y Cramer nos la da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 2 & -a & a \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots.\ ;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -a & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots.\ ;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & -a & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots.$$

- Si $a = 1/2$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2\ ;\ B = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{matrix}} \\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix}$$

El menor de orden 3 indicado en "B" es no nulo; por tanto "B" tiene rango 3 y el sistema es incompatible.

- Si $a = -1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2\ ;\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(B) = rg(A) = 2 < n^o$ de incógnitas, el SLNH es compatible e indeterminado. Para calcular las infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left\{\begin{matrix} y = 1 + z \\ x - y = -z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 + z \end{matrix}\right.$$

Denotando "H" al conjunto de las infinitas soluciones cuando $a = -1$, es:

$$H = \underbrace{\{(1;1+z;z), \forall\ z \in \Re\}}_{\text{Identificación paramétrica}} =$$

$$= \{(1;1;0) + z \bullet (0;1;1), \forall\ z \in \Re\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 2.6.28

Estúdiense los siguientes sistemas lineales.

$$1)\ \begin{cases} k.x+y+z=3 \\ x-k.y+z=1 \\ x+y+z=k+2 \end{cases} ;\ 2)\ \begin{cases} 6.x+2.k.y+3.z=1 \\ x-y+z=3 \\ 9.x-y+6.k.z=10 \end{cases} ;\ 3)\ \begin{cases} x-y+z=2 \\ x+k.y+z=8 \\ k.x+y+k.z=10 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

El rango máximo de "A" y de "B" es 3 en los tres casos; por tanto, empezamos estudiando el rango de "A".

1)
$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

En consecuencia:

- Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 =$ nº de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado.
- Si $k=1$ es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, siendo $rg(A)=2$ y $rg(B)=2$.

  Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ compatible e indeterminado.
- Si $k=-1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2\ ;\ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

  Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ compatible e indeterminado.

2)
$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2.k & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & 6.k \end{vmatrix} = 6.(5-3.k-2.k^2) = 0 \Rightarrow k = -5/2, 1$$

Por tanto:

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -5/2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(B) =$ nº de incógnitas; así, el sistema es compatible y determinado.
- Si $k = -5/2$, el sistema es incompatible, pues $rg(A) \neq rg(B)$:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2\ ;\ B = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -15 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

- Si $k=1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2\ ;\ B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & 6 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

  Siendo $rg(A) = rg(B) = 2 <$ nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 6.x+2.y=1-3.z \\ x-y=3-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=(7-5.z)/8 \\ y=(3.z-17)/8 \end{array}\right.$$

Denotando $S_{k=1}$ al conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S_{k=1}=\left\{\left(\frac{7-5.z}{8};\frac{3.z-17}{8};z\right),\ \forall z\in\Re\right\}\subset\Re^3$$

3) Es:
$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 & 8 \\ k & 1 & k & 10 \end{bmatrix}$$

Para todo valor de "k" es $|A|=0$; así, $rg(A)<3$ para todo "k". Es:

$$rg(B)=rg\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & k & 8 \\ k & 1 & 10 \end{bmatrix}}_{W}$$

eliminamos la tercera columna de "B", por ser igual a la primera

Como $|W|=k^2-k-2$ se anula si $k=2$ ó $k=-1$, entonces:

- Si $k\neq 2$ y $k\neq -1 \Rightarrow |W|\neq 0 \Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A) \Rightarrow$ sistema incompatible.
- Si $k=-1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

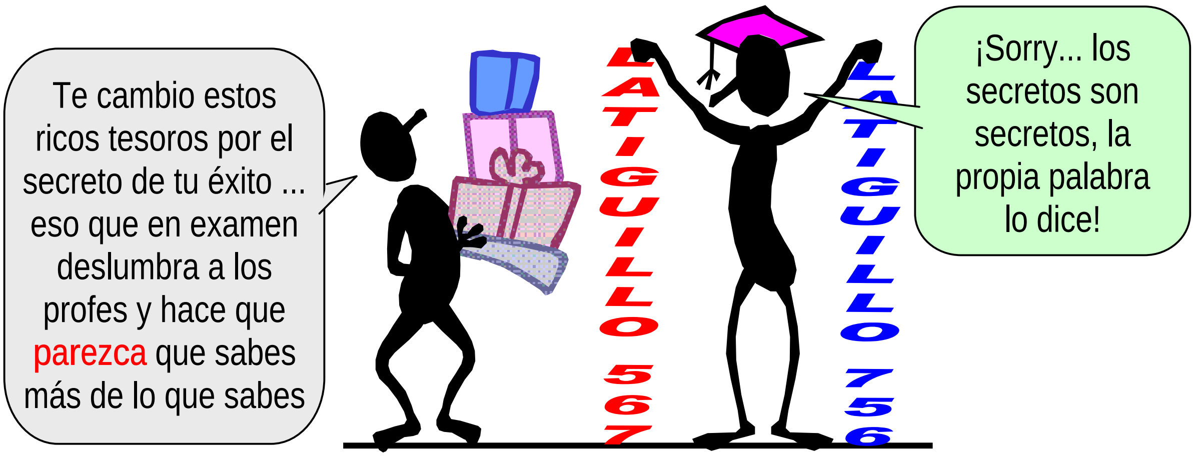
$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=1\ ;\ B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)\neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

- Si $k=2$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<n^o$ de incógnitas $\Rightarrow$ compatible e indeterminado.



FONEMATO 2.6.29

Estúdiense los siguientes sistemas lineales.

$$1)\ \begin{cases} x+y+z=k+1 \\ k.x+k.y+(k-1).z=k \\ x+k.y+z=1 \end{cases} \ ;\ 2)\ \begin{cases} -x-k.z=k \\ x+y+3.z=5 \\ 2.x+k.y=0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

El rango máximo de "A" y de "B" es 3 en los tres casos; por tanto, empezamos estudiando el rango de "A".

1) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k-1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = k-1=0 \Rightarrow k=1$$

En consecuencia:

- Si $k \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3=rg(B)=n^o$ de incógnitas; por tanto el sistema tiene solución única.
- Si $k=1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=3$$

Como $rg(A) \neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

2) $$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & 0 \end{vmatrix} = 5.k-k^2=0 \Rightarrow k=0,5$$

En consecuencia:

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 5 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=n^o$ de incógnitas; por tanto, el sistema tiene solución única, que se calcula mediante la regla de Cramer.
- Si $k=0$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<n^o$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$x=0\ ;\ y=5-3.z$$

Siendo $S_{k=0}$ el conjunto de las infinitas soluciones del sistema si $k=0$, es:

$$S_{k=0} = \{(0;5-3.z;z),\ \forall\ z \in \mathfrak{R}\} = \{(0;5;0)+(0;-3.z;z),\ \forall\ z \in \mathfrak{R}\} =$$
$$= \{(0;5;0)+z \bullet (0;-3;1),\ \forall\ z \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^3$$

- Si $k=5$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=3$$

Como $rg(A) \neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

FONEMATO 2.6.30

Discútanse los siguientes sistemas en función de los parámetros "a" y " b":

$$1)\ \begin{cases} x+(a+1).y+b.z=a \\ a.y+b.z=a+b \\ x+2.y+z=b \end{cases} ;\quad 2)\ \begin{cases} x+y=1 \\ x+2.y=a \\ x+3.y=b \\ x+4.y=2.a \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) Es:
$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & b & a \\ 0 & a & b & a+b \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array}\right]$$

Empezamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" y "b" que lo anulan: $|A|=a-b=0 \Rightarrow a=b$.

- Si $a \neq b \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=n^o$ de incógnitas $\Rightarrow$ solución única.
- Si $a=b$ ($\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a+1 & a \\ 0 & a & a \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} ;\ B=\begin{bmatrix} 1 & a+1 & a & a \\ 0 & a & a & 2.a \\ 1 & 2 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Como el máximo de "A" es 2 (pues $|A|=0$ si $a=b$) y "B" puede tener rango 3, ahora estudiamos el rango de "B". Es:

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a \\ 0 & a & 2.a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.a^2-2.a=0 \Rightarrow a=0,\,1$$

En consecuencia:

* Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow rg(B)=3 \neq rg(A) \Rightarrow$ sistema incompatible.

* Si $a=0$ es $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, siendo $rg(A)=2$ y $rg(B)=2$.

  Como $rg(A)=rg(B)=2<n^o$ de incógnitas $\Rightarrow$ compatible e indeterminado.

* Si $a=1$ es $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, siendo $rg(A)=2$ y $rg(B)=2$.

  Como $rg(A)=rg(B)=2<n^o$ de incógnitas $\Rightarrow$ compatible e indeterminado.

2) Es:
$$A/B=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 4 & 2.a \end{array}\right]$$

Empezamos con el rango de "B": siendo no nulo el menor de orden 2 indicado, será $rg(B)=2$ si son nulos los menores de orden 3 obtenidos al orlar lo:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b-2.a+1=0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & 2.a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a=2 \\ b=3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } a=2 \text{ y } b=3 \Rightarrow rg(A)=rg(B)=2=n^o \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{solución única} \\ \text{Si } a \neq 2 \text{ ó } b \neq 3 \Rightarrow rg(B)=3 \neq rg(A) \Rightarrow \text{incompatible} \end{cases}$$

FONEMATO 2.6.31

Estúdiense los siguientes sistemas lineales.

$$1)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2.x+y+k.z=1 \\ 4.x+y+k^2.z=k \end{cases} ;\ 2)\ \begin{cases} 2.x+k.y+z=2 \\ k.x-z=1 \\ x+y+2.z=1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

El rango máximo de "A" es 3, lo mismo que el de "B"; así, empezamos estudiando el rango de "A": calculamos $|A|$ y los valores de "k" que lo anulan.

1)
$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 4 & 1 & k^2 \end{vmatrix}=-k^2+3.k-2=0 \Rightarrow k=1,2$$

En consecuencia:

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=n^o$ de incógnitas; por tanto, el sistema tiene solución única.

- Si $k=1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<n^o$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1-z \\ 2.x+y&=1-z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1-z \end{cases}$$

Denotando $S_{k=1}$ al conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S_{k=1}=\{(0;1-z;z),\ \forall\ z \in \Re\}=\{(0;1;0)+(0;-z;z),\ \forall\ z \in \Re\}=$$
$$=\{(0;1;0)+z \bullet (0;-1;1),\ \forall\ z \in \Re\} \subset \Re^3$$

- Si $k=2$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=3$$

Como $rg(A) \neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

2)
$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2-2.k^2=0 \Rightarrow k=\pm 1$$

En consecuencia:

- Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=n^o$ de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado.

- Si $k=1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\ -1\end{matrix} \\ \begin{matrix}1 & 1\end{matrix} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<n^o$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{aligned} 2.x+y&=2-z\\ x&=1+z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=1+z\\ y&=-3.z \end{aligned}\right.$$

Denotando $S_{k=1}$ al conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S_{k=1}=\{(1+z;-3.z;z),\ \forall\ z\in\Re\}=$$
$$=\{(1;0;0)+z\bullet(1;-3;1),\ \forall\ z\in\Re\}\subset\Re^3$$

- Si $k=-1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=3$$

Como $rg(A)\neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

FONEMATO 2.6.32

Discuta los siguientes sistemas según los valores de los parámetros "a", "b" y "c".

$$1)\begin{cases}(a+1).x+3.y+a.z=1\\ 3.x+(a+1).y+2.z=b-1\\ a.x+2.y+a.z=2\end{cases};\quad 2)\begin{cases}a.x+y+(a+1).z=0\\ a.y+(a+1).z=0\\ x+2.z=1\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}a.x+b.y+2.z=1\\ a.x+(2.b-1).y+3.z=1\\ a.x+b.y+3.z=2.b-1\end{cases}$$

SOLUCIÓN

En los tres casos sucede que el rango máximo de "A" es 3, lo mismo que el de "B"; por tanto, empezamos estudiando el rango de "A".

1) $$|A|=\begin{vmatrix}a+1 & 3 & a\\ 3 & a+1 & 2\\ a & 2 & a\end{vmatrix}=a^2-4=0\Rightarrow a=\pm 2$$

En consecuencia:

- Si $a\neq\pm 2\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=3=rg(B)=n^{o}$ de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado: tiene solución única.
- Si $a=2$ las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 2 & b-1\\ 2 & 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

Como $rg(A)=2$ y "B" puede tener rango 3, ahora estudiamos el rango de "B". En la matriz "B", es $H=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & 2 & b-1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=4-2.b$. Por tanto:

∗ Si $b\neq 2\Rightarrow H\neq 0\Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A)\Rightarrow$ sistema incompatible.

∗ Si $b=2\Rightarrow H=0\Rightarrow rg(B)=2=rg(A)<n^{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado.

- Si $a=-2$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 2 & b-1\\ -2 & 2 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

Como $rg(A)=2$ y "B" puede tener rango 3, ahora estudiamos el rango de "B". En la matriz "B", es:

$$W=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 3 & -1 & b-1\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}=4+2.b$$

Por tanto:

∗ Si $b\neq -2\Rightarrow W\neq 0\Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A)$; así, el sistema es incompatible.

∗ Si $b=-2\Rightarrow W=0\Rightarrow rg(B)=2=rg(A)<n^{o}$ de incógnitas; así, el sistema es compatible e indeterminado.

2) $$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & a+1 \\ 0 & a & a+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1+a^2=0 \Rightarrow \text{carece de solución real}$$

Por tanto, para todo valor real de "a" es $|A| \neq 0$; en consecuencia, para todo $a \in \Re$ es $rg(A)=rg(B)=3=n^o$ de incógnitas. Así, el sistema es compatible y determinado para todo valor del parámetro $a \in \Re$, y la única solución nos la da Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a & a+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\ldots \;;\; y=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\ldots \;;\; z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\ldots$$

3) $$|A|=\begin{vmatrix} a & b & 2 \\ a & 2.b-1 & 3 \\ a & b & 3 \end{vmatrix}=a.(b-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $b \neq 1$ y $a \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=n^o$ de incógnitas; así, el sistema es compatible y determinado.
- Si $b=1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ a & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2,\ \forall\ a \;;\; B=\begin{bmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=2,\ \forall\ a$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<n^o$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

- Si $a=0$ ($\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$), es $B=\begin{bmatrix} 0 & b & 2 & 1 \\ 0 & 2.b-1 & 3 & 1 \\ 0 & b & 3 & 2.b-1 \end{bmatrix}$.

Como $rg(A) \leq 2$ y "B" puede tener rango 3, ahora estudiamos el rango de "B". En la matriz "B", es:

$$H=\begin{vmatrix} b & 2 & 1 \\ 2.b-1 & 3 & 1 \\ b & 3 & 2.b-1 \end{vmatrix}=-2.b^2+7.b-5=0 \Rightarrow b=1,\ 5/2$$

En consecuencia:

* Si $b \neq 1$ y $b \neq 5/2 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow rg(B)=3 \neq rg(A) \Rightarrow$ sistema incompatible.

* Si $b=1$, es:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2 \;;\; B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<n^o$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

* Si $b=5/2$, es:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5/2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2 \;;\; B=\begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<n^o$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

2.7 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR SUSTITUCIÓN

Para aplicar el método de sustitución trabajamos así:

1) De una ecuación cualquiera despejamos una incógnita cualquiera x_k.
2) En las restantes ecuaciones del sistema sustituimos la incógnita x_k por su valor obtenido en 1); así resulta un nuevo sistema lineal de ecuaciones que tiene una ecuación menos y en él no aparecerá la incógnita x_k.
3) Reiteramos el procedimiento.

FONEMATO 2.7.1

Resuélvanse por sustitución los siguiente sistemas lineales de ecuaciones:

$$1)\ \begin{cases} x_1+2.x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2-2.x_3=0 \\ 2.x_1+x_2-x_3=3 \end{cases} ;\quad 2)\ \begin{cases} x_1+2.x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2-2.x_3=0 \\ 2.x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2.x+3.y+4.z+5.t=1 \\ 3.x+4.y+5.z+6.t=2 \\ x+y+z+t=3 \end{cases} ;\quad 4)\ \begin{cases} x+2.y=3 \\ 2.x+y=6 \\ 3.x+y=9 \\ x+4.y=3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+2.x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2-2.x_3=0 \\ 2.x_1+x_2-x_3=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_2+2.x_3)+2.x_2+x_3=3 \\ 2.(x_2+2.x_3)+x_2-x_3=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Despejamos x_1 de la segunda ecuación: $x_1 = x_2 + 2.x_3$ (I)
Sustituimos x_1 por su valor en las demás ecuaciones

operamos y simplificamos | parametrizamos x_3

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3.x_2+3.x_3=3 \\ 3.x_2+3.x_3=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3.x_2+3.x_3=3 \Rightarrow x_2=1-x_3$$

eliminamos una de las ecuaciones, pues las dos son la misma

Para calcular x_1 en función de x_3 basta hacer $x_2=1-x_3$ en (I); resulta:

$$x_1 = x_2 + 2.x_3 = (1 - x_3) + 2.x_3 \Rightarrow x_1 = 1 + x_3$$

$\boxed{\text{es } x_2 = 1 - x_3}$

Por tanto, denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema, es: $S = \{(1 + x_3 ; 1 - x_3 ; x_3), \forall x_3 \in \Re\} \subset \Re^3$.

2) Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_2 + 2.x_3) + 2.x_2 + x_3 = 3 \\ 2.(x_2 + 2.x_3) + x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Despejamos } x_1 \text{ de la segunda ecuación: } x_1 = x_2 + 2.x_3 \\ \text{Sustituimos } x_1 \text{ por su valor en las demás ecuaciones}\end{array}}$

$\boxed{\text{operamos y simplificamos}}$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3.x_2 + 3.x_3 = 3 \\ 3.x_2 + 3.x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3.(-x_3) + 3.x_3 = 3 \Rightarrow 0 = 3 \Rightarrow \text{absurdo} \Rightarrow$$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Despejamos } x_2 \text{ de la segunda ecuación: } x_2 = -x_3 \\ \text{Sustituimos } x_2 \text{ por su valor en la primera ecuación}\end{array}}$

$\Rightarrow$ el sistema es incompatible

3) Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} 2.x + 3.y + 4.z + 5.t = 1 \\ 3.x + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2.(3 - y - z - t) + 3.y + 4.z + 5.t = 1 \\ 3.(3 - y - z - t) + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Despejamos "x" de la segunda ecuación: } x = 3 - y - z - t \\ \text{Sustituimos "x" por su valor en las demás ecuaciones}\end{array}}$

$\boxed{\text{operamos y simplificamos}}$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y + 2.z + 3.t = -5 \\ y + 2.z + 3.t = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Despejamos "y" de la primera cuación: } y = -5 - 2.z - 3.t \\ \text{Sustituimos "y" por su valor en la segunda ecuación}\end{array}}$

$$\Rightarrow (-5 - 2.z - 3.t) + 2.z + 3.t = -7 \Rightarrow 5 = 7 \Rightarrow \text{absurdo} \Rightarrow \text{incompatible}$$

4) Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2.y = 3 \\ 2.x + y = 6 \\ 3.x + y = 9 \\ x + 4.y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2.(3 - 2.y) + y = 6 \\ 3.(3 - 2.y) + y = 6 \\ (3 - 2.y) + 4.y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -3.y = 0 \\ -5.y = 0 \\ 2.y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\boxed{\text{operamos y simplificamos}}$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Despejamos "x" de la primera ecuación: } x = 3 - 2.y \text{ (I)} \\ \text{Sustituimos "x" por su valor en las demás ecuaciones}\end{array}}$

Al hacer $y = 0$ en (I) resulta $x = 3$; por tanto, la única solución del sistema es $x = 3, y = 0$.

2.8 EL MÉTODO DE GAUSS

Sea un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B". Por comodidad, como hemos hecho muchas veces, escribiremos estas matrices "superpuestas", denotando A/B. ***Por ejemplo,*** si el sistema lineal es:

$$\left.\begin{array}{r} x+2.y+3.z=-1 \\ 2.x+5.y+7.z=-2 \\ 3.x+8.y+9.z=-1 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

escribimos $A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right]$, donde la columna de los términos independientes está separada de las demás por una línea vertical.

Antes de meternos en harina conviene recordar que el Teorema de Equivalencia de Sistemas de Ecuaciones Lineales garantiza que si, por ejemplo, en el sistema (I), sustituimos la 1ª ecuación por la que resulta al sumarle miembro a miembro la 2ª y restarle miembro a miembro la 3ª, obtenemos un nuevo sistema (II), que es equivalente a (I):

$$\left.\begin{array}{r} -y+z=-2 \\ 2.x+5.y+7.z=-2 \\ 3.x+8.y+9.z=-1 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

Como sabemos, el que dos sistemas lineales sean equivalentes significa que ambos sistemas tienen las mismas soluciones.

Observa: para el sistema lineal (II), es $A_1/B_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right]$, y para expresar que A_1/B_1 se obtiene a partir de A/B sin más que hacer transformaciones elementales, escribimos:

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right] = A_1/B_1$$

Por ejemplo, si ahora hacemos:

$$A_1/B_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] = A_2/B_2$$

a la tercera fila le restamos la segunda

a la vista de A_2/B_2, tranquilamente apostamos la vida a que el siguiente sistema lineal

$$\left.\begin{array}{r} -y+z=-2 \\ 2.x+5.y+7.z=-2 \\ x+3.y+2.z=1 \end{array}\right\}$$

es equivalente al (II), por lo que es equivalente al (I).

La idea de **Gauss**, legitimada por el Teorema de Equivalencia de Sistemas de Ecuaciones Lineales, consiste en **manipular las filas** de A/B mediante **transformaciones elementales**, buscando conseguir una matriz con la siguiente **estructura chollo:**

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & .. & c_{1n} & k_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & .. & c_{2n} & k_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & .. & c_{3n} & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & .. & c_{4n} & k_4 \\ : & : & : & :: & : & : \\ 0 & 0 & 0 & :: & c_{mn} & k_m \end{array}\right]$$

FONEMATO 2.8.1

Resuelva el siguiente sistema lineal mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + 2.y + 3.z = -1 \\ 2.x + 5.y + 7.z = -2 \\ 3.x + 8.y + 9.z = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Para nuestro sistema lineal, es $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right]$, y se tiene que:

Para conseguir "ceros" en la primera columna, a la segunda fila le restamos el doble de la primera, y a la tercera fila le restamos el triple de la primera

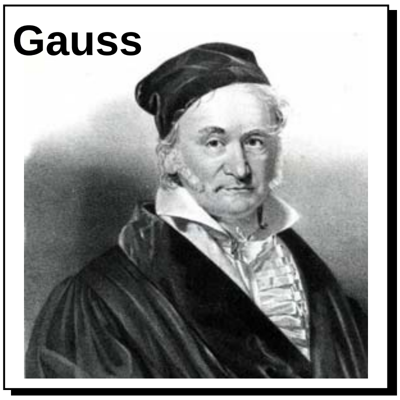
$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] = A_1/B_1$$

(tercera fila) – (doble de la segunda)

Por tanto, el sistema dado tiene las mismas soluciones **(es equivalente)** que el siguiente nuevo sistema, cuya matriz de coeficientes A_1 es **triangular:**

$$\begin{aligned} x + 2.y + 3.z &= -1 \\ y + z &= 0 \\ -2.z &= 2 \end{aligned}$$

Como $|A_1| \neq 0$, es $rg(A_1) = rg(B_1) = 3 = n^{o}$ de incógnitas, y el sistema tiene solución única, y su obtención es fácil: de la 3ª ecuación del nuevo sistema se deduce que $z = -1$, al hacer $z = -1$ en la 2ª ecuación se obtiene $y = 1$, y haciendo $y = 1$ y $z = -1$ en la 1ª ecuación resulta $x = 0$.



FONEMATO 2.8.2

Resuelva el sistema $\left\{\begin{array}{r} 2.x+3.y+4.z+5.t=1 \\ 3.x+4.y+5.z+6.t=2 \\ x+y+z+t=3 \end{array}\right\}$ mediante el método de Gauss:

SOLUCIÓN

Es:

Cambiamos la primera fila por la tercera

$$A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right]\approx$$

A la segunda fila le restamos el triple de la primera
A la tercera fila le restamos el doble de la primera

$$\approx\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

A la tercera fila le restamos la segunda

Por tanto, el sistema dado tiene las mismas soluciones que el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=3 \\ y+2.z+3.t=-7 \\ 0=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{incompatible}$$

la condición $0=2$ es absurda

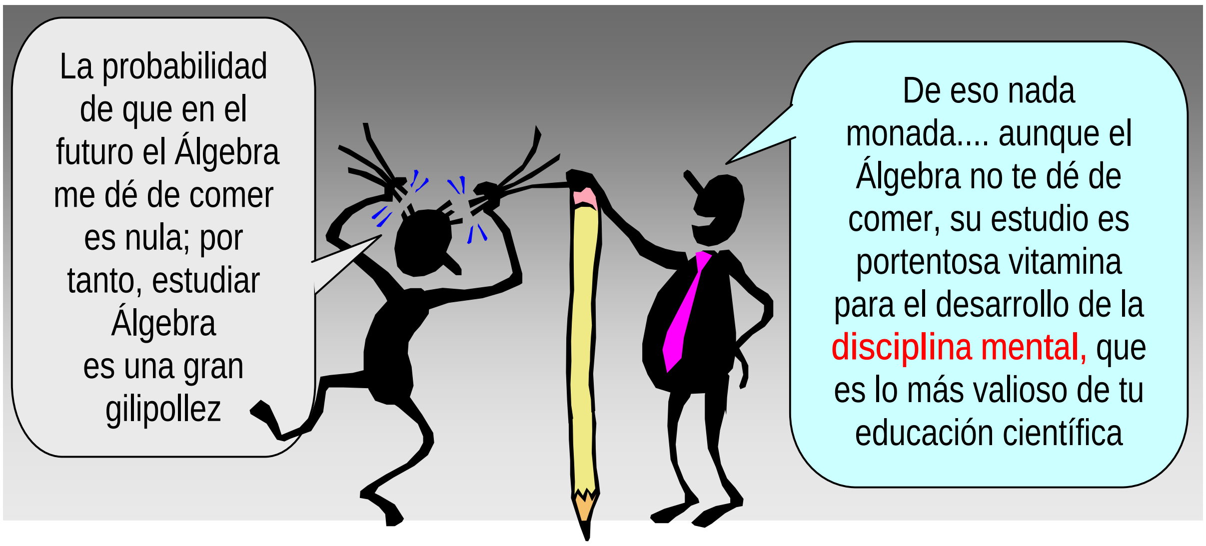
NOTA: no hay que obsesionarse con la obtención de una triangulación inferior; podríamos haber trabajado así:

A la primera fila le restamos el doble de la tercera
A la segunda fila le restamos el triple de la tercera

$$A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

A la primera fila le restamos la segunda

y habríamos tardado menos.



FONEMATO 2.8.3

Resuélvanse los siguientes sistemas lineales por el método de Gauss:

$$1)\ \begin{cases} x+2.y=3 \\ 2.x+y=6 \\ 3.x+y=9 \\ x+4.y=3 \end{cases} ;\quad 2)\ \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2.x+2.y+z=9 \\ 3.x+y+z=8 \\ x+4.y=9 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) Es:

$$\boxed{F_2-2\bullet F_1\ ;\ F_3-3\bullet F_1\ ;\ F_4-F_1}$$

$$A/B=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Pues las filas tercera y cuarta son proporcionales a la segunda, y con eso basta: no merece la pena perder el tiempo pensando en los coeficientes de proporcionalidad; o sea, no merece la pena perder el tiempo pensando en que la tercera fila se convierte en una de ceros al sumarle la segunda multiplicada por $-5/3$, y que la cuarta fila se convierte en una de ceros al sumarle la segunda multiplicada por $2/3$.

Así, el sistema dado es **equivalente** al siguiente nuevo sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+2.y=3 \\ -3.y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

2) Es:

$$\boxed{F_2-2\bullet F_1\ ;\ F_3-3\bullet F_1\ ;\ F_4-F_1}$$

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 9 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right] \approx$$

Cambiamos la segunda fila por la tercera

$$\boxed{F_4+\frac{3}{2}\bullet F_2}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{F_4-4\bullet F_3}$$

Así, el sistema dado **es equivalente** al siguiente nuevo sistema:

$$\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ -2.y-2.z=-10 \\ -z=-3 \end{array}$$

Éste tiene solución única: de la 3ª ecuación resulta $z=3$, y al sustituir en la 2ª se obtiene $y=2$, con lo que de la 1ª ecuación se obtiene $x=1$.

FONEMATO 2.8.4

Resuelva el siguiente sistema lineal por el método de Gauss:

$$x_1+2.x_2+x_3=3\ ;\ x_1-x_2-2.x_3=0\ ;\ 2.x_1+x_2-x_3=3$$

SOLUCIÓN

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\1&-1&-2&0\\2&1&-1&3\end{array}\right]\underset{F_2-F_1\ ;\ F_3-2\bullet F_1}{\approx}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&-3&-3&-3\\0&-3&-3&-3\end{array}\right]\underset{F_3-F_2}{\approx}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&-3&-3&-3\\0&0&0&0\end{array}\right]=A_1/B_1$$

Como $rg(A_1)=rg(B_1)=2<$ nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones. Parametrizando x_3, resulta:

$$\left.\begin{array}{r}x_1+2.x_2=3-x_3\\-3.x_2=-3+3.x_3\end{array}\right\}\Rightarrow\ .....\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=1+x_3\\x_2=1-x_3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\{(1+x_3;1-x_3;x_3),\forall x_3\in\Re\}=\{\ \underbrace{(1;1;0)}_{\text{solución del SLNH obtenida si } x_3=0}+x_3\bullet\underbrace{(1;-1;1)}_{\text{solución del SLH asociado al SLNH}},\forall x_3\in\Re\ \}$$

EL PROFESOR QUE CORRIGE EL EXAMEN

Todos los profesores son de la misma opinión: corregir exámenes no gusta a nadie, no es trabajo agradable enfrentarse por n-ésima vez a la tarea de leer y puntuar un montón de folios escritos por principiantes que en la mayoría de los casos no tienen ni idea y sólo escriben barbaridades y estupideces sobre el asunto de sota, caballo y rey que por j-ésima vez cae en examen. Por eso, cuando un profe se sienta a corregir exámenes no suele estar de buen humor.

Así las cosas, lo que escribamos o dibujemos en examen debe diferenciarnos positivamente de los demás, y para conseguir tal diferenciación y que al profe se le caigan los pantalones, basta escribir o dibujar pensando que no se lo sabe y por tanto hay que llevarle de la mano, explicándole todos los aspectos más relevantes de las conexiones neuronales que establezcamos en cada caso.

FONEMATO 2.8.5

Resuélvase el siguiente sistema lineal por el método de Gauss:

$$\begin{aligned} 2.x + y + z - t - 4.u &= 5 \\ y + 2.z + t - 4.u &= 1 \\ x - y - z - 2.y + u &= 1 \\ 3.x + y + 2.z - 2.t - 7.u &= 7 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$A/B = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -7 & 7 \end{array}\right] \overset{F_1 - 2\bullet F_3\ ;\ F_4 - 3\bullet F_3}{\approx} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 3 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 4 & -10 & 4 \end{array}\right] \overset{F_1 - 3\bullet F_2\ ;\ F_4 - 4\bullet F_2}{\approx}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \overset{F_4 - F_1\ ;\ F_3 + F_2}{\approx} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{F_2 + \frac{2}{3}\bullet F_1\ ;\ F_3 + \frac{1}{3}\bullet F_1}{\approx}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = A_1/B_1$$

Como $rg(A_1) = rg(B_1) = 3 <$ nº de incógnitas, hay infinitas soluciones. A la vista del menor no nulo de orden 3 indicado, parametrizamos "t" y "u". Resulta:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + t + u \\ y &= 1 - t \\ z &= 2.u \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = \{(2 + t + u ; 1 - u ; 2.t ; u ; t),\ \forall t,u \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(2;1;0;0;0) + (t + u ; t ; 2.u ; t ; u),\ \forall t,u \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{\ \underbrace{(2;1;0;0;0)}_{\text{solución del SLNH obtenida si } t = u = 0} + \underbrace{t\bullet(1;1;0;1;0) + u\bullet(1;0;2;0;1)}_{\text{solución del SLH asociado al SLNH}},\ \forall t,u \in \Re\ \}$$

FONEMATO 2.8.6

Clasifíquese el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b".

$$\begin{aligned} a.x+y+b.z&=1\\ x+a.y+b.z&=1\\ x+y+a.b.z&=b \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & 1\\ 1 & a & b & 1\\ 1 & 1 & a.b & b \end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-a & b-a^2.b & 1-a.b\\ 0 & a-1 & b-a.b & 1-b\\ 1 & 1 & a.b & b \end{array}\right]=A_1/B_1$$

A la primera ecuación le restamos la tercera multiplicada por "a"
A la segunda ecuación le restamos la tercera

Es:

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 0 & 1-a & b-a^2.b\\ 0 & a-1 & b-a.b\\ 1 & 1 & a.b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-a & b-a^2.b\\ a-1 & b-a.b \end{vmatrix}=b.(1-a).\begin{vmatrix} 1 & 1-a^2\\ -1 & 1-a \end{vmatrix}=$$

$$=b.(1-a)^2.\begin{vmatrix} 1 & 1+a\\ -1 & 1 \end{vmatrix}=b.(1-a)^2.(2+a)$$

Como $|A_1|$ se anula sólo si $a=1$ ó $a=-2$ ó $b=0$, se tiene que:

- Si $b\neq 0, a\neq 1$ y $a\neq -2\Rightarrow |A_1|\neq 0\Rightarrow rg(A_1)=rg(B_1)=3=$ nº de incógnitas; así, el sistema es compatible y determinado.
- Si $b=0$, es:

$$A_1/B_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-a & 0 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & a-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A la primera fila le sumamos la segunda

El sistema es incompatible para todo valor de "a", pues la primera ecuación es $0.x+0.y+0.z=2$, lo que resulta imposible.

- Si $a=1$, es:

$$A_1/B_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1-b\\ 0 & 0 & 0 & 1-b\\ 1 & 1 & b & b \end{array}\right]$$

Por tanto:

∗ Si $b\neq 1$ $(\Rightarrow 1-b\neq 0)$, el sistema es incompatible, pues la primera ecuación es $0.x+0.y+0.z=1-b\neq 0$, que resulta absurdo.

∗ Si $b=1$, es: $$A_1/B_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

El sistema se reduce a $x+y+z=1$, que tiene infinitas soluciones.

- Si $a = -2$, es:

$$A_1 / B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3.b & 1+2.b \\ 0 & -3 & 3.b & 1-b \\ 1 & 1 & -2.b & b \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2+b \\ 0 & -3 & 3.b & 1-b \\ 1 & 1 & -2.b & b \end{array}\right] = A_2 / B_2$$

A la primera fila le sumamos la segunda

Por tanto:

* Si $b \neq -2$ ($\Rightarrow 2 + b \neq 0$), el sistema es incompatible, pues la primera ecuación es $0.x + 0.y + 0.z = 2 + b \neq 0$, que resulta absurdo.

* Si $b = -2$, es: $$A_2 / B_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

Como $rg(A_2) = rg(B_2) = 2 <$ nº de incógnitas, el sistema el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

FONEMATO 2.8.7

Discuta y resuelva el siguiente sistema lineal según los valores de "k".

$$\begin{aligned} k.x + 2.z &= 0 \\ k.y - z &= k \\ x + 3.y + z &= 5 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{\boxed{F_1 - k \bullet F_3}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3.k & 2-k & -5.k \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{\boxed{F_1 + 3 \bullet F_2}}{\approx}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1-k & -2.k \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] = A_1/B_1$$

Es $|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1-k \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = k.(1+k)$, que se anula sólo si $k = 0$ ó $k = -1$.

- Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow rg(A_1) = 3 = rg(B_1) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene solución única (compatible y determinado), que obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2.k & 0 & -1-k \\ k & k & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A_1|} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2.k & -1-k \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A_1|} \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2.k \\ 0 & k & k \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A_1|}$$

- Si $k = -1$, es:

$$A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Como la primera ecuación es $0 = 2$, el sistema resulta incompatible.

- Si $k = 0$, se tiene que:

$$A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{r} z = 0 \\ x + 3.y + z = 5 \end{array}\right\} \underset{\boxed{\text{parametrizando "y"}}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ x = 5 - 3.y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{k=0} = \{(5 - 3.y; y; 0), \forall\, y \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{k=0} = \{ \underbrace{(5;0;0)}_{\boxed{\substack{\text{solución del SLNH} \\ \text{obtenida si } y=0}}} + \underbrace{y \bullet (-3;1;0)}_{\boxed{\substack{\text{solución del SLH} \\ \text{asociado al SLNH}}}}, \forall\, y \in \Re \}$$

FONEMATO 2.8.8

Discuta el siguiente sistema $x + y + a.z = a,\ a.x + a.y + z = 1,\ x + a.y + z = a.$

SOLUCIÓN

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{array}\right] = A_1/B_1$$

A la segunda fila le restamos la primera multiplicada por "a"
A la tercera fila le restamos la primera

Es: $$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = -(a-1).(1-a^2) = -(a-1)^2.(a+1)$$

Como $|A_1|$ se anula sólo si $a = \pm 1$, se tiene que:

- Si $a \neq \pm 1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow rg(A_1) = rg(B_1) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ compatible y determinado.
- Si $a = 1$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$

  El sistema se reduce a la ecuación $x + y + z = 1$, que tiene infinitas soluciones.
- Si $a = -1$, es: $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$

  A la primera le sumamos la segunda dividida por "2"

  El sistema es indeterminado, pues $rg(A_1) = rg(B_1) = 2 <$ nº de incógnitas.

EXITO SEGURO

Ese es el premio para l@s que educan su voluntad en el rigor: no contentarse nunca con entender a medias; dedicar el tiempo que haga falta, pero comprender, asimilar, progresar.

FONEMATO 2.8.9

Discútanse los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$1)\ \begin{cases} x+y+a.z=1 \\ x+y+b.z=a \\ x+a.y+z=a \end{cases} ;\ 2)\ \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2.y+3.z=a \\ 2.x+3.y+4.z=a \end{cases} ;\ 3)\ \begin{cases} x+y=1 \\ x+2.y=a \\ x+3.y=b \\ x+4.y=2.a \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1)
$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b & a \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & b-a & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \end{array}\right] = A_1/B_1$$

A las filas segunda y tercera les restamos la primera

Es:
$$|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix}=(b-a).(1-a)$$

Como $|A_1|$ se anula sólo si $a=1$ ó $b=a$, se tiene que:

- Si $b \neq a$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow rg(A_1)=rg(B_1)=3=$ número de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado.
- Si $a=b$, es $A_1/B_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \end{array}\right]$. Por tanto:

  * Si $a \neq 1$ ($\Rightarrow a-1 \neq 0$), el sistema es incompatible, pues segunda ecuación es $0.x+0.y+0.z=a-1 \neq 0$, que resulta absurdo.

  * Si $a=1$, es $A_1/B_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ y el sistema se reduce a $x+y+z=1$, que tiene infinitas soluciones.

- Si $a=1$ es $A_1/B_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, y el sistema se reduce a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ (b-1).z=0 \end{array}\right\} \text{(I)}$$

que tiene infinitas soluciones para todo valor de "b". En efecto:

* Si $b=1$, el sistema (I) se transforma en:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 0.z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow$$

Parametrizamos las incógnitas "z" e "y"

$$\Rightarrow S_{a=b=1}=\{(1-\lambda-\theta;\lambda;\theta), \forall \lambda,\theta \in \Re\}$$

* Si $b \neq 1$ ($\Rightarrow b-1=k \neq 0$), entonces (I) se transforma en:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ k.z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-y \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Parametrizamos la incógnita "y"

$$\Rightarrow S_{a=1;b\neq 1}=\{(1-\alpha;\alpha;0), \forall \alpha \in \Re\}$$

2) $$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&2&3&a\\2&3&4&a\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&2&3&a\\0&0&0&0\end{array}\right]=A_2/B_2$$

A la tercera fila le restamos la suma de las dos primeras

El sistema tiene infinitas soluciones para todo valor de "a", pues para todo valor de "a" ocurre que $rg(A_2)=rg(B_2)=2<$ nº de incógnitas.

3) $$A/B=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&2&a\\1&3&b\\1&4&2.a\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&a-1\\0&2&b-1\\0&3&2.a-1\end{array}\right]\approx$$

A las filas segunda, tercera y cuarta les restamos la primera

$$\approx\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&a-1\\0&0&1+b-2.a\\0&0&2-a\end{array}\right]=A_3/B_3$$

A la tercera fila le restamos el doble de la segunda
A la cuarta fila le restamos el triple de la segunda

- Si $a\neq 2\ (\Rightarrow 2-a\neq 0)$, el sistema es incompatible, pues la cuarta ecuación es $0.x+0.y=(2-a)\neq 0$, que resulta absurdo.
- Si $a=2$, es $A_3/B_3=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&1\\0&0&b-3\\0&0&0\end{array}\right]$. Por tanto:

  * Si $b\neq 3\ (\Rightarrow b-3\neq 0)$, el sistema es incompatible, pues la tercera ecuación es $0.x+0.y=(b-3)\neq 0$, que resulta imposible.

  * Si $b=3$, es $A_3/B_3=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right]$.

    El sistema es compatible y determinado, pues $rg(A_3)=rg(B_3)=2=$ número de incógnitas.

FONEMATO 2.8.10

Discútase el siguiente sistema lineal según los valores del parámetro "a".

$$(a-2).x - y + z = 0 \;;\; x + (2.a-1).y - a.z = 0 \;;\; x + a.y - z = 0$$

SOLUCIÓN

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} a-2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2.a-1 & -a & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\boxed{F_1-(a-2)\bullet F_3 \;;\; F_2-F_3}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1-a.(a-2) & 1+(a-2) & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\boxed{\text{Simplificamos}}}{=}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -(a-1)^2 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\boxed{F_1+(a-1)\bullet F_2}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & (a-1).(2-a) & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \end{array}\right] = A_1/B_1$$

Es $|A_1| = (a-1)^2.(a-2)$, que sólo se anula si $a=1$ ó $a=2$.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow rg(A_1) = 3 = rg(B_1) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado: sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Si $a = 1$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

  El nuevo sistema se reduce a la ecuación $x + y - z = 0$, que tiene infinitas soluciones.

  Parametrizando "x" e "y", resulta $z = x + y$; por tanto, el conjunto $S_{a=1}$ de soluciones es

$$S_{a=1} = \{(\lambda;\theta;\lambda+\theta), \forall\lambda,\theta \in \Re\} = \{(\lambda;0;\lambda) + (0;\theta;\theta), \forall\lambda,\theta \in \Re\} =$$
$$= \{\lambda \bullet (1;0;1) + \theta \bullet (0;1;1), \forall\lambda,\theta \in \Re\}$$

  La terna $(1;0;1)$ es solución del SLH (se obtiene al hacer $\lambda = 1, \theta = 0$), y la terna $(0;1;1)$ también lo es (se obtiene al hacer $\lambda = 0, \theta = 1$); así, si $a = 1$, toda solución del SLH es combinación lineal de las soluciones $(1;0;1)$ y $(0;1;1)$.

- Si $a = 2$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$, por lo que el sistema se reduce a:

$$\left.\begin{array}{r} y - z = 0 \\ x + 2.y - z = 0 \end{array}\right\} \underset{\boxed{\text{Tiene infinitas soluciones; parametrizamos "z"}}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = z \end{array}\right.$$

  El conjunto $S_{a=2}$ de soluciones es:

$$S_{a=2} = \{(-\alpha;\alpha;\alpha), \forall\alpha \in \Re\} = \{\alpha \bullet (-1;1;1), \forall\alpha \in \Re\}$$

  Si $a = 2$, toda solución del SLH es combinación lineal de la solución $(-1;1;1)$.

2.9 EL PROBLEMA "INVERSO"

Supuesto que ya somos capaces de calcular el conjunto de soluciones de un sistema lineal dado (problema directo), nos planteamos lo contrario: determinar un sistema lineal de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones es conocido.

El siguiente ejercicio ilustra el asunto.

FONEMATO 2.9.1

1) Determínense tres sistemas lineales cuyo conjunto de soluciones sea S_1.

$$S_1 = \{(a+b\,;\, a-b\,;\, 2.a-b\,;\, b),\ \forall a,b \in \Re\}$$

2) Determínese un sistema lineal cuyo conjunto de soluciones sea S_2.

$$S_2 = \{(a+b+2.c\,;\, a-b\,;\, 2.a-b+c\,;\, b+c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$$

SOLUCIÓN

Como S_1 y S_2 son subconjuntos de $\Re^4$, todos los sistemas lineales buscados tienen 4 incógnitas, que denotamos x_1, x_2, x_3 y x_4.

1) Al escribir

$$S_1 = \{(a+b\,;\, a-b\,;\, 2.a-b\,;\, b),\ \forall a,b \in \Re\} \subset \Re^4$$

se dice que:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a+b \\ x_2 &= a-b \\ x_3 &= 2.a-b \\ x_4 &= b \end{aligned}\right\},\ \forall a,b \in \Re$$

Para determinar un SLH cuyo conjunto de soluciones sea S_1, basta eliminar los parámetros "a" y "b" (para eliminar un parámetro basta despejarlo de una de las ecuaciones y sustituirlo por su valor en las otras ecuaciones):

de la 4ª ecuación despejamos "b" $(b = x_4)$ y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a+b \\ x_2 &= a-b \\ x_3 &= 2.a-b \\ x_4 &= b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= a+x_4 \\ x_2 &= a-x_4 \\ x_3 &= 2.a-x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= (x_2+x_4)+x_4 \\ x_3 &= 2.(x_2+x_4)-x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

de la 2ª ecuación despejamos "a" $(a = x_2 + x_4)$ y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2.x_4 &= 0 \\ 2.x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

después de operar y ordenar

Para determinar otros de los infinitos sistemas lineales homogéneos cuyo conjunto de soluciones es S_1, nos servimos del sistema (I) y del Teorema de Equivalencia de Sistemas Lineales, que garantiza que es equivalente (tiene las mismas soluciones) al sistema (I) el sistema que se obtiene, por ejemplo, al sustituir la primera ecuación de (I) por la que resulta al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones de (I); o sea, el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2.x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

También tiene las mismas soluciones que el sistema (I) el sistema obtenido, por ejemplo, al sustituir la segunda ecuación de (I) por la que resulta al restar miembro a miembro las dos ecuaciones de (I); o sea, el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2.x_4 &= 0 \\ x_1 - 3.x_2 + x_3 - 3.x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2) Al escribir $S_2 = \{(a+b+2.c\,;\,a-b\,;\,2.a-b+c\,;\,b+c),\ \forall a,b,c \in \Re\} \subset \Re^4$, se dice que:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a+b+2.c \\ x_2 &= a-b \\ x_3 &= 2.a-b+c \\ x_4 &= b+c \end{aligned}\right\},\ \forall a,b,c \in \Re$$

Para determinar un SLH cuyo conjunto de soluciones sea S_2, eliminamos los parámetros "a", "b" y "c":

de la 2ª ecuación despejamos "a" ($a = b + x_2$) y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a+b+2.c \\ x_2 &= a-b \\ x_3 &= 2.a-b+c \\ x_4 &= b+c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= (b+x_2)+b+2.c \\ x_3 &= 2.(b+x_2)-b+c \\ x_4 &= b+c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2.b+x_2+2.c \\ x_3 &= b+2.x_2+c \\ x_4 &= b+c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

después de operar y ordenar

de la 3ª ecuación despejamos "b" ($b = x_4 - c$) y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2.(x_4-c)+x_2+2.c \\ x_3 &= (x_4-c)+2.x_2+c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2.x_4+x_2 \\ x_3 &= x_4+2.x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Al operar, la "c" desaparece del mapa, se volatiliza

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2.x_4 &= 0 \\ 2.x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

¡Sorpréeeeesa!: el sistema lineal homogéneo (II) es el mismo que el (I); por tanto, como las soluciones de un sistema de ecuaciones son las que son, al escribir

$$S_1 = \{(a+b\,;\,a-b\,;\,2.a-b\,;\,b),\ \forall a,b \in \Re\} \subset \Re^4$$

se dice lo mismo que al escribir

$$S_2 = \{(a+b+2.c\,;\,a-b\,;\,2.a-b+c\,;\,b+c),\ \forall a,b,c \in \Re\} \subset \Re^4$$

O sea, a pesar de que nadie lo diría a primera vista, los conjuntos S_1 y S_2 son el mismo... y como en S_2 hay un protagonista (el parámetro "c") que no está en S_1, deducimos que dicho protagonista es irrelevante y superfluo: es decir, al escribir

$$S_2=\{(a+b+2.c\ ;\ a-b\ ;\ 2.a-b+c\ ;\ b+c),\ \forall a,b,c\in\Re\}$$

no se añade NADA a lo dicho al escribir:

$$S_1=\{(a+b\ ;\ a-b\ ;\ 2.a-b\ ;\ b),\ \forall a,b\in\Re\}$$

De otro modo

Hablando en términos de información (recuerda que las cajas llenas de números ordenados en filas y columnas se han inventado porque son capaces de almacenar "información"), cabe decir que el conjunto S_1 contiene toda la información que puede obtenerse combinando linealmente la información contenida en los cuartetos $(1;1;2;0)$ y $(1;-1;-1;1)$, pues:

$$\begin{aligned}S_1&=\{(a+b\ ;\ a-b\ ;\ 2.a-b\ ;\ b),\ \forall a,b\in\Re\}=\\&=\{(a\ ;\ a\ ;\ 2.a\ ;\ 0)+(b\ ;\ -b\ ;\ -b\ ;\ b),\ \forall a,b\in\Re\}=\\&=\{a\bullet(1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 0)+b\bullet(1\ ;\ -1\ ;\ -1\ ;\ 1),\ \forall a,b\in\Re\}\end{aligned}$$

Del mismo modo, el conjunto S_2 contiene toda la información que puede obtenerse combinando linealmente la información contenida en los cuartetos $(1;1;2;0)$, $(1;-1;-1;1)$ y $(2;0;1;1)$, pues:

$$\begin{aligned}S_2&=\{(a+b+2.c;a-b;2.a-b+c;b+c),\ \forall a,b,c\in\Re\}=\\&=\{(a;a;2.a;0)+(b;-b;-b;b)+(2.c;0;c;c),\ \forall a,b,c\in\Re\}=\\&=\{a\bullet(1;1;2;0)+b\bullet(1;-1;-1;1)+c\bullet(2;0;1;1),\ \forall a,b,c\in\Re\}\end{aligned}$$

Por tanto, como S_1 y S_2 son el mismo conjunto, cabe decir que la información que contiene el cuarteto $(2;0;1;1)$ no añade o aporta nada nuevo a la información contenida en $(1;1;2;0)$ y $(1;-1;-1;1)$... y sucede tan sorprendente evento porque $(2;0;1;1)$ es combinación lineal de $(1;1;2;0)$ y $(1;-1;-1;1)$; o sea, es posible encontrar dos números reales α_1 y α_2 tales que:

$$(2;0;1;1)=\alpha_1\bullet(1;1;2;0)+\alpha_2\bullet(1;-1;-1;1)$$

En efecto:

$$(2;0;1;1)=\alpha_1\bullet(1;1;2;0)+\alpha_2\bullet(1;-1;-1;1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}2=\alpha_1+\alpha_2\\0=\alpha_1-\alpha_2\\1=2.\alpha_1-\alpha_2\\1=\alpha_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\alpha_1=1\\\alpha_2=1\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(2;0;1;1)=1\bullet(1;1;2;0)+1\bullet(1;-1;-1;1)$$

FONEMATO 2.9.2

Determínese un sistema lineal cuyo conjunto de soluciones sea "S".

$$S=\{(a+b+2.c\ ;\ a-b\ ;\ 2.a-b+c\ ;\ b-c),\ \forall a,b,c\in\Re\}$$

SOLUCIÓN

Como "S" es subconjunto de $\Re^4$, el sistema lineal buscado tiene 4 incógnitas, que denotamos x_1, x_2, x_3 y x_4. Así, al escribir

$$S=\{(a+b+2.c\ ;\ a-b\ ;\ 2.a-b+c\ ;\ b-c),\ \forall a,b,c\in\Re\}\subset\Re^4$$

se dice que $\begin{Bmatrix} x_1=a+b+2.c \\ x_2=a-b \\ x_3=2.a-b+c \\ x_4=b-c \end{Bmatrix},\ \forall a,b,c\in\Re$.

Para determinar un SLH cuyo conjunto de soluciones sea "S", eliminamos los parámetros "a", "b" y "c":

de la 2ª ecuación despejamos "a" $(a=b+x_2)$ y sustituimos en las demás

$$\begin{Bmatrix} x_1=a+b+2.c \\ x_2=a-b \\ x_3=2.a-b+c \\ x_4=b-c \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} x_1=(b+x_2)+b+2.c \\ x_3=2.(b+x_2)-b+c \\ x_4=b-c \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} x_1=2.b+x_2+2.c \\ x_3=b+2.x_2+c \\ x_4=b-c \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

operamos y ordenamos

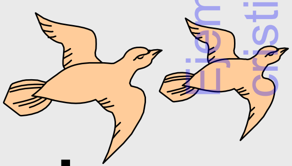
de la 3ª ecuación despejamos "b" $(b=x_4+c)$ y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix} x_1=2.(x_4+c)+x_2+2.c \\ x_3=(x_4+c)+2.x_2+c \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} x_1=2.x_4+x_2+4.c \\ x_3=x_4+2.x_2+2.c \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

de la segunda ecuación despejamos "c" $(c=(x_3-x_4-2.x_2)/2)$ y sustituimos en la primera ecuación

$$\Rightarrow x_1=2.x_4+x_2+4.\frac{x_3-x_4-2.x_2}{2}\Rightarrow x_1+3.x_2-2.x_3+0.x_4=0$$

El primer objetivo de quien no se chupa el dedo es averiguar cuanto antes si se ha equivocado de Carrera o no... y eso te lo dicen las Matemáticas, no las asignaturas fáciles que aprueba todo el mundo.



FONEMATO 2.9.3

Determine dos sistemas lineales cuyo conjunto de soluciones sea "S".

$$S=\{(1+a+b\,;\,a-b\,;\,2.a-b\,;\,2+b),\ \forall a,b\in\Re\}$$

SOLUCIÓN

Como "S" es subconjunto de $\Re^4$, el sistema lineal buscado tiene 4 incógnitas, que denotamos x_1, x_2, x_3 y x_4.

Al escribir

$$S=\{(1+a+b\,;\,a-b\,;\,2.a-b\,;\,2+b),\ \forall a,b\in\Re\}\subset\Re^4$$

se dice que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1+a+b \\ x_2=a-b \\ x_3=2.a-b \\ x_4=2+b \end{array}\right\},\ \forall a,b\in\Re$$

Para determinar un sistema lineal cuyo conjunto de soluciones sea "S", eliminamos los parámetros "a" y "b":

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1+a+b \\ x_2=a-b \\ x_3=2.a-b \\ x_4=2+b \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1=1+a+(x_4-2) \\ x_2=a-(x_4-2) \\ x_3=2.a-(x_4-2) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

de la 4ª ecuación despejamos "b" $(b=x_4-2)$ y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1=-1+a+x_4 \\ x_2=a-x_4+2 \\ x_3=2.a-x_4+2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

simplificamos lo que se pueda

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_2=(1+x_1-x_4)-x_4+2 \\ x_3=2.(1+x_1-x_4)-x_4+2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

de la 1ª ecuación despejamos "a" $(a=1+x_1-x_4)$ y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1-x_2-2.x_4=-3 \\ 2.x_1-x_3-3.x_4=-4 \end{array}\right\}\quad(I)$$

operamos y ordenamos

El Teorema de Equivalencia de Sistemas Lineales garantiza que tiene las mismas soluciones que (I) el SLH obtenido, por ejemplo, sustituyendo la 1ª ecuación de (I) por la que resulta al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones de (I):

$$\begin{array}{c} 3.x_1-x_2-x_3-5.x_4=-7 \\ 2.x_1-x_3-3.x_4=-4 \end{array}$$

2.10. COMBINACIÓN LINEAL DE MATRICES

Recuerda: siendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares y $A_1, \ldots, A_n$ matrices equidimensionales, si la matriz "W" es tal que $W = \alpha_1 \bullet A_1 + \alpha_2 \bullet A_2 + \ldots + \alpha_n \bullet A_n$, entonces "W" es suma de una matriz $\alpha_1 \bullet A_1$ que es proporcional a A_1, y de una matriz $\alpha_2 \bullet A_2$ que es proporcional a A_2... y de una matriz $\alpha_n \bullet A_n$ que es proporcional a A_n; por ello, cabe decir que "W" es suma de matrices que respectivamente son proporcionales a $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Recuerda: en el lenguaje del Álgebra de "lo Lineal", para expresar de modo rápido que "W" es suma de matrices proporcionales a $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se dice que "W" es combinación lineal de $A_1, A_2, \ldots, A_n$... y también podría decirse que "W" es combinación proporcional de $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Ahora que somos auténticos artistas resolviendo sistemas de ecuaciones lineales, podemos hincarle el diente al problema de averiguar si una matriz dada es combinación lineal de otras, pues dicho problema se reduce a averiguar si un cierto sistema lineal de ecuaciones tiene solución o no.

- ***Por ejemplo,*** si

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ;\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} ;\ W = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

para averiguar si "W" es CL de A_1 y A_2 debemos averiguar si es posible encontrar dos números reales α_1 y α_2 tales que $W = \alpha_1 \bullet A_1 + \alpha_2 \bullet A_2$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \alpha_1 \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 = 2.\alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 = 3.\alpha_1 + 2.\alpha_2 \\ 7 = \alpha_1 + 5.\alpha_2 \\ 6 = 2.\alpha_1 + 2.\alpha_2 \end{array} \right\} \text{(I)}$$

Así, para saber si "W" es combinación lineal de A_1 y A_2 basta averiguar si el sistema lineal no homogéneo (I) tiene solución. Si te molestas en ello, puedes comprobar que (I) tiene solución única, que es $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1$; por tanto, la matriz "W" es combinación lineal de A_1 y A_2, ya que $W = 2 \bullet A_1 + 1 \bullet A_2$.

- ***Por ejemplo,*** si $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ y $W = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, la matriz "W" no es combinación lineal de A_1 y A_2, pues no es posible encontrar dos números reales α_1 y α_2 tales que $W = \alpha_1 \bullet A_1 + \alpha_2 \bullet A_2$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \alpha_1 \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 = 2.\alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 = 3.\alpha_1 + 2.\alpha_2 \\ 7 = \alpha_1 + 5.\alpha_2 \\ 6 = 2.\alpha_1 + 7.\alpha_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{carece de} \\ \text{solución} \end{array} \right.$$

pues las matrices de coeficientes y ampliada tienen distinto rango

- ***Por ejemplo,*** si $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $W = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, la matriz "W" es combinación lineal de las matrices A_1, A_2 y A_3, pues la ecuación matricial $W = \alpha_1 \bullet A_1 + \alpha_2 \bullet A_2 + \alpha_3 \bullet A_3$ nos conduce a un sistema lineal no homogéneo que tiene solución:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \alpha_1 \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 4 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_2 + \alpha_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_2 + \alpha_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4 - \alpha_3 \\ \alpha_2 = 5 - \alpha_3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{parametrizamos la incógnita } \alpha_3}$

Así, para todo valor de α_3, es:

$$W = (4 - \alpha_3) \bullet A_1 + (5 - \alpha_3) \bullet A_2 + \alpha_3 \bullet A_3.$$

Puedes comprobar que, por ejemplo, si $\alpha_3 = 3$, resulta:

$$W = (4 - 3) \bullet A_1 + (5 - 3) \bullet A_2 + 3 \bullet A_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W = 1 \bullet A_1 + 2 \bullet A_2 + 3 \bullet A_3$$

Si, por ejemplo, $\alpha_3 = 0$, resulta:

$$W = (4 - 0) \bullet A_1 + (5 - 0) \bullet A_2 + 0 \bullet A_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W = 4 \bullet A_1 + 5 \bullet A_2 + 0 \bullet A_3$$

Combinación lineal de líneas de una matriz

Si "A" es una matriz de orden $m \times n$, cabe decir que "A" está formada por "m" matrices fila de orden $1 \times n$, o por "n" matrices columna de orden $m \times 1$.

Por ejemplo, cabe decir que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

está formada por las siguientes cuatro matrices fila de orden 1×3:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \; ; \; F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \; ; \; F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

o por las siguientes tres matrices columna de orden 4×1:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; C_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Como las líneas (filas o columnas) de una matriz "A" también son matrices, cabe plantearse si una cierta línea de "A" es o no combinación lineal de otras líneas paralelas a ella. El asunto se lidia como acabamos de ver. ***Por ejemplo,*** en la matriz dada, la 3ª columna no es combinación lineal de las dos primeras columnas, pues la ecuación matricial $C_3 = \alpha_1 \bullet C_1 + \alpha_2 \bullet C_2$ nos conduce a un SLNH incompatible (carece de solución):

$$\begin{bmatrix}5\\1\\4\\7\end{bmatrix}=\alpha_1\bullet\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\bullet\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}5=2.\alpha_1+\alpha_2\\1=\alpha_2\\4=\alpha_1+2.\alpha_2\\7=\alpha_2\end{Bmatrix}\Rightarrow \text{carece de solución}$$

Sin embargo, la 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras filas, pues la ecuación matricial $F_3=\gamma_1\bullet F_1+\gamma_2\bullet F_2$ nos conduce a un SLNH compatible:

$$[1\quad 2\quad 4]=\gamma_1\bullet[2\quad 1\quad 5]+\gamma_2\bullet[0\quad 1\quad 1]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}1=2.\gamma_1\\2=\gamma_1+\gamma_2\\4=5.\gamma_1+\gamma_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\gamma_1=1/2\\\gamma_2=3/2\end{Bmatrix}\Rightarrow F_3=\frac{1}{2}\bullet F_1+\frac{3}{2}\bullet F_2$$

Nota bene:

1) Como sabemos, el rango de una matriz no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos otras paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera... y eso puede expresarse diciendo que el rango de una matriz no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos una combinación lineal de otras paralelas a ella.
2) Como sabemos, si una línea de "A" es suma de otras paralelas a ella multiplicadas por ciertos números, podemos eliminar dicha línea sin que se altere el rango de la matriz... y eso puede expresarse diciendo que si una línea de la matriz "A" es combinación lineal de otras paralelas a ella, podemos eliminar dicha línea sin que se altere el rango de la matriz.

2.11 LO QUE SE NOS VIENE ENCIMA

En los ejercicios 2.6.3 y 2.6.5 vimos respectivamente que los subconjuntos S_H y S_{NH} de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones de los sistemas lineales

$$\underbrace{\begin{array}{r} 6.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 = 0 \\ 2.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ 8.x_1 - 2.x_3 = 0 \end{array}}_{\text{HOMOGÉNEO}} \; ; \; \underbrace{\begin{array}{r} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{array}}_{\text{NO HOMOGÉNEO}}$$

son:

$$S_H = \{(\lambda;3.\lambda;4.\lambda),\ \forall\lambda\in\Re\}\subset\Re^3$$
$$S_{NH} = \{(1+\lambda;1-\lambda;\lambda),\ \forall\lambda\in\Re\}\subset\Re^3$$

Observa: la estructura física del conjunto S_H es tal que podemos sacar factor común el parámetro λ:

$$S_H = \{(\lambda;3.\lambda;4.\lambda),\ \forall\lambda\in\Re\} = \{\lambda\bullet(1;3;4),\ \forall\lambda\in\Re\}$$

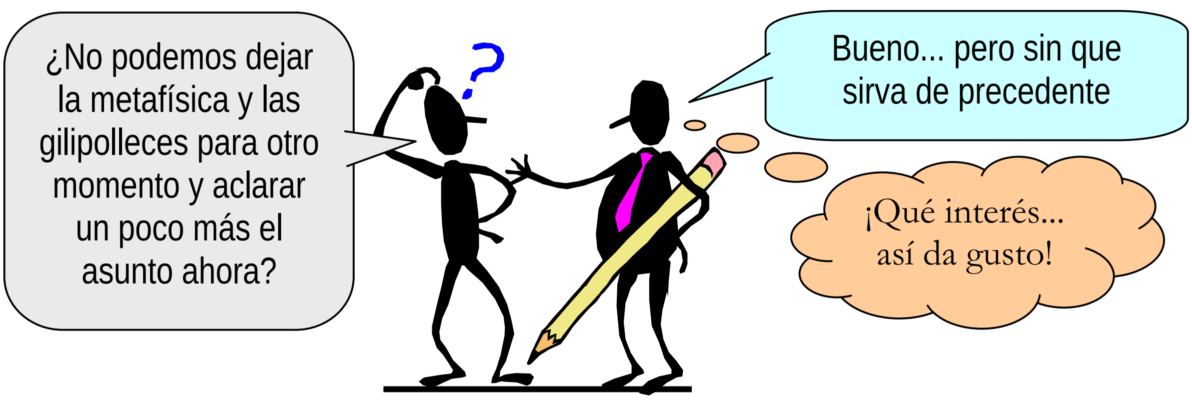
Pero no es posible hacer eso con el conjunto $S_{NH} = \{(1+\lambda;1-\lambda;\lambda),\ \forall\lambda\in\Re\}$, debido a la presencia del número 1 en la terna $(1+\lambda;1-\lambda;\lambda)$. Por supuesto, no vale escribir $S_{NH} = \left\{\lambda\bullet(\frac{1}{\lambda}+1;\frac{1}{\lambda}-1;1),\ \forall\lambda\in\Re\right\}$.

Pregunta:

¿Por qué la estructura física de S_H es distinta de la de S_{NH}?

Respuesta:

Porque la estructura metafísica de ambos conjuntos es distinta; o sea, en el interior, dentro, en lo más profundo, en lo más hondo, en lo más primario y primitivo, en lo que va en los genes, allá donde los ojos no ven y la razón lo ve todo .... en el alma de S_H hay algo, una marca, una señal, un estigma, un don, una virtud, una luz... un algo que no está en el alma de S_{NH}. Ese algo es tan tremendamente diferenciador que hace que S_H pertenezca a una categoría especial de conjuntos, a una raza especial, una elite, una casta, un linaje, un muy selecto club... y el pobre S_{NH}, por carecer de ese algo, es un paria del Álgebra Lineal, un pobre desgraciado que chupará poca cámara.



En el Tema 1 (epígrafes 1.5 y 1.6) aprendimos que:

- Si $C=\{c_{ij}\}$ y $D=\{d_{ij}\}$ son matrices del conjunto $M_{m\times n}$ de las matrices de "m" filas y "n" columnas, su **suma** es $C+D=\{c_{ij}+d_{ij}\}$... y vimos que:

  1) $C+D\in M_{m\times n}$
  2) La suma es conmutativa: $C+D=D+C$
  3) La suma es asociativa: $C+(D+E)=(C+D)+E$
  4) La suma admite elemento neutro: $C+0=0+C=C$
  5) Cada matriz tiene simétrica respecto de la suma: $C+(-C)=(-C)+C=0$

- Si α es un escalar ($\alpha\in\Re$) y $C\in M_{m\times n}$, el **producto** del escalar "α" por la matriz "C" es $\alpha\bullet C=\{\alpha.c_{ij}\}$... y vimos que:

  6) $\alpha\bullet C\in M_{m\times n}$
  7) $\alpha\bullet(C+D)=\alpha\bullet C+\alpha\bullet D$
  8) $(\alpha+\beta)\bullet C=\alpha\bullet C+\beta\bullet C$
  9) $\alpha\bullet(\beta\bullet C)=(\alpha.\beta)\bullet C$

También indicamos que para expresar de modo rápido que se verifica esta catarata de propiedades, en el Tema 3 diremos que el conjunto $M_{m\times n}$ es un **espacio vectorial...** y eso valía igual para el conjunto $\Re^n$, pues $\Re^n\equiv M_{1\times n}$.

Considera el espacio vectorial $\Re^3$ y, en él, los subconjuntos S_H y S_{NH} que forman las respectivas soluciones de los sistemas lineales ya indicados. **Atent@:** si las operaciones suma y producto por un escalar se restringen al subconjunto S_H de $\Re^3$, en S_H se verifican **todas** las propiedades anteriores, pues si U, V y W son elementos de S_H (soluciones del SLH), sucede que:

1) $U+V\in S_H$
2) $U+V=V+U$
3) $U+(V+W)=(U+V)+W$
4) La suma admite elemento neutro: es la solución trivial del SLH
5) $U+(-U)=(-U)+U=0\equiv$ solución trivial
6) $\alpha\bullet U\in S_H$
7) $\alpha\bullet(U+V)=\alpha\bullet U+\alpha\bullet V$
8) $(\alpha+\beta)\bullet U=\alpha\bullet U+\beta\bullet U$
9) $\alpha\bullet(\beta\bullet U)=(\alpha.\beta)\bullet U$

Para expresar de modo rápido que así son las cosas, en el Tema 4 diremos que $S_H\subset\Re^3$ es un **subespacio vectorial** del espacio vectorial de $\Re^3$. Si la suma y el producto por un escalar se restringen al subconjunto S_{NH} de $\Re^3$, en S_{NH} **NO** se verifican **todas** las propiedades en cuestión, pues la suma de dos soluciones de un SLNH no es solución del SLH ($\Rightarrow$ falla la 1ª propiedad), el producto de una solución de un SLNH por un número real no es solución del SLNH ($\Rightarrow$ falla la 6ª) y la suma no tiene elemento neutro en el conjunto S_{NH}, pues un SLNH nunca tiene la solución trivial ($\Rightarrow$ falla la 4ª); por eso, el conjunto S_{NH} **no es** un **subespacio vectorial** del **espacio vectorial** $\Re^3$.

A continuación, para ilustrarte respecto a lo que se nos viene encima, ponemos ejemplos de ejercicios que lidiaremos más adelante ...... y serán muy fáciles (difíciles) de resolver si tienes (no tienes) claro el asunto de los sistemas lineales. Los ejemplos pretenden hacerte ver que la canción del Álgebra de lo Lineal (que habla de espacios y subespacios vectoriales, sistemas de generadores, bases, cambios de base, aplicaciones lineales, endomorfismos, formas bilineales y cuadráticas), a la hora de la verdad, cuando miramos lo que escribimos en el papel, se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que a su vez, como hemos aprendido en este Tema, se reduce a poco más que calcular rangos de matrices.

EJEMPLO 1

En el espacio vectorial $\Re^3$, calcúlense la dimensión y una base del subespacio "S" de $\Re^3$ que forman las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 &= 0 \\ 2.x_1 - 2.x_2 + x_3 &= 0 \\ 8.x_1 - 2.x_3 &= 0 \end{aligned}$$

COMENTARIO

En el ejercicio intervienen los siguientes protagonistas:

1) El espacio vectorial $\Re^3$.
2) El subespacio vectorial de $\Re^3$ que forman las infinitas ternas que son solución del SLH dado.

Así, piden que calculemos la dimensión (?) del subespacio "S" y una base (?) de "S"... y la cosa no puede ser más tonta: sin acojonarnos por la jerga, resolvemos el SLH dado, determinando el conjunto "S" que forman sus infinitas soluciones. Como el sistema es el del ejercicio 2.6.3, obtenemos:

$$S = \{(\lambda;3.\lambda;4.\lambda),\ \forall\lambda\in\Re\} \underset{\uparrow}{=} \{\lambda\bullet(1;3;4),\ \forall\lambda\in\Re\} \subset \Re^3$$

sacamos factor común el parámetro λ

A continuación, con la mayor naturalidad, disimulando que no entendemos un pimiento de piquillo, diremos:

a) La dimensión de "S" es 1... pues para resolver el SLH hemos parametrizado una incógnita.

b) El vector $\overline{h} = (1;3;4)$ es una base del subespacio "S"... por cierto, ¿qué es un vector?

Y colorín colorado, sin entender nada de nada, habremos resuelto la papeleta... y parecerá que sabemos algo.

EJEMPLO 2

Calcule la dimensión y una base del núcleo de la aplicación lineal $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

COMENTARIO

La densidad conceptual del ejercicio es mayor que la del anterior, pues ahora intervienen los siguientes protagonistas:

1) Una aplicación lineal (?) cuyo nombre es "f".

2) El espacio vectorial $\Re^3$ dos veces (una vez a la izquierda de una flechita y otra vez a la derecha de la flechita).

3) Una matriz que llamada "A" de la que nos dicen que está asociada a "f" respecto de la base canónica (?) de $\Re^3$... ¿qué tendrá la base canónica para hacerse acreedora de un nombre tan raro? ¿en qué consistirá esa asociación? ¿será mafiosa? ¿será pía?.

Así las cosas, piden que determinemos la dimensión y una base de un ente que se llama núcleo de "f"... ¿se parecerá al núcleo de "f" al de las células, o más bien al de los átomos?

A pesar de tan elevada densidad conceptual, la cosa no puede ser más tonta: pasando de todo, sin que se nos aflojen las piernas por la espesa jerga del Álgebra Lineal, calculamos el conjunto "S" que forman las soluciones del SLH cuya matriz de coeficientes es "A"... y como "A" es la matriz de los coeficientes del SLH del ejercicio 2.6.3, obtenemos:

$$S = \{(\lambda;3.\lambda;4.\lambda),\ \forall \lambda \in \Re\} = \{\lambda \bullet (1;3;4),\ \forall \lambda \in \Re\} \subset \Re^3$$

sacamos factor común el parámetro λ

A continuación, con la mayor displicencia, disimulando que no entendemos un pimiento de Padrón, diremos:

a) El núcleo de la aplicación lineal "f" es el conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del SLH resuelto.

b) La dimensión del núcleo es 1... pues para resolver el sistema hemos parametrizado una incógnita.

c) El vector $\overline{h} = (1;3;4)$ es una base del núcleo de "f".

Y colorín colorado, habremos resuelto la papeleta sin entender nada de nada... y de nuevo parecerá que sabemos algo.

NOTA

Aunque al final de cada ejemplo hemos dicho que el vector (1;3;4), obtenido al hacer $\lambda = 1$, es una base del subespacio Fulano o del subespacio Mengano, no debe pensarse que la solución (1;3;4) tiene algo que no tienen otras soluciones del SLH del ejercicio 2.6.3: podríamos asesinar a (1;3;4) y asignar a otra solución no trivial del SLH el papel desempeñado por (1;3;4) hasta el instante del crimen... y nadie echaría de menos a (1;3;4), pues la nueva solución elegida haría tan buen papel como la finada.

Suponemos que has observado el elegante sombrero que siempre luce el nombre $\overline{h}$ de la solución (1;3;4)... ¿Qué significará el sombrero?

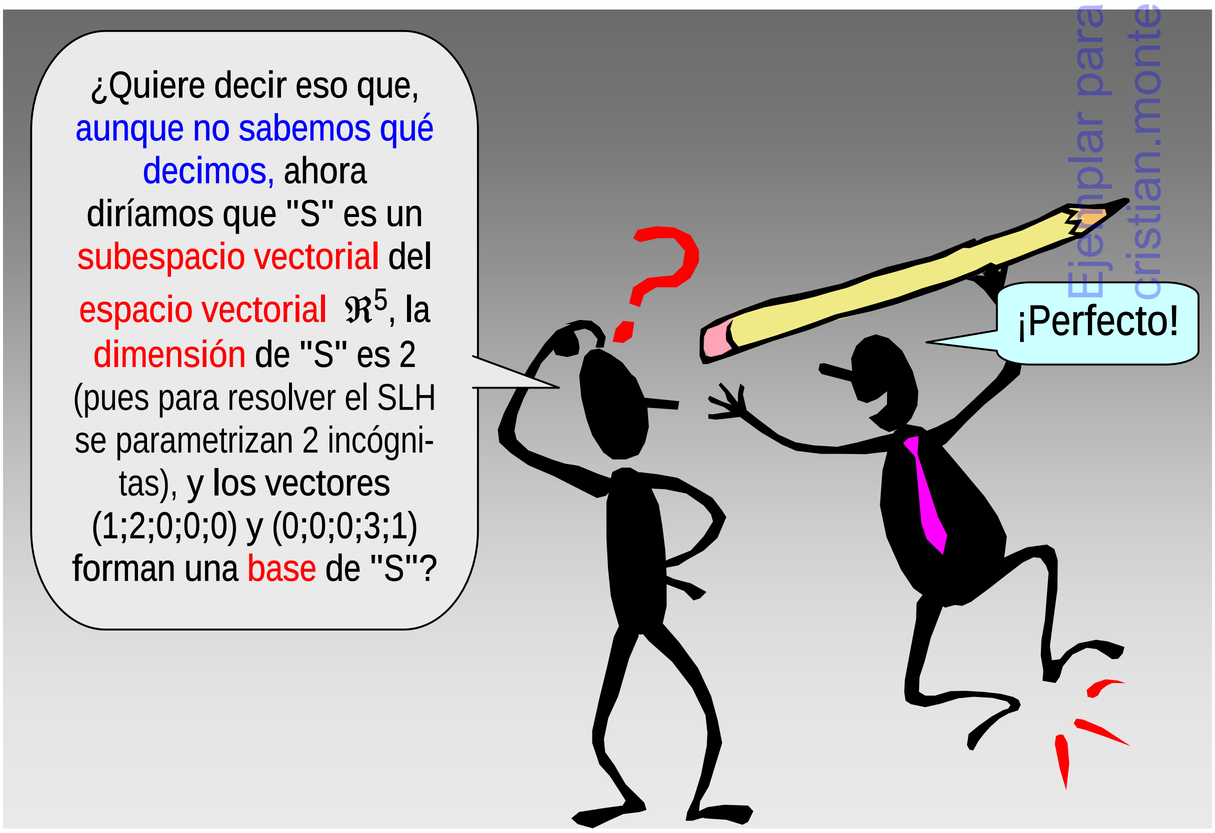
NOTA

En el ejercicio 2.6.4 vimos que $S = \{(\lambda;2.\lambda;0;3.\theta;\theta),\ \forall \lambda,\theta \in \Re\}$ es el subconjunto de $\Re^5$ formado por las soluciones del siguiente SLH:

$$\begin{aligned} -2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3.x_5 &= 0 \\ -2.x_1 + x_2 + 2.x_3 + x_4 - 3.x_5 &= 0 \\ 2.x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 + 6.x_5 &= 0 \\ -2.x_1 + x_2 + 2.x_3 - 2.x_4 + 6.x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Al ver que en "S" hay dos parámetros λ y θ, si hubiese que lidiar situaciones análogas a las de los ejemplos 1, 2 y 3, el truco consiste en desagregar los parámetros λ y θ como ya sabemos:

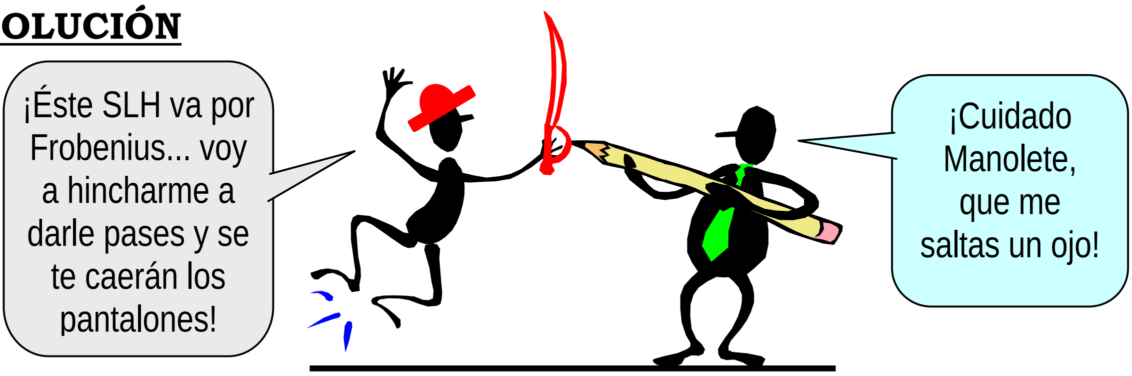
$$\begin{aligned} S &= \{(\lambda\,;2.\lambda\,;0\,;0\,;0) + (0\,;0\,;0\,;3.\theta\,;\theta),\ \forall \lambda,\theta \in \Re\} = \\ &= \{\lambda \bullet (1\,;2\,;0\,;0\,;0) + \theta \bullet (0\,;0\,;0\,;3\,;1),\ \forall \lambda,\theta \in \Re\} \subset \Re^5 \end{aligned}$$



FONEMATO 2.11.1

Discuta y resuelva el siguiente sistema: $\begin{cases} (a-2).x - y + z = 0 \\ x + (2.a-1).y - a.z = 0 \\ x + a.y - z = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN



Latiguillo de los SLH: las matrices de coeficientes y ampliada de un SLH sólo se diferencian en una columna de ceros; por tanto, tienen igual rango. Así, **el sistema es compatible:** al menos admite la **solución trivial** $x = y = z = 0$.

Sigo como siempre: matriz de coeficientes: $A = \begin{bmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ 1 & 2.a-1 & -a \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix}$

Me adorno con el rango: estudiemos el rango de "A" para los distintos valores de "a"; para ello, calculamos $|A|$ y los valores de "a" que lo anulan:

$$|A| = 0 \Rightarrow (a-2) - (a^2 - 2.a + 1) = 0 \Rightarrow a = 2, 1 \text{ (doble)}$$

Ahora la discusión del sistema:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = n^o$ de incógnitas. Por tanto, el SLH es **compatible y determinado:** sólo tiene la solución trivial.
- Si $a = 2$, es $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, y $|A| = 0$. Siendo no nulo el menor de orden 2 indicado, resulta ser $rg(A) = 2 <$ n° de incógnitas. Así, el SLH es **compatible e indeterminado.** Calculamos sus infinitas soluciones tras **eliminar** la 3ª ecuación y **parametrizar** la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros:

$$\left.\begin{aligned} -y = -z \\ x + 3.y = 2.z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

Primer castillo de fuegos artificiales

Siendo "S" el conjunto de las infinitas soluciones del SLH cuando $a = 2$, es:

$$S = \underbrace{\{(-z;z;z), \forall\, z \in \Re\}}_{\text{identificación paramétrica de "S"}} =$$

$$= \{z \bullet (-1;1;1), \forall z \in \Re\} \subset \Re^3$$

El conjunto "S" es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\Re^3$, y lo forman las ternas ordenadas de números reales que son **combinación lineal** de la terna $(-1;1;1)$, que es la **solución** correspondiente a $z=1$; o sea, forman "S" las ternas **proporcionales** a $(-1;1;1)$.

La dimensión de "S" es 1, y el vector $(-1;1;1)$ es una base de "S".

- Si $a=1$ es $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$, y $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ \boxed{1}\end{bmatrix}=1<$ nº de incógnitas.

  El SLH tiene infinitas soluciones, y las calcularemos tras **eliminar** las dos primeras ecuaciones y **parametrizar** las incógnitas "z" e "y", pasándolas al segundo miembro. Resulta: $x=-y+z$

Segundo castillo

Siendo "H" al conjunto de las infinitas soluciones del SLH cuando $a=1$, es:

$$H=\{(-\xi+\theta;\xi;\theta),\ \forall\,\xi,\theta\in\Re\}=$$

$$=\{\xi\bullet\overbrace{(-1;1;0)}^{\boxed{\text{solución correspondiente a } \xi=1 \text{ y } \theta=0}}+\theta\bullet\underbrace{(1;0;1)}_{\boxed{\text{solución correspondiente a } \xi=0 \text{ y } \theta=1}},\ \forall\,\xi,\theta\in\Re\}\subset\Re^3$$

El conjunto "H" es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\Re^3$, y lo forman las ternas que son **combinación lineal** de $(-1;1;0)$ y $(1;0;1)$; o sea, forman "H" las ternas que pueden obtenerse sumando una terna **proporcional** a $(-1;1;0)$ y otra **proporcional** a $(1;0;1)$. La dimensión de "H" es 2, y los vectores $(-1;1;0)$ y $(1;0;1)$ forman una base de "H".

EJERCICIOS RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA PÁGINA WEB

REGLA DE CRAMER

Ejercicio 07.01

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2.x_1 - x_2 + 3.x_3 = 4 \;;\; 4.x_1 + x_2 - 5.x_3 = 6 \;;\; 3.x_1 - 2.x_2 + 2.x_3 = 2$$

Ejercicio 07.02

Calcule "k" para que el siguiente sistema tenga solución única, determinándola cuando exista.

$$x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 = 1 \;;\; x_1 - x_2 + 2.x_3 = 0 \;;\; 2.x_1 + x_2 + k.x_3 = 0$$

SISTEMAS LINEALES SIN COEFICIENTES LOCOS

Ejercicio 08.01

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

1) $4.x + 6.y + 4.z + 5.t = 4 \;;\; 2.x + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \;;\; 2.x + 2.y - z - t = 1$

2) $3.x + 2.y + z = 3 \;;\; 2.x + 4.y - z = 2 \;;\; 5.x + 6.y - z = 5$

3) $x + 2.y = 3 \;;\; 2.x + 4.y = 6 \;;\; 3.x + y = 4$

4) $x + 2.y = 3 \;;\; 2.x + y = 6 \;;\; 3.x + y = 9 \;;\; x + 4.y = 3$

5) $x + y + z = 6 \;;\; 2.x + 2.y + z = 9 \;;\; 3.x + y + z = 8 \;;\; x + 4.y = 9$

6) $6.x + 2.y - 3.z = 0 \;;\; 2.x - 2.y + z = 0 \;;\; 8.x + y - 2.z = 0$

Ejercicio 08.02

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$6.x + 2.y - 3.z = 0 \;;\; 2.x - 2.y + z = 0 \;;\; 8.x - 2.z = 0$$

Ejercicio 08.03

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2.x_1 + x_2 - x_4 = 0 \;;\; 3.x_1 + 2.x_2 - x_3 - x_4 = 0 \;;\; x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Ejercicio 08.04

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 = 0$$

Ejercicio 08.05

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3 \;;\; x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \;;\; 2.x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

Ejercicio 08.06

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \;;\; x_1 + x_2 + 2.x_3 + x_4 = 1 \;;\; x_1 - x_3 - 2.x_4 = 4$$

Ejercicio 09.01

Discuta el siguiente sistema según el valor de $a \in \Re$.

$$(a-2).x - y + z = 0 \;\; ; \;\; x + (2.a-1).y - a.z = 0 \;\; ; \;\; x + a.y - z = 0$$

Ejercicio 09.02

Discuta el siguiente sistema según los valores de $m \in \Re$.

$$3.x + m.y = 1 \;\; ; \;\; 2.x - y + m.z = 1 \;\; ; \;\; m.x - 3.y + 2.z = 1$$

Ejercicio 09.03

Discuta el siguiente sistema según los valores de $m \in \Re$.

$$(2.m+2).x + m.y + 2.z = 2.m - 2 \;\; ; \;\; 2.x + (2-m).y = 0$$
$$(m+1).x + (m+1).z = m+1$$

Ejercicio 09.04

Discuta y resuelva el siguiente sistema según el valor de $m \in \Re$.

$$(m-1).x + y + z = 0 \;\; ; \;\; x + (m-1).y + z = 0 \;\; ; \;\; x + y + (m-1).z = 0$$

Ejercicio 09.05

Discuta y resuelva el siguiente sistema según el valor de $k \in \Re$.

$$k.x + 2.z = 0 \;\; ; \;\; k.y - z = k \;\; ; \;\; x + 3.y + z = 5$$

Ejercicio 09.06

Discuta el siguiente sistema según los valores de $k \in \Re$.

$$x - y - z = 7 \;\; ; \;\; 5.x - 2.y + z = 9 \;\; ; \;\; x + y + z = 4 \;\; ; \;\; 2.x - y + 2.z = k$$

Ejercicio 09.07

Discuta el siguiente sistema según los valores de $k \in \Re$.

$$x + y - z = 3 \;\; ; \;\; 3.x + 4.y - z = 5 \;\; ; \;\; x + y + k.z = 3$$
$$x + 2.y + (k+2).z = k^2 - 2$$

Ejercicio 09.08

Discuta el siguiente sistema según los valores de $\delta, \mu \in \Re$.

$$\delta.x + y + \mu.z = 1 \;\; ; \;\; x + \delta.y + \mu.z = 1 \;\; ; \;\; x + y + \delta.\mu.z = \mu$$

Ejercicio 09.09

Discuta el siguiente sistema según el valor de $a \in \Re$.

$$x + y + a.z = a \;\; ; \;\; a.x + a.y + z = 1 \;\; ; \;\; x + a.y + z = a$$

Ejercicio 09.10

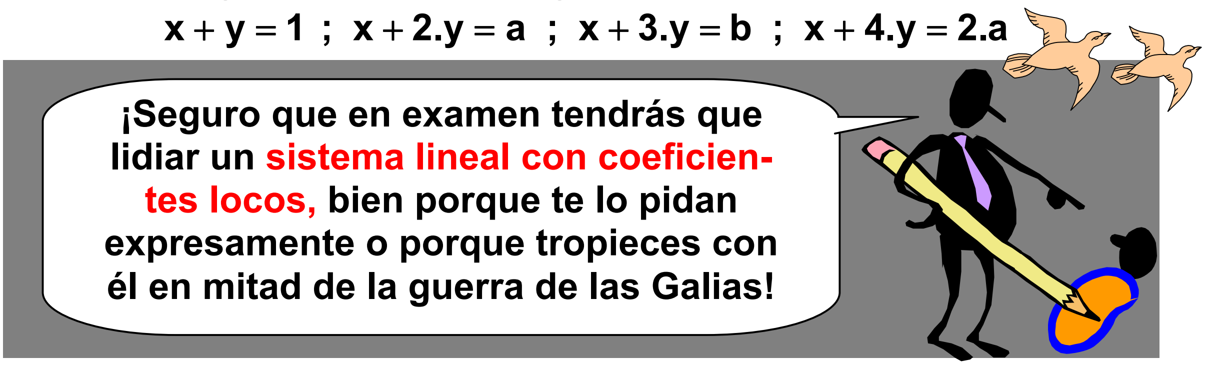
Discuta el siguiente sistema según los valores de $a, b \in \Re$.

$$x + y + a.z = 1 \;\; ; \;\; x + y + b.z = a \;\; ; \;\; x + a.y + z = a$$

Ejercicio 09.11

Discuta el siguiente sistema según los valores de $a, b \in \Re$.

$$x + y = 1 \;\; ; \;\; x + 2.y = a \;\; ; \;\; x + 3.y = b \;\; ; \;\; x + 4.y = 2.a$$



Ejercicio 10.01

Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$\begin{aligned} x + 2.y + 3.z &= -1 \\ 2.x + 5.y + 7.z &= -2 \\ 3.x + 8.y + 9.z &= -1 \end{aligned}$$

Ejercicio 10.02

Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$\begin{aligned} 2.x + 3.y + 4.z + 5.t &= 1 \\ 3.x + 4.y + 5.z + 6.t &= 2 \\ x + y + z + t &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 10.03

Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$\begin{aligned} x + 2.y &= 3 \\ 2.x + y &= 6 \\ 3.x + y &= 9 \\ x + 4.y &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 10.04

Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$x + y + z = 6 \;\; ; \;\; 2.x + 2.y + z = 9 \;\; ; \;\; 3.x + y + z = 8 \;\; ; \;\; x + 4.y = 9$$

Ejercicio 10.05

Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$x + 2.y + z = 3 \;\; ; \;\; x - y - 2.z = 0 \;\; ; \;\; 2.x + y - z = 3$$

AUTOCOMPROBACIÓN

Las soluciones están en los test de la web.

01) Un sistema lineal $A \bullet X = b$ de "m" ecuaciones con "n" incógnitas es:

a) Siempre compatible ; b) Siempre incompatible
c) Compatible o incompatible

02) Si un sistema lineal $A \bullet X = b$ de ecuaciones tiene solución, entonces:

a) Es compatible determinado
b) Es compatible indeterminado
c) Es compatible determinado o compatible indeterminado

03) ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones no es lineal?

a) $\left\{ \begin{array}{c} x - 2.y + z = 3 \\ 2.x - 3.y + 2 = z \end{array} \right\}$; b) $\left\{ \begin{array}{c} 3.u + \sqrt{2}.v - w = \log 19 \\ 2.u - 3.u + w = \text{sen } 23 \end{array} \right\}$

c) $\left\{ \begin{array}{c} 3.x + 5.\sqrt{y} - z = 0 \\ 7.x - 3.y + z = -5 \end{array} \right\}$

04) Un sistema lineal de "m" ecuaciones y "n" incógnitas, con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B" es compatible determinado si y sólo si:

a) $rg(A) = rg(B) = m$; b) $m = n$; c) $rg(A) = rg(B) = n$

05) Un sistema lineal de "m" ecuaciones y "n" incógnitas, con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B" es compatible indeterminado si y sólo si:

a) $rg(A) = r(B) < n$; b) $m < n$; c) $rg(A) = rg(B) < m$

06) ¿Cuál de los siguientes sistemas tiene solución única?:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2.x + 2.y - 2.z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2.x - y + z = 3 \\ 2.y - z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2.x - y + z = 3 \\ 2.y - z = 1 \\ 4.x - 4.y + 3.z = 5 \end{cases}$

07) Sea "B" la matriz ampliada de un sistema lineal compatible e indeterminado que tiene 4 ecuaciones con 3 incógnitas.

a) Pueder ser $rg(B) = 1$; b) $rg(B) = 3$; c) $rg(B) = 4$

08) Si el rango de la matriz "A" de los coeficientes de un sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas es 2, el sistema no puede ser:

a) Compatible determinado
b) Compatible indeterminado
c) Incompatible

09) Sean "A" y "B" las respectivas matrices de coeficientes y ampliada de un sistema lineal de 5 ecuaciones con 4 incógnitas que tiene solución única.

a) $rg(A) < 4$; b) $rg(B) = 5$; c) $rg(A) = 4$

10) Sean "A" y "B" las respectivas matrices de coeficientes y ampliada de un sistema lineal de 5 ecuaciones con 3 incógnitas que es incompatible.

a) $rg(B) = 4$ ó 5 ; **b)** $rg(B) = 4$; **c)** $rg(B) = 5$

11) Si el rango de la matriz "A" de los coeficientes de un sistema lineal de 3 ecuaciones con 5 incógnitas es 3, el sistema es:

a) Incompatible ; **b)** Compatible determinado
c) Compatible indeterminado

12) Sea $A \in M_{3\times3}$.

a) Si $rg(A) = 3$, $\nexists X \neq 0$ de orden 3×1 tal que $A \bullet X = 0$
b) Si $rg(A) = 2$, $\nexists X \neq 0$ de orden 3×1 tal que $A \bullet X = 0$
c) Si $rg(A) = 1$, $\nexists X \neq 0$ de orden 3×1 tal que $A \bullet X = 0$

13) Sea "B" la matriz ampliada de un sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas que es incompatible. Si $rg(B) = 3$, el sistema no es:

a) Compatible determinado ; **b)** Incompatible
c) Compatible indeterminado

14) Sean "A" y "B" las respectivas matrices de coeficientes y ampliada de un sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas que es incompatible.

a) $rg(A) = rg(B) - 1$; **b)** $rg(B) = 4$; **c)** $rg(B) = 3$

15) Sea "A" la matriz de coeficientes de un sistema lineal de "m" ecuaciones con 4 incógnitas que es compatible indeterminado.

a) $rg(A) < 4$; **b)** $m \geq 4$; **c)** $rg(A) = 4$

16) Sean "A" y "B" las respectivas matrices de coeficientes y ampliada de un sistema lineal de 3 ecuaciones con "n" incógnitas compatible determinado.

a) $rg(A) = 3$; **b)** Si $rg(A) = 2 \Rightarrow n = 2$; **c)** $n = 3$

17) Si en un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sustituimos la segunda ecuación por la suma de las 3 ecuaciones, el nuevo sistema tiene:

a) Más soluciones que el sistema inicial.
b) Las mismas soluciones que el sistema inicial.
c) Soluciones que no sabemos cómo son.

18) Sea $A \in M_{3\times3}$. Señale la falsa:

a) Si $rg(A) = 3$, $\exists X \neq 0$ de orden 3×1 tal que $A \bullet X = 0$
b) Si $rg(A) = 2$, $\exists X \neq 0$ de orden 3×1 tal que $A \bullet X = 0$
c) Si $rg(A) = 1$, $\exists X \neq 0$ de orden 3×1 tal que $A \bullet X = 0$

19) Sean "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada de un SL de "m" ecuaciones tal que $rg(A) = rg(B) = m - 1$.

a) Hay una ecuación que es CL de las restantes.
b) Ninguna ecuación es CL de las restantes.
c) El sistema tiene "$m - 1$" incógnitas.

20) En un sistema lineal compatible indeterminado de 3 ecuaciones con 4 incógnitas añadimos una ecuación que es el doble de la suma de las dos primeras ecuaciones. Señale la afirmación correcta respecto al nuevo sistema:

a) Es compatible determinado (CD)
b) Puede ser incompatible
c) Es compatible indeterminado (CI)

21) Sea $k \in \Re$ y C_1 y C_2 soluciones del sistema lineal homogéneo $A \bullet X = 0$.

a) $C_1 + k \bullet C_2$ es solución del sistema
b) $C_1 + k \bullet C_2$ no es solución del sistema
c) $C_1 + k \bullet C_2$ es solución del sistema sólo si $k = 0$

22) Sea B la matriz ampliada de un sistema lineal de 5 ecuaciones con 4 incógnitas. Si $rg(B) = 5$, el sistema es:

a) Compatible determinado
b) Compatible indeterminado
c) Incompatible

23) En un sistema lineal incompatible de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, la matriz de los coeficientes tiene rango 2. El rango de la matriz ampliada es:

a) 2 ; b) 3 ; c) 4

24) Si la matriz ampliada de un sistema lineal incompatible de 4 ecuaciones con 3 incógnitas tiene rango 2, el rango de la matriz de los coeficientes es:

a) 1 ; b) 2 ; c) 3

25) Un sistema lineal de 2 ecuaciones con 4 incógnitas no puede ser:

a) Incompatible
b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

26) Si el sistema lineal $A \bullet X = b$ es compatible determinado, el sistema $A \bullet X = 0$ es:

a) Incompatible
b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

27) Si $A \in M_{n \times n}$ y el sistema lineal $A \bullet X = b$ es incompatible, el sistema $A \bullet X = 0$ es:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

28) Sea $(0;1;2)$ una solución de un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

a) El sistema es homogéneo
b) El sistema no es homogéneo
c) El sistema puede ser homogéneo

29) Sea $(0;0;0)$ una solución de un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

a) El sistema no es homogéneo
b) El sistema es homogéneo
c) El sistema puede ser no homogéneo

30) Si el sistema lineal $A \bullet X = b$ es compatible indeterminado, el sistema $A \bullet X = 0$ es:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

31) Si el sistema lineal homogéneo $A \bullet X = 0$ es compatible indeterminado, el sistema no homogéneo $A \bullet X = b \neq 0$ no puede ser:

a) Incompatible
b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

32) Si un sistema lineal es compatible determinado y se le añade una ecuación, el nuevo sistema no puede ser:

a) Incompatible
b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

33) Si un sistema lineal es compatible determinado y se elimina una ecuación, el nuevo sistema no puede ser:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

34) Si el rango de la matriz ampliada "B" de un sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas es 2, el sistema no es:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

35) Sea $A \in M_{n \times n}$ tal que el sistema homogéneo $A \bullet X = 0$ sólo tiene la solución trivial. El sistema $A \bullet X = b \neq 0$ es:

a) Incompatible ; b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado

36) Sea $P \in M_{4 \times 4}$ y $(4;1;0;3)$ una solución del sistema lineal homogéneo $P \bullet X = 0$.

a) $|P| = 0$; b) $|P| \neq 0$; c) No sabemos cuánto vale $|P|$

37) En un sistema lineal de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras.

a) El sistema siempre es compatible
b) El sistema siempre es incompatible
c) El sistema puede ser comp. determinado o incompatible

38) Sea "A" la matriz de los coeficientes de un sistema lineal de "n" ecuaciones con 3 incógnitas que es compatible indeterminado. Sea $(0;1;2)$ una solución del sistema.

a) $rg(A) = 3$; b) $rg(A) < 3$; c) Siempre es $n \leq 3$

39) Siendo "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada de un sistema lineal de ecuaciones, sean $(2;1;3)$ y $(4;3;7)$ soluciones del sistema.

a) $rg(A) < 3$; b) $rg(A) = 3$; c) $rg(B) = 3$

40) Si el sistema lineal $A \bullet X = b \neq 0$ es incompatible. ¿Qué puede decirse de $A \bullet X = 0$?

a) Es compatible indeterminado ; b) Es incompatible

c) Es compatible indeterminado o compatible determinado

41) Si $A \in M_{n \times n}$ y $A \bullet X = b \neq 0$ es incompatible, ¿qué puede decirse de $A \bullet X = 0$?

a) Es compatible indeterminado ; b) Es incompatible

c) Es compatible indeterminado o compatible determinado

42) Sea $k \in \Re$, siendo C_1 una solución de $A \bullet X = h \neq 0$ y C_2 una solución del sistema $A \bullet X = 0$.

a) $C_1 + k \bullet C_2$ es solución de $A \bullet X = 0$

b) $C_1 + k \bullet C_2$ es solución de $A \bullet X = h \neq 0$

c) $C_1 + k \bullet C_2$ no es solución de $A \bullet X = h \neq 0$

43) La única solución de un sistema lineal compatible determinado (CD) de "m" ecuaciones con 3 incógnitas es $(0;1;2)$.

a) $m \geq 3$ y el sistema es homogéneo

b) $m < 3$

c) $m \geq 3$ y el sistema no es homogéneo

44) Sea P la matriz de coeficientes de un SL de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones es $S = \{(2.t + 4; t; 0; t),\ \forall\, t \in \Re\}$.

a) $rg(P) = 3$

b) $rg(P) = 4$

c) No puede conocerse rg(P)

45) Sea P la matriz de coeficientes de un SL de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones es $S = \{(2.t + 4; u + t; u; t; 0),\ \forall\, u, t \in \Re\}$.

a) $rg(P) = 4$

b) $rg(P) = 3$

c) No puede conocerse rg(P)

46) El conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones es $S = \{(t + 4; 0; t),\ \forall\, t \in \Re\}$.

a) El sistema es homogéneo

b) El sistema no es homogéneo

c) No puede saberse si el sistema es homogéneo o no

47) El conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones es $S = \{(5.t; -2.t; 0; t),\ \forall\, t \in \Re\}$.

a) El sistema es homogéneo

b) El sistema no es homogéneo

c) No puede saberse si el sistema es homogéneo o no

48) Si en un sistema lineal compatible determinado se elimina una ecuación que es combinación lineal de las restantes, el nuevo sistema es:

a) Compatible determinado
b) Incompatible
c) Compatible indeterminado

49) En un sistema lineal incompatible se elimina una ecuación que no es combinación lineal de las demás. Respecto al nuevo sistema, podemos asegurar que:

a) Es incompatible
b) Es compatible
c) Puede ser compatible o incompatible

50) Sea $(4;1;0;3)$ una solución de un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas y matriz de coeficientes P.

a) $rg(P) \leq 4$; b) $rg(P) = 4$; c) $rg(P) < 4$

51) Toda combinación lineal de soluciones de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones es solución del sistema.

a) Verdadero ; b) Falso

52) Toda combinación lineal de soluciones de un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones es solución del sistema.

a) Verdadero ; b) Falso

53) $S = \{(5.\theta;2.\theta;\theta),\ \forall\,\theta \in \Re\}$ es el conjunto de soluciones del sistema:

$$\text{a) } \left\{\begin{array}{r} 2.x - 5.z = 0 \\ x + y - 7.z = 0 \\ y - 2.z = 0 \end{array}\right\} \ ; \ \text{b) } \left\{\begin{array}{r} x - 5.z = 0 \\ x + y - 7.z = 0 \\ y + 2.z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{c) } \left\{\begin{array}{r} x - 5.z = 0 \\ x + y - 7.z = 0 \\ y - 2.z = 0 \end{array}\right\}$$

54) $S = \{(4.\theta;-2.\theta;\theta),\ \forall\,\theta \in \Re\}$ no es el conjunto de soluciones del sistema:

$$\text{a) } \left\{\begin{array}{r} x - 4.z = 0 \\ y + 2.z = 0 \\ x + y - 2.z = 0 \end{array}\right\} \ ; \ \text{b) } \left\{\begin{array}{r} 2.u - 8.v = 0 \\ v + 2.w = 0 \\ -2.u + v + 10.w = 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{c) } \left\{\begin{array}{r} -x + 4.z = 0 \\ y + 2.z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\}$$

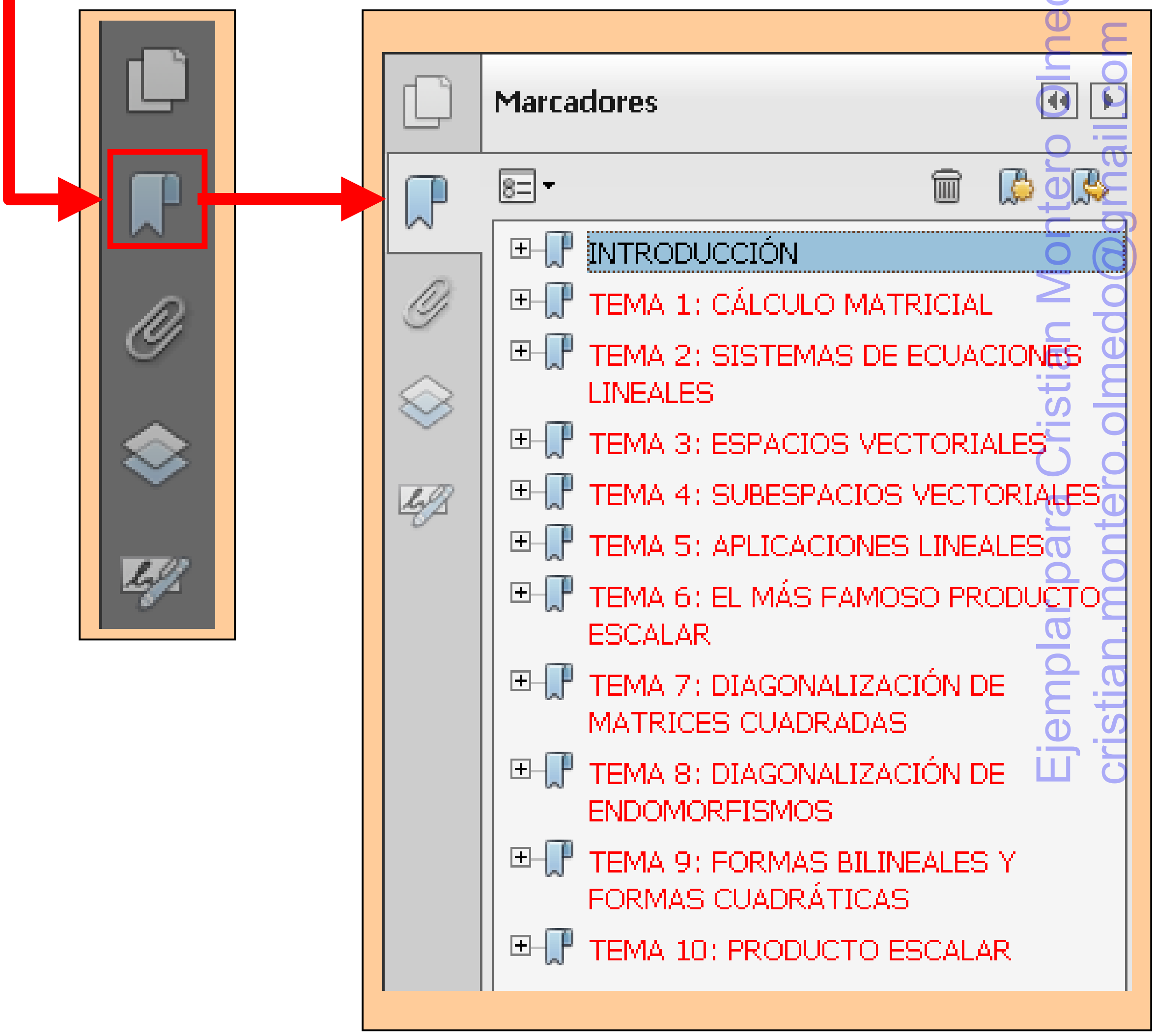
55) ¿Son equivalentes $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$ y $\left\{\begin{array}{l} x + 3.y - 3.z = 0 \\ 2.x - 4.y + 4.z = 0 \end{array}\right\}$?

a) Sí ; b) No

56) ¿Son equivalentes $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$ y $\left\{\begin{array}{l} x + 3.y - 3.z = 0 \\ 2.x - 4.y + 2.z = 0 \end{array}\right\}$?

a) Sí ; b) No

Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



Tema 3
Espacios vectoriales

3.01 Espacio vectorial
3.02 Desmitificación de los espacios vectoriales
3.03 Combinación lineal de vectores
3.04 Dependencia e independencia lineal de vectores
3.05 Dimensión de un espacio vectorial
3.06 Sistema de generadores de un espacio vectorial
3.07 Base de un espacio vectorial
3.08 La base canónica
3.09 Coordenadas de un vector respecto de una base
3.10 Ecuación de un cambio de base

El estudio de vectores y matrices, que es parte medular del Álgebra de lo Lineal, lo inició el irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865), con su deseo de encontrar un modo de representar ciertos objetos en el plano y en el espacio, que le llevó al descubrimiento de lo que llamó **cuaterniones**, concepto que condujo a lo que hoy denominamos **vectores.** En vida Hamilton, y en el resto del siglo XIX, hubo mucho debate sobre la utilidad de los cuaterniones o cuaternios y de los vectores. A finales del XIX, el gran físico británico Lord Kelvin (el de los grados kelvin) escribió:

Aun cuando los cuaternios son notablemente ingeniosos, han demostrado ser una mala fortuna para todo el que los ha estudiado, y nunca han sido de ninguna utilidad a criatura alguna.

El tiempo ha quitado la razón a Kelvin... y de entrada, tú vete olvidando eso de que un vector es un segmento orientado, como una flecha de los sioux: un vector simplemente es un habitante de un espacio vectorial.

3.1 ESPACIO VECTORIAL

Sea $V = \{\overline{x};\overline{y};\overline{h};......\}$ un conjunto donde se han definido dos leyes de composición; o sea, se han definido dos formas de jugar con los elementos de "V".

Una de las leyes definidas en el conjunto "V", la que llamamos suma y denotamos "+", es de composición interna; o sea, la ley suma es tal que al sumar dos elementos de "V" siempre se obtiene otro elemento de "V":

$$\forall\ \overline{x},\overline{y} \in V \text{ sucede que } \overline{x}+\overline{y} \in V$$

La otra ley definida en "V", que llamamos producto por un escalar y denotamos "•", es de composición externa; o sea, la ley "•" es tal que al multiplicar un elemento del conjunto "V" por un elemento del cuerpo de los reales se obtiene un elemento de V:

$$\forall\ \alpha \in \Re,\ \forall\ \overline{x} \in V \text{ sucede que } \alpha \bullet \overline{x} \in V$$

En estas condiciones, se dice que el conjunto "V", con las leyes suma y producto por un escalar definidas en él, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales si se cumple que:

1) La suma definida en "V" es conmutativa:

$$\forall\ \overline{x},\ \overline{y} \in V \text{ es } \overline{x}+\overline{y} = \overline{y}+\overline{x}$$

2) La suma definida en "V" es asociativa:

$$\forall\ \overline{x},\ \overline{y},\ \overline{h} \in V \text{ sucede que } \overline{x}+(\overline{y}+\overline{h}) = (\overline{x}+\overline{y})+\overline{h}$$

3) La suma definida en "V" admite elemento neutro; es decir, en "V" hay un elemento, que llamamos vector cero y denotamos $\overline{0}$, tal que:

$$\forall\ \overline{x} \in V \text{ es } \overline{x}+\overline{0} = \overline{0}+\overline{x} = \overline{x}$$

4) Cada elemento de "V" tiene simétrico respecto de la suma definida en V:

$$\forall\ \overline{x} \in V,\ \exists\ \overline{y} \in V \text{ tal que } \overline{x}+\overline{y} = \overline{y}+\overline{x} = \overline{0}$$

5) $1 \bullet \overline{x} = \overline{x},\ \forall\ \overline{x} \in V$.

6) $\forall\ \alpha, \beta \in \Re,\ \forall\ \overline{x} \in V$ sucede que:

$$(\alpha+\beta) \bullet \overline{x} = (\alpha \bullet \overline{x}) + (\beta \bullet \overline{x})$$

7) $\forall\ \alpha \in \Re,\ \forall \overline{x},\ \overline{y} \in V$ sucede que:

$$\alpha \bullet (\overline{x}+\overline{y}) = (\alpha \bullet \overline{x}) + (\alpha \bullet \overline{y})$$

8) $\forall\ \alpha, \beta \in \Re,\ \forall\ \overline{x} \in V$ sucede que:

$$\alpha \bullet (\beta \bullet \overline{x}) = (\alpha.\beta) \bullet \overline{x}$$

Los elementos de un espacio vectorial se llaman vectores.

Por abreviar, en lugar de decir que el conjunto "V", con las leyes suma y producto por un escalar definidas en él, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\Re$, se dice que $(V;+;\bullet)$ es un espacio vectorial sobre $\Re$.

Por economía, conviene abreviar espacio vectorial escribiendo sólo EV.

3.2 DESMITIFICACIÓN

Es más que probable que algún lector esté impresionado por la definición axiomática del **ente** que llamamos **espacio vectorial...** y no es para menos, pues en la definición intervienen seis protagonistas, a saber:

* El conjunto $\Re$
* La suma definida en $\Re$
* El producto definido en $\Re$
* El conjunto "V"
* La ley de composición interna "+" definida en "V"
* La ley de composición externa "•" definida en "V"

No siendo bastante seis protagonistas a la vez, para más inri, eso protagonistas son ser tales que se cumplan las 9 exigencias necesarias para poder decir que $\Re$ es un **cuerpo conmutativo** y las 8 exigencias necesarias (establecidas por **Peano** en los albores del siglo XX) para poder decir que $(V;+;\bullet)$ es un **espacio vectorial** sobre el cuerpo $\Re$. Así, con tanta puñeta de por medio, es normal que parezca complicado, pero la cosa no es tan tremenda:

- El espacio vectorial con que trabajaremos más frecuentemente es el conjunto $\Re^3$ formado de las ternas ordenadas de números reales:

$$\Re^3 = \left\{\overline{x} = (x_1;x_2;x_3) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall i = 1,2,3\right\}$$

La suma en $\Re^3$:

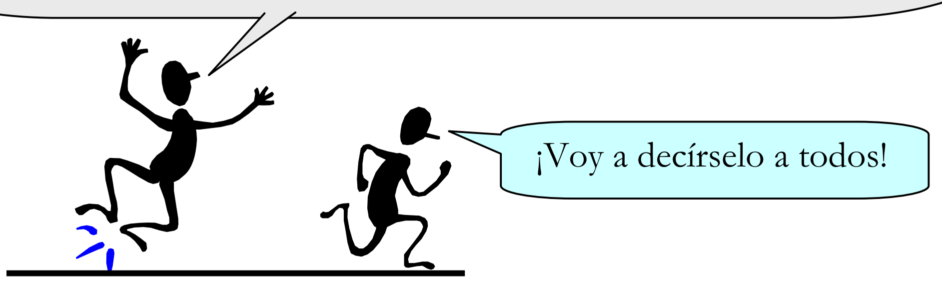
Si $\overline{x} = (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3$ e $\overline{y} = (y_1;y_2;y_3) \in \Re^3$, es:

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1;x_2 + y_2;x_3 + y_3)$$

El producto por un escalar en $\Re^3$:

Si $\overline{x} = (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3$ y $\alpha \in \Re$, es $\alpha \bullet \overline{x} = (\alpha.x_1;\alpha.x_2;\alpha.x_3)$

¡Qué maravilla!... después de tan espeso rollo axiomático sobre el ente llamado **espacio vectorial**, resulta que el más famoso de los espacios vectoriales es el conjunto que forman las ternas ordenadas de números reales... ¡Tanto ruido y tan pocas nueces!... ¡Vaya bobada!, el conjunto de dichas ternas es el que forman las matrices de una fila y tres columnas; o sea, hablar de un vector del espacio vectorial $\Re^3$ es hablar de una matriz de una fila y tres columnas... y como ya somos auténticos artistas trabajando con estas matrices, seguro que trabajar en el espacio vectorial $\Re^3$ será fácil



- También trabajaremos con frecuencia en el espacio vectorial $\Re^4$:

$$\Re^4 = \{\bar{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \;/\; x_i \in \Re, \forall i = 1,2,3,4\}$$

La **suma** y el **producto por un escalar** son ahora:

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1;x_2 + y_2;x_3 + y_3;x_4 + y_4)$$
$$\alpha \bullet \bar{x} = (\alpha.x_1;\alpha.x_2;\alpha.x_3;\alpha.x_4)$$

Naturalmente, podemos considerar que $\Re^4$ es el conjunto de las matrices de una fila y cuatro columnas. Y sin duda ya imaginas lo que vamos a decir: los espacios vectoriales $\Re^3$ y $\Re^4$ son casos particulares del espacio vectorial $\Re^k$:

$$\Re^k = \{\bar{x} = (x_1;x_2;......;x_k) \;/\; x_i \in \Re, \forall i = 1,2,......,k\}$$

donde la **suma** "+" y el **producto por un escalar "•"** son:

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1\,;\, x_2 + y_2\,;\, ...\,;\, x_k + y_k)$$
$$\alpha \bullet \bar{x} = (\alpha.x_1\,;\, \alpha.x_2\,;\, ...\,;\, \alpha.x_k)$$

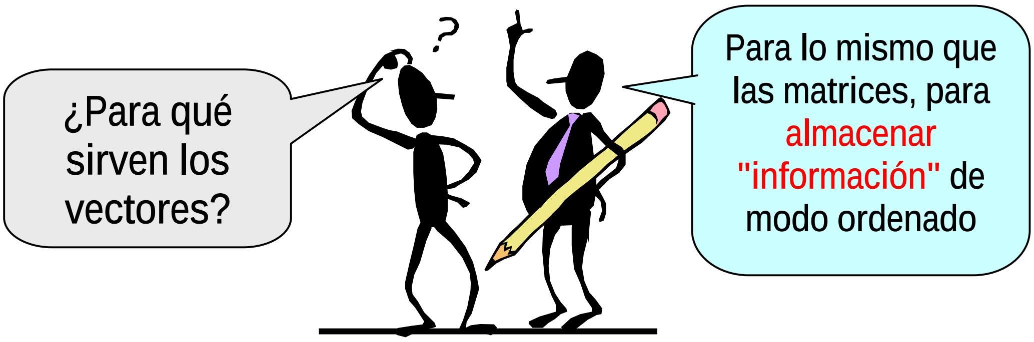
A la hora de andar por casa, podemos considerar que $\Re^k$ es el conjunto formado por todas las matrices de una fila y "k" columnas.

- De vez en cuando trabajaremos en un espacio vectorial formado por polinomios. ***Por ejemplo:*** sea P_2 el conjunto de los polinomios de grado no superior a dos, es decir:

$$P_2 = \{\bar{p} = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 \;/\; a_i \in \Re, \forall i = 0,1,2\}$$

Si la **suma** de los polinomios $\bar{p} = a_0+a_1.x+a_2.x^2$ y $\bar{q} = b_0+b_1.x+b_2.x^2$ la definimos $\bar{p}+\bar{q} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1).x + (a_2 + b_2).x^2$, y el **producto** del polinomio $\bar{p} = a_0+a_1.x+a_2.x^2$ por el escalar o número real "α" lo definimos $\alpha \bullet \bar{p} = \alpha.a_0 + \alpha.a_1.x + \alpha.a_2.x^2$, en el conjunto P_2 se cumplen las 8 exigencias que establece la definición del **ente** llamado **espacio vectorial;** por tanto, **el conjunto de los polinomios de grado no superior a 2 es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales... y lo mismo sucede si los polinomios son de grado no superior a "k" en vez de ser de grado no superior a dos.**

- De vez en cuando trabajaremos en un espacio vectorial formado por matrices. ***Por ejemplo:*** sea $M_{2\times3}$ el conjunto de las matrices de dos filas y tres columnas. Si la **suma** $A+B$ de las matrices $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$ la definimos $A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}$ y el **producto** $\alpha \bullet A$ de la matriz $A = \{a_{ij}\}$ por el escalar o número real "α" lo definimos $\alpha \bullet A = \{\alpha.a_{ij}\}$, en el conjunto $M_{2\times3}$ se cumplen las 8 exigencias que establece la definición del **ente** llamado **espacio vectorial;** por tanto, **el conjunto de las matrices de dos filas y tres columnas es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales... y lo mismo sucede si las matrices tienen "p" filas y "q" columnas.**



3.3 COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Sea $(V;+;\bullet)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.
Sea $H = \{\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_k\}$ un subconjunto de "V" y $\overline{x} \neq \overline{0}$ un vector de "V".

Se dice que el vector $\overline{x}$ es **combinación lineal** (combinación proporcional) de los vectores $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_k$ que forman el conjunto "H", si es posible encontrar "k" números reales $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tales que:

$$\overline{x} = \alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \dots + \alpha_k \bullet \overline{h}_k$$

Observa: el vector $\alpha_i \bullet \overline{h}_i$ es **proporcional** al vector $\overline{h}_i$.

- Acostúmbrate a abreviar combinación lineal escribiendo CL.
- Hablando en términos de **información:** se dice que el vector $\overline{x}$ es CL de los vectores $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_k$ para indicar que la **información** contenida en $\overline{x}$ puede obtenerse a partir de la contenida en $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_k$ sin más que multiplicar cada vector $\overline{h}_i$ por un número real adecuado α_i y sumar los productos realizados.

A efectos prácticos

Para saber si el vector $\overline{x} \neq \overline{0}$ es CL de los vectores $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_k$, exigiremos que $\overline{x} = \alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \dots + \alpha_k \bullet \overline{h}_k$, lo que SIEMPRE nos conducirá a un SLNH (sistema lineal no homogéneo) con "k" incógnitas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ cuya matriz A/B de coeficientes/ampliada es:

$$A/B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow\uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \dots & \overline{h}_k & \overline{x} \end{array} \end{array}$$

En consecuencia, el vector $\overline{x}$ es CL de los vectores $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_k$ si dicho SLNH tiene solución, lo que ocurre si $rg(A) = rg(B)$. Si $rg(A) \neq rg(B)$, el SLNH carece de solución, por lo que $\overline{x}$ no es CL de $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_k$.

FONEMATO 3.3.1

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(2;3;1;2)\ ;\ \overline{h}_2=(1;2;5;2)\ ;\ \overline{x}=(5;8;7;6)$$

Estúdiese si el vector $\overline{x}$ es combinación lineal de los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$.

SOLUCIÓN LENTA

Empleamos la definición de combinación lineal de vectores a modo de latiguillo de arranque: el vector $\overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ si pueden encontrarse dos reales α_1 y α_2 tales que $\overline{x}=\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2$... y para averiguarlo basta averiguar si el SLNH originado por $\overline{x}=\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2$ tiene solución o no:

$$\overline{x}=\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(5;8;7;6)=\alpha_1\bullet(2;3;1;2)+\alpha_2\bullet(1;2;5;2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}5=2.\alpha_1+\alpha_2\\8=3.\alpha_1+2.\alpha_2\\7=\alpha_1+5.\alpha_2\\6=2.\alpha_1+2.\alpha_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=2\\\alpha_2=1\end{array}\right\}$$

Debemos resolver el SLNH tal que $A/B=\left[\begin{array}{cc|c}2&1&5\\3&2&8\\1&5&7\\2&2&6\end{array}\right]$.

Como $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)=2=$ nº de incógnitas, el sistema tiene solución única, que obtenemos mediante Cramer (o como queramos), después de eliminar las ecuaciones 3ª y 4ª, pues no forman parte del menor no nulo de orden 2 indicado. Resulta $\alpha_1=2$ y $\alpha_2=1$.

Por tanto:

$$\overline{x}=2\bullet\overline{h}_1+1\bullet\overline{h}_2$$

O sea, el vector $\overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$; es decir, la información que contiene $\overline{x}$ puede obtenerse combinando linealmente la que contienen $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$... y para ello basta multiplicar el vector $\overline{h}_1$ por el número 2 y el vector $\overline{h}_2$ por el número 1, sumando después los productos realizados.

Observa: imagina que los vectores (2;3;1;2), (1;2;5;2) y (5;8;7;6) expresan respectivamente tus ventas de uva, pera, limón y melón durante los meses de abril, mayo y junio; así, saber que

$$(5;8;7;6)=2\bullet(2;3;1;2)+1\bullet(1;2;5;2)$$

es saber que:

(Venta en Junio) = 2•(Venta en Abril) + 1•(Venta en Mayo)

SOLUCIÓN RÁPIDA

Liberto Vector Libre es un profesional del Álgebra de lo Lineal que a lo largo de su vida ha resuelto miles de ejercicios sobre combinación lineal de vectores. Un domingo por la noche, mientras piensa si le toca regar las macetas, Liberto siente la imperiosa necesidad de averiguar el vector $\overline{x} = (5;8;7;6)$ es CL de los vectores $\overline{h}_1 = (2;3;1;2)$ y $\overline{h}_2 = (1;2;5;2)$.

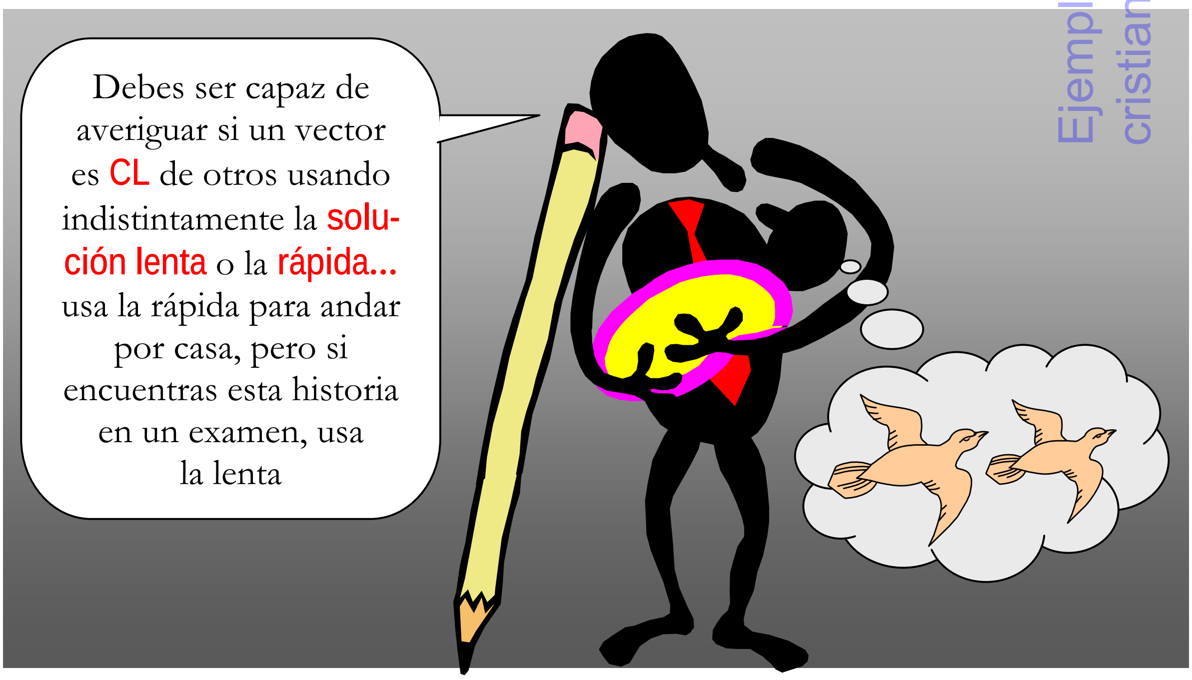
Como buen profesional que es, Liberto sabe que, en general, el problema de averiguar si un vector $\overline{x}$ es CL de los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \dots, \overline{h}_k$ se reduce a calcular los rangos de las matrices "A" y "B":

$$A/B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow\uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \cdots & \overline{h}_k & \overline{x} \end{array} \end{array}$$

de modo que $\overline{x}$ es o no CL de $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \dots, \overline{h}_k$ según que las matrices "A" y "B" tengan o no igual rango. Así las cosas, Liberto tarda nada en averiguar que $\overline{x} = (5;8;7;6)$ es CL de $\overline{h}_1 = (2;3;1;2)$ y $\overline{h}_2 = (1;2;5;2)$, pues pasa olímpicamente de $\overline{x} = \alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{h}_2$ y va al grano: con la rapidez del rayo escribe la matriz A/B para su caso:

$$A/B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{x} \end{array} \end{array}$$

Tras comprobar que $rg(A) = rg(B)$, Liberto se apuesta lo que sea a que el vector $\overline{x} = (5;8;7;6)$ es CL de los vectores $\overline{h}_1 = (2;3;1;2)$ y $\overline{h}_2 = (1;2;5;2)$.



FONEMATO 3.3.2

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{p}=(2;3;4)\ ;\ \overline{q}=(-2;1;5)\ ;\ \overline{m}=(8;4;6)$$

Estúdiese si el vector $\overline{m}$ es combinación lineal de los vectores $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

SOLUCIÓN LENTA

Empleamos la definición de combinación lineal de vectores a modo de latiguillo de arranque: el vector $\overline{m}$ es CL de $\overline{p}$ y $\overline{q}$ si pueden encontrarse dos reales α_1 y α_2 tales que $\overline{m}=\alpha_1\bullet\overline{p}+\alpha_2\bullet\overline{q}$... y para averiguarlo basta averiguar si el SLNH originado por $\overline{m}=\alpha_1\bullet\overline{p}+\alpha_2\bullet\overline{q}$ tiene solución o no:

$$\overline{m}=\alpha_1\bullet\overline{p}+\alpha_2\bullet\overline{q}\Rightarrow(8;4;6)=\alpha_1\bullet(2;3;4)+\alpha_2\bullet(-2;1;5)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}8=2.\alpha_1-2.\alpha_2\\4=3.\alpha_1+\alpha_2\\6=4.\alpha_1+5.\alpha_2\end{Bmatrix}$$

El anterior SLNH es incompatible, pues la matriz de coeficientes tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 3. Por tanto, el vector $\overline{m}$ no es CL de los vectores $\overline{p}$ y $\overline{q}$; es decir, la información que contiene $\overline{m}$ no puede obtenerse combinando linealmente la que contienen $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Sabemos que el problema de averiguar si un vector $\overline{x}$ es CL de los vectores $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\ldots,\overline{h}_k$ ese reduce a calcular los rangos de las matrices "A" y "B":

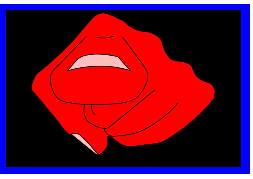
$$\begin{array}{c}A/B=\left[\begin{array}{ccccc|c}\bullet&\bullet&\cdots&\bullet&&\bullet\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&&\vdots\\\bullet&\bullet&\cdots&\bullet&&\bullet\end{array}\right]\\\begin{array}{cccccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\overline{h}_1&\overline{h}_2&\ldots..&\overline{h}_k&\overline{x}\end{array}\end{array}$$

de modo que $\overline{x}$ es (no es) CL de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\ldots,\overline{h}_k$ si "A" y "B" tienen (no tienen) el mismo rango. En nuestro caso:

$$\begin{array}{c}A/B=\left[\begin{array}{cc|c}2&-2&8\\3&1&4\\4&5&6\end{array}\right]\\\begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\overline{p}&\overline{q}&\overline{m}\end{array}\end{array}$$

Como $rg(A)\neq rg(B)$, el vector $\overline{m}$ no es CL de los vectores $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

En examen no importa lo que sabes, importa lo que parece que sabes.



FONEMATO 3.3.3

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{a}=(2;3;4)\ ;\ \overline{b}=(2;1;5)\ ;\ \overline{c}=(1;1;k)$$

Determínese "k" de modo que $\overline{c}$ sea combinación lineal de $\overline{a}$ y $\overline{b}$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

El vector $\overline{c}$ es (no es) CL de los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ si las matrices "A" y "B" tienen (no tienen) el mismo rango:

$$\begin{array}{c} A/B=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & k \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{array} \end{array}$$

Como $rg(A)=2$, es $rg(B)=2$ sólo si $|B|=9-4.k=0\Rightarrow k=9/4$.

FONEMATO 3.3.4

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{p}=(3;1;2)\ ;\ \overline{q}=(-1;4;-5)\ ;\ \overline{m}=(a;1;1)\ ;\ \overline{x}=(1;3;b)$$

Estúdiese si $\overline{x}$ es combinación lineal de $\overline{p}, \overline{q}$ y $\overline{m}$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

El vector $\overline{x}$ es (no es) CL de $\overline{p}, \overline{q}$ y $\overline{m}$ si las matrices "A" y "B" tienen (no tienen) el mismo rango:

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & a & 1\\ 1 & 4 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 1 & b \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{p} & \overline{q} & \overline{m} & \overline{x} \end{array}$$

Como el máximo rango de "A" coincide con el de "B", comenzamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" que lo anulan:

$$|A|=26-13.a=0\Rightarrow a=2$$

Por tanto:

- Si $a\neq 2\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=3=rg(B)\Rightarrow\ \overline{x}$ es CL de $\overline{p}, \overline{q}$ y $\overline{m}$
- Si $a=2$ es $|A|=0$, siendo $A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{array}{cc}3 & -1\\ 1 & 4\end{array}} & & 2 & 1\\ & & 1 & 3\\ 2 & -5 & 1 & b \end{array}\right]$.

  Al orlar el menor no nulo de orden 2 indicado, resultan los siguientes menores:

  $$H_1=|A|=0\ ;\ H_2=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 3\\ 2 & -5 & b \end{vmatrix}=26+13.b$$

  En consecuencia:

  $*$ Si $b\neq -2\Rightarrow H_2\neq 0\Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A)\Rightarrow \overline{x}$ no es CL de $\overline{p}, \overline{q}$ y $\overline{m}$.

  $*$ Si $b=-2\Rightarrow H_2=0\Rightarrow rg(B)=2=rg(A)\Rightarrow \overline{x}$ es CL de $\overline{p}, \overline{q}$ y $\overline{m}$.

FONEMATO 3.3.5

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(1;1;1;2)\ ;\ \overline{h}_2=(2;1;3;6)\ ;\ \overline{h}_3=(0;0;2.a;2)\ ;\ \overline{h}_4=(0;1;2;a)$$

Estúdiese si el vector $\overline{x}=(1;1;1;b)$ es combinación lineal de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

El vector $\overline{x}$ es (no es) combinación lineal de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ si las matrices "A" y "B" tienen (no tienen) el mismo rango:

$$\begin{array}{c} A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2.a & 2 & 1\\ 2 & 6 & 2 & a & b \end{array}\right]\\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{h}_4 & \overline{x} \end{array}\end{array}$$

Como el máximo rango de "A" coincide con el de "B", comenzamos estudiando el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "a" que lo anulan:

$$|A|=6-4.a-2.a^2=0\Rightarrow a=1,-3$$

Por tanto:

- Si $a\neq 1$ y $a\neq -3\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=4=rg(B)\Rightarrow \overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.
- Si $a=1$ es $|A|=0$, siendo $A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 2 & 1 & b \end{array}\right]$

  Al orlar el menor no nulo de orden 3 indicado, se obtiene:

  $$H_1=|A|=0\ ;\ H_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 2 & b \end{vmatrix}=2.(2-b)$$

  En consecuencia:

  ∗ Si $b\neq 2\Rightarrow H_2\neq 0\Rightarrow rg(B)=4\neq rg(A)\Rightarrow \overline{x}$ no es CL de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$

  ∗ Si $b=2\Rightarrow H_2=0\Rightarrow rg(B)=3=rg(A)\Rightarrow \overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$

- Si $a=-3$ es $|A|=0$, siendo $A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -6 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 2 & -3 & b \end{array}\right]$.

  Al orlar el menor no nulo de orden 3 indicado, se obtiene:

  $$H_3=|A|=0\ ;\ H_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -6 & 1\\ 2 & 6 & 2 & b \end{vmatrix}=6.(b-2)$$

  Por tanto:

  ∗ Si $b\neq 2\Rightarrow H_4\neq 0\Rightarrow rg(B)=4\neq rg(A)\Rightarrow \overline{x}$ no es CL de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.

  ∗ Si $b=2\Rightarrow H_4=0\Rightarrow rg(B)=3=rg(A)\Rightarrow \overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.

FONEMATO 3.3.6

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(1;3;1;1)\ ;\ \overline{h}_2=(1;4;1;2)\ ;\ \overline{h}_3=(-1;-1;a;a+2)$$

Estúdiese si el vector $\overline{x}=(3;5;3;a^2-2)$ es combinación lineal de $\overline{h}_1,\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

El vector $\overline{x}$ es (no es) CL de $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ si las matrices "A" y "B" tienen (no tienen) el mismo rango:

$$A/B=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -1 & 5\\ 1 & 1 & a & 3\\ 1 & 2 & a+2 & a^2-2\end{array}\right]\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{x}\end{array}\end{array}$$

Como el máximo rango de "A" es inferior al de "B", comenzamos con el rango de "B"; para ello calculamos $|B|$ y los valores de "a" que lo anulan:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ 0 & 0 & a+1 & 0\\ 0 & 1 & a+3 & a^2-5\end{vmatrix} =$$

a la segunda fila de "B" le restamos el triple de la primera
a la tercera fila de "B" le restamos la primera
a la cuarta fila de "B" le restamos la primera

$$=(a+1).(a^2-1)=0 \Rightarrow a=-1\ \text{(doble)}, 1$$

Por tanto:

- Si $a\neq\pm1\Rightarrow|B|\neq0\Rightarrow rg(B)=4\neq rg(A)\Rightarrow\ \overline{x}$ no es CL de $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.
- Si $a=1$ es $|B|=0$, siendo $A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3 & -1\end{array}\right]$.

  Como el menor de orden 3 indicado es no nulo, resulta ser $rg(A)=3=rg(B)$; por tanto, el vector $\overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.
- Si $a=-1$ es $|B|=0$, y A/B se convierte en:

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -1 & 5\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right]$$

  Como $rg(A)=2=rg(B)$, el vector $\overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.

Todos somos muy ignorantes, pero no todos ignoramos las mismas cosas.

Albert Einstein

FONEMATO 3.3.7

En el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{p}=2+3.x+4.x^2 \ ; \ \overline{q}=-2+x+5.x^2 \ ; \ \overline{m}=8+4.x+6.x^2$$

Estúdiese si $\overline{m}$ es combinación lineal de $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

SOLUCIÓN LENTA

Nada de asustarse porque el espacio vectorial lo formen polinomios; para envolver el caramelo con primor, hacemos lo de siempre; o sea, empleamos la definición de combinación lineal de vectores a modo de latiguillo de arranque: el vector $\overline{m}$ es CL de $\overline{p}$ y $\overline{q}$ si pueden encontrarse dos reales α_1 y α_2 tales que $\overline{m}=\alpha_1 \bullet \overline{p}+\alpha_2 \bullet \overline{q}$... y para averiguarlo basta averiguar si el SLNH originado por $\overline{m}=\alpha_1 \bullet \overline{p}+\alpha_2 \bullet \overline{q}$ tiene solución o no:

$$\overline{m}=\alpha_1 \bullet \overline{p}+\alpha_2 \bullet \overline{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+4.x+6.x^2=\alpha_1 \bullet (2+3.x+4.x^2)+\alpha_2 \bullet (-2+x+5.x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 8=2.\alpha_1-2.\alpha_2 \\ 4=3.\alpha_1+\alpha_2 \\ 6=4.\alpha_1+5.\alpha_2 \end{matrix}\right\}$$

El anterior SLNH es incompatible, pues la matriz de coeficientes tiene rango 2 y la ampliada 3. Por tanto, el vector $\overline{m}$ no es CL de los vectores $\overline{p}$ y $\overline{q}$; es decir, la información que contiene $\overline{m}$ no puede obtenerse combinando linealmente la que contienen $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Como $P_2=\left\{\overline{v}=a_0+a_1.x+a_2.x^2 \ / \ a_i \in \Re, \forall i=0,1,2\right\}$, cada vector de P_2 está identificado mediante 3 números reales (los coeficientes a_0, a_1 y a_2); por tanto, podemos asimilar cada vector de P_2 a un vector de $\Re^3$. En general, si $\overline{v}=a_0+a_1.x+a_2.x^2 \in P_2$ lo asimilamos a $(a_0;a_1;a_2) \in \Re^3$, entonces:

$$\overline{p}=2+3.x+4.x^2 \in P_2 \text{ lo asimilamos a } \overline{p}=(2;3;4) \in \Re^3$$
$$\overline{q}=-2+x+5.x^2 \in P_2 \text{ lo asimilamos a } \overline{q}=(-2;1;5) \in \Re^3$$
$$\overline{m}=8+4.x+6.x^2 \in P_2 \text{ lo asimilamos a } \overline{m}=(8;4;6) \in \Re^3$$

Y ahora trabajamos como en $\Re^3$: el vector $\overline{m}$ es (no es) CL de $\overline{p}$ y $\overline{q}$ si las matrices "A" y "B" tienen (no tienen) el mismo rango:

$$A/B=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{p} & \overline{q} & \overline{m} \end{array}$$

Como $rg(A) \neq rg(B)$, el vector $\overline{m}$ no es CL de $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

Nota: compara este ejercicio con el 3.3.2

FONEMATO 3.3.8

En el espacio vectorial P_3 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 3 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\bar{h}_1 = 1 + x + x^2 + 2.x^3 \;\; ; \;\; \bar{h}_2 = 2 + x + 3.x^2 + 6.x^3$$
$$\bar{h}_3 = 2.a.x^2 + 2.x^3 \;\; ; \;\; \bar{h}_4 = x + 2.x^2 + a.x^3$$

Estúdiese si $\bar{x} = 1 + x + x^2 + b.x^3$ es combinación lineal de $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ y $\bar{h}_4$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Como cada vector (polinomio) de P_3 está identificado mediante 4 números reales (los coeficientes a_0, a_1, a_2 y a_3), asimilamos cada vector de P_3 a un vector de $\Re^4$: si asimilamos $\bar{v} = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 \in P_3$ a $(a_0;a_1;a_2;a_3) \in \Re^4$, entonces:

$$\bar{h}_1 = 1 + x + x^2 + 2.x^3 \in P_3 \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_1 = (1;1;1;2) \in \Re^4$$
$$\bar{h}_2 = 2 + x + 3.x^2 + 6.x^3 \in P_3 \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_2 = (2;1;3;6) \in \Re^4$$
$$\bar{h}_3 = 2.a.x^2 + 2.x^3 \in P_3 \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_3 = (0;0;2.a;2) \in \Re^4$$
$$\bar{h}_4 = x + 2.x^2 + a.x^3 \in P_3 \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_4 = (0;1;2;a) \in \Re^4$$

Ahora trabajamos como en $\Re^4$: el vector $\bar{x}$ es (no es) CL de $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ y $\bar{h}_4$ si las matrices "A" y "B" tienen (no tienen) el mismo rango:

$$A/B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2.a & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & a & b \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \bar{h}_4 & \bar{x} \end{array} \end{array}$$

Y no seguimos, porque el resto es igual que el ejercicio 3.3.5.

FONEMATO 3.3.9

En el espacio vectorial $M_{2\times2}$ de las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\;;\;\overline{h}_2=\begin{bmatrix}1&2\\5&2\end{bmatrix}\;;\;\overline{x}=\begin{bmatrix}5&8\\7&6\end{bmatrix}$$

Estúdiese si el vector $\overline{x}$ es combinación lineal de los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$.

SOLUCIÓN LENTA

Nada de asustarse porque el espacio vectorial lo formen matrices; para envolver el caramelo con primor, hacemos lo de siempre; o sea, empleamos la definición de combinación lineal de vectores a modo de latiguillo de arranque: el vector $\overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ si pueden encontrarse dos reales α_1 y α_2 tales que $\overline{x}=\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2$... y para averiguarlo basta averiguar si el SLNH originado por $\overline{x}=\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2$ tiene solución o no:

$$\overline{x}=\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2\Rightarrow\begin{bmatrix}5&8\\7&6\end{bmatrix}=\alpha_1\bullet\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}+\alpha_2\bullet\begin{bmatrix}1&2\\5&2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}5=2.\alpha_1+\alpha_2\\8=3.\alpha_1+2.\alpha_2\\7=\alpha_1+5.\alpha_2\\6=2.\alpha_1+2.\alpha_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\ldots.\Rightarrow\begin{Bmatrix}\alpha_1=2\\\alpha_2=1\end{Bmatrix}\Rightarrow\overline{x}=2\bullet\overline{h}_1+1\bullet\overline{h}_2$$

Por tanto, el vector $\overline{x}$ es CL de los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Como cada vector (matriz) de $M_{2\times2}$ está identificado mediante 4 números reales, podemos **asimilar** cada vector de $M_{2\times2}$ a un vector de $\Re^4$. En general, si:

$$\overline{p}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\in M_{2\times2}\text{ lo asimilamos a }\overline{p}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4$$

entonces:

$$\begin{cases}\overline{h}_1=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\in M_{2\times2}\text{ lo asimilamos a }\overline{h}_1=(2;3;1;2)\in\Re^4\\\overline{h}_2=\begin{bmatrix}1&2\\5&2\end{bmatrix}\in M_{2\times2}\text{ lo asimilamos a }\overline{h}_2=(1;2;5;2)\in\Re^4\\\overline{x}=\begin{bmatrix}5&8\\7&6\end{bmatrix}\in M_{2\times2}\text{ lo asimilamos a }\overline{x}=(5;8;7;6)\in\Re^4\end{cases}$$

Ahora trabajamos como en $\Re^4$: el vector $\overline{x}$ es (no es) CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ si las matrices "A" y "B" tienen (no tienen) el mismo rango:

$$\begin{array}{c}A/B=\left[\begin{array}{cc|c}2&1&5\\3&2&8\\1&5&7\\2&2&6\end{array}\right]\\\begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\overline{h}_1&\overline{h}_2&\overline{x}\end{array}\end{array}$$

Como $rg(A)=rg(B)$, el vector $\overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$.

Nota: compara este ejercicio con el 3.3.1

FONEMATO 3.3.10

Sea $H=\{\overline{u}=a_1.x^5+a_2.e^x+a_3.\text{sen}\,x\ /\ a_i\in\Re,\ \forall i=1,2,3\}$ espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales. Estúdiese si el vector $\overline{m}$ es CL de los vectores $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

$$\overline{p}=2.x^5+3.e^x+4.\text{sen}\ x\ ;\ \overline{q}=-2.x^5+e^x+5.\text{sen}\ x\ ;\ \overline{m}=8.x^5+6.\text{sen}\ x$$

SOLUCIÓN LENTA

Como el enunciado no dice nada al respecto, consideramos que la **suma** y el **producto por un escalar** definidas en el espacio vectorial "H" son respectivamente la suma de funciones y el producto de una función por un número. Así, siendo $\overline{u}=a_1.x^5+a_2.e^x+a_3.\text{sen}\,x$, $\overline{v}=b_1.x^5+b_2.e^x+b_3.\text{sen}\,x$, es:

$$\overline{u}+\overline{v}=(a_1+b_1).x^5+(a_2+b_2).e^x+(a_3+b_3).\text{sen}\ x$$

Y si $\alpha\in\Re$, es $\alpha\bullet\overline{u}=(\alpha.a_1).x^5+(\alpha.a_2).e^x+(\alpha.a_3).\text{sen}\ x$.

Nada de asustarse porque el espacio vectorial lo formen funciones; para envolver el caramelo con primor, hacemos lo de siempre; o sea, empleamos la definición de combinación lineal de vectores a modo de latiguillo de arranque: el vector $\overline{m}$ es combinación lineal de $\overline{p}$ y $\overline{q}$ si existen dos reales α_1 y α_2 tales que $\overline{m}=\alpha_1\bullet\overline{p}+\alpha_2\bullet\overline{q}$... y para averiguarlo basta averiguar si el SLNH originado por $\overline{x}=\alpha_1\bullet\overline{p}+\alpha_2\bullet\overline{q}$ tiene solución o no:

$$\overline{m}=\alpha_1\bullet\overline{p}+\alpha_2\bullet\overline{q}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8.x^5+6.\text{sen}\ x=\alpha_1.(2.x^5+3.e^x+4.\text{sen}\ x)+\alpha_2.(-2.x^5+e^x+5.\text{sen}\ x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}8=2.\alpha_1-2.\alpha_2\\0=3.\alpha_1+\alpha_2\\6=4.\alpha_1+5.\alpha_2\end{Bmatrix}\Rightarrow \text{incompatible}\Rightarrow\overline{m}\text{ no es CL de }\overline{p}\text{ y }\overline{q}$$

las matrices de coeficientes y ampliada tienen distinto rango

SOLUCIÓN RÁPIDA

Como cada vector (función) de "H" está identificado mediante los 3 números reales a_1, a_2 y a_3, podemos **asimilarlo** a un vector de $\Re^3$. En general, si:

$$\overline{u}=a_1.x^5+a_2.e^x+a_3.\text{sen}\ x\in H\text{ lo asimilamos a }\overline{u}=(a_1;a_2;a_3)\in\Re^3$$

entonces:

$$\begin{cases}\overline{p}=2.x^5+3.e^x+4.\text{sen}\ x\in H\text{ lo asimilamos a }\overline{p}=(2;3;4)\in\Re^3\\ \overline{q}=-2.x^5+e^x+5.\text{sen}\ x\in H\text{ lo asimilamos a }\overline{q}=(-2;1;5)\in\Re^3\\ \overline{m}=8.x^5+6.\text{sen}\ x\in H\text{ lo asimilamos a }\overline{m}=(8;0;6)\in\Re^3\end{cases}$$

Ahora trabajamos como en $\Re^3$: el vector $\overline{m}$ es (no es) CL de $\overline{p}$ y $\overline{q}$ si las matrices "A" y "B" tienen (no tiene) el mismo rango:

$$A/B=\left[\begin{array}{cc|c}2&-2&8\\3&1&0\\4&5&6\end{array}\right]$$
$$\begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\overline{p}&\overline{q}&\overline{m}\end{array}$$

Como $rg(A)\neq rg(B)$, el vector $\overline{m}$ no es CL de $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

3.4 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

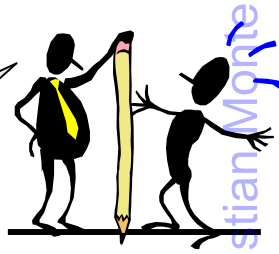
Siendo $(V;+;\bullet)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\Re$ y $W=\{\overline{h}_1,\dots,\overline{h}_k\}$ un subconjunto de "V", se dice que los vectores $\overline{h}_1,\dots,\overline{h}_k$ son **linealmente independientes** o que "W" es **libre,** si la ecuación vectorial $\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\alpha_k\bullet\overline{h}_k=\overline{0}$ admite sólo la **solución trivial.** En caso contrario se dice que $\overline{h}_1,\dots,\overline{h}_k$ son **linealmente dependientes,** o que "W" es **ligado.**

Ahorrarás tiempo si linealmente independientes lo abrevias LI y linealmente dependientes lo abrevias LD.

Desmitificación del asunto

Lo normal es que tras leer las anteriores definiciones no sientas frío ni calor respecto de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores. Con el ánimo de aclarar las cosas, la siguiente historia introduce la noción de lo que llamaremos **información repetida** (recuerda que los vectores son almacenes de información).

Hablar de **información repetida** es hablar de "información" que se puede obtener a partir de otra "información" que ya se posee



Historia tontorrona

Imagina que en un partido Madrid/Barcelona empatan a dos y que Mario, que no conoce el resultado, pregunta a un amigo. Éste, por toda respuesta, entrega a Mario cuatro tarjetas:

* en la 1ª, llamada $\overline{h}_1$, dice: el Madrid ha marcado 2 goles
* en la 2ª, llamada $\overline{h}_2$, dice: en total se han marcado 4 goles
* en la 3ª, llamada $\overline{h}_3$, dice: el Barcelona ha marcado 2 goles
* en la 4ª, llamada $\overline{h}_4$, dice: tengo una vaca lechera que da leche merengada

Cuando Mario tiene las 4 tarjetas en sus manos, se plantea la **pregunta del millón:**

¿Tengo información repetida?

Es obvio que **hay información repetida,** pues resulta obvio que:

a) La información que contiene la tarjeta $\overline{h}_1$ puede obtenerse a partir de la información que contienen las tarjetas $\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.

b) La información que contiene la tarjeta $\overline{h}_2$ puede obtenerse a partir de la información que contienen las tarjetas $\overline{h}_1,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.

c) La información que contiene la tarjeta $\overline{h}_3$ puede obtenerse a partir de la información que contienen las tarjetas $\overline{h}_1,\overline{h}_2$ y $\overline{h}_4$.

Mario, al ver que tiene **información repetida**, decide tirar a la basura la tarjeta $\overline{h}_3$, y en sus manos quedan $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_4$. Así las cosas, cabe plantearse otra vez la pregunta del millón: **¿hay ahora información repetida?**

La respuesta es obvia: **ahora no hay información repetida**, pues:

a) Es **imposible** obtener la información que contiene la tarjeta $\overline{h}_1$ a partir de la información que contienen $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_4$.

b) Es **imposible** obtener la información que contiene la tarjeta $\overline{h}_2$ a partir de la información que contienen $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_4$.

c) Es **imposible** obtener la información que contiene la tarjeta $\overline{h}_4$ a partir de la información que contienen $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$.

Que quede muy claro: a pesar de tener ahora sólo 3 tarjetas, Mario no ha perdido **información** al tirar $\overline{h}_3$ a la basura, pues la **información** eliminada puede obtenerla sin dificultad alguna a partir de la **información** con que se ha quedado... y es evidente que lo mismo ocurre si en lugar de tirar la tarjeta $\overline{h}_3$ a la basura, tira la tarjeta $\overline{h}_1$ o la $\overline{h}_2$.

Considera ahora que Mario, con las cuatro tarjetas en la mano, tira a la basura la tarjeta $\overline{h}_4$ quedándose con $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$. De nuevo la pregunta del millón: ¿tiene ahora **información repetida** en las manos?

Es evidente que **ahora hay información repetida**, pues:

a) La información que contiene la tarjeta $\overline{h}_1$ puede obtenerse a partir de la información que contienen las tarjetas $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.

b) La información que contiene la tarjeta $\overline{h}_2$ puede obtenerse a partir de la información que contienen las tarjetas $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_3$.

c) La información que contiene la tarjeta $\overline{h}_3$ puede obtenerse a partir de la información que contienen las tarjetas $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.

Que quede muy claro: al contrario de lo que sucedía al tirar a la basura $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ ó $\overline{h}_3$, sí hay pérdida de **información** si se tira $\overline{h}_4$... y la pérdida se produce porque la **información** tirada (tengo una vaca lechera que da leche merengada) es **imposible** de obtener a partir de la información que contienen las restantes tarjetas $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ que quedan en las manos de Mario.

Imagina que en vez de hablar de tarjetas hablamos de vectores... **la idea es la misma: al afirmar que unos vectores de un espacio vectorial son LI, se afirma que entre ellos no hay información repetida;** o sea, se afirma que **es imposible** obtener la **información** que contiene cualquiera de ellos combinando linealmente la que contienen los restantes. Por el contrario, **al afirmar que unos vectores son LD, se afirma que entre ellos hay información repetida;** o sea, se afirma que **es posible** obtener la **información** que contiene alguno de ellos combinando linealmente la que contienen los restantes.

A efectos prácticos

Para averiguar si los vectores $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_k$ son LI ó LD, exigiremos que se satisfaga $\alpha_1 \bullet \bar{h}_1 + \ldots + \alpha_k \bullet \bar{h}_k = \bar{0}$, lo que SIEMPRE nos conducirá a un SLH con "k" incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ cuya matriz de coeficientes "A" tiene por columnas a los vectores $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_k$. Así las cosas, los vectores $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_k$ son LI si dicho SLH tiene sólo la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, y sucede eso si el rango de "A" coincide con el número de incógnitas del sistema, o sea, si $rg(A) = k$. Si $rg(A) < k$, el SLH no tiene sólo la solución trivial, por lo que $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_k$ son LD.

$$\text{Si } rg \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow\uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \cdots & \bar{h}_k \end{array} \end{array} \begin{cases} = k \Rightarrow \text{vectores LI} \\ < k \Rightarrow \text{vectores LD} \end{cases}$$

¡NO LO OLVIDES!

EL PROFESOR QUE CORRIGE EL EXAMEN

Todos los profesores son de la misma opinión: corregir exámenes no gusta a nadie, no es trabajo agradable enfrentarse por n-ésima vez a la tarea de leer y puntuar un montón de folios escritos por principiantes que en la mayoría de los casos no tienen ni idea y sólo escriben barbaridades y estupideces sobre el asunto de sota, caballo y rey que por j-ésima vez cae en examen. Por eso, cuando un profe se sienta a corregir exámenes no suele estar de buen humor.

Así las cosas, lo que escribamos o dibujemos en examen debe diferenciarnos positivamente de los demás, y para conseguir tal diferenciación y que al profe se le caigan los pantalones, basta escribir o dibujar pensando que no se lo sabe y por tanto hay que llevarle de la mano, explicándole todos los aspectos más relevantes de las conexiones neuronales que establezcamos en cada caso.

FONEMATO 3.4.1

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1 = (4;2;5;3) \;;\; \overline{h}_2 = (3;2;2;6) \;;\; \overline{h}_3 = (4;7;4;2)$$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal.

SOLUCIÓN LENTA

Latiguillo de arranque: los vectores dados $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3$ son LI si la ecuación vectorial $\alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{h}_2 + \alpha_3 \bullet \overline{h}_3 = \overline{0}$ sólo admite la solución $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; en caso contrario son LD:

$$\alpha_1 \bullet (4;2;5;3) + \alpha_2 \bullet (3;2;2;6) + \alpha_3 \bullet (4;7;4;2) = (0;0;0;0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4.\alpha_1 + 3.\alpha_2 + 4.\alpha_3 = 0 \\ 2.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + 7.\alpha_3 = 0 \\ 5.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + 4.\alpha_3 = 0 \\ 3.\alpha_1 + 6.\alpha_2 + 2.\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{solución trivial}$$

$\boxed{\text{pues } rg(A) = 3 = n^{o} \text{ de incógnitas}}$

Por tanto, los tres vectores dados son LI, y eso significa que **entre ellos no hay información repetida;** o sea: **es imposible obtener la información que contiene cualquiera de ellos combinando linealmente la que contienen los restantes.**

Recuerda: para indicar que los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI, también se dice que el conjunto $S = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$ es **libre.**

SOLUCIÓN RÁPIDA

Liberto Vector Libre, profesional del Álgebra de lo Lineal que ha resuelto miles de ejercicios sobre dependencia o independencia lineal de vectores, una brumosa tarde otoñal, mientras arrullado por melodías de los Panchos depila con esmero digno de mejor causa sus aceitunadas piernas, se ve asaltado por la necesidad de analizar la dependencia o independencia lineal de los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$... y como profesional, Liberto sabe que para averiguar si unos vectores $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k$ son LI ó LD basta calcular el rango de las matriz "A" cuyas columnas son esos vectores, que son LI ó LD según sea $rg(A) = k$ ó $rg(A) < k$.

Así las cosas, Liberto **tarda nada** en averiguar que los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI, pues **pasa olímpicamente** de $\alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{h}_2 + \alpha_3 \bullet \overline{h}_3 = \overline{0}$ **y va al grano:** con la rapidez del rayo escribe la matriz "A" para su caso:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{matrix} \end{array}$$

Y tras comprobar que $rg(A) = 3 = n^{o}$ vectores, Liberto se apuesta la vida y tres huevos duros a que los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI.

FONEMATO 3.4.2

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores $\overline{h}_1=(4;3)$ y $\overline{h}_2=(2;2)$. Estúdiese su dependencia o independencia lineal.

SOLUCIÓN LENTA

Empleamos la definición de independencia lineal a modo de latiguillo de arranque: los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI si la ecuación vectorial $\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2=\overline{0}$ sólo admite la solución trivial $\alpha_1=\alpha_2=0$; en caso contrario son LD.

$$\alpha_1\bullet(4;3)+\alpha_2\bullet(2;2)=(0;0)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}4.\alpha_1+2.\alpha_2=0\\3.\alpha_1+2.\alpha_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}4&2\\3&2\end{bmatrix}}_{A}\bullet\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{sólo tiene la solución trivial}$$

$$\boxed{\text{pues } rg(A)=2=n^{o}\text{ de incógnitas}}$$

Por tanto, los dos vectores dados son LI, lo que significa que entre ellos no hay información repetida; o sea: es imposible obtener la información que contiene cualquiera de ellos combinando linealmente la que contiene el otro (los dos vectores dados no son proporcionales).

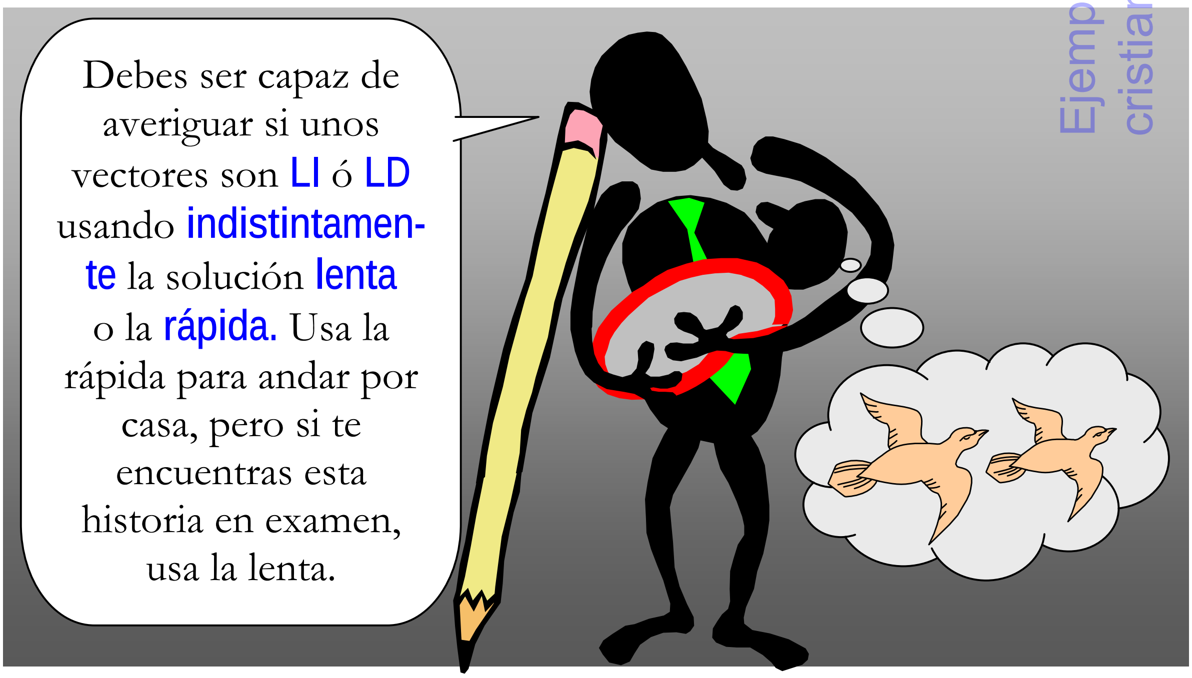
Recuerda: para indicar que $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI, se dice que $S=\{\overline{h}_1,\overline{h}_2\}$ es libre.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI, ya que:

$$rg\begin{bmatrix}4&2\\3&2\end{bmatrix}=2\equiv\text{número de vectores}$$

$$\begin{matrix}\uparrow&\uparrow\\\overline{h}_1&\overline{h}_2\end{matrix}$$



FONEMATO 3.4.3

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$1)\ \bar{h}_1=(1;2;3;1)\ ;\ \bar{h}_2=(2;1;1;3)\ ;\ \bar{h}_3=(3;3;\lambda;4)$$
$$2)\ \bar{h}_1=(1;2;3;1)\ ;\ \bar{h}_2=(2;1;1;3)\ ;\ \bar{h}_3=(3;3;\lambda;6)$$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal según el valor de λ.

SOLUCIÓN RÁPIDA

1) En este caso, es:

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&1&\lambda\\1&3&4\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{h}_1&\bar{h}_2&\bar{h}_3\end{array}\end{array}$$

Siendo no nulo el menor de orden 2 indicado, es $rg(A)\geq 2$. Será $rg(A)=3$ si es no nulo alguno de los menores de orden 3 obtenidos al orlar el citado menor no nulo de orden 2:

$$H_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&1&\lambda\end{vmatrix}=12-3.\lambda\ ;\ H_2=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\\1&3&4\end{vmatrix}=0$$

Por tanto:

- Si $\lambda\neq 4\Rightarrow H_1\neq 0\Rightarrow rg(A)=3=n^o$ de vectores $\Rightarrow$ LI.
- Si $\lambda=4\Rightarrow H_1=H_2=0\Rightarrow rg(A)=2<n^o$ de vectores $\Rightarrow$ LD.

2) En este caso, es:

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&1&\lambda\\1&3&6\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{h}_1&\bar{h}_2&\bar{h}_3\end{array}\end{array}$$

Siendo no nulo el menor de orden 2 indicado, es $rg(A)\geq 2$. Será $rg(A)=3$ si es no nulo alguno de los menores de orden 3 que se obtienen al orlar el citado menor no nulo de orden 2:

$$H_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&1&\lambda\end{vmatrix}=12-3.\lambda\ ;\ H_2=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\\1&3&6\end{vmatrix}\neq 0$$

Como $H_2\neq 0,\forall\lambda\Rightarrow\forall\lambda$ es $rg(A)=3=n^o$ de vectores, los vectores $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son LI para todo valor de λ.

De otro modo: el conjunto $\{\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3\}$ es libre para todo valor de λ.

FONEMATO 3.4.4

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(4;2;5;3)\ ;\ \overline{h}_2=(3;2;2;6)\ ;\ \overline{h}_3=(5;2;8;0)$$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Latiguillo: los vectores $\overline{h}_1,\ldots,\overline{h}_k$ son LI ó LD según que sea $rg(A)=k$ ó $rg(A)<k$, donde "A" es la matriz cuyas columnas son dichos vectores.

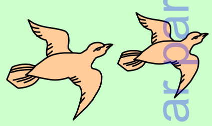
En nuestro caso:

$$\begin{array}{c} A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{array} \end{array}$$

Como $rg(A)=2<n^o$ de vectores, los vectores $\overline{h}_1,\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LD; o sea, entre ellos hay **información repetida**: la **información** que contiene alguno de ellos puede obtenerse **combinando linealmente** la que contienen los restantes.

Very important note

Si "A" es la matriz cuyas columnas son los vectores $\overline{h}_1,\ldots,\overline{h}_k$, sabemos estos vectores son LD si $rg(A)<k$. Pues bien, el que $rg(A)=p<k$ indica que entre los "k" vectores $\overline{h}_1,\ldots,\overline{h}_k$ pueden seleccionarse como máximo "p" vectores que sean LI, y combinando linealmente esos "p" vectores pueden obtenerse los restantes "k–p" vectores.



Pregunta: ¿Cómo se seleccionan "p" vectores LI?

Respuesta: Son LI los "p" vectores correspondientes a cualesquiera "p" columnas de "A" con las que pueda formarse un menor no nulo de orden "p".

En nuestro caso, siendo $k=3$ (nos dan tres vectores), el que sea $rg(A)=2$ significa que entre todos los vectores dados pueden seleccionarse como máximo 2 vectores que sean LI... y son LI los dos vectores correspondientes a cualesquiera dos columnas de "A" con las que pueda formarse un menor no nulo de orden dos. Por tanto, podemos hacer cualquiera de las siguientes afirmaciones:

- Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ lo forman la primera y segunda columnas de "A" y es no nulo, $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI (o sea, $\{\overline{h}_1,\overline{h}_2\}$ es libre), y $\overline{h}_3$ es CL de ellos:

$$\overline{h}_3=\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(5;2;8;0)=\alpha_1\bullet(4;2;5;3)+\alpha_2\bullet(3;2;2;6)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 5 = 4.\alpha_1 + 3.\alpha_2 \\ 2 = 2.\alpha_1 + 2.\alpha_2 \\ 8 = 5.\alpha_1 + 2.\alpha_2 \\ 0 = 3.\alpha_1 + 6.\alpha_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{h}_3 = 2 \bullet \bar{h}_1 + (-1) \bullet \bar{h}_2$$

- Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ está formado por las columnas 1ª y 3ª de "A" y es no nulo, $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_3$ son LI (o sea, $\{\bar{h}_1, \bar{h}_3\}$ es libre), y $\bar{h}_2$ es CL de ellos:

$$\bar{h}_2 = \beta_1 \bullet \bar{h}_1 + \beta_2 \bullet \bar{h}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3;2;2;6) = \beta_1 \bullet (4;2;5;3) + \beta_2 \bullet (5;2;8;0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 3 = 4.\beta_1 + 5.\beta_2 \\ 2 = 2.\beta_1 + 2.\beta_2 \\ 2 = 5.\beta_1 + 8.\beta_2 \\ 6 = 3.\beta_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{h}_2 = 2 \bullet \bar{h}_1 + (-1) \bullet \bar{h}_3$$

- Como el menor $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ está formado por las columnas 2ª y 3ª de "A" y es no nulo, $\bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son LI (o sea, $\{\bar{h}_2, \bar{h}_3\}$ es libre), y $\bar{h}_1$ es CL de ellos:

$$\bar{h}_1 = \theta_1 \bullet \bar{h}_2 + \theta_2 \bullet \bar{h}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4;2;5;3) = \theta_1 \bullet (3;2;2;6) + \theta_2 \bullet (5;2;8;0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 4 = 3.\theta_1 + 5.\theta_2 \\ 2 = 2.\theta_1 + 2.\theta_2 \\ 5 = 2.\theta_1 + 8.\theta_2 \\ 3 = 6.\theta_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 = 1/2 \\ \theta_2 = 1/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{h}_1 = \frac{1}{2} \bullet \bar{h}_2 + \frac{1}{2} \bullet \bar{h}_3$$

FÍJATE BIEN

Una vez conocido uno cualquiera de los resultados anteriores, es trivial determinar los otros. ***Por ejemplo,*** sabiendo que $\bar{h}_3 = 2 \bullet \bar{h}_1 + (-1) \bullet \bar{h}_2$, sin más que despejar $\bar{h}_1$ ó $\bar{h}_2$, se obtiene:

$$\bar{h}_2 = 2 \bullet \bar{h}_1 + (-1) \bullet \bar{h}_3 \quad ; \quad \bar{h}_1 = \frac{1}{2} \bullet \bar{h}_2 + \frac{1}{2} \bullet \bar{h}_3$$

FONEMATO 3.4.5

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\bar{h}_1=(1;1;a;3)\ ;\ \bar{h}_2=(1;-1;-5;1)\ ;\ \bar{h}_3=(-b;1;-2;1)$$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal según los valores de "a" y "b".

SOLUCIÓN RÁPIDA

Para averiguar si los vectores $\bar{h}_1,\ldots,\bar{h}_k$ son LI ó LD basta calcular el rango de la matriz "A" cuyas columnas son dichos vectores, de modo que son LI ó LD según sea $rg(A)=k$ ó $rg(A)<k$. En nuestro caso:

$$\begin{array}{c} A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ 1 & -1 & 1 \\ a & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \end{array} \end{array}$$

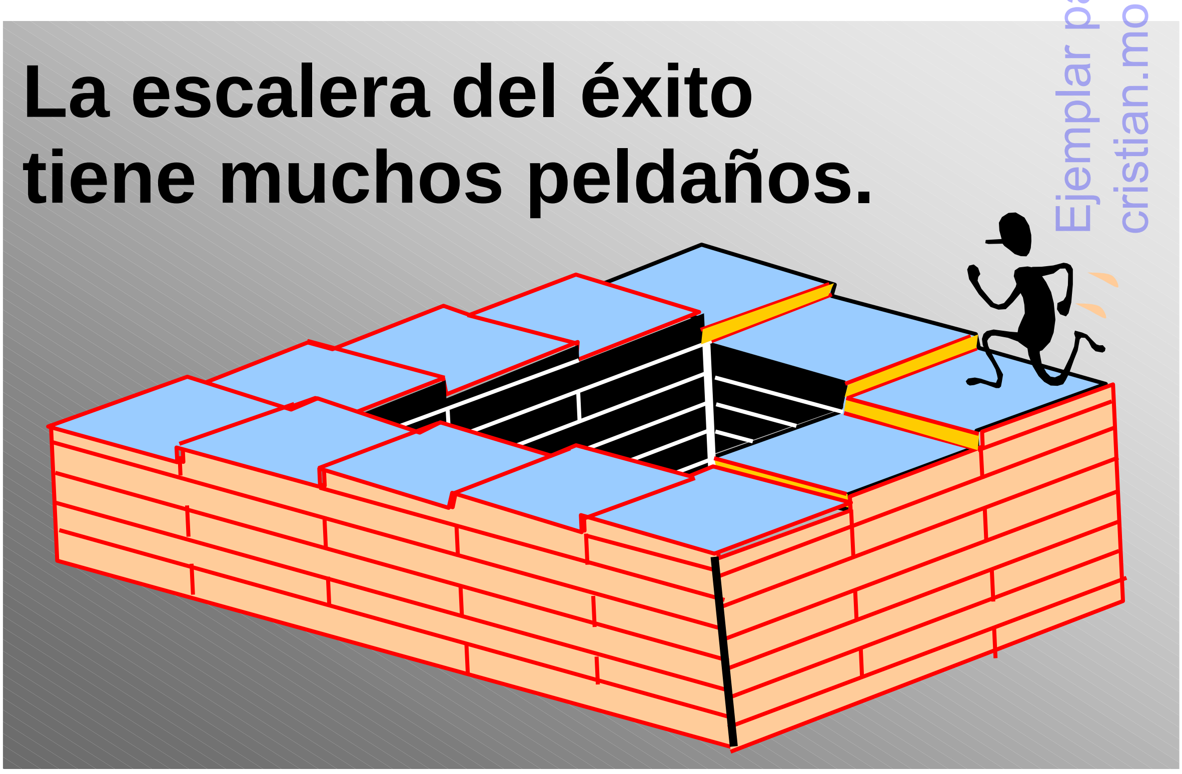
Siendo no nulo el menor de orden 2 indicado, es $rg(A)\geq 2$.

Al orlar dicho menor de orden 2 resultan los siguientes menores de orden 3:

$$H_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -b \\ 1 & -1 & 1 \\ a & -5 & -2 \end{vmatrix}=9+5.b+a-a.b\ ;\ H_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -b \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4.b$$

Por tanto:

- Si $b\neq 0\Rightarrow H_2\neq 0\Rightarrow rg(A)=3=n^o$ de vectores $\Rightarrow$ LI
- Si $b=0\Rightarrow H_2=0$ y $H_1=9+a$; así:
  - $*$ Si $a\neq -9\Rightarrow H_1\neq 0\Rightarrow rg(A)=3=n^o$ de vectores $\Rightarrow$ LI
  - $*$ Si $a=-9\Rightarrow H_1=H_2=0\Rightarrow rg(A)=2<n^o$ de vectores $\Rightarrow$ LD



FONEMATO 3.4.6

En el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2 sobre el cuerpo de los reales, estúdiese la dependencia o independencia lineal de los vectores $3.x^2+2.x+5$, $2.x^2+3$ y x^2+x+1.

SOLUCIÓN LENTA

- Si los vectores no tienen nombre se deprimen, y para evitar que los nuestros caigan en tan penoso estado, los bautizamos:
$$\bar{h}_1 = 3.x^2+2.x+5 \ ; \ \bar{h}_2 = 2.x^2+3 \ ; \ \bar{h}_3 = x^2+x+1$$
- Nada de asustarse porque el espacio vectorial lo formen polinomios. Para envolver el caramelo con primor, empleamos la definición de independencia lineal de vectores a modo de latiguillo de arranque: los vectores $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son LI si la ecuación vectorial $\alpha_1 \bullet \bar{h}_1 + \alpha_2 \bullet \bar{h}_2 + \alpha_3 \bullet \bar{h}_3 = \bar{0}$ admite únicamente la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; en caso contrario son LD.
- Como el vector cero de P_2 es el polinomio $\bar{0} = 0.x^2+0.x+0 = 0$, la ecuación $\alpha_1 \bullet \bar{h}_1 + \alpha_2 \bullet \bar{h}_2 + \alpha_3 \bullet \bar{h}_3 = \bar{0}$ se convierte en:
$$\alpha_1 \bullet (3.x^2+2.x+5) + \alpha_2 \bullet (2.x^2+3) + \alpha_3 \bullet (x^2+x+1) = 0$$
que nos lleva a un SLH de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:
$$\left.\begin{array}{r} 3.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2.\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 5.\alpha_1 + 3.\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Como $rg(A) = 3 =$ número de incógnitas, el SLH sólo tiene la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por tanto, $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son LI: entre ellos no hay información repetida: es imposible obtener la información que contiene cualquiera de ellos combinando linealmente la que contienen los restantes.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Asimilamos cada vector de P_2 a un vector de $\Re^3$:

$$\bar{h}_1 = 3.x^2+2.x+5 \in P_2 \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_1 = (3;2;5) \in \Re^3$$
$$\bar{h}_2 = 2.x^2+3 \in P_2 \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_2 = (2;0;3) \in \Re^3$$
$$\bar{h}_3 = x^2+x+1 \in P_2 \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_3 = (1;1;1) \in \Re^3$$

Y ahora trabajamos como en $\Re^3$:

$$rg \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \end{array} \end{array} = 3 = \text{n}^\text{o} \text{ de vectores} \Rightarrow \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3\} \text{ es libre}$$

Que quede muy claro: el conjunto de los polinomios de grado 2 no es un espacio vectorial, pues la suma de polinomios no es interna a dicho conjunto. ***Por ejemplo,*** $\bar{u} = x^2 + x$ y $\bar{v} = -x^2 + 3$ son polinomios de grado 2, pero su suma $\bar{u} + \bar{v} = x + 3$ no es un polinomio de grado 2.

FONEMATO 3.4.7

En el espacio vectorial $M_{2\times 3}$ de las matrices de orden 2×3 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix};\ \overline{h}_2=\begin{bmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix};\ \overline{h}_3=\begin{bmatrix}3 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 9\end{bmatrix}$$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal.

SOLUCIÓN LENTA

Nada de asustarse porque el espacio vectorial lo formen matrices. Para envolver el caramelo, hacemos lo de siempre; o sea, empleamos la definición de independencia lineal de vectores como latiguillo de arranque: los vectores $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI si la ecuación vectorial $\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2+\alpha_3\bullet\overline{h}_3=\overline{0}$ admite sólo la solución trivial $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$; en caso contrario son LD.

$$\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2+\alpha_3\bullet\overline{h}_3=\overline{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha_1\bullet\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}+\alpha_2\bullet\begin{bmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}+\alpha_3\bullet\begin{bmatrix}3 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}\alpha_1+2.\alpha_2+3.\alpha_3=0\\ 2.\alpha_1+3.\alpha_2+5.\alpha_3=0\\ 6.\alpha_2+6.\alpha_3=0\\ 3.\alpha_1+\alpha_2+4.\alpha_3=0\\ 4.\alpha_1+\alpha_2+5.\alpha_3=0\\ 5.\alpha_1+4.\alpha_2+6.\alpha_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 0 & 6 & 6\\ 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 5\\ 5 & 4 & 9\end{bmatrix}}_{A}\bullet\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Como $rg(A)=2<n^{o}$ de incógnitas, el SLH no tiene sólo la solución trivial; por tanto, los tres vectores dados son LD: entre ellos hay información repetida: es posible obtener la información que contiene alguno de ellos combinando linealmente la que contienen los restantes. Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI, y el vector $\overline{h}_3$ es CL de ellos:

$$\overline{h}_3=\beta_1\bullet\overline{h}_1+\beta_2\bullet\overline{h}_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 9\end{bmatrix}=\beta_1\bullet\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}+\beta_2\bullet\begin{bmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}\beta_1+2.\beta_2=3\\ 2.\beta_1+3.\beta_2=5\\ 6.\beta_2=6\\ 3.\beta_1+\beta_2=4\\ 4.\beta_1+\beta_2=5\\ 5.\beta_1+4.\beta_2=9\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\beta_1=1\\ \beta_2=1\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{h}_3=1\bullet\overline{h}_1+1\bullet\overline{h}_2$$

REGLA INFALIBLE PARA EVALUAR LA SOLVENCIA DE TUS CONOCIMIENTOS

No entiendes realmente algo si no eres capaz de explicárselo a tu abuel@.

Albert Einstein

SOLUCIÓN RÁPIDA

Como cada vector de $M_{2\times 3}$ lo forman 6 números, podemos **asimilarlo** a un vector de $\Re^6$:

$$\bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3} \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_1 = (1;2;0;3;4;5) \in \Re^6$$

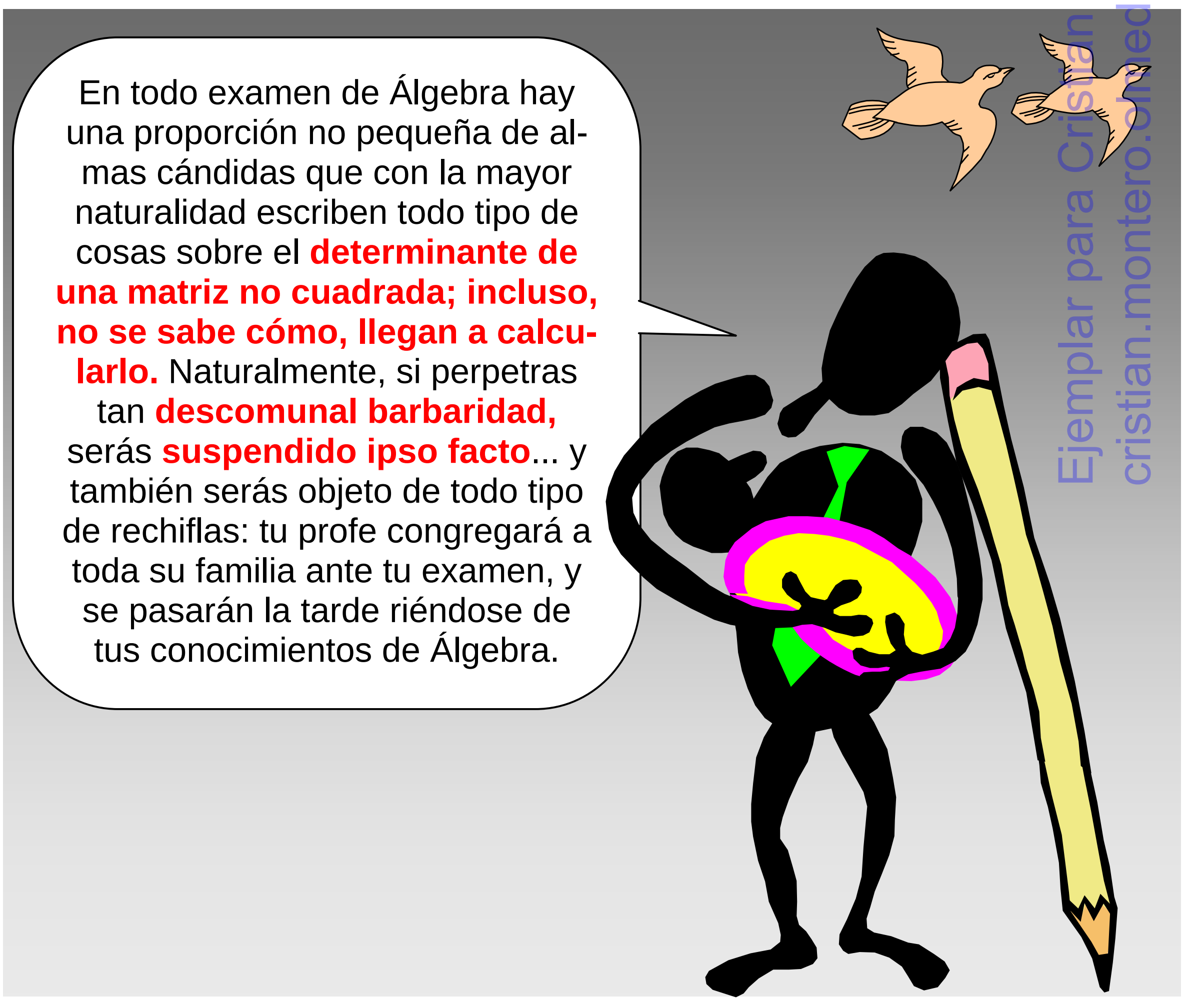
$$\bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3} \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_2 = (2;3;6;1;1;4) \in \Re^6$$

$$\bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3} \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_3 = (3;5;6;4;5;9) \in \Re^6$$

Ahora trabajamos como $\Re^6$; es decir, **construimos** la matriz "A" cuyas columnas son los vectores dados y calculamos su rango:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \end{array} \end{array}$$

Como $rg(A) = 2 < n^o$ de vectores, los vectores $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son LD.



FONEMATO 3.4.8

En el espacio vectorial P_3 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 3 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1 = 3.x^3 - x^2 + 1 \;\; ; \;\; \overline{h}_2 = 2.x^3 + x^2 + 3.x + 2 \;\; ; \;\; \overline{h}_3 = 8.x^3 - x^2 + \lambda.x + 4$$

Analícese su dependencia o independencia lineal según los valores de λ.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Asimilamos cada vector de P_3 a un vector de $\Re^4$:

$$\overline{h}_1 = 3.x^3 - x^2 + 1 \in P_3 \text{ lo asimilamos a } \overline{h}_1 = (3;-1;0;1) \in \Re^4$$
$$\overline{h}_2 = 2.x^3 + x^2 + 3.x + 2 \in P_3 \text{ lo asimilamos a } \overline{h}_2 = (2;1;3;2) \in \Re^4$$
$$\overline{h}_3 = 8.x^3 - x^2 + \lambda.x \in P_3 \text{ lo asimilamos a } \overline{h}_3 = (8;-1;\lambda;4) \in \Re^4$$

Ahora trabajamos como en $\Re^4$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & \lambda \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{array} \end{array}$$

Siendo no nulo el menor de orden 2 indicado en "A", es $\mathrm{rg}(A) \geq 2$.

Al orlar dicho menor de orden 2 se obtienen los siguientes menores de orden 3:

$$H_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = 5.\lambda - 15 \;\; ; \;\; H_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 3 \Rightarrow H_1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 3 = \text{nº de vectores} \Rightarrow \text{LI}$.
- Si $\lambda = 3 \Rightarrow H_1 = H_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 2 < \text{nº de vectores} \Rightarrow \text{LD}$.

FONEMATO 3.4.9

En el espacio vectorial $M_{2\times2}$ de las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; \overline{h}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \; ; \; \overline{h}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix}$$

Analícese su dependencia o independencia lineal según el valor de λ.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Como cada vector de $M_{2\times2}$ está formado por 4 números reales, asimilamos cada vector de $M_{2\times2}$ a un vector de $\Re^4$:

$$\overline{h}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in M_{2\times2} \text{ lo asimilamos a } \overline{h}_1 = (2;4;1;-1) \in \Re^4$$

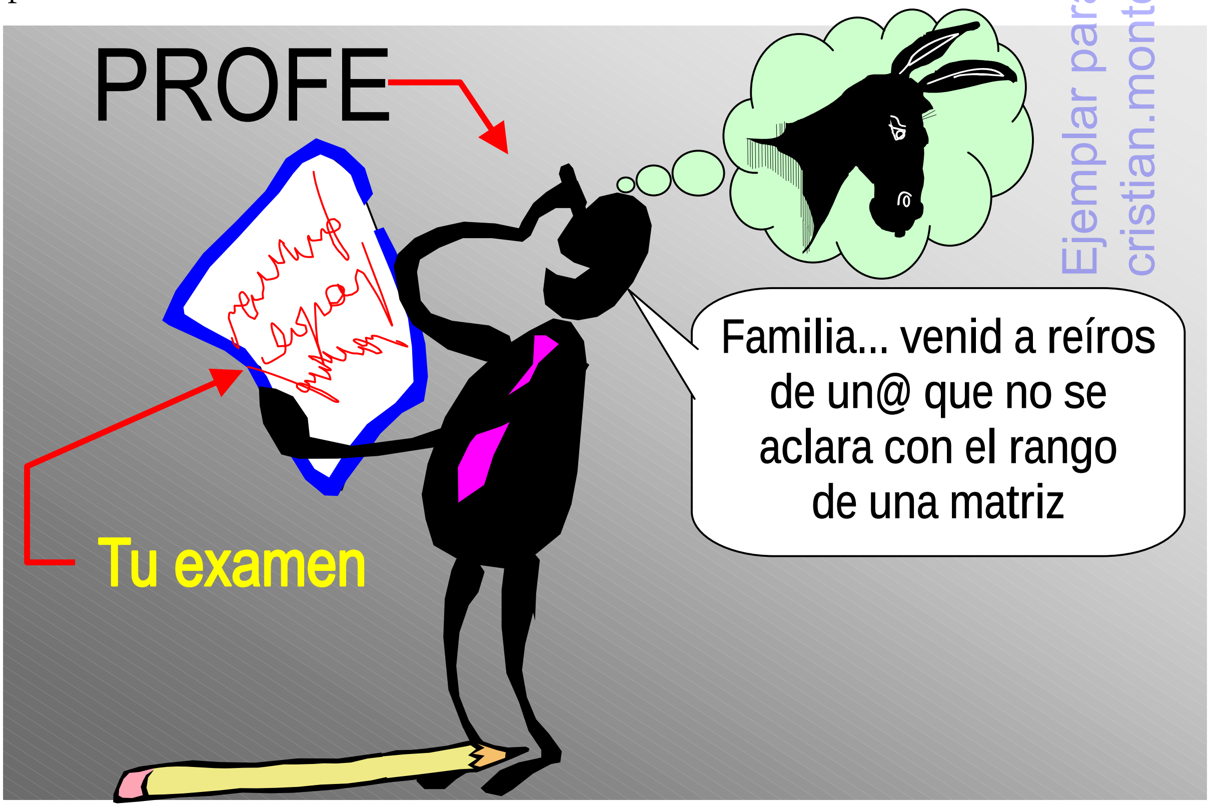
$$\overline{h}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2\times2} \text{ lo asimilamos a } \overline{h}_2 = (5;6;7;4) \in \Re^4$$

$$\overline{h}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix} \in M_{2\times2} \text{ lo asimilamos a } \overline{h}_3 = (3;2;3;\lambda) \in \Re^4$$

Ahora trabajamos como en $\Re^4$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 4 & \lambda \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{array} \end{array}.$$

Como el menor de orden 3 indicado es no nulo para todo valor de λ, para todo λ es $rg(A) = 3 =$ número de vectores; por tanto, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI para todo valor de λ.



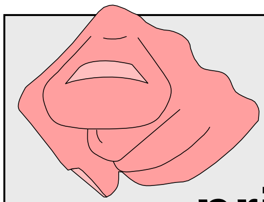
FONEMATO 3.4.10

En el espacio vectorial $M_{2\times 2}$ de las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 6 & a \\ 5 & b \end{bmatrix}$$

Determínense "a" y "b" para que sean linealmente dependientes y calcúlese la relación de dependencia en tal caso.

SOLUCIÓN RÁPIDA



Cuando encuentres con una criatura sin nombre, lo primero SIEMPRE es bautizarla.

Como cada vector de $M_{2\times 2}$ está formado por 4 números reales, tras bautizarlo, podemos asimilarlo a un vector de $\Re^4$:

$$\bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_1 = (3;2;2;1) \in \Re^4$$

$$\bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_2 = (0;2;1;1) \in \Re^4$$

$$\bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 6 & a \\ 5 & b \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \text{ lo asimilamos a } \bar{h}_3 = (6;a;5;b) \in \Re^4$$

Ahora trabajamos como en $\Re^4$: los 3 vectores $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ serán LD si el rango de la matriz "A" es inferior a 3:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{3 \quad 0} & 6 \\ 2 \quad 2 & a \\ \boxed{2 \quad 1} & 5 \\ 1 \quad 1 & b \end{bmatrix}$$
$$\uparrow \; \bar{h}_1 \quad \uparrow \; \bar{h}_2 \quad \uparrow \; \bar{h}_3$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, será $rg(A) < 3$ si son nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar dicho menor de orden 2; es decir, debe ser:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & a \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 18 - 3.a = 0 \Rightarrow a = 6 \;\; ; \;\; \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 3.b - 9 = 0 \Rightarrow b = 3$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, podemos garantizar que los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ LI, y que $\bar{h}_3$ es CL de ellos:

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \delta \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \bullet \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 6 = 3.\delta \\ 6 = 2.\delta + 2.\gamma \\ 5 = 2.\delta + \gamma \\ 3 = \delta + \gamma \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \delta = 2 \\ \gamma = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{h}_3 = 2 \bullet \bar{h}_1 + 1 \bullet \bar{h}_2$$

FONEMATO 3.4.11

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(1;2;0;1)\ ;\ \overline{h}_2=(-1;1;0;2)\ ;\ \overline{h}_3=(1;5;0;4)\ ;\ \overline{h}_4=(5;4;0;-1)$$

1) Estúdiese su dependencia o independencia lineal.
2) Analícese si $\overline{x}=(7;8;0;1)$ es combinación lineal de ellos.

SOLUCIÓN RÁPIDA

1) Unos vectores $\overline{h}_1,\ldots,\overline{h}_k$ son LI ó LD según sea $\mathrm{rg}(A)=k$ ó $\mathrm{rg}(A)<k$, siendo "A" la matriz cuyas columnas son dichos vectores. Es:

$$\begin{array}{c} A=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}1 & 5\\ 5 & 4\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{matrix} & \begin{matrix}0 & 0\\ 4 & -1\end{matrix}\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{h}_4\end{matrix}\end{array}$$

Como $\mathrm{rg}(A)=2<\text{n}^{\text{o}}$ de vectores, los vectores $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ son LD; o sea, entre ellos hay información repetida. Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI, y $\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ son CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$.

2) El pardillo dirá que $\overline{x}=(7;8;0;1)$ es CL de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ si las matrices "A" y "B" tienen el mismo rango:

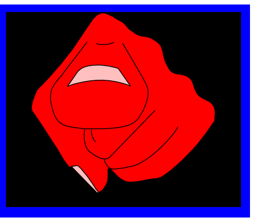
$$\begin{array}{c} A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 7\\ 2 & 1 & 5 & 4 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 4 & -1 & 1\end{array}\right]\\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{h}_4 & \overline{x}\end{matrix}\end{array}$$

El profesional tira a la basura $\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ (pues son información repetida: como $\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ son CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$, no añaden nada a la información que contienen $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$), y dice que $\overline{x}=(7;8;0;1)$ es CL de $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ si las matrices A* y B* tienen igual rango:

$$\begin{array}{c} A^*/B^*=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 7\\ 2 & 1 & 8\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{array}\right]\\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{x}\end{matrix}\end{array}$$

como en efecto sucede.

En examen no hay que desaprovechar ninguna ocasión para acreditar que no somos del montón.



FONEMATO 3.4.12

Sobre el cuerpo de los reales, sea el espacio vectorial

$$H = \left\{\overline{u} = a_1.2^x + a_2.3^x + a_3.54^{.x} \;/\; a_i \in \Re,\ \forall i = 1,2,3\right\}$$

Analícese la dependencia o independencia lineal de los vectores:

$$\overline{h}_1 = 7.2^x + 9.3^x + 6.54^{.x} \;;\; \overline{h}_2 = 8.3^x + 2.54^{.x} \;;\; \overline{h}_3 = 7.54^{.x}$$

SOLUCIÓN LENTA

Como el enunciado no dice nada al respecto, consideramos que la suma y el producto por un escalar definidas en el espacio vectorial "H" son respectivamente la suma de funciones y el producto de una función por un número. Así, siendo $\overline{u} = a_1.2^x + a_2.3^x + a_3.54^{.x}$, $\overline{v} = b_1.2^x + b_2.3^x + b_3.54^{.x}$ y $\alpha \in \Re$, es:

$$\overline{u} + \overline{v} = (a_1 + b_1).2^x + (a_2 + b_2).3^x + (a_3 + b_3).54^{.x}$$

$$\alpha \bullet \overline{u} = (\alpha.a_1).2^x + (\alpha.a_2).3^x + (\alpha.a_3).54^{.x}$$

El vector cero del espacio vectorial "H" es $\overline{0} = 0.2^x + 0.3^x + 0.54^{.x} = 0$.

Nada de asustarse porque el espacio vectorial lo formen funciones. Para envolver el caramelo con primor, empleamos la definición de independencia lineal de vectores como latiguillo de arranque: los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI si la ecuación vectorial $\alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{h}_2 + \alpha_3 \bullet \overline{h}_3 = \overline{0}$ admite sólo la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; en caso contrario son LD.

Al sustituir $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ en $\alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{h}_2 + \alpha_3 \bullet \overline{h}_3 = \overline{0}$ llegamos a un SLH de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\alpha_1 \bullet (7.2^x + 9.3^x + 6.54^{.x}) + \alpha_2 \bullet (8.3^x + 2.54^{.x}) + \alpha_3 \bullet (7.54^{.x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 7.\alpha_1 = 0 \\ 9.\alpha_1 + 8.\alpha_2 = 0 \\ 6.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + 7.\alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $rg(A) = 3 =$ número de incógnitas, el SLH sólo tiene la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; por tanto, los tres vectores dados son LI: entre ellos no hay información repetida: es imposible obtener la información que contiene cualquiera de ellos combinando linealmente la que contienen los restantes.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Como cada vector de "H" está identificado mediante los 3 números reales a_1, a_2 y a_3, podemos asimilarlo a un vector de $\Re^3$.

En general, si:

$$\overline{u} = a_1.2^x + a_2.3^x + a_3.54^{.x} \in H \text{ lo asimilamos a } \overline{u} = (a_1; a_2; a_3) \in \Re^3$$

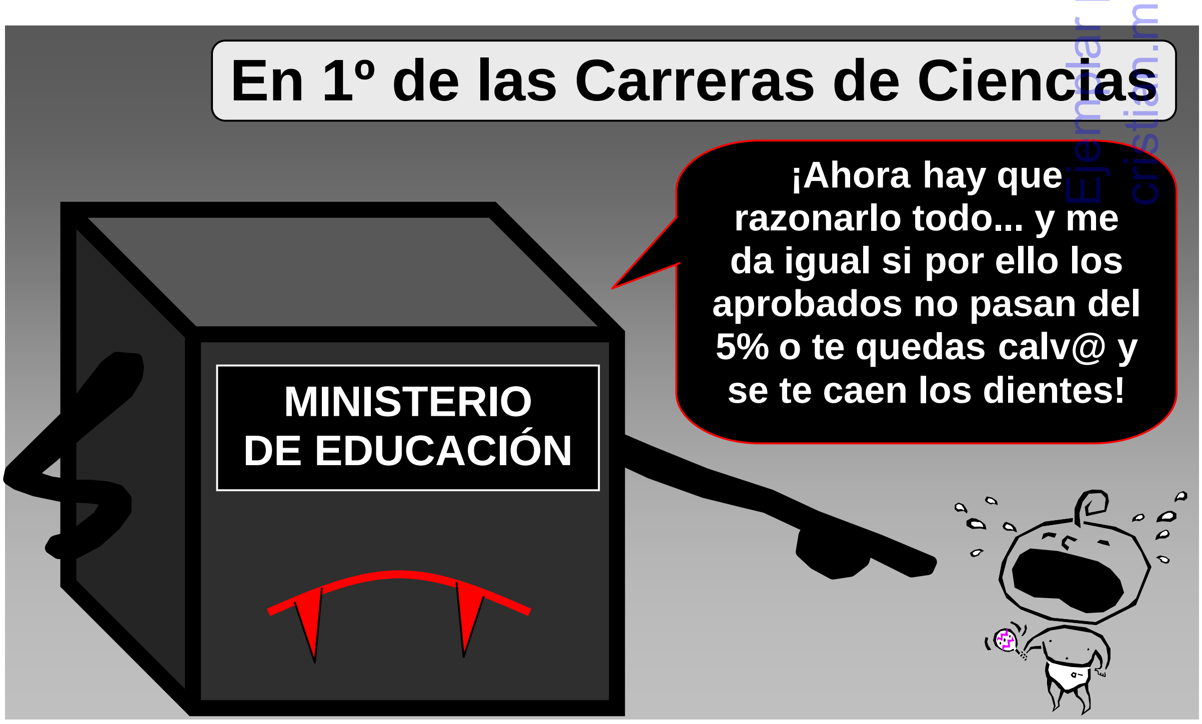
entonces:

$$\overline{h}_1 = 7.2^x + 9.3^x + 6.5^{4.x} \in H \text{ lo asimilamos a } \overline{h}_1 = (7;9;6) \in \mathfrak{R}^3$$
$$\overline{h}_2 = 8.3^x + 2.5^{4.x} \in H \text{ lo asimilamos a } \overline{h}_2 = (0;8;2) \in \mathfrak{R}^3$$
$$\overline{h}_3 = 7.5^{4.x} \in H \text{ lo asimilamos a } \overline{h}_3 = (0;0;7) \in \mathfrak{R}^3$$

Ahora trabajamos como en $\mathfrak{R}^3$: los 3 vectores dados $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ serán LI ó LD según que el rango de la matriz "A" sea 3 o inferior a 3:

$$\begin{array}{c} A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \\ \quad\quad \uparrow \;\; \uparrow \;\; \uparrow \\ \quad\quad \overline{h}_1 \; \overline{h}_2 \; \overline{h}_3 \end{array}$$

Como $rg(A) = 3$, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI; o sea, $\{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$ es libre.



FONEMATO 3.4.13

Sean $\overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{c}$ vectores linealmente independientes. Estúdiese la dependencia o independencia lineal de los vectores $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{a}-\overline{b}$ y $2\bullet\overline{a}+\overline{c}$.

SOLUCIÓN LENTA

Como le pasa a cualquiera con un mínimo de autoestima, los vectores sufren episodios de melancolía si carecen de nombre... y para evitar que los vectores $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{a}-\overline{b}$ y $2\bullet\overline{a}+\overline{c}$ padezcan por nosotros, los bautizamos. Por ejemplo:

$$\overline{h}_1=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\ ;\ \overline{h}_2=\overline{a}-\overline{b}\ ;\ \overline{h}_3=2\bullet\overline{a}+\overline{c}$$

Latiguillo: los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI si la ecuación vectorial

$$\alpha_1\bullet\overline{h}_1+\alpha_2\bullet\overline{h}_2+\alpha_3\bullet\overline{h}_3=\overline{0}$$

admite sólo la solución trivial $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$; en caso contrario son LD.

Veamos:

$$\alpha_1\bullet(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})+\alpha_2\bullet(\overline{a}-\overline{b})+\alpha_3\bullet(2\bullet\overline{a}+\overline{c})=\overline{0}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\alpha_1+\alpha_2+2.\alpha_3)\bullet\overline{a}+(\alpha_1-\alpha_2)\bullet\overline{b}+(\alpha_1+\alpha_3)\bullet\overline{c}=\overline{0}\quad \text{(I)}$$

Como los vectores $\overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{c}$ son LI, podemos garantizar que se satisface (I) sólo si **son nulos todos los coeficientes** que en ella hay; es decir, se satisface (I) sólo si:

$$\left.\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2.\alpha_3=0\\ \alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_1+\alpha_3=0\end{cases}\right\}\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}}_{A}\bullet\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad \text{(II)}$$

Como $\operatorname{rg}(A)=2$, el sistema (II) no tiene sólo la solución trivial. Por tanto, los vectores son LD; o sea, **entre ellos hay información repetida: la información** que contiene alguno de ellos puede obtenerse **combinando linealmente** la que contienen los restantes. Como el menor de orden 2 indicado es no nulo y está formado por la 1ª y 2ª columnas de "A", los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI, y $\overline{h}_3$ es CL de ellos:

$$\overline{h}_3=\lambda_1\bullet\overline{h}_1+\lambda_2\bullet\overline{h}_2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\bullet\overline{a}+0\bullet\overline{b}+\overline{c}=\lambda_1\bullet(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})+\lambda_2\bullet(\overline{a}-\overline{b})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\bullet\overline{a}+0\bullet\overline{b}+\overline{c}=(\lambda_1+\lambda_2)\bullet\overline{a}+(\lambda_1-\lambda_2)\bullet\overline{b}+\lambda_1\bullet\overline{c}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left.\begin{cases}2=\lambda_1+\lambda_2\\0=\lambda_1-\lambda_2\\1=\lambda_1\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\lambda_1=1\\\lambda_2=1\end{cases}\right\}\Rightarrow\overline{h}_1=1\bullet\overline{h}_1+1\bullet\overline{h}_2$$

Ojo al parche: las columnas 1ª, 2ª y 3ª de "A" están formadas respectivamente por los **coeficientes** de la combinación lineal que expresa **cómo** se obtienen los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ a partir de los vectores $\overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{c}$:

$$\overline{h}_1=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\equiv 1\bullet\overline{a}+1\bullet\overline{b}+1\bullet\overline{c}$$
$$\overline{h}_2=\overline{a}-\overline{b}\equiv 1\bullet\overline{a}+(-1)\bullet\overline{b}+0\bullet\overline{c}$$
$$\overline{h}_3=2\bullet\overline{a}+\overline{c}\equiv 2\bullet\overline{a}+0\bullet\overline{b}+1\bullet\overline{c}$$

Así, por ejemplo, si te dicen que los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ y $\bar{k}$ son LI, los vectores

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= 2 \bullet \bar{u} + 3 \bullet \bar{v} + 4 \bullet \bar{w} + 2 \bullet \bar{k} \\ \bar{z}_2 &= 1 \bullet \bar{u} + 1 \bullet \bar{v} - 2 \bullet \bar{w} - 2 \bullet \bar{k} \\ \bar{z}_3 &= 5 \bullet \bar{u} + 7 \bullet \bar{v} + 6 \bullet \bar{w} + 2 \bullet \bar{k} \end{aligned}$$

son LD, pues

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 2$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{array}$$

FONEMATO 3.4.14

Si los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son linealmente independientes, estúdiese la dependencia o independencia lineal de los vectores $\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{a}-\bar{b}$ y $\bar{a}+\bar{b}$.

SOLUCIÓN LENTA

Todos los entes se deprimen si carecen de nombre... y para evitar que los vectores $\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{a}-\bar{b}$ y $\bar{a}+\bar{b}$ tengan ese problema, los bautizamos

$$\bar{h}_1 = \bar{a}+\bar{b}-\bar{c} \;;\; \bar{h}_2 = \bar{a}-\bar{b} \;;\; \bar{h}_3 = \bar{a}+\bar{b}$$

Latiguillo: los vectores $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son LI si la ecuación vectorial

$$\alpha_1 \bullet \bar{h}_1 + \alpha_2 \bullet \bar{h}_2 + \alpha_3 \bullet \bar{h}_3 = \bar{0} \quad \text{(I)}$$

admite sólo la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; en caso contrario son LD.

Al sustituir $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ en (I), se obtiene:

$$\alpha_1 \bullet (\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}) + \alpha_2 \bullet (\bar{a}-\bar{b}) + \alpha_3 \bullet (\bar{a}+\bar{b}) = \bar{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \bullet \bar{a} + (\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3) \bullet \bar{b} - \alpha_1 \bullet \bar{c} = \bar{0} \quad \text{(II)}$$

Como $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son LI, se satisface (II) sólo si son nulos todos los coeficientes:

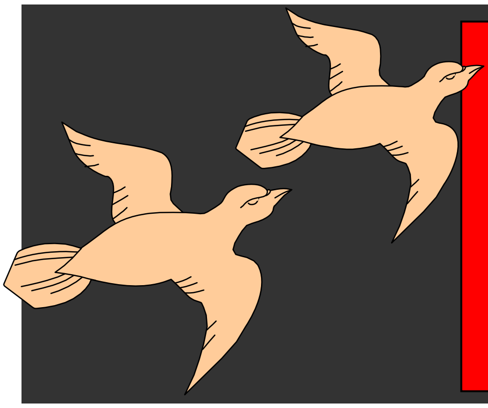
$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III)}$$

Como $rg(A) = 3$, el sistema (III) sólo tiene la solución trivial; en consecuencia, los vectores $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son LI: es imposible obtener la información que contiene cualquiera de ellos combinando linealmente la que contienen los restantes.

Fíjate bien

Las columnas 1ª, 2ª y 3ª de "A" las forman respectivamente los coeficientes de la CL que permite obtener $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ a partir de $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$:

$$\bar{h}_1 = \bar{a}+\bar{b}-\bar{c} \equiv 1 \bullet \bar{a} + 1 \bullet \bar{b} + (-1) \bullet \bar{c}$$
$$\bar{h}_2 = \bar{a}-\bar{b} \equiv 1 \bullet \bar{a} + (-1) \bullet \bar{b} + 0 \bullet \bar{c}$$
$$\bar{h}_3 = \bar{a}+\bar{b} \equiv 1 \bullet \bar{a} + 1 \bullet \bar{b} + 0 \bullet \bar{c}$$



Para darte el aprobado, tu profe no te pedirá que hagas sombra a Einsteín... le bastará que acredites no chuparte el dedo en relación a los asuntos con categoría SSLF.

3.5 DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Se llama dimensión de un espacio vectorial al número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en él.

Por ejemplo, al decir que la dimensión del espacio vectorial "V" es 25 se dice que el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "V" es 25; por tanto, en "V" es imposible encontrar más de 25 vectores que sean LI.

Hay espacios vectoriales con dimensión infinita, pero no trabajaremos con ellos.

Como sabemos, el que la matriz "A" cuyas columnas son los vectores $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n$ tenga rango "p", significa que "p" es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse entre los vectores $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n$. Si imaginas la matriz "A" formada por todos los vectores del espacio vectorial $\Re^2$:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & \sqrt{2} & -4 & 3 & 9 & 8 & 7 & 6 & \ldots\ldots \\ 2 & 0 & 98 & 75 & 9 & 1 & 3 & \pi & 2 & \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

es claro que $rg(A) = 2$. Por tanto, el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en $\Re^2$ es "2"; lo que se expresa diciendo que $\Re^2$ tiene dimensión "2", y se escribe $\dim.(\Re^2) = 2$.

De la misma manera:

$$\dim.(\Re^3) = 3 \;;\; \dim.(\Re^4) = 4 \;; \ldots ;\; \dim.(\Re^k) = k$$

Sabemos que cada polinomio con coeficientes reales y grado no superior a "2" puede asimilarse a un vector de $\Re^{2+1} \equiv \Re^3$; por tanto, el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a "2" tiene dimensión 3, la misma que $\Re^3$. En general, el espacio vectorial que forman los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a "k" tiene dimensión "k+1".

Sabemos que cada matriz de orden 2×3 puede asimilarse a un vector de $\Re^{2\times 3} \equiv \Re^6$. Así, el espacio vectorial de las matrices de orden 2×3 tiene dimensión 6, la misma que $\Re^6$. En general, el espacio vectorial que forman las matrices de orden $p \times q$ tiene dimensión "p.q".

Los ejercicios 3.5.1 y 3.5.2 muestran que teniendo claro el concepto de dimensión de un espacio vectorial, podemos resolver a la velocidad de la luz algunos ejercicios sobre dependencia e independencia lineal de vectores.

FONEMATO 3.5.1

Analícese la independencia lineal de los siguientes vectores de $\Re^3$:

$$\overline{h}_1 = (1;2;3)\ ;\ \overline{h}_2 = (2;1;3)\ ;\ \overline{h}_3 = (3;3;4)\ ;\ \overline{h}_4 = (2;9;9)$$

SOLUCIÓN

Como $\dim.(\Re^3) = 3$, el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en $\Re^3$ es 3; por tanto, apostamos tranquilamente la vida a que los 4 vectores dados son LD (entre ellos hay información repetida).

Obvio: la solución sería igual si nos hubieran dado 5 o más vectores de $\Re^3$.

FONEMATO 3.5.2

Analícese la independencia lineal de los siguientes vectores del espacio vectorial P_3 que forman los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 3

$$\overline{h}_1 = 3.x^3 + 1\ ;\ \overline{h}_2 = x^2 + 3.x\ ;\ \overline{h}_3 = x^3 - x^2\ ;\ \overline{h}_4 = x^3\ ;\ \overline{h}_5 = x^2$$

SOLUCIÓN

Como $\dim.(P_3) = 3 + 1 = 4$, el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en P_3 es 4; por tanto, apostamos tranquilamente la vida a que los 5 vectores dados son LD (entre ellos hay información repetida).

Obvio: la solución sería igual si nos hubieran dado 6 o más vectores de P_3.

3.6 SISTEMA DE GENERADORES DE UN ESPACIO VECTORIAL

Si $H = \{\overline{h}_1, ..., \overline{h}_k\}$ es un subconjunto del espacio vectorial "V", como no hay más cera que la que arde, haciendo combinaciones lineales con los vectores de "H" pueden obtenerse todos los vectores de "V", o no. Pues bien, diremos que el conjunto "H" es un sistema de generadores (SG) de "V" en el primer caso, es decir, si $\forall \overline{x} \in V$ es posible encontrar "k" números reales $\alpha_1, ..., \alpha_k$ tales que $\overline{x} = \alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + ... + \alpha_k \bullet \overline{h}_k$.

De otro modo, en términos de información: "H" es un SG de "V" si la información que contiene cualquier vector de "V" puede obtenerse como CL de la información que contienen los vectores $\overline{h}_1, ..., \overline{h}_k$ que forman "H".

El que "H" sea o no un SG de "V" es muy importante en la vida de "H" como miembro de la colectividad de los subconjuntos de "V", que son de dos tipos: la casta de los privilegiados SG, ungidos por el poder casi divino de generar a TODO vector de "V", y la casta inferior de los subconjuntos que no tienen ese poder. No hace falta decir que, como nos pasaría a todos, los vectores de "V" que forman la plantilla de un SG se sienten justamente orgullosos de pertenecer a un equipo con tan portentoso potencial: generar a TODO vector de espacio vectorial "V"... se dice pronto.

- <u>Pregunta</u>: ¿Cómo sabremos si $H=\{\overline{h}_1, ..., \overline{h}_k\} \subset V$ es un SG de "V"?
- <u>Respuesta</u>: Fácil: si $\dim.(V)=n$, el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "V" es "n", y sabemos que $\overline{x} \in V$ es CL de $\overline{h}_1, ..., \overline{h}_k$ si las matrices "A" y "B" tienen el mismo rango:

$$A/B=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|c} \bullet & ..... & \bullet & & \bullet \\ : & ::::: & : & & : \\ \bullet & ..... & \bullet & & \bullet \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \overline{h}_1 & ..... & \overline{h}_k & & \overline{x} \end{array}\end{array}$$

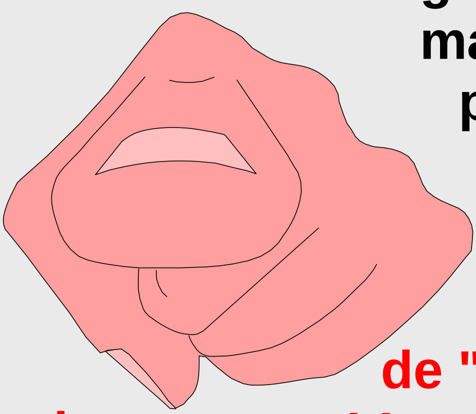
Como el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "V" es "n", el máximo rango de "B" es "n"; por tanto, las matrices "A" y "B" tendrán igual rango $\forall\, \overline{x} \in V$ sólo si $rg(A)=n$.

Si $\dim.(V)=n$ y $rg\left[\begin{array}{ccc} \bullet & ..... & \bullet \\ : & ::::: & : \\ \bullet & ..... & \bullet \end{array}\right]$ $\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow\uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & ..... & \overline{h}_k \end{array}$

$$\begin{cases} = n \Rightarrow \{\overline{h}_1,...,\overline{h}_k\} \text{ es SG de "V"} \\ < n \Rightarrow \{\overline{h}_1,...,\overline{h}_k\} \text{ no es SG de "V"} \end{cases}$$

¡NO LO OLVIDES!

<u>QUE QUEDE MUY CLARO</u>



Como el rango de "A" indica el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en el conjunto $H=\{\overline{h}_1, ..., \overline{h}_k\}$, la condición $rg(A)=n$ nos dice que "H" es SG de "V" si el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "H" (o sea, el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H") es igual a la dimensión de "V".

FONEMATO 3.6.1

En el espacio vectorial $\Re^3$, sean los conjuntos:

$$H_1=\{\bar{d}_1=(2;3;4),\ \bar{d}_2=(-2;1;5)\}$$

$$H_2=\{\bar{u}_1=(2;3;4),\ \bar{u}_2=(-2;1;5),\ \bar{u}_3=(0;4;9),\ \bar{u}_4=(4;2;-1)\}$$

Determínese cuáles constituyen un sistema de generadores de $\Re^3$.

SOLUCIÓN LENTA

Empleamos la definición de SG como latiguillo de arranque: si "V" es un espacio vectorial y $H=\{\bar{h}_1,\ldots,\bar{h}_k\}$ es un subconjunto de "V", se dice que "H" es SG de "V" si todo vector de "V" es CL de los vectores de "H"; o sea, si la ecuación vectorial $\bar{x}=\alpha_1\bullet\bar{h}_1+\ldots+\alpha_k\bullet\bar{h}_k$ tiene solución $\forall\bar{x}\in V$.

1) Si $H_1=\{\bar{d}_1=(2;3;4),\ \bar{d}_2=(-2;1;5)\}$ y $\bar{x}=(m;n;p)$, se tiene:

$$\bar{x}=\alpha_1\bullet\bar{d}_1+\alpha_2\bullet\bar{d}_2\Rightarrow(m;n;p)=\alpha_1\bullet(2;3;4)+\alpha_2\bullet(-2;1;5)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} m=2.\alpha_1-2.\alpha_2\\ n=3.\alpha_1+2.\alpha_2\\ p=4.\alpha_1+5.\alpha_2\end{array}\right\}\ (\mathrm{I})$$

El sistema (I) no tiene solución $\forall\bar{x}=(m;n;p)\in\Re^3$, pues la matriz de los coeficientes (tiene rango 2) y ampliada tienen distinto rango si el determinante de la ampliada es no nulo. Así, el conjunto H_1 no es SG de $\Re^3$: o sea, en el espacio vectorial $\Re^3$ hay vectores que no son CL de los vectores $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ que forman el conjunto H_1.

2) Si $H_2=\{\bar{u}_1=(2;3;4),\ \bar{u}_2=(-2;1;5),\ \bar{u}_3=(0;4;9),\ \bar{u}_4=(4;2;-1)\}$, se tiene:

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\bullet\bar{u}_i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(m;n;p)=\alpha_1\bullet(2;3;4)+\alpha_2\bullet(-2;1;5)+\alpha_3\bullet(0;4;9)+\alpha_4\bullet(4;2;-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} m=2.\alpha_1-2.\alpha_2+4.\alpha_4\\ n=3.\alpha_1+2.\alpha_2+4.\alpha_3+2.\alpha_4\\ p=4.\alpha_1+5.\alpha_2+9.\alpha_3-\alpha_4\end{array}\right\}\ (\mathrm{II})$$

El sistema (II) no tiene solución $\forall\bar{x}=(m;n;p)\in\Re^3$, pues la matriz de coeficientes tiene rango 2 y la ampliada tendrá rango 3 si, por ejemplo, es no nulo es menor de orden 3 indicado:

$$B=\left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & -2 & 0 & 4 & m\\ 3 & 1 & 4 & 2 & n\\ 4 & 5 & 9 & -1 & p\end{array}\right]$$

Por tanto, el conjunto H_2 no es SG de $\Re^3$: en $\Re^3$ hay vectores que no son CL de los vectores $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3$ y $\bar{u}_4$.

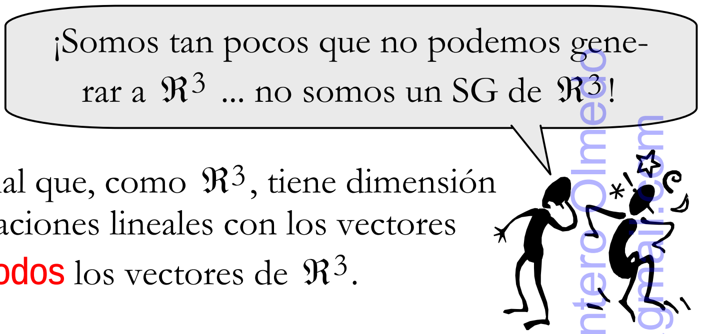
SOLUCIÓN RÁPIDA

Liberto Vector Libre, profesional del Álgebra de lo Lineal que desayuna todo tipo de subconjuntos de espacios vectoriales, sabe que el subconjunto "Pepe" del espacio vectorial "Juan" es SG de "Juan" si el rango de la matiz cuyas columnas son los vectores "Pepe" (o sea, el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "Pepe") coincide con la dimensión del espacio vectorial.

Así las cosas, Liberto **tarda nada** en resolver la papeleta.

> Como $\dim.(\Re^3) = 3$, es un SG de $\Re^3$ todo subconjunto de $\Re^3$ en el que puedan encontrarse 3 vectores LI; es decir, todo conjunto de vectores de $\Re^3$ con los que pueda formarse una matriz de rango 3.

1) **Obvio:** como la plantilla del conjunto $H_1 = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$ sólo la forman dos vectores, H_1 no es SG de un espacio vectorial que, como $\Re^3$, tiene dimensión 3. Por tanto, haciendo combinaciones lineales con los vectores de H_1 **no pueden obtenerse todos** los vectores de $\Re^3$.



2) Siendo

$$H_2 = \{\bar{u}_1 = (2;3;4), \bar{u}_2 = (-2;1;5), \bar{u}_3 = (0;4;9), \bar{u}_4 = (4;2;-1)\}$$

es:

$$\begin{array}{c} \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & -1 \end{bmatrix} = 2 \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 & \bar{u}_4 \end{array} \end{array}$$

$$H_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$$

Por tanto, H_2 no es un SG de $\Re^3$: haciendo combinaciones lineales con los vectores de H_2 **no pueden obtenerse todos** los vectores de $\Re^3$. Se entiende que, con tan escaso **poder generador,** los vectores que forman H_2 se sientan frustrados, mediocres y eternamente perdedores.

La calidad no es fruto de la casualidad, sino del esfuerzo de la inteligencia.

FONEMATO 3.6.2

En el espacio vectorial $\Re^3$, sean los conjuntos:

$$H_1 = \{\bar{b}_1 = (4;5;6),\ \bar{b}_2 = (-4;1;0),\ \bar{b}_3 = (0;0;3)\}$$

$$H_2 = \{\bar{a}_1 = (5;0;0),\ \bar{a}_2 = (-2;1;0),\ \bar{a}_3 = (2;1;9),\ \bar{a}_4 = (6;1;-1)\}$$

Determínese cuáles constituyen un sistema de generadores de $\Re^3$.

SOLUCIÓN LENTA

Empleamos la definición de SG como latiguillo de arranque: si "V" es un espacio vectorial y $H = \{\bar{h}_1, ..., \bar{h}_k\}$ es un subconjunto de "V", se dice que "H" es SG de "V" si todo vector de "V" es CL de los vectores de "H"; o sea, si la ecuación vectorial $\bar{x} = \alpha_1 \bullet \bar{h}_1 + ... + \alpha_k \bullet \bar{h}_k$ tiene solución $\forall \bar{x} \in V$.

1) Si $H_1 = \{\bar{b}_1 = (4;5;6),\ \bar{b}_2 = (-4;1;0),\ \bar{b}_3 = (0;0;3)\}$, se tiene:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \bullet \bar{b}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m;n;p) = \alpha_1 \bullet (4;5;6) + \alpha_2 \bullet (-4;1;0) + \alpha_3 \bullet (0;0;3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 4.\alpha_1 + 4.\alpha_2 \\ n = 5.\alpha_1 - \alpha_2 \\ p = 6.\alpha_1 + 3.\alpha_3 \end{array} \right\} \text{(I)}$$

El sistema (I) tiene solución $\forall \bar{x} = (m;n;p) \in \Re^3$, pues la matriz de coeficientes tiene rango 3 y la ampliada no puede tener rango 4. Por tanto, el conjunto H_1 es SG de $\Re^3$: todo vector de $\Re^3$ puede obtenerse como CL de los vectores $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ y $\bar{b}_3$.

2) Si $H_2 = \{\bar{a}_1 = (5;0;0),\ \bar{a}_2 = (-2;1;0),\ \bar{a}_3 = (2;1;9),\ \bar{a}_4 = (6;1;-1)\}$, se tiene:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \bullet \bar{a}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m;n;p) = \alpha_1 \bullet (5;0;0) + \alpha_2 \bullet (-2;1;0) + \alpha_3 \bullet (2;1;9) + \alpha_4 \bullet (6;1;-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 5.\alpha_1 - 2.\alpha_2 + 2.\alpha_3 + 6.\alpha_4 \\ n = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ p = 9.\alpha_3 - \alpha_4 \end{array} \right\} \text{(II)}$$

El sistema (II) tiene solución $\forall \bar{x} = (m;n;p) \in \Re^3$, pues la matriz de coeficientes tiene rango 3 y la ampliada no puede tener rango 4. Por tanto, el conjunto H_4 es SG de $\Re^3$: todo vector de $\Re^3$ puede obtenerse como CL de los vectores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ y $\bar{a}_4$.

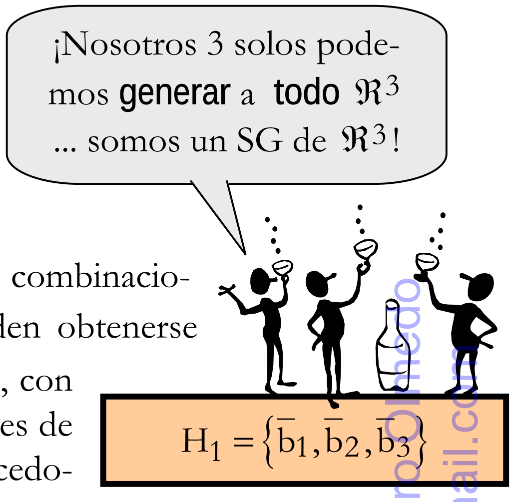
SOLUCIÓN RÁPIDA

Como $\dim.(\Re^3) = 3$, es un SG de $\Re^3$ todo subconjunto de $\Re^3$ en el que puedan encontrarse 3 vectores LI; es decir, todo conjunto de vectores de $\Re^3$ con los que pueda formarse una matriz de rango 3.

1) Si $H_1 = \left\{ \bar{b}_1 = (4;5;6),\ \bar{b}_2 = (-4;1;0),\ \bar{b}_3 = (0;0;3) \right\}$, es:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \end{array}$$

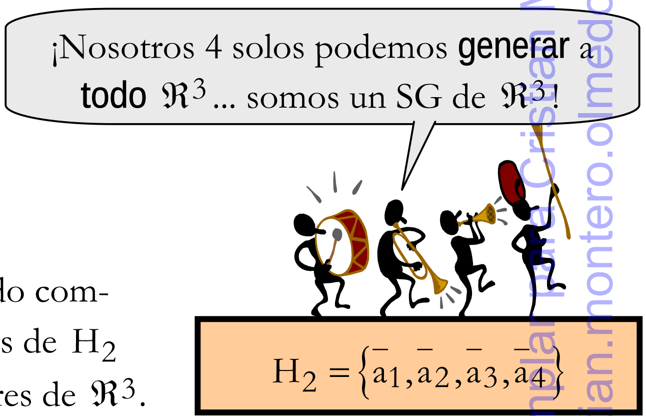


Por tanto, H_1 es un SG de $\Re^3$: haciendo combinaciones lineales con los vectores de H_1 pueden obtenerse **todos** los vectores de $\Re^3$. Se entiende que, con tan portentoso **poder generador**, los vectores de H_1 se sientan felices y eternamente vencedores.

2) Si $H_2 = \left\{ \bar{a}_1 = (5;0;0),\ \bar{a}_2 = (-2;1;0),\ \bar{a}_3 = (2;1;9),\ \bar{a}_4 = (6;1;-1) \right\}$, es:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \end{array}$$



Así, H_2 es un SG de $\Re^3$: haciendo combinaciones lineales con los vectores de H_2 pueden obtenerse **todos** los vectores de $\Re^3$.

Observa atentamente: tanto H_1 como H_2 son SG de $\Re^3$... pero entre ambos hay una notable diferencia, pues uno es libre y el otro es ligado:

- $H_1 = \left\{ \bar{b}_1 = (4;5;6),\ \bar{b}_2 = (-4;1;0),\ \bar{b}_3 = (0;0;3) \right\}$ es libre, pues:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 = \text{n}^\circ \text{ de vectores en } H_3$$

- $H_2 = \left\{ \bar{a}_1 = (5;0;0),\ \bar{a}_2 = (-2;1;0),\ \bar{a}_3 = (2;1;9),\ \bar{a}_4 = (6;1;-1) \right\}$ es ligado, pues:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix} = 3 < \text{n}^\circ \text{ de vectores en } H_4$$

Como veremos más adelante, para evidenciar esta diferencia diremos que H_1 es una base de $\Re^3$ y no así H_2.

FONEMATO 3.6.3

En el espacio vectorial $M_{2\times 2}$, sean los conjuntos:

$$H_1=\left\{\bar{d}_1=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\bar{d}_2=\begin{bmatrix}3&2\\0&1\end{bmatrix},\bar{d}_3=\begin{bmatrix}1&7\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$H_2=\left\{\bar{u}_1=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\bar{u}_2=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix},\bar{u}_3=\begin{bmatrix}4&3\\0&3\end{bmatrix},\bar{u}_4=\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$H_3=\left\{\bar{b}_1=\begin{bmatrix}5&2\\4&1\end{bmatrix},\bar{b}_2=\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix},\bar{b}_3=\begin{bmatrix}4&3\\0&0\end{bmatrix},\bar{b}_4=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$H_4=\left\{\bar{a}_1=\begin{bmatrix}5&2\\4&1\end{bmatrix},\bar{a}_2=\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix},\bar{a}_3=\begin{bmatrix}4&1\\1&1\end{bmatrix},\bar{a}_4=\begin{bmatrix}3&0\\-2&1\end{bmatrix},\bar{a}_5=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$H_5=\left\{\bar{n}_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix},\bar{n}_2=\begin{bmatrix}0&0\\2&5\end{bmatrix},\bar{n}_3=\begin{bmatrix}0&3\\8&1\end{bmatrix},\bar{n}_4=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix},\bar{n}_5=\begin{bmatrix}4&0\\5&0\end{bmatrix}\right\}$$

Determínese cuáles constituyen un sistema de generadores de $M_{2\times 2}$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Asimilamos cada vector de $M_{2\times 2}$ a un vector de $\Re^4$:

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in M_{2\times 3} \text{ lo asimilamos a } (a;b;c;d)\in\Re^4$$

Como $\dim.(M_{2\times 2})=4$, es SG de $M_{2\times 2}$ todo subconjunto de $M_{2\times 2}$ en el que puedan encontrarse 4 vectores LI; es decir, todo conjunto de vectores de $M_{2\times 2}$ con los que pueda formarse una matriz de rango 4.

1) **Obvio:** como la plantilla del conjunto $H_1=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2,\bar{d}_3\}$ sólo la forman tres vectores, el conjunto H_1 no es SG de un espacio vectorial que, como $M_{2\times 2}$, tiene dimensión 4. Por tanto, en $M_{2\times 2}$ hay vectores que no son CL de los vectores de H_1.

2) Si $H_2=\left\{\bar{u}_1=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\bar{u}_2=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix},\bar{u}_3=\begin{bmatrix}4&3\\0&3\end{bmatrix},\bar{u}_4=\begin{bmatrix}4&7\\2&1\end{bmatrix}\right\}$, es:

$$\text{rg}\begin{bmatrix}1&3&4&4\\2&1&3&7\\0&0&0&2\\1&2&3&1\end{bmatrix}=3<\dim.(M_{2\times 2})$$
$$\begin{array}{cccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{u}_1&\bar{u}_2&\bar{u}_3&\bar{u}_4\end{array}$$

Por tanto, H_2 no es un SG de $M_{2\times 2}$; o sea, en $M_{2\times 2}$ hay vectores que no son CL de los vectores de H_2.

3) Si $H_3=\left\{\bar{b}_1=\begin{bmatrix}5&2\\4&1\end{bmatrix},\bar{b}_2=\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix},\bar{b}_3=\begin{bmatrix}4&3\\0&0\end{bmatrix},\bar{b}_4=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}$, es:

$$\text{rg}\begin{bmatrix}5&1&4&4\\2&1&3&0\\4&3&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=4=\dim.(M_{2\times 2})$$
$$\begin{array}{cccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{b}_1&\bar{b}_2&\bar{b}_3&\bar{b}_4\end{array}$$

Por tanto, H_3 es un SG de $M_{2\times 2}$; o sea, todo vector de $M_{2\times 2}$ es CL de los vectores de H_3.

4) Si $H_4 = \left\{ \bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \bar{a}_5 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es:

$$\begin{array}{c} \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 < \dim.\left(M_{2\times 2}\right) \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 & \bar{a}_5 \end{array} \end{array}$$

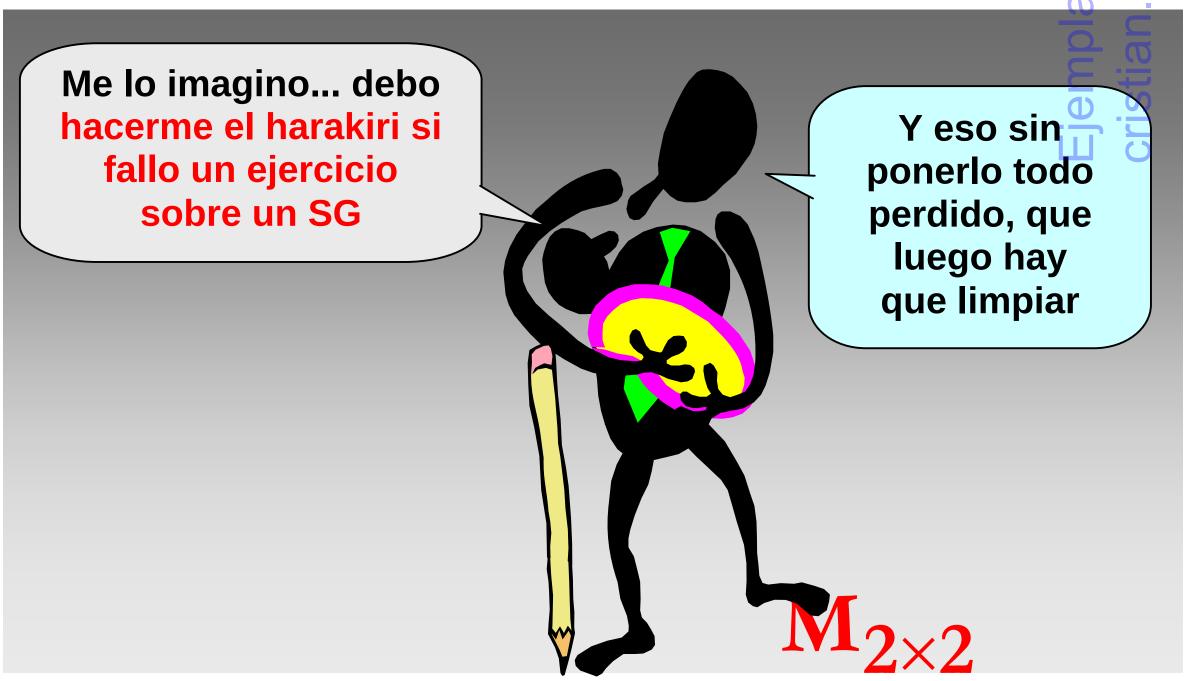
Por tanto, H_4 no es un SG de $M_{2\times 2}$; o sea, en $M_{2\times 2}$ hay vectores que no son CL de los vectores de H_4.

5) Si $H_5 = \left\{ \bar{n}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \bar{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \bar{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, \bar{n}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \bar{n}_5 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es:

$$\begin{array}{c} \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 4 = \dim.\left(M_{2\times 2}\right) \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{n}_1 & \bar{n}_2 & \bar{n}_3 & \bar{n}_4 & \bar{n}_5 \end{array} \end{array}$$

Por tanto, H_5 es un SG de $M_{2\times 2}$; o sea, todo vector de $M_{2\times 2}$ es CL de los vectores de H_5.

Observa muy atentamente: tanto H_3 como H_5 son SG de $M_{2\times 2}$, pero entre ambos hay una notable diferencia, pues H_3 es libre y H_5 es ligado. Como se ha indicado, para evidenciar esta diferencia diremos que H_3 es una base de $M_{2\times 2}$ y no así H_5.



3.7 BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Si "V" es un espacio vectorial de dimensión "n" (o sea, "n" es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "V"), **se llama base de "V" a todo SG de "V" que esté formado por "n" vectores; es decir, a todo subconjunto de "V" formado por "n" vectores LI.**

Por ejemplo:

- Todo subconjunto de $\Re^3$ formado por 3 vectores LI es una base de $\Re^3$.
- Todo subconjunto de $\Re^4$ formado por 4 vectores LI es una base de $\Re^4$.
- En el espacio vectorial $M_{2\times 3}$ de las matrices de 2 filas y 3 columnas, todo subconjunto de $M_{2\times 3}$ formado por 6 vectores LI es una base de $M_{2\times 3}$.
- En el espacio vectorial P_4 de los polinomios de grado no superior a 4, todo subconjunto de P_4 formado por 5 vectores (polinomios) LI es una base de P_4.

Observa: toda base es SG, pero no al revés.
Por ejemplo, en el ejercicio 3.6.2 hemos visto que el conjunto

$$H_2 = \{\bar{a}_1 = (5;0;0),\ \bar{a}_2 = (-2;1;0),\ \bar{a}_3 = (2;1;9),\ \bar{a}_4 = (6;1;-1)\}$$

es un SG de $\Re^3$; pero H_2 **no es base** de $\Re^3$, pues la **plantilla** de H_2 no está formada por 3 vectores LI.

Obvio: **como toda base del espacio vectorial "V" es SG de "V", todo vector de "V" puede obtenerse como CL de los vectores de una base de "V".**

OTRA VISIÓN DEL ASUNTO

Como no hay más cera que la que arde, si "H" es un SG del espacio vectorial "V", los vectores que forman "H" son LI (o sea, "H" es **libre**, en "H" no hay información repetida) o no (es decir, "H" es **ligado**, en "H" hay información repetida). Pues bien, se dice que "H" es una "base" de "V" en el primer caso.

Por ejemplo, para el espacio vectorial $\Re^3$ y el sistema de generadores H_2:

$$H_2 = \{\bar{a}_1 = (5;0;0),\ \bar{a}_2 = (-2;1;0),\ \bar{a}_3 = (2;1;9),\ \bar{a}_4 = (6;1;-1)\}$$

como los vectores de H_2 son LD, entonces H_2 no es una **base** de $\Re^3$.

- La base canónica de $\mathfrak{R}^2$ es la más famosa de las bases de $\mathfrak{R}^2$; la forman los vectores $\bar{h}_1 = (1;0)$ y $\bar{h}_2 = (0;1)$.
- La base canónica de $\mathfrak{R}^3$ es la más famosa de las bases de $\mathfrak{R}^3$; la forman los vectores $\bar{h}_1 = (1;0;0)$, $\bar{h}_2 = (0;1;0)$ y $\bar{h}_3 = (0;0;1)$.
- La base canónica de $\mathfrak{R}^4$ es la más famosa de las bases de $\mathfrak{R}^4$; la forman los vectores $\bar{h}_1 = (1;0;0;0)$, $\bar{h}_2 = (0;1;0;0)$, $\bar{h}_3 = (0;0;1;0)$ y $\bar{h}_4 = (0;0;0;1)$.
- La base canónica del espacio vectorial de dimensión 4 que forman los polinomios de grado no superior a 3 es la más famosa de las bases de dicho espacio; la forman los siguientes 4 vectores:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_1 &= 1.x^3 + 0.x^2 + 0.x + 0 = x^3\\
\bar{h}_2 &= 0.x^3 + 1.x^2 + 0.x + 0 = x^2\\
\bar{h}_3 &= 0.x^3 + 0.x^2 + 1.x + 0 = x\\
\bar{h}_4 &= 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x + 1 = 1
\end{aligned}$$

- La base canónica del espacio vectorial $M_{2\times 3}$ que forman las matrices de 2 filas y 3 columnas es la más famosa de las bases de dicho espacio; la forman los siguientes 6 vectores:

$$\bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\bar{h}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \bar{h}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ \bar{h}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EN BOCA CERRADA NO ENTRAN MOSCAS

Cuando "algo" no lo sepas, no digas la primera tontería que se te ocurra, pues la probabilidad de acertar es muy pequeña, y el ridículo que puedes hacer es espantoso... eres dueñ@ de lo que callas y prisioner@ de lo que dices.

3.9 COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n"; o sea, "n" es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "V". Sea $B = \{\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_n\}$ una base de "V"; es decir, todo vector de "V" es CL de los "n" vectores $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_n$.

Las coordenadas de un vector de "V" respecto de una base "B" son los coeficientes de la combinación lineal que permite obtener ese vector a partir de los vectores de la base "B": si para obtener $\overline{x} \in V$ a partir de $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_n$ hay que multiplicar respectivamente estos últimos por los números reales $x_1, \ldots, x_n$ y después sumar los productos realizados, es decir, si

$$\overline{x} = x_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + x_n \bullet \overline{h}_n$$

diremos que las coordenadas del vector $\overline{x}$ respecto de la base $B = \{\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_n\}$ son $(x_1; \ldots; x_n)$, y escribiremos $\overline{x} = (x_1; \ldots; x_n)$. ***Por ejemplo:*** al decir que $\overline{x}$ tiene coordenadas $(2;4;6;-9)$ respecto de la base $B = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3, \overline{h}_4\}$, decimos que $2,4,6$ y -9 son los coeficientes de la combinación lineal que permite obtener $\overline{x}$ a partir de los vectores de la base "B"; o sea, decimos que;

$$\overline{x} = 2 \bullet \overline{h}_1 + 4 \bullet \overline{h}_2 + 6 \bullet \overline{h}_3 + (-9) \bullet \overline{h}_4$$

TEOREMA DE UNICIDAD

Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

En efecto, si fuese

$$\overline{x} = x_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + x_n \bullet \overline{h}_n$$
$$\overline{x} = y_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + y_n \bullet \overline{h}_n$$

sería

$$x_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + x_n \bullet \overline{h}_n = y_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + y_n \bullet \overline{h}_n$$

o sea:

$$(x_1 - y_1) \bullet \overline{h}_1 + \ldots + (x_n - y_n) \bullet \overline{h}_n = \overline{0} \quad \text{(I)}$$

Como los vectores $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_n$ forman una base de "V", son LI; por tanto, la ecuación vectorial (I) sólo tiene la solución trivial $x_1 - y_1 = 0, \ldots, x_n - y_n = 0$; es decir:

$$x_1 = y_1 \; ; \; \ldots \; ; \; x_n = y_n$$

HISTORIA HORTOFRUTÍCOLA

En una caja llamada $\overline{x}$ hay naranjas y limones. Se quiere expresar su contenido mediante números, para lo que hacen falta 2 números: uno que exprese el contenido de naranjas y otro que exprese el contenido de limones. Se decide que el primer número exprese el contenido de naranjas y el segundo el contenido de limones.

Así las cosas, si nos dicen que $\overline{x} = (18;12)$, la pregunta del millón es:

¿Qué hay en la caja?

Medite el lector su respuesta, escríbala y siga leyendo.

La experiencia demuestra que cuando se plantea esta pregunta a no profesionales del Álgebra, la gran mayoría dice rápidamente que en la caja hay 18 naranjas y 12 limones... pero **nada hay más lejos de la realidad**, pues **es imposible saber qué hay en la caja.**

- Pregunta: ¿Por qué es imposible saber qué hay en la caja?
- Respuesta: Porque no se nos ha dicho cuál es la **referencia** empleada para **identificar** el contenido de naranjas y cuál la **referencia** utilizada para **identificar** el contenido de limones... y al no estar especificadas dichas **referencias, los números 18 y 12 se quedan vacíos, huérfanos, no pueden transmitir información alguna.**

- Pregunta: ¿Por qué la mayoría dice que hay 18 naranjas y 12 limones?
- Respuesta: Porque la relación que la mayoría con las naranjas y los limones es sencilla: los ve en las fruterías o en casa, y de vez en cuando los utiliza para comer o para hacer zumo. En este contexto, cuando se pregunta por el contenido de la caja, la mayoría de la gente, en poco más de un nanosegundo, y de modo totalmente **inconsciente**, da por cierto que la **referencia** utilizada para **identificar** el contenido de naranjas es **una naranja**, y la empleada para **identificar** el contenido de limones es **un limón;** en consecuencia, el número 18 indica que en la caja hay 18 naranjas, y el 12 indica que hay 12 limones.

  Es claro que la relación que los exportadores de naranjas y limones tienen con esos cítricos es distinta a la de la gente corriente, pues en una conversación entre exportadores puede escucharse:

  Ayer mandé a Francia 50 toneladas de naranjas y 15 de limones.
  Tengo 12 toneladas de naranjas estropeadas en el almacén.

  Si planteásemos la broma de la caja $\overline{x} = (18;12)$ a unos de exportadores de cítricos, la mayoría diría que hay 18 toneladas de naranjas y 12 de limones .... y eso porque la mayoría, de modo totalmente inconsciente, daría por cierto que la **referencia** empleada para **identificar** el contenido de naranjas es **una tonelada de naranjas** y la utilizada para **identificar** el contenido de limones es **una tonelada de limones;** en consecuencia, el número 18 indica que hay 18 toneladas de naranjas, y el 12 indica que hay 12 toneladas de limones.

- Pregunta: ¿Cuál es la **MORALEJA** de esta historia hortofrutícola?
- Respuesta: Si las **referencias** no están perfectamente definidas, los números (18 y 12 en el ejemplo) quedan vacíos, huérfanos, incapaces de transmitir información alguna. Por eso, **cuando se va a trabajar en un espacio vectorial, lo primero SIEMPRE es elegir la base de referencia que va a emplearse para identificar a los vectores del espacio vectorial.**

Los entes son "camaleónicos"

Sigamos con la historia de la caja $\overline{x}$ y supongamos que realmente contiene 18 naranjas y 12 limones. En tal caso, como sabemos, si la referencia empleada para identificar el contenido de naranjas es una naranja y la empleada para identificar el contenido de limones es un limón, entonces:

$$\overline{x} = (18;12)$$

Como para gustos están los colores, nada impide elegir otras referencias para identificar el contenido de la caja.

Por ejemplo: si la referencia empleada para identificar el contenido de naranjas es la media docena de naranjas y la empleada para identificar el contenido de limones es la docena de limones, resulta obvio que

$$\overline{x} = (3;1)$$

Por ejemplo: si la referencia para identificar el contenido de naranjas es la docena de naranjas y la empleada para identificar el contenido de limones es la media docena de limones, como 18 naranjas es igual que 1'5 docenas de naranjas, y 12 limones son 2 medias docenas de limones. resulta obvio que

$$\overline{x} = (1'5;2)$$

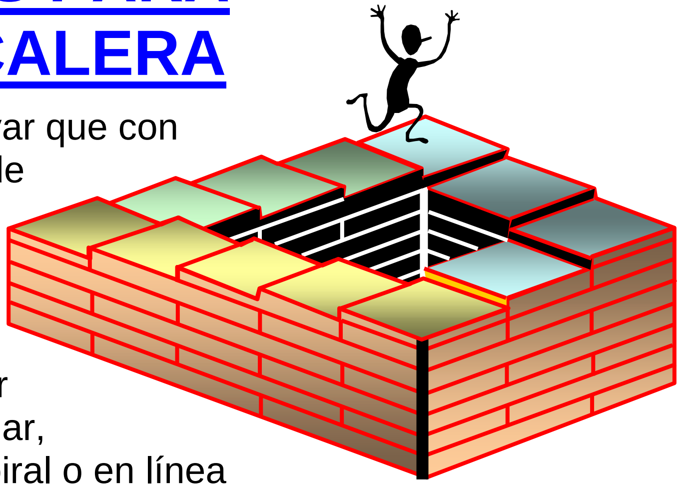
Obvio: hay infinitas formas distintas de referenciar el contenido de la caja $\overline{x}$.

Como vemos, un mismo ente (la caja $\overline{x}$ con su contenido concreto de naranjas y limones) tiene apariencias distintas respecto de referencias distintas; así, dependiendo de cuál sea la referencia elegida, al expresar el contenido de nuestra caja mediante un par ordenado de números reales, es $\overline{x} = (18;12)$ ó $\overline{x} = (3;1)$ ó $\overline{x} = (1'5;2)$.

Con los vectores pasa lo mismo: un vector tiene apariencias (coordenadas) distintas respecto de bases distintas... aunque, como veremos en el ejercicio 3.10.9, un vector puede tener las mismas coordenadas respecto de dos bases distintas.

Si has entendido la historia que llevamos entre manos, sin duda ya sospechas que nos plantearemos el problema de relacionar matemáticamente las coordenadas de un vector "Pepe" respecto de la base "María" con las coordenadas de "Pepe" respecto de la base "Juana". De tan interesante asunto nos ocupamos a continuación.

[INSTRUCCIONES PARA SUBIR UNA ESCALERA]



Nadie habrá dejado de observar que con frecuencia el suelo se pliega de manera tal que una parte sube en ángulo recto con el plano del suelo, y luego la parte siguiente se coloca paralela a este plano, para dar paso a una nueva perpendicular, conducta que se repite en espiral o en línea quebrada hasta alturas sumamente variables.

Agachándose y poniendo la mano izquierda en una de las partes verticales, y la derecha en la horizontal correspondiente, se está en posesión momentánea de un peldaño o escalón. Cada uno de estos peldaños, formados como se ve por dos elementos, se sitúa un tanto más arriba y más adelante que el anterior, principio que da sentido a la escalera, ya que cualquier otra combinación produciría formas quizá más bellas o pintorescas, pero incapaces de trasladar de una planta baja a un primer piso.

Las escaleras se suben de frente, pues hacia atrás o de costado resultan particularmente incómodas. La actitud natural consiste en mantenerse de pie, los brazos colgando sin esfuerzo, la cabeza erguida aunque no tanto que los ojos dejen de ver los peldaños inmediatamente superiores al que se pisa, respirando lenta y regularmente.

Para subir una escalera se comienza levantando esa parte del cuerpo situada a la derecha abajo, envuelta casi siempre en cuero o gamuza, y que salvo excepciones cabe exactamente en el escalón. Puesta en el primer peldaño dicha parte, que para abreviar llamaremos pie, se recoge la parte equivalente de la izquierda (también llamada pie, pero que no ha de confundirse con el pie antes citado), y llevándola a la altura del pie, se la hace subir hasta colocarla en el segundo peldaño, con lo cual en éste descansará el pie, y en el primero descansará el pie. (Los primeros peldaños son siempre los más difíciles, hasta alcanzar la coordinación necesaria. La coincidencia entre el nombre del pie y del pie hace difícil la explicación. Cuídese especialmente de no levantar al mismo tiempo el pie y el pie). Llegado en esta forma al segundo peldaño, basta repetir alternadamente los movimientos hasta encontrarse con el final de la escalera. Se sale de ella fácilmente, con ligero golpe de talón que la fija en su sitio, del que no se moverá hasta el momento del descenso.

Julio Cortazar

FONEMATO 3.9.1

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(1;2)\ ;\ \overline{h}_2=(3;4)$$

Estúdiese si $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ forman una base de $\Re^2$. En caso afirmativo, determínense las coordenadas del vector $\overline{x}=(2;6)$ respecto de dicha base.

SOLUCIÓN

El enunciado nos habla de tres vectores de $\Re^2$ cuyos respectivos nombres son $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$. Para identificar cada vector, el enunciado utiliza dos números, pues nos dice que:

$$\overline{h}_1=(1;2)\ ;\ \overline{h}_2=(3;4)\ ;\ \overline{x}=(2;6)$$

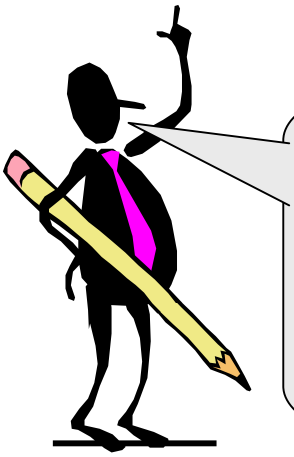
Al igual que en la historia de las naranjas y los limones, el enunciado olvida decir cuál es la base de $\Re^2$ que está empleando para identificar a los vectores llamados $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$; o sea, no nos dice cuál es la base de $\Re^2$ respecto de la que los vectores llamados $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$ tienen coordenadas $(1;2)$, $(3;4)$ y $(2;6)$.

Ante tan imperdonable olvido, tienes dos opciones.

Solución salvaje

El ejercicio carece de sentido, pues como no se dice cuál es la base de referencia que se utiliza para identificar a los vectores llamados $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$, es imposible saber qué hay realmente tras las afirmaciones que hace el enunciado, es imposible saber lo que se quiere decir cuando se afirma que:

$$\overline{h}_1=(1;2)\ ;\ \overline{h}_2=(3;4)\ ;\ \overline{x}=(2;6)$$



Que quede claro: la solución salvaje es perfectamente correcta; es como si al que nos cuenta la historia de las naranjas y los limones le dijéramos: tu historia carece de sentido, ya que es imposible saber el significado de la afirmación $\overline{x}=(18;12)$, pues no dices qué referencia empleas para identificar el contenido de naranjas y limones de la caja $\overline{x}$

Aunque la solución salvaje es correcta, su uso en examen no es recomendable, pues el profesor podría sentirse molesto, pensar que somos unos listillos y suspendernos. Ello nos obligaría a plantear un enojoso recurso contencioso insesgado administrativo ante el Ministerio de Educación y Ciencia, que, tras escuchar al comité de sabios, nos daría la razón en todo y puntuaría nuestra solución salvaje con un salvaje 10, pero para entonces acaso estaríamos calvos y ya nada importaría nada.

La otra solución

Ponemos buena voluntad y cubrimos las carencias del enunciado; para ello basta considerar que la base de referencia utilizada para identificar a los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$ es la canónica de $\Re^2$:

$$B_c = \{\overline{k}_1 = (1;0)\,;\, \overline{k}_2 = (0;1)\}$$

Por tanto, entendemos que al escribir $\overline{h}_1 = (1;2)$, $\overline{h}_2 = (3;4)$ y $\overline{x} = (2;6)$, se está diciendo que:

$$\overline{h}_1 = 1 \bullet \overline{k}_1 + 2 \bullet \overline{k}_2$$
$$\overline{h}_2 = 3 \bullet \overline{k}_1 + 4 \bullet \overline{k}_2$$
$$\overline{x} = 2 \bullet \overline{k}_1 + 6 \bullet \overline{k}_2$$

Lo que resta es muy fácil: como $\dim.(\Re^2) = 2$, cualesquiera 2 vectores de $\Re^2$ que sean LI forman una base de $\Re^2$, y como:

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2 = \text{n}^\text{o} \text{ de vectores}$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 \end{array}$$

los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI y $B = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$ es una base de $\Re^2$; por tanto, todo vector de $\Re^2$ es CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$.

- Para calcular las coordenadas del vector $\overline{x} = (2;6)$ respecto de la base que forman $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$, resolvemos el SLNH obtenido al expresar que $\overline{x}$ es CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$:

$$\overline{x} = \alpha \bullet \overline{h}_1 + \beta \bullet \overline{h}_2 \Rightarrow (2;6) = \alpha \bullet (1;2) + \beta \bullet (3;4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = \alpha + 3.\beta \\ 6 = 2.\alpha + 4.\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Por tanto, es:

$$\overline{x} = 5 \bullet \overline{h}_1 + (-1) \bullet \overline{h}_2$$

y para expresar que sucede tal cosa, se dice que el vector $\overline{x}$ tiene coordenadas 5, –1 respecto de la base "B" que forman $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$, y se escribe:

$$\overline{x} = (5;-1)$$

NOTA 1

A pesar de haber leído la historia de las naranjas y los limones, siempre hay quien se lía, pues el enunciado dice que $\overline{x} = (2;6)$, y luego, tras los correspondientes cálculos, nosotros decimos que $\overline{x} = (5;-1)$.

¿Qué lío es éste? ¿Quién coño es $\overline{x}$?... ¿es $(2;6)$ o es $(5;-1)$?

No debe haber lío: cuando el enunciado escribe $\overline{x} = (2;6)$, **identifica** al vector llamado $\overline{x}$ mediante sus **coordenadas respecto de la base canónica** de $\Re^2$, pues nos dice **cómo** se obtiene $\overline{x}$ a partir de los vectores $\overline{k}_1, \overline{k}_2$ que forman dicha base:

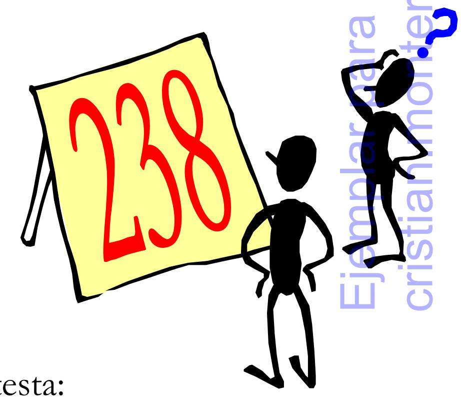
$$\overline{x} = 2 \bullet \overline{k}_1 + 6 \bullet \overline{k}_2$$

Cuando después de los cálculos escribimos $\overline{x} = (5;-1)$, **identificamos** al vector $\overline{x}$ mediante sus **coordenadas respecto de la base "B"** que forman $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$; o sea, al escribir $\overline{x} = (5;-1)$ estamos indicando **cómo** se $\overline{x}$ a partir de los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ que forman la base "B":

$$\overline{x} = 5 \bullet \overline{h}_1 + (-1) \bullet \overline{h}_2$$

Dado el **carácter camaleónico de los vectores**, como las bases de referencia son distintas en uno y otro caso, no debe sorprendernos que el **aspecto** del vector $\overline{x}$ (las coordenadas de $\overline{x}$) respecto de la base canónica sea distinto al **aspecto** de $\overline{x}$ respecto de la base $B = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$.

NOTA 2



Ya que estamos, describamos una escena contemplada cientos de veces: ante un **Pedro Ideas Confusas** cualquiera se exhibe una pizarra como la adjunta, y después se pide a Pedro que, **con el lenguaje más asequible posible**, explique lo que ve en la pizarra.

Ante tan sorprendente requerimiento, Pedro contesta:

Veo el número doscientos treinta y ocho

Ante esta respuesta, se pide a Pedro que utilice un **lenguaje más elemental** y sencillo, que exprese lo que ve de forma más simple... y Pedro suele decir:

¿Aún más sencillo que doscientos treinta y ocho?... déjame pensar...
espera un poco... no sé... ¿más sencillo que doscientos treinta y ocho?...
¿cómo más sencillo?... no sé... vamos a ver... no sé...

Y así hasta que Pedro se bloquea y sólo acierta a repetir: veo el número doscientos treinta y ocho, veo el número doscientos treinta y ocho, veo....

Cuando el experimento se hace con **Pedro Ideas Claras**, su respuesta dice así:

> Veo los famosos GARABATOS que, en el sistema de numeración decimal, REPRESENTAN al NÚMERO llamado doscientos treinta y ocho... y de igual forma que nadie ha visto jamás a Sancho Panza, nadie ha **visto** jamás al **número** doscientos treinta y ocho: ambos ENTES son producto de la razón humana e inaccesibles al sentido de la vista. Lo que vemos en la pizarra NO ES el **número** doscientos treinta y ocho: vemos los **garabatos** que en el planeta Tierra (constelación de la Vía Láctea), y en el sistema de numeración decimal, han sido aceptados para REPRESENTAR al **invisible número** cuyo **nombre** castellano es doscientos treinta y ocho... e insistimos en lo del sistema de numeración decimal, pues los **números** son camaleónicos: tienen **apariencias** distintas respecto de **referencias** distintas. Por ejemplo, si como referencia para identificarlos se emplea el **sistema de numeración binario**, los **garabatos** que **representan** al número doscientos treinta y ocho son **11111110**; y si elegimos el sistema ternario, los **garabatos** que lo **representan** son **22211**.

$$\begin{cases} 2.10^2 + 3.10^1 + 8.10^0 \Rightarrow 238 \\ 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 \Rightarrow 11111110 \\ 2.3^4 + 2.3^3 + 2.3^2 + 1.3^1 + 1.3^0 \Rightarrow 22211 \end{cases}$$

Números arábigos y europeos en una señal de tráfico en Abu Dabi.

FONEMATO 3.9.2

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1 = (1;2;3) \ ; \ \overline{h}_2 = (3;4;0) \ ; \ \overline{h}_3 = (0;0;1)$$

Compruébese que forman una base de $\Re^3$ y determínense las coordenadas del vector $\overline{x} = (2;4;7)$ respecto de dicha base.

SOLUCIÓN

- Como no se dice qué base de referencia de $\Re^3$ es la empleada para **identificar** a los vectores de $\Re^3$, consideramos que es la base canónica:

  $$B_c = \left\{\overline{k}_1 = (1;0;0) \ ; \ \overline{k}_2 = (0;1;0) \ ; \ \overline{k}_3 = (0;0;1)\right\}$$

  Por tanto, entendemos que al escribir

  $$\overline{h}_1 = (1;2;3) \ ; \ \overline{h}_2 = (3;4;0) \ ; \ \overline{h}_3 = (0;0;1) \ ; \ \overline{x} = (2;4;7)$$

  se está diciendo que:

  $$\begin{aligned} \overline{h}_1 &= 1 \bullet \overline{k}_1 + 2 \bullet \overline{k}_2 + 3 \bullet \overline{k}_3 \\ \overline{h}_2 &= 3 \bullet \overline{k}_1 + 4 \bullet \overline{k}_2 + 0 \bullet \overline{k}_3 \\ \overline{h}_3 &= 0 \bullet \overline{k}_1 + 0 \bullet \overline{k}_2 + 1 \bullet \overline{k}_3 \\ \overline{x} &= 2 \bullet \overline{k}_1 + 4 \bullet \overline{k}_2 + 7 \bullet \overline{k}_3 \end{aligned}.$$

- Lo que queda es fácil: como $\dim.(\Re^3) = 3$, cualesquiera 3 vectores de $\Re^3$ que sean LI forman una **base** de $\Re^3$, y como

  $$\begin{array}{c} \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 = \text{n° de vectores} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{array} \end{array}$$

  los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3$ son LI y $B = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$ es una base de $\Re^3$; así, todo vector de $\Re^3$ es CL de $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.

- Para calcular las **coordenadas** de $\overline{x} = (2;4;7)$ respecto de la base que forman $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$, resolvemos el SLNH obtenido al expresar que $\overline{x} = (2;4;7)$ es CL de $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$:

  $$\overline{x} = \alpha \bullet \overline{h}_1 + \beta \bullet \overline{h}_2 + \lambda \bullet \overline{h}_3 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow (2;4;7) = \alpha \bullet (1;2;3) + \beta \bullet (3;4;0) + \lambda \bullet (0;0;1) \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2 = \alpha + 3.\beta \\ 4 = 2.\alpha + 4.\beta \\ 7 = 3.\alpha + \lambda \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \\ \lambda = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \overline{x} = 2 \bullet \overline{h}_1 + 0 \bullet \overline{h}_2 + 1 \bullet \overline{h}_3$$

Para expresar que $\overline{x} = 2\bullet\overline{h}_1 + 0\bullet\overline{h}_2 + 1\bullet\overline{h}_3$, se dice que $\overline{x}$ tiene **coordenadas** 2,0,1 respecto de la base $B = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$, y se escribe $\overline{x} = (2;0;1)$.

- Insistimos: no debe haber lío con las coordenadas **(apariencias)** del vector **(ente invisible)** llamado $\overline{x}$: cuando el enunciado escribe $\overline{x} = (2;4;7)$, **identifica** a $\overline{x}$ mediante sus coordenadas respecto de la base canónica de $\Re^3$; es decir, nos indica **cómo** se obtiene $\overline{x}$ a partir de los vectores $\overline{k}_1, \overline{k}_2$ y $\overline{k}_3$ que forman la base canónica de $\Re^3$, pues $\overline{x} = 2\bullet\overline{k}_1 + 4\bullet\overline{k}_2 + 7\bullet\overline{k}_3$. Cuando después de los cálculos escribimos $\overline{x} = (2;0;1)$, **identificamos** a $\overline{x}$ mediante sus coordenadas respecto de la base $B = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$; es decir, al escribir $\overline{x} = (2;0;1)$, indicamos **cómo** se obtiene $\overline{x}$ a partir de los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ que forman la base "B", pues $\overline{x} = 2\bullet\overline{h}_1 + 0\bullet\overline{h}_2 + 1\bullet\overline{h}_3$.

  Dado el carácter camaleónico de lo vectores, como las bases de referencia son distintas en uno y otro caso, no debe sorprendernos que el **aspecto** (las coordenadas) del vector $\overline{x}$ respecto de la base canónica sea distinto al **aspecto** de $\overline{x}$ respecto de la base $B = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$.

Llorar a chorros. Llorar la digestión. Llorar el sueño.
Llorar ante las puertas y los puertos.
Llorar de amabilidad y de amarillo.
Abrir las canillas, las compuertas del llanto.
Empaparnos el alma, la camiseta.
Inundar las veredas y los paseos, y salvarnos, a nado,
de nuestro llanto.
Asistir a los cursos de antropología, llorando.
Festejar los cumpleaños familiares, llorando.
Atravesar el África, llorando.
Llorar como un cacuy, como un cocodrilo...
si es verdad que los cacuyes y los cocodrilos
no dejan nunca de llorar.
Llorarlo todo, pero llorarlo bien.
Llorarlo con la nariz, con las rodillas.
Llorarlo por el ombligo, por la boca.
Llorar de amor, de hastío, de alegría.
Llorar de frac, de flato, de flacura.
Llorar improvisando, de memoria.
¡Llorar todo el insomnio
y todo el día!

Oliverio Girondo

Profe de Álgebra después de corregir un examen

FONEMATO 3.9.3

Sea $(V;+;\bullet)$ un espacio vectorial de dimensión 2 sobre el cuerpo de los reales, y $B=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$ la base de referencia elegida en "V". Determínense las coordenadas de $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ respecto de la base "B".

SOLUCIÓN

- El que $B=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$ sea una base del espacio vectorial "V" significa que todo vector de "V" es CL de $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$.
- Para calcular las coordenadas de $\bar{h}_1$ respecto de la base que forman $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ basta resolver el SLNH obtenido al expresar que $\bar{h}_1$ es CL de $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$:

$$\bar{h}_1=\alpha\bullet\bar{h}_1+\beta\bullet\bar{h}_2\Rightarrow\begin{Bmatrix}\alpha=1\\ \beta=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\bar{h}_1=1\bullet\bar{h}_1+0\bullet\bar{h}_2$$

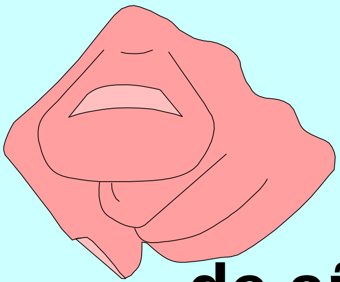
  Para expresar que $\bar{h}_1=1\bullet\bar{h}_1+0\bullet\bar{h}_2$, se dice que el vector $\bar{h}_1$ tiene coordenadas 1,0 respecto de la base $B=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$, y se escribe $\bar{h}_1=(1;0)$.
- Para calcular las coordenadas de $\bar{h}_2$ respecto de la base que forman $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ basta resolver el SLNH obtenido al expresar que $\bar{h}_2$ es CL de $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$:

$$\bar{h}_2=\alpha\bullet\bar{h}_1+\beta\bullet\bar{h}_2\Rightarrow\begin{Bmatrix}\alpha=0\\ \beta=1\end{Bmatrix}\Rightarrow\bar{h}_2=0\bullet\bar{h}_1+1\bullet\bar{h}_2$$

  Para expresar que $\bar{h}_2=0\bullet\bar{h}_1+1\bullet\bar{h}_2$ se dice que el vector $\bar{h}_2$ tiene coordenadas 0,1 respecto de la base $B=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$, y se escribe $\bar{h}_2=(0;1)$.

NOTA:

En su momento dijimos que cuando se trabaja en un espacio vectorial "V", lo primero siempre es elegir una base de referencia para identificar a los vectores de "V"... y entenderás que, para cada base, sensible como todos al yuyo malo de la vanidad, no hay mayor honor que ser elegida base de referencia. Pues bien, este ejercicio tontorrón nos enseña que desde el mismo instante en que una base "Pepa" es elegida como base de referencia en un espacio vectorial "V" y toma posesión de su cargo, todos la vemos como si fuera la canónica. ***Por ejemplo:*** si $\dim(V)=2$ y la base de referencia en "V" es $B=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$, las coordenadas del $\bar{h}_1$ respecto de "B" son $(1;0)$, y las de $\bar{h}_2$ son $(0;1)$.



¡Remueve Roma con Santiago para conseguir exámenes de Álgebra de años anteriores... sin ellos tendrás que a estudiar a ciegas!

FONEMATO 3.9.4

1) Hallar una base de $\Re^3$ que contenga los vectores $\bar{u}=(1;1;1)$ y $\bar{v}=(1;0;5)$.

2) Hallar una base de $\Re^3$ que contenga al vector $\bar{w}=(3;4;1)$.

SOLUCIÓN

Como $\dim.(\Re^3)=3$, cualesquiera 3 vectores de $\Re^3$ que sean LI forman una base de $\Re^3$.

1) Los vectores $\bar{u}=(1;1;1)$, $\bar{v}=(1;0;5)$ y $\bar{x}=(\alpha;\beta;\gamma)$ formarán una base de $\Re^3$ si son LI, lo que sucede sólo si:

$$\mathrm{rg}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&1&\alpha\\1&0&\beta\\1&5&\gamma\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{u}&\bar{v}&\bar{x}\end{array}\end{array}=3$$

Por tanto, debemos elegir valores de α, β y γ de modo que se cumpla la condición anterior. Por ejemplo, si $\alpha=1, \beta=\gamma=0$, resulta $\bar{x}=(1;0;0)$, y como:

$$\mathrm{rg}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&5&0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{u}&\bar{v}&\bar{x}\end{array}\end{array}=3$$

los vectores $\bar{u}, \bar{v}$ y $\bar{x}$ constituyen una base de $\Re^3$.

2) Los vectores $\bar{w}=(3;4;1)$, $\bar{m}=(a;b;c)$ y $\bar{n}=(d;e;f)$ formarán una base de $\Re^3$ si son LI, lo que sucede sólo si:

$$\mathrm{rg}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}3&a&d\\4&b&e\\1&c&f\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{w}&\bar{m}&\bar{n}\end{array}\end{array}=3$$

Así, debemos elegir los valores de "a", "b", "c", "d", "e" y "f" de modo que se cumpla la condición anterior. Por ejemplo, si $a=c=d=e=0$ y $b=f=1$, es $\bar{m}=(0;1;0)$ y $\bar{n}=(0;0;1)$, y como:

$$\mathrm{rg}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}3&0&0\\4&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{w}&\bar{m}&\bar{n}\end{array}\end{array}=3$$

los vectores $\bar{w}, \bar{m}$ y $\bar{n}$ constituyen una base de $\Re^3$.

FONEMATO 3.9.5

Determínese una base de $\Re^4$ que contenga a los vectores $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$.

$$\overline{u} = (1;1;5;1)\ ;\ \overline{v} = (1;0;1;0)\ ;\ \overline{w} = (1;2;9;2)$$

SOLUCIÓN

Como $\dim.(\Re^4) = 4$, cualesquiera 4 vectores de $\Re^4$ que sean LI forman una base de $\Re^4$; por tanto, los vectores $\overline{u} = (1;1;5;1)$, $\overline{v} = (1;0;1;0)$, $\overline{w} = (1;2;9;2)$ y $\overline{x} = (a;b;c;d)$ formarán una base de $\Re^4$ si son LI, lo que sucede sólo si:

$$\operatorname{rg} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & b \\ 5 & 1 & 9 & c \\ 1 & 0 & 2 & d \end{bmatrix}}^{H} = 4$$
$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{u} & \overline{v} & \overline{w} & \overline{x} \end{array}$$

Debemos elegir "a", "b", "c" y "d" de modo que se cumpla la condición anterior, pero hay sorpresa: independientemente de los valores de "a", "b", "c" y "d" que elijamos, es $|H| = 0$, por lo que $\operatorname{rg}(H) < 4$ y $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ y $\overline{x}$ no forman una base de $\Re^4$ sea cual sea el vector $\overline{x} = (a;b;c;d)$ que se elija. La razón del evento es que

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{u} & \overline{v} & \overline{w} \end{array}$$

lo que indica que $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ son LD (entre ellos hay información repetida); así, no hay ninguna base de $\Re^4$ que contenga estos tres vectores, pues en una base de un espacio vectorial jamás hay información repetida (recuerda que una base es un SG libre).

FONEMATO 3.9.6

Determínese una base del espacio vectorial $M_{2\times 2}$ que contenga a los vectores

$$\bar{u}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix};\ \bar{v}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix};\ \bar{w}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Como $\dim.(M_{2\times 2})=4$, cualesquiera 4 vectores que sean LI forman una base de $M_{2\times 2}$. Por comodidad, asimilamos cada vector de $M_{2\times 2}$ a uno de $\Re^4$:

$$\bar{u}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}\in M_{2\times 2} \text{ lo asimilamos a } \bar{u}=(2;0;1;5)\in\Re^4$$

$$\bar{v}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\in M_{2\times 2} \text{ lo asimilamos a } \bar{v}=(0;1;3;4)\in\Re^4$$

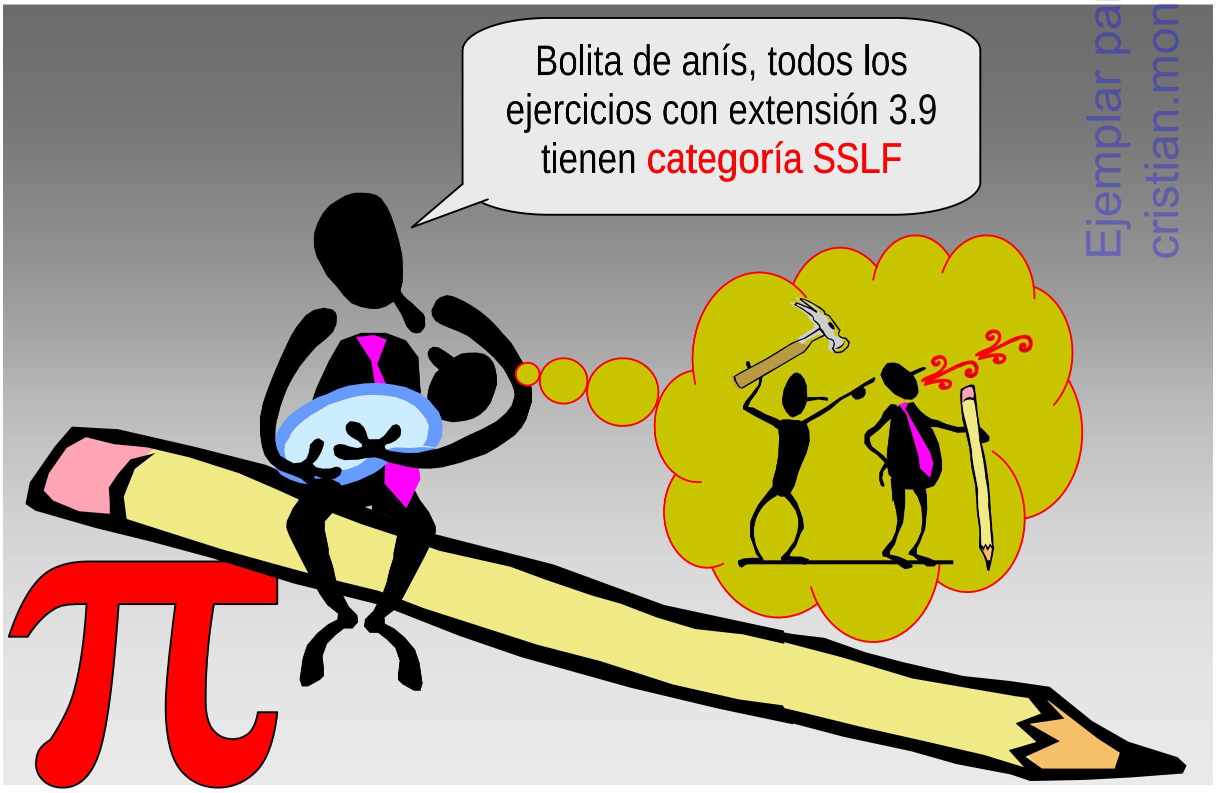
$$\bar{w}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in M_{2\times 2} \text{ lo asimilamos a } \bar{w}=(2;5;0;0)\in\Re^4$$

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in M_{2\times 2} \text{ lo asimilamos a } \bar{x}=(a;b;c;d)\in\Re^4$$

Los 4 vectores $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ y $\bar{x}$ formarán una base de $M_{2\times 2}$ si son LI; o sea, si:

$$\operatorname{rg}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}2 & 0 & 2 & a\\ 0 & 1 & 5 & b\\ 1 & 3 & 0 & c\\ 5 & 4 & 0 & d\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} & \bar{x}\end{array}\end{array}=4$$

Por tanto, debemos elegir los valores de "a", "b", "c" y "d" de modo que se satisfaga la anterior condición, lo que, por ejemplo, sucede si $a=1, b=c=d=0$. Por tanto, si $\bar{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, los vectores $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ y $\bar{x}$ forman una base de $M_{2\times 2}$.



FONEMATO 3.9.7

En el espacio vectorial $M_{2\times 2}$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{h}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Compruébese que forman una base de $M_{2\times 2}$, determinando las coordenadas del vector $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ respecto de dicha base.

SOLUCIÓN

Consideramos que la base de referencia en $M_{2\times 2}$ es la canónica:

$$B_c = \left\{ \bar{k}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{k}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{k}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Por tanto, entendemos que al escribir

$$\bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{h}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se está diciendo que:

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= 1 \bullet \bar{k}_1 + 1 \bullet \bar{k}_2 + 1 \bullet \bar{k}_3 + 1 \bullet \bar{k}_4 \\ \bar{h}_2 &= 2 \bullet \bar{k}_1 + 3 \bullet \bar{k}_2 + 1 \bullet \bar{k}_3 + 0 \bullet \bar{k}_4 \\ \bar{h}_3 &= 1 \bullet \bar{k}_1 + 2 \bullet \bar{k}_2 + 0 \bullet \bar{k}_3 + 0 \bullet \bar{k}_4 \\ \bar{h}_4 &= 3 \bullet \bar{k}_1 + 0 \bullet \bar{k}_2 + 0 \bullet \bar{k}_3 + 0 \bullet \bar{k}_4 \end{aligned}$$

Como $\dim.(M_{2\times 2}) = 4$, cualesquiera 4 vectores de $M_{2\times 2}$ que sean LI forman una base de $M_{2\times 2}$; tal es el caso de los vectores $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ y $\bar{h}_4$, pues:

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \bar{h}_4 \end{matrix}$$

Las coordenadas del vector $\bar{x}$ respecto de la base formada por $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ y $\bar{h}_4$, son la solución del SLNH obtenido al expresar que $\bar{x}$ es CL de $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ y $\bar{h}_4$:

$$\bar{x} = \alpha \bullet \bar{h}_1 + \beta \bullet \bar{h}_2 + \lambda \bullet \bar{h}_3 + \theta \bullet \bar{h}_4 \Rightarrow$$

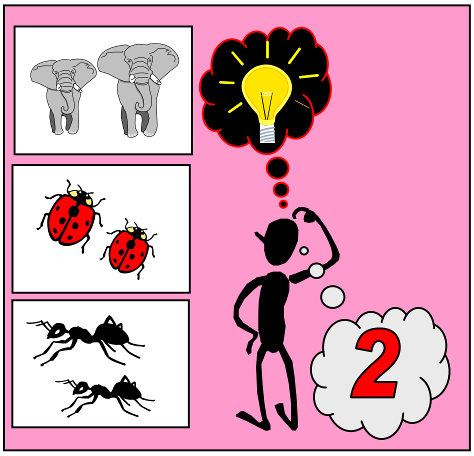
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta \bullet \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 = \alpha + 2.\beta + \lambda + 3.\theta \\ 1 = \alpha + 3.\beta + 2.\lambda \\ 1 = \alpha + \beta \\ 1 = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \lambda = 0 \\ \theta = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{x} = 1 \bullet \bar{h}_1 + 0 \bullet \bar{h}_2 + 0 \bullet \bar{h}_3 + 1 \bullet \bar{h}_4$$

Para expresar que $\bar{x} = 1 \bullet \bar{h}_1 + 0 \bullet \bar{h}_2 + 0 \bullet \bar{h}_3 + 1 \bullet \bar{h}_4$, se dice que $\bar{x}$ tiene coordenadas 1, 0, 0, 1 respecto de $B = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4\}$, y se escribe $\bar{x} = (1;0;0;1)$.

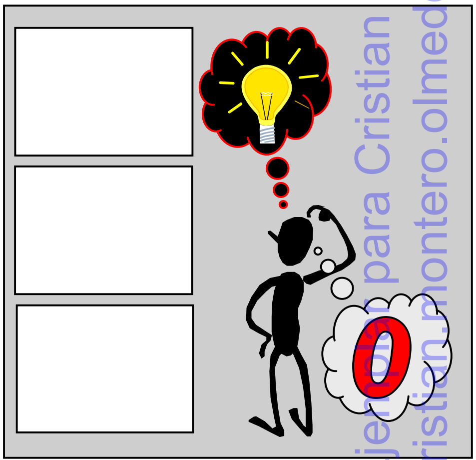
LA FACULTAD DE ABSTRACCIÓN

Historia del cero y del número negativo



La dificultad de desarrollar en el ser humano su capacidad de abstracción, que con la facultad de razonamiento constituye uno de los principales objetivos formativos de la enseñanza de la Matemática, lo prueba la historia del **cero** y del número negativo.

La palabra **cero** (de origen árabe: **sifr** = vacío) se introdujo al final del siglo XV y el uso del **cero** como número se aceptó en siglo XIII por Leonardo de Pisa, también llamado Fibonacci, que lo tomó de la escuela arábiga española, cuyo representante más prominente era Juan de Sevilla.



Los hindúes, en su célebre numeración decimal, usaban el cero como hueco, lo que es un enorme avance: representar la **nada** o **ausencia** de unidades por un símbolo... y a esto llegaron también los mayas en su notable sistema de numeración vigesimal.

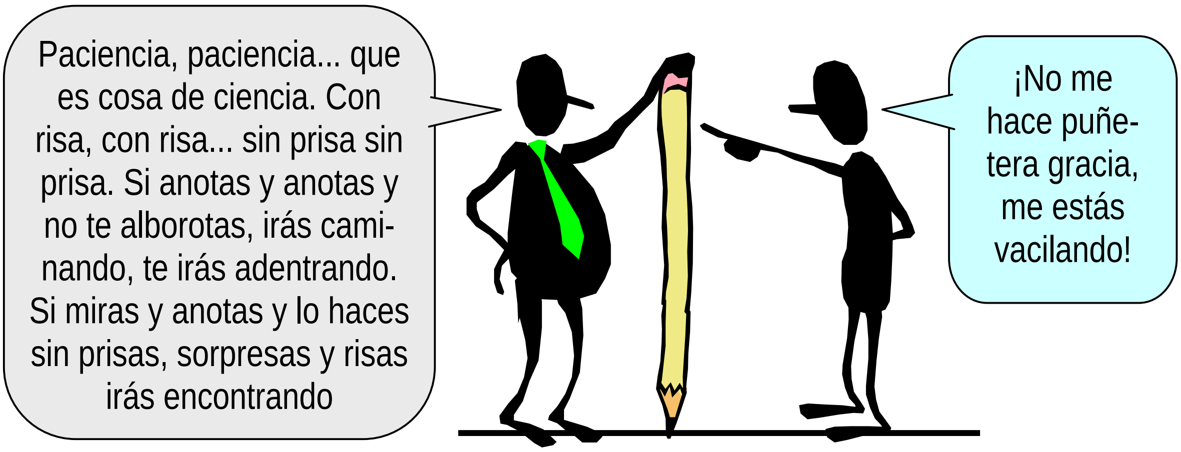
Hasta el siglo XVII no se aceptaron sin discusión los números negativos; los griegos nunca consideraron como solución de un problema una cantidad negativa o irracional.

Incluso las **fracciones** no eran **números** para los matemáticos griegos, sino **razones de números.** Sin embargo, el **logisto** = hábil calculador entre los griegos, o el **escriba** entre los egipcios, persistía en **calcular** profesionalmente con las **fracciones** como si fuesen **números,** sin preocuparse por justificar lógicamente sus reglas de cálculo e indiferente a las críticas irónicas de Platón.

Toda abstracción es en sí misma una fuente de contradicciones: su depuración es larga y difícil, pues las ideas tardan siempre en madurar. Muchas definiciones que se han dado de conceptos ahora perfectamente claros, son las mismas que hoy nos hacen estremecer cuando las escuchamos de algún alumno.

JULIO REY PASTOR

3.10 ECUACIÓN DE UN CAMBIO DE BASE



Dado que los vectores de un espacio vectorial "V" son camaleónicos, nos planteamos el problema de relacionar matemáticamente las coordenadas de un vector "Pepe" respecto de una base "María" con las coordenadas de "Pepe" respecto de otra base "Juana".

Por comodidad, supondremos que la dimensión de "V" es 2.

Sea $B_1 = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ una base de "V"; así, todo vector de "V" es CL de $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$.

Sea $B_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ otra base de "V"; así, todo vector de "V" es CL de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$.

Supongamos conocidas las coordenadas que respecto de la base $B_1 = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ tienen los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ que forman la base B_2:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u}_1 = a_{11} \bullet \bar{h}_1 + a_{12} \bullet \bar{h}_2 \\ \bar{u}_2 = a_{21} \bullet \bar{h}_1 + a_{22} \bullet \bar{h}_2 \end{array}\right\} \quad (I)$$

Sea $\bar{p}$ el vector "V" que tiene coordenadas x_1, x_2 respecto de la base B_1, y coordenadas y_1, y_2 respecto de la base B_2; es decir:

$$\bar{p} = x_1 \bullet \bar{h}_1 + x_2 \bullet \bar{h}_2 \quad (II)$$
$$\bar{p} = y_1 \bullet \bar{u}_1 + y_2 \bullet \bar{u}_2 \quad (III)$$

Nos planteamos el problema de **relacionar matemáticamente** los números x_1, x_2 con los números y_1, y_2... y para ello basta sustituir (I) en (III):

$$\bar{p} = y_1 \bullet \bar{u}_1 + y_2 \bullet \bar{u}_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{k}_1 = a_{11} \bullet \bar{h}_1 + a_{12} \bullet \bar{h}_2 \\ \bar{k}_2 = a_{21} \bullet \bar{h}_1 + a_{22} \bullet \bar{h}_2 \end{array}}$$

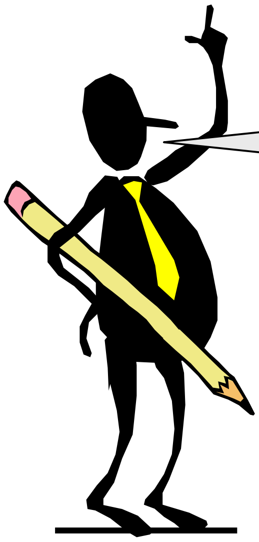
$$\Rightarrow \bar{p} = y_1 \bullet (a_{11} \bullet \bar{h}_1 + a_{12} \bullet \bar{h}_2) + y_2 \bullet (a_{21} \bullet \bar{h}_1 + a_{22} \bullet \bar{h}_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{p} = (y_1.a_{11} + y_2.a_{21}) \bullet \bar{h}_1 + (y_1.a_{12} + y_2.a_{22}) \bullet \bar{h}_2 \quad (IV)$$

Comparando (II) y (IV), resulta evidente que $\left\{\begin{array}{l} x_1 = y_1.a_{11} + y_2.a_{21} \\ x_2 = y_1.a_{12} + y_2.a_{22} \end{array}\right\}$: o sea:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (V)$$

La ecuación (V) resuelve el problema de **relacionar** las coordenadas del vector $\overline{p}$ respecto de la base B_1 con las coordenadas de $\overline{p}$ respecto de la base B_2. Por eso se dice que (V) es la **ecuación del cambio de base** $B_1 \to B_2$... y de "A" se dice que es la **matriz asociada al cambio de base.**

En adelante, cuando hablemos del cambio de base $B_1 \to B_2$, diremos que B_1 es la **base vieja** y B_2 es la **base nueva.** Naturalmente, si hablamos del cambio de base $B_2 \to B_1$, la base vieja es B_2 y la nueva es B_1.



Observa: la matriz "A" tiene una estructura muy peculiar, pues su k-ésima columna está formada por las coordenadas que respecto de la base vieja tiene el k-ésimo vector de la base nueva.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \\ \overline{u}_1 \quad\quad \overline{u}_2 \end{array}$$

La **generalización** al caso en que $\dim.(V) = n$ es trivial: si $B_1 = \{\overline{h}_1, ..., \overline{h}_n\}$ y $B_2 = \{\overline{u}_1, ..., \overline{u}_n\}$ son sendas bases de "V" y

$$\begin{array}{c} \overline{u}_1 = a_{11} \bullet \overline{h}_1 + ... + a_{1n} \bullet \overline{h}_n \\ :::::::::::::::::::::::::::::::::::: \\ \overline{u}_n = a_{n1} \bullet \overline{h}_1 + ... + a_{nn} \bullet \overline{h}_n \end{array}$$

entonces, si $\overline{p} \in V$ es tal que $\begin{cases} \overline{p} = x_1 \bullet \overline{h}_1 + ... + x_n \bullet \overline{h}_n \\ \overline{p} = y_1 \bullet \overline{u}_1 + ... + y_n \bullet \overline{u}_n \end{cases}$, la ecuación del cambio $B_1 \to B_2$ que **relaciona** las coordenadas $(x_1; .... ; x_n)$ de $\overline{p}$ respecto de B_1 **(base vieja)** con las coordenadas $(y_1; .... ; y_n)$ de $\overline{p}$ respecto de B_2 **(base nueva)** es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & ..... & a_{n1} \\ : & ::::: & : \\ a_{1n} & ..... & a_{nn} \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ : \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow\uparrow & \uparrow \\ \overline{k}_1 & .... & \overline{k}_n \end{array}$$

donde **la k-ésima columna de "A" está formada por las coordenadas que respecto de la base vieja tiene el k-ésimo vector de la base nueva.**

FONEMATO 3.10.1 (MATERNAL)

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_1=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ y $B_2=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$, siendo:

$$\overline{p}_1=2\bullet\overline{u}_1+3\bullet\overline{u}_2\ ;\ \overline{p}_2=5\bullet\overline{u}_1+6\bullet\overline{u}_2$$

1) Determínese la ecuación del cambio de base $B_1\to B_2$.

2) Determínense las coordenadas del vector $\overline{c}=9\bullet\overline{p}_1+8\bullet\overline{p}_2$ respecto de B_1.

3) Determínense las coordenadas del vector $\overline{w}=4\bullet\overline{u}_1+7\bullet\overline{u}_2$ respecto de B_2.

SOLUCIÓN LENTA

Sea $\overline{k}$ un vector cualquiera de $\Re^2$ tal que:

$$\begin{aligned}\overline{k}&=x_1\bullet\overline{u}_1+x_2\bullet\overline{u}_2 \quad \text{(I)}\\ \overline{k}&=y_1\bullet\overline{p}_1+y_2\bullet\overline{p}_2 \quad \text{(II)}\end{aligned}$$

O sea, el vector $\overline{k}$ tiene coordenadas x_1,x_2 respecto de la base $B_1=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$, y tiene coordenadas y_1,y_2 respecto de la base $B_2=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$.

1) Como $\overline{p}_1=2\bullet\overline{u}_1+3\bullet\overline{u}_2$ y $\overline{p}_2=5\bullet\overline{u}_1+6\bullet\overline{u}_2$, al sustituir en (II), resulta:

$$\overline{k}=y_1\bullet(2\bullet\overline{u}_1+3\bullet\overline{u}_2)+y_2\bullet(5\bullet\overline{u}_1+6\bullet\overline{u}_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\overline{k}=(2.y_1+5.y_2)\bullet\overline{u}_1+(3.y_1+5.y_2)\bullet\overline{u}_2 \quad \text{(III)}$$

Al comparar (I) y (III), resulta evidente que:

$$\left.\begin{aligned}x_1&=2.y_1+5.y_2\\ x_2&=3.y_1+6.y_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&5\\3&6\end{bmatrix}}_{A}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} \quad \text{(IV)}$$

que es la ecuación del cambio de base $B_1\to B_2$.

2) El enunciado identifica al vector $\overline{c}$ dándonos sus coordenadas respecto de la base $B_2=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$, pues al escribir $\overline{c}=9\bullet\overline{p}_1+8\bullet\overline{p}_2$, dice que $\overline{c}$ tiene coordenadas $(9;8)$ respecto de la base B_2. Sustituyendo en (IV), resulta:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\3&6\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58\\75\end{bmatrix}\Rightarrow\overline{c}=58\bullet\overline{u}_1+75\bullet\overline{u}_2=(58;75)$$

3) El enunciado identifica al vector $\overline{w}$ dándonos sus coordenadas respecto de la base $B_1=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$, pues al escribir $\overline{w}=4\bullet\overline{u}_1+7\bullet\overline{u}_2$, dice que $\overline{w}$ tiene coordenadas $(4;7)$ respecto de la base B_1. Sustituyendo en (IV), resulta:

$$\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\3&6\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\3&6\end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11/3\\-2/3\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overline{w}=\frac{11}{3}\bullet\overline{p}_1-\frac{2}{3}\bullet\overline{p}_2=(11/3;-2/3)$$

SOLUCIÓN RÁPIDA

Liberto Vector Libre ha resuelto miles de ejercicios de cambio de base, y sabe que en un espacio vectorial "V" de dimensión "n", la estructura de la ecuación del cambio de base $B_{vieja} \to B_{nueva}$ es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\substack{\text{coordenadas de } \overline{k} \in V \\ \text{respecto de la base "vieja"}}} = \begin{bmatrix} & & \\ & A_{n\times n} & \\ & & \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\substack{\text{coordenadas de } \overline{k} \in V \\ \text{respecto de la base "nueva"}}}$$

donde la k-ésima columna de "A" está formada por las coordenadas que respecto de la base vieja tiene el k-ésimo vector de la base nueva. En nuestro caso es $n = 2$, y como piden la ecuación del cambio $B_1 \to B_2$, la base vieja es $B_1 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ y la nueva es $B_2 = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2\}$.

Por tanto, siendo $\overline{k} \in \Re^2$ tal que $\left\{\begin{array}{l} \overline{k} = x_1 \bullet \overline{u}_1 + x_2 \bullet \overline{u}_2 \\ \overline{k} = y_1 \bullet \overline{p}_1 + y_2 \bullet \overline{p}_2 \end{array}\right\}$, la ecuación del cambio de base $B_1 \to B_2$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [A_{2\times 2}] \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Ya sólo queda determinar la matriz "A": de ella sabemos que sus columnas son las coordenadas que respecto de la base vieja B_1 tienen los vectores $\overline{p}_1$ y $\overline{p}_2$ que forman la base nueva B_2... y el enunciado es maternal y nos da esa información, pues dice que:

$$\begin{array}{l} \overline{p}_1 = 2 \bullet \overline{u}_1 + 3 \bullet \overline{u}_2 = (2;3) \equiv \text{primera columna de "A"} \\ \overline{p}_2 = 5 \bullet \overline{u}_1 + 6 \bullet \overline{u}_2 = (5;6) \equiv \text{segunda columna de "A"} \end{array}$$

Por tanto, la ecuación del cambio de base $B_1 \to B_2$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (IV)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \overline{p}_1 & \overline{p}_2 \end{array}$$

IMPORTANT NOTE

Conocida la ecuación del cambio de base $B_1 \to B_2$, el cálculo de la ecuación del cambio de base inverso $B_2 \to B_1$ es una chorrada hasta para el más tonto del planeta, y se deduce de (IV):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O sea, la matriz del cambio $B_2 \to B_1$ es la inversa de la del cambio $B_1 \to B_2$.

FONEMATO 3.10.2 (MATERNAL)

En $\Re^2$ se consideran las bases $B_5 = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$ y $B_3 = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2\}$, y se sabe que:

$$\overline{b}_1 = 9 \bullet \overline{w}_1 + 2 \bullet \overline{w}_2 \; ; \; \overline{b}_2 = 3 \bullet \overline{w}_1 - 4 \bullet \overline{w}_2$$

1) Determínese la ecuación del cambio de base $B_5 \to B_3$.

2) Determínense las coordenadas del vector $\overline{m} = 1 \bullet \overline{b}_1 + 6 \bullet \overline{b}_2$ respecto de B_5.

3) Determínense las coordenadas del vector $\overline{n} = 1 \bullet \overline{w}_1 + 2 \bullet \overline{w}_2$ respecto de B_3.

SOLUCIÓN RÁPIDA

1) Como todo el mundo sabe, en un espacio vectorial "V" de dimensión "n", la estructura de la ecuación del cambio de base $B_{vieja} \to B_{nueva}$ es:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & A_{n\times n} & \\ & & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{coordenadas de } \overline{k} \in V \text{ respecto de la base "vieja"}}$ $\boxed{\text{coordenadas de } \overline{k} \in V \text{ respecto de la base "nueva"}}$

donde la k-ésima columna de "A" está formada por las coordenadas que respecto de la base vieja tiene el k-ésimo vector de la base nueva.

En nuestro caso es $n = 2$, y como piden la ecuación del cambio $B_5 \to B_3$, la base vieja es $B_5 = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$ y la nueva es $B_3 = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2\}$. Por tanto, siendo $\overline{k}$ un vector cualquiera de $\Re^2$ tal que:

$$\overline{k} = x_1 \bullet \overline{w}_1 + x_2 \bullet \overline{w}_2$$
$$\overline{k} = y_1 \bullet \overline{b}_1 + y_2 \bullet \overline{b}_2$$

la ecuación del cambio de base $B_5 \to B_3$ es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [A_{2\times 2}] \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Ya sólo queda determinar la matriz "A" asociada al cambio de base: de ella sabemos que sus columnas son las coordenadas que respecto de la base vieja B_5 tienen los vectores $\overline{b}_1$ y $\overline{b}_2$ que forman la base nueva B_3... y el enunciado es caritativo y nos da esa maravillosa información, pues dice que:

$$\overline{b}_1 = 9 \bullet \overline{w}_1 + 2 \bullet \overline{w}_2 = (9;2) \equiv \text{primera columna de "A"}$$
$$\overline{b}_2 = 3 \bullet \overline{w}_1 - 4 \bullet \overline{w}_2 = (3;-4) \equiv \text{segunda columna de "A"}$$

Por tanto, la ecuación del cambio de base $B_5 \to B_3$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (I)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \overline{b}_1 & \overline{b}_2 \end{array}$$

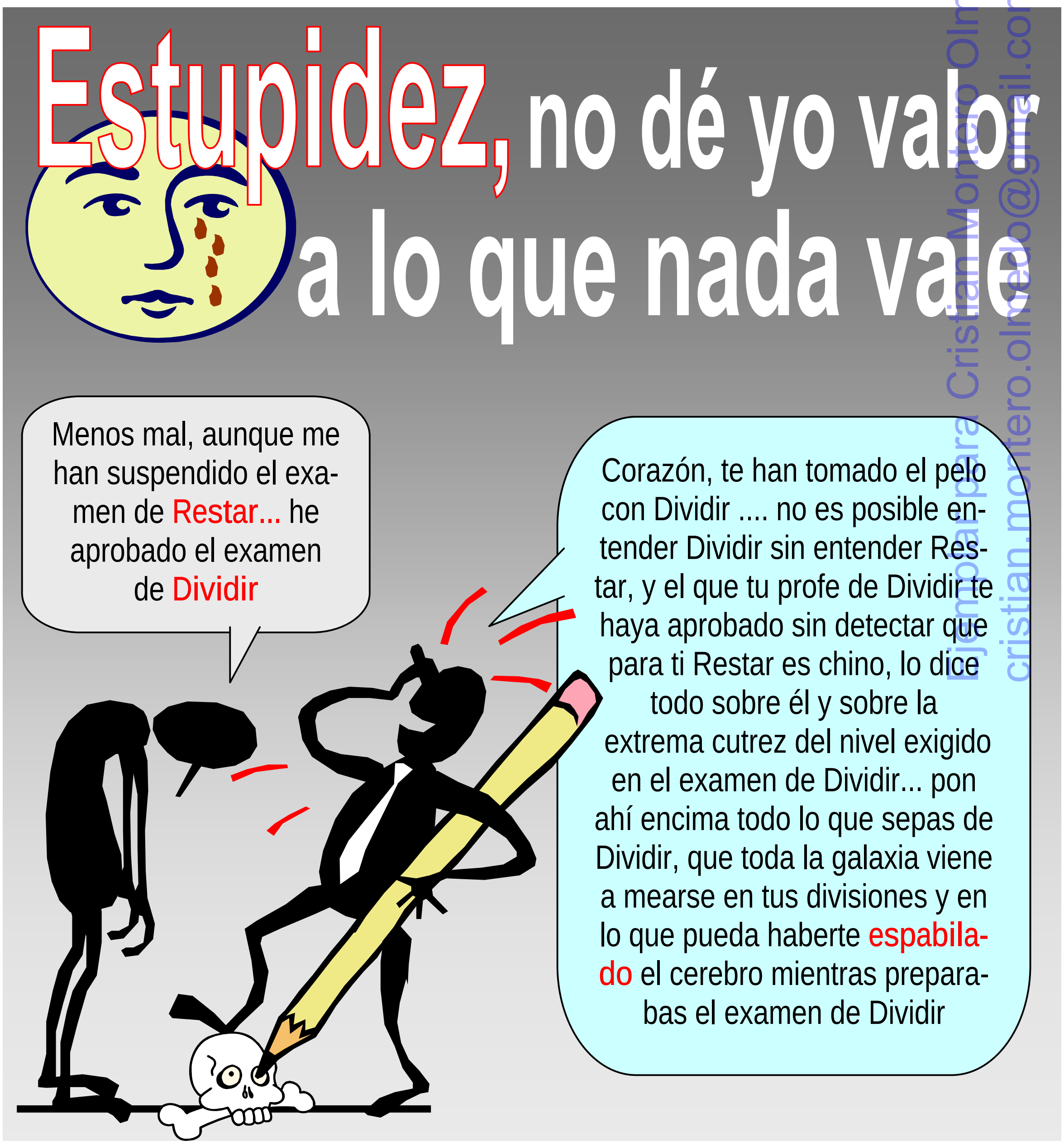
2) El enunciado **identifica** al vector $\overline{m}$ dándonos sus coordenadas respecto de la base $B_3 = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2\}$, pues al escribir $\overline{m} = 1 \bullet \overline{b}_1 + 6 \bullet \overline{b}_2$, nos dice que $\overline{m}$ tiene coordenadas $(1;6)$ respecto de la base B_3. Al sustituir en (I), resulta:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -22 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{m} = 27 \bullet \overline{w}_1 - 22 \bullet \overline{w}_2$$

3) El enunciado **identifica** al vector $\overline{n}$ dándonos sus coordenadas respecto de la base $B_5 = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$, pues al escribir $\overline{n} = 1 \bullet \overline{w}_1 + 2 \bullet \overline{w}_2$, dice que $\overline{n}$ tiene coordenadas $(1;2)$ respecto de la base B_5. Al sustituir en (I), resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/21 \\ -8/21 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{n} = \frac{5}{21} \bullet \overline{b}_1 - \frac{8}{21} \bullet \overline{b}_2$$



FONEMATO 3.10.3 (CASI MATERNAL)

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_1=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ y $B_2=\{\bar{p}_1,\bar{p}_2\}$; se sabe que:

$$\bar{u}_1=4\bullet\bar{p}_1+5\bullet\bar{p}_2\ ;\ \bar{u}_2=6\bullet\bar{p}_1+8\bullet\bar{p}_2$$

Determínese la ecuación del cambio de base $B_1\to B_2$.

SOLUCIÓN LENTA

Sea $\bar{k}$ un vector cualquiera de $\Re^2$ tal que:

$$\begin{array}{ll}\bar{k}=x_1\bullet\bar{u}_1+x_2\bullet\bar{u}_2 & \text{(I)}\\ \bar{k}=y_1\bullet\bar{p}_1+y_2\bullet\bar{p}_2 & \text{(II)}\end{array}$$

O sea, el vector $\bar{k}$ tiene coordenadas x_1,x_2 respecto de la base $B_1=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$, y tiene coordenadas y_1,y_2 respecto de la base $B_2=\{\bar{p}_1,\bar{p}_2\}$.

Al sustituir $\bar{u}_1=4\bullet\bar{p}_1+5\bullet\bar{p}_2$ y $\bar{u}_2=6\bullet\bar{p}_1+8\bullet\bar{p}_2$ en (I), se obtiene:

$$\bar{k}=x_1\bullet(4\bullet\bar{p}_1+5\bullet\bar{p}_2)+x_2\bullet(6\bullet\bar{p}_1+8\bullet\bar{p}_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\bar{k}=(4.x_1+6.x_2)\bullet\bar{p}_1+(5.x_1+8.x_2)\bullet\bar{p}_2)\quad\text{(III)}$$

Al comparar (II) y (III), resulta evidente que:

$$\left.\begin{array}{l}y_1=4.x_1+6.x_2\\ y_2=5.x_1+8.x_2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&6\\5&8\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&6\\5&8\end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

que es la ecuación del cambio de base $B_1\to B_2$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Es dominio público que en un espacio vectorial "V" de dimensión "n", la **estructura** de la ecuación del cambio de base $B_{\text{vieja}}\to B_{\text{nueva}}$ es:

$$\begin{bmatrix}\vdots\\\vdots\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\quad & A_{n\times n} & \quad\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\vdots\\\vdots\\\vdots\end{bmatrix}$$

coordenadas de $\bar{k}\in V$ respecto de la base "vieja"

coordenadas de $\bar{k}\in V$ respecto de la base "nueva"

donde la k-ésima columna de "A" está formada por las coordenadas que respecto de la base vieja tiene el k-ésimo vector de la base nueva.

En nuestro caso es $n=2$, y como nos piden la ecuación del cambio $B_1\to B_2$, la base vieja es $B_1=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ y la nueva es $B_2=\{\bar{p}_1,\bar{p}_2\}$.

Por tanto, siendo $\bar{k}$ un vector cualquiera de $\Re^2$ tal que:

$$\bar{k}=x_1\bullet\bar{u}_1+x_2\bullet\bar{u}_2\ ;\ \bar{k}=y_1\bullet\bar{p}_1+y_2\bullet\bar{p}_2$$

la ecuación del cambio de base $B_1\to B_2$ es $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=[A_{2\times2}]\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$.

Ya sólo queda determinar la matriz "A": de ella sabemos que sus columnas son las coordenadas que respecto de la base vieja B_1 tienen los vectores $\overline{p}_1$ y $\overline{p}_2$ que forman la base nueva B_2... pero no estamos ante un cambio de base maternal, pues el enunciado no da las coordenadas que respecto de la base vieja tienen los vectores que forman la base nueva (así nos estaría dando las columnas de la matriz "A" asociada al cambio $B_1 \to B_2$), nos da lo contrario: nos da las coordenadas que respecto de la base nueva $B_2 = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2\}$ tienen los vectores $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ que forman la base vieja $B_1 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$:

$$\overline{u}_1 = 4 \bullet \overline{p}_1 + 5 \bullet \overline{p}_2 \ ; \ \overline{u}_2 = 6 \bullet \overline{p}_1 + 8 \bullet \overline{p}_2$$

Lo que el perverso enunciado persigue al hacernos esta sucia e impresentable jugarreta es que no podamos escribir con la gorra la matriz "A" asociada al cambio de base pedido, como hicimos en los ejercicios 3.10.1, 3.10.2 y 3.10.3

Pero como no nos chupamos el dedo, volvemos la tortilla: en el cambio de base $B_2 \to B_1$ (o sea, el cambio inverso al que nos piden) la base vieja es B_2 y la nueva es B_1; por tanto, su estructura es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & H_{2\times 2} & \\ & & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

coordenadas de $\overline{k} \in \Re^2$ respecto de la base "vieja" B_2	coordenadas de $\overline{k} \in \Re^2$ respecto de la base "nueva" B_1

donde las columnas de "H" son las coordenadas de los vectores de la base nueva $B_1 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ respecto de la base vieja $B_2 = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2\}$..... y como sabemos que $\overline{u}_1 = 4 \bullet \overline{p}_1 + 5 \bullet \overline{p}_2$ y $\overline{u}_2 = 6 \bullet \overline{p}_1 + 8 \bullet \overline{p}_2$, podemos escribir a la velocidad de la luz la ecuación del cambio de base $B_2 \to B_1$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}}^{H} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \overline{u}_1 & \overline{u}_2 \end{array}$$

A partir de (I) obtenemos la ecuación del cambio de base $B_1 \to B_2$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Toma buena nota: ante un cambio de base $B_{vieja} \to B_{nueva}$, **si te dan las coordenadas que respecto de la base vieja tienen los vectores de la base nueva** (situación maternal), **te están dando las columnas de la matriz asociada al cambio de base... y si te dan lo contrario** (situación casi maternal), **te están dando las columnas de la matriz inversa de la asociada al cambio de base pedido.**

FONEMATO 3.10.4 (CASI MATERNAL)

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_7=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2\}$ y $B_2=\{\overline{w}_1,\overline{w}_2\}$; se sabe que:

$$\overline{w}_1=5\bullet\overline{k}_1+7\bullet\overline{k}_2\ ;\ \overline{w}_2=6\bullet\overline{k}_1+9\bullet\overline{k}_2$$

Determínese la ecuación del cambio de base $B_2\to B_7$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Sea $\overline{m}$ un vector cualquiera de $\Re^2$ tal que $\overline{m}=\begin{cases}x_1\bullet\overline{w}_1+x_2\bullet\overline{w}_2\\ y_1\bullet\overline{k}_1+y_2\bullet\overline{k}_2\end{cases}$.

En el cambio de base $B_2\to B_7$ la base vieja es $B_2=\{\overline{w}_1,\overline{w}_2\}$ y la base nueva es $B_7=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2\}$.

Conocemos las coordenadas que respecto de la base nueva tienen los vectores de la base vieja (situación casi maternal):

$$\begin{aligned}\overline{w}_1&=5\bullet\overline{k}_1+7\bullet\overline{k}_2\\ \overline{w}_2&=6\bullet\overline{k}_1+9\bullet\overline{k}_2\end{aligned}$$

y por ello podemos escribir <u>a la velocidad de la luz</u> la inversa de la matriz "A" asociada al cambio de base pedido, es:

$$A^{-1}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 9\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}\uparrow & \uparrow\\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2\end{array}\end{array}$$

La ecuación del cambio de base pedido $B_2\to B_7$ es:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 9\end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

CURIOSIDADES DEL NÚMERO 37

Al multiplicar el número 37 por 3 y los múltiplos de 3 hasta 27, se obtienen números con las tres cifras iguales desde el 1 hasta el 9.

$$37\times 3=111\ ;\ 37\times 6=222\ ;\ 37\times 9=333$$

$$37\times 12=444\ ;\ ....\ ;\ 37\times 27=999$$

FONEMATO 3.10.5 (MATERNAL)

En el espacio vectorial $(\mathfrak{R}^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_4=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2,\bar{d}_3\}$ y $B_8=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$; se sabe que:

$$\bar{u}_1=\bar{d}_1+3\bullet\bar{d}_2+4\bullet\bar{d}_3\ ;\ \bar{u}_2=2\bullet\bar{d}_1-2\bullet\bar{d}_2+5\bullet\bar{d}_3\ ;\ \bar{u}_3=\bar{d}_3$$

Determínese la ecuación del cambio de base $B_4\to B_8$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Como todo el mundo sabe, en un espacio vectorial "V" de dimensión "n", la "estructura" de la ecuación del cambio de base $B_{\text{vieja}}\to B_{\text{nueva}}$ es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\substack{\text{coordenadas de } \bar{m}\in V\\ \text{respecto de la base "vieja"}}}=\begin{bmatrix} & A_{n\times n} & \end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\substack{\text{coordenadas de } \bar{m}\in V\\ \text{respecto de la base "nueva"}}}$$

donde la k-ésima columna de "A" está formada por las coordenadas que respecto de la base vieja tiene el k-ésimo vector de la base nueva.

En nuestro caso es $n=3$, y como nos piden la ecuación del cambio $B_4\to B_8$, la base **vieja** es $B_4=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2,\bar{d}_3\}$ y la **nueva** es $B_8=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$. Por tanto, siendo $\bar{m}$ un vector cualquiera de $\mathfrak{R}^3$ tal que $\bar{m}=\begin{cases}x_1\bullet\bar{d}_1+x_2\bullet\bar{d}_2+x_3\bullet\bar{d}_3\\ y_1\bullet\bar{u}_1+y_2\bullet\bar{u}_2+y_3\bullet\bar{u}_3\end{cases}$, la ecuación del cambio de base $B_4\to B_8$ es:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[A_{3\times3}]\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}.$$

De la matriz "A" del cambio de base sabemos que su k-ésima columna está formada por las coordenadas que respecto de la base **vieja** B_4 tiene el k-ésimo vector de la base **nueva** $B_8=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$... y el enunciado es tan **maternal** que nos da esa preciada información, pues dice que:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1&=1\bullet\bar{d}_1+3\bullet\bar{d}_2+4\bullet\bar{d}_3=(1;3;4)\equiv\text{primera columna de "A"}\\ \bar{u}_2&=2\bullet\bar{d}_1-2\bullet\bar{d}_2+5\bullet\bar{d}_3=(2;-2;5)\equiv\text{segunda columna de "A"}\\ \bar{u}_3&=0\bullet\bar{d}_1+0\bullet\bar{d}_2+1\bullet\bar{d}_3=(0;0;1)\equiv\text{tercera columna de "A"}\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación del cambio de base $B_4\to B_8$ es:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-2&0\\4&5&1\end{bmatrix}}^{A}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{u}_1&\bar{u}_2&\bar{u}_3\end{array}$$

FONEMATO 3.10.6 (BASE "PUENTE")

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_3=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$, $B_2=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2\}$ y $B_4=\{\overline{m}_1,\overline{m}_2\}$; se sabe que:

$$\overline{k}_1=1\bullet\overline{p}_1+2\bullet\overline{p}_2\ ;\ \overline{k}_2=3\bullet\overline{p}_1+4\bullet\overline{p}_2$$
$$\overline{p}_1=5\bullet\overline{m}_1+6\bullet\overline{m}_2\ ;\ \overline{p}_2=7\bullet\overline{m}_1+8\bullet\overline{m}_2$$

Determínese la ecuación del cambio de base $B_4\to B_2$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Este ejercicio no es maternal ni casi maternal: se nos pide la ecuación del cambio de base $B_4\to B_2$, y el enunciado, en vez de relacionar entre sí los vectores de esas dos bases (como hacía en los casos maternal y casi maternal), relaciona dichos vectores con los vectores de una tercera base $B_3=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$, que actúa como base puente.

Sea $\overline{w}$ un vector cualquiera de $\Re^2$ tal que:

$$\overline{w}=x_1\bullet\overline{m}_1+x_2\bullet\overline{m}_2$$
$$\overline{w}=y_1\bullet\overline{k}_1+y_2\bullet\overline{k}_2$$
$$\overline{w}=z_1\bullet\overline{p}_1+z_2\bullet\overline{p}_2$$

En este trance, denotando $B*$ a la base puente, la estrategia a seguir es:

1) Determinamos la ecuación del cambio $B_4\to B*$ o la del $B*\to B_4$; uno de ellos será maternal y el otro casi maternal. Para nosotros, como la base puente es B_3, hay que elegir entre los cambios $B_4\to B_3$ y $B_3\to B_4$... y la elección se hace en función de la información que tengamos. En nuestro caso, al decirnos que $\overline{p}_1=5\bullet\overline{m}_1+6\bullet\overline{m}_2$ y $\overline{p}_2=7\bullet\overline{m}_1+8\bullet\overline{m}_2$ nos dan las coordenadas que respecto de la base $B_4=\{\overline{m}_1,\overline{m}_2\}$ tienen los vectores $\overline{p}_1$ y $\overline{p}_2$ que forman la base $B_3=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$; por tanto, el cambio $B_4\to B_3$ es maternal:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\underset{\begin{matrix}\uparrow&\uparrow\\\overline{p}_1&\overline{p}_2\end{matrix}}{\overbrace{\begin{bmatrix}5&7\\6&8\end{bmatrix}}^{H}}\bullet\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}\quad\text{(I)}$$

2) Determinamos la ecuación del cambio $B_2\to B*$ o la del $B*\to B_2$; uno de ellos será maternal y el otro casi maternal. Para nosotros, como la base puente es B_3, hay que elegir entre los cambios $B_2\to B_3$ y $B_3\to B_2$ ... y la elección se hace en función de la información que tengamos. En nuestro caso, al decirnos que $\overline{k}_1=1\bullet\overline{p}_1+2\bullet\overline{p}_2$ y $\overline{k}_2=3\bullet\overline{p}_1+4\bullet\overline{p}_2$ nos dan las coordenadas que respecto de la base $B_3=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$ tienen los vectores $\overline{k}_1$ y $\overline{k}_2$ que forman

la base $B_2 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$; por tanto, el cambio $B_3 \to B_2$ es maternal:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}^{T} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \overline{k}_1 & \overline{k}_2 \end{array}$$

3) A partir de (I) y (II) obtendremos la ecuación del cambio $B_4 \to B_2$. Con la notación empleada, la ecuación de dicho cambio de base es:

coordenadas de $\overline{w} \in \Re^2$ respecto de la base "vieja" B_4	coordenadas de $\overline{w} \in \Re^2$ respecto de la base "nueva" B_2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = H \bullet T \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = H \bullet \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (H \bullet T) \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

EXITO SEGURO

Ese es el premio para l@s que educan su voluntad en el rigor: no contentarse nunca con entender a medias; dedicar el tiempo que haga falta, pero comprender, asimilar, progresar.

FONEMATO 3.10.7 (BASE "PUENTE")

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_7=\{\overline{w}_1=(2;5)\,,\overline{w}_2=(6;7)\}$ y $B_9=\{\overline{k}_1=(1;2)\,,\overline{k}_2=(9;9)\}$.

Determínese la ecuación del cambio de base $B_7\to B_9$.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Como no se dice nada al respecto, consideramos que la base de referencia en $\Re^2$ es la canónica $B_c=\{\overline{b}_1=(1;0)\,;\overline{b}_2=(0;1)\}$.

El ejercicio no es maternal ni casi maternal: piden la ecuación del cambio de base $B_7\to B_9$, y el enunciado, en vez de relacionar entre sí los vectores de esas bases (como en los casos maternal y casi maternal), relaciona dichos vectores con los vectores de una tercera base $B_c=\{\overline{b}_1=(1;0)\,;\overline{b}_2=(0;1)\}$ que actúa como base puente.

Sea $\overline{w}$ un vector cualquiera de $\Re^2$ tal que

$$\begin{cases}\overline{w}=x_1\bullet\overline{w}_1+x_2\bullet\overline{w}_2\\ \overline{w}=y_1\bullet\overline{k}_1+y_2\bullet\overline{k}_2\\ \overline{w}=z_1\bullet\overline{b}_1+z_2\bullet\overline{b}_2\end{cases}$$

- El cambio de base $B_c\to B_7$ es maternal:

$$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}2&6\\5&7\end{bmatrix}}^{H}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\quad\text{(I)}$$
$$\begin{matrix}\uparrow&\uparrow\\ \overline{w}_1&\overline{w}_2\end{matrix}$$

- El cambio de base $B_c\to B_9$ es maternal:

$$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}1&9\\2&9\end{bmatrix}}^{T}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\quad\text{(II)}$$
$$\begin{matrix}\uparrow&\uparrow\\ \overline{k}_1&\overline{k}_2\end{matrix}$$

- A partir de (I) y (II) obtendremos la ecuación del cambio $B_7\to B_9$. Con la notación empleada, la ecuación de dicho cambio de base es:

coordenadas de $\overline{w}\in\Re^2$ respecto de la base "vieja" B_7	coordenadas de $\overline{w}\in\Re^2$ respecto de la base "nueva" B_9

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=H^{-1}\bullet T\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=H\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=T\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}\Rightarrow H\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=T\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=(H^{-1}\bullet T)\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

Sabemos que las columnas de la matriz asociada al cambio $B_7 \to B_9$ son las coordenadas que respecto de la base $B_7 = \{\overline{w}_1 = (2;5)\,,\, \overline{w}_2 = (6;7)\}$ tienen los vectores $\overline{k}_1 = (1;2)$ y $\overline{k}_2 = (9;9)$ que forman la base $B_9 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$ ..... y esas coordenadas son muy fáciles de calcular a partir de lo que nos dice el enunciado, sin más que resolver 2 sistemas lineales de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

- Al expresar que $\overline{k}_1 = (1;2)$ es CL de $\overline{w}_1 = (2;5)$ y $\overline{w}_2 = (6;7)$, resulta:

$$(1;2) = \alpha \bullet (2;5) + \beta \bullet (6;7) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 = 2.\alpha + 6.\beta \\ 2 = 5.\alpha + 7.\beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5/16 \\ \beta = 1/16 \end{cases}$$

- Al expresar que $\overline{k}_2 = (9;9)$ es CL de $\overline{w}_1 = (2;5)$ y $\overline{w}_2 = (6;7)$, resulta:

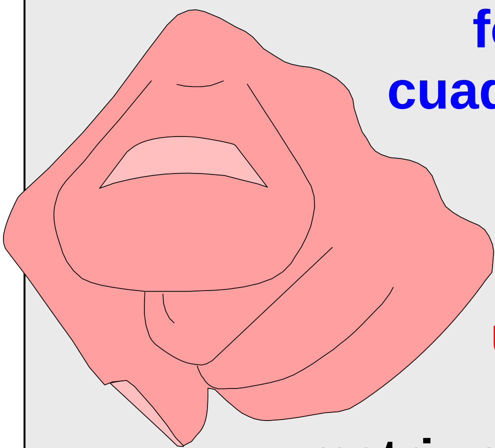
$$(9;9) = \lambda \bullet (2;5) + \theta \bullet (6;7) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 9 = 2.\lambda + 6.\theta \\ 9 = 5.\lambda + 7.\theta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -21/16 \\ \theta = 27/16 \end{cases}$$

- Por tanto, la ecuación del cambio de base $B_7 \to B_9$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/16 & -21/16 \\ 1/16 & 27/16 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \overline{k}_1 & \overline{k}_2 \end{array}$$

- **Obvio:** en $\Re^{30}$, la solución alternativa nos obligaría a resolución de 30 sistemas lineales de 30 incógnitas cada uno, lo que es un petardo. En la solución que usa a la base canónica como puente, las matrices "H" y "T" serían cuadradas de orden 30 y tan fáciles de construir como cuando el espacio tiene dimensión 2... el castigo sería calcular la matriz $H^{-1} \bullet T$.

Los cambios de base tendrán protagonismo estelar al trabajar con aplicaciones lineales, endomorfismos, formas bilineales y formas cuadráticas, pues estos entes relacionados con los espacios vectoriales se identifican mediante una matriz, y también son camaleónicos; o sea, la matriz que los identifica depende las bases de referencia elegidas en los espacios vectoriales.



FONEMATO 3.10.8

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_1=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\}$ y $B_2=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3\}$. Si existen, determine los vectores con iguales coordenadas respecto de las dos bases, en los siguientes casos:

1) $\overline{v}_1=2\bullet\overline{u}_1,\ \overline{v}_2=\overline{u}_1+2\bullet\overline{u}_2-\overline{u}_3,\ \overline{v}_3=\overline{u}_1+\overline{u}_3$

2) $\overline{v}_1=2\bullet\overline{u}_1+\overline{u}_2+\overline{u}_3,\ \overline{v}_2=2\bullet\overline{u}_1+3\bullet\overline{u}_2+2\bullet\overline{u}_3,\ \overline{v}_3=\overline{u}_1+\overline{u}_2+2\bullet\overline{u}_3$

3) $\overline{v}_1=2\bullet\overline{u}_1,\ \overline{v}_2=-\overline{u}_2,\ \overline{v}_3=\overline{u}_1+\overline{u}_2-\overline{u}_3$

SOLUCIÓN RÁPIDA

Sea $\overline{p}\in\Re^3$ tal que:

$$\overline{p}=x_1\bullet\overline{u}_1+x_2\bullet\overline{u}_2+x_3\bullet\overline{u}_3\ ;\ \overline{p}=y_1\bullet\overline{v}_1+y_2\bullet\overline{v}_2+y_3\bullet\overline{v}_3$$

1) La ecuación del cambio de base $B_1\to B_2$ es:

coordenadas de $\overline{p}$ respecto de B_1 | coordenadas de $\overline{p}$ respecto de B_2

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}}^{A}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

$\overline{v}_1=2\bullet\overline{u}_1+0\bullet\overline{u}_2+0\bullet\overline{u}_3$ | $\overline{v}_3=1\bullet\overline{u}_1+0\bullet\overline{u}_2+1\bullet\overline{u}_3$

$\overline{v}_2=1\bullet\overline{u}_1+2\bullet\overline{u}_2-1\bullet\overline{u}_3$

Al **exigir** que $\overline{p}$ tenga iguales coordenadas respecto de ambas bases, resulta:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\Rightarrow A\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$I\equiv$ matriz unidad de orden 3

$$\Rightarrow(A-I)\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix}}_{A-I}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\ (*)$$

Por tanto, las coordenadas de vectores de $\Re^3$ con iguales coordenadas respecto de B_1 y B_2 corresponden a las soluciones del sistema lineal homogéneo (*), que tiene infinitas, pues $rg(A-I)=2$. Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos x_3:

$$\left.\begin{array}{r}x_1+x_2=-x_3\\x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=-x_3\\x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow S_1=\{(-a;0;a),\ \forall a\in\Re\}\subset\Re^3$$

Así, si $\overline{p}=-a\bullet\overline{u}_1+0\bullet\overline{u}_2+a\bullet\overline{u}_3$, también es $\overline{p}=-a\bullet\overline{v}_1+0\bullet\overline{v}_2+a\bullet\overline{v}_3$.

Comprobación:

$$\begin{bmatrix}-a\\0\\a\end{bmatrix}=A\bullet\begin{bmatrix}-a\\0\\a\end{bmatrix},\ \forall a\in\Re$$

2) Siendo

$$\overline{v}_1 = 2\bullet\overline{u}_1+\overline{u}_2+\overline{u}_3\ ;\ \overline{v}_2 = 2\bullet\overline{u}_1+3\bullet\overline{u}_2+2\bullet\overline{u}_3\ ;\ \overline{v}_3 = \overline{u}_1+\overline{u}_2+2\bullet\overline{u}_3$$

la matriz "A" asociada al cambio de base $B_1 \to B_2$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\overline{v}_1 = 2\bullet\overline{u}_1 + 1\bullet\overline{u}_2 + 1\bullet\overline{u}_3$ $\quad$ $\overline{v}_3 = 1\bullet\overline{u}_1 + 1\bullet\overline{u}_2 + 2\bullet\overline{u}_3$

$\overline{v}_2 = 2\bullet\overline{u}_1 + 3\bullet\overline{u}_2 + 2\bullet\overline{u}_3$

Al **exigir** que $\overline{p}$ tenga iguales coordenadas respecto de ambas bases, resulta:

$$(A-I)\bullet\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A-I} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ (**)$$

Las vectores de $\Re^3$ con iguales coordenadas respecto de B_1 y B_2 corresponden a las soluciones del SLH (**), que tiene infinitas, pues $rg(A-I) = 1$.

Como el menor de orden 1 indicado es no nulo, eliminamos las ecuaciones 2ª y 3ª y parametrizamos x_2 y x_3; resulta:

$$x_1 = -2.x_2 - x_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_2 = \{(-2.a-b;a;b),\ \forall a,b \in \Re\} \subset \Re^3$$

Cualesquiera que sean los valores asignados a los parámetros "a" y "b", si

$$\overline{p} = (-2.a+b)\bullet\overline{u}_1 + a\bullet\overline{u}_2 + b\bullet\overline{u}_3$$

es:

$$\overline{p} = (-2.a+b)\bullet\overline{v}_1 + a\bullet\overline{v}_2 + b\bullet\overline{v}_3$$

3) Si $\overline{v}_1 = 2\bullet\overline{u}_1$, $\overline{v}_2 = -\overline{u}_2$, $\overline{v}_3 = \overline{u}_1+\overline{u}_2-\overline{u}_3$, la matriz del cambio $B_1 \to B_2$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\overline{v}_1 = 2\bullet\overline{u}_1 + 0\bullet\overline{u}_2 + 0\bullet\overline{u}_3$ $\quad$ $\overline{v}_3 = 1\bullet\overline{u}_1 + 1\bullet\overline{u}_2 - 1\bullet\overline{u}_3$

$\overline{v}_2 = 0\bullet\overline{u}_1 - 1\bullet\overline{u}_2 + 0\bullet\overline{u}_3$

Al **exigir** que $\overline{p}$ tenga iguales coordenadas respecto de ambas bases, resulta:

$$(A-I)\bullet\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A-I} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ (***)$$

El SLH (***) sólo tiene la solución $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, pues $rg(A-I) = 3$; así, el vector $\overline{0}$ es el único que tiene las mismas coordenadas respecto de B_1 y B_2.

FONEMATO 3.10.9

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_1=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2,\bar{d}_3\}$ y $B_2=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$. Si $\bar{d}_1=\bar{k}_1$ y $\bar{d}_2=\bar{k}_1+\bar{k}_2$, determínense las coordenadas del vector $\bar{d}_3$ respecto de la base B_2 si el vector $\bar{p}\in\Re^3$ tiene coordenadas $(2;1;1)$ respecto de B_1 y coordenadas $(1;1;1)$ respecto de B_2.

SOLUCIÓN RÁPIDA

Si $\left\{\begin{array}{l}\bar{d}_1=1\bullet\bar{k}_1+0\bullet\bar{k}_2+0\bullet\bar{k}_3\\ \bar{d}_2=1\bullet\bar{k}_1+1\bullet\bar{k}_2+0\bullet\bar{k}_3\\ \bar{d}_3=\alpha\bullet\bar{k}_1+\beta\bullet\bar{k}_2+\gamma\bullet\bar{k}_3\end{array}\right\}$ y $\bar{p}=\left\{\begin{array}{l}2\bullet\bar{d}_1+1\bullet\bar{d}_2+1\bullet\bar{d}_3\\ 1\bullet\bar{k}_1+1\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3\end{array}\right\}$, es:

coordenadas de $\bar{p}$ respecto de B_2 — coordenadas de $\bar{p}$ respecto de B_1

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&\alpha\\0&1&\beta\\0&0&\gamma\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$\bar{d}_1=1\bullet\bar{k}_1+0\bullet\bar{k}_2+0\bullet\bar{k}_3$ — $\bar{d}_3=\alpha\bullet\bar{k}_1+\beta\bullet\bar{k}_2+\gamma\bullet\bar{k}_3$

$\bar{d}_2=1\bullet\bar{k}_1+1\bullet\bar{k}_2+0\bullet\bar{k}_3$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}1=2+1+\alpha\\1=0+1+\beta\\1=0+0+\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=-2\\\beta=0\\\gamma=1\end{array}\right\}\Rightarrow\bar{d}_3=-2\bullet\bar{k}_1+0\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3$$

DE OTRA FORMA

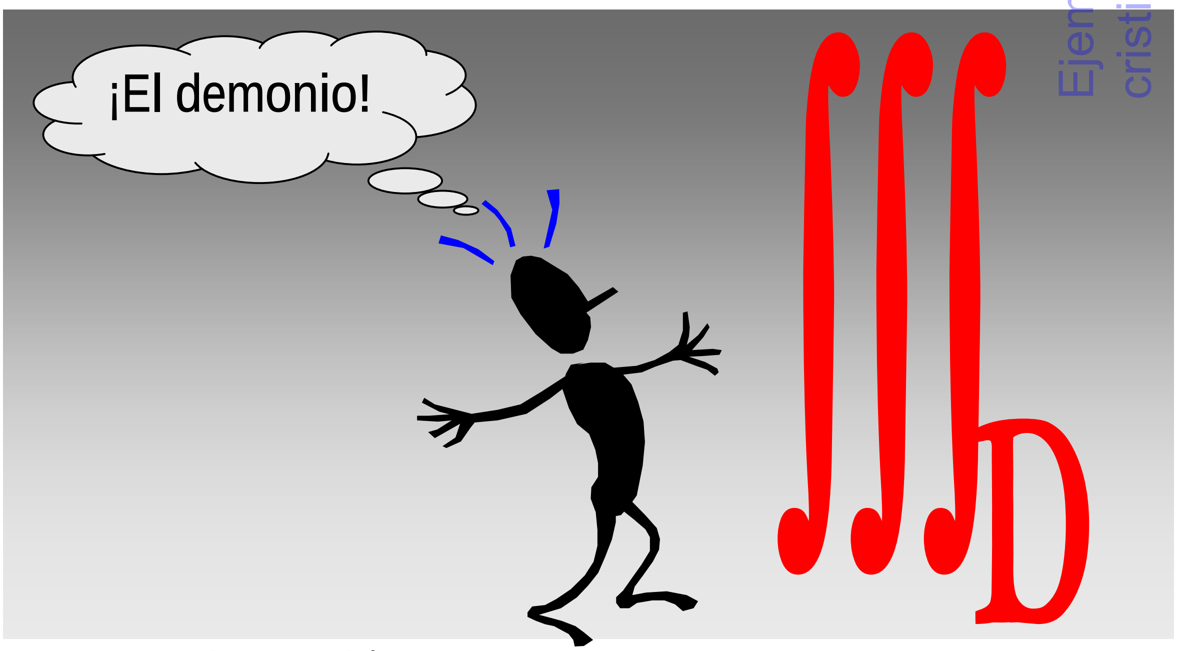
Si $\bar{p}=2\bullet\bar{d}_1+1\bullet\bar{d}_2+1\bullet\bar{d}_3$ y $\bar{p}=1\bullet\bar{k}_1+1\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3$ entonces:

$$2\bullet\bar{d}_1+1\bullet\bar{d}_2+1\bullet\bar{d}_3=1\bullet\bar{k}_1+1\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3\Rightarrow$$

el enunciado dice que $\bar{d}_1=\bar{k}_1$ y que $\bar{d}_2=\bar{k}_1+\bar{k}_2$

$$\Rightarrow 2\bullet\bar{k}_1+1\bullet(\bar{k}_1+\bar{k}_2)+1\bullet\bar{d}_3=1\bullet\bar{k}_1+1\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\bar{d}_3=-2\bullet\bar{k}_1+0\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3$$



SABER ESTUDIAR

Estudia sin prisas, leyendo despacio y pensando en lo que lees: tras leer cada palabra o cada símbolo matemático, invierte un nanosegundo en comprobar si tu cerebro es capaz de llenarlo de contenido pleno. En caso afirmativo pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso... pero, en caso de atranque, para el reloj y lucha a muerte hasta desatrancarte: invierte el tiempo que sea menester (2 minutos, 2 horas, 2 semanas, 2 meses) en recopilar la información que te permita desatrancarte... y después pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso.

EJERCICIOS RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA PÁGINA WEB

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Ejercicio 03.01

Estudie si el vector $\overline{x} = (2;7;8;6)$ es combinación lineal de los vectores $\overline{h}_1 = (1;2;1;3)$ y $\overline{h}_2 = (0;1;2;0)$.

Ejercicio 03.02

Estudie si el vector $\overline{x}$ es CL de los vectores $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.

$$\overline{h}_1 = (1;0;1;0) \ ; \ \overline{h}_2 = (0;1;0;1) \ ; \ \overline{h}_3 = (1;1;1;1) \ ; \ \overline{x} = (4;5;4;5)$$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \bullet \overline{h}_i \longleftarrow$$

No hay que desaprovechar ninguna ocasión para acreditar que no nos chupamos el dedo.

Ejercicio 03.03

Estudie si el vector $\overline{x} = (2;5;4;0)$ es combinación lineal de los vectores $\overline{h}_1 = (1;2;1;3)$ y $\overline{h}_2 = (0;1;2;0)$.

Ejercicio 03.04

Determine "θ" de modo que el vector $\overline{x} = (4;1;\theta)$ sea combinación lineal de los vectores $\overline{h}_1 = (2;1;2)$ y $\overline{h}_2 = (1;1;2)$.

Ejercicio 03.05

1) Estudie si el vector $\overline{x} = (1;3;b)$ es combinación lineal de los vectores $\overline{p} = (3;1;2)$, $\overline{q} = (-1;4;-5)$ y $\overline{m} = (a;1;1)$.

2) Estudie si $\overline{u} = (1;1;k)$ es CL de $\overline{p} = (k;1;1)$ y $\overline{q} = (1;k;1)$.

Ejercicio 03.06

Estudie si el vector $\overline{m}$ es combinación lineal de $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

$$\overline{p} = 2 + 3.x + 4.x^2 \ ; \ \overline{q} = -2 + x + 5.x^2 \ ; \ \overline{m} = 8 + 4.x + 6.x^2$$

REGLA INFALIBLE PARA EVALUAR LA SOLVENCIA DE TUS CONOCIMIENTOS

No entiendes realmente algo si no eres capaz de explicárselo a tu abuel@.

Ejercicio 03.07

Estudie si $\overline{m} = 1 + x + x^2 + b.x^3$ es CL de $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$, $\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.

$$\overline{h}_1 = 1 + x + x^2 + 2.x^3 \; ; \; \overline{h}_2 = 2 + x + 3.x^2 + 6.x^3$$
$$\overline{h}_3 = 2.a.x^2 + 2.x^3 \; ; \; \overline{h}_4 = x + 2.x^2 + a.x^3$$

Ejercicio 03.08

Estudie si el vector $\overline{m} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\overline{p} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\overline{q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 03.09

En el espacio $H = \left\{ a_1.x^3 + a_2.7^x + a_3.\cos x \;/\; a_k \in \Re, \; \forall k = 1,2,3 \right\}$, estudie si el vector $8.x^3 + 6.\cos x$ es combinación lineal de los vectores $2.x^3 + 3.7^x + 4.\cos x$ y $-2.x^3 + 7^x + 5.\cos x$.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Ejercicio 05.01

Analice si $\overline{h}_1 = (1;3;1;3)$, $\overline{h}_2 = (2;0;0;1)$ y $\overline{h}_3 = (3;3;0;1)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Ejercicio 05.02

Analice si $\overline{h}_1 = (4;2;3;3)$, $\overline{h}_2 = (1;0;0;1)$ y $\overline{h}_3 = (7;4;6;5)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Ejercicio 05.03

Analice si $\overline{h}_1 = (0;2;1;1)$, $\overline{h}_2 = (3;0;1;3)$ y $\overline{h}_3 = (3;4;\theta;5)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Ejercicio 05.04

Analice si $\overline{h}_1 = (1;1;a;3)$, $\overline{h}_2 = (1;-1;-5;1)$ y $\overline{h}_3 = (-b;1;-2;1)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Ejercicio 05.05

1) Analice si $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$, $\overline{v}_4$ son LI o LD.

$$\overline{v}_1 = (1;2;0;1) \; ; \; \overline{v}_2 = (-1;1;0;2)$$
$$\overline{v}_3 = (1;5;0;4) \; ; \; \overline{v}_4 = (5;4;0;-1)$$

2) Analice si $\overline{x} = (7;8;0;1)$ es CL de $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ y $\overline{v}_4$.

Hay dos cosas infinitas: el Universo y la estupidez humana... y del Universo no estoy seguro.

Albert Einstein

Ejercicio 05.06

Determine el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en cada uno de los siguientes subconjuntos de $\Re^3$.

$$H_1 = \left\{ \bar{z}_1 = (1;3;4),\ \bar{z}_2 = (2;6;8) \right\}$$
$$H_2 = \left\{ \bar{d}_1 = (2;3;4),\ \bar{d}_2 = (-2;1;5) \right\}$$
$$H_3 = \left\{ \bar{u}_1 = (2;3;4),\ \bar{u}_2 = (-2;1;5),\ \bar{u}_3 = (0;4;9),\ \bar{u}_4 = (4;2;-1) \right\}$$
$$H_4 = \left\{ \bar{b}_1 = (4;5;6),\ \bar{b}_2 = (-4;1;0),\ \bar{b}_3 = (0;0;3) \right\}$$
$$H_5 = \left\{ \bar{a}_1 = (5;0;0),\ \bar{a}_2 = (-2;1;0),\ \bar{a}_3 = (2;1;9),\ \bar{a}_4 = (6;1;-1) \right\}$$

Ejercicio 05.07

Si los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son LI, analice la dependencia o independencia lineal de los vectores $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{a} - \bar{b}$ y $2 \bullet \bar{a} + \bar{c}$.

Ejercicio 05.08

Analice si $W = \left\{ \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3 \right\}$ es libre o ligado.

$$\bar{h}_1 = 2 + 3.x + 4.x^2 \ \ ; \ \ \bar{h}_2 = -2 + \theta.x + 5.x^2 \ \ ; \ \ \bar{h}_3 = \theta.x^2$$

Ejercicio 05.09

1) Analice si $W = \left\{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \right\}$ es libre o ligado:

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2) Determine "a" y "b" de modo que $W = \left\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \right\}$ sea ligado:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 & a \\ 5 & b \end{bmatrix}$$

Ejercicio 05.10

En el espacio $H = \left\{ a_1.x^2 + a_2.e^x + a_3 \ / \ a_k \in \Re,\ \forall k = 1,2,3 \right\}$, estudie si el conjunto $W = \left\{ 2.x^2 + e^x,\ x^2 + 1,\ -e^x \right\}$ es libre o ligado.

SISTEMA GENERADOR DE UN ESPACIO VECTORIAL

Ejercicio 07.01

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son sistema generador (SG) de $\Re^3$?

$$H_1 = \left\{ \bar{d}_1 = (2;3;4) \ ; \ \bar{d}_2 = (2;1;5) \right\}$$
$$H_2 = \left\{ \bar{u}_1 = (2;3;4) \ ; \ \bar{u}_2 = (-2;1;5) \ ; \ \bar{u}_3 = (0;4;9) \ ; \ \bar{u}_4 = (4;2;-1) \right\}$$
$$H_3 = \left\{ \bar{b}_1 = (4;5;6) \ ; \ \bar{b}_2 = (-4;1;0) \ ; \ \bar{b}_3 = (0;0;3) \right\}$$
$$H_4 = \left\{ \bar{a}_1 = (5;0;0) \ ; \ \bar{a}_2 = (-2;1;0) \ ; \ \bar{a}_3 = (2;1;9) \ ; \ \bar{a}_4 = (6;1;-1) \right\}$$

Ejercicio 07.02

Determine "δ" de modo que los siguientes conjuntos sean sistema generador de $\Re^3$.

$$H_1 = \left\{ \overline{u}_1 = (2;3;4) \ ; \ \overline{u}_2 = (5;2;0) \ ; \ \overline{u}_3 = (0;\delta;9) \ ; \ \overline{u}_4 = (7;0;0) \right\}$$

$$H_2 = \left\{ \overline{v}_1 = (1;0;0) \ ; \ \overline{v}_2 = (3;0;0) \ ; \ \overline{v}_3 = (0;\delta;\delta) \ ; \ \overline{v}_4 = (2;0;0) \right\}$$

$$H_3 = \left\{ \overline{a}_1 = (4;3;2) \ ; \ \overline{a}_2 = (1;0;0) \ ; \ \overline{a}_3 = (1;0;\delta) \ ; \ \overline{a}_4 = (3;0;0) \right\}$$

$$H_4 = \left\{ \overline{b}_1 = (\delta;1;1) \ ; \ \overline{b}_2 = (1;\delta;1) \ ; \ \overline{b}_3 = (1;1;\delta) \right\}$$

Ejercicio 07.03

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son SG de $M_{2\times 2}$?

$$H_1 = \left\{ \overline{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{d}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{d}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{d}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_2 = \left\{ \overline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{u}_4 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_3 = \left\{ \overline{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \overline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} ; \overline{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ; \overline{b}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ; \overline{b}_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejercicio 07.04

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son SG de P_2 ?

$$H_1 = \left\{ \overline{d}_1 = 5.x^2 + 3.x + 4 \ ; \ \overline{d}_2 = 3.x^2 + 2.x + 1 \ ; \ \overline{d}_3 = 2.x^2 + x + 3 \right\}$$

$$H_2 = \left\{ \overline{u}_1 = 3.x^2 + 2.x + 5 \ ; \ \overline{u}_2 = 2.x^2 + 7.x \ ; \ \overline{u}_3 = 5.x^2 \right\}$$

$$H_3 = \left\{ \overline{b}_1 = 5.x^2 + 2.x \ ; \ \overline{b}_2 = 3.x^2 \ ; \ \overline{b}_3 = 2.x + 3 \ ; \ \overline{b}_4 = 2.x \right\}$$

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Ejercicio 08.01

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son base de $\Re^3$?

$$H_1 = \left\{ \overline{d}_1 = (2;3;4) \ ; \ \overline{d}_2 = (-2;1;5) \right\}$$

$$H_2 = \left\{ \overline{u}_1 = (2;3;4) \ ; \ \overline{u}_2 = (-2;1;5) \ ; \ \overline{u}_3 = (0;4;9) \ ; \ \overline{u}_4 = (4;2;-1) \right\}$$

$$H_3 = \left\{ \overline{b}_1 = (3;5;6) \ ; \ \overline{b}_2 = (2;4;0) \ ; \ \overline{b}_3 = (5;0;0) \right\}$$

$$H_4 = \left\{ \overline{a}_1 = (5;1;0) \ ; \ \overline{a}_2 = (2;1;0) \ ; \ \overline{a}_3 = (1;-1;0) \right\}$$

Ejercicio 08.02

Analice bajo qué condiciones el conjunto "B" es base de $\Re^3$.

$$1) \ B = \left\{ \overline{a}_1 = (\theta;1;1) \ ; \ \overline{a}_2 = (1;\theta;1) \ ; \ \overline{a}_3 = (1;1;\theta) \right\}$$

$$2) \ B = \left\{ \overline{u}_1 = (2;1;0) \ ; \ \overline{u}_2 = (2;3;0) \ ; \ \overline{u}_3 = (\theta;0;0) \right\}$$

Ejercicio 08.03

Si $B_1 = \left\{ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right\}$ es una base del espacio vectorial "V", analice si lo son B_2 y B_3.

$$B_2 = \left\{ \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}, \overline{a} - \overline{b} \right\} \ ; \ B_3 = \left\{ \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}, \overline{a} + \overline{b}, \ 2 \bullet \overline{a} + \overline{c} \right\}$$

Ejercicio 08.04

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son base de $M_{2\times 2}$?

$$H_1 = \left\{ \bar{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \bar{d}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{d}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_2 = \left\{ \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} ; \bar{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ; \bar{b}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ; \bar{b}_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_3 = \left\{ \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ; \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{u}_4 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_4 = \left\{ \bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ; \bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejercicio 08.05

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son base de P_2 ?

$$H_1 = \left\{ \bar{d}_1 = 5.x^2 + 3.x + 4 \;\; ; \;\; \bar{d}_2 = 3.x^2 + 2.x + 1 \right\}$$

$$H_2 = \left\{ \bar{u}_1 = 3.x^2 + 2.x + 5 \;\; ; \;\; \bar{u}_2 = 2.x^2 + 7.x \;\; ; \;\; \bar{u}_3 = 5.x^2 \;\; ; \;\; \bar{u}_4 = 5.x \right\}$$

$$H_3 = \left\{ \bar{b}_1 = 3.x^2 + 7.x + 6 \;\; ; \;\; \bar{b}_2 = 2.x^2 + 4.x \;\; ; \;\; \bar{b}_3 = 4.x^2 \right\}$$

$$H_4 = \left\{ \bar{a}_1 = 3.x^2 + 2.x \;\; ; \;\; \bar{a}_2 = 2.x^2 + 5 \;\; ; \;\; \bar{a}_3 = x^2 - 2.x + 10 \right\}$$

COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE

Ejercicio 09.01

¿Es el conjunto $B = \left\{ \bar{h}_1 = (2;3;2), \bar{h}_2 = (2;1;0), \bar{h}_3 = (3;0;0) \right\}$ una base de $\Re^3$?

Calcule las coordenadas de $\bar{x} = (3;8;2)$ respecto de la base "B".

Ejercicio 09.02

Halle las coordenadas de $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ respecto de "B".

$$B = \left\{ \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ; \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \bar{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

TODA BASE SE VE A SÍ MISMA COMO LA CANÓNICA

Ejercicio 11.01

Calcule las coordenadas de los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ respecto de la base $B = \left\{ \bar{h}_1 = (2;3), \bar{h}_2 = (4;5) \right\}$.

Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad.

Albert Einstein

Ejercicio 12.01

Sean $B_8 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ y $B_6 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ bases del espacio vectorial "V", siendo:

$$\overline{v}_1 = 2 \bullet \overline{u}_1 + 3 \bullet \overline{u}_2 \;;\; \overline{v}_2 = 5 \bullet \overline{u}_1 + 6 \bullet \overline{u}_2$$

1) Determine la ecuación del cambio de base $B_8 \to B_6$.

2) Halle las coordenadas de $\overline{c} = 9 \bullet \overline{v}_1 + 8 \bullet \overline{v}_2$ respecto de B_8.

3) Halle las coordenadas de $\overline{m} = 4 \bullet \overline{u}_1 + 7 \bullet \overline{u}_2$ respecto de B_6.

Ejercicio 12.02

En $\Re^2$ sean las bases $B_3 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$ y $B_5 = \{\overline{c}_1, \overline{c}_2\}$, siendo:

$$\overline{c}_1 = 3 \bullet \overline{k}_1 + 7 \bullet \overline{k}_2 \;;\; \overline{c}_2 = 2 \bullet \overline{k}_1 + 4 \bullet \overline{k}_2$$

Determine la ecuación del cambio de base $B_5 \to B_3$.

Ejercicio 12.03

En $\Re^2$ sean las bases $B_7 = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$, $B_3 = \{\overline{c}_1, \overline{c}_2\}$ y $B_1 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$, siendo:

$$\overline{a}_1 = 2 \bullet \overline{c}_1 + 5 \bullet \overline{c}_2 \;;\; \overline{a}_2 = 4 \bullet \overline{c}_1 + 9 \bullet \overline{c}_2$$
$$\overline{a}_1 = 4 \bullet \overline{k}_1 + 3 \bullet \overline{k}_2 \;;\; \overline{a}_2 = 6 \bullet \overline{k}_1 + 8 \bullet \overline{k}_2$$

Determine las ecuaciones de los cambios de base $B_3 \to B_7$ y $B_7 \to B_1$.

Ejercicio 12.04

En $\Re^2$ sean las bases $B_7 = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$, $B_3 = \{\overline{c}_1, \overline{c}_2\}$ y $B_1 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$, siendo:

$$\overline{c}_1 = 3 \bullet \overline{a}_1 + 4 \bullet \overline{a}_2 \;;\; \overline{c}_2 = 8 \bullet \overline{a}_1 + 9 \bullet \overline{a}_2$$
$$\overline{c}_1 = 2 \bullet \overline{k}_1 + 5 \bullet \overline{k}_2 \;;\; \overline{c}_2 = 9 \bullet \overline{k}_1 + 4 \bullet \overline{k}_2$$

Determine la ecuación del cambio de base $B_7 \to B_1$.

Ejercicio 12.05

En $\Re^2$ sean las bases $B_6 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, $B_4 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ y $B_2 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$, siendo:

$$\overline{k}_1 = 8 \bullet \overline{e}_1 + 9 \bullet \overline{e}_2 \;;\; \overline{k}_2 = 4 \bullet \overline{e}_1 + 5 \bullet \overline{e}_2$$
$$\overline{u}_1 = 2 \bullet \overline{k}_1 + 3 \bullet \overline{k}_2 \;;\; \overline{u}_2 = 4 \bullet \overline{k}_1 + 5 \bullet \overline{k}_2$$

Determine la ecuación del cambio de base $B_6 \to B_4$.

Ejercicio 12.06

En $\Re^2$, determine la ecuación del cambio de base $B_1 \to B_2$, siendo:

$$B_1 = \{(2;3), (4;5)\} \;;\; B_2 = \{(6;7), (8;9)\}$$

Ejercicio 12.07

Si $B_1 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ y $B_2 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ son bases de $\Re^3$, determine los vectores con iguales coordenadas respecto de ambas.

1) $\overline{v}_1 = 2 \bullet \overline{u}_1,\ \ \overline{v}_2 = \overline{u}_1 + 2 \bullet \overline{u}_2 - \overline{u}_3,\ \ \overline{v}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_3$

2) $\overline{v}_1 = 2 \bullet \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \overline{u}_3,\ \ \overline{v}_2 = 2 \bullet \overline{u}_1 + 3 \bullet \overline{u}_2 + 2 \bullet \overline{u}_3,\ \ \overline{v}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + 2 \bullet \overline{u}_3$

3) $\overline{v}_1 = 2 \bullet \overline{u}_1,\ \ \overline{v}_2 = -\overline{u}_2,\ \ \overline{v}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 - \overline{u}_3$

Ejercicio 12.08

Sean $B_1 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ y $B_2 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ bases de $\Re^3$, siendo:

$$\overline{v}_1 = 2 \bullet \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \overline{u}_3\ ;\ \overline{v}_2 = 2 \bullet \overline{u}_1 + 3 \bullet \overline{u}_2 + 2 \bullet \overline{u}_3\ ;\ \overline{v}_3 = 2 \bullet \overline{u}_1 - \overline{u}_2$$

Determine la ecuación del cambio de base $B_1 \to B_2$.

Ejercicio 12.09

En $\Re^3$ se consideran las bases $B_1 = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ y $B_2 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3\}$. Si $\overline{a}_1 = \overline{k}_1$ y $\overline{a}_2 = \overline{k}_1 + \overline{k}_2$, calcule las coordenadas de $\overline{a}_3$ respecto de B_2 si $\overline{p} \in \Re^3$ tiene coordenadas $(2;1;1)$ respecto de la base B_1 y coordenadas $(1;1;1)$ respecto de B_2.

AUTOCOMPROBACIÓN

Las soluciones están en los test de la web.

01) El vector $\overline{x}=(3;5;8)$ es CL de los vectores:

a) $\overline{u}=(0;3;4)$ y $\overline{v}=(1;1;0)$
b) $\overline{u}=(2;3;4)$ y $\overline{v}=(1;2;1)$
c) $\overline{u}=(2;3;4)$ y $\overline{v}=(1;1;0)$

02) El vector $\overline{x}=(4;4;1)$ es CL de los vectores:

a) $\overline{u}=(2;-3;4)$ y $\overline{v}=(2;7;0)$
b) $\overline{u}=(1;3;4)$ y $\overline{v}=(3;1;1)$
c) Las anteriores son falsas

03) El vector $\overline{x}=(3;8;k)$ es CL de $\overline{u}=(1;3;0)$ y $\overline{v}=(1;2;1)$ si:

a) $k=3$; b) $k=1$; c) $k\neq 1$

04) ¿Cuándo el vector $\overline{x}=(3;k;1)$ es CL de $\overline{u}=(2;1;1)$, $\overline{v}=(0;2;1)$ y $\overline{w}=(2;3;0)$?

a) Para ningún valor de "k"
b) Para todo valor de "k"
c) Sólo si $k=2$

05) ¿Cuándo el vector $\overline{x}=(3;k;1)$ es CL de $\overline{u}=(0;1;1)$, $\overline{v}=(0;2;1)$ y $\overline{w}=(0;7;4)$?

a) Para ningún valor de "k"
b) Para todo valor de "k"
c) Sólo si $k=0$

06) ¿Cuándo el vector $\overline{x}=(3;k;3)$ es CL de $\overline{u}=(0;1;1)$, $\overline{v}=(0;2;2)$ y $\overline{w}=(6;6;4)$?

a) Para ningún valor de "k"
b) Sólo si $k=4$
c) Para todo valor de "k"

07) ¿Cuándo el vector $\overline{x}=\begin{bmatrix}8 & k-4\\ 5 & k\end{bmatrix}$ no es CL de los vectores $\overline{u}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ y $\overline{v}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$?

a) Para ningún valor de "k"
b) Para todo valor de "k"
c) Si $k\neq 7$

08) ¿Cuándo el vector $\overline{x}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ k & 1+k\end{bmatrix}$ no es CL de los vectores $\overline{u}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $\overline{v}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ y $\overline{w}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}$?

a) Si $k\neq 0$ ó $k\neq -1$
b) Para ningún valor de "k"
c) Para todo valor de "k"

09) ¿Cuándo el vector $\overline{x}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ k & 0\end{bmatrix}$ no es CL de $\overline{u}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $\overline{v}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ y $\overline{w}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 0\end{bmatrix}$?

a) Para todo valor de "k"
b) Para ningún valor de "k"
c) Si $k \neq 5$

10) ¿Cuándo el vector $\overline{x}=\begin{bmatrix}5 & k\\ k & 0\end{bmatrix}$ es CL de $\overline{u}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $\overline{v}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ y $\overline{w}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$?

a) Para todo valor de "k"
b) Para ningún valor de "k"
c) Si $k \neq 5$

11) ¿Cuándo el vector $\overline{p}=k.x^2+0.x+2$ es combinación lineal de los vectores $\overline{u}=2.x^2+4.x-3$ y $\overline{v}=2.x-1$?

a) Para todo valor de "k" ; b) Si $k \neq -4$; c) Si $k=-4$

12) ¿Cuándo el vector $\overline{p}=k.x^3+1$ es combinación lineal de los vectores $\overline{u}=2.x^3+5.x$, $\overline{v}=4.x^3$ y $\overline{w}=4.x^2-1$?

a) Para todo valor de "k" ; b) Si $k \neq -4$; c) Si $k=-4$

13) Sea $\overline{x}$ un vector que es CL de $\overline{u}$ y $\overline{v}$. Sea $\delta \in \Re$.

a) El vector $\delta \bullet \overline{x}$ es CL de $\overline{u}$ y $\overline{v}$
b) El vector $\delta \bullet \overline{x}$ no es CL de $\overline{u}$ y $\overline{v}$
c) No puede saberse si el vector $\delta \bullet \overline{x}$ es CL de $\overline{u}$ y $\overline{v}$

14) Sean $\overline{p}$ y $\overline{q}$ vectores que son CL de $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$. Sean $\delta,\varepsilon \in \Re$.

a) $\delta \bullet \overline{p}+\varepsilon \bullet \overline{q}$ no es CL de $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$
b) $\delta \bullet \overline{p}+\varepsilon \bullet \overline{q}$ es CL de $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$
c) No puede saberse si $\delta \bullet \overline{p}+\varepsilon \bullet \overline{q}$ es CL de $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$

15) ¿ ¿Cuál de los siguientes conjuntos es libre?

a) $H_1=\{(1;2;3),\ (0;3;4),\ (0;0;7)\}$
b) $H_2=\{(0;2;1),\ (1;1;4),\ (1;5;6)\}$
c) $H_3=\{(1;2;3),\ (2;4;6)\}$

16) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es ligado?

a) $H_1=\{(1;2;5),\ (0;3;4),\ (0;0;2)\}$
b) $H_2=\{(0;2;1),\ (1;1;4),\ (1;0;0)\}$
c) $H_3=\{(1;2;1),\ (2;1;0),\ (7;8;3)\}$

17) ¿En qué caso es ligado el conjunto "H"?

a) $H=\{(1;2;3),\ (1;3;4)\}$; b) $H=\{(0;2;1),\ (1;1;1),\ (4;6;5)\}$
c) $H=\{(1;0;0),\ (1;1;4),\ (2;1;0)\}$

18) ¿En qué caso es ligado $H=\{(k;9;1),\ (1;k;1),\ (0;0;k)\}$?

a) Si $k=0$, $k=-3$ ó $k=3$; b) Si $k \neq 0$; c) Siempre

19) ¿En qué caso es libre $H=\{(k;1;1), (4;k;1), (0;0;k)\}$?

a) Si $k \neq 1$; b) Si $k \neq 0,\ k \neq -2$ y $k \neq 2$; c) Nunca

20) ¿Cuándo es libre $H=\{(k;1;1), (1;k;1), (1;1;k), (1;k;k)\} \subset \Re^3$?

a) Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$; b) Nunca ; c) Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$

21) ¿En qué caso es libre $H=\{(k;1;0), (1;0;0), (k;k;2)\}$?

a) Siempre ; b) Si $k \neq 0$; c) Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$

22) El subconjunto "S" del espacio vectorial "V" contiene al vector cero.

a) "S" es libre ; b) "S" es ligado
c) "S" puede ser libre o ligado

23) El subconjunto "S" del espacio vectorial "V" es libre y $H \subset S$.

a) "H" es libre ; b) "H" es ligado
c) "H" puede ser libre o ligado

24) El subconjunto "S" del espacio vectorial "V" es ligado y $H \subset S$.

a) "H" es libre ; b) "H" es ligado
c) "H" puede ser libre o ligado

25) El subconjunto "S" del espacio "V" es libre y $S \subset H \subset V$.

a) "H" es libre ; b) "H" es ligado
c) "H" puede ser libre o ligado

26) El subconjunto "S" del espacio "V" es ligado y $S \subset H \subset V$.

a) "H" es libre ; b) "H" es ligado
c) "H" puede ser libre o ligado

27) Sea "V" un espacio vectorial y $H=\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\} \subset V$.

Sea $S=\{4 \bullet \overline{u}+2 \bullet \overline{v},\ 2 \bullet \overline{v}-3 \bullet \overline{w},\ 4 \bullet \overline{u}+5 \bullet \overline{v}-7 \bullet \overline{w}\}$.

a) "S" es libre ; b) "S" es ligado
c) "S" puede ser libre o ligado

28) Sea "V" un espacio vectorial y $H=\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\} \subset V$.

Sea $S=\{4 \bullet \overline{u}+2 \bullet \overline{v}+\overline{w},\ 2 \bullet \overline{v},\ 8 \bullet \overline{u}+2 \bullet \overline{v}+2 \bullet \overline{w}\}$.

a) "S" es libre ; b) "S" es ligado
c) "S" puede ser libre o ligado

29) Sea "V" un espacio vectorial y $H=\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\} \subset V$. El conjunto

$S=\{2 \bullet \overline{u}-2 \bullet \overline{v}+\overline{w},\ 2 \bullet \overline{v},\ k \bullet \overline{u}+2 \bullet \overline{v}+2 \bullet \overline{w}\}$ es libre si:

a) $k=4$; b) $k \neq 1$; c) $k \neq 4$

30) Sea "V" un espacio vectorial y $H=\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\} \subset V$. El conjunto

$S=\{3 \bullet \overline{u}-\overline{v}+\overline{w},\ 2 \bullet \overline{v},\ k \bullet \overline{u}+2 \bullet \overline{w}\}$ es ligado si:

a) $k=6$; b) $k=0$; c) $k \neq 6$

31) La dimensión de un espacio vectorial "V" es:

a) El número máximo de vectores L.I. que pueden encontrarse en "V"
b) El número máximo de vectores L.D. que pueden encontrarse en "V"
c) Las anteriores son falsas

32) Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n". Un sistema generador de "V" es:

a) Un subconjunto de "V" en el que pueden encontrarse "n" vectores L.D.
b) Un subconjunto de "V" en el que pueden encontrarse "n" vectores L.I.
c) Un subconjunto de "V" en el no que pueden encontrarse "n" vectores L.I.

33) Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n". Una base de "V" es:

a) Un subconjunto de "V" formado por "n" vectores L.I.
b) Un subconjunto de "V" formado por "n" vectores L.D.
c) Un subconjunto de "V" formado por al menos "n" vectores L.I.

34) Sea "V" un espacio vectorial. Una base de "V" es:

a) Un sistema generador de "V" que es libre
b) Un sistema generador de "V" que es ligado
c) Las anteriores son falsas

35) Sea "V" un espacio vectorial.

a) Todo sistema generador de "V" es base de "V"
b) Toda base de "V" es sistema generador de "V"
c) Las anteriores son falsas

36) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es SG de $\Re^3$?

a) $H_1 = \{(1;2;3),\ (0;3;5),\ (0;0;3)\}$
b) $H_2 = \{(0;2;1),\ (1;1;4),\ (1;5;6),\ (1;3;5)\}$
c) $H_3 = \{(1;2;3),\ (2;4;6)\}$

37) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es SG de $\Re^3$?

a) $H_1 = \{(1;2;3),\ (0;3;5),\ (2;1;1)\}$
b) $H_2 = \{(0;2;1),\ (1;1;4),\ (1;5;0),\ (1;3;5)\}$
c) $H_3 = \{(1;2;3),\ (2;4;6),\ (3;6;9)\}$

38) El conjunto $H = \{(k;1;1),\ (1;k;1),\ (1;1;k)\}$ no es SG de $\Re^3$ si:

a) $k = 1$ y $k = -2$; b) $k = 1$ ó $k = -2$; c) $k \neq 0$ y $k \neq -2$

39) ¿Cuándo $H = \{(0;0;4),\ (0;2;5),\ (2;3;1),\ (3;4;k)\}$ es SG de $\Re^3$?

a) Si $k \neq 0$; b) Si $k = 0$; c) $\forall k \in \Re$

40) ¿Cuándo es $H = \{(0;1;2),\ (0;2;0),\ (0;2;4),\ (0;k;k)\}$ sistema generador de $\Re^3$?

a) Si $k \neq 1$; b) Si $k = 1$; c) Para ningún valor real de "k"

41) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es base de $\Re^3$?

a) $H_1 = \{(1;9;2),\ (0;3;4),\ (0;0;1)\}$

b) $H_2 = \{(0;2;1),\ (1;1;4),\ (1;5;6),\ (1;3;5)\}$

c) $H_3 = \{(1;2;3),\ (1;4;6),\ (1;6;9)\}$

42) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es base de $\Re^3$?

a) $H_1 = \{(3;4;2),\ (1;3;4)\}$

b) $H_2 = \{(0;2;1),\ (1;1;4),\ (1;3;0)\}$

c) $H_3 = \{(1;2;1),\ (1;4;1),\ (3;8;3)\}$

43) ¿En qué caso el conjunto $H = \{(k;-1;1),\ (1;k;1),\ (0;0;k)\}$ es una base de $\Re^3$?

a) Sólo si $k \neq 0$; b) Sólo si $k = 0$; c) Nunca

44) ¿En qué caso el conjunto $H = \{(k;1;1),\ (-1;k;1),\ (0;0;2)\}$ es una base de $\Re^3$?

a) Sólo si $k \neq 1$; b) Sólo si $k = 1$

c) Para todo valor real de "k"

46) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es SG de P_2 ?

a) $H_1 = \{x^2 + 2.x + 3,\ 3.x + 5,\ x^2 - x - 2\}$

b) $H_2 = \{x^2 + x,\ x - 5\}$

c) $H_3 = \{2.x + 1,\ x^2 + x + 4,\ x^2 + 5.x,\ x^2 + 3.x + 5\}$

47) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es base de P_2 ?

a) $H_1 = \{x^2 + 9.x + 2,\ 3.x + 4,\ 1\}$

b) $H_2 = \{x^2 + 2.x + 3,\ x^2 + 4.x + 6,\ x^2 + 6.x + 9\}$

c) $H_3 = \{2.x + 1,\ x^2 + x + 4,\ x^2 + 5.x + 6,\ x^2 + 3.x + 5\}$

48) ¿En qué caso el conjunto $H = \{k.x^2 - x + 1,\ x^2 + k.x + 1,\ k\}$ es una base de P_2 ?

a) Sólo si $k = 0$; b) Sólo si $k \neq 0$; c) Nunca

49) ¿En qué caso el conjunto $H = \{k.x^2 + x + 1,\ -x^2 + k.x + 1,\ 2\}$ es una base de P_2 ?

a) Sólo si $k \neq 1$; b) Sólo si $k = 1$

c) Para todo valor real de "k"

50) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es SG de $M_{2\times2}$?

a) $H_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right\}$

b) $H_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $H_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \right\}$

51) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es SG de $M_{2\times 2}$?

a) $H_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $H_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $H_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

52) ¿Cuál de los siguientes conjuntos es base de $M_{2\times 2}$?

a) $H_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

b) $H_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $H_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

53) ¿Cuándo es $H = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \right\}$ una base del espacio vectorial $M_{2\times 2}$?

a) Sólo si $k \neq 1$; b) Sólo si $k \neq 0$; c) Nunca

54) ¿Cuándo es $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \right\}$ una base del espacio vectorial $M_{2\times 2}$?

a) Sólo si $k \neq 0$ y $k \neq 1$; b) Sólo si $k \neq 0$ y $k \neq 4$

c) Siempre

55) ¿Cuándo es $H = \left\{ \begin{bmatrix} k & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & k \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+k^2 \end{bmatrix} \right\}$ una base del espacio vectorial $M_{2\times 2}$?

a) Sólo si $k \neq 0$; b) Sólo si $k \neq 1$; c) Siempre

56) Señale las coordenadas del vector $(9;8;6)$ respecto de la base $\{(1;2;3), (4;4;0), (1;0;6)\}$.

a) $(4;3;2)$; b) $(4;0;2)$; c) $(0;2;1)$

57) Sea $H = \{\overline{u} = x^2 + 2.x + 2, \ \overline{v} = 3.x, \ \overline{w} = 1\}$ una base de P_2. Las coordenadas de $\overline{z} = 2.x^2 + 10.x + 5$ respecto de "H" son:

a) $(1;3;2)$; b) $(2;2;1)$; c) $(6;2;1)$

58) Sea $H = \left\{ P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ una base de $M_{2\times 2}$.

Las coordenadas de $W = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ respecto de la base "H" son:

a) $(1;3;2;0)$; b) $(2;-2;1;1)$; c) $(2;1;0;0)$

59) **Sean** $B_3 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ **y** $B_5 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ **bases de** $\Re^2$**, siendo:**

$$\overline{v}_1 = 3 \bullet \overline{e}_1 + 4 \bullet \overline{e}_2 \; ; \; \overline{v}_2 = 7 \bullet \overline{e}_1$$

La matriz asociada al cambio $B_3 \to B_5$ **es:**

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \; ; \; \text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \text{c) } \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

60) **Sean** $B_3 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ **y** $B_5 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ **bases de** $\Re^2$**, siendo:**

$$\overline{e}_1 = 6 \bullet \overline{u}_1 + 7 \bullet \overline{u}_2 \; ; \; \overline{e}_2 = 9 \bullet \overline{e}_2$$

La matriz asociada al cambio $B_3 \to B_5$ **es:**

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \; ; \; \text{b) } \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \; ; \; \text{c) } \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

61) **Sean** $B_3 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, $B_5 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ **y** $B_6 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ **sendas bases de** $\Re^2$**, siendo:**

$$\overline{v}_1 = 5 \bullet \overline{e}_1 + 4 \bullet \overline{e}_2 \; ; \; \overline{v}_2 = 7 \bullet \overline{e}_1 + 2 \bullet \overline{e}_2$$
$$\overline{e}_1 = 6 \bullet \overline{u}_1 + 7 \bullet \overline{u}_2 \; ; \; \overline{e}_2 = 9 \bullet \overline{e}_1 + 8 \bullet \overline{e}_2$$

La matriz asociada al cambio de base $B_5 \to B_6$ **es:**

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \; ; \; \text{b) } \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\text{c) } \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

62) **Sean** $B_3 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, $B_5 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ **y** $B_6 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ **sendas bases de** $\Re^2$**, siendo:**

$$\overline{v}_1 = 3 \bullet \overline{e}_1 + 7 \bullet \overline{e}_2 \; ; \; \overline{v}_2 = 4 \bullet \overline{e}_1 + 8 \bullet \overline{e}_2$$
$$\overline{u}_1 = 6 \bullet \overline{e}_1 + 3 \bullet \overline{e}_2 \; ; \; \overline{u}_2 = 5 \bullet \overline{e}_1 + 9 \bullet \overline{e}_2$$

La matriz asociada al cambio de base $B_5 \to B_6$ **es:**

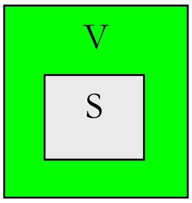
$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \; ; \; \text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$
$$\text{c) } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

Los cambios de base tendrán protagonismo estelar al trabajar con aplicaciones lineales, endomorfismos, formas bilineales y formas cuadráticas, pues estos entes relacionados con los espacios vectoriales se identifican mediante una matriz, y también son camaleónicos; o sea, la matriz que los identifica depende las bases de referencia elegidas en los espacios vectoriales

Tema 4
Subespacios vectoriales

4.01 Subespacio vectorial
4.02 Variedad lineal
4.03 Intersección de subespacios
4.04 Suma de subespacios
4.05 Subespacios suplementarios

4.1 SUBESPACIO VECTORIAL



Si "V" es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales y "S" es un subconjunto de "V", se dice que "S" es subespacio vectorial de "V" si con las leyes suma y producto por un escalar definidas en "V", el conjunto "S" también es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales... y sucede tal cosa sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

$$1)\ \forall\ \overline{x},\overline{y} \in S,\ \text{es}\ \overline{x}+\overline{y} \in S$$

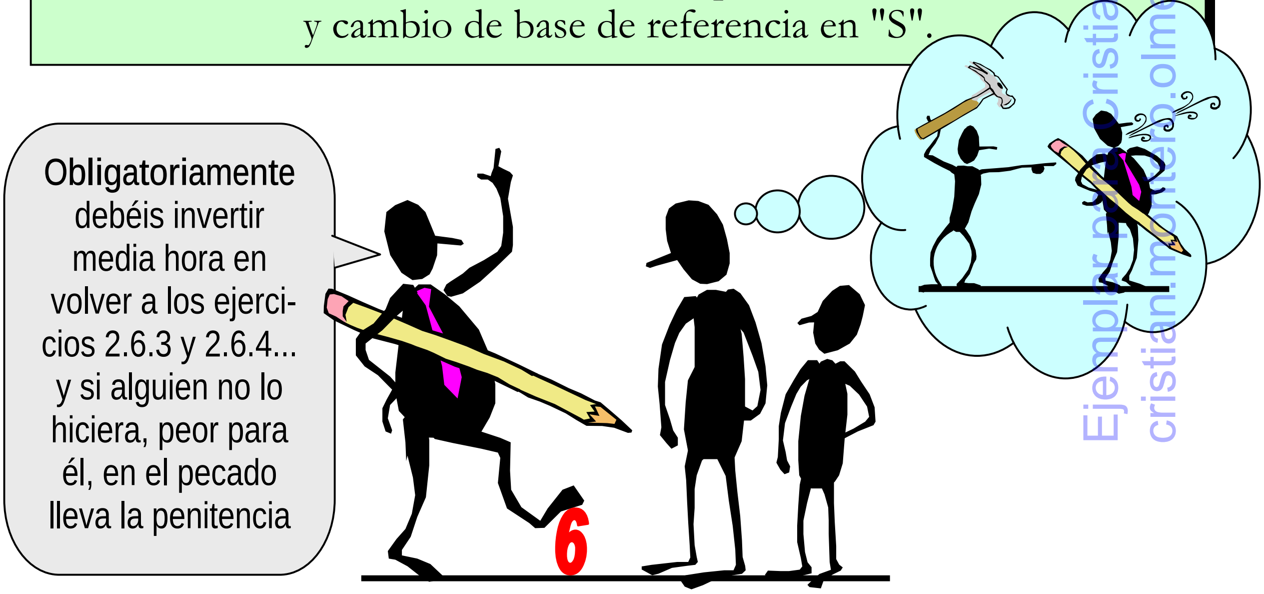
$$2)\ \forall\ \overline{x} \in S\ \ \text{y}\ \forall \alpha \in \Re,\ \text{es}\ \alpha \bullet \overline{x} \in S$$

Las dos condiciones anteriores pueden condensarse en una:

$$\forall\ \overline{x},\overline{y} \in S,\ \forall \alpha,\beta \in \Re,\ \text{es}\ \alpha \bullet \overline{x} + \beta \bullet \overline{y} \in S$$

que expresa que toda combinación lineal de vectores de "S" es un vector de "S".

REQUETEOBVIO: si "S" es subespacio del espacio vectorial "V", por ser "S" un espacio vectorial, valen para "S" todos los conceptos introducidos hasta ahora sobre combinación lineal de vectores de "S", dependencia e independencia lineal de vectores de "S", sistema de generadores de "S", dimensión de "S", base de "S", coordenadas de un vector de "S" respecto de una base de "S" y cambio de base de referencia en "S".



OBVIEDAD

Ningún gato tiene tres colas; todo gato tiene una cola más que ***ningún gato***; por tanto, todo gato tiene cuatro colas.

FONEMATO 4.1.1

Demuestre que el conjunto "S" que forman las soluciones de un sistema lineal homogéneo (SLH) con "k" incógnitas es un subespacio vectorial de $\Re^k$.

SOLUCIÓN

Sea el siguiente SLH con "k" incógnitas $x_1, \ldots, x_k$:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \ldots + a_{1k}.x_k = 0 \\ :: \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \ldots + a_{mk}.x_k = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ : & : & :::: & : \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ : \\ x_k \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ : \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{0}} \Rightarrow A \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \bar{x} \in \Re^k \ / \ A \bullet \bar{x} = \bar{0} \right\}$$

Latiguillo: Para demostrar que "S" es subespacio de $\Re^k$, debemos demostrar que toda combinación lineal de vectores de "S" es un vector de "S"; o sea, debemos demostrar que:

$$\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in S,\ \forall \alpha, \beta \in \Re \text{ ocurre que } \alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v} \in S$$

Veamos: si $\bar{u}, \bar{v} \in S$ es $A \bullet \bar{u} = \bar{0}$ y $A \bullet \bar{v} = \bar{0}$, y si $\alpha, \beta \in \Re$, para demostrar que $\alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v} \in S$ debemos demostrar que $A \bullet (\alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v}) = \bar{0}$, como en efecto sucede:

$$A \bullet (\alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v}) = \alpha \bullet (A \bullet \bar{u}) + \beta \bullet (A \bullet \bar{v}) = \alpha \bullet \bar{0} + \beta \bullet \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v} \in S$$

Queda demostrado que el conjunto "S" que forman las soluciones de un SLH con "k" incógnitas es subespacio del espacio vectorial $\Re^k$.

De las ecuaciones que forman el SLH se dice que son unas ecuaciones cartesianas del subespacio "S".

FONEMATO 4.1.2

Demuestre que el conjunto "S" que forman las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones es un subespacio del espacio vectorial $\Re^4$:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (I)}$$

SOLUCIÓN

Expresemos matricialmente el SLH dado:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \bar{x} \in \Re^4 \;/\; A \bullet \bar{x} = \bar{0} \right\} \subset \Re^4$$

Latiguillo: Para demostrar que "S" es subespacio de $\Re^4$, debemos demostrar que toda combinación lineal de vectores de "S" es un vector de "S".

Veamos: si $\bar{u}, \bar{v} \in S$ es $A \bullet \bar{u} = \bar{0}$ y $A \bullet \bar{v} = \bar{0}$; así, si $\alpha, \beta \in \Re$, se tiene que:

$$A \bullet (\alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v}) = \alpha \bullet (A \bullet \bar{u}) + \beta \bullet (A \bullet \bar{v}) \underset{\uparrow}{=} \alpha \bullet \bar{0} + \beta \bullet \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{pues } A \bullet \bar{u} = \bar{0} \text{ y } A \bullet \bar{v} = \bar{0}}$$

$$\Rightarrow \alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v} \in S$$

Queda demostrado que el conjunto "S" que forman las soluciones del SLH con 4 incógnitas dado es un subespacio de $\Re^4$. De las ecuaciones que forman el SLH se dice que son unas ecuaciones cartesianas de "S".

- **Pregunta:** ¿Por qué decimos unas ecuaciones cartesianas de "S" en vez de las ecuaciones cartesianas de "S".
- **Respuesta:** Porque si bien "S" es el conjunto que forman las soluciones del SLH dado, según el Teorema de Equivalencia de Sistemas de Ecuaciones Lineales, hay infinitos sistemas lineales homogéneos con las mismas soluciones que el SLH dado. ***Por ejemplo:*** tiene las mismas soluciones que el SLH dado el nuevo sistema lineal homogéneo (II) que se obtiene a partir de (I) sustituyendo las ecuaciones 1ª y 3ª por las que resultan al restarles la 2ª:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 - x_3 - 2.x_4 &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 - 3.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (II)}$$

Así las cosas, se entiende que para no dar al sistema (I) un protagonismo estelar a la hora de identificar al subespacio "S", conviene referirse a (I) usando el impersonal unas en lugar del elitista las, pues hay infinitos sistemas lineales homogéneos equivalentes a (I), y cualquiera de ellos identifica al subespacio "S" con igual precisión que el sistema (I).

FONEMATO 4.1.3

Demuestre que el conjunto "S" que forman las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones es un subespacio del espacio vectorial $\Re^4$:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

SOLUCIÓN

Expresemos matricialmente el sistema lineal no homogéneo dado:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

El conjunto $S = \{\bar{x} \in \Re^4 \,/\, A \bullet \bar{x} = \bar{b}\} \subset \Re^4$ de las soluciones del SLNH no es subespacio de $\Re^4$, pues no toda CL de elementos de "S" es un elemento de "S". Por ejemplo, al sumar dos elementos $\bar{u}, \bar{v} \in S$ no se obtiene un elemento de "S":

$$A \bullet (\bar{u} + \bar{v}) = (A \bullet \bar{u}) + (A \bullet \bar{v}) \underset{\uparrow}{=} \bar{b} + \bar{b} = 2 \bullet \bar{b} \neq \bar{b} \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \notin S$$

$$\boxed{A \bullet \bar{u} = \bar{b}\,;\, A \bullet \bar{v} = \bar{b}}$$

En general, el conjunto que forman un SLNH con "n" incógnitas no es subespacio del espacio vectorial $\Re^n$.

No es subespacio vectorial de $\Re^3$ el conjunto de las soluciones de ninguno de los siguientes sistemas de ecuaciones, pues ninguno de ellos es lineal:

$$\left\{\begin{aligned} 2.x_1 + x_2^3 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \;;\; \left\{\begin{aligned} 2.x_1 + x_2.x_3 &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + \operatorname{sen} x_3 &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \;;\; \left\{\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + \operatorname{Ln} x_3 &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + (1/x_3) &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \;;\; \left\{\begin{aligned} 2.\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

FONEMATO 4.1.4

1) Siendo "S" el subconjunto de $M_{n\times n}$ formado por las matrices simétricas, demuestre que "S" el subespacio de $M_{n\times n}$.

2) Siendo "H" el subconjunto de $M_{n\times n}$ formado por las matrices antisimétricas, demuestre que "S" el subespacio de $M_{n\times n}$.

SOLUCIÓN

1) Latiguillo: Para demostrar que "S" es subespacio de $M_{n\times n}$, debemos demostrar que toda combinación lineal de vectores de "S" es un vector de "S".

Veamos: si $A, B \in S$ es $A^t = A$ y $B^t = B$; así, si $\alpha, \beta \in \Re$, se tiene que:

$$(\alpha \bullet A + \beta \bullet B)^t = (\alpha \bullet A)^t + (\beta \bullet B)^t = \alpha \bullet A^t + \beta \bullet B^t \underset{\boxed{\text{pues } A^t = A \text{ y } B^t = B}}{=} \alpha \bullet A + \beta \bullet B \Rightarrow$$

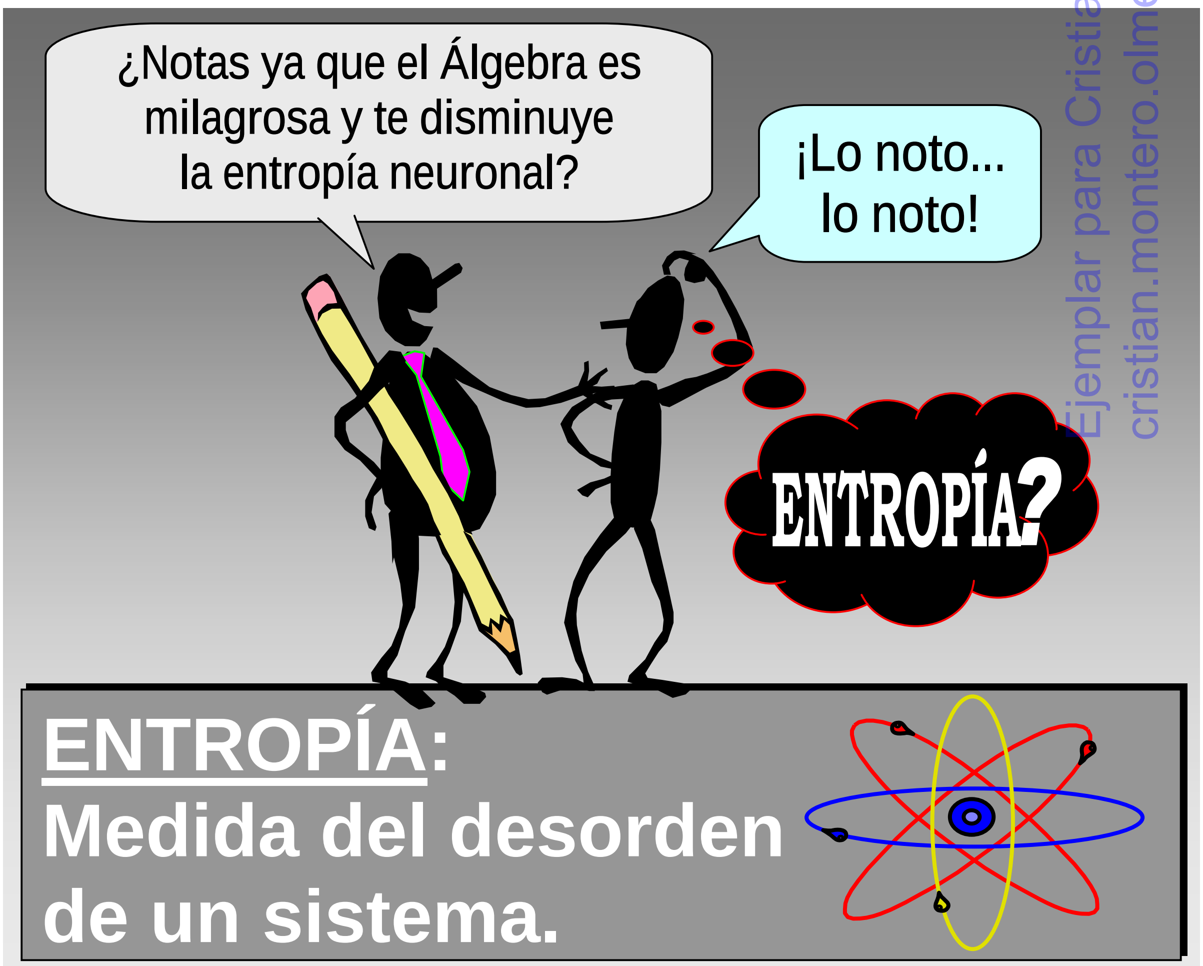
$$\Rightarrow \alpha \bullet A + \beta \bullet B \in S \Rightarrow \text{"S" es subespacio de } M_{n\times n}$$

2) Latiguillo: Para demostrar que "H" es subespacio de $M_{n\times n}$, debemos demostrar que toda combinación lineal de vectores de "H" es un vector de "H".

Veamos: si $A, B \in H$ es $A^t = -A$ y $B^t = -B$; así, si $\alpha, \beta \in \Re$, se tiene que:

$$(\alpha \bullet A + \beta \bullet B)^t = (\alpha \bullet A)^t + (\beta \bullet B)^t = \alpha \bullet A^t + \beta \bullet B^t \underset{\boxed{\text{pues } A^t = -A \text{ y } B^t = -B}}{=} -\alpha \bullet A - \beta \bullet B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \bullet A + \beta \bullet B \in H \Rightarrow \text{"H" es subespacio de } M_{n\times n}$$



AVISO A NAVEGANTES

En lo que te falta por estudiar de Álgebra Lineal se contarán por cientos las veces que deberás calcular la dimensión y una base de un subespacio vectorial del que conoces unas ecuaciones cartesianas. Los siguientes ejercicios ilustran el método de trabajo.... si eres un artista del asunto, tus padecimientos algebraicos serán mínimos.

FONEMATO 4.1.5

Determine la dimensión y una base del subespacio "S" de $\Re^4$ que forman las soluciones del siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2.x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad (I)$$

SOLUCIÓN

Cálculo de la dimensión

El enunciado identifica al subespacio "S" dándonos unas ecuaciones cartesianas de él. Así, para calcular la dimensión de "S" (que es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "S"), tendremos en cuenta que, en general, si "V" es un espacio vectorial y "S" es subespacio de "V", siempre ocurre que:

$$\dim.(S) = \dim.(V) - \text{nº de ecuaciones cartesianas independientes de "S"}$$

Como el número de ecuaciones cartesianas independientes del SLH que define a "S" coincide con el rango de la matriz "A" de los coeficientes del sistema, resulta:

$$\dim.(S) = \dim.(V) - rg(A)$$

- En nuestro caso:

$$\dim.(S) = \dim.(\Re^4) - rg\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 2 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{A} = 4 - 2 = 2$$

  O sea, el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "S" es 2.

- OJO: el que $rg(A) = 2$ indica que sólo hay 2 ecuaciones independientes; por ejemplo, las 1ª y la 2ª, pues el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo.

Cálculo de una base

- Como $\dim.(S) = 2$, cualesquiera 2 vectores de "S" que sean LI forman una base de "S". Como cada vector de "S" es una solución del piojoso SLH que define a "S", para encontrar una base de "S" debemos encontrar 2 soluciones de dicho SLH que sean LI.

- Calculemos las infinitas soluciones de (I) y seleccionemos 2 soluciones que sean LI; para ello, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación de (I) y parametrizamos las incógnitas x_3 y x_4, pasándolas a los segundos miembros de las ecuaciones. Resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 2.x_1 + x_2 = x_3 - 2.x_4 \\ x_1 + x_2 = -x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow .... \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2.x_3 - 2.x_4 \\ x_2 = -3.x_3 + 2.x_4 \end{array}\right.$$

A la vista de la solución obtenida, podemos expresar de **forma paramétrica** el subespacio "S" que forman las infinitas soluciones del SLH dado:

$$S = \left\{ (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \Bigg/ \begin{array}{l} x_1 = 2.\alpha - 2.\beta \\ x_2 = -3.\alpha + 2.\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{array} \; ; \; \forall \alpha,\beta \in \Re \right\} \quad \text{(II)}$$

O más cómodo:

$$S = \{(2.\alpha - 3.\beta \,; -3.\alpha + 2.\beta \,; \alpha \,; \beta), \forall \alpha,\beta \in \Re\} \quad \text{(III)}$$

Al sustituir los parámetros α y β por los valores que queramos en (II) o en (III), siempre obtenemos una solución del SLH dado; o sea, siempre obtenemos un vector del subespacio "S" ..... y por eso se dice que (II) ó (III) **identifican** a "S" en **forma paramétrica**, pues tanto (II) como (III) dan las coordenadas de un **vector genérico de** "S" en función de los valores de los parámetros reales α y β. En consecuencia, diremos que

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2.\alpha - 2.\beta \\ x_2 = -3.\alpha + 2.\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{array}\right\} ; \; \forall \alpha,\beta \in \Re$$

o bien:

$$(2.\alpha - 3.\beta \,; -3.\alpha + 2.\beta \,; \alpha \,; \beta), \forall \alpha,\beta \in \Re$$

son **unas ecuaciones paramétricas** del subespacio "S".

- Ahora, para determinar una base de "S" debemos seleccionar 2 soluciones de (I) que sean LI... y las **más cómodas** de seleccionar son las que corresponden a los valores más cómodos de los parámetros "α" y "β":

  * si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ resulta la solución $\overline{h}_1 = (2;-3;1;0) \in S$
  * si $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ resulta la solución $\overline{h}_2 = (-2;2;0;1) \in S$

Como:

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 \end{array}$$

los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI y forman una **base** de "S", lo que quiere decir que todo vector de "S" puede obtenerse como CL de los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$: o sea:

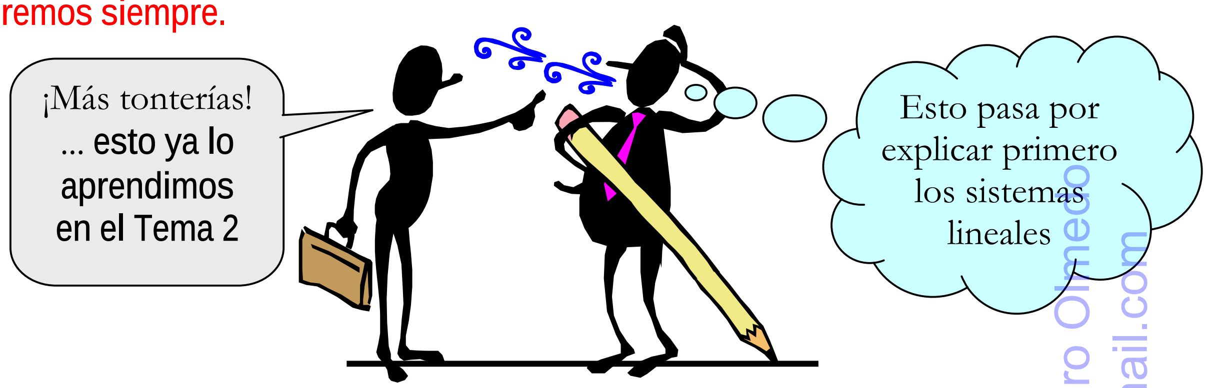
$$\forall \, \overline{x} \in S, \exists \, \alpha_1, \alpha_2 \in \Re \, / \, \overline{x} = \alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{h}_2$$

Observa 1

Siendo $S=\{(2.\alpha-3.\beta\,;-3.\alpha+2.\beta\,;\alpha\,;\beta),\ \forall\alpha,\beta\in\Re\}$, sin más que desagregar los parámetros "α" y "β", se obtiene:

$$S=\{\ (2.\alpha\,;-3.\alpha\,;\alpha\,;0)+(-3.\beta\,;2.\beta\,;0\,;\beta),\ \forall\alpha,\beta\in\Re\ \}=$$
$$=\{\ \alpha\bullet\underbrace{(2\,;-3\,;1\,;0)}_{\overline{h}_1}+\beta\bullet\underbrace{(-3\,;2\,;0\,;1)}_{\overline{h}_2},\ \forall\alpha,\beta\in\Re\ \}$$

con lo que obtenemos una base de "S" a la velocidad de la luz ... y así trabajaremos siempre.



Observa 2

Conociendo sólo unas ecuaciones paramétricas del subespacio "S", podemos determinar unas ecuaciones cartesianas de "S" sin más que eliminar los parámetros en las ecuaciones paramétricas (para eliminar un parámetro se despeja éste de la ecuación más tonta que haya y se sustituye por su valor en las restantes ecuaciones).

$$\left.\begin{array}{l} x_1=2.\alpha-2.\beta \\ x_2=-3.\alpha+2.\beta \\ x_3=\alpha \\ x_4=\beta \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1=2.\alpha-2.x_4 \\ x_2=-3.\alpha+2.x_4 \\ x_3=\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow$$

de la 4ª ecuación despejamos "β" ($\beta=x_4$) y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1=2.x_3-2.x_4 \\ x_2=-3.x_3+2.x_4 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

de la 3ª ecuación despejamos "α" ($\alpha=x_3$) y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1-2.x_3+2.x_4=0 \\ x_2+3.x_3-2.x_4=0 \end{array}\right\}$$

después de operar y ordenar

Observa 3

Sabiendo sólo que $\overline{h}_1=(2;-3;1;0)$ y $\overline{h}_2=(-2;2;0;1)$ forman una base de "S", podemos reconstruir las ecuaciones paramétricas de las que proceden $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ expresando que todo vector de "S" es CL de ellos:

$$\overline{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in S\Rightarrow \overline{x}=\alpha\bullet\overline{h}_1+\beta\bullet\overline{h}_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4)=\alpha\bullet(2;-3;1;0)+\beta\bullet(-2;2;0;1)\Rightarrow\begin{cases}x_1=2.\alpha-2.\beta\\ x_2=-3.\alpha+2.\beta\\ x_3=\alpha\\ x_4=\beta\end{cases}$$

Como queda dicho, eliminando los parámetros en estas ecuaciones paramétricas, obtenemos unas ecuaciones cartesianas del subespacio "S".

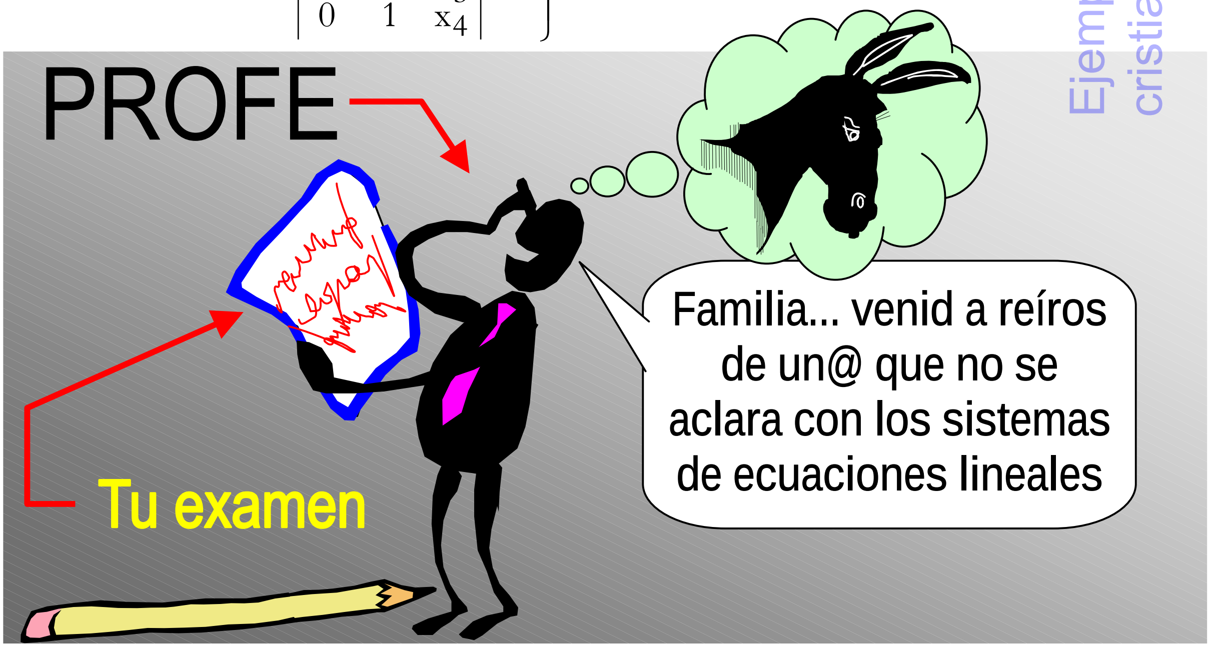
Observa 4

Sabiendo solo que $\overline{h}_1=(2;-3;1;0)$ y $\overline{h}_2=(-2;2;0;1)$ forman una base de "S", podemos reconstruir unas ecuaciones cartesianas de "S" sin pagar el peaje de reconstruir previamente unas ecuaciones paramétricas de "S": si $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ forman una base de "S" y $\overline{x}\in S$, los vectores $\overline{h}_1,\overline{h}_2$ y $\overline{x}$ son LD; por tanto, la matriz "C" cuyas columnas son $\overline{h}_1,\overline{h}_2$ y $\overline{x}$ debe tener rango 2:

$$C=\begin{bmatrix}2&-2&x_1\\-3&2&x_2\\ \boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}&&\begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}\end{bmatrix}$$

Siendo no nulo el menor de orden 2 indicado, será $rg(C)=2$ si son nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar dicho menor de orden 2:

$$\left.\begin{matrix}\begin{vmatrix}2&-2&x_1\\1&0&x_3\\0&1&x_4\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}-3&2&x_2\\1&0&x_3\\0&1&x_4\end{vmatrix}=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2.x_3+2.x_4=0\\ x_2+3.x_3-2.x_4=0\end{cases}$$



FONEMATO 4.1.6

Determine la dimensión y una base del subespacio "S" de $\Re^4$ que forman las soluciones del siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ 2.x_2 - 2.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (I)}$$

SOLUCIÓN

Cálculo de la dimensión

El enunciado identifica al subespacio "S" dándonos unas ecuaciones cartesianas de él. Así, para calcular la dimensión de "S" (que es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "S") tendremos en cuenta que, en general, si "V" es un espacio vectorial y "S" es un subespacio de "V", siempre ocurre que:

$$\dim.(S) = \dim.(V) - \text{n}^\text{o} \text{ de ecuaciones cartesianas independientes de "S"}$$

Como el número de ecuaciones cartesianas independientes del SLH que define a "S" coincide con el rango de la matriz "A" de los coeficientes del sistema, resulta:

$$\dim.(S) = \dim.(V) - rg(A)$$

- En nuestro caso:

$$\dim.(S) = \dim.(\Re^4) - rg\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{A} = 4 - 3 = 1$$

O sea, el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "S" es 1.

Cálculo de una base

- Como $\dim.(S) = 1$, todo vector de "S" que no sea el $\bar{0}$ es una base de "S"... y como cada vector de "S" es solución del SLH que define a "S", para encontrar una base de "S" debemos encontrar una solución no trivial de dicho SLH.
- Calculemos las infinitas soluciones de (I) y seleccionemos una solución no trivial; para ello, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, parametrizamos la incógnita x_4, pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones. Resulta:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 - x_3 &= -2.x_4 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ 2.x_2 &= 2.x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow .... \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

A la vista de la solución obtenida, podemos expresar de forma paramétrica el subespacio "S" que forman las infinitas soluciones del SLH dado:

$$S = \left\{ (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \middle/ \begin{aligned} x_1 &= -\alpha \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \alpha \\ x_4 &= \alpha \end{aligned} \;;\; \forall \alpha \in \Re \right\} \text{ (II)}$$

O más cómodo:

$$S = \{(-\alpha;\alpha;\alpha;\alpha), \forall \alpha \in \Re\} \text{ (III)}$$

Al sustituir α por el valor que queramos en (II) o en (III), obtenemos una solución del SLH dado; o sea, obtenemos un vector del subespacio "S"... y por eso se dice que (II) ó (III) **identifican** a "S" en **forma paramétrica,** pues tanto (II) como (III) dan las coordenadas de un **vector genérico** de "S" en función del valor de un parámetro real α. En consecuencia, diremos que

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\alpha \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \alpha \\ x_4 &= \alpha \end{aligned}\right\}; \forall \alpha \in \Re$$

o bien:

$$(-\alpha ; \alpha ; \alpha ; \alpha), \forall \alpha \in \Re$$

son **unas ecuaciones paramétricas** del subespacio "S".

- Ahora, para determinar una base de "S" basta elegir cualquier solución no trivial... y la **más cómoda** es la correspondiente al valor más cómodo del parámetro: si $\alpha = 1$ resulta la solución $\overline{h}_1 = (-1;1;1;1)$, que no es la trivial; por tanto, el vector $\overline{h}_1$ es una **base** del subespacio "S", lo que significa que todo vector de "S" es CL del vector $\overline{h}_1$.

Observa 1

Sabiendo que $S = \{(-\alpha;\alpha;\alpha;\alpha), \forall \alpha \in \Re\}$, **sacando factor común** el parámetro "α", se obtiene

$$S = \{\ \alpha \bullet \underbrace{(-1\,;1\,;1\,;1)}_{\overline{h}_1}, \forall \alpha \in \Re\ \}$$

con lo que obtenemos una base de "S" a la **velocidad de la luz... y así trabajaremos siempre.**

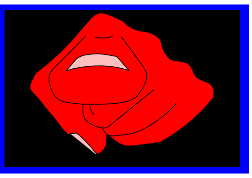
Observa 2

Conociendo sólo **unas ecuaciones paramétricas** del subespacio "S", podemos determinar **unas ecuaciones cartesianas** de "S" sin más que **eliminar los parámetros en las ecuaciones paramétricas** (para eliminar un parámetro se despeja éste de la ecuación más tonta que haya y se sustituye por su valor en las restantes ecuaciones).

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\alpha \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \alpha \\ x_4 &= \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= -x_4 \\ x_2 &= x_4 \\ x_3 &= x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

de la 4ª ecuación despejamos "β" ($\beta = x_4$) y sustituimos en las demás

En examen no importa lo que sabes,
importa lo que parece que sabes.



Observa 3

Sabiendo sólo que $\overline{h}_1 = (-1;1;1;1)$ es una base de "S", podemos reconstruir las ecuaciones paramétricas de las que procede $\overline{h}_1$ expresando que todo vector de "S" es CL de $\overline{h}_1$:

$$\overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in S \Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4) = \alpha \bullet (-1;1;1;1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases}$$

Como queda dicho, eliminando los parámetros en estas ecuaciones paramétricas, obtenemos unas ecuaciones cartesianas del subespacio "S".

Observa 4

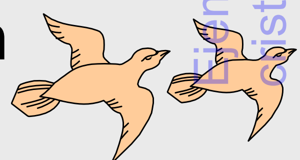
Sabiendo sólo que $\overline{h}_1 = (-1;1;1;1)$ es una base de "S", podemos reconstruir unas ecuaciones cartesianas de "S" sin reconstruir previamente unas ecuaciones paramétricas de "S": si $\overline{h}_1$ es una base de "S" y $\overline{x} \in S$, los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{x}$ son LD; por tanto, la matriz "C" cuyas columnas son $\overline{h}_1$ y $\overline{x}$ debe tener rango 1:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \boxed{1} & x_4 \end{bmatrix}$$

Siendo no nulo el menor de orden 1 indicado, será $rg(C) = 1$ si son nulos todos los menores de orden 2 obtenidos al orlar dicho menor de orden 1:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} -1 & x_1 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

El primer objetivo de quien no se chupa el dedo es averiguar cuanto antes si se ha equivocado de Carrera o no... y eso te lo dicen las Matemáticas, no las asignaturas fáciles que aprueba todo el mundo.



FONEMATO 4.1.7

Determine la dimensión y una base del subespacio "S" de $\Re^4$ que forman las soluciones del siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$2.x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 = 0 \quad \text{(I)}$$

SOLUCIÓN

Cálculo de la dimensión

El enunciado identifica al subespacio "S" dándonos unas ecuaciones cartesianas de él. Así, para calcular la dimensión de "S" (que es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "S") tendremos en cuenta que, en general, si "V" es un espacio vectorial y "S" es un subespacio de "V", siempre ocurre que:

$$\dim.(S) = \dim.(V) - \text{nº de ecuaciones cartesianas independientes de "S"}$$

Como el número de ecuaciones cartesianas independientes del SLH que define a "S" coincide con el rango de la matriz "A" de los coeficientes del sistema, resulta:

$$\dim.(S) = \dim.(V) - rg(A)$$

- En nuestro caso:

$$\dim.(S) = \dim.(\Re^4) - rg\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & \boxed{1} & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = 4 - 1 = 3$$

O sea, el número máximo de vectores LI que pueden encontrase en "S" es 3.

Cálculo de una base

- Como $\dim.(S) = 3$, cualesquiera 3 vectores de "S" que sean LI forman una base de "S" ... y como cada vector de "S" es una solución del SLH que define a "S", para encontrar una base de "S" debemos encontrar 3 soluciones de dicho SLH que sean LI.

- Calculemos las infinitas soluciones de (I) y seleccionemos 3 soluciones LI; para ello, como el menor de orden 1 indicado en "A" es no nulo, parametrizamos x_1, x_3 y x_4, pasándolas al segundo miembro de la ecuación. Resulta:

$$x_2 = -2.x_1 + x_3 - 2.x_4$$

A la vista de la solución obtenida, podemos expresar de forma paramétrica el subespacio "S" que forman las infinitas soluciones del SLH dado:

$$S = \left\{ (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \Re^4 \middle/ \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2.\alpha + \beta - 2.\lambda \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \lambda \end{array} ;\ \forall \alpha, \beta, \lambda \in \Re \right\} \quad \text{(II)}$$

O más cómodo:

$$S = \{ (\alpha ; -2.\alpha + \beta - 2.\lambda ; \beta ; \lambda), \forall \alpha, \beta, \lambda \in \Re \} \quad \text{(III)}$$

Al sustituir los parámetros α, β y λ por los valores que queramos en (II) o en (III), obtenemos una solución del SLH dado; o sea, obtenemos un vector del subespacio "S" ..... y por eso se dice que (II) ó (III) identifican a "S" en forma paramétrica, pues tanto (II) como (III) dan las coordenadas de un vector genérico de "S" en función de los valores de los parámetros reales α, β y λ. En consecuencia, diremos que

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2.\alpha + \beta - 2.\lambda \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \lambda \end{array}\right\}; \forall \alpha,\beta,\lambda \in \Re$$

o bien: $(\alpha\,; -2.\alpha + \beta - 2.\lambda\,; \beta\,; \lambda), \forall \alpha,\beta,\lambda \in \Re$

son unas ecuaciones paramétricas del subespacio "S".

- Ahora, para determinar una base de "S" debemos seleccionar 3 soluciones de (I) que sean LI... y las más cómodas de seleccionar son las que corresponden a los valores más cómodos de los parámetros α, β y λ:
  - * si $\alpha = 1, \beta = 0, \lambda = 0$ resulta la solución $\overline{h}_1 = (1;-2;0;0) \in S$
  - * si $\alpha = 0, \beta = 1, \lambda = 0$ resulta la solución $\overline{h}_2 = (0;1;1;0) \in S$
  - * si $\alpha = 0, \beta = 0, \lambda = 1$ resulta la solución $\overline{h}_3 = (0;-2;0;1) \in S$

  Como:

$$\begin{array}{c} \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{array} \end{array}$$

  los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI y forman una base de "S", lo que significa que todo vector de "S" es CL de $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.

Observa 1

Siendo $S = \{(\alpha;-2.\alpha+\beta-2.\lambda;\beta;\lambda), \forall \alpha,\beta,\lambda \in \Re\}$, sin más que desagregar los parámetros α, β y λ, se obtiene:

$$S = \{\ (\alpha\,;-2.\alpha\,;0\,;0) + (0\,;\beta\,;\beta\,;0) + (0\,;-2.\lambda\,;0\,;\lambda), \forall \alpha,\beta,\lambda \in \Re\ \} =$$
$$= \{\ \alpha \bullet \underbrace{(1\,;-2\,;0\,;0)}_{\overline{h}_1} + \beta \bullet \underbrace{(0\,;1\,;1\,;0)}_{\overline{h}_2} + \lambda \bullet \underbrace{(0\,;-2\,;0\,;1)}_{\overline{h}_3}, \forall \alpha,\beta,\lambda \in \Re\ \}$$

con lo que obtenemos una base de "S" a la velocidad de la luz... y así trabajaremos siempre.

LA MEMORIA

LO ÚNICO QUE NO SE OLVIDA ES LO QUE SE APUNTA

Conociendo sólo unas ecuaciones paramétricas del subespacio "S", podemos determinar unas ecuaciones cartesianas de "S" sin más que eliminar los parámetros en las ecuaciones paramétricas (para eliminar un parámetro se despeja éste de la ecuación más tonta que haya y se sustituye por su valor en las restantes ecuaciones).

de la 4ª ecuación despejamos "λ" ($\lambda = x_4$) y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2.\alpha+\beta-2.\lambda \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2.\alpha+\beta-2.x_4 \\ x_3 = \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2.\alpha+x_3-2.x_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

de la 3ª ecuación despejamos "β" ($\beta = x_3$) y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow x_2 = -2.x_1 + x_3 - 2.x_4 \Rightarrow 2.x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 = 0$$

de la 1ª ecuación despejamos "α" ($\alpha = x_1$) y sustituimos en las demás

Observa 3

Sabiendo sólo que $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ forman una base de "S", podemos reconstruir las ecuaciones paramétricas de las que proceden $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ expresando que todo vector de "S" es CL de ellos:

$$\overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in S \Rightarrow \overline{x} = \alpha \bullet \overline{h}_1 + \beta \bullet \overline{h}_2 + \lambda \bullet \overline{h}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2.\alpha + \beta - 2.\lambda \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \lambda \end{cases}$$

Como queda dicho, eliminando los parámetros en estas ecuaciones paramétricas, obtenemos unas ecuaciones cartesianas del subespacio "S".

Observa 4

Sabiendo sólo que $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ forman una base de "S" podemos reconstruir unas ecuaciones cartesianas de "S" sin pagar el peaje de reconstruir previamente unas ecuaciones paramétricas de "S"... y para ello usamos argumentos requeteconocidos del Tema 3: si $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ forman una base de "S" y $\overline{x} \in S$, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3$ y $\overline{x}$ son LD; por tanto, la matriz "C" cuyas columnas son $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3$ y $\overline{x}$ debe tener rango 3:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ -2 & 1 & -2 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{bmatrix}$$

Siendo no nulo el menor de orden 3 indicado, será $rg(C) = 3$ si $|C| = 0$:

$$|C| = 0 \Rightarrow 2.x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 = 0$$

FONEMATO 4.1.8

Determine la dimensión y una base "S".

$$1)\ S=\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 /\ x_3=0\}$$

$$2)\ S=\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 /\ x_1=x_2+x_3=0\}$$

SOLUCIÓN

1) dim.(S) = dim.(V) − nº de ecuaciones cartesianas independientes de "S"=

$$=4-\text{rg}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & \boxed{1} & 0\end{bmatrix}}_{A}=4-1=3$$

Como el menor de orden 1 indicado en "A" es no nulo, parametrizamos x_1, x_2 y x_4, pasándolas al segundo miembro. Resulta $x_3=0$; así:

$$S=\{(\alpha;\beta;0;\lambda),\ \forall\alpha,\beta,\lambda\in\Re\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\{(\alpha;0;0;0)+(0;\beta;0;0)+(0;0;0;\lambda),\ \forall\alpha,\beta,\lambda\in\Re\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\{\alpha\bullet(1;0;0;0)+\beta\bullet(0;1;0;0)+\lambda\bullet(0;0;0;1),\ \forall\alpha,\beta,\lambda\in\Re\}$$

Los vectores $(1;0;0;0)$, $(0;1;0;0)$ y $(0;0;0;1)$ forman una base de "S".

2) Siendo $S=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \Big/ \begin{matrix}x_1=0\\ x_2+x_3=0\end{matrix}\right\}$, es:

$$\text{dim.}(S)=\text{dim.}(\Re^4)-\text{rg}\underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\end{bmatrix}}_{A}=4-2=2$$

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, parametrizamos x_3 y x_4, y resulta $x_1=0$ y $x_2=-x_3$; por tanto:

$$S=\{(0;-\alpha;\alpha;\beta),\ \forall\alpha,\beta\in\Re\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\{(0;-\alpha;\alpha;0)+(0;0;0;\beta),\ \forall\alpha,\beta\in\Re\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\{\alpha\bullet(0;-1;1;0)+\beta\bullet(0;0;0;1),\ \forall\alpha,\beta\in\Re\}$$

Los vectores $\overline{h}_1=(0;-1;1;0)$ y $\overline{h}_2=(0;0;0;1)$ forman una base de "S".

FONEMATO 4.1.9

En el espacio vectorial P_3 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior 3 se considera el conjunto $S = \{u(x) \in P_3 \ / \ u'(1) = u''(2) = 0\}$. Demuestre que "S" es subespacio de P_3, determinando su dimensión y una base.

SOLUCIÓN

Latiguillo: Para demostrar que "S" es subespacio de P_3, debemos demostrar que toda combinación lineal de vectores de "S" es un vector de "S".

Veamos: si $u(x), v(x) \in S$ es $u'(1) = u''(1) = 0$ y $v'(1) = v''(1) = 0$; así, si $\alpha, \beta \in \Re$ y $w(x) = \alpha.u(x) + \beta.v(x)$, es:

$$w'(1) = \alpha.u'(1) + \beta.v'(1) = \alpha.0 + \beta.0 = 0$$
$$w''(2) = \alpha.u''(1) + \beta.v''(1) = \alpha.0 + \beta.0 = 0$$

lo que demuestra que $w(x) = \alpha.u(x) + \beta.v(x) \in S$.

Si $u(x) = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$, se tiene que:

$$\left.\begin{matrix} u'(1) = 0 \\ u''(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} (3.a.x^2 + 2.b.x + c)_{x=1} = 0 \\ (6.a.x + 2.b)_{x=1} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 3.a + 2.b + c = 0 \\ 6.a + 2.b = 0 \end{matrix}\right\}$$

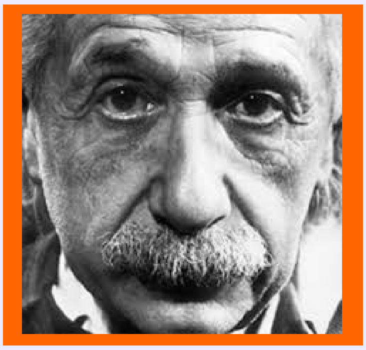
Es:

$$\dim.(S) = \dim.(P_3) - \text{n}^\text{o} \text{ de ecuaciones cartesianas independientes de "S"} =$$
$$= 4 - \text{rg}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, parametrizamos "a" y "d", pasándolas a los segundos miembros:

$$\left.\begin{matrix} 2.b + c = -3.a \\ 2.b = -6.a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} b = -3.a \\ c = 3.a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S = \{a.x^3 - 3.a.x^2 + 3.a.x + d, \ \forall a, d \in \Re\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S = \{(a.x^3 - 3.a.x^2 + 3.a.x + 0) + (0.x^3 + 0.x^2 + 0.x + d), \ \forall a, d \in \Re\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S = \{\ a.\underbrace{(x^3 - 3.x^2 + 3.x + 0)}_{k_1(x)} + d.\underbrace{(0.x^3 + 0.x^2 + 0.x + 1)}_{k_2(x)}, \ \forall a, d \in \Re\}$$

Los vectores $k_1(x) = x^3 - 3.x^2 + 3.x + 0$ y $k_2(x) = 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x + 1$ forman una base de "S".



Vine a Estados Unidos porque oí que es este país existía una gran, gran libertad. Cometí un error al elegir Estados Unidos como una tierra de libertad, y es un error que en balance de mi vida ya no puedo compensar.

Albert Einstein

FONEMATO 4.1.10

En el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior 2 se considera el conjunto $S=\left\{u(x)\in P_2 \,/\, \int_0^1 u(x).dx=0\right\}$. Demuestre que "S" es subespacio de P_2, determinando su dimensión y una base.

SOLUCIÓN

Latiguillo: Para demostrar que "S" es subespacio de P_2, debemos demostrar que toda combinación lineal de vectores de "S" es un vector de "S".

Veamos: si $u(x),v(x)\in S$ es $\int_0^1 u(x).dx=0$ y $\int_0^1 v(x).dx=0$; así, siendo $\alpha,\beta\in\Re$ y $w(x)=\alpha.u(x)+\beta.v(x)$, es:

$$\int_0^1 w(x).dx=\int_0^1\big(\alpha.u(x)+\beta.v(x)\big).dx=\alpha.\underbrace{\int_0^1 u(x).dx}_{0}+\beta.\underbrace{\int_0^1 v(x).dx}_{0}=0$$

lo que demuestra que $w(x)=\alpha.u(x)+\beta.v(x)\in S$.

Si $u(x)=a.x^2+b.x+c$, se tiene que:

$$\int_0^1 u(x).dx=0\Rightarrow\left(\frac{1}{3}.a.x^3+\frac{1}{2}.b.x^2+c.x\right)_0^1=0\Rightarrow\frac{1}{3}.a+\frac{1}{2}.b+c=0$$

Es:

$$\dim.(S)=\dim.(P_2)-\text{n}^\text{o}\text{ de ecuaciones cartesianas independientes de "S"}=$$
$$=3-\text{rg}\begin{bmatrix}1/3 & 1/2 & \boxed{1}\end{bmatrix}=3-1=2$$

Como el menor de orden 1 indicado es no nulo, parametrizamos "a" y "b", pasándolas al segundo miembro:

$$c=-\frac{1}{3}.a-\frac{1}{2}.b\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S=\left\{a.x^2+b.x-\frac{1}{3}.a-\frac{1}{2}.b,\ \forall a,b\in\Re\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S=\left\{(a.x^2+0.x-\frac{1}{3}.a)+(0.x^2+b.x-\frac{1}{2}.b),\ \forall a,b\in\Re\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S=\left\{a.(x^2+0.x-\frac{1}{3})+b.(0.x^2+x-\frac{1}{2}),\ \forall a,b\in\Re\right\}$$

Los vectores $k_1(x)=x^2+0.x-\frac{1}{3}$ y $k_2(x)=0.x^2+x-\frac{1}{2}$ forman una base del subespacio "S".

FONEMATO 4.1.11

En el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior 2 se considera el conjunto $S=\{u(x)\in P_2\ /\ u(x+1)-u(x)=0\}$. Demuestre que "S" es subespacio de P_2, determinando su dimensión y una base.

SOLUCIÓN

Latiguillo: Para demostrar que "S" es subespacio de P_2, debemos demostrar que toda combinación lineal de vectores de "S" es un vector de "S".

Veamos: si $u(x), v(x)\in S$ es $u(x+1)-u(x)=0$ y $v(x+1)-v(x)=0$; así, siendo $\alpha,\beta\in\Re$ y $w(x)=\alpha.u(x)+\beta.v(x)$, es:

$$w(x+1)-w(x)=\big(\alpha.u(x+1)+\beta.v(x+1)\big)-\big(\alpha.u(x)+\beta.v(x)\big)=$$
$$=\alpha.\underbrace{\big(u(x+1)-u(x)\big)}_{0}+\beta.\underbrace{\big(v(x+1)-v(x)\big)}_{0}=0$$

lo que demuestra que $w(x)=\alpha.u(x)+\beta.v(x)\in S$.

Si $u(x)=a.x^2+b.x+c$, se tiene que:

$$u(x+1)-u(x)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\big(a.(x+1)^2+b.(x+1)+c\big)-\big(a.x^2+b.x+c\big)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\big(a.x^2+2.a.x+a+b.x+b+c\big)-\big(a.x^2+b.x+c\big)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2.a.x+a+b=0\Rightarrow\begin{Bmatrix}2.a=0\\ a+b=0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim.(S)=\dim.(P_2)-rg\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\end{bmatrix}=3-2=1$$

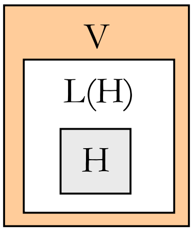
Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, parametrizamos "c", pasándola a los segundos miembros; resulta $a=b=0$. Por tanto:

$$S=\{0.x^2+0.x+c,\ \forall c\in\Re\}=\{c.(0.x^2+0.x+1),\ \forall c\in\Re\}$$

El vector $k(x)=x^2+0.x+1$ es una base del subespacio "S".

Olvídate de lo que no sea SSLF

Si en examen cae algo realmente difícil, el 99 % de la gente lo dejará en blanco y a nadie suspenderán por ello... pero es suspenso seguro no hacer bien las cosas normalitas que, por tener categoría SSLF, hace bien el 20 % de los que se examinan.



Si "V" es un espacio vectorial y "H" un subconjunto de "V", la variedad lineal engendrada por "H" se denota L(H), y es el conjunto que forman los vectores de "V" que son CL de los vectores de "H". De L(H) también se dice cápsula lineal o envoltura lineal del conjunto "H".

Por tanto, si $H=\{\overline{h}_1,\dots,\overline{h}_k\}\subset V$, es:

$$L(H)=\{\overline{x}\in V\,/\,\overline{x}=\theta_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\theta_k\bullet\overline{h}_k,\ \theta_i\in\Re,\ \forall i=1,2,\dots,k\}$$

Del conjunto "H" se dice sistema generador de la variedad lineal L(H).

La variedad lineal L(H) es subespacio de "V", pues:

1) $\forall\overline{x},\overline{y}\in L(H)$ ocurre que $\overline{x}+\overline{y}\in L(H)$
2) $\forall\overline{x}\in L(H)$ y $\forall\alpha\in\Re$ ocurre que $\alpha\bullet\overline{x}\in L(H)$

En efecto:

1) Sea $\overline{x}=\theta_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\theta_k\bullet\overline{h}_k\in L(H)$.

Sea $\overline{y}=\lambda_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\lambda_k\bullet\overline{h}_k\in L(H)$.

Para demostrar que $\overline{x}+\overline{y}\in L(H)$ debemos demostrar que $\overline{x}+\overline{y}$ es combinación lineal de los vectores de "H", como en efecto sucede:

$$\overline{x}+\overline{y}=(\theta_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\theta_k\bullet\overline{h}_k)+(\lambda_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\lambda_k\bullet\overline{h}_k)=$$
$$=(\theta_1+\lambda_1)\bullet\overline{h}_1+\dots+(\theta_k+\lambda_k)\bullet\overline{h}_k=\delta_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\delta_k\bullet\overline{h}_k$$

$\boxed{\text{hacemos } \theta_i+\lambda_i=\delta_i,\ i=1,2,\dots,k}$

2) Sea $\overline{x}=\theta_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\theta_k\bullet\overline{h}_k\in L(H)$ y $\alpha\in\Re$.

Para demostrar que $\alpha\bullet\overline{x}\in L(H)$ debemos demostrar que $\alpha\bullet\overline{x}$ es combinación lineal de los vectores de "H", como en efecto sucede:

$$\alpha\bullet\overline{x}=\alpha\bullet(\theta_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\theta_k\bullet\overline{h}_k)=$$
$$=(\alpha.\theta_1)\bullet\overline{h}_1+\dots+(\alpha.\theta_k)\bullet\overline{h}_k=\gamma_1\bullet\overline{h}_1+\dots+\gamma_k\bullet\overline{h}_k$$

$\boxed{\text{hacemos } \alpha.\theta_i=\gamma_i,\ i=1,2,\dots,k}$

Nota bene: como sabemos, si el conjunto $H=\{\overline{h}_1,\dots,\overline{h}_k\}$ es SG del espacio vectorial "V", todo vector de "V" es CL de los vectores de "H", por lo que $L(H)\equiv V$. Sólo será $L(H)\subset V$ si "H" no es SG de "V".

Otra notación

Para denotar al conjunto que forman los vectores de "V" que son CL de los vectores $\overline{h}_1,\dots,\overline{h}_k$ también se escribe $<\overline{h}_1,\dots,\overline{h}_k>$.

Recuerda: en el ejercicio 3.7.1 vimos que el conjunto

$$H_2 = \{\overline{h}_1 = (2;3;4)\ ;\ \overline{h}_2 = (-2;1;5)\ ;\ \overline{h}_3 = (0;4;9)\ ;\ \overline{h}_4 = (4;2;-1)\}$$

no es SG de $\Re^3$, lo que significa que en $\Re^3$ hay vectores que no son CL de los vectores de H_2... y la novedad conceptual que acabamos de introducir se reduce a llamar variedad lineal al conjunto $L(H_2)$ que forman los vectores de $\Re^3$ que son CL de los vectores de H_2:

$$L(H_2) = \{\ \overline{x} \in \Re^3 \,/\, \overline{x} = \sum_{i=1}^{i=4} \alpha_i \bullet \overline{h}_i,\ \alpha_i \in \Re,\ \forall\, i = 1,2,3,4\ \}$$

Además, ahora sabemos que $L(H_2)$ es un subespacio de $\Re^3$.

De las intimidades de una variedad lineal

- Si L(H) es la variedad lineal o subespacio engendrada por $H = \{\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k\}$, la dimensión de L(H) es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en L(H)... y ese número coincide con el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "H", que a su vez coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H". Por tanto:

$$\dim.(L(H)) = \mathrm{rg} \overbrace{\begin{bmatrix} \bullet & \cdots\cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \bullet & \cdots\cdots & \bullet \end{bmatrix}}^{A} \begin{array}{l} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow\uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \ldots\ldots & \overline{h}_k \end{array}$$

- Si $\mathrm{rg}(A) = p$, los "p" vectores de "H" correspondientes a cualesquiera "p" columnas de "A" con las que pueda formarse un menor no nulo de orden "p" son LI y forman una base de L(H).

- Obtendremos unas ecuaciones paramétricas de L(H) al expresar matemáticamente que todo vector de L(H) es CL de los vectores de una base de L(H). Si en dichas ecuaciones paramétricas eliminamos los parámetros, obtendremos unas ecuaciones cartesianas de L(H); es decir, obtendremos un SLH cuyo conjunto de soluciones es L(H).

FONEMATO 4.2.1

Sea $H_2 = \{\overline{h}_1 = (2;3;4)\ ;\ \overline{h}_2 = (-2;1;5)\ ;\ \overline{h}_3 = (0;4;9)\ ;\ \overline{h}_4 = (4;2;-1)\} \subset \Re^3$

Determine la dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de la variedad lineal engendrada por H_2.

SOLUCIÓN

En el ejercicio 3.7.1 vimos que H_2 no es SG de $\Re^3$, pues el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en H_2, que coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de H_2, es inferior a la dimensión de $\Re^3$. Por tanto, haciendo combinaciones lineales con los vectores que forman H_2 no es posible obtener **todos** los vectores de $\Re^3$... y dijimos que, como nos pasaría a todos en tal situación, tan escaso **poder generador** hace que los vectores de H_2 se sientan **frustrados, mediocres y eternamente perdedores.**

Pero como no todo en la vida son desgracias, ahora sabemos que el conjunto

$$L(H_2) = \{\ \overline{x} \in \Re^3 / \overline{x} = \sum_{i=1}^{i=4} \theta_i \bullet \overline{h}_i,\ \theta_i \in \Re, \forall i = 1,2,3,4\ \}$$

formado por los vectores de $\Re^3$ que son CL de los vectores de H_2 (o sea, la **variedad lineal** engendrada por H_2) es **subespacio** de $\Re^3$... y seguro que esto elevará la moral de los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ que forman la **plantilla** de H_2.

Dimensión de la variedad lineal

Como sucede con cualquier espacio vectorial, la dimensión de $L(H_2)$ es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en $L(H_2)$... y dicho número coincide con el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en H_2, que, como sabemos, coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de H_2; por tanto:

$$\dim.(L(H_2) = \text{rg}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 9 & -1 \end{matrix} \end{bmatrix} = 2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{h}_4 \end{matrix}$$

Una base de la variedad lineal

Como $\dim.L(H_2) = 2$, cualesquiera 2 vectores de $L(H_2)$ que sean LI forman una **base** de $L(H_2)$... y como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ son LI y forman una base de $L(H_2)$.

Observa: el que $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ formen una base de $L(H_2)$ significa que todo vector de $L(H_2)$ es CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$; así, resulta obvio que si $H_2^* = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$, la variedad lineal $L(H_2^*)$ engendrada por H_2^* es la misma que la $L(H_2)$ engendrada por $H_2 = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3, \overline{h}_4\}$

Unas ecuaciones paramétricas de la variedad lineal

Obtendremos unas ecuaciones paramétricas de $L(H_2)$ al expresar que todo vector de $L(H_2)$ es CL de los vectores de una base de L(H); por ejemplo, la base que forman $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$:

$$\overline{x} = (x_1;x_2;x_3) \in L(H_2) \Rightarrow \overline{x} = \alpha \bullet \overline{h}_1 + \beta \bullet \overline{h}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1;x_2;x_3) = \alpha \bullet (2;3;4) + \beta \bullet (-2;1;5) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2.\alpha - 2.\beta \\ x_2 = 3.\alpha + \beta \\ x_3 = 4.\alpha + 5.\beta \end{cases}$$

Así expresamos el valor de cada uno de los 3 componentes de cada vector de la variedad lineal o subespacio $L(H_2)$ en función de los valores de dos parámetros reales "α" y "β".

Unas ecuaciones cartesianas de la variedad lineal

Obtendremos unas ecuaciones cartesianas de $L(H_2)$ al eliminar los parámetros α y β en las ecuaciones paramétricas:

de la 2ª ec. despejamos "β" ($\beta = x_2 - 3.\alpha$) y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2.\alpha - 2.\beta \\ x_2 = 3.\alpha + \beta \\ x_3 = 4.\alpha + 5.\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 8.\alpha - 2.x_2 \\ x_3 = -11.\alpha + 5.x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 11.x_1 - 18.x_2 + 8.x_3 = 0 \Rightarrow$$

de la 1ª ec. despejamos "α" ($\alpha = (x_1 + 2.x_2)/8$) y sustituimos en 2ª

$$\Rightarrow L(H_2) = \left\{\overline{x} = (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3 / \ 11.x_1 - 18.x_2 + 8.x_3 = 0\right\}$$

O sea, $L(H_2)$ es el conjunto que forman las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo $11.x_1 - 18.x_2 + 8.x_3 = 0$.

Recuerda

Podemos calcular unas ecuaciones cartesianas de $L(H_2)$ sin usar sus ecuaciones paramétricas: si los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son una base de $L(H_2)$ y $\overline{x} = (x_1;x_2;x_3) \in L(H_2)$, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$ son LD; por tanto, la matriz cuyas columnas son $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$ debe tener rango 2:

$$rg\begin{bmatrix} 2 & -2 & x_1 \\ 3 & 1 & x_2 \\ 4 & 5 & x_3 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & x_1 \\ 3 & 1 & x_2 \\ 4 & 5 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 11.x_1 - 18.x_2 + 8.x_3 = 0$$

Recuerda

Para denotar la variedad lineal o subespacio $L(H_2)$ engendrado al hacer combinaciones lineales con los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ que forman el conjunto H_2 también escribimos $< \overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3, \overline{h}_4 >$; o sea:.

$$L(H_2) \equiv < \overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3, \overline{h}_4 >$$

FONEMATO 4.2.2

Sea $H = \{\overline{h}_1 = (1;0;1;0), \overline{h}_2 = (0;1;0;1), \overline{h}_3 = (1;1;1;1)\} \subset \Re^4$. Demuestre que la variedad lineal engendrada por "H" es subespacio de $\Re^4$, calculando su dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas.

SOLUCIÓN

1) La variedad lineal L(H) engendrada por el conjunto "H" es el conjunto que forman los vectores de $\Re^4$ que son CL de los vectores de "H":

$$L(H) = \{ \ \overline{x} \in \Re^4 \ / \ \overline{x} = \sum_{i=1}^{3} \theta_i \bullet \overline{h}_i, \theta_i \in \Re, \forall i = 1,2,3 \ \}$$

- De "H" se dice que es un sistema de generadores de L(H).
- Para demostrar que L(H) es subespacio de $\Re^4$ debemos demostrar que:

  a) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in L(H)$ ocurre que $\overline{x} + \overline{y} \in L(H)$

  b) $\forall \overline{x} \in L(H)$ y $\forall \alpha \in \Re$ ocurre que $\alpha \bullet \overline{x} \in L(H)$

a) Sea $\overline{x} = \theta_1 \bullet \overline{h}_1 + \theta_2 \bullet \overline{h}_2 + \theta_3 \bullet \overline{h}_3 \in L(H)$.

Sea $\overline{y} = \lambda_1 \bullet \overline{h}_1 + \lambda_2 \bullet \overline{h}_2 + \lambda_3 \bullet \overline{h}_3 \in L(H)$.

Para demostrar que $\overline{x} + \overline{y} \in L(H)$ debemos demostrar que $\overline{x} + \overline{y}$ es CL de los vectores de "H", como en efecto sucede:

$$\overline{x} + \overline{y} = (\theta_1 \bullet \overline{h}_1 + \theta_2 \bullet \overline{h}_2 + \theta_3 \bullet \overline{h}_3) + (\lambda_1 \bullet \overline{h}_1 + \lambda_2 \bullet \overline{h}_2 + \lambda_3 \bullet \overline{h}_3) =$$

$$= (\theta_1 + \lambda_1) \bullet \overline{h}_1 + (\theta_2 + \lambda_2) \bullet \overline{h}_2 + (\theta_3 + \lambda_3) \bullet \overline{h}_3 =$$

$$= \delta_1 \bullet \overline{h}_1 + \delta_2 \bullet \overline{h}_2 + \delta_3 \bullet \overline{h}_3$$

$\boxed{\text{hacemos } \theta_i + \lambda_i = \delta_i, \ i = 1,2,3}$

b) Si $\alpha \in \Re$, para demostrar que $\alpha \bullet \overline{x} \in L(H)$ debemos demostrar que $\alpha \bullet \overline{x}$ es CL de los vectores de "H", como en efecto sucede:

$$\alpha \bullet \overline{x} = \alpha \bullet (\theta_1 \bullet \overline{h}_1 + \theta_2 \bullet \overline{h}_2 + \theta_3 \bullet \overline{h}_3) =$$

$$= (\alpha.\theta_1) \bullet \overline{h}_1 + (\alpha.\theta_2) \bullet \overline{h}_2 + (\alpha.\theta_3) \bullet \overline{h}_3 = \gamma_1 \bullet \overline{h}_1 + \gamma_2 \bullet \overline{h}_2 + \gamma_3 \bullet \overline{h}_3$$

$\boxed{\text{hacemos } \alpha.\theta_i = \gamma_i, \ i = 1,2,3}$

Tardarás menos si usas sumatorios:

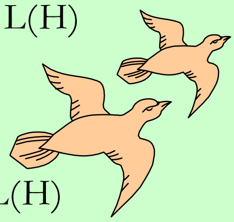
Si $\overline{x} = \sum_{i=1}^{i=3} \theta_i \bullet \overline{h}_i \in L(H)$, $\overline{y} = \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i \bullet \overline{h}_i \in L(H)$ y $\alpha \in \Re$, entonces:

a) $\overline{x} + \overline{y} = \sum_{i=1}^{i=3} (\theta_i + \lambda_i) \bullet \overline{h}_i = \sum_{i=1}^{i=3} \delta_i \bullet \overline{h}_i \in L(H)$

$\boxed{\text{hacemos } \theta_i + \lambda_i = \delta_i}$

b) $\alpha \bullet \overline{x} = \sum_{i=1}^{i=3} (\alpha.\theta_i) \bullet \overline{h}_i = \sum_{i=1}^{i=3} \gamma_i \bullet \overline{h}_i \in L(H)$

$\boxed{\text{hacemos } \alpha.\theta_i = \gamma_i}$



2) La dimensión de L(H) es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en L(H), y coincide con el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en "H", que coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H":

$$\dim.(L(H)) = rg\overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}}^{A} = 2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{matrix}$$

- Como $\dim.L(H) = 2$, cualesquiera dos vectores de L(H) que sean LI forman una base de L(H)... y como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ son LI y forman una base de L(H).

Observa: el que $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ formen una base de $L(H)$ significa que todo vector de $L(H)$ es CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$; así, es obvio que si $H* = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$, la variedad lineal $L(H*)$ engendrada por $H*$ coincide con $L(H)$.

3) Obtendremos unas ecuaciones paramétricas de L(H) al expresar matemáticamente que todo vector de L(H) es CL de los vectores de una base de L(H); por ejemplo, la base que forman los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$:

$$\overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in L(H) \Rightarrow \overline{x} = \alpha \bullet \overline{h}_1 + \beta \bullet \overline{h}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4) = \alpha \bullet (1;0;1;0) + \beta \bullet (0;1;0;1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

Así expresamos el valor de cada uno de los 4 componentes de cada vector del subespacio L(H) en función de los valores de dos parámetros "α" y "β".

4) Obtendremos unas ecuaciones cartesianas de L(H) al eliminar los parámetros α y β en las ecuaciones paramétricas:

de la 4ª ec. despejamos "β" $(\beta = x_4)$ y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

de la 3ª ec. despejamos "α" $(\alpha = x_3)$ y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow L(H) = \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \middle/ \begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

O sea, L(H) es el conjunto de las infinitas soluciones del siguiente SLH de 2 ecuaciones y 4 incógnitas:

$$x_1 - x_3 = 0 \ ; \ x_2 - x_4 = 0$$

- También podemos calcular unas ecuaciones cartesianas de L(H) así: si $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ forman una base de L(H) y $\overline{x} \in L(H)$, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$ son LD; por tanto, la matriz cuyas columnas son $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$ debe tener rango 2:

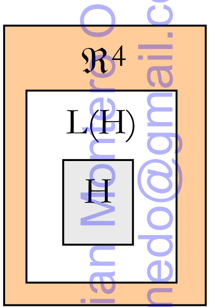
$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - x_3 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

FONEMATO 4.2.3

Sea $H = \{\overline{h}_1 = (0;0;1;1), \overline{h}_2 = (1;1;0;1), \overline{h}_3 = (1;0;0;0)\} \subset \Re^4$.

Determine la dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de la variedad lineal engendrada por "H".

SOLUCIÓN



- La variedad lineal L(H) engendrada por $H \subset \Re^4$ es el subespacio formado por los vectores de $\Re^4$ que pueden obtenerse combinando linealmente los vectores de "H":

$$L(H) = \{\ \overline{x} \in \Re^4 \ / \ \overline{x} = \sum_{i=1}^{3} \theta_i \bullet \overline{h}_i, \theta_i \in \Re, \forall i = 1,2,3\ \}$$

- De "H" se dice que es un sistema de generadores de L(H).
- La dimensión de L(H) es el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en L(H), y coincide con el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "H", que coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H". Así:

$$\dim.(L(H)) = \operatorname{rg}\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{A} = 3$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{array}$$

- Como $\dim.L(H) = 3$, cualesquiera 3 vectores de L(H) que sean LI forman una base de L(H)... y como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI y forman una base de L(H).
- Obtendremos unas ecuaciones paramétricas de L(H) al expresar matemáticamente que todo vector de L(H) es CL de los vectores de una base de L(H); por ejemplo, la base que forman los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$:

$$\overline{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in L(H)\Rightarrow \overline{x}=\alpha\bullet\overline{h}_1+\beta\bullet\overline{h}_2+\lambda\bullet\overline{h}_3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4)=\alpha\bullet(0;0;1;1)+\beta\bullet(1;1;0;1)+\lambda\bullet(1;0;0;0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\beta+\lambda\\ x_2=\beta\\ x_3=\alpha\\ x_4=\alpha+\beta\end{cases}$$

- Obtendremos unas ecuaciones cartesianas de L(H) al eliminar los parámetros α,β y λ en las ecuaciones paramétricas:

de la 1ª ec. despejamos "λ" y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{matrix}x_1=\beta+\lambda\\ x_2=\beta\\ x_3=\alpha\\ x_4=\alpha+\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_2=\beta\\ x_3=\alpha\\ x_4=\alpha+\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_2=\beta\\ x_4=x_3+\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

de la 3ª ec.despejamos "α" $(\alpha=x_3)$ y sustituimos en las demás

de la 2ª ec. despejamos "β" $(\beta=x_2)$ y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow x_4=x_3+x_2\Rightarrow L(H)=\{\overline{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4\,/\,x_2+x_3-x_4=0\}$$

- También podemos calcular unas ecuaciones cartesianas de L(H) sin usar sus ecuaciones paramétricas: si $\overline{h}_1,\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ forman una base de L(H) y $\overline{x}\in L(H)$, los vectores $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{x}$ son LD; por tanto, la matriz "C" cuyas columnas son $\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3$ y $\overline{x}$ debe tener rango 3:

$$C=\begin{bmatrix}0&1&1&x_1\\0&1&0&x_2\\1&0&0&x_3\\1&1&0&x_4\end{bmatrix}$$

Siendo no nulo el menor de orden 3 indicado, es $rg(C)=3$ si $|C|=0$:

$$|C|=0\Rightarrow x_2+x_3-x_4=0$$

Recuerda

Para denotar la variedad lineal o subespacio L(H) engendrado al hacer combinaciones lineales con los vectores $\overline{h}_1,\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ que forman el conjunto "H", también escribimos $<\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3>$; o sea:.

$$L(H)\equiv<\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3>$$

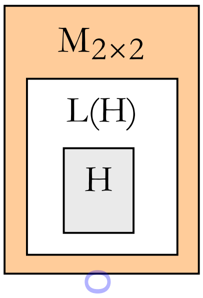
Además, dicha variedad también se llama cápsula lineal o envoltura lineal del conjunto "H".

FONEMATO 4.2.4

Sea $H = \{ \ \bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \bar{h}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \ \} \subset M_{2\times 2}$.

Determine la dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de la variedad lineal engendrada por "H".

SOLUCIÓN



- La variedad lineal L(H) engendrada por $H \subset M_{2\times 2}$ es el subespacio formado por los vectores de $M_{2\times 2}$ que pueden obtenerse combinando linealmente los vectores de "H":

$$L(H) = \{ \ \bar{x} \in M_{2\times 2} \ / \ \bar{x} = \sum_{i=1}^{4} \theta_i \bullet \bar{h}_i, \theta_i \in \mathfrak{R}, \forall i = 1,2,3,4 \ \}$$

- De "H" se dice que es un sistema de generadores de L(H).

- La dimensión de L(H) es el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en L(H), y coincide con el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "H", que coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H". Así:

$$\dim.(L(H)) = \operatorname{rg} \overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \end{bmatrix}}^{A} = 2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \bar{h}_4 \end{matrix}$$

asimilamos $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ a $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathfrak{R}^4$

- Como $\dim. L(H) = 2$, cualesquiera 2 vectores de L(H) que sean LI forman una base de L(H)... y como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ son LI y forman una base de L(H).

- Obtendremos unas ecuaciones paramétricas de L(H) al expresar matemáticamente que todo vector de L(H) es CL de los vectores de una base de L(H); por ejemplo, la base que forman los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in L(H) \Rightarrow \bar{x} = \alpha \bullet \bar{h}_1 + \beta \bullet \bar{h}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1; x_2; x_3; x_4) = \alpha \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases}$$

- **Obtendremos unas ecuaciones cartesianas de L(H) al eliminar los parámetros** en las ecuaciones paramétricas:

de la 1ª ec. despejamos "α" ($\alpha = x_1$) y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha + \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = x_1 + \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_3 = x_2 \\ x_4 = x_1 + x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

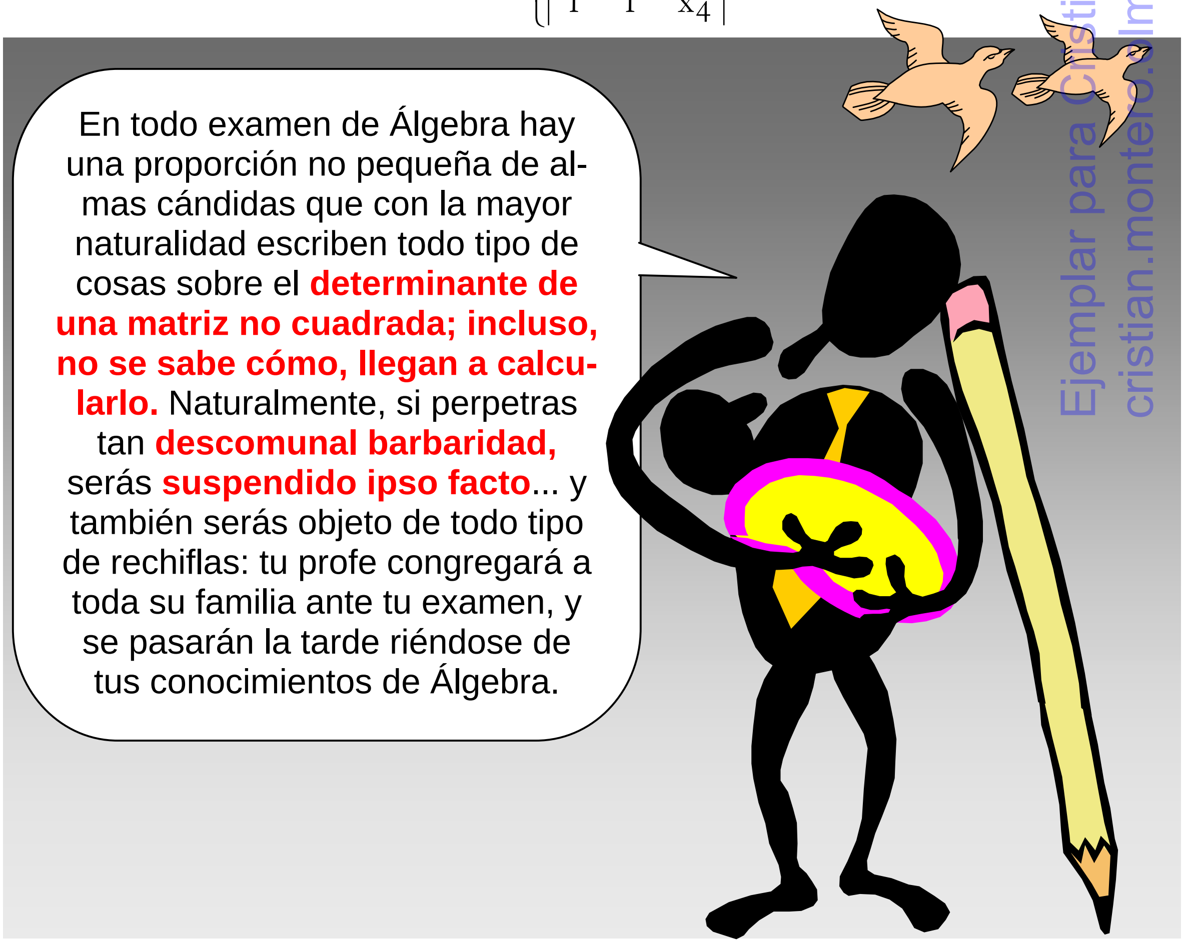
de la 1ª ec. despejamos "β" ($\beta = x_2$) y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(H) = \left\{ \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \middle/ \begin{array}{r} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

- **También podemos calcular unas ecuaciones cartesianas de L(H) sin usar sus ecuaciones paramétricas:** si $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ forman una base de L(H) y $\bar{x} \in L(H)$, los vectores $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{x}$ son LD; por tanto, la matriz cuyas columnas son dichos vectores debe tener rango 2:

$$\text{rg}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = x_2 - x_3 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$



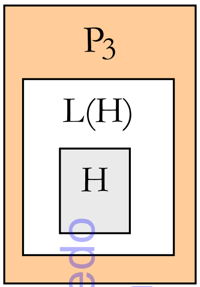
FONEMATO 4.2.5

En el espacio vectorial P_3 de los polinomios de grado no superior a 3, sea "H" el conjunto formado por los vectores:

$$\bar{h}_1 = 1 + t^3,\ \bar{h}_2 = t + t^2 + t^3,\ \bar{h}_3 = 1 + t + t^2 + t^3,\ \bar{h}_4 = 2 + t + t^2 + 3.t^3$$

Determine la dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de la variedad lineal engendrada por "H".

SOLUCIÓN



- La variedad lineal L(H) engendrada por $H \subset P_3$ es el subespacio formado por los vectores de P_3 que pueden obtenerse combinando linealmente los vectores de "H":

$$L(H) = \{\ \bar{x} \in P_3 \ / \ \bar{x} = \sum_{i=1}^{4} \theta_i \bullet \bar{h}_i,\ \theta_i \in \Re,\ \forall i = 1,2,3,4\ \}$$

- De "H" se dice que es un sistema de generadores de L(H).
- La dimensión de L(H) es el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en L(H) y coincide con el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en "H", que coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H". Así:

$$\dim.(L(H)) = \mathrm{rg}\ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \end{bmatrix}}^{A} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \bar{h}_4 \end{matrix} \end{array} = 2$$

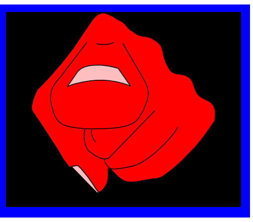
asimilamos $x_1 + x_2.t + x_3.t^2 + x_4.t^3 \in P_3$ a $(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4$

- Como dim.L(H) = 2, cualesquiera 2 vectores de L(H) que sean LI forman una base de L(H)... y como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ son LI y forman una base de L(H).
- Obtendremos unas ecuaciones paramétricas de L(H) al expresar que todo vector de L(H) es CL de los vectores de una base de L(H); por ejemplo, la base que forman los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$:

$$\bar{x} = x_1 + x_2.t + x_3.t^2 + x_4.t^3 \in L(H) \Rightarrow \bar{x} = \alpha \bullet \bar{h}_1 + \beta \bullet \bar{h}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4) = \alpha \bullet (1;0;0;1) + \beta \bullet (0;1;1;1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases}$$

En examen no hay que desaprovechar ninguna ocasión para acreditar que no somos del montón.



- Obtendremos unas ecuaciones cartesianas de L(H) al eliminar los parámetros en las ecuaciones paramétricas:

de la 1ª ec. despejamos "α" ($\alpha = x_1$) y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\alpha \\ x_2=\beta \\ x_3=\beta \\ x_4=\alpha+\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=\beta \\ x_3=\beta \\ x_4=x_1+\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_3=x_2 \\ x_4=x_1+x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2-x_4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

de la 1ª ec. despejamos "β" ($\beta = x_2$) y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow L(H)=\left\{\overline{x}=x_1+x_2.t+x_3.t^2+x_4.t^3 \in P_3 \Big/ \begin{array}{r} x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2-x_4=0 \end{array}\right\}$$

- También podemos calcular unas ecuaciones cartesianas de L(H) sin usar sus ecuaciones paramétricas: si $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ forman una base de L(H) y $\overline{x} \in L(H)$, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$ son LD; por tanto, la matriz cuyas columnas son $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$ debe tener rango 2:

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} & \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \end{array} \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = x_2-x_3=0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = x_1+x_2-x_4=0 \end{array}\right.$$

Compara este ejercicio con el anterior y saca tus propias conclusiones.

Recuerda:

Para denotar la variedad lineal o subespacio L(H) engendrado al hacer combinaciones lineales con los vectores (polinomios) $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ que forman el conjunto "H", también escribimos $<\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3, \overline{h}_4>$; o sea:.

$$L(H) \equiv <\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3, \overline{h}_4>$$

Además, dicha variedad también se llama **cápsula lineal o envoltura lineal** del conjunto "H".

QUE QUEDE MUY CLARO

Si $H^* = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$, la variedad lineal $L(H^*)$ engendrada por H^* es la misma que la engendrada por $H = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3, \overline{h}_4\}$, pues los vectores $\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$ son combinación lineal de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$; es decir, sucede que:

$$L(H) \equiv <\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3, \overline{h}_4> \equiv L(H^*) \equiv <\overline{h}_1, \overline{h}_2>$$

FONEMATO 4.2.6

Demuestre que $S=\left\{\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a+b & a \end{bmatrix},\ \forall a,b,c\in\Re\right\}$ es subespacio de $M_{2\times 3}$, calculando su dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas.

SOLUCIÓN

- Siendo $M_{2\times 3}=\left\{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix},\ x_i\in\Re,\ \forall i=1,2,\ldots,6\right\}$, lo que **caracteriza** a las matrices que forman "S" es que:

$$x_1=x_6\ ;\ x_3=0\ ;\ x_5=x_1+x_2\quad (\mathrm{I})$$

- Para demostrar que "S" es subespacio de $M_{2\times 3}$ debemos demostrar que:

$$\text{a) } \forall\,\bar{x},\bar{y}\in S \text{ ocurre que } \bar{x}+\bar{y}\in S$$
$$\text{b) } \forall\,\bar{x}\in S \text{ y } \forall\alpha\in\Re \text{ ocurre que } \alpha\bullet\bar{x}\in S$$

Veamos:

a) Si $\bar{x}=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a+b & a \end{bmatrix}\in S$ e $\bar{y}=\begin{bmatrix} d & e & 0 \\ f & d+e & d \end{bmatrix}\in S$, es:

$$\bar{x}+\bar{y}=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a+b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e & 0 \\ f & d+e & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+d & b+e & 0 \\ c+f & a+b+d+e & a+d \end{bmatrix}$$

El vector $\bar{x}+\bar{y}$ pertenece a "S", pues satisface las condiciones (I).

b) Si $\bar{x}=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a+b & a \end{bmatrix}\in S$ y $\alpha\in\Re$, es $\alpha\bullet\bar{x}=\begin{bmatrix} \alpha.a & \alpha.b & 0 \\ \alpha.c & \alpha.(a+b) & \alpha.a \end{bmatrix}$.

El vector $\alpha\bullet\bar{x}$ pertenece a "S", pues satisface las condiciones (I).

- **El enunciado nos da unas ecuaciones paramétricas de "S",** pues al decir que

$$S=\left\{\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a+b & a \end{bmatrix},\ \forall a,b,c\in\Re\right\}$$

identifica a "S" dando el valor de los 6 componentes de cada vector de "S" en función de los valores de 3 parámetros reales "a", "b" y "c"; es como si dijera:

$$S=\left\{\bar{x}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}\in M_{2\times 3}\ \middle/\ \begin{matrix} x_1=a \\ x_2=b \\ x_3=0 \\ x_4=c \\ x_5=a+b \\ x_6=a \end{matrix}\right\}$$

pero con la diferencia de que esto último es bastante **más petardo** de escribir.

- Al **desagregar** los parámetros "a", "b" y "c", resulta:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a+b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=a\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_1}+b\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_2}+c\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_3}=$$

$$=a\bullet\bar{h}_1+b\bullet\bar{h}_2+c\bullet\bar{h}_3$$

que expresa que todo vector de "S" es CL de los vectores $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$. Así, el conjunto $H=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3\}$ es un SG del subespacio "S"; o sea, el subespacio que el enunciado denota "S" es la variedad lineal L(H) que engendra el conjunto $H=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3\}$; es decir:

$$S \equiv L(H) \equiv <\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3> = \left\{ \bar{x} \in M_{2\times 3} \,/\, \bar{x} = \sum_{i=1}^{3} \theta_i \bullet \bar{h}_i,\ \theta_i \in \Re,\ \forall i=1,2,3 \right\}$$

- La dimensión de "S" es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "S"... y como $S \equiv L(H)$, dicho número coincide con el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "H", que coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H"; así:

$$\text{dim.}(S) = \text{rg}\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} = 3$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \end{array}$$

$$\boxed{\text{asimilamos } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3} \text{ con } (x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6) \in \Re^6}$$

- Como $\text{dim.}(S)=3$, cualesquiera 3 vectores de "S" que sean LI forman una base de "S"... y como $\text{rg}(A)=3$, los vectores $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son LI y forman una base de "S".
- Obtendremos unas ecuaciones cartesianas de "S" al eliminar los parámetros "a", "b" y "c" en las ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{\text{de la } 6^{a} \text{ ec. despejamos "a" } (a = x_6) \text{ y sustituimos en las demás}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c \\ x_5 = a+b \\ x_6 = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_6 \\ x_2 = b \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c \\ x_5 = x_6 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_6 \\ x_2 = b \\ x_3 = 0 \\ x_5 = x_6 + b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{de la } 4^{a} \text{ ec. despejamos "c" } (c = x_4) \text{ y sustituimos en las demás}}$$

$$\boxed{\text{de la } 2^{a} \text{ ec. despejamos "b" } (b = x_2) \text{ y sustituimos en las demás}}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_6 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = x_6 + x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_6 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 - x_5 + x_6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \equiv L(H) = \left\{ \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3} \Bigg/ \begin{array}{l} x_1 - x_6 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 - x_5 + x_6 = 0 \end{array} \right\}$$

FONEMATO 4.2.7

Demuestre que $S=\{(a+b\,;2.a+b\,;a+3.b\,;0),\ \forall a,b\in\Re\}$ es subespacio vectorial de $\Re^4$, calculando su dimensión, una base y unas ecuaciones cartesianas.

SOLUCIÓN

- Para demostrar que "S" es subespacio de $\Re^4$, debemos demostrar que:

$$1)\ \forall\bar{x},\bar{y}\in S \text{ ocurre que } \bar{x}+\bar{y}\in S$$
$$2)\ \forall\bar{x}\in S \text{ y } \forall\alpha\in\Re \text{ ocurre que } \alpha\bullet\bar{x}\in S$$

Veamos:

1) Si $\bar{x}=(a+b\,;2.a+b\,;a+3.b\,;0)\in S$ e $\bar{y}=(c+d\,;2.c+d\,;c+3.d\,;0)\in S$, es:

$$\bar{x}+\bar{y}=(a+b\,;2.a+b\,;a+3.b\,;0)+(c+d\,;2.c+d\,;c+3.d\,;0)=$$
$$=(a+b+c+d\,;2.a+b+2.c+d\,;a+3.b+c+3.d\,;0)=$$
$$=(\theta+\lambda\,;2.\theta+\lambda\,;\theta+3.\lambda\,;0)\in S$$

$$\boxed{\text{sin más que hacer } a+c\equiv\theta \text{ y } b+d\equiv\lambda}$$

2) Si $\bar{x}=(a+b\,;2.a+b\,;a+3.b\,;0)\in S$ y $\alpha\in\Re$, es:

$$\alpha\bullet\bar{x}=\alpha\bullet(a+b\,;2.a+b\,;a+3.b\,;0)=$$
$$=(\alpha.a+\alpha.b\,;2.\alpha.a+\alpha.b\,;\alpha.a+3.\alpha.b\,;0)=(\delta+\gamma\,;2.\delta+\gamma\,;\delta+3.\gamma\,;0)\in S$$

$$\boxed{\text{sin más que hacer } \alpha.a\equiv\delta \text{ y } \alpha.b\equiv\gamma}$$

- El enunciado nos da unas ecuaciones paramétricas de "S", pues cuando dice que $S=\{(a+b\,;2.a+b\,;a+3.b\,;0),\ \forall a,b\in\Re\}$, identifica al subespacio "S" expresando el valor de los 4 componentes de cada vector de "S" en función de los valores de 2 parámetros reales "a" y "b"; es como si dijera:

$$S=\left\{\bar{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \middle/ \begin{array}{l} x_1=a+b \\ x_2=2.a+b \\ x_3=a+3.b \\ x_4=0 \end{array}\right\}$$

pero con la diferencia de que esto último es bastante más petardo de escribir.

- Al desagregar los parámetros "a" y "b", resulta:

$$(a+b\,;2.a+b\,;a+3.b\,;0)=(a\,;2.a\,;a\,;0)+(b\,;b\,;3.b\,;0)=$$
$$=a\bullet\underbrace{(1\,;2\,;1\,;0)}_{\bar{h}_1}+b\bullet\underbrace{(1\,;1\,;3\,;0)}_{\bar{h}_2}=a\bullet\bar{h}_1+b\bullet\bar{h}_2$$

que expresa que todo vector de "S" es CL de $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$. Así, el conjunto $H=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$ es un SG de "S"; es decir, el subespacio que el enunciado denota "S" es la variedad lineal L(H) que engendra el conjunto $H=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$:

$$S\equiv L(H)\equiv<\bar{h}_1,\bar{h}_2>=\left\{\bar{x}\in\Re^4/\bar{x}=\sum_{i=1}^{2}\theta_i\bullet\bar{h}_i,\ \theta_i\in\Re,\ \forall i=1,2\right\}$$

- La dimensión de "S" es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "S"... y como $S\equiv L(H)$, dicho número coincide con el número má-

máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "H", que a su vez coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H"; así:

$$\dim.(S) = \text{rg}\overbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}}^{A} = 2$$

$$\begin{array}{cc}\uparrow & \uparrow\\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2\end{array}$$

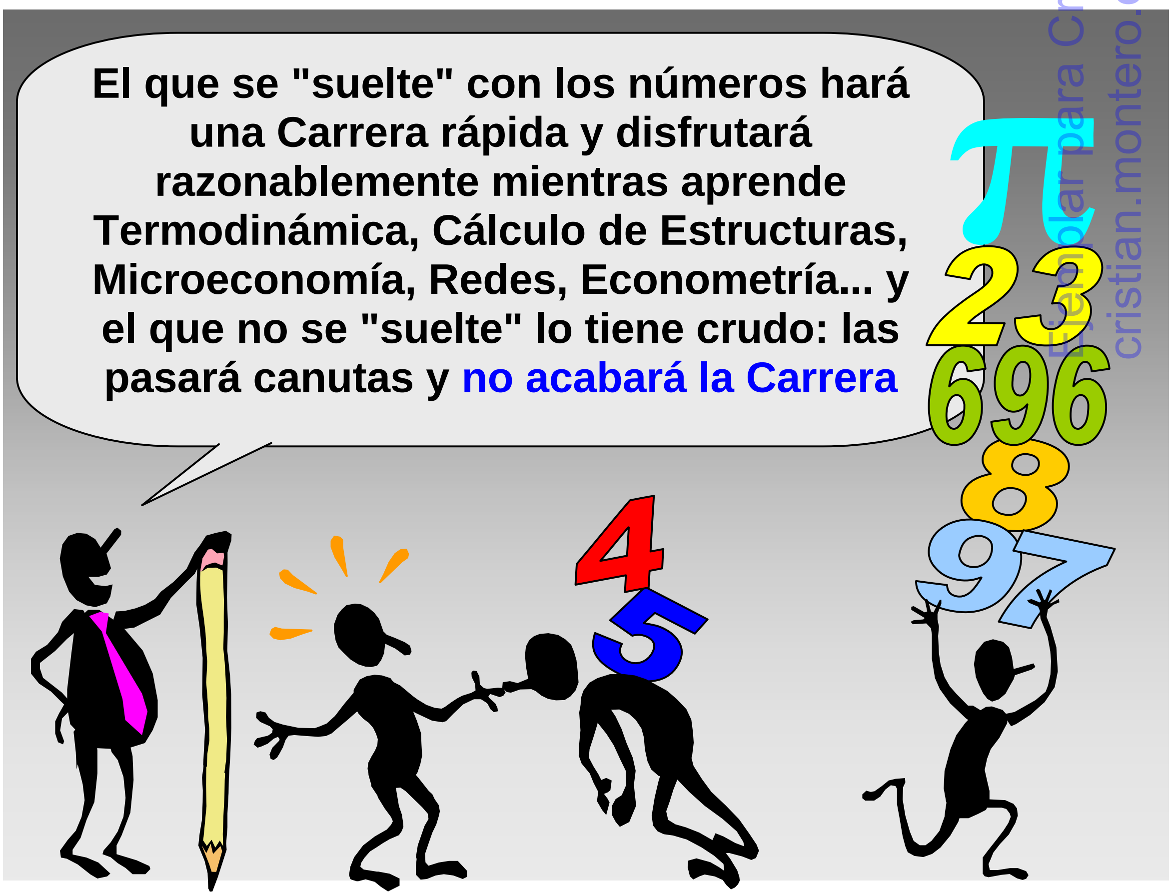
- Como $\dim.(S) = 2$, cualesquiera 2 vectores de "S" que sean LI forman base de "S"; y como $\text{rg}(A) = 2$, los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ son LI y forman base de "S".
- Obtendremos unas ecuaciones cartesianas de "S" al eliminar los parámetros "a", "b" y "c" en las ecuaciones paramétricas:

de la 1ª ecuación despejamos "a" $(a = x_1 - b)$ y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a + b\\ x_2 = 2.a + b\\ x_3 = a + 3.b\\ x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = 2.x_1 - b\\ x_3 = x_1 + 2.b\\ x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_3 = 5.x_1 - 2.x_2\\ x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

de la 1ª ecuación despejamos "b" $(b = 2.x_1 - x_2)$ y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow S \equiv L(H) = \left\{ \bar{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \Re^4 \middle/ \begin{array}{r} 5.x_1 - 2.x_2 - x_3 = 0\\ x_4 = 0 \end{array} \right\}$$



FONEMATO 4.2.8

En $\Re^4$, sea el subespacio $S = \{(b + c\,;a + 2.c\,;a + b + 3.c\,;a + 2.c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$
Determine la dimensión, una base y unas ecuaciones cartesianas de "S".
¿Pertenecen a "S" los vectores $\bar{u} = (2;3;8;3)$ y $\bar{v} = (2;5;7;5)$?

SOLUCIÓN

Al escribir $S = \{(b + c\,;a + 2.c\,;a + b + 3.c\,;a + 2.c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$, se **identifica** al subespacio "S" mediante **unas ecuaciones paramétricas** de él, pues se expresa el valor de los 4 componentes de cada vector de "S" en función de los valores de 3 parámetros reales "a", "b" y "c" ; es como si dijera:

$$S = \left\{ \bar{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \middle/ \begin{array}{l} x_1 = b + c \\ x_2 = a + 2.c \\ x_3 = a + b + 3.c \\ x_4 = a + 2.c \end{array} \right\}$$

- Al **desagregar** los parámetros "a", "b" y "c", resulta:

$$\begin{aligned} &(b + c\,;a + 2.c\,;a + b + 3.c\,;a + 2.c) = \\ &= (0\,;a\,;a\,;a) + (b\,;0\,;b\,;0) + (c\,;2.c\,;3.c\,;2.c) = \\ &= a \bullet \underbrace{(0\,;1\,;1\,;1)}_{\bar{h}_1} + b \bullet \underbrace{(1\,;0\,;1\,;0)}_{\bar{h}_2} + c \bullet \underbrace{(1\,;2\,;3\,;2)}_{\bar{h}_3} = \\ &= a \bullet \bar{h}_1 + b \bullet \bar{h}_2 + c \bullet \bar{h}_3 \end{aligned}$$

que expresa que todo vector de "S" es CL de los vectores $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$; así, el conjunto $H = \{\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3\}$ es un **SG** del subespacio "S". Es decir, el subespacio que el enunciado denota "S" es la **variedad lineal** L(H) que engendra el conjunto $H = \{\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3\}$:

$$S \equiv L(H) \equiv <\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3> = \left\{ \bar{x} \in \Re^4 \,/\, \bar{x} = \sum_{i=1}^{3} \theta_i \bullet \bar{h}_i,\ \theta_i \in \Re,\ \forall i = 1,2,3 \right\}$$

- La dimensión de "S" es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "S"... y como $S \equiv L(H)$, dicho número coincide con el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "H", que a su vez coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H"; así:

$$\dim.(S) = rg \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^{A} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \end{array} \end{array} = 2$$

El astuto lector sin duda ha observado que cuando el enunciado dice que

$$S = \{(b + c\,;a + 2.c\,;a + b + 3.c\,;a + 2.c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$$

nos da unas ecuaciones paramétricas perversas de "S"... y decimos perversas porque tienen trampa, y tienen trampa porque en ellas hay 3 parámetros "a", "b" y "c", cuando, por ser $\dim.(S) = 2$, bastan 2 parámetros para identificar al subespacio "S". Dichos 2 parámetros son "a" y "b", pues ellos son los asociados a los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ que forman una base de "S".

De otro modo: es igual escribir

$$S = \{(b + c\,;a + 2.c\,;a + b + 3.c\,;a + 2.c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$$

que escribir $S = \{(b\,;a\,;a + b\,;a),\ \forall a,b \in \Re\}$.

Pregunta: ¿Por qué el enunciado es tan malvado?

Respuesta: Porque hay mucho pardillo suelto que al ver que en el conjunto $S = \{(b + c\,;a + 2.c\,;a + b + 3.c\,;a + 2.c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$ hay 3 parámetros, dice que $\dim.(S) = 3 \Rightarrow$ suspenso ipso facto.

- Como $\dim.(S) = 2$, cualesquiera 2 vectores de "S" que sean LI forman una base de "S"... y como el menor de orden 2 indicado es no nulo, $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son LI y forman una base de "S".

Observa: si $H^* = \{\overline{h}_1,\overline{h}_2\}$, la variedad lineal $L(H^*)$ engendrada por H^* es la misma que la engendrada por $H = \{\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3\}$, pues $\overline{h}_3$ es combinación lineal de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$; es decir, $S \equiv L(H) \equiv L(H^*) \equiv <\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3> \equiv <\overline{h}_1,\overline{h}_2>$.

- Obtendremos unas ecuaciones cartesianas de "S" al eliminar los parámetros "a" y "b" en las ecuaciones paramétricas... y como no somos gilipollas, en ellas no escribimos el parámetro "c" asociado al vector $\overline{h}_3$, pues $\overline{h}_3$ no forma parte de la base del subespacio "S":

de la 1ª ec. despejamos "b" $(b = x_1)$ y sustituimos en las demás

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b \\ x_2 = a \\ x_3 = a + b \\ x_4 = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = a \\ x_3 = a + x_1 \\ x_4 = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_3 = x_2 + x_1 \\ x_4 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

de la 1ª ec. despejamos "a" $(a = x_2)$ y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow S \equiv L(H) = \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \Big/ \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

- El vector $\overline{u} = (2;3;8;3)$ no pertenece a "S", pues no satisface las ecuaciones cartesianas de éste; o sea, $\overline{u} = (2;3;8;3)$ no es solución de dicho sistema de ecuaciones, ya que $2 + 3 - 8 \neq 0$.
- El vector $\overline{v} = (2;5;7;5)$ pertenece a "S", pues satisface las ecuaciones cartesianas de éste; o sea, $\overline{v} = (2;5;7;5)$ es solución de dicho sistema:

$$2 + 5 - 7 = 0 \quad ; \quad 5 - 5 = 0$$

FONEMATO 4.2.9

Demuestre que el subconjunto de $M_{2\times 2}$ que forman las matrices que conmutan con $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}$. Determine su dimensión y una base.

SOLUCIÓN

Bauticemos a los protagonistas de la historia: siendo $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, sea:

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \,/\, X \bullet C = C \bullet X \right\}$$

- Para demostrar que "S" es subespacio de $M_{2\times 2}$ debemos demostrar que:

  a) $\forall\ X, Y \in S$ ocurre que $X + Y \in S$

  b) $\forall\ X \in S$ y $\forall \alpha \in \Re$ ocurre que $\alpha \bullet X \in S$

  Veamos:

  a) Si $X, Y \in S$ es $X \bullet C = C \bullet X$ e $Y \bullet C = C \bullet Y$. Para demostrar que el vector $X + Y$ hay que demostrar que $X + Y$ conmuta con "C", como en efecto sucede:

  $$(X+Y) \bullet C = X \bullet C + Y \bullet C = C \bullet X + C \bullet Y = C \bullet (X+Y)$$

  $$\boxed{X \bullet C = C \bullet X \ ;\ Y \bullet C = C \bullet Y}$$

  b) Sea $X \in S$ ($\Rightarrow X \bullet C = C \bullet X$) y $\alpha \in \Re$. Para demostrar que $\alpha \bullet X \in S$ debemos demostrar que $\alpha \bullet X$ conmuta con "C", como en efecto sucede:

  $$(\alpha \bullet X) \bullet C = \alpha \bullet (X \bullet C) = \alpha \bullet (C \bullet X) = C \bullet (\alpha \bullet X)$$

  $$\boxed{X \bullet C = C \bullet X}$$

- Las cartesianas de "S" las obtenemos al exigir que "X" conmute con "C":

$$S = \left\{\ X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \,/\, X \bullet C = C \bullet X\ \right\} =$$

$$= \left\{\ X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \Big/ \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_4 - x_1 = 0 \end{matrix}\ \right\}$$

VENTANA

$$X \bullet C = C \bullet X \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_2 \\ x_3 + x_4 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_2 \\ x_3 + x_4 & x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_4 - x_1 & -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 - x_1 = 0 \end{cases}$$

- Como sabemos, conocidas unas ecuaciones cartesianas de "S", para calcular la dimensión de "S" aplicamos la famosa formulita:

$$\dim.(S) = \dim.(M_{2\times 2}) - \text{n}^{\text{o}} \text{ de ecuaciones cartesianas independientes de "S"}$$

Como el número de ecuaciones cartesianas independientes del SLH que define a "S" coincide con el rango de la matriz "A" de los coeficientes del sistema, se tiene que $\dim.(S) = \dim.(M_{2\times 2}) - rg(A)$; o sea:

$$\dim.(S) = 4 - rg\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{A} = 4 - 2 = 2$$

- Como $\dim.(S) = 2$, cualesquiera 2 vectores de "S" que sean LI forman una base de "S"... y como cada vector de "S" es un solución del SLH que define a "S", para encontrar una base de "S" basta encontrar 2 soluciones del SLH que sean LI: como el menor de orden 2 indicado es no nulo, parametrizamos x_3 y x_4, resultando $x_2 = 0$ y $x_1 = x_4$; por tanto:

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \Big/ \begin{matrix} x_1 = \beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{matrix} \; ; \; \forall \alpha, \beta \in \Re \right\}$$

O así:

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \Re \right\} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \Re \right\} =$$

$$= \left\{ X = \alpha \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_1} + \beta \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_2}, \forall \alpha, \beta \in \Re \right\}$$

Los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ son LI y forman una base de "S", lo que quiere decir que todo vector del subespacio "S" (toda matriz cuadrada de orden 2 que conmute con "C") es CL de $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$.

Naturalmente, es:

$$S \equiv < \bar{h}_1, \bar{h}_2 >$$

FONEMATO 4.2.10

Demuestre que $S=\left\{\begin{bmatrix} a & b & 4 \\ c & a+b & a \end{bmatrix},\ \forall a,b,c\in\Re\right\}$ es subespacio de $M_{2\times 3}$.

SOLUCIÓN

- Siendo

$$M_{2\times 3}=\left\{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix},\ x_i\in\Re,\ \forall i=1,2,\dots,6\right\}$$

lo que caracteriza a todas las matrices (vectores) que forman "S" es que:

$$x_1=x_6\ ;\ x_3=4\ ;\ x_5=x_1+x_2 \quad (\text{I})$$

- Para demostrar que "S" es subespacio de $M_{2\times 3}$ debemos demostrar que:

1) $\forall \bar{x},\bar{y}\in S$ ocurre que $\bar{x}+\bar{y}\in S$
2) $\forall \bar{x}\in S$ y $\forall \alpha\in\Re$ ocurre que $\alpha\bullet\bar{x}\in S$

Veamos:

1) Si $\bar{x}=\begin{bmatrix} a & b & 4 \\ c & a+b & a \end{bmatrix}\in S$ e $\bar{y}=\begin{bmatrix} d & e & 4 \\ f & d+e & d \end{bmatrix}\in S$, es:

$$\bar{x}+\bar{y}=\begin{bmatrix} a & b & 4 \\ c & a+b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e & 4 \\ f & d+e & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+d & b+e & 8 \\ c+f & a+b+d+e & a+d \end{bmatrix}$$

El vector $\bar{x}+\bar{y}$ no pertenece a "S", pues no satisface las condiciones (I); en consecuencia, el conjunto "S" no es subespacio de $M_{2\times 3}$.

FONEMATO 4.2.11

Sea "S" el subconjunto de $M_{2\times 2}$ que forman las matrices simétricas. Demuestre que "S" es un subespacio de $M_{2\times 2}$, calculando su dimensión y una base.

SOLUCIÓN

- Para demostrar que "S" es subespacio de $M_{2\times 2}$ debemos demostrar que:

$$\text{a) } \forall\ X,Y \in S \text{ ocurre que } X+Y \in S$$
$$\text{b) } \forall\ X \in S \text{ y } \forall \alpha \in \Re \text{ ocurre que } \alpha \bullet X \in S$$

  La demostración es una gilipollez, pues todo el mundo sabe que la suma de dos matrices simétricas es una matriz simétrica, y también sabe que el producto de un escalar o número real por una matriz simétrica es una matriz simétrica. Por tanto, "S" es subespacio de $M_{2\times 2}$.

- Siendo $S = \left\{X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \,/\, x_2 - x_3 = 0\right\}$ el conjunto de las matrices simétricas de orden 2, se tiene que:

$$\dim.(S) = \dim.(M_{2\times 2}) - \text{n}^\text{o} \text{ de ec. cart. independ. de "S"} =$$
$$= 4 - \text{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} = 4 - 1 = 3$$

- Como $\dim.(S) = 3$, cualesquiera 3 vectores de "S" que sean LI forman una base de "S"... y como cada vector de "S" es un solución del SLH que define a "S", para encontrar una base de "S" basta encontrar 3 soluciones LI de dicho SLH; a tal fin, calcularemos las infinitas soluciones del SLH y seleccionaremos 3 soluciones LI: como el menor de orden 1 indicado en "A" es no nulo parametrizamos x_1, x_3 y x_4. Resulta $x_2 = x_3$; por tanto:

$$S = \left\{X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \Bigg/ \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \lambda \end{array} ;\ \forall \alpha,\beta,\lambda \in \Re\right\}$$

  o también:

$$S = \left\{X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \lambda \end{bmatrix},\ \forall \alpha,\beta,\lambda \in \Re\right\} =$$
$$= \left\{X = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},\ \forall \alpha,\beta,\lambda \in \Re\right\} =$$
$$= \left\{X = \alpha \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_1} + \beta \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_2} + \lambda \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_3},\ \forall \alpha,\beta,\lambda \in \Re\right\}$$

  Los vectores $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son LI y forman una base de "S"; así, toda matriz simétrica de orden 2 (vector del subespacio "S") es CL de $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$. Naturalmente, es:

$$S \equiv < \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3 >$$

FONEMATO 4.2.12

En el espacio vectorial P_3 formado por los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 3, se considera el conjunto "S" definido como:

$$S = \left\{ (a+b+2.c).x^3 + (a+c).x^2 + b.x,\ \ \forall a,b,c \in \Re \right\}$$

Demuestre que "S" es subespacio de P_3, calculando su dimensión y una base.

SOLUCIÓN

Para demostrar que "S" es subespacio de P_3 debemos demostrar que:

$$\text{a) } \forall \bar{p}, \bar{q} \in S \text{ ocurre que } \bar{p}+\bar{q} \in S$$
$$\text{b) } \forall \bar{p} \in S \text{ y } \forall \alpha \in \Re \text{ ocurre que } \alpha \bullet \bar{p} \in S$$

Veamos:

a) Sea $\bar{p} = (a+b+2.c).x^3 + (a+c).x^2 + b.x \in S$.

Sea $\bar{q} = (d+e+2.f).x^3 + (d+f).x^2 + e.x \in S$.

Es:

$$\bar{p}+\bar{q} = (a+b+2.c+d+e+2.f).x^3 + (a+c+d+f).x^2 + (b+e).x =$$
$$= (\theta+\beta+2.\lambda).x^3 + (\theta+\lambda).x^2 + \beta.x \in S$$

$$\boxed{\text{hacemos } a+d \equiv \theta,\ b+e \equiv \beta \text{ y } c+f \equiv \lambda}$$

b) Si $\bar{p} = (a+b+2.c).x^3 + (a+c).x^2 + b.x \in S$ y $\alpha \in \Re$, entonces:

$$\alpha \bullet \bar{p} = \alpha.(a+b+2.c).x^3 + \alpha.(a+c).x^2 + \alpha.b.x =$$
$$= (\delta+\eta+2.\varepsilon).x^3 + (\delta+\varepsilon).x^2 + \eta.x \in S$$

$$\boxed{\text{ahora hacemos } \alpha.a \equiv \delta,\ \alpha.b \equiv \eta \text{ y } \alpha.c \equiv \varepsilon}$$

- Al escribir $S = \left\{ (a+b+2.c).x^3 + (a+c).x^2 + b.x,\ \forall a,b,c \in \Re \right\}$ se identifica al subespacio "S" mediante unas ecuaciones paramétricas de él, pues damos el valor de los 4 coeficientes de cada polinomio (vector) de "S" en función de los valores de 3 parámetros reales "a", "b" y "c"; es como si dijera:

$$S = \left\{ \bar{p} = z_1.x^3 + z_2.x^2 + z_3.x + z_4 \in P_3 \ \middle/ \ \begin{array}{l} z_1 = a+b+2.c \\ z_2 = a+c \\ z_3 = b \\ z_4 = 0 \end{array} \right\}$$

- Al desagregar los parámetros "a", "b" y "c", resulta:

$$\bar{p} = (a+b+2.c).x^3 + (a+c).x^2 + b.x =$$
$$= (a.x^3 + a.x^2) + (b.x^3 + b.x) + (2.c.x^3 + c.x^2) =$$
$$= a \bullet \underbrace{(x^3+x^2)}_{\bar{h}_1} + b \bullet \underbrace{(x^3+x)}_{\bar{h}_2} + c \bullet \underbrace{(2.x^3+x^2)}_{\bar{h}_3} = a \bullet \bar{h}_1 + b \bullet \bar{h}_2 + c \bullet \bar{h}_3$$

que expresa que todo vector de "S" es CL de los vectores $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$; así, el conjunto $H = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3\}$ es un SG del subespacio "S". Es decir, el subespacio que el enunciado llama "S" es la **variedad lineal** L(H) que engendra el conjunto $H = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$:

$$S \equiv L(H) = \left\{ \overline{p} \in P_3 \,/\, \overline{p} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \bullet \overline{h}_i,\ \ \omega_i \in \Re,\ \forall i = 1,2,3 \right\}$$

- La dimensión de "S" es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "S".... y como $S \equiv L(H)$, dicho número coincide con el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "H", que a su vez coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "H"; así:

$$\dim.(S) = rg \overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}}^{A} = 3$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{matrix}$$

asimilamos $z_1.x^3 + z_2.x^2 + z_3.x + z_4 \in P_3$ con $(z_1;z_2;z_3;z_4) \in \Re^4$

- Como $\dim.(S) = 3$, cualesquiera 3 vectores de "S" que sean LI forman una base de "S"... y como $rg(A) = 3$, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son LI y forman una base de "S".

Naturalmente, es:

$$S \equiv < \overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3 >$$

FONEMATO 4.2.13

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 3, y "S" un subespacio de "V".
Sean $B_1 = \{\bar{h}_1 = (1;1;0), \bar{h}_2 = (1;0;1)\}$ y $B_2 = \{\bar{d}_1 = (5;2;3), \bar{d}_2 = (9;4;5)\}$ sendas bases de "S".

1) Determine la ecuación del cambio de base $B_1 \to B_2$.

2) Determine las coordenadas respecto de B_1 del vector $\bar{u} = 2 \bullet \bar{d}_1 + 5 \bullet \bar{d}_2$.

3) Determine las coordenadas respecto de B_2 del vector $\bar{v} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2$.

SOLUCIÓN

1) En general, si "S" es un espacio vectorial de dimensión "n", la **estructura** de la ecuación del cambio de base $B_{vieja} \to B_{nueva}$ es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\text{coordenadas de } \bar{k} \in S \text{ respecto de la base "vieja"}} = \begin{bmatrix} & & \\ & A_{n\times n} & \\ & & \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\text{coordenadas de } \bar{k} \in S \text{ respecto de la base "nueva"}}$$

donde las columnas de "A" son las coordenadas que respecto de la base **vieja** tienen los vectores de la base **nueva.** En nuestro caso es $n = 2$ (pues las bases de "S" están formadas por 2 vectores), y como piden la ecuación del cambio $B_1 \to B_2$, la base **vieja** es $B_1 = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ y la **nueva** es $B_2 = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$; así, si $\bar{k}$ es un vector cualquiera de "S" tal que:

$$\bar{k} = x_1 \bullet \bar{h}_1 + x_2 \bullet \bar{h}_2 \;\; ; \;\; \bar{k} = y_1 \bullet \bar{d}_1 + y_2 \bullet \bar{d}_2$$

la ecuación del cambio de base $B_1 \to B_2$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (I)$$

VENTANA

Las columnas de "A" son las coordenadas que respecto de la base **vieja** $B_1 = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ tienen los vectores $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ que forman la base **nueva...** y estas coordenadas son fáciles de obtener con lo que dice el enunciado, sin más que resolver 2 sistemas lineales de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\bar{d}_1 = \alpha \bullet \bar{h}_1 + \beta \bullet \bar{h}_2 \Rightarrow (5;2;3) = \alpha \bullet (1;1;0) + \beta \bullet (1;0;1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 5 = \alpha + \beta \\ 2 = \alpha \\ 3 = \beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{d}_1 = 2 \bullet \bar{h}_1 + 3 \bullet \bar{h}_2$$

$$\bar{d}_2 = \alpha \bullet \bar{h}_1 + \beta \bullet \bar{h}_2 \Rightarrow (9;4;5) = \alpha \bullet (1;1;0) + \beta \bullet (1;0;1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 9 = \alpha + \beta \\ 4 = \alpha \\ 5 = \beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 4 \\ \beta = 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{d}_2 = 4 \bullet \bar{h}_1 + 5 \bullet \bar{h}_2$$

2) El enunciado identifica al vector $\bar{u}$ dándonos sus coordenadas respecto de la base $B_2 = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$, pues dice que $\bar{u} = 2 \bullet \bar{d}_1 + 5 \bullet \bar{d}_2$. Al sustituir en (I) obtendremos las coordenadas de $\bar{u}$ respecto de la base $B_1 = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 31 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{u} = 24 \bullet \bar{h}_1 + 31 \bullet \bar{h}_2$$

3) El enunciado identifica al vector $\bar{v}$ dándonos sus coordenadas respecto de la base $B_1 = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$, pues dice que $\bar{v} = 1 \bullet \bar{h}_1 + 1 \bullet \bar{h}_2$. Al sustituir en (I) obtendremos las coordenadas de $\bar{v}$ respecto de la base $B_2 = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \ldots$$

FONEMATO 4.2.14

Sea "S" el subespacio de $\Re^3$ cuyas ecuaciones cartesianas respecto de la base $B=\{\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3\}$ son $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1-x_3=0$. Determine las ecuaciones cartesianas de "S" respecto de la base $B*=\{\overline{h}_1-\overline{h}_2,\overline{h}_2-\overline{h}_3,\overline{h}_3\}$.

SOLUCIÓN

Para que los vectores de la base $B*$ no se depriman, los **bautizamos:**

$$\overline{d}_1=\overline{h}_1-\overline{h}_2\ ;\ \overline{d}_2=\overline{h}_2-\overline{h}_3\ ;\ \overline{d}_3=\overline{h}_3$$

Matricialmente, el sistema de cartesianas de "S" es:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{W} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

Al decir que las cartesianas están referidas a la base $B=\{\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3\}$, debemos considerar que x_1,x_2 y x_3 son las coordenadas que respecto de esa base tiene un vector genérico $\overline{k}$ del subespacio; o sea:

$$\overline{k}=x_1\bullet\overline{h}_1+x_2\bullet\overline{h}_2+x_3\bullet\overline{h}_3$$

Si z_1,z_2 y z_3 son las coordenadas de $\overline{k}$ respecto de la base $B*=\{\overline{d}_1,\overline{d}_2,\overline{d}_3\}$, o sea, si $\overline{k}=z_1\bullet\overline{d}_1+z_2\bullet\overline{d}_2+z_3\bullet\overline{d}_3$, la ecuación que relaciona x_1,x_2 y x_3 con z_1,z_2 y z_3 es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

Como sabemos, las columnas de la matriz "A" son las coordenadas que respecto de la base $B=\{\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3\}$ tienen los vectores de la base $B*=\{\overline{d}_1,\overline{d}_2,\overline{d}_3\}$... y el enunciado **maternal** nos las da:

$$\overline{d}_1=1\bullet\overline{h}_1-1\bullet\overline{h}_2+0\bullet\overline{h}_3$$
$$\overline{d}_2=0\bullet\overline{h}_1+1\bullet\overline{h}_2-1\bullet\overline{h}_3$$
$$\overline{d}_3=0\bullet\overline{h}_1+0\bullet\overline{h}_2+1\bullet\overline{h}_3$$

VENTANA

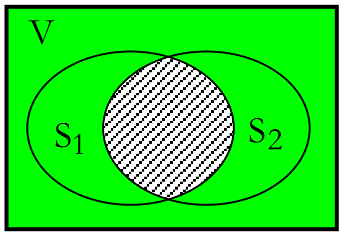
Sustituyendo (II) en (I) obtendremos las ecuaciones cartesianas de "S" respecto de la base $B*=\{\overline{d}_1,\overline{d}_2,\overline{d}_3\}$:

$$W\bullet\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W\bullet A\bullet\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_3=0 \\ z_1+z_2-z_3=0 \end{cases}$$

$$\boxed{W\bullet A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

4.3 INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS

- Si S_1 y S_2 son subespacios del espacio vectorial "V", su **intersección** se denota $S_1 \cap S_2$, y es el conjunto que forman los vectores de "V" que a la vez pertenecen a S_1 y a S_2:



$$S_1 \cap S_2 = \{ \ \overline{p} \in V \ / \ \overline{p} \in S_1 \text{ y } \overline{p} \in S_2 \ \}$$

O sea, la intersección de dos subespacios del espacio vectorial "V" es la intersección corriente y moliente de conjuntos.

- **La intersección de dos subespacios de "V" es un subespacio de "V",** y para demostrarlo debemos demostrar que:

$$\text{a) } \forall \overline{p}, \overline{q} \in S_1 \cap S_2 \text{ ocurre que } \overline{p} + \overline{q} \in S_1 \cap S_2$$
$$\text{b) } \forall \overline{p} \in S_1 \cap S_2 \text{ y } \forall \alpha \in \Re \text{ ocurre que } \alpha \bullet \overline{p} \in S_1 \cap S_2$$

Veamos:

a) Sea $\overline{p} \in S_1 \cap S_2$; por tanto $\overline{p} \in S_1$ y $\overline{p} \in S_2$.
Sea $\overline{q} \in S_1 \cap S_2$; por tanto $\overline{q} \in S_1$ y $\overline{q} \in S_2$.
Como $\overline{p}, \overline{q} \in S_1$ y S_1 es subespacio, apostamos la vida a que $\overline{p} + \overline{q} \in S_1$.
Como $\overline{p}, \overline{q} \in S_2$ y S_2 es subespacio, apostamos la vida a que $\overline{p} + \overline{q} \in S_2$.
Como $\overline{p} + \overline{q} \in S_1$ y $\overline{p} + \overline{q} \in S_2$, es obvio que $\overline{p} + \overline{q} \in S_1 \cap S_2$.

b) Sea $\overline{p} \in S_1 \cap S_2$; por tanto $\overline{p} \in S_1$ y $\overline{p} \in S_2$. Sea $\alpha \in \Re$.
Si $\overline{p} \in S_1$ y $\alpha \in \Re$, como S_1 es subespacio, es seguro que $\alpha \bullet \overline{p} \in S_1$.
Si $\overline{p} \in S_2$ y $\alpha \in \Re$, como S_2 es subespacio, es seguro que $\alpha \bullet \overline{p} \in S_2$.
Como $\alpha \bullet \overline{p} \in S_1$ y $\alpha \bullet \overline{p} \in S_2$, es obvio que $\alpha \bullet \overline{p} \in S_1 \cap S_2$.

Para **determinar el subespacio intersección de dos subespacios dados** S_1 y S_2 calculas unas ecuaciones cartesianas de cada uno de ellos y después las reúnes; así obtendrás un sistema de ecuaciones cartesianas de $S_1 \cap S_2$ ... a partir de dicho sistema de cartesianas, trabajando como ya sabes, podrás obtener la dimensión y una base de $S_1 \cap S_2$... y si el sistema de cartesianas de $S_1 \cap S_2$ sólo tiene la solución trivial entonces S_1 y S_2 sólo tienen en común el vector $\overline{0}$ y $S_1 \cap S_2$ tiene dimensión 0

4.4 SUMA DE SUBESPACIOS

- Si S_1 y S_2 son subespacios del espacio vectorial "V", la **suma** de S_1 y S_2 se denota $S_1 + S_2$, y se define:

$$S_1 + S_2 = \{\ \overline{p} \in V \,/\, \overline{p} = \overline{h} + \overline{d},\ \text{siendo } \overline{h} \in S_1 \text{ y } \overline{d} \in S_2\ \}$$

O sea, $S_1 + S_2$ es el conjunto que forman los vectores de "V" que se obtienen al sumar un vector de S_1 y otro de S_2.

- **La suma de dos subespacios de "V" es subespacio de "V",** y para demostrarlo debemos demostrar que:

$$\text{a) } \forall \overline{p}, \overline{q} \in S_1 + S_2 \text{ ocurre que } \overline{p} + \overline{q} \in S_1 + S_2$$
$$\text{b) } \forall \overline{p} \in S_1 + S_2 \text{ y } \forall \alpha \in \Re \text{ ocurre que } \alpha \bullet \overline{p} \in S_1 + S_2$$

a) Sea $\overline{p} \in S_1 + S_2$; por tanto $\overline{p} = \overline{h}_1 + \overline{d}_1$, siendo $\overline{h}_1 \in S_1$ y $\overline{h}_2 \in S_2$.
Sea $\overline{q} \in S_1 + S_2$; por tanto $\overline{q} = \overline{h}_2 + \overline{d}_2$, siendo $\overline{h}_2 \in S_1$ y $\overline{h}_2 \in S_2$.
Como $\overline{h}_1, \overline{h}_2 \in S_1$ y S_1 es subespacio, es seguro que $\overline{h}_1 + \overline{h}_2 \in S_1$.
Como $\overline{d}_1, \overline{d}_2 \in S_2$ y S_2 es subespacio, es seguro que $\overline{d}_1 + \overline{d}_2 \in S_2$.
Así, $\overline{p} + \overline{q} = (\overline{h}_1 + \overline{d}_1) + (\overline{h}_2 + \overline{d}_2) = (\overline{h}_1 + \overline{h}_2) + (\overline{d}_1 + \overline{d}_2) \in S_1 + S_2$.

pues $\overline{p} + \overline{q}$ es suma de un vector de S_1 (el $\overline{h}_1 + \overline{h}_2$) y un vector de S_2 (el $\overline{d}_1 + \overline{d}_2$)

b) Sea $\overline{p} \in S_1 + S_2$ (por tanto $\overline{p} = \overline{h}_1 + \overline{d}_1$, siendo $\overline{h}_1 \in S_1$ y $\overline{d}_1 \in S_2$) y $\alpha \in \Re$.
Si $\overline{h}_1 \in S_1$ y $\alpha \in \Re$, como S_1 es subespacio, es seguro que $\alpha \bullet \overline{h}_1 \in S_1$.
Si $\overline{d}_1 \in S_2$ y $\alpha \in \Re$, como S_2 es subespacio, es seguro que $\alpha \bullet \overline{d}_1 \in S_2$.
Así, $\alpha \bullet \overline{p} = \alpha \bullet (\overline{h}_1 + \overline{d}_1) = \alpha \bullet \overline{h}_1 + \alpha \bullet \overline{d}_1 \in S_1 + S_2$.

pues $\alpha \bullet \overline{p}$ es suma de un vector de S_1 (el $\alpha \bullet \overline{h}_1$) y otro de S_2 (el $\alpha \bullet \overline{d}_1$)

Para **determinar la suma de los subespacios** S_1 y S_2, calculas una base de cada uno y las reúnes; así obtendrás un **SG** del subespacio $S_1 + S_2$ ...... a partir de dicho **SG,** trabajando como ya sabes, podrás obtener dimensión, base, paramétricas y cartesianas de $S_1 + S_2$. Puede ocurrir que $S_1 + S_2$ **coincida** con "V", y lo notarás porque, en tal caso, $S_1 + S_2$ tiene la misma dimensión que "V"; es decir, el SG de $S_1 + S_2$ es también SG de "V".

- Siempre sucede que:

$$\dim.(S_1) + \dim.(S_2) =$$
$$= \dim.(S_1 + S_2) + \dim.(S_1 \cap S_2)$$

MURPHY FOR PRESIDENT

- **Ley de Murphy**
  Si algo puede ir mal, irá mal.
- **Sexto lema de Murphy**
  Nada es tan fácil como parece.
- **Quinto teorema de Murphy**
  Si dejamos que las cosas marchen solas, irán de mal en peor.
- **Tercer axioma de Murphy**
  Cuando las cosas no pueden ser peores, empeoran.
- **Ley de Murphy multidimensional**
  Si una serie de acontecimientos pueden salir mal, lo harán en el peor orden posible.
- **Cuarto teorema de Murphy**
  Lo único que no se olvida es lo que se apunta.
- **Observación de Murphy**
  Para estimar el tiempo que requiere una tarea, estímese el tiempo que debería requerir, multiplíquese por dos y elévese la medición a la mayor unidad subsiguiente. Así, asignamos dos días para una tarea de una hora.
- **Segundo axioma de Murphy**
  Todo herror que pueda deslizarse no duda en acerlo.
- **Cuarto postulado de Murphy:**
  Sólo se hace bien lo que se ha practicado suficientemente.
- **Comentario de Fonemato**
  Murphy es muy optimista.

FONEMATO 4.4.1

En el espacio vectorial $\Re^4$, sea S_1 el subespacio engendrado por los vectores $\overline{h}_1 = (0;-1;1;1)$ y $\overline{h}_2 = (0;-1;0;1)$. Sea S_2 el subespacio tal que:

$$S_2 = \left\{ (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \;/\; \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

1) Determine la dimensión y una base de su intersección.
2) Determine la dimensión y una base de su suma.
3) Compruebe que el vector $\overline{w} = (2;-6;4;2)$ pertenece a la suma, expresándolo como suma de un vector de S_1 y otro de S_2.

SOLUCIÓN

1) El subespacio intersección de S_1 y S_2 se denota $S_1 \cap S_2$, siendo:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ \overline{p} \in \Re^4 \;/\; \overline{p} \in S_1 \text{ y } \overline{p} \in S_2 \right\}$$

- Identificaremos $S_1 \cap S_2$ mediante unas ecuaciones cartesianas de él, y para obtenerlas, reunimos unas cartesianas de S_1 y otras de S_2:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \Bigg/ \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

VENTANA

* El enunciado nos da unas cartesianas de S_2.
* Calculemos unas cartesianas de S_1:

$$\dim.(S_1) = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2, \text{ y } \{\overline{h}_1, \overline{h}_2\} \text{ es una base de } S_1$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 \end{matrix}$$

Así, si $\overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in S_1$, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{x}$ son LD; por tanto, el rango de la matriz "A" debe ser 2:

$$\operatorname{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ -1 & -1 & x_2 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & & \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{A} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- Es:

$$\dim.(S_1 \cap S_2) = \dim.(\Re^4) - \text{n}^\text{o} \text{ de ec. cart. indep. de } S_1 \cap S_2$$

O sea: $\qquad \dim.(S_1 \cap S_2) = 4 - \mathrm{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{W} = 4 - 3 = 1$

- Como $\dim.(S_1 \cap S_2) = 1$, todo vector de $S_1 \cap S_2$ que no sea el $\bar{0}$ es una base de $S_1 \cap S_2$... y como cada vector de $S_1 \cap S_2$ es una solución del SLH que define a $S_1 \cap S_2$, para encontrar una base de $S_1 \cap S_2$ basta encontrar una solución no trivial de dicho SLH: como el menor de orden 3 indicado en "W" es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos la incógnita x_4, pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones. Resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = -x_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 \cap S_2 = \{(0;-\alpha;0;\alpha),\ \forall \alpha \in \Re\} = \{\alpha \bullet (0;-1;0;1),\ \forall \alpha \in \Re\}$$

Por tanto, el vector $(0;-1;0;1)$ es una base de $S_1 \cap S_2$, lo que significa que todo vector de $S_1 \cap S_2$ es CL de $(0;-1;0;1)$.

También puedes determinar $S_1 \cap S_2$ exigiendo que un elemento genérico de uno de los subespacios pertenezca al otro subespacio.

Como $\bar{h}_1 = (0;-1;1;1)$ y $\bar{h}_2 = (0;-1;0;1)$ son una base de S_1, todo elemento de S_1 es CL de ellos:

$$\delta \bullet (0;-1;1;1) + \varepsilon \bullet (0;-1;0;1) = (0;-\delta-\varepsilon;\delta;\delta+\varepsilon) \in S_1$$

El vector $(0;-\delta-\varepsilon;\delta;\delta+\varepsilon) \in S_1$ pertenece también a

$$S_2 = \left\{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

si satisface las ecuaciones cartesianas de éste; o sea, si:

$$\left.\begin{array}{r} 0 + (-\delta-\varepsilon) + \delta + (\delta+\varepsilon) = 0 \\ 0 - \delta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = 0$$

Haciendo $\delta = 0$ en $(0;-\delta-\varepsilon;\delta;\delta+\varepsilon)$ obtenemos un elemento genérico del subespacio $S_1 \cap S_2$:

$$S_1 \cap S_2 = \{(0;-\varepsilon;0;\varepsilon),\ \forall \varepsilon \in \Re\} = \{\varepsilon \bullet (0;-1;0;1),\ \forall \alpha \in \Re\}$$

Por tanto, el vector $(0;-1;0;1)$ es una base de $S_1 \cap S_2$, lo que significa que todo vector de $S_1 \cap S_2$ es CL de $(0;-1;0;1)$.

2) El subespacio suma de S_1 y S_2 se denota $S_1 + S_2$, siendo:

$$S_1 + S_2 = \{\bar{p} \in \Re^4 \ / \ \bar{p} = \bar{h} + \bar{d};\ \bar{h} \in S_1,\ \bar{d} \in S_2\}$$

Como no nos chupamos el dedo, invertimos un segundo en determinar la dimensión de $S_1 + S_2$ mediante la formulita

$$\dim.(S_1) + \dim.(S_2) = \dim.(S_1 + S_2) + \dim.(S_1 \cap S_2)$$

y ello con la esperanza de que $\dim.(S_1 + S_2) = \dim.(\mathfrak{R}^4)$, pues en tal caso podremos apostar tranquilamente la vida a que la suma de S_1 y S_2 es $\mathfrak{R}^4$. Además, y eso es lo mejor, nos ahorraremos el petardo de calcular una base de S_1 y otra de S_2 para después reunirlas y así obtener un SG de $S_1 + S_2$.

- En nuestro caso, como $\dim.(S_1) = 2$, $\dim.(S_1 \cap S_2) = 1$ y

$$\dim.(S_2) = \dim.(\mathfrak{R}^4) - (\text{n}^\circ \text{ de ec. cart. indep. de } S_2) = 4 - 2 = 2$$

resulta ser $\dim.(S_1 + S_2) = 3$:

$$2 + 2 = (\dim.(S_1 + S_2)) + 1 \Rightarrow \dim.(S_1 + S_2) = 3 \neq \dim.(\mathfrak{R}^4)$$

lo que es una mala noticia, pues significa que la suma de S_1 y S_2 no es $\mathfrak{R}^4$; por tanto, tenemos que tragarnos el petardo de calcular una base de S_1 (ya conocemos una) y otra de S_2, para después reunirlas y así obtener un SG del subespacio $S_1 + S_2$.

- Un sistema de generadores del subespacio $S_1 + S_2$ es $H = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{k}_1, \overline{k}_2\}$.

VENTANA

* Ya sabemos que $\overline{h}_1 = (0;-1;1;1)$ y $\overline{h}_2 = (0;-1;0;1)$ son una base de S_1.

* Calculemos una base de S_2:

$$S_2 = \left\{ (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \mathfrak{R}^4 \,/\, \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_1 = x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2.x_3 - x_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$\boxed{\text{parametrizamos las incógnitas } x_3 \text{ y } x_4}$

$$\Rightarrow S_2 = \{(a;-2.a - b;a;b),\ \forall a,b \in \mathfrak{R}\} =$$
$$= \{a \bullet (1;-2;1;0) + b \bullet (0;-1;0;1),\ \forall a,b \in \mathfrak{R}\}$$

Los vectores $\overline{k}_1 = (1;-2;1;0)$ y $\overline{k}_2 = (0;-1;0;1)$ son una base de S_2.

- Como sabemos que $\dim.(S_1 + S_2) = 3$, tranquilamente apostamos un brazo a que:

$$\begin{array}{c} \text{rg}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dim.(S_1 + S_2) = 3 \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{k}_1 & \overline{k}_2 \end{matrix} \end{array}$$

Como el menor de orden 3 indicado es no nulo, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{k}_1$ son LI y forman una base del subespacio $S_1 + S_2$.

3) Si conociéramos un sistema de cartesianas de S_1+S_2, para averiguar si el vector $\overline{w}=(2;-6;4;2)$ pertenece a S_1+S_2 bastaría comprobar si $\overline{w}$ es solución de dicho sistema. Pero como no conocemos las dichosas cartesianas, para averiguar si $\overline{w}$ pertenece a S_1+S_2, analizamos si $\overline{w}=(2;-6;4;2)$ es CL de los vectores de una base de S_1+S_2, por ejemplo, la que forman $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{k}_1$:

$$(2;-6;4;2)=\alpha\bullet(0;-1;1;1)+\beta\bullet(0;-1;0;1)+\lambda\bullet(1;-2;1;0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} 2=\lambda \\ -6=-\alpha-\beta-2.\lambda \\ 4=\alpha+\lambda \\ 2=\alpha+\beta \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} \alpha=2 \\ \beta=0 \\ \lambda=2 \end{array}\right\}\Rightarrow\overline{w}=2\bullet\overline{h}_1+0\bullet\overline{h}_2+2\bullet\overline{k}_1$$

Que quede muy clarito: el vector $\overline{w}$, que como habitante de $\Re^4$ tiene coordenadas $(2;-6;4;2)$ respecto de la base de referencia elegida en $\Re^4$, como habitante de S_1+S_2 que es un espacio vectorial de dimensión 3, tiene coordenadas $(2;0;2)$ respecto de la base de S_1+S_2 que forman $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{k}_1$.

- Expresemos que $\overline{w}=(2;-6;4;2)$ es suma del vector $\overline{u}=(u_1;u_2;u_3;u_4)\in S_1$ y del vector $\overline{v}=(v_1;v_2;v_3;v_4)\in S_2$:

$$(2;-6;4;2)=(u_1;u_2;u_3;u_4)+(v_1;v_2;v_3;v_4)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} 2=u_1+v_1 \\ -6=u_2+v_2 \\ 4=u_3+v_3 \\ 2=u_4+v_4 \end{array}\right\}\ \text{(I)}$$

Como $\overline{u}=(u_1;u_2;u_3;u_4)\in S_1$, ha de satisfacer las cartesianas de S_1:

$$\left\{\begin{array}{c} u_1=0 \\ u_2+u_4=0 \end{array}\right\}\ \text{(II)}$$

Como $\overline{v}=(v_1;v_2;v_3;v_4)\in S_2$, ha de satisfacer las cartesianas de S_2:

$$\left\{\begin{array}{c} v_1+v_2+v_3+v_4=0 \\ v_1-v_3=0 \end{array}\right\}\ \text{(III)}$$

La solución del SLNH que forman (I), (II) y (III) es $u_1=0$, $u_2=-2$, $u_3=2$, $u_4=2$, $v_1=2$, $v_2=-4$, $v_3=2$ y $v_4=0$; por tanto:

$$\overline{w}=(0;-2;2;2)+(2;-4;2;0)$$

siendo $(0;-2;2;2)\in S_1$ y $(2;-4;2;0)\in S_2$.

No confundas la suma de subespacios con la unión de subespacios

Siendo $S_1=\{(a;0;0),\ \forall a\in\Re\}$ y $S_2=\{(0;b;0),\ \forall b\in\Re\}$ subespacios de $\Re^3$, su unión $S_1\cup S_2=\{\overline{p}\in\Re^3\ /\ \overline{p}\in S_1 \text{ ó } \overline{p}\in S_2\}$ no es subespacio de $\Re^3$, pues al sumar dos vectores de $S_1\cup S_2$ no se obtiene un vector de dicho conjunto.

Por ejemplo:, $\overline{u}=(1;0;0)\in S_1\cup S_2$ (pues $\overline{u}=(1;0;0)\in S_1$) y $\overline{v}=(0;1;0)\in S_1\cup S_2$ (pues $\overline{v}=(0;1;0)\in S_2$), pero $\overline{u}+\overline{v}=(1;1;0)\notin S_1\cup S_2$, pues $(1;1;0)\notin S_1$ y $(1;1;0)\notin S_2$

FONEMATO 4.4.2

En el espacio vectorial $\Re^4$, sean los subespacios:

$$S_1 = \{(a+c;b+c;b+c;a+c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$$

$$S_2 = \left\{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \Big/ \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

1) Determine la dimensión y una base de su intersección.
2) Determine la dimensión y una base de su suma.

SOLUCIÓN

1) El subespacio intersección de S_1 y S_2 se denota $S_1 \cap S_2$, siendo:

$$S_1 \cap S_2 = \{\bar{p} \in \Re^4 \ / \ \bar{p} \in S_1 \text{ y } \bar{p} \in S_2\}$$

- Podemos identificar $S_1 \cap S_2$ mediante unas ecuaciones cartesianas (para obtenerlas basta reunir unas cartesianas de S_1 y unas cartesianas de S_2) o mediante una base (para obtenerla calculamos una base de uno de los subespacios, y los vectores de esa base que pertenezcan al otro subespacio son una base del subespacio intersección). Elegimos la segunda opción:

$$S_1 = \{(a+c;b+c;b+c;a+c),\ \forall a,b,c \in \Re\} =$$
$$= \{(a;0;0;a) + (0;b;b;0) + (c;c;c;c),\ \forall a,b,c \in \Re\} =$$
$$= \{a \bullet (1;0;0;1) + b \bullet (1;0;0;1) + c \bullet (1;1;1;1),\ \forall a,b,c \in \Re\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{h}_1 = (1;0;0;1),\ \bar{h}_2 = (1;0;0;1) \text{ y } \bar{h}_3 = (1;1;1;1) \text{ forman un SG de } S_1$$

Es:

$$\dim.(S_1) = \operatorname{rg} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{A} = 2$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \end{array}$$

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ forman una base deS_1; por tanto:

$$S_1 = \{(a;b;b;a),\ \forall a,b \in \Re\}.$$

- Para determinar $S_1 \cap S_2$ exigimos que $(a;b;b;a) \in S_1$ satisfaga las ecuaciones cartesianas de S_2:

$$\left.\begin{matrix} a + b + a = 0 \\ a - b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b = 0$$

El que así sean las cosas es una estupenda noticia, pues garantiza que S_1 y S_2 sólo tienen en común el vector cero:

$$S_1 \cap S_2 = \{\bar{0} \in \Re^4\}$$

2) El subespacio suma de S_1 y S_2 se denota $S_1 + S_2$:

$$S_1 + S_2 = \{\bar{p} \in \Re^4 \ / \ \bar{p} = \bar{h} + \bar{d},\ \text{siendo } \bar{h} \in S_1 \text{ y } \bar{d} \in S_2\}$$

- Invertimos un segundo en determinar la dimensión de $S_1 + S_2$ mediante la formulita $\dim.(S_1) + \dim.(S_2) = \dim.(S_1 + S_2) + \dim.(S_1 \cap S_2)$... y eso con la inconfesable esperanza de que $\dim.(S_1 + S_2) = \dim.(\Re^4)$, pues en tal caso podremos apostar tranquilamente la vida a que la suma de S_1 y S_2 es $\Re^4$. Además, y es lo mejor, nos ahorramos el petardo de calcular una base de S_1 y otra de S_2 para después reunirlas y así obtener un SG de $S_1 + S_2$.

  En nuestro caso, como $\dim.(S_1) = 2$, $\dim.(S_1 \cap S_2) = 0$ y

  $$\dim.(S_2) = \dim.(\Re^4) - (\text{n}^{\text{o}} \text{ de ec. cart. indep. de } S_2) = 4 - 2 = 2$$

  resulta:

  $$2 + 2 = \dim.(S_1 + S_2) + 0 \Rightarrow \dim.(S_1 + S_2) = 4 = \dim.(\Re^4)$$

  lo que es un estupendo chollo, pues significa que la suma de los subespacios S_1 y S_2 es $\Re^4$.

4.5 SUBESPACIOS SUPLEMENTARIOS

Si "V" es un espacio vectorial y S_1 y S_2 son subespacios de "V", se dice que son suplementarios, o que "V" es suma directa de S_1 y S_2, si

$$S_1 + S_2 = V \; ; \; S_1 \cap S_2 = \overline{0}$$

Por ejemplo, los subespacios S_1 y S_2 del ejercicio precedente son suplementarios; o sea, $\Re^4$ es suma directa de esos subespacios.

Para calcular un subespacio suplementario al subespacio "S", calculas una base de "S" y le añades los vectores de "V" que quieras hasta formar una base de "V"... los vectores añadidos son una base de un subespacio suplementario a "S".

¿TE GUSTAN LAS FLORES?

Con los números el cerebro se puebla de las más hermosas florecillas: amapolas de disciplina mental, corazoncillos de capacidad de abstracción y razonamiento, maripepas de rigor, alarises de seriedad, azaleas de profesionalidad, amarantos de mejora permanente y tomasillos de gusto por el trabajo bien hecho... o sea, todo ventajas.

FONEMATO 4.5.1

En el espacio vectorial $\Re^4$, sea $S=\{(a+b;2.a+2.c;a+c;a+b),\ \forall a,b,c\in\Re\}$. Determine un subespacio suplementario a "S".

SOLUCIÓN

Latiguillo: calcularemos una base de "S" y le añadiremos los vectores de $\Re^4$ que queramos hasta formar una base de $\Re^4$; los vectores añadidos son una base de un subespacio suplementario a "S".

Vamos al tajo:

$$S=\{(a+b;2.a+2.c;a+c;a+b),\ \forall a,b,c\in\Re\}=$$
$$=\{(a;2.a;a;a)+(b;0;0;b)+(0;2.c;c;0),\ \forall a,b,c\in\Re\}=$$
$$=\{a\bullet(1;2;1;1)+b\bullet(1;0;0;1)+c\bullet(0;2;1;0),\ \forall a,b,c\in\Re\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{h}_1=(1;2;1;1),\ \bar{h}_2=(1;0;0;1) \text{ y } \bar{h}_3=(0;2;1;0) \text{ forman un SG de "S"}$$

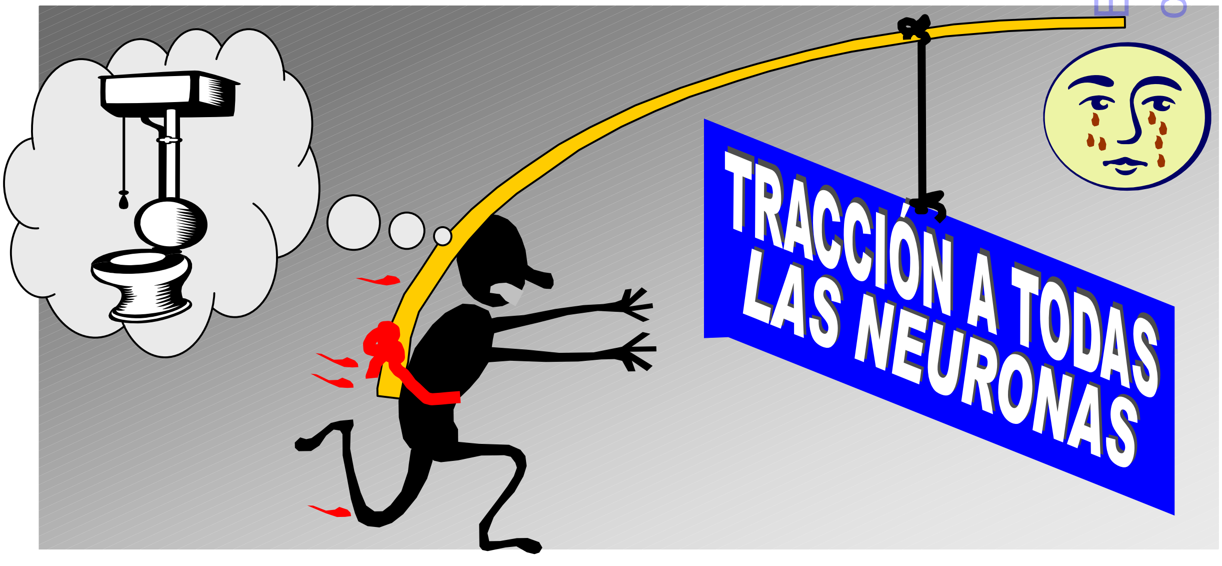
Es:

$$\dim.(S)=\operatorname{rg}\overbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&2\\\boxed{\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\end{bmatrix}}^{A}=2$$
$$\begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\bar{h}_1&\bar{h}_2&\bar{h}_3\end{matrix}$$

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ forman una base del subespacio "S". Es:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\end{vmatrix}\neq 0$$
$$\begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\bar{h}_1&\bar{h}_2&\bar{k}_1&\bar{k}_2\end{matrix}$$

Por tanto, los vectores $\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{k}_1$ y $\bar{k}_2$ forman una base de $\Re^4$, y los vectores $\bar{k}_1$ y $\bar{k}_2$ son una base de un subespacio suplementario a "S".



FONEMATO 4.5.2

En el espacio vectorial $\Re^3$, sean los subespacios:

$$S_1 = \{(a+b;2.b;b),\ \forall a,b \in \Re\}\ ;\ S_2 = \{(2.y;y;y),\ \forall y \in \Re\}$$

$$S_3 = \{(p+q;2.q;2.p),\ \forall p,q \in \Re\}$$

1) ¿Son suplementarios S_1 y S_2?

2) Determine $(S_1 + S_2) \cap S_3$.

SOLUCIÓN

1) Los subespacios S_1 y S_2 son suplementarios si $S_1 + S_2 = \Re^3$ y $S_1 \cap S_2 = \bar{0}$, como en efecto sucede.

Cálculo de la suma

Para determinar el subespacio $S_1 + S_2$ calculamos una base de S_1 y otra de y después las reunimos, obteniendo así un sistema generador "H" del subespacio suma $S_1 + S_2$:

$$H = \{\bar{h}_1 = (1;0;0),\ \bar{h}_2 = (1;2;1),\ \bar{k}_1 = (2;1;1)\}$$

VENTANA

- Es:

$$S_1 = \{(a+b;2.b;b),\ \forall a,b \in \Re\} = \{(a;0;0) + (b;2.b;b),\ \forall a,b \in \Re\} =$$
$$= \{a \bullet (1;0;0) + b \bullet (1;2;1),\ \forall a,b \in \Re\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{h}_1 = (1;0;0) \text{ y } \bar{h}_2 = (1;2;1) \text{ forman una base de } S_1$$

- $S_2 = \{y \bullet (2;1;1),\ \forall y \in \Re\} \Rightarrow \bar{k}_1 = (2;1;1)$ es una base de S_2.

Como los 3 vectores que forman "H" son LI (compruébalo tú), entonces "H" es una base de $S_1 + S_2$ y $\dim.(S_1 + S_2) = 3$. Como el único subespacio de $\Re^3$ que tiene dimensión 3 es el propio $\Re^3$, resulta ser $S_1 + S_2 = \Re^3$.

Cálculo de la intersección

Invertimos un segundo en hallar la dimensión del subespacio $S_1 \cap S_2$ mediante la formulita $\dim.(S_1) + \dim.(S_2) = \dim.(S_1 + S_2) + \dim.(S_1 \cap S_2)$, y eso con la inconfesable esperanza de que $\dim.(S_1 \cap S_2) = 0$, pues así apostaremos lo que sea a que los subespacios S_1 y S_2 sólo tienen en común el vector cero de $\Re^3$.

En nuestro caso, siendo

$$\dim.(S_1) = 2\ ;\ \dim.(S_2) = 1\ ;\ \dim.(S_1 + S_2) = 3$$

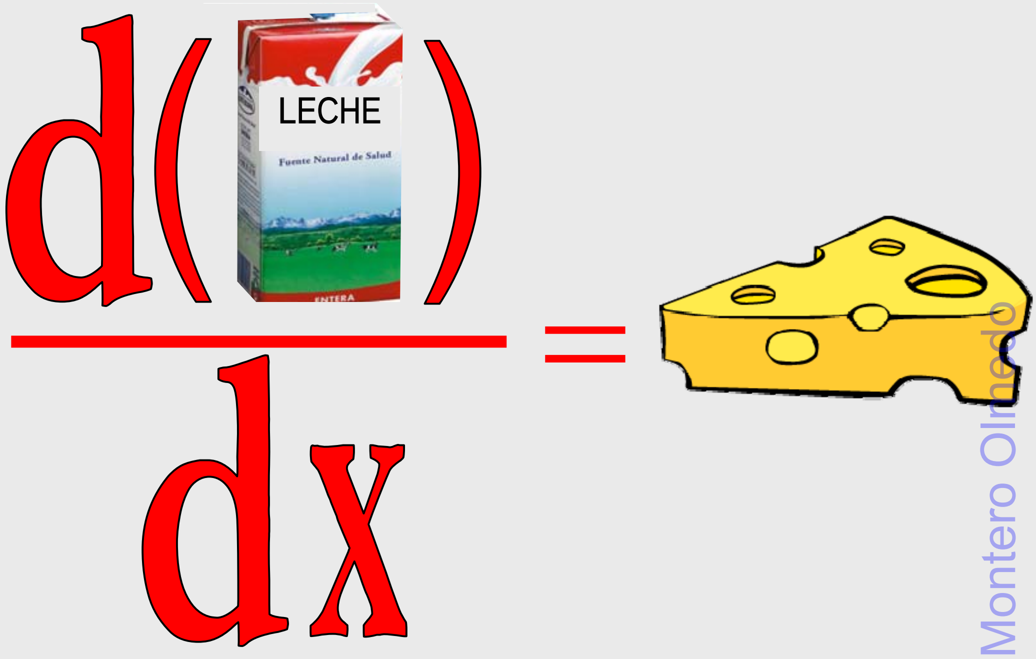
resulta.

$$2 + 1 = 3 + \dim.(S_1 \cap S_2) \Rightarrow \dim.(S_1 \cap S_2) = 0$$

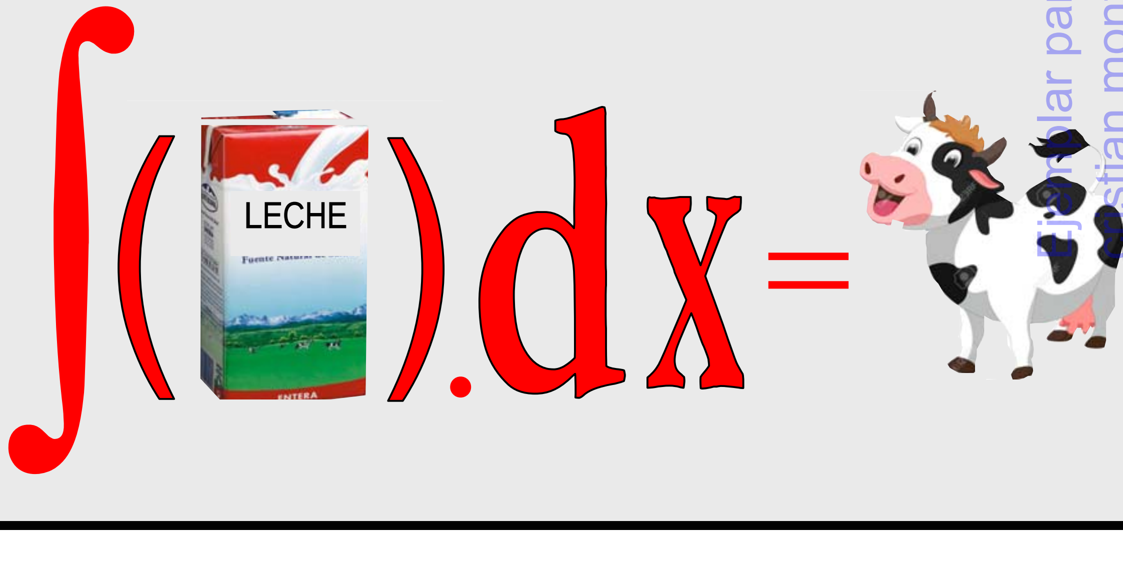
lo que es estupendo, pues significa que $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$.

2) Obvio: si $S_1 + S_2 = \Re^3$, es $(S_1 + S_2) \cap S_3 = S_3$.

CÁLCULO DIFERENCIAL



CÁLCULO INTEGRAL



EJERCICIOS RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA PÁGINA WEB

SUBESPACIO VECTORIAL

Ejercicio 01.01

Demuestre que el conjunto "S" es subespacio vectorial de $\Re^3$.

$$S = \{ (x_1;x_2;x_3) \ / \ x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 = 0 \}$$

Ejercicio 01.02

Demuestre que el conjunto "S" es subespacio vectorial de $\Re^3$.

$$S = \{ (x_1;x_2;x_3) \ / \ x_1 - x_2 = 0, \ x_1 + x_3 = 0 \}$$

Ejercicio 01.03

1) **Demuestre que $S = \{ A \in M_{n\times n} / A^t = A \}$ es subespacio vectorial del espacio vectorial $M_{n\times n}$.**
2) **Demuestre que $S = \{ A \in M_{n\times n} / A^t = -A \}$ es subespacio vectorial del espacio vectorial $M_{n\times n}$.**

Ejercicio 01.04

1) **Demuestre que $S = \{ (a;a+b;b;0), \forall a,b \in \Re \}$ es subespacio vectorial del espacio vectorial $\Re^4$.**
2) **Demuestre que $S = \{ (a;a+b;b;3), \forall a,b \in \Re \}$ es subespacio vectorial del espacio vectorial $\Re^4$.**

Ejercicio 01.05

1) **Demuestre que $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a-b \end{bmatrix}, \forall a,b \in \Re \right\}$ es subespacio vectorial del espacio vectorial $M_{2\times 2}$.**
2) **Demuestre que $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 3 \\ b & a-b \end{bmatrix}, \forall a,b \in \Re \right\}$ es subespacio vectorial del espacio vectorial $M_{2\times 2}$.**

Ejercicio 01.06

1) **Demuestre que $S = \{ a.x^4 + b.x \ / \ a,b \in \Re \}$ es subespacio vectorial del espacio vectorial P_4 que forman los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 4.**
2) **Demuestre que $S = \{ a.x^4 + b.x + 4 \ / \ a,b \in \Re \}$ es subespacio vectorial del espacio P_4 que forman los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 4.**

Ejercicio 01.07

Sea "V" el espacio vectorial de las funciones continuas en todo punto.

1) Demuestre que $S = \{ f \in V \ / \ f(2) = 0, \ f(3) = 0 \}$ es subespacio vectorial de "V" .

2) Demuestre que $S = \{ f \in V \ / \ f(x) = f(-x) \}$ es subespacio de "V".

3) Demuestre que $S = \left\{ f \in V \ / \ \int_a^b f(x).dx = 0 \right\}$ es subespacio vectorial de "V".

Ejercicio 01.08

1) Sea "V" el espacio vectorial de las funciones derivables en todo punto. Demuestre que el conjunto "S" formado por los vectores de "V" que tienen tangente horizontal en el punto "c" es subespacio de "V".

2) Sea "V" el espacio vectorial de las funciones de clase 2 en todo punto. Demuestre que el conjunto "S" formado por los vectores de "V" que presentan inflexión en el punto "c" es subespacio de "V".

Ejercicio 01.09

Demuestre que si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales del espacio vectorial "V", también es subespacio vectorial de "V" el conjunto $S = \{ \overline{x} \in V \ / \ \overline{x} \in S_1, \ \overline{x} \in S_2 \}$.

Ejercicio 01.10

Demuestre que si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales del espacio vectorial "V", también es subespacio vectorial de "V" el conjunto $S = \{ \overline{p} + \overline{q} \ / \ \overline{p} \in S_1, \ \overline{q} \in S_2 \}$.

Ejercicio 01.11

Sea "V" un espacio vectorial real y $\overline{a}, \overline{b} \in V$. Demuestre que el conjunto $S = \{ \overline{x} \in V \ / \ \overline{x} = \theta_1 \bullet \overline{a} + \theta_2 \bullet \overline{b}, \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \Re \}$ es subespacio vectorial de "V".

SUBESPACIO IDENTIFICADO MEDIANTE UNAS ECUACIONES CARTESIANAS

Ejercicio 02.01

Radiografíe el subespacio $S = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \in \Re^3 \ \middle/ \ \begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$

Ejercicio 02.02

Radiografíe el subespacio "S".

$$S = \{ (x_1; x_2; x_3) \in \Re^3 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$$

Ejercicio 02.03

Radiografíe el subespacio $S=\left\{(x;y;z;t)\in\Re^4 \middle/ \begin{array}{r} x-y-t=0 \\ x-z=0 \\ y-z+t=0 \end{array}\right\}$.

Ejercicio 02.04

Radiografíe el subespacio $S=\left\{(x;y;z;t)\in\Re^4 \middle/ \begin{array}{r} x-y-t=0 \\ x-z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$.

Ejercicio 02.05

Radiografíe el subespacio $S=\left\{(x;y;z;t)\in\Re^4 / x-y-z-t=0\right\}$.

Ejercicio 02.06

Determine la dimensión del subespacio "S".

$$S=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 \middle/ \begin{array}{l} m.x+y+z=0 \\ x+m.y+z=0,\ \ m\in\Re \\ x+y+m.z=0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 02.07

Los vectores $\bar{u}=(u_1;u_2;u_3)$ **y** $\bar{v}=(v_1;v_2;v_3)$ **de** $\Re^3$ **se dicen ortogonales si** $u_1.v_1+u_2.v_2+u_3.v_3=0$. **Demuestre que el conjunto formado por los vectores ortogonales a** $\bar{w}=(1;-3;-4)$ **es subespacio de** $\Re^3$**, hallando su dimensión y una base.**

Ejercicio 02.08

Compruebe que los vectores $\bar{u}=(1;2;1)$ **y** $\bar{v}=(1;0;-1)$ **constituyen una base de** $S=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 / x-y+z=0\right\}$**, calculando las coordenadas de** $\bar{w}=(2;6;4)\in S$ **respecto de dicha base.**

Ejercicio 02.09

1) Determine una base de $\Re^3$ **que contenga una base de "S".**

$$S=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 / x-y-2.z=0\right\}$$

2) ¿Son $\bar{u}=(2;1;0;1)$, $\bar{v}=(0;1;1;0)$ **y** $\bar{w}=(6;2;-1;3)$ **una base del subespacio** $S=\left\{(x;y;z;t)\in\Re^4 / x-y+z-t=0\right\}$**?**

Ejercicio 02.10

Sean B_1 **y** B_2 **bases del subespacio "S".**

$$S=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 / x+y-z=0\right\}$$

Determine la ecuación del cambio de base $B_1\to B_2$.

$B_1=\left\{\bar{u}_1=(1;1;2),\ \bar{u}_2=(1;0;1)\right\}$; $B_2=\left\{\bar{e}_1=(5;2;7),\ \bar{e}_2=(3;4;7)\right\}$

Ejercicio 02.11

Demuestre que las matrices que conmutan con $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ **constituyen un subespacio de** $M_{2\times2}$. **Radiografíe dicho subespacio.**

Ejercicio 02.12

Demuestre que los polinomios de P_3 cuyas derivadas 1ª y 2ª se anulan en el punto "1" constituyen un subespacio de P_3. Radiografíelo.

Ejercicio 02.13

Demuestre que los polinomios de P_2 cuya integral en [1;2] es nula constituyen un subespacio de P_2. Radiografíelo.

VARIEDAD LINEAL (CÁPSULA LINEAL O ENVOLTURA LINEAL)

Ejercicio 03.01

Radiografíe la cápsula lineal de $H=\{(2;3;1),(1;2;0),(4;5;3)\}\subset\Re^3$.

Ejercicio 03.02

Radiografíe la cápsula lineal del conjunto "H".

$$H=\{(2;0;0;0),(0;1;2;0),(0;0;1;0)\}\subset\Re^4$$

Ejercicio 03.03

Radiografíe la cápsula lineal del conjunto "H".

$$H=\{(2;1;0;0),(0;1;2;1),(4;3;2;1)\}\subset\Re^4$$

Ejercicio 03.04

Radiografíe la cápsula lineal de $H=\left\{\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\right\}\subset M_{2\times2}$.

Ejercicio 03.05

Radiografíe la cápsula lineal del conjunto "H".

$$H=\left\{2.t^2+3.t+4\ ;\ 2.t+2\ ;\ 2.t^2+t+2\right\}\subset P_2$$

Ejercicio 03.06

Radiografíe el subespacio $S=\{(a+b;b;a-b;0),\ \forall a,b\in\Re\}\subset\Re^4$.

Ejercicio 03.07

Radiografíe el subespacio "S".

$$S=\{(a+c;a+c;b+c;b+c),\ \forall a,b,c\in\Re\}\subset\Re^4$$

Ejercicio 03.08

Radiografíe el subespacio $S=\left\{\begin{bmatrix}a&a+b\\b&a-b\end{bmatrix},\ \forall a,b\in\Re\right\}\subset M_{2\times2}$.

Ejercicio 03.09

Radiografíe el subespacio "S".

$$S=\left\{\begin{bmatrix}\beta+\delta&\alpha+\beta\\\alpha-\delta&\beta+\delta\end{bmatrix},\ \forall\alpha,\beta,\delta\in\Re\right\}\subset M_{2\times2}$$

Ejercicio 03.10

Radiografíe el subespacio que forman las matrices simétricas de orden 2.

Ejercicio 03.11

Radiografíe el subespacio que forman las matrices antisimétricas de orden 3.

INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS

Ejercicio 04.01

Determine $S_1 \cap S_2$.

1) $S_1 = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \ x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\}$

$S_2 = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = 0\}$

2) $S_1 = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \ x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\}$

$S_2 = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 = 0\}$

3) $S_1 = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \ x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\}$

$S_2 = \left\{ (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ \middle/ \ \begin{array}{c} 2.x_1 + x_2 - 2.x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2.x_2 - x_3 - 2.x_4 = 0 \end{array} \right\}$

4) $S_1 = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \ x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\}$

$S_2 = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$

Ejercicio 04.02

Determine $S_1 \cap S_2$.

1) $S_1 = \{ (a + c;\ b + c\ ;\ a + c\ ;\ b + c) \in \Re^4,\ \forall\, a,b,c \in \Re \}$

$S_2 = \{ (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$

2) $S_1 = \{ (a\ ;\ 2.b\ ;\ a\ ;\ b) \in \Re^4,\ \forall\, a,b \in \Re \}$

$S_2 = \left\{ (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ \middle/ \ \begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3.x_1 + 2.x_3 - 5.x_4 = 0 \end{array} \right\}$

3) $S_1 = \{ (a + b;2.b;a;b) \in \Re^4,\ \forall\, a,b \in \Re \}$

$S_2 = \{ (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$

Ejercicio 04.03

Determine $S_1 \cap S_2$.

1) $S_1 = \{ (a - b\ ;\ 2.b\ ;\ a\ ;\ b) \in \Re^4,\ \forall\, a,b \in \Re \}$

$S_2 = \{ (a;0;-b;b) \in \Re^4,\ \forall\, a,b \in \Re \}$

2) $S_1 = \{ (a - b\ ;\ 2.b\ ;\ a\ ;\ b),\ \forall\, a,b \in \Re \}$

$S_2 = \{ (a\ ;\ 2.b\ ;-3.b\ ;\ b),\ \forall\, a,b \in \Re \}$

Ejercicio 04.04

Determine $S_1 \cap S_2$.

$$S_1 = \langle (1;0;1;1),\ (0;1;0;1),\ (2;1;2;3) \rangle$$
$$S_2 = \langle (1;1;1;1),\ (0;0;0;1) \rangle$$

Ejercicio 05.01

Determine S_1+S_2.

$$S_1=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \;\Big/\; x_1-x_3=0,\; x_2-x_4=0\right\}$$
$$S_2=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \;\Big/\; x_1+x_2+x_3=0,\; x_1+x_2=0\right\}$$

Ejercicio 05.02

Determine S_1+S_2. Compruebe que $\overline{w}=(2;-6;4;2)\in S_1+S_2$, expresándolo como suma de un vector de S_1 y otro de S_2.

$$S_1=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4) \;\Big/\; x_1=0,\; x_2+x_4=0\right\}$$
$$S_2=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4) \;\Big/\; x_1+x_2+x_3+x_4=0,\; x_1-x_3=0\right\}$$

Ejercicio 05.03

Determine S_1+S_2.

$$S_1=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \;\Big/\; x_1=x_3-x_4=0\right\}$$
$$S_2=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \;\Big/\; x_2=0\right\}$$

Ejercicio 05.04

Determine S_1+S_2.

$$S_1=<\overline{k}_1=(1;-1;0;1),\; \overline{k}_2=(0;-1;0;1)>$$
$$S_2=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \;\Big/\; x_1+x_2-x_3=0,\; x_2-x_4=0\right\}$$

Ejercicio 05.05

Determine S_1+S_2.

$$S_1=<\overline{k}_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\; \overline{k}_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}>$$
$$S_2=\left\{\begin{bmatrix}a&a+b\\a-b&b\end{bmatrix},\; \forall\, a,b\in\Re\right\}$$

SUBESPACIOS SUPLEMENTARIOS

Ejercicio 06.01

Determine un subespacio suplementario al subespacio "S".

$$S=\left\{(a+b;2.a+2.c;a+c;a+b)\in\Re^4,\; \forall\; a,b,c\in\Re\right\}$$

Ejercicio 06.02

Determine un subespacio suplementario al subespacio "S".

$$S=\left\{\begin{bmatrix}2.a&a+b\\a&-a+b\end{bmatrix},\; \forall\, a,b\in\Re\right\}\subset M_{2\times 2}$$

Ejercicio 06.03

Determine un subespacio suplementario al subespacio "S".

$$S=\left\{a.x^3+(a-b).x^2+(a+b).x+b,\; \forall\, a,b\in\Re\right\}\subset P_3$$

AUTOCOMPROBACIÓN

Las soluciones están en los test de la web.

01) ¿Es cierto que el conjunto "S" de las soluciones de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones $A \bullet X = 0$ con "n" incógnitas es subespacio de $\Re^n$?

a) No ; b) Sí

02) El conjunto "S" de las soluciones de un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones $A \bullet X = b \neq 0$ con "n" incógnitas es subespacio de $\Re^n$?

a) Falso ; b) Verdadero

03) Señale el conjunto que es subespacio de $\Re^3$.

a) $S_1 = \{(x;y;z) \ / \ x + 2.y - z = 3\}$
b) $S_2 = \{(x;y;z) \ / \ x + 2.y.z = 0\}$
c) $S_3 = \{(x;y;z) \ / \ 123.x + 25687.y - 96748254.z = 0\}$

04) Señale el conjunto que es subespacio de $\Re^4$.

a) $S_1 = \left\{(x;y;z;t) \ / \ \sqrt{x} + 2.y - z = 0\right\}$
b) $S_2 = \{(x;y;z;t) \ / \ x + t = 0\}$
c) $S_3 = \{(x;y;z;t) \ / \ x + 2.y + \text{sen } z = 0\}$

05) Señale el conjunto que no es subespacio de $\Re^3$.

a) $S_1 = \left\{(x;y;z) \Big/ \begin{matrix} x + z = 0 \\ y - z = 7 \end{matrix}\right\}$

b) $S_2 = \left\{(x;y;z) \Big/ \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$

c) $S_3 = \left\{(x;y;z) \Big/ \begin{matrix} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{matrix}\right\}$

06) Si "V" es un espacio vectorial y $S \subset V$ es un subespacio, la dimensión de "S" es:

a) El número máximo de vectores L.D. que pueden encontrarse en "S".
b) El número máximo de vectores L.I. que pueden encontrarse en "S".
c) El número de vectores L.I. que pueden encontrarse en "S".

07) Si el subespacio $S \subseteq \Re^n$ es el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo de ecuaciones con matriz de coeficientes "A", entonces:

a) $\dim.(S) = rg(A)$; b) $\dim.(S) = n - rg(A)$
c) $\dim.(S) = n + rg(A)$

08) Señale la dimensión del subespacio "S".

$$S = \left\{(x;y;z;t) \Big/ \begin{matrix} x + y - z + t = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 3.y - 2.z + 2.t = 0 \end{matrix}\right\} \subset \Re^4$$

a) 1 ; b) 2 ; c) 3

9) La dimensión del subespacio $S=\left\{(x;y;z;t)\ \Big/\ \begin{matrix} x=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\}\subset\Re^4$ es:

a) 1 ; b) 2 ; c) 3

10) La dimensión del subespacio $S=\{(x;y;z;t)\ /\ x=y\}\subset\Re^4$ es:

a) 1 ; b) 2 ; c) 3

11) La dimensión del subespacio $S=\{(x;y;z;t)/x=y=0\}\subset\Re^4$ es:

a) 1 ; b) 2 ; c) 3

12) Señale la dimensión del subespacio "S".

$$S=\left\{(x;y;z;t)\ \Big/\ \begin{matrix} x+y-z+t=0 \\ x-y=0 \\ x+3.y-2.z=0 \end{matrix}\right\}\subset\Re^4$$

a) 1 ; b) 2 ; c) 3

13) Señale la dimensión del subespacio "S".

$$S=\left\{(x;y;z)\ \Big/\ \begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ x+3.y-2.z=0 \end{matrix}\right\}\subset\Re^3$$

a) 1 ; b) 2 ; c) Las anteriores son falsas

14) Si "V" es un espacio vectorial y $S\subset V$ no contiene a $\bar{0}\in V$, entonces:

a) "S" no es subespacio de "V"
b) "S" puede ser subespacio de "V"

15) Señale una base del subespacio "S".

$$S=\left\{(x;y;z;t)\ \Big/\ \begin{matrix} x+y-z+t=0 \\ x-y=0 \end{matrix}\right\}\subset\Re^4$$

a) $H_1=\{(2;1;3;-2),\ (1;1;2;0)\}$
b) $H_2=\{(0;0;-1;1),\ (0;0;2;-2)\}$
c) $H_3=\{(2;2;3;-1),\ (1;1;2;0)\}$

16) Señale una base del subespacio "S".

$$S=\{(x;y;z;t)\ /\ x+y-t=0\}\subset\Re^4$$

a) $H_1=\{(2;1;3;3),\ (0;0;2;0),\ (1;0;2;0)\}$
b) $H_2=\{(3;2;1;5),\ (1;2;2;3),\ (2;0;-1;2)\}$
c) $H_3=\{(1;1;0;2),\ (1;0;0;1),\ (2;2;1;4)\}$

17) Señale una base del subespacio "S".

$$S=\left\{(x;y;z;t)\ \Big/\ \begin{matrix} x+y-z+t=0 \\ x-y=0 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\}\subset\Re^4$$

a) $H_1=\{(0;0;3;-3)\}$
b) $H_2=\{(1;0;0;2)\}$
c) $H_3=\{(0;0;-1;1),\ (0;0;2;-2)\}$

18) Señale una base del $S=\left\{(x;y;z;t) \Big/ \begin{array}{l} x+y-z+t=0 \\ x-y=0 \\ 2.y-z+t=0 \end{array}\right\} \subset \Re^4$.

a) $H_1=\{(0;0;3;-3)\}$; b) $H_2=\{(0;0;1;1),\ (1;1;2;2)\}$

c) $H_3=\{(0;0;1;1),\ (0;0;2;0)\}$

19) Sean los subespacios:

$$S_1=\left\{(x;y;z) \Big/ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

$$S_2=\left\{(x;y;z) \Big/ \begin{array}{l} x+3.y-3.z=0 \\ 2.x-4.y+4.z=0 \end{array}\right\}$$

a) S_1 y S_2 son el mismo subespacio

b) S_1 y S_2 no son el mismo subespacio

20) Sean los subespacios:

$$S_1=\left\{(x;y;z) \Big/ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \ ; \ S_2=\left\{(x;y;z) \Big/ \begin{array}{l} x+3.y-3.z=0 \\ 3.x-4.y+2.z=0 \end{array}\right\}.$$

a) S_1 y S_2 son el mismo subespacio

b) S_1 y S_2 no son el mismo subespacio

21) Sea $H=\{\bar{u}_1=(1;2;3),\ \bar{u}_2=(0;1;4)\}$ una base del subespacio $S \subset \Re^3$.

a) $S=\{(x;y;z)\ /\ x+y-z=0\}$

b) $S=\{(x;y;z)\ /\ x+2.y=0\}$

c) $S=\{(x;y;z)\ /\ 5.x-4.y+z=0\}$

22) Sea $H=\{\bar{u}=(1;1;3)\}$ una base del subespacio $S \subset \Re^3$.

a) $S=\{(x;y;z)\ /\ x-y=0,\ 3.x-z=0\}$

b) $S=\{(x;y;z)\ /\ x-y=0,\ 3.x-z=0\}$

c) $S=\{(x;y;z)\ /\ x-y=0\}$

23) Sea $H=\{\bar{u}_1=(1;2;3;0),\ \bar{u}_2=(0;1;4;1)\}$ una base del subespacio $S \subset \Re^4$.

a) $S=\{(x;y;z;t)\ /\ 5.x-4.y+z=0,\ 2.x-y+t=0\}$

b) $S=\{(x;y;z)\ /\ x-y=x-z=0\}$

c) $S=\{(x;y;z)\ /\ x-y+z-t=0\}$

24) Sea $H=\{\bar{u}_1=(1;2;3;0),\ \bar{u}_2=(0;0;4;1),\ \bar{u}_2=(0;0;0;1)\}$ una base del subespacio $S \subset \Re^4$.

a) $S=\{(x;y;z;t)\ /\ 2.x-3.y+z=0\}$

b) $S=\{(x;y;z)\ /\ 2.x-y=0\}$

c) $S=\{(x;y;z)\ /\ x-y+z=0,\ y+2.t=0\}$

25) Sea $H=\{\bar{u}_1=(1;2;3),\ \bar{u}_2=(0;1;1)\}$ una base del subespacio $S \subset \Re^3$. El vector $\bar{v}=(3;2;k)$ pertenece a "S" si:

a) $k=7$; b) $k=5$; c) $k \neq 5$

26) Sea $H=\{\bar{u}_1=(1;4;0), \bar{u}_2=(1;1;0)\}$ una base del subespacio $S\subset\Re^3$. El vector $\bar{v}=(k;2;0)$ pertenece a "S" si:

a) $k=3$; b) $k=4$; c) $\forall k\in\Re$

27) Sea $H=\{\bar{u}_1=(1;1;3), \bar{u}_2=(2;1;0)\}$ una base del subespacio $S\subset\Re^3$. El vector $\bar{v}=(3;2;k)$ no pertenece a "S" si:

a) $k\neq 3$; b) $k\neq 0$; c) $k=-3$

28) Sea $H=\{\bar{u}_1=(1;1;3), \bar{u}_2=(1;1;0)\}$ una base del subespacio $S\subset\Re^3$. El vector $\bar{v}=(3;2;k)$ no pertenece a "S" si:

a) $k\neq 3$; b) $k\neq 0$; c) $\forall k\in\Re$

29) Sea $H=\{\bar{u}_1=(4;1;2), \bar{u}_2=(2;0;1)\}$ una base del subespacio $S\subset\Re^3$. Las coordenadas del vector $\bar{v}=(6;2;5)\in S$ respecto de dicha base son:

a) $(2;1)$; b) $(2;-1)$; c) $(2;3;4)$

30) ¿En qué caso el conjunto "S" es subespacio vectorial de $\Re^3$?

a) $S=\left\{(2.\theta+\delta;\theta-\delta;\sqrt{\theta}+\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$

b) $S=\left\{(2.\theta+\delta;\theta^2-\delta;\theta+\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$

c) $S=\left\{(6.\theta-7.\delta;2.\delta+16.\delta;\theta+\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$

31) ¿En qué caso el conjunto "S" es subespacio vectorial de $\Re^4$?

a) $S=\{(p;p;q;7),\ \forall\,p,q\in\Re\}$

b) $S=\{(0;0;3.p-123.q;5436.q),\ \forall\,p,q\in\Re\}$

c) $S=\left\{(0;0;0;p+q^3),\ \forall\,p,q\in\Re\right\}$

32) ¿En qué caso "S" no es subespacio vectorial de $\Re^4$?

a) $S=\{(p;p-r;q;0),\ \forall\,p,q,r\in\Re\}$

b) $S=\{(0;0;5;p+q+r),\ \forall\,p,q,r\in\Re\}$

c) $S=\{(0;0;0;3.p+4.q-2.r),\ \forall\,p,q,r\in\Re\}$

33) ¿En qué caso "S" es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

a) $S=\left\{\begin{bmatrix}\theta & 2.\theta+3.\delta\\ 0 & \theta.\delta\end{bmatrix},\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$

b) $S=\left\{\begin{bmatrix}\theta & 2.\theta+3.\delta\\ 7 & \theta-\delta\end{bmatrix},\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$

c) $S=\left\{\begin{bmatrix}\theta & 2.\theta+3.\delta\\ 0 & \theta-\delta\end{bmatrix},\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$

La mejor estrategia no garantiza el éxito, pero la estrategia equivocada es garantía de fracaso.

34) ¿En qué caso "S" no es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

$$\text{a) } S=\left\{\begin{bmatrix} p & 2.p+3.q \\ 0 & 2.q \end{bmatrix}, \forall\, p,q\in\Re\right\}$$

$$\text{b) } S=\left\{\begin{bmatrix} 0 & -p+5.q \\ q & q-2.p \end{bmatrix}, \forall\, p,q\in\Re\right\}$$

$$\text{c) } S=\left\{\begin{bmatrix} \sqrt{p} & p-3.q \\ 0 & p \end{bmatrix}, \forall\, p,q\in\Re\right\}$$

35) Señale en qué caso el conjunto "S" es subespacio vectorial del espacio vectorial P_3 que forman los polinomios con coeficientes reales y grado ≤ 3.

$$\text{a) } S=\left\{\theta.x^3+\delta.x^2+(\theta+\delta).x-\delta,\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$$

$$\text{b) } S=\left\{\theta.x^3+\theta^2.x-\delta,\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$$

$$\text{c) } S=\left\{\theta.x^3+(\delta-2.\theta).x^2+19.x+\theta,\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$$

36) Señale en qué caso el conjunto "S" no es subespacio vectorial del espacio P_2 que forman los polinomios con coeficientes reales y grado ≤ 2.

$$\text{a) } S=\left\{\delta.x^2+(\theta+\delta).x,\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$$

$$\text{b) } S=\left\{\theta.x+7,\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$$

$$\text{c) } S=\left\{\delta.x+\theta,\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$$

37) Señale en qué caso el conjunto "S" no es subespacio vectorial del espacio P_3 que forman los polinomios con coeficientes reales y grado ≤ 3.

$$\text{a) } S=\left\{\theta.x^3+\delta.x^2+\mu,\ \forall\,\theta,\delta,\mu\in\Re\right\}$$

$$\text{b) } S=\left\{\mu.x^3+(\theta-\delta+\mu).x-\delta,\ \forall\,\theta,\delta,\mu\in\Re\right\}$$

$$\text{c) } S=\left\{\theta.x^3+(\delta-2.\theta-\mu).x^2+9.x+\theta,\ \forall\,\theta,\delta,\mu\in\Re\right\}$$

38) Si "V" es espacio vectorial, la variedad lineal (cápsula lineal o envoltura lineal) engendrada por $H\subset V$ se denota $L(H)$ ó $<H>$, y es el subespacio de "V" que forman los vectores que son combinación lineal de los vectores de "H".

a) Verdadero ; b) Falso

39) Si "V" es un espacio vectorial, la dimensión de la variedad lineal engendrada por $H\subset V$ coincide con el número máximo de vectores linealmente independientes que pueden encontrase en "H".

a) Verdadero ; b) Falso

40) Los vectores $(7;6;5;4)$ y $(5;2;2;2)$ forman una base del subespacio "S" que forman los vectores de la siguiente forma:

$$(7.\theta+2.\delta+5.\varepsilon\ ;\ 6.\theta+4.\delta+2.\varepsilon\ ;\ 5.\theta+3.\delta+2.\varepsilon\ ;\ 4.\theta+2.\delta+2.\varepsilon)$$

a) Falso ; b) Verdadero

41) Los vectores (7;6;0;4), (0;4;0;0) y (5;0;2;0) son una base de $S=\{(7.\theta+5.\varepsilon\ ;\ 6.\theta+4.\delta\ ;\ 2.\varepsilon\ ;\ 4.\theta),\ \forall\,\theta,\delta,\varepsilon\in\Re\}\subset\Re^4$.

a) Falso ; b) Verdadero

42) Sea el subespacio $S=\left\{\begin{bmatrix} p & 2.p+3.q \\ r & 2.q \end{bmatrix},\ \forall\,p,q,r\in\Re\right\}\subset M_{2\times 2}$.

Los vectores $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ constituyen una base de "S".

a) Falso ; b) Verdadero

43) Sea $S=\left\{\begin{bmatrix} p+2.q+r & 2.p+3.q+r \\ 0 & 2.q+2.r \end{bmatrix},\ \forall\,p,q,r\in\Re\right\}\subset M_{2\times 2}$.

Los vectores $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ constituyen una base de "S".

a) Falso ; b) Verdadero

44) Los vectores $2.x^3+x^2$, $3.x^3-x^2+2.x-1$ y $2.x^3+x^2+1$ son una base del subespacio constituido por los polinomios de la forma $(2.\theta+3.\delta-2.\mu).x^3+(\theta-\delta+\mu).x^2+2.\delta.x+\mu-\delta$.

a) Falso ; b) Verdadero

45) Los vectores $2.x^3+x^2$, $3.x^3-x^2+2.x-1$ y $2.x^3+x^2+1$ son una base del subespacio constituido por los polinomios de la forma $(2.\theta+3.\delta+5.\mu).x^3+(\theta-\delta).x^2+(2.\delta+2.\mu).x-\delta-\mu$.

a) Falso ; b) Verdadero

46) Sea $S=\{(\theta+5.\varepsilon\ ;\ 6.\theta+\delta\ ;\ 2.\varepsilon\ ;\ 4.\theta+7),\ \forall\,\theta,\delta,\varepsilon\in\Re\}\subset\Re^4$.

Los vectores (7;3;0;4), (0;2;0;0) y (5;0;1;0) constituyen una base de "S".

a) Falso ; b) Verdadero

47) Sea $S=\left\{\begin{bmatrix} p+2.q+r & 2.p+3.q+r \\ p+2 & 2.q+2.r \end{bmatrix},\ \forall\,p,q,r\in\Re\right\}\subset M_{2\times 2}$.

Los vectores $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ constituyen una base de "S".

a) Verdadero ; b) Falso

48) Sea:

$$S=\{(2.\theta+3.\delta).x^3+\theta.x^2+(2.\delta+9).x+\mu,\ \forall\,\theta,\delta,\mu\in\Re\}\subset P_3$$

Los vectores $2.x^3+x^2$, $3.x^3-x^2+2.x-1$ y $2.x^3+x^2+1$ forman una base de "S".

a) Falso ; b) Verdadero

49) Sea el subespacio $S=\{(\theta\ ;\ 2.\theta+\delta\ ;\ 4.\theta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\}\subset\Re^3$.

Los vectores $\bar{p}_1=(2;5;8)$ y $\bar{p}_2=(2;3;8)$ son una base de "S".

a) Falso ; b) Verdadero

50) Si S_1 y S_2 son subespacios del espacio vectorial "V", el subespacio $S_1 \cap S_2$ lo forman los vectores de "V" que pertenecen a S_1 y a S_2, y queda identificado al reunir unas ecuaciones cartesianas de S_1 y otras de S_2.

a) Falso ; b) Verdadero

51) Señale el subespacio intersección de S_1 y S_2.

$$S_1 = \{(x;t;z) \in \Re^3 \,/\, 2.x + y - z = 0,\ x + y + z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x;t;z) \in \Re^3 \,/\, x - y = z\}$$

a) $S_1 \cap S_2 = \{\overline{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = <(2;3;1)>$

c) $S_1 \cap S_2 = <(2;0;1)>$

52) Señale el subespacio intersección de S_1 y S_2.

$$S_1 = \{(x;t;z) \in \Re^3 \,/\, 2.x + t - z = 0,\ x + t + z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x;t;z) \in \Re^3 \,/\, 4.x + t = 5.z\}$$

a) $S_1 \cap S_2 = \{\overline{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = S_1$; c) $S_1 \cap S_2 = S_2$

53) Sean $\begin{cases} S_1 = \{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, 2.x + y - z = 0\} \\ S_2 = \{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x + y + z = 0\} \end{cases}$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\overline{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = <(2;-3;1)>$

c) $S_1 \cap S_2 = S_2$

54) Sean $\begin{cases} S_1 = \{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x + y - z = 0\} \\ S_2 = \{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x - y - z = 0\} \end{cases}$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\overline{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = <(-2;0;-2)>$

c) $S_1 \cap S_2 = <(2;0;-2)>$

55) Sean $\begin{cases} S_1 = \{(\theta;\theta + \delta;\delta),\ \forall\, \theta,\delta \in \Re\} \\ S_2 = \{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x - y - z = 0\} \end{cases}$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\overline{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = <(-2;0;2)>$

c) $S_1 \cap S_2 = <(-2;-2;0)>$

56) Sean $S_1 = <(1;1;0),(0;2;1)>$ y $S_2 = <(3;5;0)>$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\overline{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = S_1$; c) $S_1 \cap S_2 = S_2$

57) Sean $\begin{cases} S_1 = <(1;1;0;2),(0;2;1;0)> \\ S_2 = <(3;-1;0;1),(1;3;1;2)> \end{cases}$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\overline{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = S_1$

c) $S_1 \cap S_2 = <(1;3;1;2)>$

58) Sean $\begin{cases} S_1 =< (1;1;0;2),(0;2;1;0) > \\ S_2 =< (3;1;0;1),(2;0;-1;4) > \end{cases}$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = S_2$
c) $S_1 \cap S_2 = < (2;0;-1;4) >$

59) Sean $\begin{cases} S_1 =< (1;1;0;2),(0;2;1;0) > \\ S_2 =< (3;1;0;1),(2;0;0;4) > \end{cases}$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = S_2$; c) $S_1 \cap S_2 = < (2;0;0;4) >$

60) Sean $\begin{cases} S_1 =< (1;1;0;2),(0;2;1;0) > \\ S_2 =< (3;1;0;1),(2;0;0;4),(4;2;0;-2) > \end{cases}$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = S_1$; c) $S_1 \cap S_2 = S_2$

61) Sean $\begin{cases} S_1 = \{(\theta;\theta+\delta;\delta;0),\ \forall\, \theta,\delta \in \Re\} \\ S_2 =< (3;1;0;1),(2;0;0;4) > \end{cases}$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 =< (3;1;0;1) >$
c) $S_1 \cap S_2 =< (2;0;0;4) >$

62) Sean $S_1 = \left\{\begin{bmatrix} \theta & \theta-\delta \\ 0 & \delta \end{bmatrix},\ \forall\, \theta,\delta \in \Re\right\}$ y $S_2 =< \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} >$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = < \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} >$; c) $S_1 \cap S_2 = S_1$

63) Sean $\begin{cases} S_1 = \{\theta.x^3 + (\theta-\delta).x^2 + \delta,\ \forall\, \theta,\delta \in \Re\} \\ S_2 =< x^3 + 2.x^2 + x,\ 2.x^3 + 2 > \end{cases}$.

a) $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$; b) $S_1 \cap S_2 = S_2$; c) $S_1 \cap S_2 = < x^3 + 1 >$

64) Si "S" y "T" son subespacios del espacio "V", el subespacio $S+T$ está formado por los vectores de "V" que pueden expresarse como suma de un vector de "S" y otro de "T".

a) Falso ; b) Verdadero

65) Si "S" y "T" son subespacios del espacio vectorial "V", al reunir una base "S" y una base de "T" se obtiene una base del subespacio $S+T$.

a) Falso ; b) Verdadero

66) En $\Re^4$, sean $\begin{cases} S_1 = \{(\theta;\theta+\delta;\delta;0),\ \forall\, \theta,\delta \in \Re\} \\ S_2 =< (3;1;0;1),(2;3;1;0) > \end{cases}$.

a) $S_1 + S_2 = \Re^4$; b) $S_1 + S_2 = \{(x;y;z;t)\ /\ x-y+z-2.t = 0\}$
c) $S_1 + S_2 = \{(x;y;z;t)\ /\ x+y+z-2.t = 0\}$

67) En $\Re^4$, sean $\begin{cases} S_1 = \{(\theta;\theta+\delta;\delta;0),\ \forall\, \theta,\delta \in \Re\} \\ S_2 =< (3;1;0;1),(2;0;0;4) > \end{cases}$.

a) $S_1 + S_2 = \Re^4$; b) $S_1 + S_2 = \{(x;y;z;t)\ /\ x-y = 0\}$
c) $S_1 + S_2 = \{(x;y;z;t)\ /\ x = 0\}$

68) En $\Re^4$, sean $\begin{cases} S_1 = \{(x;y;z;t)\ /\ x-y=z+t=0\} \\ S_2 =< (0;0;0;1) > \end{cases}$.

a) $S_1 + S_2 = \Re^4$; b) $S_1 + S_2 = \{(x;y;z;t)\ /\ x-y=0\}$
c) $S_1 + S_2 = \{(x;y;z;t)\ /\ x=0\}$

69) Siendo "S" y "T" subespacios del espacio vectorial "V", siempre sucede que $\dim.(S)+\dim.(T)=\dim.(S\cap T)+\dim.(S+T)$.

a) Falso ; b) Verdadero

70) Si "S" y "T" son subespacios de "V", se dice que "V" es suma directa de "S" y "T" o que "S" y "T" son suplementarios si $S\cap T=\{\bar{0}\}$ y $S+T=V$. Se denota $V=S\oplus T$.

a) Falso ; b) Verdadero

71) Sean "S" y "T" subespacios de $\Re^4$ tales que:
$\dim.(S)=2$; $\dim.(T)=3$; $\dim.(S+T)=4$

a) "S" y "T" son suplementarios
b) "S" y "T" no son suplementarios

72) Sean "S" y "T" subespacios de $\Re^4$ tales que:
$\dim.(S)=1$; $\dim.(T)=3$; $\dim.(S+T)=4$

a) "S" y "T" son suplementarios
b) "S" y "T" no son suplementarios

73) Sean "S" y "T" subespacios de $M_{2\times 3}$, siendo $S\oplus T=M_{2\times 3}$ y $\dim.(S)=2$.

a) $\dim.(T)=3$; b) $\dim.(T)=4$; c) $\dim.(T)=5$

74) Si "S" y "T" son subespacios vectoriales de "V" y $V=S\oplus T$, todo vector de "V" puede expresarse de modo único como suma de un vector de "S" y otro de "T".

a) Falso ; b) Verdadero

75) Si "S" y "T" son subespacios de "V" y $V=S\oplus T$, el único subespacio de "V" que contiene a "S" y "T" es el propio "V".

a) Falso ; b) Verdadero

76) Si "S" y "T" son subespacios vectoriales de "V", el conjunto $S\cup T$ también es subespacio de "V".

a) Falso ; b) Verdadero

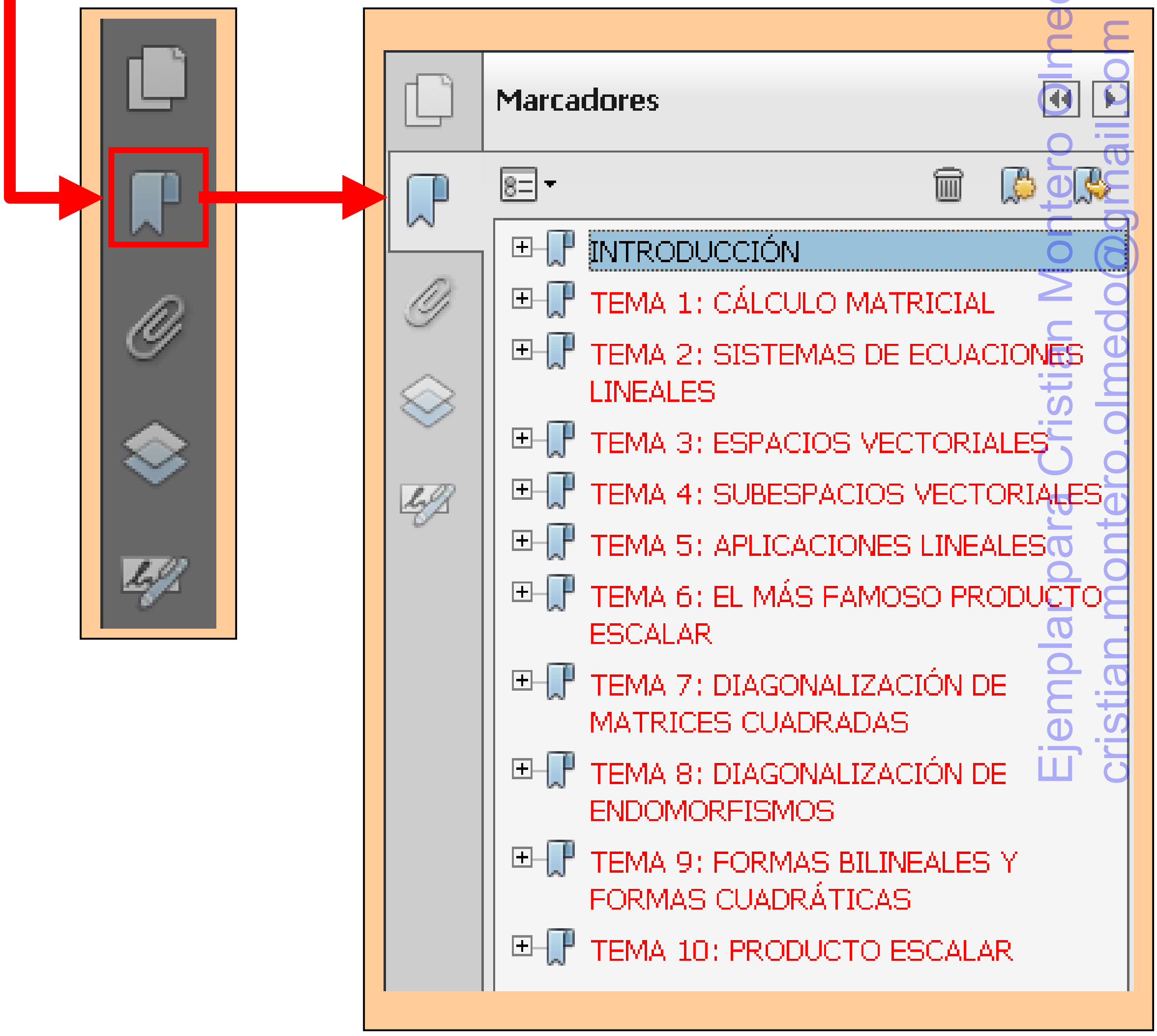
77) Si "S" es subespacio de "V", para determinar un subespacio suplementario a "S" basta ampliar una base de "S" hasta formar una base de "V", y los vectores añadidos a dicha base de "S" forman una base de un subespacio suplementario a "S".

a) Falso ; b) Verdadero

79) Señale el subespacio no suplementario a $S=<(2;3;1)>$.

a) $T=<(1;0;1),\ (3;3;1)>$; b) $T=<(1;0;1),\ (1;3;0)>$
c) $T=<(1;1;1),\ (3;4;0)>$

Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.

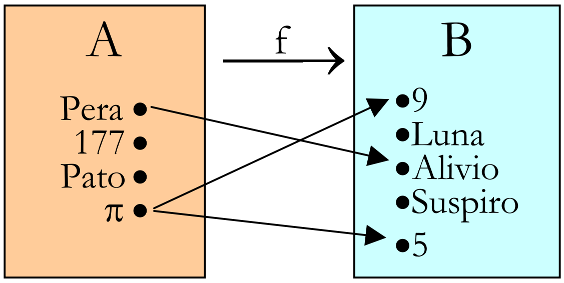


Tema 5
Aplicaciones lineales

5.01 Correspondencia entre conjuntos
5.02 Aplicación entre conjuntos
5.03 Aplicación lineal
5.04 Expresión de una aplicación lineal
5.05 Núcleo e imagen de una aplicación lineal
5.06 Propiedades de las aplicaciones lineales
5.07 Clasificación de las aplicaciones lineales
5.08 Las aplicaciones lineales y los cambios de base
5.09 Operaciones con aplicaciones lineales
5.10 Composición de aplicaciones lineales

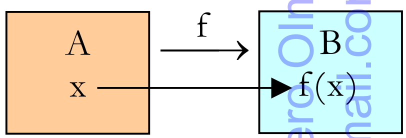
5.1 CORRESPONDENCIA ENTRE CONJUNTOS

Siendo "A" y "B" conjuntos cualesquiera, se llama **correspondencia** de "A" en "B" a **todo criterio o ley que asocie elementos de "A" con elementos de "B".** Si el nombre del criterio es "f", para expresar que "f" es una correspondencia de "A" en "B" escribimos $f\colon A \mapsto B$, y decimos que "A" es el **conjunto inicial** de "f", y "B" el **conjunto final.**



Que quede claro: en la definición de **correspondencia** no se impone ninguna restricción o traba al criterio "f" que asocia elementos de "A" con elementos "B"; por tanto, queda definida una **correspondencia** de "A" en "B" en el mismo instante en que se establece un criterio que asocie elementos de "A" con elementos "B", aunque ese criterio sea absurdo o chiripitiflaútico.

Observa: en el conjunto inicial "A" puede haber elementos a los que "f" no les asocia ningún elemento del conjunto final "B"; también puede ocurrir que "f" asocie varios elementos de "B" a un mismo elemento de "A".

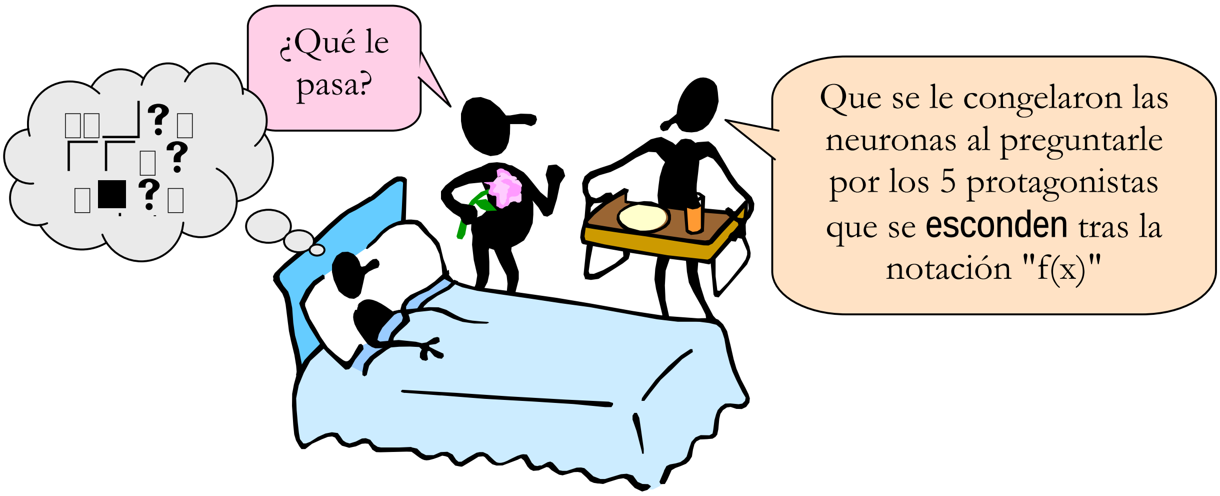


Importantísimo: siendo "x" un elemento del conjunto inicial "A", para referirnos al elemento del conjunto final "B" que la correspondencia "f" asocia a "x", escribiremos "f(x)", que los profesionales leen **"efe de x"**... y los principiantes deben leer **imagen de "x" según "f".**

¡Están condenados al fracaso los principiantes que se empecinen en leer como leen los profesionales!, pues tras la notación "f(x)" hay 5 protagonistas:

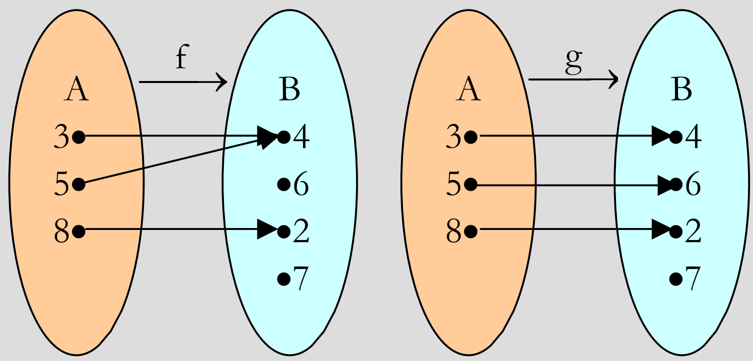
1) Un conjunto "A"; es protagonista "invisible", pues "A" no aparece por ningún lado en la notación "f(x)".
2) Un conjunto "B"; también invisible.
3) Una ley "f" que asocia elementos de "A" con elementos de "B"; es protagonista "visible", pues en la notación "f(x)" hay una "f".
4) El elemento "x" del conjunto "A"; también visible, pues en la notación "f(x)" hay una "x".
5) El quinto protagonista es un elemento del conjunto "B", pero no un elemento cualquiera de "B", el quinto protagonista es el elemento de "B" que la ley "f" asocia a "x", y para denotarlo nadie ha inventado una notación más clara y concisa que "f(x)".

Si "f(x)" lo lees imagen de "x" según "f", te será más fácil tener a la vez en el cerebro los 5 protagonistas que esconde la notación "f(x)"... y todo lo entenderás mucho mejor.



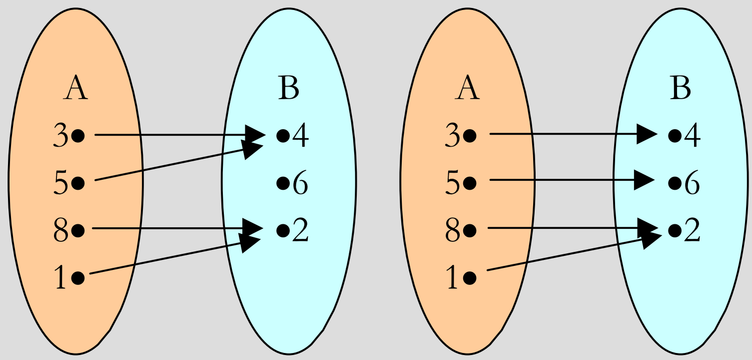
5.2 APLICACIÓN ENTRE CONJUNTOS

- Se dice que la correspondencia $f:A \mapsto B$ es una **aplicación** si cada elemento de "A" tiene una única imagen en "B".
- Se dice que la aplicación $f:A \mapsto B$ es **inyectiva** si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Es decir, la aplicación "f" es inyectiva cuando dos elementos distintos del conjunto "A" tienen imágenes distintas en el conjunto "B".



La aplicación "f" no es inyectiva, pues siendo $3 \neq 5$, es $f(3) = f(5)$.
La aplicación "g" es inyectiva, pues si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

- Se dice que la aplicación $f:A \mapsto B$ es **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto final "B" es imagen de algún elemento del conjunto inicial "A".



La aplicación "f" no es sobreyectiva, pues en el conjunto final "B" hay elementos (el 6) que no son imágenes de ningún elemento de "A", lo que no sucede con la aplicación "g", que es sobreyectiva.

- Se dice que la aplicación $f: A \mapsto B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.
- **Observa:** si el conjunto inicial de la aplicación "f" es un espacio vectorial V_n de dimensión "n", cada vector $\overline{x}$ de dicho conjunto está identificado mediante "n" números reales (las coordenadas $(x_1; .... ; x_n)$ de $\overline{x}$ respecto de la base de referencia elegida en V_n). Del mismo modo, si el conjunto final de la aplicación "f" es un espacio vectorial V_m de dimensión "m", el vector $f(\overline{x}) \in V_m$ está identificado mediante "m" números reales (que son las coordenadas $(y_1; .... ; y_m)$ de $f(\overline{x}) \in V_m$ respecto de la base de referencia elegida en V_m). Así las cosas, una aplicación $f: V_n \mapsto V_m$ no es más que una ley que a cada "n" números reales $(x_1; .... ; x_n)$ les asocia "m" números reales $(y_1; .... ; y_m)$.

$$\begin{array}{ccc} V_n & \xrightarrow{f} & V_m \\ (x_1; .... ; x_n) & \longrightarrow & (y_1; .... ; y_m) \end{array}$$

Por ejemplo, si en $\Re^2$ y $\Re^3$ se toman como bases de referencia las respectivas bases canónicas, hablar de la aplicación $f: \Re^2 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(x_1; x_2) = (2.x_1.x_2 \,;\, x_1^3 \,;\, x_2^2)$$

es hablar de la ley que al vector que tiene coordenadas $(x_1; x_2)$ respecto de la base canónica de $\Re^2$ le asocia el vector de $\Re^3$ cuyas coordenadas respecto de la base canónica de este espacio son $(2.x_1.x_2 \,;\, x_1^3 \,;\, x_2^2)$.

$$\begin{array}{ccc} \Re^2 & \xrightarrow{f} & \Re^3 \\ (x_1; x_2) & \longrightarrow & (2.x_1.x_2 \,;\, x_1^3 \,;\, x_2^2) \end{array}$$

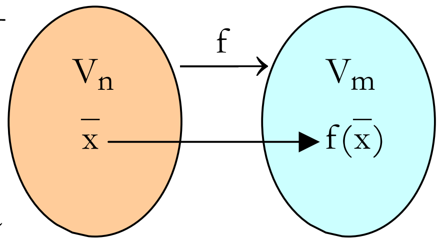
Por tanto, es:

$$f(3;4) = (2.3.4; 3^3; 4^2) = (24; 27; 16)$$
$$f(1;3) = (2.1.3; 1^3; 3^2) = (6; 1; 9)$$
$$f(0;2) = (2.0.2; 0^3; 2^2) = (0; 0; 4)$$

Entenderás la importancia de este asunto si, por ejemplo, piensas en una empresa que emplea capital y trabajo para producir naranjas, limones y pomelos, de modo que cuando las respectivas cantidades empleadas de capital y trabajo son x_1 y x_2, las respectivas producciones de naranjas, limones y pomelos son $2.x_1.x_2$, x_1^3 y x_2^2.

5.3 APLICACIÓN LINEAL

Si V_n y V_m son espacios vectoriales y $f : V_n \mapsto V_m$ es una aplicación (ley que a cada vector de V_n le asocia un único vector del espacio V_m), se dice que "f" es una **aplicación lineal u homomorfismo** si se satisfacen las siguientes dos condiciones:



1) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n$ es $f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$
2) $\forall \bar{x} \in V_n$ y $\forall \alpha \in \Re$ es $f(\alpha \bullet \bar{x}) = \alpha \bullet f(\bar{x})$

Lee despacio y pensando en lo que lees: la primera condición dice que la aplicación "f" es tal que la imagen según "f" del vector $\bar{x} + \bar{y}$ coincide con la suma de las respectivas imágenes de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ según "f". La segunda condición dice que la imagen según "f" del vector $\alpha \bullet \bar{x}$ coincide con el producto del escalar "α" por la imagen de $\bar{x}$ según "f".

Las dos condiciones anteriores pueden condensarse en una:

$$\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in V_n \text{ y } \forall\ \alpha, \beta \in \Re \text{ ocurre que } f(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}) = \alpha \bullet f(\bar{x}) + \beta \bullet f(\bar{y})$$

Grábalo en el cerebro: Una aplicación $f : V_n \mapsto V_m$ es **lineal** sólo si su expresión matemática es de la forma:

$$f(x_1; \dots ; x_n) = (a_{11}.x_1 + \dots + a_{1n}.x_n \,; \dots\dots ; a_{m1}.x_1 + \dots + a_{mn}.x_n)$$

donde todos los a_{ij} son constantes.

Si esculpes en el cerebro lo que acabamos de decir, al primer golpe de vista tendrás la **certeza** de que **son lineales** las siguientes aplicaciones de $\Re^3$ en $\Re^4$:

$$f_1 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, f_1(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + 3.x_2 \,; 4.x_1 - 5.x_2 \,; x_1 - x_3 \,; x_2)$$
$$f_2 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, f_2(x_1;x_2;x_3) = (-4.x_1 + x_3 \,; 7.x_2 \,; 8.x_2 \,; 2.x_1 + 5.x_2 - x_3)$$
$$f_3 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, f_3(x_1;x_2;x_3) = (7.x_2 + 5.x_3 \,; 0 \,; 0 \,; 2.x_1 + 3.x_2 - x_3)$$
$$f_4 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, f_4(x_1;x_2;x_3) = (0 \,; 0 \,; 0 \,; 7.x_1 + 8.x_2 + 1236.x_3)$$
$$f_5 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, f_5(x_1;x_2;x_3) = (-3.x_2 \,; -5.x_2 \,; 0 \,; x_2)$$
$$f_6 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, f_6(x_1;x_2;x_3) = (7.x_1 - 6.x_2 \,; -5.x_3 \,; x_2 + x_3 \,; x_1)$$
$$f_7 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, f_7(x_1;x_2;x_3) = (x_1 \,; x_3 \,; x_3 \,; x_1)$$

Y también tendrás la **certeza** de que **no es lineal** ninguna de las siguientes aplicaciones del espacio vectorial $\Re^3$ en el espacio vectorial $\Re^4$:

$$g_1 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, g_1(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + 3.x_2 + 13 \,; 4.x_1 - 5.x_2 \,; x_1 - x_3 \,; x_2)$$
$$g_2 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, g_2(x_1;x_2;x_3) = (-4.x_1.x_3 \,; 7.x_2 + 8.x_2 \,; 2.x_1 + 5.x_2 - x_3)$$
$$g_3 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, g_3(x_1;x_2;x_3) = (7.x_2^2 + 5.x_3 \,; 0 \,; 0 \,; 2.x_1 + 3.x_2 - x_3)$$
$$g_4 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, g_4(x_1;x_2;x_3) = (0 \,; 0 \,; 19 \,; 7.x_1 + 8.x_2 + 1236.x_3)$$
$$g_5 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, g_5(x_1;x_2;x_3) = (-3.\text{sen}\ x_2 \,; -5.x_2 \,; x_3 \,; x_2)$$
$$g_6 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, g_6(x_1;x_2;x_3) = (7.x_1 - 6.x_2 \,; -5.x_3 \,; x_2 + x_3 \,; \sqrt{1 + x_1^2})$$
$$g_7 : \Re^3 \mapsto \Re^4 \,/\, g_7(x_1;x_2;x_3) = (1 - x_1 \,; x_3 \,; x_3 \,; x_1)$$

FONEMATO 5.3.1

1) Considerando que las bases de referencia en $\Re^2$ y $\Re^3$ son las respectivas canónicas, demuestre que es lineal la aplicación $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ tal que
$$f(x_1;x_2) = (2.x_1 + x_2\,;\,x_1 - x_2\,;\,0)$$
2) Determine las imágenes de los vectores de la base canónica de $\Re^2$ y la imagen del vector $\overline{p} = (2;3) \in \Re^2$.
3) Determine las antiimágenes de los vectores $\overline{d}_1 = (7;2;0)$ y $\overline{d}_2 = (3;4;5)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{c}\Re^2\\ \underbrace{(x_1;x_2)}_{\overline{x}}\end{array} \xrightarrow{\;f\;} \begin{array}{c}\Re^3\\ \underbrace{(2.x_1 + x_2\,;\,x_1 - x_2\,;\,0)}_{f(\overline{x})}\end{array}$$

Como no nos chupamos el dedo, al ver la expresión matemática de la ley "f", tenemos la certeza de que es una aplicación lineal, pues la **estructura** de dicha expresión matemática es la típica de las aplicaciones lineales; a saber:
$$f(x_1;\ldots;x_n) = (a_{11}.x_1 + \ldots + a_{1n}.x_n\,;\ldots\ldots;\,a_{m1}.x_1 + \ldots + a_{mn}.x_n)$$
donde todos los a_{ij} son constantes.

1) Para demostrar que $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ es una **aplicación lineal** demostraremos que:

$$\text{a) } \forall \overline{p},\overline{q} \in \Re^2 \text{ es } f(\overline{p}+\overline{q}) = f(\overline{p}) + f(\overline{q})$$
$$\text{b) } \forall \overline{p} \in \Re^2 \text{ y } \forall \alpha \in \Re \text{ es } f(\alpha \bullet \overline{p}) = \alpha \bullet f(\overline{p})$$

La demostración es una chorrada o un petardo según se tenga o no la precaución de expresar matricialmente la información que nos dan sobre "f".

DEMOSTRACIÓN PETARDO

a) Siendo $\overline{p} = (p_1;p_2) \in \Re^2$ y $\overline{q} = (q_1;q_2) \in \Re^2$, se tiene que:
$$f(\overline{p}) = f(p_1;p_2) = (2.p_1 + p_2;p_1 - p_2;0)$$
$$f(\overline{q}) = f(q_1;q_2) = (2.q_1 + q_2;q_1 - q_2;0)$$
Como $\overline{p}+\overline{q} = (p_1 + q_1;p_2 + q_2)$, es:
$$f(\overline{p}+\overline{q}) = f(p_1 + q_1;p_2 + q_2) =$$
$$= (2.(p_1 + q_1) + (p_2 + q_2)\,;\,(p_1 + q_1) - (p_2 + q_2)\,;\,0) =$$
$$= \underbrace{(2.p_1 + p_2\,;\,p_1 - p_2\,;\,0)}_{f(\overline{p})} + \underbrace{(2.q_1 + q_2\,;\,q_1 - q_2\,;\,0)}_{f(\overline{q})} = f(\overline{p}) + f(\overline{q})$$

b) Siendo $\overline{p} = (p_1;p_2) \in \Re^2$ y $\alpha \in \Re$, es $\alpha \bullet \overline{p} = (\alpha.p_1;\alpha.p_2)$; así:
$$f(\alpha \bullet \overline{p}) = f(\alpha.p_1;\alpha.p_2) = (2.(\alpha.p_1) + \alpha.p_2\,;\,\alpha.p_1 - \alpha.p_2\,;\,0) =$$
$$= \alpha \bullet \underbrace{(2.p_1 + p_2\,;\,p_1 - p_2\,;\,0)}_{f(\overline{p})} = \alpha \bullet f(\overline{p})$$

DEMOSTRACIÓN RÁPIDA

Expresamos matricialmente la información que nos dan sobre la ley "f":

$$f(\overline{x})=f(x_1;x_2)=(2.x_1+x_2\,;x_1-x_2\,;0)=\underbrace{\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\0&0\end{bmatrix}}_{A}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}_{\overline{x}}=A\bullet\overline{x}$$

Así, la demostración de que "f" es una aplicación lineal es trivial:

a) Si $\overline{p},\overline{q}\in\mathfrak{R}^2$ es $f(\overline{p})=A\bullet\overline{p}$ y $f(\overline{q})=A\bullet\overline{q}$.

Es $f(\overline{p}+\overline{q})=A\bullet(\overline{p}+\overline{q})=A\bullet\overline{p}+A\bullet\overline{q}=f(\overline{p})+f(\overline{q})$.

b) Si $\overline{p}\in\mathfrak{R}^2$ y $\alpha\in\mathfrak{R}$, es $f(\alpha\bullet\overline{p})=A\bullet(\alpha\bullet\overline{p})=\alpha\bullet(A\bullet\overline{p})=\alpha\bullet f(\overline{p})$

Fíjate bien: la demostración "rápida" es la misma sea cuál sea la aplicación lineal. Por ejemplo, para la aplicación lineal $f:\mathfrak{R}^3\mapsto\mathfrak{R}^4$ tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3)=(4.x_1+x_3\,;x_2+x_3\,;x_1+x_3\,;8.x_2-x_3)$$

sería: $$f(\overline{x})=\underbrace{\begin{bmatrix}4&0&1\\0&1&1\\1&0&1\\0&8&-1\end{bmatrix}}_{A}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}_{\overline{x}}$$

y a partir de aquí la demostración es exactamente la misma.

Observa: el número de filas (columnas) de la matriz "A" coincide con la dimensión del espacio "final" ("inicial") de "f".

2) La base canónica de $\mathfrak{R}^2$ es $B=\{\overline{h}_1=(1;0),\ \overline{h}_2=(0;1)\}$, siendo:

$$f(\overline{h}_1)=f(1;0)=(2.1+0;1-0;0)=(2;1;0)$$
$$f(\overline{h}_2)=f(0;1)=(2.0+1;0-1;0)=(1;-1;0)$$

Si $\overline{p}=(2;3)\in\mathfrak{R}^2$, es $f(\overline{p})=f(2;3)=(2.2+3;2-3;0)=(7;-1;0)$.

$$\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{f} \mathfrak{R}^3$$

$(x_1;x_2)\longrightarrow(2.x_1+x_2;x_1-x_2;0)$

$(1;0)\longrightarrow(2.1+0;1-0;0)=(2;1;0)$

$(0;1)\longrightarrow(2.0+1;0-1;0)=(1;-1;0)$

$(2;3)\longrightarrow(2.2+3;2-3;0)=(7;-1;0)$

¡Coño... qué curioso!: la primera (segunda) columna de la matriz "A" es la imagen según "f" del primer (segundo) vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial":

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\0&0\end{bmatrix}$$
$$\uparrow\qquad\uparrow$$
$$f(\overline{h}_1)\quad f(\overline{h}_2)$$

¿Será siempre así?

3) Al pedirnos la antiimagen del vector $\bar{d}_1 = (7;2;0) \in \Re^3$ piden que determinemos, si existe, el vector del espacio "inicial" $\Re^2$ cuya imagen según "f" es el vector $\bar{d}_1 = (7;2;0) \in \Re^3$:

$$\begin{array}{ccc} \Re^2 & \xrightarrow{f} & \Re^3 \\ (x_1;x_2) & \longrightarrow & (2.x_1 + x_2;x_1 - x_2;0) \\ (?_1;?_2) & \longrightarrow & (7;2;0) \end{array}$$

O sea, piden el vector $\bar{x} \in \Re^2$ tal que $f(\bar{x}) = (7;2;0) \in \Re^3$... y la cosa es fácil, pues la exigencia de que $f(\bar{x}) = (7;2;0)$ nos conduce a un SLNH de 3 ecuaciones (tantas como dimensión tiene el espacio final) y 2 incógnitas (tantas como dimensión tiene el espacio inicial):

$$f(\bar{x}) = (7;2;0) \Rightarrow (2.x_1 + x_2\,;x_1 - x_2\,;0) = (7;2;0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

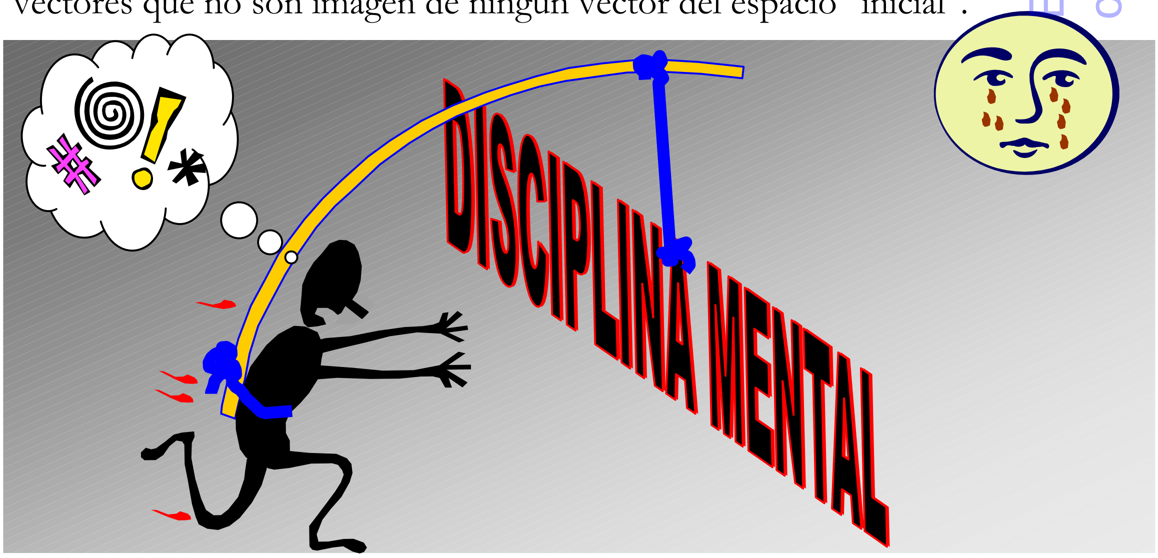
Por tanto, la imagen según "f" del vector de $\Re^2$ que tiene coordenadas $(3;1)$ respecto de la base canónica de $\Re^2$ es el vector de $\Re^3$ que tiene coordenadas $(7;2;0)$ respecto de la base canónica de $\Re^3$.

> En este caso el sistema lineal tiene solución única, pero podría tener infinitas, lo que significaría que en el espacio "inicial" habría infinitos vectores cuya imagen según "f" es $(7;2;0)$.

Para calcular la antiimagen del vector $\bar{d}_2 = (3;4;5) \in \Re^3$ hacemos lo mismo:

$$f(\bar{x}) = (3;4;5) \Rightarrow (2.x_1 + x_2;x_1 - x_2;0) = (3;4;5) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 4 \\ 0 = 5 \end{Bmatrix}$$

que es un sistema lineal incompatible, lo que quiere decir que en el espacio "inicial" $\Re^2$ no hay ningún vector cuya imagen según "f" sea el vector de $\Re^3$ que tiene coordenadas $(3;4;5)$ respecto de la base canónica de $\Re^3$. Por tanto, la aplicación lineal "f" **no es sobreyectiva,** pues en el espacio "final" de "f" hay vectores que no son imagen de ningún vector del espacio "inicial".



FONEMATO 5.3.2

1) Considerando que las bases de referencia en $\Re^4$ y $\Re^3$ son las respectivas canónicas, demuestre que es lineal la aplicación $f:\Re^4 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1 - x_2 + x_4\, ; x_1 - x_3\, ; x_2 - x_3 - x_4)$$

2) Determine las imágenes de los vectores de la base canónica de $\Re^4$.

3) Determine la antiimagen del vector $\bar{d}_1 = (2;5;3)$.

SOLUCIÓN

$$\boxed{\begin{matrix}\Re^4 \\ \underbrace{(x_1;x_2;x_3;x_4)}_{\bar{x}}\end{matrix}} \xrightarrow{f} \boxed{\begin{matrix}\Re^3 \\ \underbrace{(x_1 - x_2 + x_4\, ; x_1 - x_3\, ; x_2 - x_3 - x_4)}_{f(\bar{x})}\end{matrix}}$$

Como no nos chupamos el dedo, al ver la expresión matemática de la ley "f", tenemos la certeza de que es una aplicación lineal, pues la **estructura** de dicha expresión matemática es la típica de las aplicaciones lineales; a saber:

$$f(x_1; \dots ; x_n) = (a_{11}.x_1 + \dots + a_{1n}.x_n\, ; \dots\dots ; a_{m1}.x_1 + \dots + a_{mn}.x_n)$$

donde todos los a_{ij} son constantes.

1) Para demostrar que $f:\Re^4 \mapsto \Re^3$ es una **aplicación lineal** demostraremos que:

a) $\forall\ \bar{p},\bar{q} \in \Re^4$ es $f(\bar{p}+\bar{q}) = f(\bar{p}) + f(\bar{q})$

b) $\forall\ \bar{p} \in \Re^4$ y $\forall\ \alpha \in \Re$ es $f(\alpha \bullet \bar{p}) = \alpha \bullet f(\bar{p})$

Expresamos matricialmente la información que nos dan sobre la ley "f":

$$f(\bar{x}) = f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1 - x_2 + x_4\, ; x_1 - x_3\, ; x_2 - x_3 - x_4) =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\bar{x}}$$

O sea, es $f(\bar{x}) = A \bullet \bar{x}$; y ahora la demostración de que "f" es una aplicación lineal es siempre igual, **importa un pito** quién sea "A":

a) Si $\bar{p},\bar{q} \in \Re^4$ es $f(\bar{p}) = A \bullet \bar{p}$ y $f(\bar{q}) = A \bullet \bar{q}$.

Es:

$$f(\bar{p}+\bar{q}) = A \bullet (\bar{p}+\bar{q}) = A \bullet \bar{p} + A \bullet \bar{q} = f(\bar{p}) + f(\bar{q})$$

b) Si $\bar{p} \in \Re^4$ y $\alpha \in \Re$, es:

$$f(\alpha \bullet \bar{p}) = A \bullet (\alpha \bullet \bar{p}) = \alpha \bullet (A \bullet \bar{p}) = \alpha \bullet f(\bar{p})$$

2) La base canónica de $\Re^4$ es:

$$B = \{\bar{h}_1 = (1;0;0;0), \bar{h}_2 = (0;1;0;0), \bar{h}_3 = (0;0;1;0), \bar{h}_4 = (0;0;0;1)\}$$

Las imágenes según "f" de los vectores que la forman son:

$$f(\bar{h}_1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_1} = (1;1;0)$$

$$f(\bar{h}_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_2} = (-1;0;1)$$

$$f(\bar{h}_3) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_3} = (0;-1;-1)$$

$$f(\bar{h}_4) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{h}_4} = (1;0;-1)$$

¡Coño... otra vez lo mismo!: la k-ésima columna de "A" es la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial"

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{h}_1) & f(\bar{h}_2) & f(\bar{h}_3) & f(\bar{h}_4) \end{array}$$

¿Será siempre así?

3) Hay que determinar, si existe, un vector $\bar{x} \in \Re^4$ tal que $f(\bar{x}) = (2;5;3) \in \Re^3$:

$$f(\bar{x}) = (2;5;3) \Rightarrow (x_1 - x_2 + x_4 \,;\, x_1 - x_3 \,;\, x_2 - x_3 - x_4) = (2;5;3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + x_3 \\ x_2 = 3 + x_3 + x_4 \end{cases}$$

el sistema tiene infinitas soluciones; parametrizamos x_3 y x_4

Así, en el espacio "inicial" $\Re^4$ hay infinitos vectores cuya imagen según "f" es el vector que tiene coordenadas $(2;5;3)$ respecto de la base canónica de $\Re^3$ (el conjunto de esos vectores no es subespacio de $\Re^4$, pues son las soluciones de un SLNH)... y "f" no es inyectiva, pues en el espacio inicial hay vectores que, siendo distintos, tienen igual imagen.

FONEMATO 5.3.3

Considerando que las bases de referencia en $\Re^3$ y $\Re^4$ son las respectivas canónicas, demuestre que es lineal la aplicación $f:\Re^3 \mapsto \Re^4$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3) = (7 + x_1 - x_2 \,;\, x_1 - x_3 \,;\, x_2 - x_3)$$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{c} \Re^3 \\ \underbrace{(x_1;x_2;x_3)}_{\bar{x}} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \Re^4 \\ \underbrace{(7 + x_1 - x_2 \,;\, x_1 - x_3 \,;\, x_2 - x_3)}_{f(\bar{x})} \end{array}$$

Sin más que mirar la expresión matemática de la ley "f" y ver el "7" que anda "suelto", tenemos la certeza de que no es una aplicación lineal, pues la estructura de dicha expresión matemática no es la típica de las aplicaciones lineales:

$$f(x_1; \dots ;x_n) = (a_{11}.x_1 + \dots + a_{1n}.x_n \,; \dots\dots ;\, a_{m1}.x_1 + \dots + a_{mn}.x_n)$$

donde todos los a_{ij} son constantes.

Observa: la presencia del número 7 hace que sea imposible (incluso para los japoneses) escribir matricialmente la expresión

$$f(x_1;x_2;x_3) = (7 + x_1 - x_2 \,;\, x_1 - x_3 \,;\, x_2 - x_3)$$

que dice cuál es la imagen según "f" del vector del espacio "inicial" $\Re^3$ que tiene coordenadas $(x_1;x_2;x_3)$ respecto de la base canónica de $\Re^3$.

Para demostrar que $f:\Re^3 \mapsto \Re^4$ no es lineal hay que demostrar que no se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \forall\ \bar{p},\bar{q} \in \Re^4, \text{ es } f(\bar{p}+\bar{q}) = f(\bar{p}) + f(\bar{q}) \\ \text{b) } \forall\ \bar{p} \in \Re^4 \text{ y } \forall\ \alpha \in \Re, \text{ es } f(\alpha \bullet \bar{p}) = \alpha \bullet f(\bar{p}) \end{array}$$

Como no nos chupamos el dedo, elegimos la más cómoda:

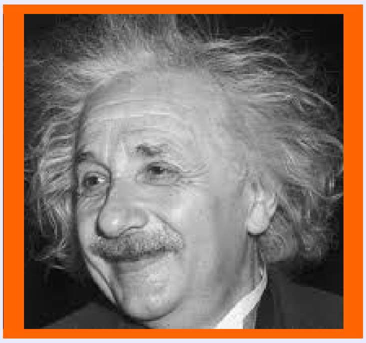
b) Si $\bar{p} = (p_1;p_2;p_3) \in \Re^3$, es $f(\bar{p}) = (7 + p_1 - p_2 \,;\, p_1 - p_3 \,;\, p_2 - p_3)$, siendo:

$$f(\alpha \bullet \bar{p}) = f(\alpha.p_1;\alpha.p_2;\alpha.p_3) =$$
$$= (7 + \alpha.p_1 - \alpha.p_2 \,;\, \alpha.p_1 - \alpha.p_3 \,;\, \alpha.p_2 - \alpha.p_3) \neq \alpha \bullet f(\bar{p})$$

la presencia del "7" hace que sea imposible sacar factor común "α"

No sé con qué armas se luchará en la tercera Guerra Mundial, pero sí sé con cuáles lo harán en la cuarta: palos y mazas.

Albert Einstein



FONEMATO 5.3.4

Sea la aplicación $f: M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ tal que $f(A) = 2\bullet A + 3\bullet A^t$
Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

SOLUCIÓN

$$M_{2\times2} \xrightarrow{f} M_{2\times2}$$
$$A \longrightarrow 2\bullet A + 3\bullet A^t$$

Latiguillo: demostraremos que $f: M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ es una aplicación lineal si demostramos que:

a) $\forall P, Q \in M_{2\times2}$ es $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$
b) $\forall P \in M_{2\times2}$ y $\forall \alpha \in \Re$ es $f(\alpha \bullet P) = \alpha \bullet f(P)$

Veamos:

a) Si $P, Q \in M_{2\times2}$ es $f(P) = 2\bullet P + 3\bullet P^t$ y $f(Q) = 2\bullet Q + 3\bullet Q^t$.
Es:

$$f(P+Q) = 2\bullet(P+Q) + 3\bullet(P+Q)^t =$$
$$= 2\bullet P + 2\bullet Q + 3\bullet P^t + 3\bullet Q^t =$$
$$= \underbrace{(2\bullet P + 3\bullet P^t)}_{f(P)} + \underbrace{(2\bullet Q + 3\bullet Q^t)}_{f(Q)} = f(P) + f(Q)$$

b) Si $P \in M_{2\times2}$ y $\alpha \in \Re$ es:

$$f(\alpha\bullet P) = 2\bullet(\alpha\bullet P) + 3\bullet(\alpha\bullet P)^t = \alpha\bullet\underbrace{(2\bullet P + 3\bullet P^t)}_{f(P)} = \alpha\bullet f(P)$$

Queda demostrado que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

FONEMATO 5.3.5

Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2 y P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3.
Sea $f: P_2 \mapsto P_3$ la aplicación tal que

$$f(a_1.x^2 + a_2.x + a_3) = a_2.x^3 + a_1.x^2 + (a_1 + a_2).x + a_3$$

Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

SOLUCIÓN

$$P_2 \xrightarrow{f} P_3$$

$$\underbrace{a_1.x^2 + a_2.x + a_3}_{\bar{x}} \longrightarrow \underbrace{a_2.x^3 + a_1.x^2 + (a_1 + a_2).x + a_3}_{f(\bar{x})}$$

Latiguillo: demostraremos que $f: P_2 \mapsto P_3$ es una aplicación lineal u homomorfismo si demostramos que:

$$\text{a) } \forall\ \bar{p}, \bar{q} \in P_2 \text{ es } f(\bar{p} + \bar{q}) = f(\bar{p}) + f(\bar{q})$$
$$\text{b) } \forall\ \bar{p} \in P_2 \text{ y } \forall\ \alpha \in \Re \text{ es } f(\alpha \bullet \bar{p}) = \alpha \bullet f(\bar{p})$$

Veamos:

a) Siendo $\bar{p} = p_1.x^2 + p_2.x + p_3 \in P_2$, es:

$$f(\bar{p}) = p_2.x^3 + p_1.x^2 + (p_1 + p_2).x + p_3$$

Siendo $\bar{q} = q_1.x^2 + q_2.x + q_3 \in P_2$, es:

$$f(\bar{q}) = q_2.x^3 + q_1.x^2 + (q_1 + q_2).x + q_3$$

Es $\bar{p} + \bar{q} = (p_1 + q_1).x^2 + (p_2 + q_2).x + (p_3 + q_3) \in P_2$.

Es:

$$f(\bar{p} + \bar{q}) =$$
$$= (p_2 + q_2).x^3 + (p_1 + q_1).x^2 + (p_1 + q_1 + p_2 + q_2).x + p_3 + q_3 =$$
$$= \underbrace{\left(p_2.x^3 + p_1.x^2 + (p_1 + p_2).x + p_3\right)}_{f(\bar{p})} + \underbrace{\left(q_2.x^3 + q_1.x^2 + (q_1 + q_2).x + q_3\right)}_{f(\bar{q})} =$$
$$= f(\bar{p}) + f(\bar{q})$$

b) Siendo $\alpha \in \Re$, es $\alpha \bullet \bar{p} = \alpha.p_1.x^2 + \alpha.p_2.x + \alpha.p_3 \in P_2$.

Es:

$$f(\alpha \bullet \bar{p}) = \alpha.p_2.x^3 + \alpha.p_1.x^2 + (\alpha.p_1 + \alpha.p_2).x + \alpha.p_3 =$$
$$= \alpha \bullet \underbrace{\left(p_2.x^3 + p_1.x^2 + (p_1 + p_2).x + p_3\right)}_{f(\bar{p})} = \alpha \bullet f(\bar{p})$$

Queda demostrado que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

FONEMATO 5.3.6

Sea P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3 y P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2.
Sea $f : P_3 \mapsto P_2$ la aplicación tal que $f(p(x)) = p'(x) - p''(x)$.
Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ p(x) & \longrightarrow & p'(x) - p''(x) \end{array}$$

Latiguillo: demostraremos que $f : P_3 \mapsto P_2$ es una aplicación lineal si demostramos que:

a) $\forall\ p(x), q(x) \in P_3$ es $f(p(x)+q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$
b) $\forall\ p(x) \in P_3$ y $\forall\ \alpha \in \Re$ es $f(\alpha \bullet p(x)) = \alpha \bullet f(p(x))$

Veamos:

a) Siendo $p(x) = p_1.x^3 + p_2.x^2 + p_3.x + p_4 \in P_3$, es:

$$f(p(x)) = p'(x) - p''(x) = \left(3.p_1.x^2 + 2.p_2.x + p_3\right) - \left(6.p_1.x + 2.p_2\right) =$$

$$\boxed{p'(x) = 3.p_1.x^2 + 2.p_2.x + p_3 \ ;\ p''(x) = 6.p_1.x + 2.p_2}$$

$$= 3.p_1.x^2 + (2.p_2 - 6.p_1).x + p_3 - 2.p_2$$

Siendo $q(x) = q_1.x^3 + q_2.x^2 + q_3.x + q_4 \in P_3$, es:

$$f(q(x)) = q'(x) - q''(x) = 3.q_1.x^2 + (2.q_2 - 6.q_1).x + q_3 - 2.q_2$$

Es $p(x) + q(x) = (p_1 + q_1).x^3 + (p_2 + q_2).x^2 + (p_3 + q_3).x + p_4 + q_4 \in P_3$.

Es:

$$f(p(x)+q(x)) =$$

$$= 3.(p_1+q_1).x^2 + \left(2.(p_2+q_2) - 6.(p_1+q_1)\right).x + \left((p_3+q_3) - 2.(p_2+q_2)\right) =$$

$$= \underbrace{\left(3.p_1.x^2 + (2.p_2 - 6.p_1).x + p_3 - 2.p_2\right)}_{f(p(x))} +$$

$$+ \underbrace{\left(3.q_1.x^2 + (2.q_2 - 6.q_1).x + q_3 - 2.q_2\right)}_{f(q(x))} = f(p(x)) + f(q(x))$$

b) Siendo $\alpha \in \Re$, es $\alpha \bullet p(x) = \alpha.p_1.x^3 + \alpha.p_2.x^2 + \alpha.p_3.x + \alpha.p_4 \in P_3$.

Es:

$$f(\alpha \bullet p(x)) = 3.\alpha.p_1.x^2 + (2.\alpha.p_2 - 6.\alpha.p_1).x + \alpha.p_3 - 2.\alpha.p_2 =$$

$$= \alpha \bullet \underbrace{\left(3.p_1.x^2 + (2.p_2 - 6.p_1).x + p_3 - 2.p_2\right)}_{f(p(x))} = \alpha \bullet f(p(x))$$

Queda demostrado que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

FONEMATO 5.3.7

Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2.
Sea $f : P_2 \mapsto \Re^2$ la aplicación tal que $f(p(x)) = (2.p(0) \,;\, p'(1))$.
Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{c} P_2 \\ p(x) \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \Re^2 \\ (2.p(0) \,;\, p'(1)) \end{array}$$

Latiguillo: demostraremos que $f : P_2 \mapsto \Re^2$ es una aplicación lineal si demostramos que:

a) $\forall\ p(x), q(x) \in P_2$ es $f(p(x)+q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$
b) $\forall\ p(x) \in P_2$ y $\forall\ \alpha \in \Re$ es $f(\alpha \bullet p(x)) = \alpha \bullet f(p(x))$

Veamos:

a) Si $p(x) = p_1.x^2 + p_2.x + p_3 \in P_2$, es:

$$f(p(x)) = (2.p(0) \,;\, p'(1)) = (2.p_3 \,;\, 2.p_1 + p_2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p(0) = \left(p_1.x^2 + p_2.x + p_3\right)_{x=0} = p_3 \\ p'(1) = \left(2.p_1.x + p_2\right)_{x=1} = 2.p_1 + p_2 \end{array}}$$

Si $q(x) = q_1.x^2 + q_2.x + q_3 \in P_2$, es:

$$f(q(x)) = (2.q(0) \,;\, q'(1)) = (2.q_3 \,;\, 2.q_1 + q_2)$$

Es $p(x) + q(x) = (p_1 + q_1).x^2 + (p_2 + q_2).x + (p_3 + q_3) \in P_2$.

Es:

$$f(p(x)+q(x)) =$$
$$= (2.p_3 + 2.q_3 \,;\, 2.(p_1+q_1)+(p_2+q_2)) =$$
$$= \underbrace{(2.p_3 \,;\, 2.p_1+p_2)}_{f(p(x))} + \underbrace{(2.q_3 \,;\, 2.q_1+q_2)}_{f(q(x))} = f(p(x)) + f(q(x))$$

b) Si $\alpha \in \Re$, es $\alpha \bullet p(x) = \alpha.p_1.x^2 + \alpha.p_2.x + \alpha.p_3 \in P_2$.

Es:

$$f(\alpha \bullet p(x)) = (2.\alpha.p_3 \,;\, 2.\alpha.p_1 + \alpha.p_2) =$$
$$= \alpha \bullet \underbrace{(2.p_3 \,;\, 2.p_1+p_2)}_{f(p(x))} = \alpha \bullet f(p(x))$$

Queda demostrado que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

FONEMATO 5.3.8

Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2.

Sea $f : P_2 \mapsto \Re^2$ la aplicación lineal tal que

$$f(p(x)) = \left(6.\int_0^1 p(x).dx \ ; \ \int_0^2 (p'(x) - p''(x)).dx \right)$$

Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{f} & \Re^2 \\ p(x) & \longrightarrow & \left(6.\int_0^1 p(x).dx \ ; \ \int_0^2 (p'(x) - p''(x)).dx \right) \end{array}$$

Latiguillo: $f : P_2 \mapsto \Re^2$ es una aplicación lineal si:

a) $\forall\ p(x), q(x) \in P_2$ es $f(p(x)+q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$

b) $\forall\ p(x) \in P_2$ y $\forall\ \alpha \in \Re$ es $f(\alpha \bullet p(x)) = \alpha \bullet f(p(x))$

Veamos:

a) Si $p(x) = p_1.x^2 + p_2.x + p_3 \in P_2$, es:

$$f(p(x)) = \left(6.\int_0^1 p(x).dx \ ; \ \int_0^2 (p'(x) - p''(x)).dx \right) = (2.p_1 + 3.p_2 + 6.p_3 \ ; 2.p_2)$$

VENTANA

$$* \ 6.\int_0^1 p(x).dx = 6.\int_0^1 (p_1.x^2 + p_2.x + p_3).dx =$$

$$= 6.\left(\frac{p_1}{3}.x^3 + \frac{p_2}{2}.x^2 + p_3.x \right)_{x=0}^{x=1} = 6.\left(\frac{p_1}{3} + \frac{p_2}{2} + p_3 \right) = 2.p_1 + 3.p_2 + 6.p_3$$

$$* \ \int_0^2 (p'(x) - p''(x)).dx = \int_0^2 (2.p_1.x - 2.p_1 + p_2).dx =$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} p'(x) = 2.p_1.x + p_2 \\ p''(x) = 2.p_1 \end{array} \right\} \Rightarrow p'(x) - p''(x) = 2.p_1.x - 2.p_1 + p_2}$$

$$= (p_1.x^2 - 2.p_1.x + p_2.x)_{x=0}^{x=2} = 2.p_2$$

Si $q(x) = q_1.x^2 + q_2.x + q_3 \in P_2$, es $f(q(x)) = (2.q_1 + 3.q_2 + 6.q_3 \ ; \ 2.q_2)$.

Es $p(x) + q(x) = (p_1 + q_1).x^2 + (p_2 + q_2).x + (p_3 + q_3) \in P_2$. Es:

$$f(p(x)+q(x)) =$$

$$= (2.(p_1 + q_1) + 3.(p_2 + q_2) + 6.(p_3 + q_3) \ ; 2.(p_2 + q_2)) =$$

$$= \underbrace{(2.p_1 + 3.p_2 + 6.p_3 \ ; \ 2.p_2)}_{f(p(x))} + \underbrace{(2.q_1 + 3.q_2 + 6.q_3 \ ; \ 2.q_2)}_{f(q(x))} = f(p(x)) + f(q(x))$$

b) Si $\alpha \in \Re$, es $\alpha \bullet p(x) = \alpha.p_1.x^2 + \alpha.p_2.x + \alpha.p_3 \in P_2$. Es:

$$f(\alpha \bullet p(x)) = (2.\alpha.p_1 + 3.\alpha.p_2 + 6.\alpha.p_3 \ ; \ 2.\alpha.p_2) =$$

$$= \alpha \bullet \underbrace{(2.p_1 + 3.p_2 + 6.p_3 \ ; \ 2.p_2)}_{f(p(x))} = \alpha \bullet f(p(x))$$

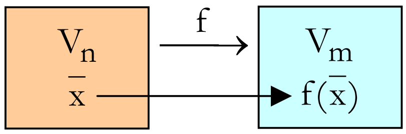
Queda demostrado que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

5.4 EXPRESIÓN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean V_n y V_m espacios vectoriales de dimensiones "n" y "m" respectivamente.

Sea $f: V_n \mapsto V_m$ una aplicación lineal; es decir:

1) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in V_n$ es $f(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$
2) $\forall \overline{x} \in V_n$ y $\forall \alpha \in \Re$ es $f(\alpha \bullet \overline{x}) = \alpha \bullet f(\overline{x})$



Supongamos que para **identificar** los vectores del espacio inicial V_n se ha elegido como base de referencia la $B_1 = \{\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_n\}$, y para **identificar** los vectores del espacio final V_m se ha elegido como base de referencia la $B_2 = \{\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_m\}$.

Demostremos que **sin más que conocer las imágenes según "f" de los vectores de la base de referencia elegida en el espacio inicial** (o sea, las imágenes de los vectores $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_n$), **podemos determinar la imagen según "f" de cualquier vector del espacio inicial.**

En efecto, supongamos que sabemos que:

$$\begin{gathered} f(\overline{h}_1) = a_{11} \bullet \overline{k}_1 + \ldots + a_{1m} \bullet \overline{k}_m \\ \vdots \\ f(\overline{h}_n) = a_{n1} \bullet \overline{k}_1 + \ldots + a_{nm} \bullet \overline{k}_m \end{gathered}$$

Sea $\overline{x} = x_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + x_n \bullet \overline{h}_n \in V_n$ tal que:

$$f(\overline{x}) = y_1 \bullet \overline{k}_1 + \ldots + y_m \bullet \overline{k}_m \quad \text{(I)}$$

También es:

$$f(\overline{x}) = f(x_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + x_n \bullet \overline{h}_n) \underset{\boxed{\text{por ser "f" una aplicación lineal}}}{=} x_1 \bullet f(\overline{h}_1) + \ldots + x_n \bullet f(\overline{h}_n) =$$

$$= x_1 \bullet (a_{11} \bullet \overline{k}_1 + \ldots + a_{1m} \bullet \overline{k}_m) + \ldots + x_n \bullet (a_{n1} \bullet \overline{k}_1 + \ldots + a_{nm} \bullet \overline{k}_m)$$

Sacando factor común $\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_m$ se obtiene:

$$f(\overline{x}) = (x_1.a_{11} + \ldots + x_n.a_{n1}) \bullet \overline{k}_1 + \ldots + (x_1.a_{1m} + \ldots + x_n.a_{nm}) \bullet \overline{k}_m \quad \text{(II)}$$

Al comparar (I) y (II) resulta evidente que:

$$\begin{gathered} y_1 = x_1.a_{11} + \ldots + x_n.a_{n1} \\ \vdots \\ y_m = x_1.a_{1m} + \ldots + x_n.a_{nm} \end{gathered}$$

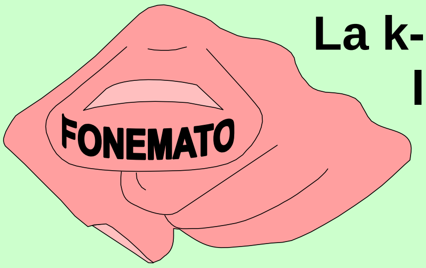
que escrito **matricialmente**, es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{\boxed{\text{coordenadas de } f(\overline{x}) \text{ respecto de } B_2}} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}^{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\boxed{\text{coordenadas de } \overline{x} \text{ respecto de } B_1}} \quad \text{(III)}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow\uparrow & \uparrow \\ f(\overline{h}_1) & \ldots & f(\overline{h}_n) \end{array}$$

- De (III) se dice **expresión** de "f" respecto de las bases B_1 y B_2; o sea, (III) es la expresión de **identifica** a "f" si los vectores del espacio inicial V_n se **identifican** mediante sus coordenadas respecto de la base B_1 y los vectores del espacio final V_m se **identifican** mediante sus coordenadas respecto de la base B_2.
- De "A" se dice **matriz asociada** a "f" respecto de las bases B_1 y B_2; o sea, "A" es la matriz que representa a "f" si los vectores de V_n se **identifican** mediante sus coordenadas respecto de la base B_1 y los vectores de V_m se **identifican** mediante sus coordenadas respecto de la base B_2.

TOMA BUENA NOTA



La k-ésima columna de la matriz "A" la forman las coordenadas de la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial".

FONEMATO 5.4.1

Siendo las bases de referencia en $\Re^3$ y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal u homomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + 7.x_2 - 5.x_3\ ;\ 3.x_1 - 4.x_2 + 9.x_3)$$

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{c} \Re^3 \\ \bar{x} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \Re^2 \\ f(\bar{x}) \end{array}$$

La base de referencia en $\Re^2$ es $B_1 = \{\bar{k}_1 = (1;0;0),\ \bar{k}_2 = (0;1;0),\ \bar{k}_3 = (0;0;1)\}$.

La base de referencia en $\Re^3$ es $B_1 = \{\bar{h}_1 = (1;0),\ \bar{h}_2 = (0;1)\}$.

Sea $\bar{x} = x_1 \bullet \bar{k}_1 + x_2 \bullet \bar{k}_2 + x_3 \bullet \bar{k}_3 \in \Re^3$.

Sea $f(\bar{x}) = y_1 \bullet \bar{h}_1 + y_2 \bullet \bar{h}_2 \in \Re^2$.

El enunciado dice que $\left\{\begin{array}{l} y_1 = 2.x_1 + 7.x_2 - 5.x_3 \\ y_2 = 3.x_1 - 4.x_2 + 9.x_3 \end{array}\right\}$; así, **matricialmente**, es:

coordenadas de $f(\bar{x})$ respecto de B_2 | coordenadas de $\bar{x}$ respecto de B_1

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Expresión matricial de "f" respecto de las bases B_1 y B_2.

$$\begin{array}{c} \Re^3 \\ (x_1;x_2;x_3) \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \Re^2 \\ (\underbrace{2.x_1 + 7.x_2 - 5.x_3}_{y_1}\ ;\ \underbrace{3.x_1 - 4.x_2 + 9.x_3}_{y_2}) \end{array}$$

Observa que la k-ésima columna de la matriz "A" que identifica a "f" respecto de las bases B_1 y B_2 la forman las coordenadas de la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial":

$$f(1;0;0) = (2.1 + 7.0 - 5.0\ ;\ 3.1 - 4.0 + 9.0) = (2\ ;\ 3)$$
$$f(0;1;0) = (2.0 + 7.1 - 5.0\ ;\ 3.0 - 4.1 + 9.0) = (7\ ;\ -4)$$
$$f(0;0;1) = (2.0 + 7.0 - 5.1\ ;\ 3.0 - 4.0 + 9.1) = (-5\ ;\ 9)$$

Por tanto, para hacer feliz a tu profe y que se ponga contento, debes escribir:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{k}_1) & f(\bar{k}_2) & f(\bar{k}_3) \end{array}$$

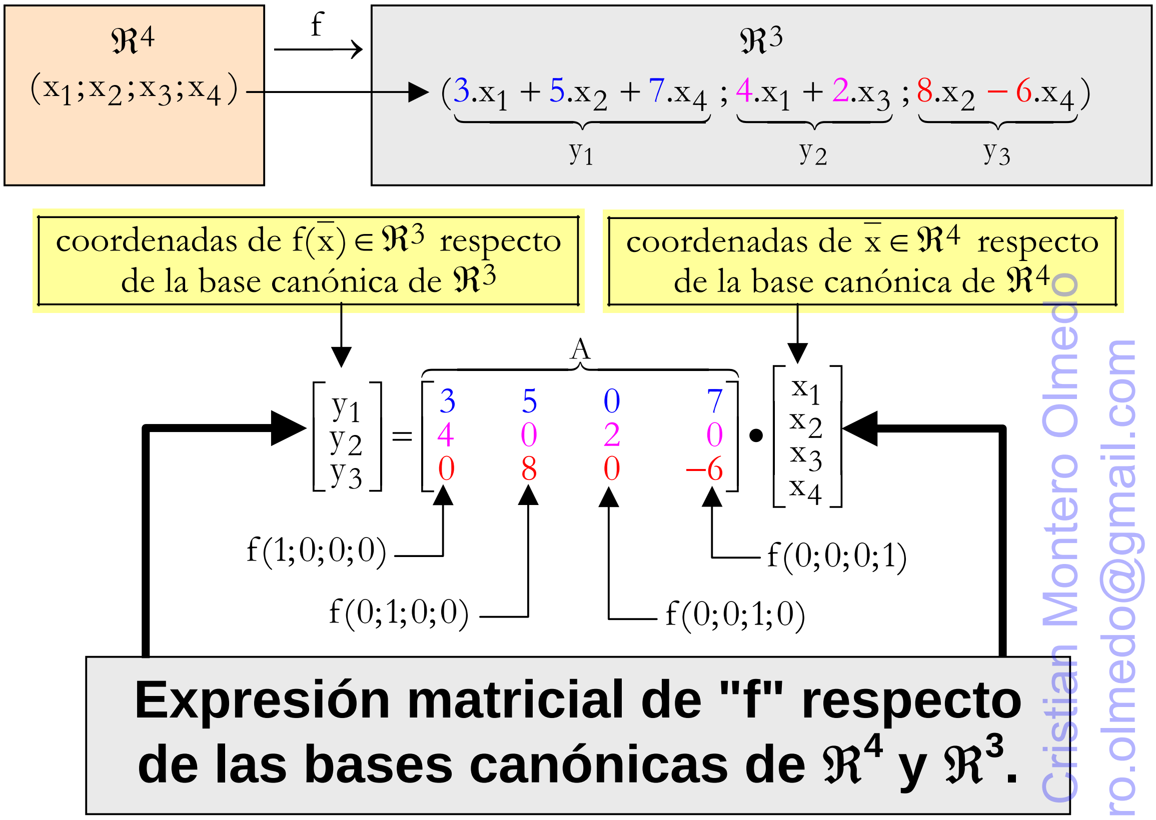
FONEMATO 5.4.2

Siendo las bases de referencia en $\mathfrak{R}^4$ y $\mathfrak{R}^3$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal u homomorfismo $f:\mathfrak{R}^4 \mapsto \mathfrak{R}^3$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (3.x_1 + 5.x_2 + 7.x_4\ ;\ 4.x_1 + 2.x_3\ ;\ 8.x_2 - 6.x_4)$$

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

SOLUCIÓN RÁPIDA



Recuerda que la k-ésima columna de la matriz "A" que identifica a una aplicación lineal "f" respecto de las bases de referencia elegidas en los espacios "inicial" y "final" la forman las coordenadas de la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial".

Si las bases de referencia en $\mathfrak{R}^3$ y $\mathfrak{R}^4$ son las canónicas, la expresión matricial que respecto de esas bases tiene la aplicación lineal $f:\mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^4$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3) = (3.x_1 + 5.x_2 + 7.x_3\ ;\ 9.x_1 + 8.x_3\ ;\ 0\ ;\ 6.x_2 + 2.x_4)$$

es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{f(\bar{x})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\bar{x}}$$

Al igual que en 5.4.1 y 5.4.2, la matriz "A" se "construye por filas": la k-ésima fila de "A" la forman los coeficientes de x_1, x_2 y x_3 en el k-ésimo componente del cuarteto $(3.x_1 + 5.x_2 + 7.x_4\ ;\ 4.x_1 + 2.x_3\ ;\ 8.x_2 - 6.x_4)$.

FONEMATO 5.4.3

Sea $f: V_2 \mapsto V_3$ una aplicación lineal, siendo $B_1 = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$ la base de referencia en el espacio V_2 y $B_2 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3\}$ la base de referencia en el espacio V_3. Determine la expresión de "f" respecto de las bases B_1 y B_2 sabiendo que:

$$f(\overline{h}_1) = 2\bullet\overline{k}_1 + 3\bullet\overline{k}_2 + 4\bullet\overline{k}_3 \quad ; \quad f(\overline{h}_2) = 5\bullet\overline{k}_1 + 6\bullet\overline{k}_2 + 7\bullet\overline{k}_3$$

SOLUCIÓN LENTA

$$V_2 \xrightarrow{f} V_3$$

$$\overline{h}_1 \longrightarrow 2\bullet\overline{k}_1 + 3\bullet\overline{k}_2 + 4\bullet\overline{k}_3$$

$$\overline{h}_2 \longrightarrow 5\bullet\overline{k}_1 + 6\bullet\overline{k}_2 + 7\bullet\overline{k}_3$$

Sea $\overline{x} = x_1\bullet\overline{h}_1 + x_2\bullet\overline{h}_2 \in V_2$ tal que $f(\overline{x}) = y_1\bullet\overline{k}_1 + y_2\bullet\overline{k}_2 + y_3\bullet\overline{k}_3 \in V_3$ (I)

También es:

$$f(\overline{x}) = f(x_1\bullet\overline{h}_1 + x_2\bullet\overline{h}_2) \underset{\uparrow}{=} x_1\bullet f(\overline{h}_1) + x_2\bullet f(\overline{h}_2) =$$

por ser "f" una aplicación lineal

$$= x_1\bullet(2\bullet\overline{k}_1 + 3\bullet\overline{k}_2 + 4\bullet\overline{k}_3) + x_2\bullet(5\bullet\overline{k}_1 + 6\bullet\overline{k}_2 + 7\bullet\overline{k}_3)$$

Sacando factor común $\overline{k}_1, \overline{k}_2$ y $\overline{k}_3$ se obtiene:

$$f(\overline{x}) = (2.x_1 + 5.x_2)\bullet\overline{k}_1 + (3.x_1 + 6.x_2)\bullet\overline{k}_2 + (4.x_1 + 7.x_2)\bullet\overline{k}_3 \quad \text{(II)}$$

Al comparar (I) y (II) resulta $\begin{Bmatrix} y_1 = 2.x_1 + 5.x_2 \\ y_2 = 3.x_1 + 6.x_2 \\ y_3 = 4.x_1 + 7.x_2 \end{Bmatrix}$, que, **matricialmente**, es:

coordenadas de $f(\overline{x})$ respecto de B_2 — coordenadas de $\overline{x}$ respecto de B_1

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{(III)}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(\overline{h}_1) & f(\overline{h}_2) \end{array}$$

$$V_2 \xrightarrow{f} V_3$$

$$(x_1; x_2) \longrightarrow (\underbrace{2.x_1 + 5.x_2}_{y_1}; \underbrace{3.x_1 + 6.x_2}_{y_2}; \underbrace{4.x_1 + 7.x_2}_{y_3})$$

SOLUCIÓN RÁPIDA

Podemos escribir (III) a la **velocidad de la luz** sin más que tener en cuenta que **la k-ésima columna de la matriz "A" la forman las coordenadas de la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial".** Así, siendo

$$f(\overline{h}_1) = 2\bullet\overline{k}_1 + 3\bullet\overline{k}_2 + 4\bullet\overline{k}_3 \quad ; \quad f(\overline{h}_2) = 5\bullet\overline{k}_1 + 6\bullet\overline{k}_2 + 7\bullet\overline{k}_3$$

quedan trivialmente determinadas las dos columnas de la matriz "A" asociada a la aplicación lineal "f" respecto de las bases B_1 y B_2.

FONEMATO 5.4.4

Sea $g: V_3 \mapsto V_2$ una aplicación lineal, siendo $B_1 = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\}$ la base de referencia en el espacio V_3 y $B_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ la base de referencia en el espacio V_2.
Determine la expresión de "g" respecto de las bases B_1 y B_2 sabiendo que:

$$g(\bar{d}_1) = 9 \bullet \bar{u}_1 + 8 \bullet \bar{u}_2 \quad ; \quad g(\bar{d}_2) = 7 \bullet \bar{u}_1 + 6 \bullet \bar{u}_2 \quad ; \quad g(\bar{d}_3) = 5 \bullet \bar{u}_1 + 4 \bullet \bar{u}_2$$

SOLUCIÓN LENTA

$$V_3 \xrightarrow{g} V_2$$

$$\bar{d}_1 \longrightarrow 9 \bullet \bar{u}_1 + 8 \bullet \bar{u}_2$$
$$\bar{d}_2 \longrightarrow 7 \bullet \bar{u}_1 + 6 \bullet \bar{u}_2$$
$$\bar{d}_3 \longrightarrow 5 \bullet \bar{u}_1 + 4 \bullet \bar{u}_2$$

Sea $\bar{x} = \mu_1 \bullet \bar{d}_1 + \mu_2 \bullet \bar{d}_2 + \mu_3 \bullet \bar{d}_3 \in V_3$ tal que $g(\bar{x}) = \theta_1 \bullet \bar{u}_1 + \theta_2 \bullet \bar{u}_2 \in V_2$ (I)
También es:

$$g(\bar{x}) = g(\mu_1 \bullet \bar{d}_1 + \mu_2 \bullet \bar{d}_2 + \mu_3 \bullet \bar{d}_3) \underset{\text{por ser "g" una aplicación lineal}}{=} \mu_1 \bullet g(\bar{d}_1) + \mu_2 \bullet g(\bar{d}_2) + \mu_3 \bullet g(\bar{d}_3) =$$

$$= \mu_1 \bullet (9 \bullet \bar{u}_1 + 8 \bullet \bar{u}_2) + \mu_2 \bullet (7 \bullet \bar{u}_1 + 6 \bullet \bar{u}_2) + \mu_3 \bullet (5 \bullet \bar{u}_1 + 4 \bullet \bar{u}_2)$$

Sacando factor común $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ se obtiene:

$$g(\bar{x}) = (9.\mu_1 + 7.\mu_2 + 5.\mu_3) \bullet \bar{u}_1 + (8.\mu_1 + 6.\mu_2 + 4.\mu_3) \bullet \bar{u}_2 \quad \text{(II)}$$

Al comparar (I) y (II) resulta $\begin{Bmatrix} \theta_1 = 9.\mu_1 + 7.\mu_2 + 5.\mu_3 \\ \theta_2 = 8.\mu_1 + 6.\mu_2 + 4.\mu_3 \end{Bmatrix}$, que, matricialmente, es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}}_{\text{coordenadas de } g(\bar{x}) \text{ respecto de } B_2} = \overbrace{\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}}_{\text{coordenadas de } \bar{x} \text{ respecto de } B_1} \quad \text{(III)}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ g(\bar{d}_1) & g(\bar{d}_2) & g(\bar{d}_3) \end{array}$$

$$V_3 \xrightarrow{g} V_2$$

$$(\mu_1;\mu_2;\mu_3) \longrightarrow (\underbrace{9.\mu_1 + 7.\mu_2 + 5.\mu_3}_{\theta_1} ; \underbrace{8.\mu_1 + 6.\mu_2 + 4.\mu_3}_{\theta_2})$$

SOLUCIÓN RÁPIDA

Podemos escribir (III) a la velocidad de la luz sin más que tener en cuenta que la k-ésima columna de la matriz "A" la forman las coordenadas de la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial". Así, siendo

$$g(\bar{d}_1) = 9 \bullet \bar{u}_1 + 8 \bullet \bar{u}_2 \quad ; \quad g(\bar{d}_2) = 7 \bullet \bar{u}_1 + 6 \bullet \bar{u}_2 \quad ; \quad g(\bar{d}_3) = 5 \bullet \bar{u}_1 + 4 \bullet \bar{u}_2$$

quedan trivialmente determinadas las tres columnas de la matriz "A" asociada a la aplicación lineal "g" respecto de las bases B_1 y B_2.

FONEMATO 5.4.5

Sea $f : V_3 \mapsto V_4$ una aplicación lineal, siendo $B_1 = \{\bar a_1, \bar a_2, \bar a_3\}$ la base de referencia en el espacio vectorial V_3 y $B_2 = \{\bar u_1, \bar u_2, \bar u_3, \bar u_4\}$ la base de referencia en el espacio vectorial V_4.
Determine la expresión de "f" respecto de las bases B_1 y B_2 sabiendo que:

$$f(\bar a_1) = 3\bullet \bar u_1 + 5\bullet \bar u_2 - 7\bullet \bar u_3$$
$$f(\bar a_2) = 2\bullet \bar u_1 - 3\bullet \bar u_2 + 5\bullet \bar u_3 + 6\bullet \bar u_4$$
$$f(\bar a_3) = \bar 0$$

SOLUCIÓN RÁPIDA

Para identificar a la aplicación lineal "f" y que no pueda ser confundida con ninguna otra criatura del universo, el enunciado nos da las imágenes de los vectores $\bar a_1$, $\bar a_2$ y $\bar a_3$ que forman la base de referencia elegida en el espacio inicial V_3.

$$V_3 \xrightarrow{f} V_4$$
$$\begin{array}{lcl} \bar a_1 & \longrightarrow & 3\bullet \bar u_1 + 5\bullet \bar u_2 - 7\bullet \bar u_3 + 0\bullet \bar u_4 \\ \bar a_2 & \longrightarrow & 2\bullet \bar u_1 - 3\bullet \bar u_2 + 5\bullet \bar u_3 + 6\bullet \bar u_4 \\ \bar a_3 & \longrightarrow & 0\bullet \bar u_1 + 0\bullet \bar u_2 + 0\bullet \bar u_3 + 0\bullet \bar u_4 \\ \bar x & \longrightarrow & f(\bar x) \end{array}$$

Sea $\bar x = x_1 \bullet \bar a_1 + x_2 \bullet \bar a_2 + x_3 \bullet \bar a_3 \in V_3$.
Sea $f(\bar x) = y_1 \bullet \bar u_1 + y_2 \bullet \bar u_2 + y_3 \bullet \bar u_3 + y_4 \bullet \bar u_4 \in V_4$
Es:

coordenadas de $f(\bar x)$ respecto de B_2 — coordenadas de $\bar x$ respecto de B_1

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ -7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar a_1) & f(\bar a_2) & f(\bar a_3) \end{array}$$

Expresión matricial de "f" respecto de las bases B_1 y B_2

$$V_3 \xrightarrow{f} V_4$$
$$(x_1;x_2;x_3) \longrightarrow (\underbrace{3.x_1 + 2.x_2}_{y_1} ; \underbrace{5.x_1 - 3.x_2}_{y_2} ; \underbrace{-7.x_1 + 5.x_2}_{y_3} ; \underbrace{6.x_2}_{y_4})$$

FONEMATO 5.4.6

Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2 y P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3. Siendo las bases de referencia en P_2 y P_3 las canónicas, sea el homomorfismo $f: P_2 \mapsto P_3$ tal que:

$$f(c_1.x^2+c_2.x+c_3)=(c_1-c_2).x^3+(c_2+c_3).x^2+(c_1+c_2-c_3).x+(c_1+c_3)$$

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

SOLUCIÓN

- La base de referencia en P_2 es $B_1=\{\overline{h}_1=x^2, \overline{h}_2=x, \overline{h}_3=1\}$.
- La base de referencia en P_3 es $B_2=\{\overline{k}_1=x^3, \overline{k}_2=x^2, \overline{k}_3=x, \overline{k}_4=1\}$.
- Sabemos que las columnas de la matriz "A" asociada a "f" respecto de las bases B_1 y B_2 son las coordenadas de los vectores $f(\overline{h}_1), f(\overline{h}_2)$ y $f(\overline{h}_3)$; así, siendo:

$$f(\overline{h}_1)=f(1.x^2+0.x+0)=(1-0).x^3+(0+0).x^2+(1+0-0).x+(1+0)=$$
$$=x^3+x+1=1\bullet\overline{k}_1+1\bullet\overline{k}_2+1\bullet\overline{k}_3+1\bullet\overline{k}_4=(1;0;1;1)$$

$$f(\overline{h}_2)=f(0.x^2+1.x+0)=(0-1).x^3+(1+0).x^2+(0+1-0).x+(0+0)=$$
$$=-x^3+x^2+x=-1\bullet\overline{k}_1+1\bullet\overline{k}_2+1\bullet\overline{k}_3+0\bullet\overline{k}_4=(-1;0;1;0)$$

$$f(\overline{h}_3)=f(0.x^2+0.x+1)=(0-0).x^3+(0+1).x^2+(0+0-1).x+(0+1)=$$
$$=x^2-x+1=0\bullet\overline{k}_1+1\bullet\overline{k}_2-1\bullet\overline{k}_3+1\bullet\overline{k}_4=(0;1;-1;1)$$

la matriz "A" asociada a "f" respecto de las bases B_1 y B_2 es:

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ f(\overline{h}_1) & f(\overline{h}_2) & f(\overline{h}_3)\end{array}\end{array}$$

Por tanto, siendo $\left\{\begin{array}{c}p(x)=c_1.x^2+c_2.x+c_3\in P_2\\ f(p(x))=d_1.x^3+d_2.x^2+d_3.x+d_4\in P_3\end{array}\right\}$, la expresión matricial de "f" respecto de las bases B_1 y B_2 es $\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\\d_4\end{bmatrix}=A\bullet\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$.

QUE QUEDE MUY CLARO

Trabajar con $f: P_2 \mapsto P_3$ es lo mismo que trabajar con $f: \Re^3 \mapsto \Re^4$ tal que

$$f(c_1;c_2;c_3)=(c_1-c_2\,;\,c_2+c_3\,;\,c_1+c_2-c_3\,;\,c_1+c_3)$$

pues como $\dim.(P_2)=3$, asimilamos $c_1.x^2+c_2.x+c_3$ a $(c_1;c_2;c_3)\in\Re^3$; y como $\dim.(P_3)=4$, asimilamos $(c_1-c_2).x^3+(c_2+c_3).x^2+(c_1+c_2-c_3).x+(c_1+c_3)$ a $(c_1-c_2\,;\,c_2+c_3\,;\,c_1+c_2-c_3\,;\,c_1+c_3)\in\Re^4$.

Por tanto, la ley $f: P_2 \mapsto P_3$ la asimilamos a la ley $f: \Re^3 \mapsto \Re^4$ tal que

$$f(c_1;c_2;c_3)=(c_1-c_2\,;\,c_2+c_3\,;\,c_1+c_2-c_3\,;\,c_1+c_3)$$

y así, en un segundo podremos "escribir por filas" la matriz "A" asociada a "f", sin necesidad de soportar el petardo de calcular $f(\overline{h}_1), f(\overline{h}_2)$ y $f(\overline{h}_3)$.

FONEMATO 5.4.7

Siendo las bases de referencia en P_3 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_3 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x)) = (3.p(1) - p'(0) \,;\, p''(1))$.
Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{f} & \Re^2 \\ p(x) & \longrightarrow & (3.p(1) - p'(0) \,;\, p''(1)) \end{array}$$

- La base de referencia en P_3 es $B_1 = \{\vec{h}_1 = x^3, \vec{h}_2 = x^2, \vec{h}_3 = x, \vec{h}_4 = 1\}$.
- La base de referencia en $\Re^2$ es $B_2 = \{\vec{k}_1 = (1;0), \vec{k}_2 = (0;1)\}$.
- Si $p(x) = p_1.x^3 + p_2.x^2 + p_3.x + p_4 \in P_3$, es:

$$f(p(x)) = (3.p(1) - p'(0) \,;\, 0 \,;\, p''(1)) = (3.p_1 + 3.p_2 + 2.p_3 + 3.p_4 \,;\, 6.p_1 + 2.p_2)$$

♦ Como $\left\{ \begin{array}{l} p(1) = \left(p_1.x^3 + p_2.x^2 + p_3.x + p_4\right)_{x=1} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\ p'(0) = \left(3.p_1.x^2 + 2.p_2.x + p_3\right)_{x=0} = p_3 \end{array} \right\}$, es:

$$3.p(1) - p'(0) = 3.(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) - p_3 = 3.p_1 + 3.p_2 + 2.p_3 + 3.p_4$$

♦ Es $p''(1) = \left(6.p_1.x + 2.p_2\right)_{x=1} = 6.p_1 + 2.p_2$

VENTANA

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{f} & \Re^2 \\ p_1.x^3 + p_2.x^2 + p_3.x + p_4 & \longrightarrow & (\underbrace{3.p_1 + 3.p_2 + 2.p_3 + 3.p_4}_{y_1} \,;\, \underbrace{6.p_1 + 2.p_2}_{y_2}) \end{array}$$

- Expresión matricial de "f" respecto de las bases canónicas de P_3 y $\Re^2$:

coordenadas de $f(p(x)) \in \Re^2$ respecto de la base canónica de $\Re^2$

coordenadas de $p(x) \in P_3$ respecto de la base canónica de P_3

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Observa que **la matriz "A" se "construye por filas": la k-ésima fila de "A" la forman los coeficientes de p_1, p_2, p_3, y p_4 en el k-ésimo componente del par $(3.p_1 + 3.p_2 + 2.p_3 + 3.p_4 \,;\, 6.p_1 + 2.p_2)$**. No obstante, si escribes

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\vec{h}_1) & f(\vec{h}_2) & f(\vec{h}_3) & f(\vec{h}_4) \end{array}$$

harás muy feliz a tu profesor, porque pensará que tienes claro que **la k-ésima columna de "A" la forman las coordenadas de la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial".**

FONEMATO 5.4.8

Siendo las bases de referencia en P_3 y P_2 las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_3 \mapsto P_2$ tal que $f(p(x)) = p'(x) - \frac{1}{2}.p''(x)$.

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ p(x) & \longrightarrow & p'(x) - \frac{1}{2}.p''(x) \end{array}$$

- La base de referencia en P_3 es $B_1 = \{\bar{h}_1 = x^3, \bar{h}_2 = x^2, \bar{h}_3 = x, \bar{h}_4 = 1\}$.
- La base de referencia en P_2 es $B_2 = \{\bar{k}_1 = x^2, \bar{k}_2 = x, \bar{k}_3 = 1\}$.
- Si $p(x) = p_1.x^3 + p_2.x^2 + p_3.x + p_4 \in P_3$, es:

$$f(p(x)) = p'(x) - \frac{1}{2}.p''(x) = 3.p_1.x^2 + (-3.p_1 + 2.p_2).x + (-p_2 + p_3)$$

VENTANA

Como $p'(x) = 3.p_1.x^2 + 2.p_2.x + p_3$ y $p''(x) = 6.p_1.x + 2.p_2$, es:

$$p'(x) - \frac{1}{2}.p''(x) = (3.p_1.x^2 + 2.p_2.x + p_3) - \frac{1}{2}.(6.p_1.x + 2.p_2) =$$
$$= 3.p_1.x^2 + (-3.p_1 + 2.p_2).x + (-p_2 + p_3)$$

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ p_1.x^3 + p_2.x^2 + p_3.x + p_4 & \longrightarrow & \underbrace{3.p_1}_{q_1}.x^2 + \underbrace{(-3.p_1 + 2.p_2)}_{q_2}.x + \underbrace{(-p_2 + p_3)}_{q_3} \end{array}$$

- Expresión matricial de "f" respecto de las bases canónicas de P_3 y P_2:

coordenadas de $f(p(x)) \in P_2$ respecto de la base canónica de P_2

coordenadas de $p(x) \in P_3$ respecto de la base canónica de P_3

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Observa que **la matriz "A" se "construye por filas".**

No obstante, si escribes

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{h}_1) & f(\bar{h}_2) & f(\bar{h}_3) & f(\bar{h}_4) \end{matrix} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

darás una enorme alegría a tu profesor, porque pensará que tienes claro que **la k-ésima columna de "A" la forman las coordenadas de la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial".**

FONEMATO 5.4.9

Siendo las bases de referencia en P_2 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f : P_2 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x) - p''(x)).dx \; ; \; \int_0^2 p''(x).dx \right)$.

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{f} & \Re^2 \\ p(x) & \longrightarrow & \left(\int_0^1 (p'(x) - p''(x)).dx \; ; \; \int_0^2 p''(x).dx \right) \end{array}$$

- La base de referencia en P_2 es $B_1 = \{\bar{h}_1 = x^2, \bar{h}_2 = x, \bar{h}_3 = 1\}$.
- La base de referencia en $\Re^2$ es $B_2 = \{\bar{k}_1 = (1;0), \bar{k}_2 = (0;1)\}$.
- Si $p(x) = p_1.x^2 + p_2.x + p_3. \in P_2$, es:

$$f(p(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x) - p''(x)).dx \; ; \; \int_0^2 p''(x).dx \right) = (-p_1 + p_2 \; ; \; 4.p_1)$$

VENTANA

$$* \int_0^1 (p'(x) - p''(x)).dx = (p_1.x^2 - 2.p_1.x + p_2.x)_{x=0}^{x=1} = -p_1 + p_2$$

$$\left. \begin{array}{l} p'(x) = 2.p_1.x + p_2 \\ p''(x) = 2.p_1 \end{array} \right\} \Rightarrow p'(x) - p''(x) = 2.p_1.x - 2.p_1 + p_2$$

$$* \int_0^2 p''(x).dx = \int_0^2 2.p_1.dx = (2.p_1.x)_{x=0}^{x=2} = 4.p_1$$

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{f} & \Re^2 \\ p_1.x^2 + p_2.x + p_3 & \longrightarrow & (\underbrace{-p_1 + p_2}_{q_1} \; ; \; \underbrace{4.p_1}_{q_2}) \end{array}$$

- Expresión matricial de "f" respecto de las bases canónicas de P_2 y $\Re^2$:

coordenadas de $f(p(x)) \in \Re^2$ respecto de la base canónica de $\Re^2$	coordenadas de $p(x) \in P_2$ respecto de la base canónica de P_2

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Observa que **la matriz "A" se "construye por filas".** No obstante, si escribes

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{h}_1) & f(\bar{h}_2) & f(\bar{h}_3) \end{array} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

harás muy feliz a tu profesor, porque pensará que tienes claro que **la k-ésima columna de "A" la forman las coordenadas de la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial".**

FONEMATO 5.4.10

Si las bases de referencia en P_2 y $\Re^3$ son las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f : P_2 \mapsto \Re^3$ tal que $f(p(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx\ ;\ 0\ ;\ \int_0^1 p''(x).dx\right)$.

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{f} & \Re^3 \\ p(x) & \longmapsto & \left(\int_0^1 (p'(x)-p''(x)).dx\ ;\ 0\ ;\ \int_0^1 p''(x).dx\right) \end{array}$$

- La base de referencia en P_2 es $B_1 = \{\bar{h}_1 = x^2, \bar{h}_2 = x, \bar{h}_3 = 1\}$.
- La base de referencia en $\Re^3$ es $B_2 = \{\bar{k}_1 = (1;0;0), \bar{k}_2 = (0;1;0), \bar{k}_3 = (0;0;1)\}$.
- Si $p(x) = p_1.x^2 + p_2.x + p_3. \in P_2$, es:

$$f(p(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx\ ;\ 0\ ;\ \int_0^1 p''(x).dx\right) = (3.p_1 + p_2\ ;\ 0\ ;\ 2.p_1)$$

VENTANA

$$* \int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx = \left(p_1.x^2 + 2.p_1.x + p_2.x\right)_{x=0}^{x=1} = 3.p_1 + p_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} p'(x) = 2.p_1.x + p_2 \\ p''(x) = 2.p_1 \end{array}\right\} \Rightarrow p'(x) - p''(x) = 2.p_1.x + 2.p_1 + p_2$$

$$* \int_0^1 p''(x).dx = \int_0^1 2.p_1.dx = (2.p_1.x)_{x=0}^{x=1} = 2.p_1$$

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{f} & \Re^3 \\ p_1.x^2 + p_2.x + p_3 & \longmapsto & (\underbrace{3.p_1 + p_2}_{q_1}\ ;\ \underbrace{0}_{q_2}\ ;\ \underbrace{2.p_1}_{q_3}) \end{array}$$

- Expresión matricial de "f" respecto de las bases canónicas de P_2 y $\Re^2$:

coordenadas de $f(p(x)) \in \Re^3$ respecto de la base canónica de $\Re^3$	coordenadas de $p(x) \in P_2$ respecto de la base canónica de P_2

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Observa que **la matriz "A" se "construye por filas".** No obstante, si escribes

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow\quad\ \uparrow\quad\ \uparrow \\ f(\bar{h}_1)\ f(\bar{h}_2)\ f(\bar{h}_3) \end{array} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

llenarás de gozo a tu profesor, porque pensará que tienes claro que **la k-ésima columna de "A" la forman las coordenadas de la imagen según "f" del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio "inicial".**

5.5 NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sea $f: V_n \mapsto V_m$ una aplicación lineal y $B_1 = \{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n\}$ y $B_2 = \{\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_m\}$ las bases de referencia elegidas respectivamente en V_n y V_m; sea "A" la matriz asociada a "f" respecto de dichas bases.

EL NÚCLEO

El núcleo de "f" se denota ker.f, y es el conjunto que forman los vectores del espacio inicial cuya imagen según "f" es el vector cero del espacio final:

$$\ker.f = \{\ \bar{x} \in V_n \ /\ f(\bar{x}) = \bar{0} \in V_m\ \} = \{\ \bar{x} \in V_n \ /\ A \bullet \bar{x} = \bar{0} \in V_m\ \}$$

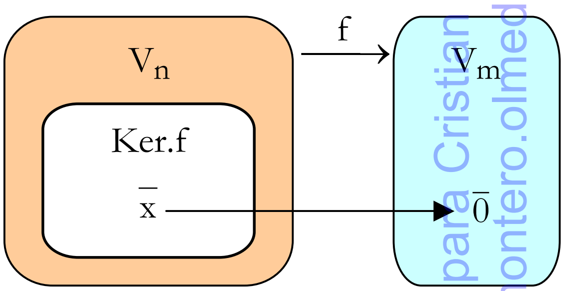
si la matriz asociada a "f" es "A", entonces $f(\bar{x}) = A \bullet \bar{x}$

El núcleo de una aplicación lineal es subespacio del espacio inicial, pues:

$$\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in \ker.f \text{ y } \forall\ \alpha, \beta \in \Re \text{ es } \alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v} \in \ker.f$$

En efecto, si $\bar{u}, \bar{v} \in \ker.f \subset V_n$ es $A \bullet \bar{u} = \bar{0}$ y $A \bullet \bar{v} = \bar{0}$; así, siendo $\alpha, \beta \in \Re$, es:

$$A \bullet (\alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v}) = \alpha \bullet (A \bullet \bar{u}) + \beta \bullet (A \bullet \bar{v}) = \alpha \bullet \bar{0} + \beta \bullet \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha \bullet \bar{u} + \beta \bullet \bar{v} \in \ker.f$$



Siendo el núcleo de "f" un subespacio del espacio inicial de "f", deberás ser capaz de calcular su dimensión y una base. A tales efectos basta observar que la expresión $A \bullet \bar{x} = \bar{0}$ es la de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones, que son unas ecuaciones cartesianas del núcleo; por tanto, como siempre, el número de ecuaciones cartesianas independientes coincide con el rango de "A", siendo:

$$\dim.(\ker.f) = \dim.(V_n) - rg(A)$$

Observa: si $rg(A) = \dim.(V_n)$, es $\dim.(\ker.f) = 0$, lo que significa que el sistema lineal homogéneo $A \bullet \bar{x} = \bar{0}$ sólo tiene la solución trivial $\bar{x} = \bar{0} \in V_n$; por tanto, el vector cero del espacio inicial es el único vector de dicho espacio que tiene por imagen al vector cero del espacio final.

LA IMAGEN

La imagen de "f" se denota "Img.f", y es el conjunto que forman los vectores del espacio final que son imágenes de algún vector del espacio inicial:

$$\text{Im}\,g.f = \{\ \bar{z} \in V_m \ /\ \exists\ \bar{x} \in V_n \text{ para el que es } f(\bar{x}) = \bar{z}\ \}$$

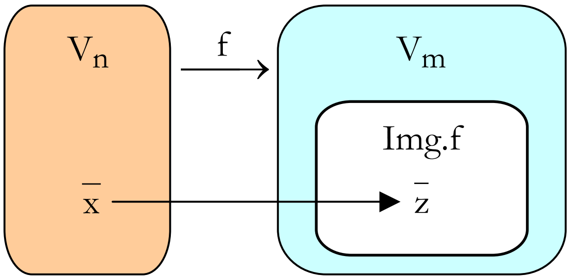
La "imagen" de una aplicación lineal "f" es subespacio del espacio final, pues $\forall\ \bar{z}, \bar{w} \in \text{Im}\,g.f$ y $\forall \alpha, \beta \in \Re$ es $\alpha \bullet \bar{z} + \beta \bullet \bar{w} \in \text{Im}\,g.f$

En efecto, si $\overline{z}, \overline{w} \in \text{Img.f} \subset V_m$ está garantizada la existencia de sendos vectores $\overline{x}, \overline{y} \in V_n$ tales que $f(\overline{x}) = \overline{z}$ y $f(\overline{y}) = \overline{w}$; así, siendo $\alpha, \beta \in \Re$, es:

$$\alpha \bullet \overline{z} + \beta \bullet \overline{w} = \alpha \bullet f(\overline{x}) + \beta \bullet f(\overline{y}) \underset{\uparrow}{=} f(\alpha \bullet \overline{x} + \beta \bullet \overline{y})$$

$\boxed{\text{pues "f" es una aplicación lineal}}$

lo que demuestra que el vector $\alpha \bullet \overline{z} + \beta \bullet \overline{w}$ también pertenece al conjunto Img.f, pues $\alpha \bullet \overline{z} + \beta \bullet \overline{w}$ es la imagen según "f" del vector $\alpha \bullet \overline{x} + \beta \bullet \overline{y} \in V_n$.



Siendo Img.f un subespacio del espacio final de "f", deberás ser capaz de calcular su dimensión y una base. Para ello debes saber que $\dim.(\text{Img.f}) = \text{rg}(A)$... y si $\text{rg}(A) = p$, forman una base de Img.f los "p" vectores del espacio final correspondientes a cualesquiera "p" columnas de "A" con las que pueda formarse un menor no nulo de orden "p".

En efecto, si $\overline{z} \in \text{Img.f} \subset V_m$ entonces $\exists\, \overline{x} \in V_n$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{z}$; así, si:

$$\overline{x} = x_1 \bullet \overline{h}_1 + ... + x_n \bullet \overline{h}_n$$

es:

$$\overline{z} = f(\overline{x}) = f(x_1 \bullet \overline{h}_1 + ... + x_n \bullet \overline{h}_n) \underset{\uparrow}{=} x_1 \bullet f(\overline{h}_1) + ... + x_n \bullet f(\overline{h}_n)$$

$\boxed{\text{pues "f" es una aplicación lineal}}$

que expresa que el vector $\overline{z} \in \text{Img.f}$ siempre es combinación lineal de los vectores $f(\overline{h}_1), ... , f(\overline{h}_n)$. Por tanto, los vectores $f(\overline{h}_1), ... , f(\overline{h}_n)$ son un SG (sistema generador) del subespacio Img.f; en consecuencia, la dimensión de Img.f, que es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en Img.f, coincide con el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse entre los vectores $f(\overline{h}_1), ... , f(\overline{h}_n)$ que engendran a Img.f ... y este último número coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores indicados.

Además, si $\text{rg}(A) = p$, entonces son LI (y por tanto forman una base de Img.f) los "p" vectores del espacio final correspondientes a cualesquiera "p" columnas de "A" con las que pueda formarse un menor no nulo de orden "p".

Si $f: V_n \mapsto V_m$ es una aplicación lineal, siempre ocurre que:

$$\dim.(\ker.f) + \dim.(\text{Img.f}) = \dim.(V_n)$$

FONEMATO 5.5.1

Sea $f:\mathfrak{R}^4 \mapsto \mathfrak{R}^3$ la aplicación lineal tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1 + 2.x_4\ ;\ x_2 + x_3\ ;\ x_1 + x_2 + 3.x_4)$$

1) Determine la dimensión y una base del núcleo de "f".
2) Determine la dimensión y una base de la imagen de "f".

SOLUCIÓN

¡Vergonzoso, inadmisible, qué falta de seriedad!: vamos a trabajar con dos espacios vectoriales y no se nos indica cuál es la base que en cada uno de ellos se usa como "base de referencia" para identificar a los vectores.

Ante tal situación estamos legitimados para cabrearnos y efectuar una solución salvaje, devolviendo el ejercicio a su dueño, afeándole su lamentable falta de rigor y profesionalidad; incluso, llegado el caso, explicamos la vieja historia de la "caja" con naranjas y limones que en su momento utilizamos como ejemplo para entender que si las referencias no están fijadas, los números se quedan vacíos, huérfanos, incapaces de trasmitir información. Pero estamos por el consenso, y por ello cubrimos las carencias del enunciado, considerando que las bases de referencia en los espacios $\mathfrak{R}^4$ y $\mathfrak{R}^3$ son las respectivas bases canónicas B_1 y B_2:

$$B_1 = \{\overline{h}_1 = (1;0;0;0), \overline{h}_2 = (0;1;0;0), \overline{h}_3 = (0;0;1;0), \overline{h}_4 = (0;0;0;1)\}$$

$$B_2 = \{\overline{k}_1 = (1;0;0), \overline{k}_2 = (0;1;0), \overline{k}_3 = (0;0;1)\}$$

Así, consideramos que $(x_1;x_2;x_3;x_4)$ son las coordenadas respecto de la base canónica de $\mathfrak{R}^4$ de un vector genérico $\overline{x} \in \mathfrak{R}^4$, y que las coordenadas respecto de la base canónica de $\mathfrak{R}^3$ del especialísimo vector $f(\overline{x}) \in \mathfrak{R}^3$ que la aplicación lineal "f" asocia a $\overline{x} \in \mathfrak{R}^4$ son $(x_1 + 2.x_4\ ;\ x_2 + x_3\ ;\ x_1 + x_2 + 3.x_4)$.

$$\underset{\mathfrak{R}^4}{(x_1;x_2;x_3;x_4)} \xrightarrow{f} \underset{\mathfrak{R}^3}{(\underbrace{x_1 + 2.x_4}_{y_1}\ ;\ \underbrace{x_2 + x_3}_{y_2}\ ;\ \underbrace{x_1 + x_2 + 3.x_4}_{y_3})}$$

La expresión matricial de "f" respecto de las bases canónicas B_1 y B_2 es:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}^{f(\overline{x})} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}^{\overline{x}}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\overline{h}_1) & f(\overline{h}_2) & f(\overline{h}_3) & f(\overline{h}_4) \end{array}$$

La matriz "A" la escribimos por filas, pero le ponemos el pegote de los $f(\overline{h}_1), f(\overline{h}_2), f(\overline{h}_3)$ y $f(\overline{h}_4)$ para que parezca que se ha escrito "por columnas"; así, todo el que entienda de Álgebra pensará que nosotros también entendemos.

1) Latiguillo: el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio del espacio inicial $\Re^4$ que forman los vectores cuya imagen es el vector $\bar{0}$ de $\Re^3$:

$$\ker.f = \left\{\bar{x} \in \Re^4 / f(\bar{x}) = \bar{0} \in \Re^3\right\} = \left\{\bar{x} \in \Re^4 / \underbrace{A \bullet \bar{x} = \bar{0}}_{} \in \Re^3\right\}$$

ecuaciones cartesianas del núcleo de "f"

Es:

$$\dim.(\ker.f) = \dim.(\Re^4) - rg(A) = 4 - rg\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1$$

Como el menor de orden 3 indicado es no nulo, en el sistema lineal homogéneo $A \bullet \bar{x} = \bar{0}$ parametrizamos x_4:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -2.x_4 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= -3.x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= -2.x_4 \\ x_2 &= -x_4 \\ x_3 &= x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker.f = \{(-2.a\,;-a\,;a\,;a),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (-2\,;-1\,;1\,;1),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\bar{d} = (-2\,;-1\,;1\,;1)$ es una base de ker.f; o sea, es:

$$\ker.f = <\bar{d}>$$

Puedes comprobar que no hay error en los cálculos comprobando que

$$f(-2.a\,;-a\,;a\,;a) = \bar{0} \in \Re^3,\ \forall a \in \Re$$

como en efecto sucede:

$$f(-2.a\,;-a\,;a\,;a) = (-2.a + 2.a\,;-a + a\,;-2.a - a + 3.a) = \bar{0}$$

Observa: el que ker.f no esté formado sólo por el vector cero del espacio inicial $\Re^4$ nos permite asegurar que "f" no es inyectiva, pues en $\Re^4$ hay vectores (los del núcleo) que siendo distintos tienen la misma imagen.

2) Latiguillo: la "imagen" de "f" se denota Img.f, y es el subespacio del espacio final $\Re^3$ que forman los vectores de $\Re^3$ que son imágenes de algún vector del espacio inicial $\Re^4$:

$$\operatorname{Im} g.f = \left\{\bar{z} \in \Re^3 / \exists\ \bar{x} \in \Re^4 \text{ para el que es } f(\bar{x}) = \bar{z}\right\}$$

Es:

$$\dim.(\operatorname{Im} g.f) = rg\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \end{bmatrix} = 3$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{h}_1) & f(\bar{h}_2) & f(\bar{h}_3) & f(\bar{h}_4) \end{matrix}$$

Como el único subespacio de $\Re^3$ que tiene dimensión 3 es el propio $\Re^3$, resulta ser $\operatorname{Im} g.f = \Re^3$ (por lo que cualquier base de $\Re^3$ es base de Img.f); en consecuencia, "f" es sobreyectiva, pues todo vector del espacio final es imagen del algún vector del espacio inicial.

FONEMATO 5.5.2

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^4$ la aplicación lineal tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + x_2 + 7.x_3\,;\, x_2 + x_3\,;\, 5.x_3\,;\, 0)$$

1) Determine la dimensión y una base del núcleo de "f".
2) Determine la dimensión y una base de la imagen de "f".

SOLUCIÓN

Como no se dice nada al respecto, consideramos que las bases de referencia en los espacios inicial y final $\Re^4$ y $\Re^3$ son las respectivas bases canónicas:

$$B_1 = \{\bar{h}_1 = (1;0;0),\ \bar{h}_2 = (0;1;0),\ \bar{h}_3 = (0;0;1)\}$$

$$B_2 = \{\bar{k}_1 = (1;0;0;0),\ \bar{k}_2 = (0;1;0;0),\ \bar{k}_3 = (0;0;1;0),\ \bar{k}_4 = (0;0;0;1)\}$$

Así, consideramos que $(x_1;x_2;x_3)$ son las coordenadas respecto de la base canónica de $\Re^3$ de un vector genérico $\bar{x} \in \Re^3$ y que las coordenadas respecto de la base canónica de $\Re^4$ del especialísimo vector $f(\bar{x}) \in \Re^4$ que la aplicación lineal "f" tiene a bien asociar a $\bar{x} \in \Re^4$ son $(x_1 + x_2 + 7.x_3\,;\, x_2 + x_3\,;\, 5.x_3\,;\, 0)$.

$$\underset{\Re^3}{(x_1;x_2;x_3)} \xrightarrow{f} \underset{\Re^4}{(\underbrace{x_1 + x_2 + 7.x_3}_{y_1}\,;\, \underbrace{x_2 + x_3}_{y_2}\,;\, \underbrace{5.x_3}_{y_3}\,;\, \underbrace{0}_{y_4})}$$

La expresión matricial de "f" respecto de las bases canónicas B_1 y B_2 es:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}^{f(\bar{x})} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\bar{x}}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{h}_1) & f(\bar{h}_2) & f(\bar{h}_3) \end{array}$$

La matriz "A" la **escribimos por filas**, pero le ponemos el pegote de los $f(\bar{h}_1), f(\bar{h}_2), f(\bar{h}_3)$ y $f(\bar{h}_4)$ para que parezca que se ha escrito "por columnas" y **darle una alegría al profesor**, que pensará que sabemos que **la k-ésima columna de la matriz asociada a una aplicación lineal está formada por las coordenadas de la imagen del k-ésimo vector de la base de referencia elegida en el espacio inicial.**

1) **Latiguillo:** el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio del espacio inicial $\Re^3$ que forman los vectores cuya imagen es el vector cero de $\Re^4$:

$$\ker.f = \{\bar{x} \in \Re^3 / f(\bar{x}) = \bar{0} \in \Re^4\} = \left\{\bar{x} \in \Re^3 / \underbrace{A \bullet \bar{x} = \bar{0}}_{\uparrow} \in \Re^4\right\}$$

ecuaciones cartesianas del núcleo de "f"

Es $\dim.(\ker.f) = \dim.(\Re^3) - rg(A) = 3 - rg\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 3 = 0$, lo que indica que el sistema lineal homogéneo $A \bullet \overline{x} = \overline{0}$ sólo tiene la **solución trivial;** por tanto, el vector cero del espacio inicial $\Re^3$ es el único vector de dicho espacio que tiene por imagen al vector cero del espacio final $\Re^4$.

2) **Latiguillo:** la "imagen" de "f" se denota Img.f, y es el subespacio del espacio final $\Re^4$ que forman los vectores de $\Re^4$ que son imágenes de algún vector del espacio inicial $\Re^3$:

$$\mathrm{Im\,g.f} = \{\overline{z} \in \Re^4 \;/\; \exists\, \overline{x} \in \Re^3 \text{ para el que es } f(\overline{x}) = \overline{z}\}$$

Es:

$$\dim.(\mathrm{Im\,g.f}) = rg\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}} \\ 0 \quad & 0 & \quad 0 \end{array}\right] \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \quad\quad \uparrow \\ f(\overline{h}_1)\; f(\overline{h}_2)\; f(\overline{h}_3) \end{array} = 3$$

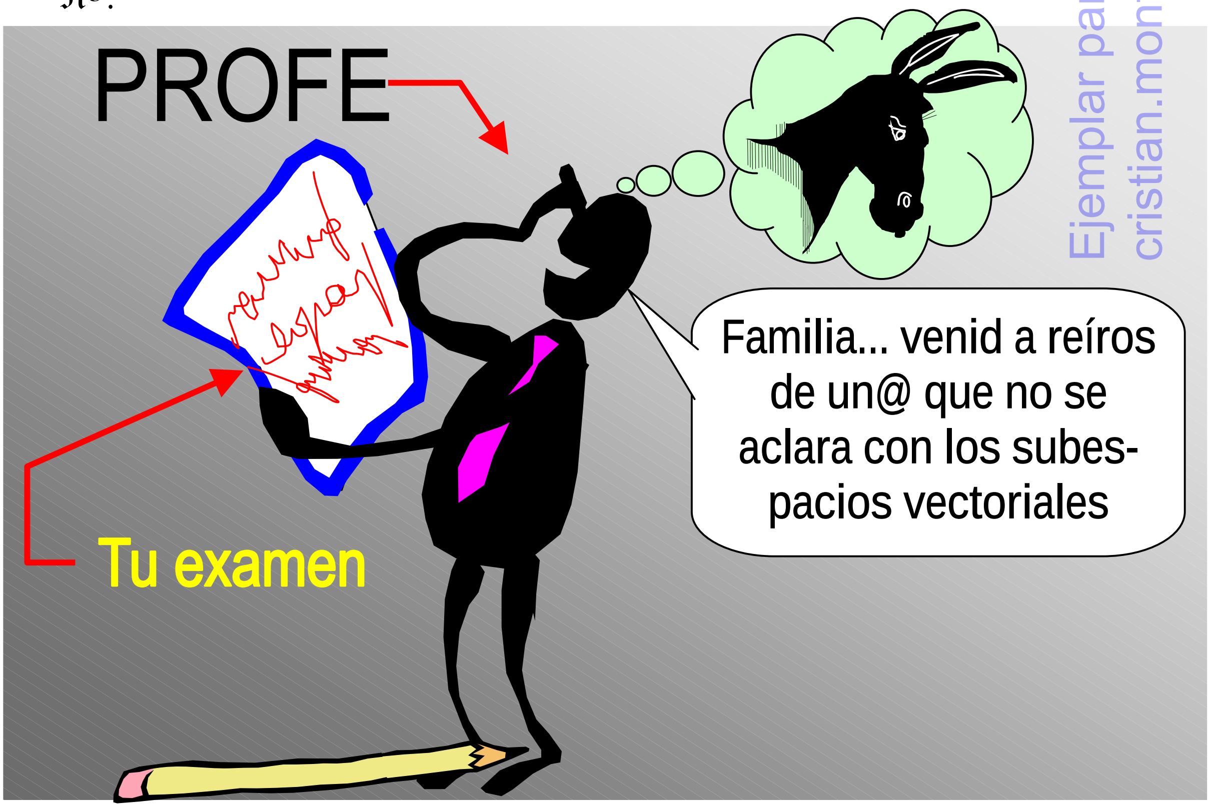
Como el menor de orden 3 indicado es no nulo, los vectores

$$f(\overline{h}_1) = (1;0;0;0)\;;\; f(\overline{h}_2) = (1;1;0;0)\;;\; f(\overline{h}_3) = (7;1;5;0)$$

forman una **base** de Img.f; o sea, es:

$$\mathrm{Im\,g.f} = < f(\overline{h}_1), f(\overline{h}_2), f(\overline{h}_3) >$$

- Como $\mathrm{Im\,g.f} \subset \Re^4$, la aplicación "f" **no es sobreyectiva,** pues en el espacio final $\Re^4$ hay vectores que no son imagen de ningún vector del espacio inicial $\Re^3$.

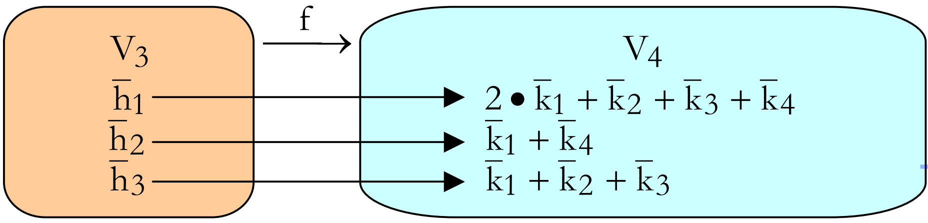


FONEMATO 5.5.3

Sea $f: V_3 \mapsto V_4$ una aplicación lineal, siendo $B_1 = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$ la base de referencia en V_3 y $B_2 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4\}$ la base de referencia en V_4. Determine la dimensión y una base de ker.f y de Img.f sabiendo que:

$$\begin{aligned} f(\overline{h}_1) &= 2 \bullet \overline{k}_1 + \overline{k}_2 + \overline{k}_3 + \overline{k}_4 \\ f(\overline{h}_2) &= \overline{k}_1 + \overline{k}_4 \\ f(\overline{h}_3) &= \overline{k}_1 + \overline{k}_2 + \overline{k}_3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

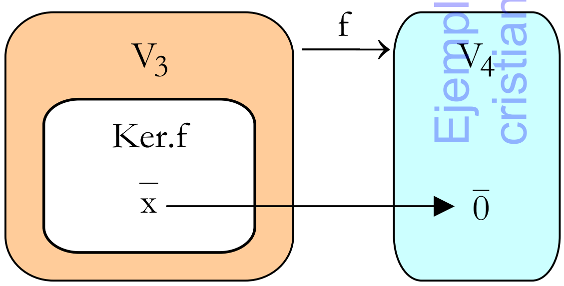


Para identificar la aplicación lineal "f", el enunciado nos da las imágenes según "f" de los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ que forman la base de referencia en el espacio inicial V_3; así, la matriz asociada a "f" respecto de las bases $B_1 = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$ y $B_2 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4\}$ es

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\overline{h}_1) & f(\overline{h}_2) & f(\overline{h}_3) \end{array} \end{array}$$

La expresión de "f" respecto de las bases B_1 y B_2 es $f(\overline{x}) = A \bullet \overline{x}$.

1) Latiguillo: el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio del espacio inicial V_3 que forman los vectores cuya imagen es el vector cero de V_4:



$$\begin{aligned} \ker.f &= \{\overline{x} \in V_3 \,/\, f(\overline{x}) = \overline{0} \in V_4\} = \\ &= \{\overline{x} \in V_3 \,/\, A \bullet \overline{x} = \overline{0} \in V_4\} \end{aligned}$$

La expresión $A \bullet \overline{x} = \overline{0}$ nos da unas ecuaciones cartesianas de ker.f; así:

$$\dim.(\ker.f) = \dim.(V_3) - rg(A) = 3 - rg\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, en el sistema lineal homogéneo $A \bullet \overline{x} = \overline{0}$ eliminamos las ecuaciones primera y segunda y parametrizamos x_3:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1 = -x_3 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker.f = \{(-a\,;-a\,;a),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (-1\,;-1\,;1),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\bar{d} = (-1\,;-1\,;1)$ es una base de ker.f; o sea, es:

$$\ker.f = <\bar{d}>$$

Puedes comprobar que no hay error en los cálculos comprobando que

$$f(-2.a\,;-a\,;a\,;a) = \bar{0} \in \Re^3,\ \forall a \in \Re$$

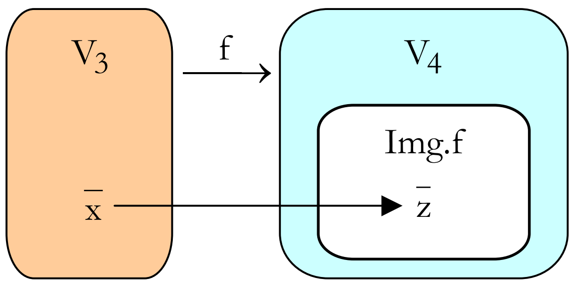
como en efecto sucede:

$$f(-2.a\,;-a\,;a\,;a) = (-2.a + 2.a\,;-a + a\,;-2.a - a + 3.a) = \bar{0}$$

Observa: el que ker.f no esté formado sólo por el vector cero del espacio inicial $\Re^4$ nos permite asegurar que "f" no es inyectiva, pues en $\Re^4$ hay vectores (los del núcleo) que siendo distintos tienen la misma imagen.

2) Latiguillo: la imagen de "f" se denota Img.f, y es el subespacio del espacio final V_4 que forman los vectores de V_4 que son imágenes de algún vector del espacio inicial V_3; es decir:

$$\operatorname{Im} g.f = \{\bar{z} \in V_4 \ /\ \exists\ \bar{x} \in V_3 \text{ para el que es } f(\bar{x}) = \bar{z}\}$$



- Es $\dim.(\operatorname{Im} g.f) = rg(A) = 2$, y como el menor de orden 2 indicado es no nulo, los vectores

$$f(\bar{h}_1) = 2 \bullet \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 + \bar{k}_4 \ ;\ f(\bar{h}_2) = \bar{k}_1 + \bar{k}_4$$

forman una base del subespacio Img.f; o sea, es:

$$\operatorname{Im} g.f = < f(\bar{h}_1), f(\bar{h}_2) >$$

Observa: como $\operatorname{Img}.f \subset V_4$, la aplicación "f" no es sobreyectiva, pues en el espacio final V_4 hay vectores que no son imagen de ningún vector del espacio inicial V_3.

FONEMATO 5.5.4

Sea $f: M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ tal que $f(A) = A + A^t$

1) Demuestre que "f" es una aplicación lineal.
2) Determine la dimensión y una base del núcleo de "f".
3) Determine la dimensión y una base de la imagen de "f".

SOLUCIÓN

1) Latiguillo: demostraremos que $f: M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ es una aplicación lineal si demostramos que:

$$\text{a) } \forall P, Q \in M_{2\times2} \text{ es } f(P+Q) = f(P) + f(Q)$$
$$\text{b) } \forall P \in M_{2\times2} \text{ y } \forall \alpha \in \Re \text{ es } f(\alpha \bullet P) = \alpha \bullet f(P)$$

Veamos:

a) Si $P, Q \in M_{2\times2}$ es $f(P) = P + P^t$ y $f(Q) = Q + Q^t$; así:

$$f(P) + f(Q) = P + P^t + Q + Q^t$$

y como

$$f(P+Q) = (P+Q) + (P+Q)^t = P + Q + P^t + Q^t$$

resulta evidente que se satisface la condición a).

b) Si $P \in M_{2\times2}$ y $\alpha \in \Re$ es:

$$f(\alpha \bullet P) = (\alpha \bullet P) + (\alpha \bullet P)^t = \alpha \bullet (P + P^t) = \alpha \bullet f(P)$$

Queda demostrado que "f" es una aplicación lineal.

- Como no se dice nada al respecto, consideramos que la base de referencia en el espacio inicial $M_{2\times2}$ y en el final (también es $M_{2\times2}$) es la base canónica:

$$B_c = \left\{ \bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{h}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Si $X \in M_{2\times2}$ (espacio "inicial") tiene coordenadas $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ respecto de la base canónica, o sea, si:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = x_1 \bullet \bar{h}_1 + x_2 \bullet \bar{h}_2 + x_3 \bullet \bar{h}_3 + x_4 \bullet \bar{h}_4$$

entonces, según se nos dice, es:

$$f(X) = X + X^t = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2.x_1 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_2 & 2.x_4 \end{bmatrix}$$

$$M_{2\times2} \xrightarrow{f} M_{2\times2}$$
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2.x_1 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_2 & 2.x_4 \end{bmatrix}$$

Las columnas de la matriz "A" asociada a "f" respecto de las bases de referencia elegidas son las coordenadas de los vectores $f(\bar{h}_1), f(\bar{h}_2), f(\bar{h}_3)$ y $f(\bar{h}_4)$ respecto de la base canónica del espacio "final":

$$f(\overline{h}_1)=f\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}=2\bullet\overline{h}_1+0\bullet\overline{h}_2+0\bullet\overline{h}_3+0\bullet\overline{h}_4=(2;0;0;0)$$

$$f(\overline{h}_2)=f\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=0\bullet\overline{h}_1+1\bullet\overline{h}_2+1\bullet\overline{h}_3+0\bullet\overline{h}_4=(0;1;1;0)$$

$$f(\overline{h}_3)=f\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=0\bullet\overline{h}_1+1\bullet\overline{h}_2+1\bullet\overline{h}_3+0\bullet\overline{h}_4=(0;1;1;0)$$

$$f(\overline{h}_4)=f\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}=0\bullet\overline{h}_1+0\bullet\overline{h}_2+0\bullet\overline{h}_3+2\bullet\overline{h}_4=(0;0;0;2)$$

Por tanto, si $f(X)=y_1\bullet\overline{h}_1+y_2\bullet\overline{h}_2+y_3\bullet\overline{h}_3+y_4\bullet\overline{h}_4$, la expresión matricial de "f" respecto de las bases de referencia elegidas es:

$$\overbrace{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}}^{f(X)}=\overbrace{\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}}^{A}\bullet\overbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}}^{X}$$

$$\begin{array}{cccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ f(\overline{h}_1)&f(\overline{h}_2)&f(\overline{h}_3)&f(\overline{h}_4)\end{array}$$

2) **Latiguillo:** el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio del espacio inicial que forman los vectores cuya imagen es el vector $\overline{0}$ del espacio final:

$$\ker.f=\{X\in M_{2\times2}\,/\,f(X)=\overline{0}\in M_{2\times2}\}$$

Es:

$$\dim.(\ker.f)=\dim.(M_{2\times2})-rg(A)=4-rg\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}2&0\\0&1\end{matrix}}&0&\boxed{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}}\\0\quad 1&1&0\\\boxed{\begin{matrix}0&0\end{matrix}}&0&\boxed{2}\end{bmatrix}=4-3=1$$

Como el menor de orden 3 indicado es no nulo, en el sistema lineal homogéneo con matriz de coeficientes "A" eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_3:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}}_{A}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}}_{X}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=0\\x_2=-x_3\\x_4=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker.f=\left\{\begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix},\ \forall a\in\Re\right\}=\left\{a\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}}_{\overline{d}},\ \forall a\in\Re\right\}$$

El vector $\overline{d}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ es una **base** de ker.f; o sea, es:

$$\ker.f=<\overline{d}>$$

Comprobación:

$$f\left(\begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ \forall a\in\Re$$

3) Latiguillo: la "imagen" de "f" se denota Img.f, y es el subespacio del espacio final $M_{2\times 2}$ que forman los vectores de $M_{2\times 2}$ que son imágenes de algún vector del espacio inicial $M_{2\times 2}$:

$$\operatorname{Im} g.f = \left\{ \bar{z} \in M_{2\times 2} / \exists\, \bar{x} \in M_{2\times 2} \text{ para el que es } f(\bar{x}) = \bar{z} \right\}$$

- Es $\dim.(\operatorname{Im} g.f) = rg(A) = 3$, y como el menor de orden 3 indicado es no nulo, los vectores $f(\bar{h}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f(\bar{h}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $f(\bar{h}_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ forman una base de Img.f; o sea, es:

$$\operatorname{Im} g.f = < f(\bar{h}_1), f(\bar{h}_2), f(\bar{h}_3) >$$

QUE QUEDE MUY CLARO

Trabajar con la $f: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ que nos da el enunciado es lo mismo que trabajar con la $f: \Re^4 \mapsto \Re^4$ tal que

$$f(x_1; x_2; x_3; x_4) = (2.x_1 \,; x_2 + x_3 \,; x_3 + x_2 \,; 2.x_4)$$

- Pregunta: ¿de dónde ha salido $f: \Re^4 \mapsto \Re^4$?
- Respuesta: como $\dim.(M_{2\times 2}) = 4$, podemos asimilar cada vector del espacio $M_{2\times 2}$ a un vector de $\Re^4$; concretamente, si en el espacio inicial

$$\text{asimilamos } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \text{ con } (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \Re^4$$

y en el espacio final

$$\text{asimilamos } \begin{bmatrix} 2.x_1 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_2 & 2.x_4 \end{bmatrix} \text{ con } (2.x_1; x_2 + x_3; x_3 + x_2; 2.x_4) \in \Re^4$$

entonces, la $f: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ dada la podemos asimilar a la $f: \Re^4 \mapsto \Re^4$ tal que $f(x_1; x_2; x_3; x_4) = (2.x_1 \,; x_2 + x_3 \,; x_3 + x_2 \,; 2.x_4)$; así, en un milisegundo podemos "escribir por filas" la matriz "A" asociada a "f" sin necesidad de soportar el petardo de calcular $f(\bar{h}_1)$, $f(\bar{h}_2)$, $f(\bar{h}_3)$ y $f(\bar{h}_4)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Observa:** siendo $g: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ tal que $g(A) = A - A^t$, entonces:

$$g(X) = X - X^t = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & x_2 - x_3 \\ x_3 - x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, trabajar con $g: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ es igual que trabajar con $g: \Re^4 \mapsto \Re^4$ tal que $g(x_1; x_2; x_3; x_4) = (0 \,; x_2 - x_3 \,; x_3 - x_2 \,; 0)$, cuya matriz asociada es

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ g(\bar{h}_1) & g(\bar{h}_2) & g(\bar{h}_3) & g(\bar{h}_4) \end{matrix} \end{array}$$

FONEMATO 5.5.5

Sea $f: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ tal que $f(A) = 3 \bullet A - 2 \bullet A^t$

1) Determine la dimensión y una base del núcleo de "f".
2) Determine la dimensión y una base de la imagen de "f".

SOLUCIÓN

- Como no se dice nada al respecto, consideramos que las bases de referencia en el espacio inicial $M_{2\times 2}$ y en el final (también es $M_{2\times 2}$) es la base canónica:

$$B_c = \left\{ \bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{h}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- Siendo $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ un vector genérico del espacio "inicial", es:

$$f(X) = 3 \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}}_{X} - 2 \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}}_{X^t} = \begin{bmatrix} x_1 & 3.x_2 - 2.x_3 \\ -2.x_2 + 3.x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

Así, trabajar con la aplicación lineal $f: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ es igual que trabajar con las aplicación lineal $f: \Re^4 \mapsto \Re^4$ tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1\,;3.x_2 - 2.x_3\,; -2.x_2 + 3.x_3\,;x_4)$$

Por tanto, en un milisegundo podemos **"escribir por filas"** la matriz "A" asociada a "f" respecto de la base canónica de $M_{2\times 2}$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{h}_1) & f(\bar{h}_2) & f(\bar{h}_3) & f(\bar{h}_4) \end{matrix} \end{array}$$

1) **Latiguillo:** el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio del espacio inicial que forman los vectores cuya imagen es el vector $\bar{0}$ del espacio final:

$$\ker.f = \{X \in M_{2\times 2} / f(X) = \bar{0} \in M_{2\times 2}\}$$

Es $\dim.(\ker.f) = \dim.(M_{2\times 2}) - rg(A) = 4 - 4 = 0$, lo que indica que el núcleo de "f" está formado únicamente por la matriz nula.

2) **Latiguillo:** la "imagen" de "f" se denota Img.f, y es el subespacio del espacio final $M_{2\times 2}$ que forman los vectores de $M_{2\times 2}$ que son imágenes de algún vector del espacio inicial $M_{2\times 2}$:

$$\operatorname{Im} g.f = \{\bar{z} \in M_{2\times 2} / \exists\, \bar{x} \in M_{2\times 2} \text{ para el que es } f(\bar{x}) = \bar{z}\}$$

Es $\dim.(\operatorname{Im} g.f) = rg(A) = 4$, y como el único subespacio de $M_{2\times 2}$ que tiene dimensión 4 es el propio $M_{2\times 2}$, resulta ser $\operatorname{Im} g.f = M_{2\times 2}$ (por lo que cualquier base de $M_{2\times 2}$ es base de Img.f); en consecuencia, "f" **es sobreyectiva,** pues todo vector del espacio final es imagen del algún vector del espacio inicial.

FONEMATO 5.5.6

Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2 y P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3.
Sea $f: P_2 \mapsto P_3$ la aplicación lineal tal que

$$f(a_1.x^2+a_2.x+a_3) = (a_1+a_2).x^3 + (a_1+a_3).x^2 + (a_1+a_2+a_3).x + (a_1-a_3)$$

1) Determine la dimensión y una base del núcleo de "f".
2) Determine la dimensión y una base de la imagen de "f".

SOLUCIÓN

Como no se dice nada al respecto, consideramos que las bases de referencia en los espacios inicial y final P_2 y P_3 son las respectivas bases canónicas:

$$B_1 = \{\bar{h}_1 = x^2, \bar{h}_2 = x, \bar{h}_3 = 1\}$$
$$B_2 = \{\bar{k}_1 = x^3, \bar{k}_2 = x^2, \bar{k}_3 = x, \bar{k}_4 = 1\}$$

Las columnas de la matriz "A" asociada a "f" respecto de las bases B_1 y B_2 son las coordenadas de los vectores $f(\bar{h}_1)$, $f(\bar{h}_2)$ y $f(\bar{h}_3)$ respecto de B_2:

$$f(\bar{h}_1) = f(1.x^2+0.x+0) = (1+0).x^3+(1+0).x^2+(1+0+0).x+(1-0) =$$
$$= x^3+x^2+x+1 = 1\bullet\bar{k}_1+1\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3+1\bullet\bar{k}_4 = (1;1;1;1)$$

$$f(\bar{h}_2) = f(0.x^2+1.x+0) = (0+1).x^3+(0+0).x^2+(0+1+0).x+(0-0) =$$
$$= x^3+x = 1\bullet\bar{k}_1+0\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3+0\bullet\bar{k}_4 = (1;0;1;0)$$

$$f(\bar{h}_3) = f(0.x^2+0.x+1) = (0+0).x^3+(0+1).x^2+(0+0+1).x+(0-1) =$$
$$= x^2+x-1 = 0\bullet\bar{k}_1+1\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3-1\bullet\bar{k}_4 = (0;1;1;-1)$$

Así, si $\bar{p} = a_1.x^2+a_2.x+a_3 \in P_2$ y $f(\bar{p}) = b_1.x^3+b_2.x^2+b_3.x+b_4 \in P_3$, la expresión matricial de la aplicación lineal "f" respecto de las bases B_1 y B_2 es:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}}^{f(\bar{p})} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}^{\bar{p}}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{h}_1) & f(\bar{h}_2) & f(\bar{h}_3) \end{array}$$

1) **Latiguillo:** el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio del espacio inicial P_2 que forman los vectores cuya imagen es el vector $\bar{0}$ del espacio final P_3:

$$\ker.f = \{\bar{p} \in P_2 \,/\, f(\bar{p}) = \bar{0} \in P_3\} = \left\{\bar{p} \in P_2 \,/\, \underbrace{A \bullet \bar{p} = \bar{0}}_{} \in P_3\right\}$$

ecuaciones cartesianas del núcleo de "f"

Es:

$$\dim.(\ker.f) = \dim.(P_2) - rg(A) = 3 - rg\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \end{matrix} \end{bmatrix} = 3 - 3 = 0$$

lo que nos indica que el sistema lineal homogéneo $A \bullet \bar{p} = \bar{0}$ sólo tiene la solución trivial; por tanto, el vector cero del espacio inicial P_2 es el único vector de dicho espacio que tiene por imagen al vector cero del espacio final P_3.

2) **Latiguillo:** la imagen de "f" se denota Img.f, y es el subespacio de P_3 que forman los vectores del espacio final P_3 que son imágenes de algún vector del espacio inicial P_2:

$$\operatorname{Im} g.f = \{\bar{z} \in P_3 / \exists\, \bar{p} \in P_2 \text{ para el que es } f(\bar{p}) = \bar{z}\}$$

- Es $\dim.(\operatorname{Im} g.f) = rg(A) = 3$, y como el menor de orden 3 indicado es no nulo, los vectores $f(\bar{h}_1) = x^3 + x^2 + x + 1$, $f(\bar{h}_2) = x^3 + x$ y $f(\bar{h}_3) = x^2 + x - 1$ forman una base de Img.f; o sea, es:

$$\operatorname{Im} g.f = < f(\bar{h}_1), f(\bar{h}_2), f(\bar{h}_3) >$$

QUE QUEDE MUY CLARO

Trabajar con $f: P_2 \mapsto P_3$ dada es lo mismo que trabajar con $f: \mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^4$ tal que:

$$f(a_1;a_2;a_3) = (a_1 + a_2 ; a_1 + a_3 ; a_1 + a_2 + a_3 ; a_1 - a_3)$$

Pregunta: ¿de dónde ha salido $f: \mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^4$?

Respuesta: como $\dim.(P_2) = 3$, podemos **asimilar** cada vector de P_2 a un vector de $\mathfrak{R}^3$; así, en el espacio inicial asimilamos $\bar{p} = a_1.x^2 + a_2.x + a_3 \in P_2$ con $\bar{p} = (a_1;a_2;a_3) \in \mathfrak{R}^3$. Del mismo modo, como $\dim.(P_3) = 4$, podemos **asimilar** cada vector de P_3 a un vector de $\mathfrak{R}^4$; así, en el espacio final asimilamos el vector

$$f(\bar{p}) = (a_1 + a_2).x^3 + (a_1 + a_3).x^2 + (a_1 + a_2 + a_3).x + (a_1 - a_3) \in P_3$$

con el

$$f(\bar{p}) = (a_1 + a_2 ; a_1 + a_3 ; a_1 + a_2 + a_3 ; a_1 - a_3) \in \mathfrak{R}^4.$$

Por tanto, la ley $f: P_2 \mapsto P_3$ dada la podemos asimilar a la $f: \mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^4$ tal que

$$f(a_1;a_2;a_3) = (\underbrace{a_1 + a_2}_{b_1} ; \underbrace{a_1 + a_3}_{b_2} ; \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{b_3} ; \underbrace{a_1 - a_3}_{b_4})$$

y así, en un nanosegundo podemos **"escribir por filas"** la matriz "A" asociada a "f" sin necesidad de soportar el **petardo** de calcular $f(\bar{h}_1)$, $f(\bar{h}_2)$ y $f(\bar{h}_3)$:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 5.5.7

Sea P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3 y P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2.
Sea $f: P_3 \mapsto P_2$ la aplicación lineal tal que

$$f(a_1.x^3+a_2.x^2+a_3.x+a_4)=(a_2-a_4).x^2+(a_1-a_3)$$

Determine la dimensión y una base del núcleo de "f" y de la imagen de "f".

SOLUCIÓN

- Como no se dice nada al respecto, consideramos que las bases de referencia en los espacios inicial y final P_3 y P_2 son las respectivas canónicas B_1 y B_2:

$$B_1=\{\bar{k}_1=x^3, \bar{k}_2=x^2, \bar{k}_3=x, \bar{k}_4=1\} \;\; ; \; B_2=\{\bar{h}_1=x^2, \bar{h}_2=x, \bar{h}_3=1\}$$

- Como $\left\{\begin{matrix} \dim.(P_3)=4 \\ \dim.(P_2)=3 \end{matrix}\right\}$ **asimilamos** cada vector de $\left\{\begin{matrix} P_3 \\ P_2 \end{matrix}\right\}$ a un vector de $\left\{\begin{matrix} \Re^4 \\ \Re^3 \end{matrix}\right\}$; así, **asimilamos** $\left\{\begin{matrix} a_1.x^3+a_2.x^2+a_3.x+a_4 \in P_3 \\ (a_2-a_4).x^2+(a_1-a_3) \in P_2 \end{matrix}\right\}$ con $\left\{\begin{matrix} (a_1;a_2;a_3;a_4) \in \Re^4 \\ (a_2-a_4;0;a_1-a_3) \in \Re^3 \end{matrix}\right\}$, y la ley $f: P_3 \mapsto P_2$ dada la **asimilamos** a la $f: \Re^4 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(a_1;a_2;a_3;a_4)=(\underbrace{a_2-a_4}_{b_1};\underbrace{0}_{b_2};\underbrace{a_1-a_3}_{b_3})$$

Por tanto, en un picosegundo **"escribimos por filas"** la matriz "A" asociada a "f" sin necesidad de soportar el **petardo** de calcular $f(\bar{k}_1), f(\bar{k}_2), f(\bar{k}_3)$ y $f(\bar{k}_4)$:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

- **Latiguillo:** el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio de P_3 que forman los vectores cuya imagen es el vector $\bar{0}$ de P_2. Es:

$$\dim.(\ker.f)=\dim.(P_3)-rg(A)=4-2=2$$

Resolvemos el sistema lineal homogéneo de matriz de coeficientes "A":

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a_2=a_4 \\ a_1=a_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker.f=\{a_3.x^3+a_4.x^2+a_3.x+a_4, \; \forall a_3, a_4 \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker.f=\{a_3.(x^3+x)+a_4.(x^2+1), \; \forall a_3, a_4 \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+x \text{ y } x^2+1 \text{ forman una base de } \ker.f$$

- **Latiguillo:** la imagen de "f" se denota Img.f, y es el subespacio de P_2 que forman los vectores que son imágenes de algún vector del espacio inicial P_3.
Es $\dim.(\operatorname{Im} g.f)=rg(A)=2$, y como el menor de orden 2 indicado es no nulo, los vectores $f(\bar{k}_1)=0.x^2+0.x+1$ y $f(\bar{k}_2)=1.x^2+0.x+0$ forman una base del subespacio Img.f.

FONEMATO 5.5.8

Siendo las bases de referencia en P_3 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f : P_3 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x)) = (p'(0) - p(0) \,;\, p''(0))$.
Determine la dimensión y una base del núcleo de "f" y de la imagen de "f".

SOLUCIÓN

- La base de referencia en P_3 es $B_1 = \{\bar{h}_1 = x^3, \bar{h}_2 = x^2, \bar{h}_3 = x, \bar{h}_4 = 1\}$.
- La base de referencia en $\Re^2$ es $B_2 = \{\bar{k}_1 = (1;0), \bar{k}_2 = (0;1)\}$.
- Si $p(x) = p_1.x^3 + p_2.x^2 + p_3.x + p_4 \in P_3$, es:

$$f(p(x)) = (p'(0) - p(0) \,;\, p''(0)) = (p_3 - p_4 \,;\, 2.p_2)$$

$$\left.\begin{cases} p'(0) = \left(3.p_1.x^2 + 2.p_2.x + p_3\right)_{x=0} = p_3 \\ p(0) = \left(p_1.x^3 + p_2.x^2 + p_3.x + p_4\right)_{x=0} = p_4 \end{cases}\right\} \Rightarrow p'(0) - p(0) = p_3 - p_4$$

$$p''(0) = \left(6.p_1.x + 2.p_2\right)_{x=0} = 2.p_2$$

VENTANA

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{f} & \Re^2 \\ p_1.x^3+p_2.x^2+p_3.x+p_4 & \longrightarrow & (\underbrace{p_3 - p_4}_{y_1} \,;\, \underbrace{2.p_2}_{y_2}) \end{array}$$

- Expresión matricial de "f" respecto de las bases canónicas de P_3 y $\Re^2$:

coordenadas de $f(p(x)) \in \Re^2$ respecto de la base canónica de $\Re^2$ | coordenadas de $p(x) \in P_3$ respecto de la base canónica de P_3

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

- **Latiguillo:** el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio de P_3 que forman los vectores cuya imagen es el vector $\bar{0}$ de $\Re^2$. Es:

$$\dim.(\ker.f) = \dim.(P_3) - rg(A) = 4 - 2 = 2$$

Resolvemos el sistema lineal homogéneo de matriz de coeficientes "A":

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} p_3 = p_4 \\ p_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker.f = \{p_1.x^3 + 0.x^2 + p_4.x + p_4, \ \forall p_1, p_4 \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker.f = \{p_1.x^3 + p_4.(x+1), \ \forall p_1, p_4 \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 \text{ y } x+1 \text{ forman una base de } \ker.f$$

- **Latiguillo:** la imagen de "f" se denota Img.f, y es el subespacio de $\Re^2$ que forman los vectores que son imágenes de algún vector del espacio inicial P_3.
  Es $\dim.(\operatorname{Img}.f) = rg(A) = 2$, y como el único subespacio de $\Re^2$ que tiene dimensión 2 es $\Re^2$, resulta que $\operatorname{Img}.f = \Re^2$ y toda base de $\Re^3$ es base de Img.f.

FONEMATO 5.5.9

Siendo las bases de referencia en P_3 y P_2 las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_3 \mapsto P_2$ tal que $f(p(x)) = 2.p'(x) - p''(x)$.
Determine la dimensión y una base del núcleo de "f" y de la imagen de "f".

SOLUCIÓN

- La base de referencia en P_3 es $B_1 = \{\bar{h}_1 = x^3, \bar{h}_2 = x^2, \bar{h}_3 = x, \bar{h}_4 = 1\}$.
- La base de referencia en P_2 es $B_2 = \{\bar{k}_1 = x^2, \bar{k}_2 = x, \bar{k}_3 = 1\}$.
- Si $p(x) = p_1.x^3 + p_2.x^2 + p_3.x + p_4 \in P_3$, es:

$$f(p(x)) = 2.p'(x) - p''(x) = 6.p_1.x^2 + (-6.p_1 + 4.p_2).x + (-2.p_2 + 2.p_3)$$

VENTANA

Como $p'(x) = 3.p_1.x^2 + 2.p_2.x + p_3$ y $p''(x) = 6.p_1.x + 2.p_2$, es:

$$2.p'(x) - p''(x) = 2.(3.p_1.x^2 + 2.p_2.x + p_3) - (6.p_1.x + 2.p_2) =$$
$$= 6.p_1.x^2 + (-6.p_1 + 4.p_2).x + (-2.p_2 + 2.p_3)$$

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ p_1.x^3+p_2.x^2+p_3.x+p_4 & \longrightarrow & \underbrace{6.p_1}_{q_1}.x^2+\underbrace{(-6.p_1+4.p_2)}_{q_2}.x+\underbrace{(-2.p_2+2.p_3)}_{q_3} \end{array}$$

- Expresión matricial de "f" respecto de las bases canónicas de P_3 y P_2:

coordenadas de $f(p(x)) \in P_2$ respecto de la base canónica de P_2

coordenadas de $p(x) \in P_3$ respecto de la base canónica de P_3

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

- Latiguillo: el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio de P_3 que forman los vectores cuya imagen es el vector $\bar{0}$ de $\Re^2$. Es:

$$\dim.(\ker.f) = \dim.(P_3) - rg(A) = 4 - 3 = 1$$

Resolvemos el sistema lineal homogéneo de matriz de coeficientes "A":

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1 = p_2 = p_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker.f = \{0.x^3 + 0.x^2 + 0.x + p_4, \ \forall p_4 \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{h}_4 = 1 \text{ es base de } \ker.f$$

- Latiguillo: la imagen de "f" se denota Img.f, y es el subespacio de P_2 que forman los vectores que son imágenes de algún vector del espacio inicial P_3.

Es $\dim.(\operatorname{Im} g.f) = rg(A) = 3$, y como el único subespacio de P_2 que tiene dimensión 3 es P_2, resulta que $\operatorname{Im} g.f = P_2$ y toda base de P_2 es base de Img.f.

FONEMATO 5.5.10

Siendo las bases de referencia en P_2 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_2 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx \,;\, 2.\int_0^2 p''(x).dx\right)$.

Determine la dimensión y una base del núcleo de "f" y de la imagen de "f".

SOLUCIÓN

- La base de referencia en P_2 es $B_1 = \{\bar{h}_1 = x^2, \bar{h}_2 = x, \bar{h}_3 = 1\}$.
- La base de referencia en $\Re^2$ es $B_2 = \{\bar{k}_1 = (1;0), \bar{k}_2 = (0;1)\}$.
- Si $p(x) = p_1.x^2 + p_2.x + p_3 \in P_2$, es:

$$f(p(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx \,;\, 3.\int_0^2 p''(x).dx\right) = (3.p_1 + p_2 \,;\, 8.p_1)$$

VENTANA

$$* \int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx = \left(p_1.x^2 + 2.p_1.x + p_2.x\right)_{x=0}^{x=1} = 3.p_1 + p_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} p'(x) = 2.p_1.x + p_2 \\ p''(x) = 2.p_1 \end{array}\right\} \Rightarrow p'(x) + p''(x) = 2.p_1.x + 2.p_1 + p_2$$

$$* \ 3.\int_0^2 p''(x).dx = 3.\int_0^2 2.p_1.dx = 2.(2.p_1.x)_{x=0}^{x=2} = 8.p_1$$

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{f} & \Re^2 \\ p_1.x^2 + p_2.x + p_3 & \longrightarrow & (\underbrace{3.p_1 + p_2}_{q_1} \,;\, \underbrace{8.p_1}_{q_2}) \end{array}$$

- Expresión matricial de "f" respecto de las bases canónicas de P_2 y $\Re^2$:

coordenadas de $f(p(x)) \in \Re^2$ respecto de la base canónica de $\Re^2$ — coordenadas de $p(x) \in P_2$ respecto de la base canónica de P_2

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

- **Latiguillo:** el núcleo de "f" se denota ker.f, y es el subespacio de P_3 que forman los vectores cuya imagen es el vector $\bar{0}$ de $\Re^2$. Es:

$$\dim.(\ker.f) = \dim.(P_2) - rg(A) = 3 - 2 = 1$$

Resolvemos el sistema lineal homogéneo de matriz de coeficientes "A":

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1 = p_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker.f = \{0.x^2 + 0.x + p_3, \ \forall p_3 \in \Re\} \Rightarrow \bar{h}_3 = 1 \text{ es base de } \ker.f$$

- **Latiguillo:** la imagen de "f" se denota Img.f, y es el subespacio de P_2 que forman los vectores que son imágenes de algún vector del espacio inicial P_3.

Es $\dim.(\mathrm{Img}.f) = rg(A) = 3$, y como el único subespacio de P_2 que tiene dimensión 3 es P_2, resulta que $\mathrm{Img}.f = P_2$ y toda base de P_2 es base de Img.f.

5.6 PROPIEDADES DE LAS APLICACIONES LINEALES

Sean V_n y V_m sendos espacios vectoriales y $f: V_n \mapsto V_m$ una aplicación lineal.

1) Si $\overline{0}$ es el vector cero del espacio inicial V_n, entonces $f(\overline{0})$ es el vector cero del espacio final V_m. En efecto, $\forall\ \overline{x} \in V_n$ es $f(\overline{x}) = f(\overline{x} + \overline{0}) = f(\overline{x}) + f(\overline{0})$, lo que demuestra que $f(\overline{0})$ es el vector cero del espacio de V_m.

2) Si $-\overline{x}$ es el vector opuesto a $\overline{x}$ el vector $f(-\overline{x})$ es opuesto a $f(\overline{x})$. En efecto, siempre se cumple que $f(\overline{0}) = f(\overline{x} + (-\overline{x})) = f(\overline{x}) + f(-\overline{x})$, lo que demuestra que $f(-\overline{x})$ es opuesto a $f(\overline{x})$.

3) Si $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k \in V_n$ son LD $\Rightarrow f(\overline{h}_1), \ldots, f(\overline{h}_k)$ también son LD. En efecto, si $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k \in V_n$ son LD es posible encontrar "k" números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ no todos nulos y tales que $\alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + \alpha_k \bullet \overline{h}_k = \overline{0}$. Como:

$$\alpha_1 \bullet f(\overline{h}_1) + \ldots + \alpha_k \bullet f(\overline{h}_k) = f(\alpha_1 \bullet \overline{h}_1) + \ldots + f(\alpha_k \bullet \overline{h}_k) =$$

por ser la ley "f" una aplicación lineal

$$= f(\alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + \alpha_k \bullet \overline{h}_k) = f(\overline{0}) = \overline{0}$$

al ser no nulos algunos de los $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ resulta que $f(\overline{h}_1), \ldots, f(\overline{h}_k)$ son LD.

El reciproco no es cierto: el que $f(\overline{h}_1), \ldots, f(\overline{h}_k)$ sean LD no garantiza que $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k \in V_n$ sean LD; para demostrarlo vale el siguiente ejemplo: si la aplicación lineal $f: \Re^2 \mapsto \Re$ es tal que $f(x_1; x_2) = x_1 + x_2$, ocurrirá que, siendo $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ dos vectores cualesquiera de $\Re^2$, los vectores $f(\overline{h}_1), f(\overline{h}_2)$ son LD (pues son vectores del espacio vectorial $\Re$, que tiene dimensión 1), sin que ello garantice que $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ sean también LD.

4) Si $f(\overline{h}_1), \ldots, f(\overline{h}_k) \in V_m$ son LI $\Rightarrow \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k \in V_n$ también son LI
En efecto, si $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k \in V_n$ fueran LD, entonces, según 3), los vectores $f(\overline{h}_1), \ldots, f(\overline{h}_k) \in V_m$ también serían LD, lo que va contra la hipótesis.

5.7 CLASIFICACIÓN DE LAS APLICACIONES LINEALES

Sean V_n y V_m espacios vectoriales de dimensiones respectivas "n" y "m" y $f: V_n \mapsto V_m$ una aplicación lineal. Sean B_1 y B_2 las bases de referencia en V_n y V_m respectivamente. Sea "A" la matriz asociada a "f" respecto de dichas bases.

- Se dice que la aplicación lineal "f" es un **monomorfismo si es inyectiva** (si $\overline{x}, \overline{y} \in V_n$ son tales que $\overline{x} \neq \overline{y}$ es $f(\overline{x}) \neq f(\overline{y})$). Demostremos que es condición necesaria y suficiente para que "f" sea inyectiva el que $\ker.f = \{\overline{0} \in V_n\}$.

  $\boxed{\Rightarrow}$

  Siendo "f" inyectiva, es $f(\overline{x}) \neq f(\overline{y})$ si $\overline{x} \neq \overline{y}$. Por tanto, $\forall\ \overline{x} \in V_n, \overline{x} \neq \overline{0}$, es $f(\overline{x}) \neq f(\overline{0}) = \overline{0} \in V_m \Rightarrow \ker.f = \{\overline{0} \in V_n\}$, pues ningún vector $\overline{x} \in V_n$ $(\overline{x} \neq \overline{0})$ tiene por imagen al vector $\overline{0} \in V_m$.

  $\boxed{\Leftarrow}$

  Reducción al absurdo: si $\ker.f = \{\overline{0} \in V_n\}$ y "f" no fuera inyectiva, sería posible encontrar vectores $\overline{x}, \overline{y} \in V_n$ tales que siendo $\overline{x} \neq \overline{y}$ es $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$, y así:

  $$f(\overline{x}) - f(\overline{y}) = \overline{0} \Rightarrow f(\overline{x} - \overline{y}) = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} - \overline{y} \in \ker.f$$

  Como por ser $\overline{x} \neq \overline{y}$ es $\overline{x} - \overline{y} \neq \overline{0}$, el núcleo de "f" no estaría formado sólo por el vector cero del espacio inicial, lo que contradice la hipótesis.

  Observa: como $\dim.(\ker.f) = n - rg(A)$, si $\ker.f = \{\overline{0} \in V_n\}$ es $\dim.(\ker.f) = n - rg(A) = 0 \Rightarrow rg(A) = n$; o sea, "f" es inyectiva si y sólo si $rg(A) =$ dimensión del espacio "inicial"

- Se dice que la aplicación lineal "f" es un **epimorfismo si es sobreyectiva** (o sea, cada vector del espacio "final" V_m es imagen de algún vector del espacio "inicial" V_n), lo que sucede sólo si el subespacio Img.f coincide con el espacio "final" V_m; o sea, $rg(A) = m$, pues $\dim.(\mathrm{Im g}.f) = rg(A)$.

- Se dice que la aplicación lineal "f" es un **isomorfismo si es biyectiva** (o sea, es inyectiva y sobreyectiva), lo que sucede sólo si $rg(A) = n = m$.

  Observa: "f" no puede ser un isomorfismo si los espacios "inicial" y "final" tienen dimensiones distintas, pues no puede suceder que $rg(A) = n = m$.

- Se llama **endomorfismo** a toda aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo. Se llama un **automorfismo** a todo endomorfismo biyectivo.

FONEMATO 5.7.1

Sean U y V espacios vectoriales y $f: U \mapsto V$ la aplicación lineal cuya matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{bmatrix}$$

Clasifique "f" según los valores del parámetro real "k".

SOLUCIÓN

Como la matriz "A" tiene 3 columnas, es $\dim.(U) = 3$.

Como "A" tiene 3 filas, es $\dim.(V) = 3$.

Sabemos que "f" es inyectiva (monomorfismo) si el rango de "A" coincide con la dimensión del espacio inicial "U", y "f" es sobreyectiva (epimorfismo) si dicho rango coincide con la dimensión del espacio final "V". Por tanto, el trabajo de clasificar "f" se reduce a estudiar el rango de la matriz "A" según el valor del parámetro real "k"; para ello determinamos para los valores de "k" que anulan el determinante de "A":

$$|A| = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \text{ (doble)} \end{cases}$$

- Si "k" es distinto de -1 y de 2, es $\text{rg}(A) = 3$, pues $|A| \neq 0$; así:

$$\left.\begin{array}{r} * \ \text{rg}(A) = 3 = \dim.(U) \Rightarrow \text{"f" es inyectiva} \\ * \ \text{rg}(A) = 3 = \dim.(V) \Rightarrow \text{"f" es sobreyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{"f" es biyectiva; o sea,} \\ \text{es un isomorfismo} \end{cases}$$

  Si fuera $U = V$, entonces "f" sería un endomorfismo, y por ser biyectivo sería un automorfismo.

- Si $k = -1$ ó $k = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ el rango de "A" no coincide con la dimensión del espacio inicial ($\Rightarrow$ "f" no es inyectiva) ni con la dimensión del espacio final ($\Rightarrow$ "f" no es sobreyectiva).

Latiguillo: párrafo corto o esquema que explica lo fundamental del asunto que llevamos entre manos.

FONEMATO 5.7.2

Sean U y V espacios vectoriales y $f: U \mapsto V$ la aplicación lineal cuya matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} \vartheta & \xi & 1 \\ 1 & \vartheta.\xi & 1 \\ 1 & \xi & \vartheta \end{bmatrix}$$

Clasifique "f" según los valores de los parámetros reales "ϑ" y "ξ".

SOLUCIÓN

Como la matriz "A" tiene 3 columnas, es $\dim.(U) = 3$.

Como "A" tiene 3 filas, es $\dim.(V) = 3$.

Sabemos que "f" es inyectiva (monomorfismo) si el rango de "A" coincide con la dimensión del espacio inicial "U", y "f" es sobreyectiva (epimorfismo) si dicho rango coincide con la dimensión del espacio final "V". Por tanto, el trabajo de clasificar "f" se reduce a estudiar el rango de "A" según los valores de "ϑ" y "ξ".

$$|A| = \begin{vmatrix} \vartheta & \xi & 1 \\ 1 & \vartheta.\xi & 1 \\ 1 & \xi & \vartheta \end{vmatrix} = \xi. \begin{vmatrix} \vartheta & 1 & 1 \\ 1 & \vartheta & 1 \\ 1 & 1 & \vartheta \end{vmatrix} = \xi.(\vartheta^3 - 3.\vartheta + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = 0 \\ \vartheta^3 - 3.\vartheta + 2 = 0 \Rightarrow \vartheta = -2 \text{ ó } \vartheta = 1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

- Si $\xi \neq 0$ y "ϑ" es distinto de 1 y de -2, es:

  $$\left.\begin{array}{r} * \ \mathrm{rg}(A) = 3 = \dim.(U) \Rightarrow \text{"f" es inyectiva} \\ * \ \mathrm{rg}(A) = 3 = \dim.(V) \Rightarrow \text{"f" es sobreyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{"f" es biyectiva; o sea,} \\ \text{es un isomorfismo} \end{cases}$$

  Si fuera $U = V$, entonces "f" sería un endomorfismo, y por ser biyectivo sería un automorfismo.

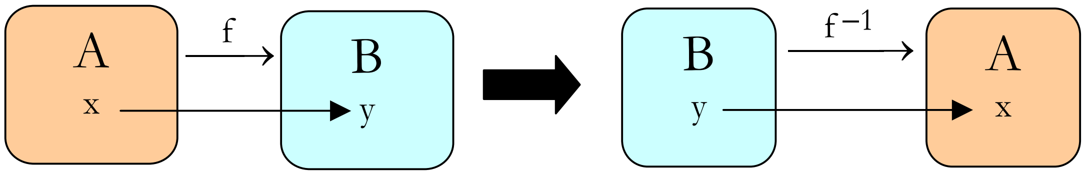
- Si $\xi = 0$ ó $\vartheta = -2$ ó $\vartheta = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ el rango de "A" no coincide con la dimensión del espacio inicial ($\Rightarrow$ "f" no es inyectiva) ni con la dimensión del espacio final ($\Rightarrow$ "f" no es sobreyectiva).

FONEMATO 5.7.3

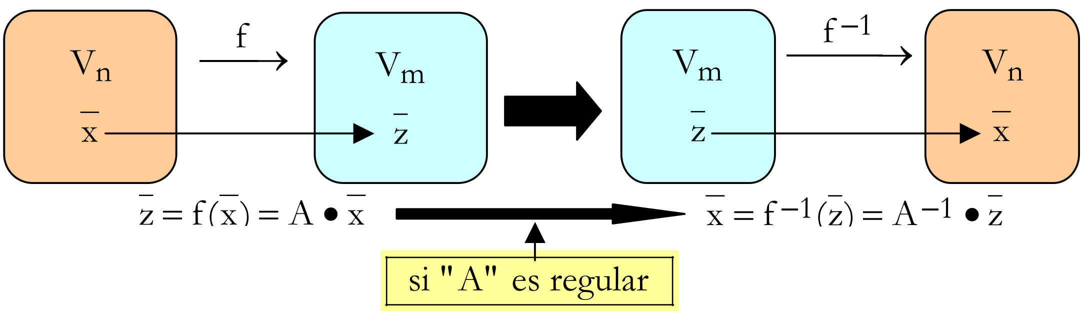
Sean V_n y V_m espacios vectoriales de dimensiones "n" y "m" respectivamente y $f: V_n \mapsto V_m$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de unas ciertas bases es "A". Estudie bajo qué condiciones es aplicación lineal $f^{-1}: V_m \mapsto V_n$.

SOLUCIÓN

En general, si $f: A \mapsto B$ es una correspondencia de "A" en "B" tal que $f(x) = y$, se llama **inversa** de "f" a la correspondencia $f^{-1}: B \mapsto A$ tal que $f^{-1}(y) = x$.



- Si la aplicación lineal $f: V_n \mapsto V_m$ **no es inyectiva,** en el espacio inicial de "f" hay vectores distintos que tienen la misma imagen $\bar{z} \in V_m$; así, $\bar{z} \in V_m$ tendrá más de una imagen según $f^{-1}: V_m \mapsto V_n$, por lo que f^{-1} no es una "aplicación". Al contrario, si $f: V_n \mapsto V_m$ es inyectiva y $\bar{z} \in V_m$ es imagen de algún vector de V_n, entonces $\bar{z}$ es imagen de un único vector de V_n, por lo que $\bar{z} \in V_m$ tiene imagen única según la correspondencia inversa f^{-1}.
- Si la aplicación lineal $f: V_n \mapsto V_m$ **no es sobreyectiva,** en el espacio final "f" hay vectores $\bar{z} \in V_m$ que no son imagen de ningún vector de V_n; así, $\bar{z}$ no tendrá imagen según la correspondencia inversa $f^{-1}: V_m \mapsto V_n$, por lo que f^{-1} no es una "aplicación". Al contrario, si la aplicación lineal $f: V_n \mapsto V_m$ es sobreyectiva todos los vectores del espacio V_m tendrán imagen según f^{-1}.
- En definitiva, si $f: V_n \mapsto V_m$ **no es inyectiva o no es sobreyectiva,** entonces $f^{-1}: V_m \mapsto V_n$ no es una "aplicación" (o sea, f^{-1} no es una ley que a cada elemento del conjunto V_m le asocia un único elemento del conjunto V_n). No siendo f^{-1} una "aplicación", no es una "aplicación lineal".
- Si $f: V_n \mapsto V_m$ **es inyectiva y sobreyectiva,** lo que sucede sólo si los espacios "inicial" y "final" tienen igual dimensión ($\Rightarrow n = m \Rightarrow$ la matriz "A" asociada a "f" es cuadrada) y regular (para que así sea $rg(A) = n = m$), todos los elementos de V_m tienen imagen según $f^{-1}: V_m \mapsto V_n$ (por ser "f" sobreyectiva), y dicha imagen es única (por ser "f" inyectiva), por lo que f^{-1} es una "aplicación". Además si $\bar{z} = f(\bar{x}) = A \bullet \bar{x}$ y "A" regular, es $\bar{x} = f^{-1}(\bar{z}) = A^{-1} \bullet \bar{z}$, que es la expresión típica de una aplicación lineal.



5.8 LAS APLICACIONES LINEALES Y LOS CAMBIOS DE BASE

Las aplicaciones lineales, al igual que los vectores, son camaleónicas

... y con esto queremos decir que la matriz que representa a una aplicación lineal "f" es una u otra dependiendo de cuáles sean las bases de referencia utilizadas para identificar a los vectores de los espacios "inicial" y "final" de "f".

Sean V_n y V_m espacios vectoriales de dimensiones "n" y "m" respectivamente.

Sea $f: V_n \mapsto V_m$ una aplicación lineal.

Sean B_1 y B_2 las bases de referencia elegidas respectivamente en V_n y V_m.

Sea "A" la matriz asociada a "f" respecto de las bases B_1 y B_2.

Así, si $\overline{x} \in V_n$ tiene coordenadas $(x_1; .... ; x_n)$ respecto de B_1 y $f(\overline{x}) \in V_m$ tiene coordenadas $(y_1; .... ; y_m)$ respecto de B_2, sabemos que:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ : \\ y_m \end{bmatrix} = A \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

Si en V_n tomamos como nueva base de referencia la B_1^* y "N" es la matriz asociada al cambio de base $B_1 \to B_1^*$, entonces, si $(x_1^*; .... ; x_n^*)$ son las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base B_1^*, se verifica que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{bmatrix} = N \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ : \\ x_n^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

Si en V_m tomamos como nueva base de referencia la B_2^* y "M" es la matriz asociada al cambio de base $B_2 \to B_2^*$, entonces, si $(y_1^*; .... ; y_m^*)$ son las coordenadas de $f(\overline{x})$ respecto de la base B_2^*, se verifica que:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ : \\ y_m \end{bmatrix} = M \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ : \\ y_m^* \end{bmatrix} \quad \text{(III)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de las bases B_1^* y B_2^*, resulta:

$$M \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ : \\ y_m^* \end{bmatrix} = A \bullet N \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ : \\ x_n^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^* \\ : \\ y_m^* \end{bmatrix} = \underbrace{M^{-1} \bullet A \bullet N}_{} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ : \\ x_n^* \end{bmatrix}$$

Escúlpelo en tu cerebro: la matriz asociada a "f" respecto de las nuevas bases es la que teníamos "A", postmultiplicada por la matriz "N" asociada al cambio de base realizado en el espacio "inicial", y premultiplicada por la inversa de la matriz "M" asociada al cambio de base realizado en el espacio "final".

FONEMATO 5.8.1

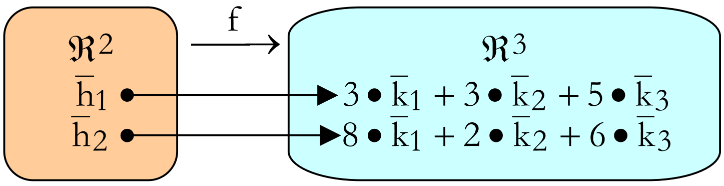
Siendo $B_1=\{\overline{h}_1,\overline{h}_2\}$ la base de referencia en $\Re^2$ y $B_2=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2,\overline{k}_3\}$ la base de referencia en $\Re^3$, sea $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(\overline{h}_1)=3\bullet\overline{k}_1+3\bullet\overline{k}_2+5\bullet\overline{k}_3\ ;\ f(\overline{h}_2)=8\bullet\overline{k}_1+2\bullet\overline{k}_2+6\bullet\overline{k}_3$$

Halle la expresión de la aplicación lineal "f" respecto de las bases $B_1^*=\{\overline{d}_1,\overline{d}_2\}$ y $B_2^*=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\}$, sabiendo que:

$$\overline{d}_1=5\bullet\overline{h}_1+7\bullet\overline{h}_2\ ;\ \overline{d}_2=4\bullet\overline{h}_1+9\bullet\overline{h}_2$$
$$\overline{u}_1=2\bullet\overline{k}_1+3\bullet\overline{k}_2+4\bullet\overline{k}_3\ ;\ \overline{u}_2=2\bullet\overline{k}_1+3\bullet\overline{k}_2\ ;\ \overline{u}_3=3\bullet\overline{k}_1$$

SOLUCIÓN



- Para identificar a "f" nos dan las imágenes según "f" de los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ que forman la base de referencia en el espacio inicial $\Re^2$; o sea, nos dan las columnas de la matriz "A" asociada a "f" respecto de las bases $B_1=\{\overline{h}_1,\overline{h}_2\}$ y $B_2=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2,\overline{k}_3\}$, que es:

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}3 & 8\\3 & 2\\5 & 6\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}\uparrow & \uparrow\\ f(\overline{h}_1) & f(\overline{h}_2)\end{array}\end{array}$$

Así, si $\overline{x}\in\Re^2$ tiene coordenadas $(x_1;x_2)$ respecto de la base B_1 y $f(\overline{x})\in\Re^3$ tiene coordenadas $(y_1;y_2;y_3)$ respecto de B_2, sabemos que:

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=A\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\quad(I)$$

- Si para identificar los vectores de $\Re^2$ tomamos como nueva base de referencia la $B_1^*=\{\overline{d}_1,\overline{d}_2\}$, se modifican las coordenadas de $\overline{x}\in\Re^2$... y sabemos que si este vector tiene coordenadas $(x_1^*;x_2^*)$ respecto de B_1^*, es:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{array}{c}\begin{bmatrix}5 & 4\\7 & 9\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}\uparrow & \uparrow\\ \overline{d}_1 & \overline{d}_2\end{array}\end{array}}^{N}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix}\quad(II)$$

Si para identificar los vectores de $\Re^3$ tomamos como nueva base de referencia la $B_2^*=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\}$, se modifican las coordenadas de $f(\overline{x})\in\Re^3$... y sabemos que si $f(\bar{x})$ tiene coordenadas $(y_1^*;y_2^*;y_3^*)$ respecto de la base B_2^*, es:

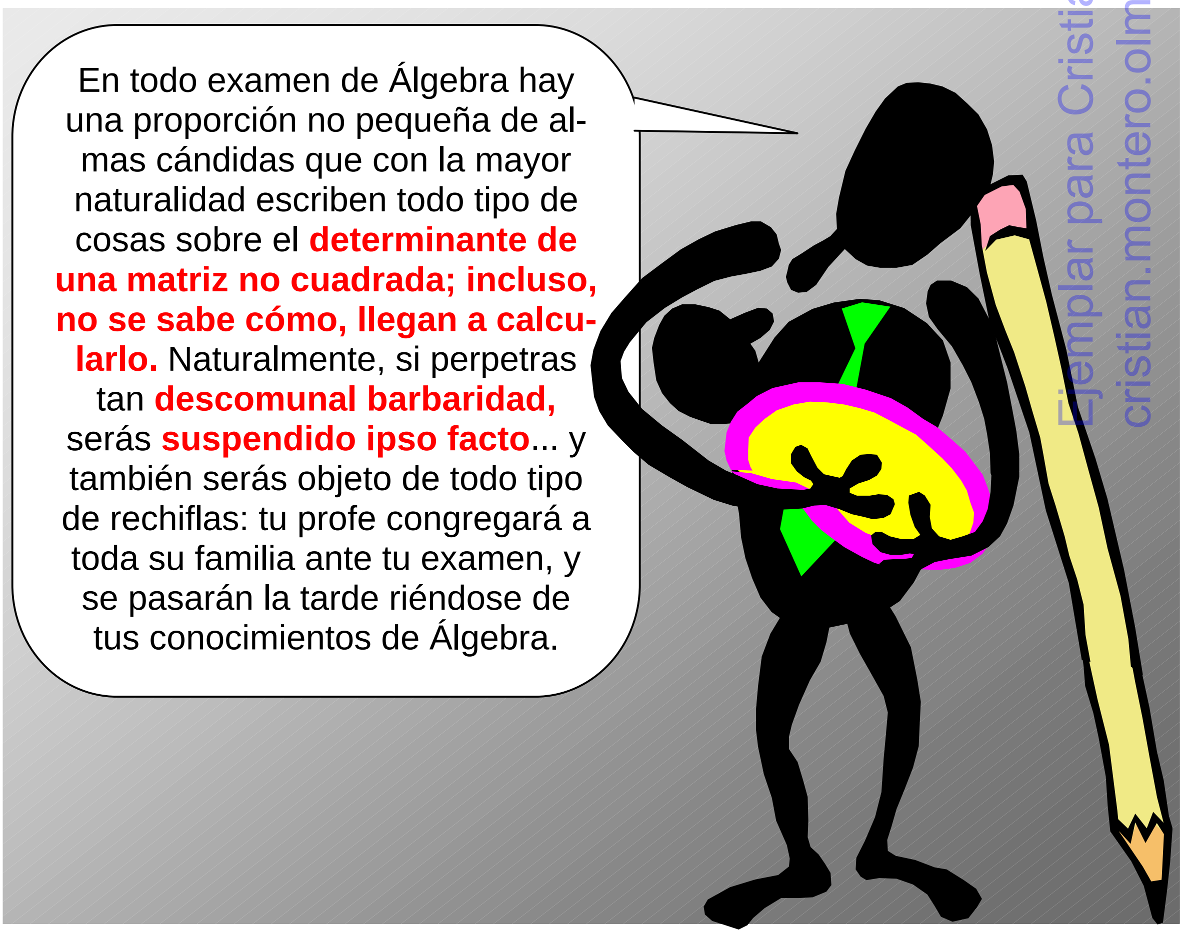
$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix} = \begin{array}{c}\overbrace{\begin{bmatrix}2&2&3\\3&3&0\\4&0&0\end{bmatrix}}^{M}\\ \begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{u}_1&\bar{u}_2&\bar{u}_3\end{matrix}\end{array} \bullet \begin{bmatrix}y_1^*\\ y_2^*\\ y_3^*\end{bmatrix} \quad \text{(III)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de las bases B_1^* y B_2^*; resulta:

$$M \bullet \begin{bmatrix}y_1^*\\ y_2^*\\ y_3^*\end{bmatrix} = A \bullet N \bullet \begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}y_1^*\\ y_2^*\\ y_3^*\end{bmatrix} = M^{-1} \bullet A \bullet N \bullet \begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix}$$

Así, como sucede siempre, la matriz asociada a "f" respecto de las nuevas bases es la que teníamos, "A", postmultiplicada por la matriz "N" asociada al cambio de base realizado en el espacio "inicial", y premultiplicada por la inversa de la matriz "M" asociada al cambio de base realizado en el espacio "final".



FONEMATO 5.8.2

Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ una aplicación lineal de la que se sabe que

$$f(2;3)=(4;5;6)\ ;\ f(3;4)=(7;8;9)$$

Determine la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^3$.

SOLUCIÓN

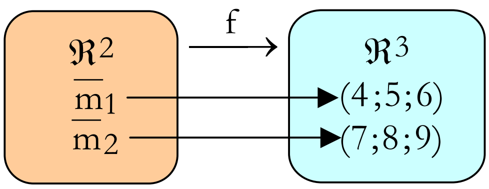
Por n-ésima vez encontramos un enunciado muy cutre en lo que se refiere al asunto de establecer las bases de referencia que se usan para identificar a los vectores.

Consideraremos que los dos vectores de $\Re^2$ (de $\Re^3$) de los que nos habla el enunciado están identificados mediante sus coordenadas respecto de la base canónica de $\Re^2$ (de $\Re^3$).

Para más inri, los vectores dados carecen de "nombre", lo que además de ser una gran crueldad (los vectores se deprimen) es una gran estupidez, porque el nombre no es flor de un día, el nombre un vector no cambia a lo largo de toda su vida, al contrario de lo que pasa con su "apariencia" (sus coordenadas), que depende de la base de referencia que se use para identificarlo.

Los vectores $\overline{m}_1$ y $\overline{m}_2$ que respecto de la base canónica de $\Re^2$ tienen coordenadas $(2;3)$ y $(3;4)$ son linealmente independientes, por lo que constituyen una base de $\Re^2$; además, conocemos sus imágenes $f(\overline{m}_1)$ y $f(\overline{m}_2)$, que están identificadas mediante sus coordenadas respecto de la base canónica de $\Re^3$:

$$f(\overline{m}_1)=(4;5;6)\ ;\ f(\overline{m}_2)=(7;8;9)$$



Asi, si en el espacio inicial $\Re^2$ tomamos como base de referencia la que forman $\overline{m}_1$ y $\overline{m}_2$ y en espacio final $\Re^3$ tomamos como base de referencia la canónica, entonces, si $\overline{x} \in \Re^2$ tiene coordenadas $(x_1;x_2)$ respecto de la base $\{\overline{m}_1,\overline{m}_2\}$ y $f(\overline{x}) \in \Re^3$ tiene coordenadas $(y_1;y_2;y_3)$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ f(\overline{m}_1) & f(\overline{m}_2) \end{matrix}$$

Como se nos pide la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^3$, debemos cambiar la base de referencia en el espacio inicial $\Re^2$, pasando de la $\{\overline{m}_1=(2;3)\ ,\ \overline{m}_2=(3;4)\}$ a la canónica, lo que hace que cambien las coordenadas de $\bar{x} \in \Re^2$... y si este vector tiene coordenadas $(x_1^*; x_2^*)$ respecto de la base canónica, la relación entre $(x_1; x_2)$ y $(x_1^*; x_2^*)$ es (cambio de base "casi maternal"):

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix}^{-1}\\ \uparrow\quad\uparrow\\ m_1\quad m_2\end{array}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix}\quad\text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^3$; resulta:

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=A\bullet\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix}$$

AVISO: las aplicaciones lineales tendrán protagonismo estelar al estudiar la **diferenciabilidad de una función en un punto...** asunto que te espera en el Cálculo Diferencial de Varias Variables.

EXITO SEGURO

Ese es el premio para l@s que educan su voluntad en el rigor: no contentarse nunca con entender a medias; dedicar el tiempo que haga falta, pero comprender, asimilar, progresar.

FONEMATO 5.8.3

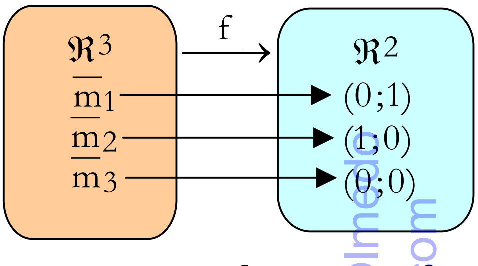
Halle la expresión de $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^2$ si $f(1;0;0)=(0;1)$, $f(1;1;1)=(1;0)$ y $\ker.f=\{\overline{x}\in\Re^3 \,/\, x_1-x_2=x_3=0\}$.

SOLUCIÓN

Consideramos que los vectores de cada espacio están identificados mediante sus coordenadas respecto de la base canónica de dicho espacio.

Sean $\overline{m}_1=(1;0;0)$ y $\overline{m}_2=(1;1;1)$. El vector $\overline{m}_3=(1;1;0)\in\ker.f$, pues satisface las ecuaciones cartesianas de ker.f; así, es $f(\overline{m}_3)=(0;0)$.

Los vectores $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$ y $\overline{m}_3$ son LI, por lo que forman una base de $\Re^3$; además conocemos sus imágenes $f(\overline{m}_1), f(\overline{m}_2)$ y $f(\overline{m}_3)$, que están identificadas mediante sus coordenadas respecto de la base canónica de $\Re^2$.



Si en el espacio inicial $\Re^3$ tomamos como base de referencia la $\{\overline{m}_1,\overline{m}_2,\overline{m}_3\}$ y en espacio final $\Re^2$ tomamos como base de referencia la canónica, entonces, si $\overline{x}\in\Re^3$ tiene coordenadas $(x_1;x_2;x_3)$ respecto de la base $\{\overline{m}_1,\overline{m}_2,\overline{m}_3\}$ y $f(\overline{x})\in\Re^2$ tiene coordenadas $(y_1;y_2)$ respecto de la base canónica de $\Re^2$, es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\overline{m}_1) & f(\overline{m}_2) & f(\overline{m}_3) \end{array}$$

Como se pide la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^2$, debemos cambiar la base de referencia en el espacio inicial $\Re^3$, pasando de la $\{\overline{m}_1=(1;0;0)\,,\overline{m}_2=(1;1;1)\,,\overline{m}_3=(1;1;0)\}$ a la canónica. Así, si $(x_1^*;x_2^*;x_3^*)$ son las coordenadas de $\overline{x}\in\Re^3$ respecto de la base canónica, es ("casi maternal"):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{m}_1 & \overline{m}_2 & \overline{m}_3 \end{array}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^2$; resulta:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

FONEMATO 5.8.4

Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re^4$ una aplicación lineal referida a las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^4$. Se sabe que $f(1;0)=(2;1;0;1)$ engendra al subespacio Img.f y que $(1;1)\in\ker.f$. Determínese la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^4$.

SOLUCIÓN

La base canónica del espacio inicial $\Re^2$ es $\{\overline{h}_1=(1;0)\ ,\ \overline{h}_2=(1;0)\}$.

Si el vector $f(\overline{h}_1)=(2;1;0;1)\in\Re^4$ engendra al subespacio Img.f, el vector $f(\overline{h}_2)$ es combinación lineal de (2;1;0;1); o sea, es $f(\overline{h}_2)=(2.\lambda;\lambda;0;\lambda)$.

Así, si $\overline{x}\in\Re^2$ tiene coordenadas $(x_1;x_2)$ respecto de la base canónica de $\Re^2$ y $f(\overline{x})\in\Re^4$ tiene coordenadas $(y_1;y_2;y_3;y_4)$ respecto de la base canónica de $\Re^4$, es:

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 2.\lambda\\ 1 & \lambda\\ 0 & 0\\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(\overline{h}_1) & f(\overline{h}_2) \end{array} \end{array}\bullet\begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix}\quad (I)$$

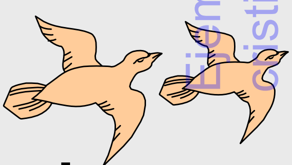
Si $(1;1)\in\ker.f$ es $f(1;1)=(0;0;0;0)$. Al exigir que se satisfaga esta condición:

$$\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2.\lambda\\ 1 & \lambda\\ 0 & 0\\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1\\ 1 \end{bmatrix}\Rightarrow \lambda=-1$$

Por tanto, haciendo $\lambda=-1$ en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^4$:

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix}$$

El primer objetivo de quien no se chupa el dedo es averiguar cuanto antes si se ha equivocado de Carrera o no... y eso te lo dicen las Matemáticas, no las asignaturas fáciles que aprueba todo el mundo.



5.9. OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES

Sean V_n y V_m espacios vectoriales de dimensiones "n" y "m" respectivamente. Sea "F" el conjunto de todas las aplicaciones lineales que pueden establecerse entre V_n y V_m, o sea: $F = \{f : V_n \mapsto V_m / \text{"f" es aplicación lineal}\}$.

Suma de aplicaciones lineales

Si $f_1, f_2 \in F$, decimos que $h : V_n \mapsto V_m$ es la **suma** de f_1 y f_2, y escribimos $h = f_1 + f_2$, si $h(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})$. Demostremos que la suma de aplicaciones lineales es una aplicación lineal; para ello debemos demostrar que:

$$1)\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n \text{ es } h(\bar{x} + \bar{y}) = h(\bar{x}) + h(\bar{y})$$
$$2)\ \forall \bar{x} \in V_n \text{ y } \forall \alpha \in \Re \text{ es } h(\alpha \bullet \bar{x}) = \alpha \bullet h(\bar{x})$$

1) Es: $h(\bar{x} + \bar{y}) = f_1(\bar{x} + \bar{y}) + f_2(\bar{x} + \bar{y}) = f_1(\bar{x}) + f_1(\bar{y}) + f_2(\bar{x}) + f_2(\bar{y}) =$

pues f_1 y f_2 son aplicaciones lineales

$$= (f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})) + (f_1(\bar{y}) + f_2(\bar{y})) = h(\bar{x}) + h(\bar{y})$$

es $f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) = h(\bar{x})$ y $f_1(\bar{y}) + f_2(\bar{y}) = h(\bar{y})$

2) Es: $h(\alpha \bullet \bar{x}) = f_1(\alpha \bullet \bar{x}) + f_2(\alpha \bullet \bar{x}) = \alpha \bullet f_1(\bar{x}) + \alpha \bullet f_2(\bar{x}) =$

pues f_1 y f_2 son aplicaciones lineales

$$= \alpha \bullet (f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})) = \alpha \bullet h(\bar{x})$$

es $f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) = h(\bar{x})$

Observa: siendo A_1 la matriz asociada a f_1 y A_2 la matriz asociada a f_2, la matriz asociada a $h = f_1 + f_2$ es $A_1 + A_2$:

$$h(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) = A_1 \bullet \bar{x} + A_2 \bullet \bar{x} = (A_1 + A_2) \bullet \bar{x}$$

Producto de una aplicación lineal por un escalar

Si $f \in F$ y $\theta \in \Re$, decimos que $g : V_n \mapsto V_m$ es el **producto** de la aplicación lineal "f" por el escalar "θ", y escribimos $g = \theta \bullet f$, si $g(\bar{x}) = \theta \bullet f(\bar{x})$. Demostremos que "g" es una aplicación lineal; para ello debemos demostrar que:

$$1)\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n \text{ es } g(\bar{x} + \bar{y}) = g(\bar{x}) + g(\bar{y})$$
$$2)\ \forall \bar{x} \in V_n \text{ y } \forall \alpha \in \Re \text{ es } g(\alpha \bullet \bar{x}) = \alpha \bullet g(\bar{x})$$

1) Es:

$$g(\bar{x} + \bar{y}) = \theta \bullet f(\bar{x} + \bar{y}) = \theta \bullet (f(\bar{x}) + f(\bar{y})) = \theta \bullet f(\bar{x}) + \theta \bullet f(\bar{y}) = g(\bar{x}) + g(\bar{y})$$

pues "f" es aplicación lineal

$\theta \bullet f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ y $\theta \bullet f(\bar{y}) = g(\bar{y})$

2) Es: $g(\alpha \bullet \bar{x}) = \theta \bullet f(\alpha \bullet \bar{x}) \underset{\uparrow}{=} \theta \bullet (\alpha \bullet f(\bar{x})) = \alpha \bullet (\theta \bullet f(\bar{x})) \underset{\uparrow}{=} \alpha \bullet g(\bar{x})$

pues "f" es aplicación lineal | $\theta \bullet f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

Observa: si "A" es la matriz asociada a la aplicación lineal "f", la matriz asociada a la aplicación lineal $g = \theta \bullet f$ es $\theta \bullet A$:

$$g(\bar{x}) = \theta \bullet f(\bar{x}) = \theta \bullet (A \bullet \bar{x}) = (\theta \bullet A) \bullet \bar{x}$$

Es fácil comprobar que la **suma** y el **producto por un escalar** definidos en el conjunto $F = \{f: V_n \mapsto V_m / \text{"f" es aplicación lineal}\}$ satisfacen las 8 exigencias establecidas en la definición del "ente" llamado **espacio vectorial;** a saber:

1) La "suma" definida en "F" es conmutativa: $\forall f_1, f_2 \in F$ es $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$

2) La "suma" definida en "F" es asociativa:

$$\forall f_1, f_2, f_3 \in F \text{ es } f_1 + (f_2 + f_3) = (f_1 + f_2) + f_3$$

3) La "suma" definida en "F" admite elemento neutro, que es la aplicación lineal "cero", la que tiene asociada la matriz "cero" de orden $m \times n$.

4) Cada elemento de "F" tiene simétrico respecto de la suma definida en "F": el simétrico de "f" es "$-f$".

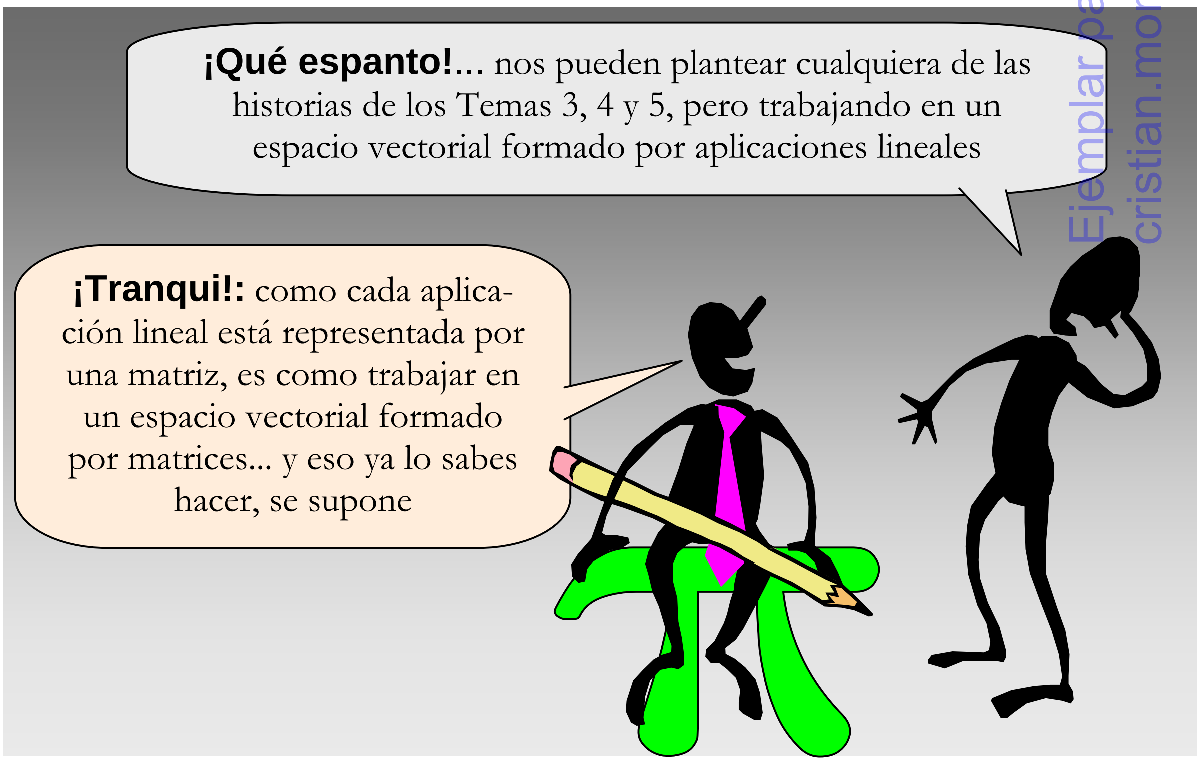
5) $1 \bullet f = f, \forall f \in F$

6) $\forall \alpha, \beta \in \Re, \forall f \in F$ es $(\alpha + \beta) \bullet f = (\alpha \bullet f) + (\beta \bullet f)$

7) $\forall \alpha \in \Re, \forall f_1, f_2 \in F$ es $\alpha \bullet (f_1 + f_2) = (\alpha \bullet f_1) + (\alpha \bullet f_2)$

8) $\forall \alpha, \beta \in \Re, \forall f \in F$ es $\alpha \bullet (\beta \bullet f) = (\alpha . \beta) \bullet f$

Por tanto $(F; +; \bullet)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales ... y como cada aplicación lineal $f: V_n \mapsto V_m$ está representada por una matriz de orden $m \times n$, es fácil entender que $\dim.(F) = m.n$



FONEMATO 5.9.1

Se consideran las siguientes aplicaciones lineales de $\Re^4$ en $\Re^3$, todas ellas referidas a las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^3$:

$$g_1:\Re^4 \mapsto \Re^3 \;/\; g_1(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1 + 3.x_2 \,;\, x_2 + x_4 \,;\, x_1 - x_4)$$
$$g_2:\Re^4 \mapsto \Re^3 \;/\; g_2(x_1;x_2;x_3;x_4) = (0 \,;\, x_2 \,;\, x_3)$$
$$g_3:\Re^4 \mapsto \Re^3 \;/\; g_3(x_1;x_2;x_3;x_4) = (2.x_3 + 5.x_4 \,;\, 0 \,;\, 0)$$
$$g_4:\Re^4 \mapsto \Re^3 \;/\; g_4(x_1;x_2;x_3;x_4) = (0 \,;\, 0 \,;\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Determínese la expresión de $h = 3 \bullet g_1 + 4 \bullet g_2 - 5 \bullet g_3 + 6 \bullet g_4$ respecto de las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^3$.

SOLUCIÓN

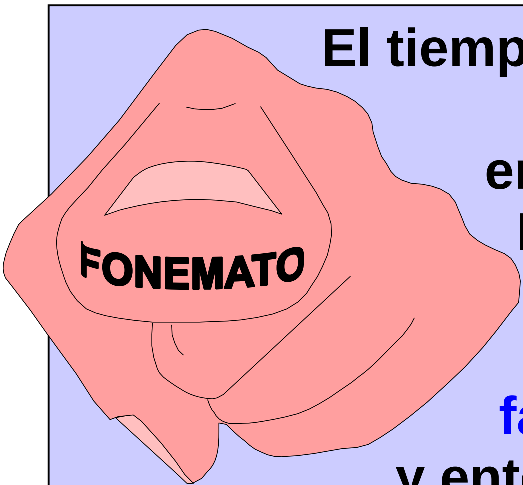
Sea A_i la matriz asociada a la aplicación lineal $g_i:\Re^4 \mapsto \Re^3$ $(i = 1,2,3,4)$ respecto de las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^3$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ;\; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\; A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo $h:\Re^4 \mapsto \Re^3$ la definida como $h = 3 \bullet g_1 + 4 \bullet g_2 - 5 \bullet g_3 + 6 \bullet g_4$, es:

$$h(\overline{x}) = 3 \bullet g_1(\overline{x}) + 4 \bullet g_2(\overline{x}) - 5 \bullet g_3(\overline{x}) + 6 \bullet g_4(\overline{x}) =$$
$$= 3 \bullet A_1 \bullet \overline{x} + 4 \bullet A_2 \bullet \overline{x} - 5 \bullet A_3 \bullet \overline{x} + 6 \bullet A_4 \bullet \overline{x} =$$
$$= (3 \bullet A_1 + 4 \bullet A_2 - 5 \bullet A_3 + 6 \bullet A_4) \bullet \overline{x}$$

Por tanto, la matriz asociada a $h = 3 \bullet g_1 + 4 \bullet g_2 - 5 \bullet g_3 + 6 \bullet g_4$ respecto de las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^3$ es $3 \bullet A_1 + 4 \bullet A_2 - 5 \bullet A_3 + 6 \bullet A_4$.



El tiempo que dediques a estudiar Matemáticas es el mejor empleado, pues estudiando Matemáticas desarrollarás al máximo tu capacidad de abstracción y tu facultad de razonamiento... y entendiendo de "números" te será muy fácil entender de cualquier asunto que se exprese mediante números.

FONEMATO 5.9.2

Tomando como bases de referencia en $\Re^3$ y $\Re^2$ las respectivas bases canónicas, en el espacio vectorial "F" que forman las aplicaciones lineales de $\Re^3$ en $\Re^2$, se consideran los siguientes vectores:

$$h_1:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, h_1(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + 2.x_2\,;\,3.x_1 + 4.x_2 + 5.x_3)$$
$$h_2:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, h_2(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + 3.x_2 + 6.x_3\,;\,x_1 + x_2 + 4.x_3)$$
$$h_3:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, h_3(x_1;x_2;x_3) = (3.x_1 + 5.x_2 + 6.x_3\,;\,4.x_1 + 5.x_2 + 9.x_3)$$

1) Estúdiese su dependencia o independencia lineal.
2) ¿Constituyen un sistema de generadores de "F"?, ¿y una base?
3) Calcúlese la dimensión y una base de la variedad lineal que engendran.

SOLUCIÓN

Siendo $F = \left\{f:\Re^3 \mapsto \Re^2 / \text{"}f\text{" es aplicación lineal}\right\}$ el conjunto que forman las aplicaciones lineales que se pueden definir de $\Re^3$ en $\Re^2$, es $\dim.(F) = 2.3 = 6$, y la base canónica de "F" es la que forman las siguientes seis aplicaciones lineales:

$$f_1:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, f_1(x_1;x_2;x_3) = (x_1;0)$$
$$f_2:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, f_2(x_1;x_2;x_3) = (x_2;0)$$
$$f_3:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, f_3(x_1;x_2;x_3) = (x_3;0)$$
$$f_4:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, f_4(x_1;x_2;x_3) = (0;x_1)$$
$$f_5:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, f_5(x_1;x_2;x_3) = (0;x_2)$$
$$f_6:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, f_6(x_1;x_2;x_3) = (0;x_3)$$

cuyas correspondientes matrices asociadas respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^2$ son:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\; A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\; A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las respectivas matrices asociadas a las aplicaciones lineales h_1, h_2 y h_3 son:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix};\; H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix};\; H_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Cuando el enunciado dice:

$$h_1(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + 2.x_2\,;\,3.x_1 + 4.x_2 + 5.x_3)$$
$$h_2(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + 3.x_2 + 6.x_3\,;\,x_1 + x_2 + 4.x_3)$$
$$h_3(x_1;x_2;x_3) = (3.x_1 + 5.x_2 + 6.x_3\,;\,4.x_1 + 5.x_2 + 9.x_3)$$

está diciendo que:

$$h_1 = 1 \bullet f_1 + 2 \bullet f_2 + 0 \bullet f_3 + 3 \bullet f_4 + 4 \bullet f_5 + 5 \bullet f_6$$
$$h_2 = 2 \bullet f_1 + 3 \bullet f_2 + 6 \bullet f_3 + 1 \bullet f_4 + 1 \bullet f_5 + 4 \bullet f_6$$
$$h_3 = 3 \bullet f_1 + 5 \bullet f_2 + 6 \bullet f_3 + 4 \bullet f_4 + 5 \bullet f_5 + 9 \bullet f_6$$

O sea, las coordenadas de h_1, h_2 y h_3 respecto de la base canónica del espacio vectorial "F" son $h_1 = (1;2;0;3;4;5)$, $h_2 = (2;3;6;1;1;4)$, $h_3 = (3;5;6;4;5;9)$.

1) Los vectores dados h_1, h_2, h_3 son LI si la ecuación vectorial:

$$\alpha_1 \bullet h_1 + \alpha_2 \bullet h_2 + \alpha_3 \bullet h_3 = \bar{0} \quad \text{(I)}$$

admite sólo la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; en caso contrario son LD.

- En nuestro caso, la ecuación (I) es:

$$\alpha_1 \bullet (1;2;0;3;4;5) + \alpha_2 \bullet (2;3;6;1;1;4) + \alpha_3 \bullet (3;5;6;4;5;9) = \bar{0}$$

que nos conduce a:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 + 2.\alpha_2 + 3.\alpha_3 = 0 \\ 2.\alpha_1 + 3.\alpha_2 + 5.\alpha_3 = 0 \\ 6.\alpha_2 + 6.\alpha_3 = 0 \\ 3.\alpha_1 + \alpha_2 + 4.\alpha_3 = 0 \\ 4.\alpha_1 + \alpha_2 + 5.\alpha_3 = 0 \\ 5.\alpha_1 + 4.\alpha_2 + 9.\alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $rg(A) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es indeterminado, tiene infinitas soluciones; así, los tres vectores dados son LD, lo que significa que entre ellos hay **información repetida:** la información que contiene alguno de ellos puede obtenerse combinando linealmente la información que contienen los restantes.

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, apostarnos un brazo a que los vectores h_1, h_2 son LI, y h_3 es combinación lineal de ellos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \beta_1 \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \beta_2 \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{r} \beta_1 + 2.\beta_2 = 3 \\ 2.\beta_1 + 3.\beta_2 = 5 \\ 6.\beta_2 = 6 \\ 3.\beta_1 + \beta_2 = 4 \\ 4.\beta_1 + \beta_2 = 5 \\ 5.\beta_1 + 4.\beta_2 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow h_3 = 1 \bullet h_1 + 1 \bullet h_2$$

NOTA

Si tenemos prisa usaremos la solución rápida, pues sabemos que el problema de averiguar si unos vectores son LI ó LD es el problema de calcular el rango de las matriz "A" cuyas columnas son dichos vectores, de modo que los vectores son LI (LD) si $rg(A)$ es igual (menor) al número de vectores. Así las cosas, "pasamos" de $\alpha_1 \bullet h_1 + \alpha_2 \bullet h_2 + \alpha_3 \bullet h_3 = \bar{0}$ y vamos al grano: a la vista de las matrices

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}; \; H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \; H_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

con la rapidez del rayo escribimos la matriz "A" para nuestro caso:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{array} \end{array}$$

Tras comprobar que $rg(A) = 2 <$ número de vectores, nos apostamos la vida y dos huevos duros a que las aplicaciones lineales h_1, h_2, h_3 son LD.

- Repasa el ejercicio 3.4.7 y saca tus propias conclusiones.

2) Como $\dim.(F) = 6$, cualquier subconjunto de "F" en el que puedan encontrarse 6 vectores LI es un sistema de generadores de "F". Por tanto, los vectores h_1, h_2 y h_3 no son un SG de "F" $\Rightarrow$ tampoco son una base de "F".

3) Siendo $W = \{h_1, h_2, h_3\}$, la **variedad lineal** L(W) engendrada por "W" es el conjunto que forman los vectores de "F" (aplicaciones lineales) que se obtienen combinando linealmente los vectores de "W":

$$L(W) = \left\{ f \in F \,/\, f = \sum_{i=1}^{i=3} \theta_i \bullet h_i, \theta_i \in \Re, \forall i = 1,2,3 \right\}$$

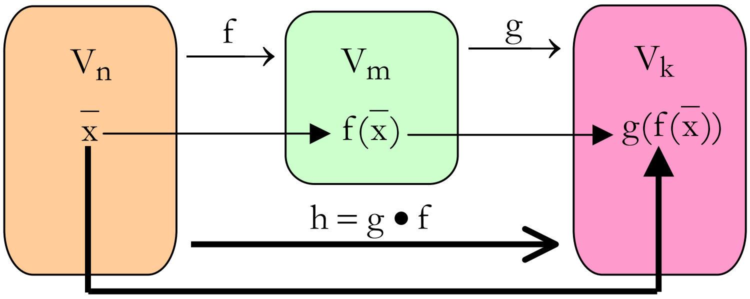
- Del conjunto "W" se dice que es un sistema de generadores de L(W).
- La dimensión de L(W) es el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en L(W), y coincide con el número máximo de vectores LI que pueden encontrarse en "W", que coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "W"; así, es $\dim.L(W) = 2 \Rightarrow$ cualesquiera dos vectores de L(W) que sean LI forman una base de L(W). Como ya sabemos que h_1 y h_2 son LI, entonces h_1 y h_2 forman una base del subespacio L(W).

<u>Observa</u>: el que h_1 y h_2 formen una base de L(W) significa que todo vector de L(W) puede obtenerse combinando linealmente h_1 y h_2. Por tanto, es obvio que si $W* = \{h_1, h_2\}$, la variedad lineal $L(W*)$ engendrada por $W*$ es la misma que la engendrada por $W = \{h_1, h_2, h_3\}$.

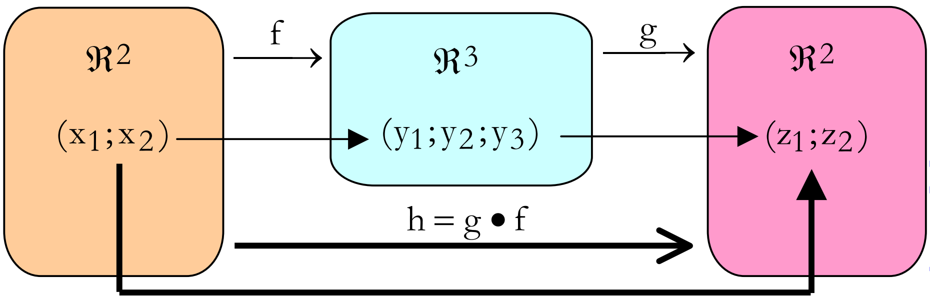
5.10 COMPOSICIÓN DE APLICACIONES LINEALES

Sean $f: V_n \mapsto V_m$ y $g: V_m \mapsto V_k$ aplicaciones lineales.

Se dice que $h: V_n \mapsto V_k$ es la **compuesta** de "f" y "g" (se denota $h = g \bullet f$) si $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$; o sea, la imagen de $\bar{x} \in V_n$ según "h" es la imagen según "g" de la imagen de $\bar{x}$ según "f".



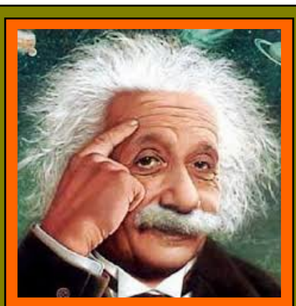
Entenderás la utilidad de $h = g \bullet f$ si miras el siguiente esquema



y sintiendo como si la empresa fuera tuya, piensas que:

x_1 = cantidad de capital que usa una empresa
x_2 = cantidad de trabajo que usa una empresa
y_1 = producción de naranjas
y_2 = producción de limones
y_3 = producción de pomelos
z_1 = ingresos de la empresa
z_2 = costes de la empresa

En este contexto, la ley "f" expresa la producción en función de las cantidades usadas de capital y trabajo, la ley "g" expresa los ingresos y costes en función de la producción, y la ley $h = g \bullet f$ expresa los ingresos y costes en función de las cantidades utilizadas de capital y trabajo.



Si no puedo dibujarlo, es que no lo entiendo.

Albert Einstein

- Demostremos que si $f: V_n \mapsto V_m$ y $g: V_m \mapsto V_k$ son aplicaciones lineales, la aplicación $h = g \bullet f$ tal que $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$ también es lineal. Para ello debemos demostrar que:

$$1)\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n \text{ es } h(\bar{x} + \bar{y}) = h(\bar{x}) + h(\bar{y})$$
$$2)\ \forall \bar{x} \in V_n \text{ y } \forall \alpha \in \Re \text{ es } h(\alpha \bullet \bar{x}) = \alpha \bullet h(\bar{x})$$

1) Es: $h(\bar{x} + \bar{y}) = g(f(\bar{x} + \bar{y})) = g(f(\bar{x}) + f(\bar{y})) = g(f(\bar{x})) + g(f(\bar{y})) = h(\bar{x}) + h(\bar{y})$

pues "f" es una aplicación lineal | pues "g" es una aplicación lineal

2) Es:

$$h(\alpha \bullet \bar{x}) = g(f(\alpha \bullet \bar{x})) = g(\alpha \bullet f(\bar{x})) = \alpha \bullet g(f(\bar{x})) = \alpha \bullet h(\bar{x})$$

pues "f" es una aplicación lineal | pues "g" es una aplicación lineal

Observa: si "A" es la matriz asociada a "f" y "B" es la matriz asociada a "g", la matriz asociada a $h = g \bullet f$ es $B \bullet A$:

$$h(\bar{x}) = g(f(\bar{x})) = g(A \bullet \bar{x}) = B \bullet (A \bullet \bar{x}) = (B \bullet A) \bullet \bar{x}$$

$\boxed{f(\bar{x}) = A \bullet \bar{x}}$ $\boxed{g(\text{Pepe}) = B \bullet (\text{Pepe})}$

MEDIA VERDAD MUY EXTENDIDA

El orden de los sumandos no altera la suma.

¡NO SIEMPRE ES VERDAD SI EL NÚMERO DE SUMANDOS ES INFINITO!

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\dots\dots}$$

Esta suma de infinitos sumandos tiende a Ln 2, pero alterando adecuadamente el orden de los sumandos puede lograrse que tienda a cualquier número, a $+\infty$ o a $-\infty$.

FONEMATO 5.10.1

Sea la aplicación lineal $f:\Re^2 \mapsto \Re^4$ cuya expresión respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^4$ es $f(x_1;x_2)=(0;0;0;x_2)$. Sea $g:\Re^4 \mapsto \Re^3$ la aplicación lineal que tiene expresión $g(x_1;x_2;x_3;x_4)=(0;x_3;0;x_2)$ respecto de las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^3$. Determínese el núcleo y la imagen de $g \bullet f$ y de $f \bullet g$.

SOLUCIÓN

La matriz asociada a "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^4$ es "A", y la matriz asociada a "g" respecto de las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^3$ es "B":

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix};$$

Siendo $h=g\bullet f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ la aplicación lineal tal que $h(\bar{x})=g(f(\bar{x}))$, es:

$$\boxed{f(\bar{x})=A\bullet\bar{x}}\qquad \boxed{g(\text{Juan})=B\bullet(\text{Juan})}$$

$$h(\bar{x})=g(f(\bar{x}))=g(A\bullet\bar{x})=B\bullet A\bullet\bar{x}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}_{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{B\bullet A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}}$$

O sea, $h=g\bullet f$ es la aplicación lineal nula de $\Re^2$ en $\Re^3$, pues asocia el vector cero de $\Re^3$ a todos los vectores de $\Re^2$; por tanto:

$$\ker.h=\Re^2\ ;\ \operatorname{Img}.h=\{\bar{0}\in\Re^3\}$$

Carece de sentido hablar de $f\bullet g$, pues el espacio "final" de "g" no coincide con el "inicial" de "f".

FONEMATO 5.10.2

Referidas a las bases canónicas, se consideran la siguientes aplicaciones lineales:

$$f:\mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}^3 \;/\; f(x_1;x_2) = (2.x_1 + x_2;3.x_1 + 8.x_2;0)$$
$$g:\mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^2 \;/\; g(y_1;y_2;y_3) = (y_1 + 5.y_2 + 3.y_3;0)$$
$$t:\mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}^3 \;/\; t(z_1;z_2) = (z_1 + z_2;0;0)$$

Determínense $t \bullet g \bullet f$, $f \bullet g \bullet t$ y $t \bullet f \bullet g$.

SOLUCIÓN

- Las correspondientes matrices asociadas a "f", "g" y "t" son:

$$A_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\; A_g = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\; A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La aplicación lineal $h_1 = t \bullet g \bullet f$ es la definida como:

$$h_1(\bar{x}) = t(g(f(\bar{x}))) = t(g(A_f \bullet \bar{x}) = t(A_g \bullet A_f \bullet \bar{x}) = A_t \bullet A_g \bullet A_f \bullet \bar{x}$$

$$\boxed{f(\bar{x}) = A_f \bullet \bar{x}} \qquad \boxed{t(\text{Juan}) = A_t \bullet (\text{Juan})}$$

$$\boxed{g(\text{Pepe}) = A_g \bullet (\text{Pepe})}$$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend right, "h_1 = t \bullet g \bullet f"'] & \mathfrak{R}^3 \arrow[r, "g"] & \mathfrak{R}^2 \arrow[r, "t"] & \mathfrak{R}^3 \end{tikzcd}$$

- La aplicación lineal $h_2 = f \bullet g \bullet t$ es la definida como:

$$h_2(\bar{x}) = f(g(t(\bar{x}))) = f(g(A_t \bullet \bar{x}) = f(A_t \bullet A_g \bullet \bar{x}) = A_f \bullet A_g \bullet A_t \bullet \bar{x}$$

$$\boxed{t(\bar{x}) = A_t \bullet \bar{x}} \qquad \boxed{f(\text{Luis}) = A_f \bullet (\text{Luis})}$$

$$\boxed{g(\text{Pepe}) = A_g \bullet (\text{Pepe})}$$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{R}^2 \arrow[r, "t"] \arrow[rrr, bend right, "h_2 = f \bullet g \bullet t"'] & \mathfrak{R}^3 \arrow[r, "g"] & \mathfrak{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathfrak{R}^3 \end{tikzcd}$$

- Carece de sentido hablar de $t \bullet f \bullet g$, pues el espacio "final" de "f" no coincide con el "inicial" de "t".

FONEMATO 5.10.3

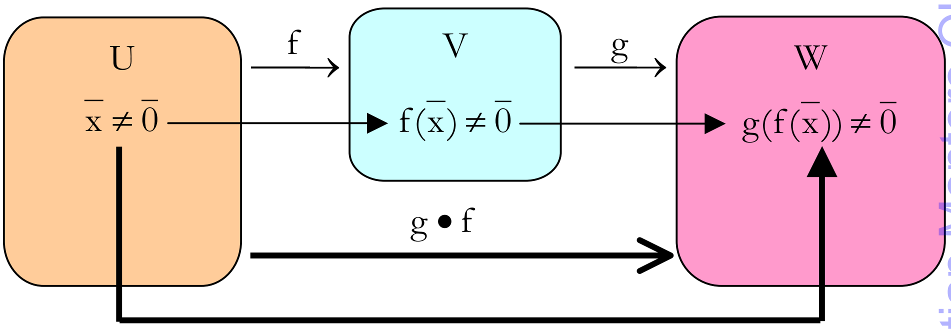
Sean $f: U \mapsto V$ y $g: V \mapsto W$ aplicaciones lineales.

1) Demuéstrese que si "f" y "g" son monomorfismos, $g \bullet f$ es monomorfismo.
2) Demuéstrese que si "f" y "g" son epimorfismos, $g \bullet f$ es epimorfismo.

SOLUCIÓN

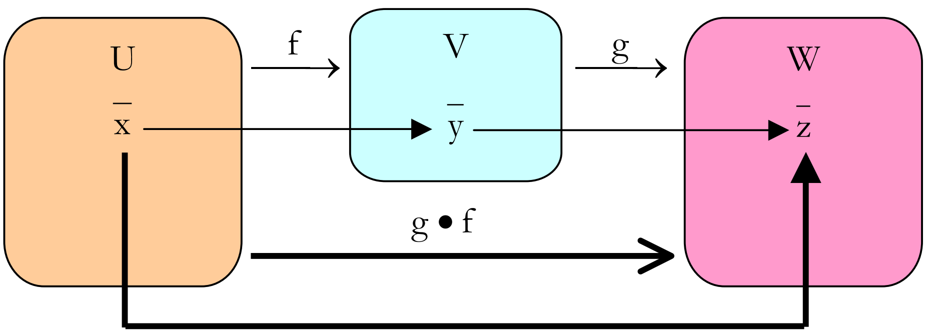
1) **Recuerda:** una aplicación lineal es inyectiva (monomorfismo) si su núcleo está formado únicamente por el vector cero. Por tanto, para demostrar que $g \bullet f: U \mapsto W$ es inyectiva debemos demostrar que su núcleo está formado solo por el vector cero.

Siendo $\overline{x} \neq \overline{0}$ un vector de "U", por ser "f" inyectiva, el vector $f(\overline{x}) \in V$ no es el vector cero de "V" ..... y por ser "g" inyectiva, como $f(\overline{x}) \neq \overline{0} \in V$, el vector $g(f(\overline{x})) \in W$ no es el vector cero de "W". En consecuencia, la aplicación $g \bullet f$ es inyectiva.



2) **Recuerda:** una aplicación lineal es sobreyectiva (epimorfismo) si su imagen coincide con el espacio final; o sea, si todo vector del espacio final es imagen del algún vector del espacio inicial. Así, para demostrar que $g \bullet f: U \mapsto W$ es sobre debemos demostrar que todo vector de "W" es imagen de algún vector de "U".

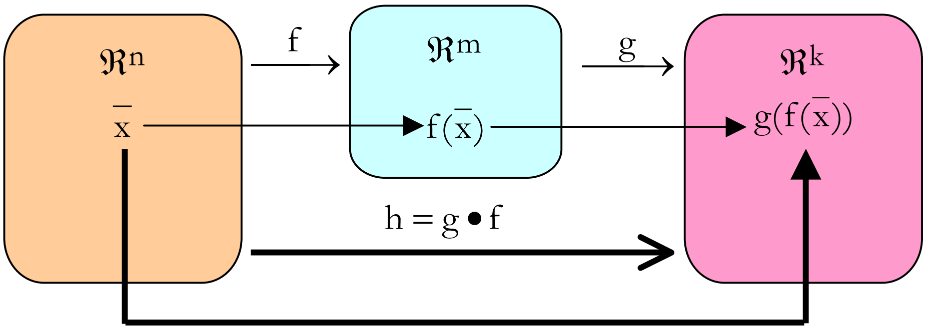
Siendo $\overline{z}$ un vector cualquiera de "W", por ser "g" sobreyectiva, está garantizada la existencia de $\overline{y} \in V$ tal que $g(\overline{y}) = \overline{z}$ ..... y por ser "f" sobreyectiva, está garantizada la existencia de $\overline{x} \in U$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{y}$. En consecuencia, la aplicación $g \bullet f$ es sobreyectiva, pues siendo $\overline{z}$ un vector cualquiera de "W", está garantizada la existencia de $\overline{x} \in U$ tal que $g(f(\overline{x})) = g(\overline{y}) = \overline{z}$.



FONEMATO 5.10.4

Sean $f:\mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^m$ y $g:\mathfrak{R}^m \mapsto \mathfrak{R}^k$ dos aplicaciones lineales, siendo "g" un monomorfismo. Determine $\ker.g \bullet f$.

SOLUCIÓN



Es $h = g \bullet f : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^k$ tal que $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$.

Es:

$$\ker.h = \left\{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^n \,/\, h(\bar{x}) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^k \right\} =$$

$\boxed{h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))}$

$$= \left\{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^n \,/\, g(f(\bar{x})) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^k \right\} =$$

Si "g" es monomorfismo (inyectiva), el vector cero de $\mathfrak{R}^m$ es el único vector de $\mathfrak{R}^m$ cuya imagen según "g" es el vector cero de $\mathfrak{R}^k$.
Por tanto, siendo $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$, será $g(f(\bar{x})) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^k$ sólo si $f(\bar{x}) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^m$

$$= \left\{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^n \,/\, f(\bar{x}) = \bar{0} \in \mathfrak{R}^k \right\} = \ker.f$$

Para venir a lo que no sabes
has de ir por donde no sabes.
Para venir a lo que no gustas
has de ir por donde no gustas.
Para venir a lo que no posees
has de ir por donde no posees.
Para venir a lo que no eres
has de ir por donde no eres.

San Juan de la Cruz

EJERCICIOS RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA PÁGINA WEB

APLICACIÓN LINEAL (HOMOMORFISMO)

Ejercicio 02.01

Demuestre que $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ es una aplicación lineal.

1) $f(x_1;x_2;x_3)=(\mathrm{Ln}\ x_2\ ;\ x_1+x_3)$
2) $f(x_1;x_2;x_3)=(\sqrt{x_2}\ ;\ x_1-x_3)$
3) $f(x_1;x_2;x_3)=(x_2/x_1\ ;\ x_2+x_3)$
4) $f(x_1;x_2;x_3)=(x_1.x_2\ ;\ x_2+x_3)$

Ejercicio 02.02

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ tal que $f(x_1;x_2;x_3)=(x_1+x_3\ ;\ x_1-x_2)$.
Demuestre que "f" es un homomorfismo o aplicación lineal.

Ejercicio 02.03

Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x_1;x_2)=(2.x_1+x_2\ ;\ x_1-x_2\ ;0)$.
Demuestre que "f" es un homomorfismo o aplicación lineal.

Ejercicio 02.04

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x;y;z)=(x+y+z\ ;\ 2.x-y;y-z)$.
Determine $f^{-1}(3;1;0)$.

Ejercicio 02.05

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x;y;z)=(3.x+y+z\ ;\ x+y;-2.y+z)$.
Determine $f^{-1}(3;1;0)$.

Ejercicio 02.06

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x;y;z)=(x+y+z\ ;\ 2.x-y;y-z)$.
Determine $f^{-1}(3;1;0)$.

Ejercicio 02.07

Sea $f:M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ tal que $f(A)=A+A^t$.
Demuestre que "f" es un homomorfismo o aplicación lineal.

Ejercicio 02.08

Sea $f:P_3 \mapsto P_2$ tal que $f(p(x))=p'(x)+p''(x)$.
Demuestre que "f" es un homomorfismo o aplicación lineal.

Ejercicio 02.09

Sea $f:P_3 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x))=(p(0)\ ;\ p'(0))$.
Demuestre que "f" es un homomorfismo o aplicación lineal.

Ejercicio 02.10

Sea $f:P_2 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x))=\left(\int_0^1 p(x).dx\ ;\ \int_1^2 p(x).dx\right)$.

Demuestre que "f" es un homomorfismo o aplicación lineal.

MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

Ejercicio 03.01

Siendo las bases de referencia en $\Re^3$ y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ la aplicación lineal tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3)=(2.x_1+3.x_2\ ;\ 4.x_2+5x_3).$$

Determine la matriz asociada a "f" respecto de dichas bases.

Ejercicio 03.02

Siendo la base de referencia en $M_{2\times2}$ la canónica, sea el endomorfismo $f:M_{2\times2}\mapsto M_{2\times2}$ tal que $f(A)=A+A^t$.

Determine su expresión matricial.

Ejercicio 03.03

Sea $f:V_2\mapsto V_3$ un homomorfismo, siendo $B_1=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$ la base de referencia en V_2 y $B_2=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$ la base de referencia en V_3. Se sabe que:

$$f(\bar{h}_1)=2\bullet\bar{k}_1+4\bullet\bar{k}_2+3\bullet\bar{k}_3\ ;\ f(\bar{h}_2)=5\bullet\bar{k}_1+6\bullet\bar{k}_2+7\bullet\bar{k}_3$$

1) Halle la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

2) Si $\bar{u}=2\bullet\bar{h}_1-\bar{h}_2$, determine $f(\bar{u})$.

3) Si $\bar{e}=3\bullet\bar{k}_1+2\bullet\bar{k}_2+4\bullet\bar{k}_3$, determine $f^{-1}(\bar{e})$.

4) Si $\bar{c}=3\bullet\bar{k}_1+2\bullet\bar{k}_2+5\bullet\bar{k}_3$, determine $f^{-1}(\bar{c})$.

Ejercicio 03.04

Siendo las bases de referencia en P_2 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea $f:P_2\mapsto\Re^2$ la aplicación lineal tal que:

$$f(p(x))=(2.p(0)-p'(0)\ ;\ 3.p'(0))$$

Halle la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

Ejercicio 03.05

Siendo la base de referencia en P_2 la canónica, sea $f:P_2\mapsto P_2$ la aplicación lineal tal que $f(p(x))=p(x)+p'(x)+p''(x)$. Determine su expresión matricial.

Ejercicio 03.06

Siendo las bases de referencia en P_2 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea $f:P_2\mapsto\Re^2$ la aplicación lineal tal que:

$$f(p(x))=\left(6.\int_0^1 p(x).dx\ ;\ \int_0^1 p'(x).dx\right)$$

Determine la matriz asociada a "f" respecto de dichas bases.

NÚCLEO E IMAGEN DE UN HOMOMORFISMO

Ejercicio 04.01

Determine ker.f e Img.f si $f:\Re^4\mapsto\Re^3$ es tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1+x_4\ ;x_2+x_3\ ;x_1+x_2+x_4)$$

Ejercicio 04.02

Determine $\ker.f$ e $\operatorname{Img}.f$ si $f:\Re^4 \mapsto \Re^3$ es tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1 + x_4 \; ; x_2 + x_3 \; ; x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Ejercicio 04.03

Determine $\ker.f$ e $\operatorname{Img}.f$ si $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + x_2 \; ; x_3 \; ; x_2 - x_3 \; ; 0)$.

Ejercicio 04.04

Determine $\ker.f$ e $\operatorname{Img}.f$ si $f: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ es tal que $f(P) = P + P^t$.

Ejercicio 04.05

Determine $\ker.f$ e $\operatorname{Img}.f$ si $f: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ es tal que $f(P) = P - P^t$.

Ejercicio 04.06

Determine $\ker.f$ e $\operatorname{Img}.f$ si $f: P_3 \mapsto P_2$ es tal que:

$$f(a.x^3 + b.x^2 + c.x + d) = (a-b).x^2 + (b-c).x + 2.a$$

Ejercicio 04.07

Determine $\ker.f$ e $\operatorname{Img}.f$ si $f: P_2 \mapsto \Re^2$ es tal que:

$$f(p(x)) = (p'(0) + p(1) \; ; \; p(0) + p'(1))$$

Ejercicio 04.08

Determine $\ker.f$ e $\operatorname{Img}.f$ si $f: P_2 \mapsto \Re^2$ es tal que:

$$f(p(x)) = \left(\int_0^1 2.p'(x).dx \; ; \; \int_0^1 (p'(x) + p''(x)).dx \right)$$

LOS HOMOMORFISMOS Y LOS CAMBIOS DE BASE

Ejercicio 08.01

Siendo las bases de referencia en los espacios $\Re^3$ y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3) = (3.x_1 + 4.x_2 + 5.x_3 \; ; 0)$$

Determine la expresión de "f" respecto de las bases B_1 y B_2.

$$B_1 = \{(2;3;5), (3;4;0), (5;0;0)\} \; ; \; B_2 = \{(9;8), (7;6)\}$$

Ejercicio 08.02

Siendo $B_1 = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ una base del espacio $\Re^2$ y $B_2 = \{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ una base del espacio $\Re^3$, sea $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ la aplicación lineal tal que $f(\bar{h}_1) = 3\bullet\bar{k}_1 + 4\bullet\bar{k}_2 + 5\bullet\bar{k}_3$ y $f(\bar{h}_2) = 6\bullet\bar{k}_1 + 7\bullet\bar{k}_2 + 8\bullet\bar{k}_3$.

Determine la expresión de "f" respecto de las bases $B_1^* = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$ y $B_2^* = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.

$$\bar{d}_1 = 2\bullet\bar{h}_1 + 4\bullet\bar{h}_2 \; ; \; \bar{d}_2 = 6\bullet\bar{h}_1 + 8\bullet\bar{h}_2$$

$$\bar{u}_1 = 2\bullet\bar{k}_1 + 3\bullet\bar{k}_2 + 4\bullet\bar{k}_3 \; ; \; \bar{u}_2 = 2\bullet\bar{k}_1 + 3\bullet\bar{k}_2 \; ; \; \bar{u}_3 = 3\bullet\bar{k}_1$$

Ejercicio 08.03

Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(2;3) = (4;5;6) \; \text{ y } \; f(3;4) = (7;8;9)$$

Halle su expresión respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^3$.

Ejercicio 08.04

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ una aplicación lineal tal que:

$$f(1;0;0)=(3;4),\ \ f(1;2;1)=(8;9)$$

Si $\ker f=(a;a;0),\ \forall a\in\Re$, determine la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^2$.

Ejercicio 08.05

Halle la expresión del homomorfismo $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^3$ si $(1;1)\in\ker f$ y $f(1;0)=(2;1;1)$ engendra al subespacio Img.f.

OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES

Ejercicio 09.01

Se consideran las siguientes aplicaciones lineales de $\Re^4$ en $\Re^2$, todas ellas referidas a las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^2$:

$$g_1:\Re^4 \mapsto \Re^2 \,/\, g_1(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1+3.x_2\ ;\ x_2+x_4)$$
$$g_2:\Re^4 \mapsto \Re^2 \,/\, g_2(x_1;x_2;x_3;x_4)=(0\ ;\ x_2)$$
$$g_3:\Re^4 \mapsto \Re^2 \,/\, g_3(x_1;x_2;x_3;x_4)=(2.x_3+5.x_4\ ;\ 0)$$

Determine la expresión de $h=3\bullet g_1+4\bullet g_2-5\bullet g_3$ respecto de las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^2$.

Ejercicio 09.02

En el espacio vectorial "F" de los endomorfismos definidos sobre $\Re^2$, sean los vectores h_1,h_2,h_3:

$$h_1(x_1;x_2)=(x_1+2.x_2\ ;3.x_1+4.x_2)\ \ ;\ \ h_2(x_1;x_2)=(2.x_1+3.x_2\ ;\ x_1+x_2)$$
$$h_3(x_1;x_2)=(3.x_1+5.x_2\ ;\ 4.x_1+5.x_2)$$

¿Son LI? ¿Constituyen un SG de "F"? ¿Y una base?
Calcule la dimensión y una base la cápsula lineal de h_1,h_2,h_3.

COMPOSICIÓN DE APLICACIONES LINEALES

Ejercicio 10.01

Sean $f:\Re^2 \mapsto \Re^4$ y $g:\Re^4 \mapsto \Re^3$ tales que:

$$f(x_1;x_2)=(0;0;0;x_1+x_2)\ \ ;\ \ g(z_1;z_2;z_3;z_4)=(z_4;z_3;z_2)$$

Determine el núcleo y la imagen de $g\bullet f$ y de $f\bullet g$.

Ejercicio 10.02

Determine $t\bullet g\bullet f$, $f\bullet g\bullet t$ y $t\bullet f\bullet g$, siendo:

$$f:\Re^2 \mapsto \Re^3 \,/\, f(x_1;x_2)=(2.x_1+x_2\ ;3.x_1+8.x_2\ ;0)$$
$$g:\Re^3 \mapsto \Re^2 \,/\, g(u_1;u_2;u_3)=(u_1+5.u_2+3.u_3\ ;0)$$
$$t:\Re^2 \mapsto \Re^3 \,/\, t(z_1;z_2)=(z_1+z_2\ ;0;0)$$

Ejercicio 10.03

Sean las aplicaciones lineales $f:V_n \mapsto V_m$ y $g:V_m \mapsto V_k$.

1) Demuestre que si son monomorfismos, también lo es $g\bullet f$.

2) Demuestre que si son epimorfismos, también lo es $g\bullet f$.

AUTOCOMPROBACIÓN

Las soluciones están en los test de la web.

01) Siendo "U" y "V" conjuntos cualesquiera, una aplicación $f: U \mapsto V$ es una ley que a cada elemento $x \in U$ le asocia un único elemento $f(x) \in V$.

a) Falso ; b) Verdadero

02) ¿En qué caso la ley $f: \Re \mapsto \Re$ no es una aplicación?

a) $f(x) = x^{21} - 7$; b) $f(x) = 9/(1 + x^2)$; c) $f(x) = 7/(5 - x)$

03) ¿En qué caso la ley $f: \Re \mapsto \Re$ no es una aplicación?

a) $f(x) = 1 + x^4$; b) $(f(x))^2 = 1 + x^4$; c) $f(x) = 3^x$

04) ¿Cómo se apellida toda aplicación $f: U \mapsto V$ tal que $f(x) \neq f(y)$ cuando $x \neq y$?

a) Inyectiva ; b) Sobreyectiva ; c) Biyectiva

05) ¿Cómo se llama una aplicación $f: U \mapsto V$ si $\forall z \in V, \exists t \in U$ tal que $f(t) = z$?

a) Inyectiva ; b) Sobreyectiva ; c) Biyectiva

06) Si la aplicación $f: U \mapsto V$ es inyectiva y sobreyectiva se dice biyectiva.

a) Falso ; b) Verdadero

07) Si "U" y "V" son espacios vectoriales, la aplicación $f: U \mapsto V$ se dice lineal u homomorfismo si $\forall \theta, \delta \in \Re$ y $\forall \overline{x}, \overline{y} \in U$ es $f(\theta \bullet \overline{x} + \delta \bullet \overline{y}) = \theta \bullet f(\overline{x}) + \delta \bullet f(\overline{y})$.

a) Verdadero ; b) Falso

08) ¿En que caso es lineal la aplicación $f: \Re^2 \mapsto \Re^3$?

a) $f(x_1;x_2) = (2.x_1 + 3.x_2 \; ; \; x_1.x_2 \; ; \; 5.x_1 - 3.x_2)$
b) $f(x_1;x_2) = (2.x_1 + 3.x_2 \; ; \; x_1 - x_2 \; ; \; 7)$
c) $f(x_1;x_2) = (\pi.x_1 + 389.x_2 \; ; \; 22.x_1 - 59.x_2 \; ; \; 1234.x_1 + 3794.x_2)$

09) ¿En que caso es lineal la aplicación $f: \Re^3 \mapsto \Re^2$?

a) $f(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + 3.x_2 - x_3 \; ; \; x_1^2 + x_3)$
b) $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + 3.x_2 - 123.x_3 \; ; \; 0)$
c) $f(x_1;x_2;x_3) = (7.\pi.x_1 + 389.x_2 + x_3 \; ; \; x_1 + \sqrt[3]{x_2})$

10) ¿En que caso no es lineal la aplicación $f: \Re^4 \mapsto \Re^3$?

a) $f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (2.x_1 + 3.x_2 + x_3 - x_4 \; ; \; 0 \; ; \; 0)$
b) $f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_3 \; ; \; 0 \; ; \; 0)$
c) $f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (0 \; ; \; 0 \; ; \; x_1 + 3.x_2 - x_3 - x_4 + 9)$

11) ¿En que caso no es lineal la aplicación $f: \Re^2 \mapsto \Re^4$?

a) $f(x_1;x_2) = (2.x_1 + 3.x_2 \; ; \; 5 \; ; \; 0 \; ; \; 3.x_2)$
b) $f(x_1;x_2) = (2.x_1 \; ; \; 0; \; 0; \; 0)$
c) $f(x_1;x_2) = (x_2 \; ; \; x_1 \; ; \; x_1 \; ; \; x_1)$

12) La aplicación $f: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ tal que $f(P) = 2\bullet P + 3\bullet P^t$ es lineal.

a) Falso ; b) Verdadero

13) La aplicación $f: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ tal que $f(P) = P + P^2$ es lineal.

a) Falso ; b) Verdadero

14) La aplicación $f: M_{4\times 4} \mapsto M_{4\times 4}$ tal que $f(P) = P^{-1}$ es lineal.

a) Falso ; b) Verdadero

15) La aplicación $f: M_{3\times 3} \mapsto M_{3\times 3}$ tal que $f(P) = P + \text{Adj.}(P)$ es lineal.

a) Falso ; b) Verdadero

16) La aplicación $f: P_5 \mapsto P_4$ tal que $f(u(x)) = u'''(x) - u''(x)$ es lineal.

a) Falso ; b) Verdadero

17) La aplicación $f: P_5 \mapsto \Re^3$ tal que $f(u(x)) = (u'''(0)\ ;\ u(0)\ ;\ u'(0))$ es lineal.

a) Falso ; b) Verdadero

18) La aplicación $f: P_5 \mapsto \Re^2$ tal que

$$f(u(x)) = \left(\int_2^3 u(x).dx\ ;\ \int_{-1}^0 u(x).dx \right)$$

es lineal.

a) Falso ; b) Verdadero

19) Toda aplicación lineal queda identificada mediante una matriz.

a) Falso ; b) Verdadero

20) La matriz que identifica a la aplicación lineal $f: U \mapsto V$ no depende de cuáles sean las bases de referencia elegidas en los espacios vectoriales "U" y "V".

a) Falso ; b) Verdadero

21) Siendo $f: U \mapsto V$ una aplicación lineal, es $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

a) Falso ; b) Verdadero

22) Tomando como bases de referencia las respectivas canónicas de $\Re^3$ y $\Re^4$, sea el homomorfismo $f: \Re^3 \mapsto \Re^4$ tal que

$$f(x_1; x_2; x_3) = (2.x_1 - 3.x_2\ ; 5.x_2 + 7.x_3\ ; 0 ; 9.x_2)$$

¿Cuál es la expresión de "f" respecto de dichas bases?

a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

c) Las anteriores son falsas, pues "f" no es un homomorfismo

23) Tomando como bases de referencia las respectivas canónicas de $\Re^4$ y $\Re^2$, sea el homomorfismo $f : \Re^4 \mapsto \Re^2$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (3.x_1 + 5.x_4 ; 5.x_2)$$

Señale la expresión de "f" respecto de dichas bases?

a) $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$

c) Las anteriores son falsas, pues "f" no es un homomorfismo

24) Tomando como bases de referencia las respectivas canónicas de P_3 y P_2, sea el homomorfismo $f : P_3 \mapsto P_2$ tal que

$$f(u(x)) = 3.u'(x) - 2.u''(x)$$

¿Cuál es la matriz asociada a "f" respecto de dichas bases?

a) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) Las anteriores son falsas, pues "f" no es un homomorfismo

25) Tomando como bases de referencia las respectivas canónicas de P_3 y P_2, sea el homomorfismo $f : P_3 \mapsto P_2$ tal que:

$$f(u(x)) = 2.u'(x) + 3.u''(x) + 7$$

¿Cuál es la matriz asociada a "f" respecto de dichas bases?

a) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

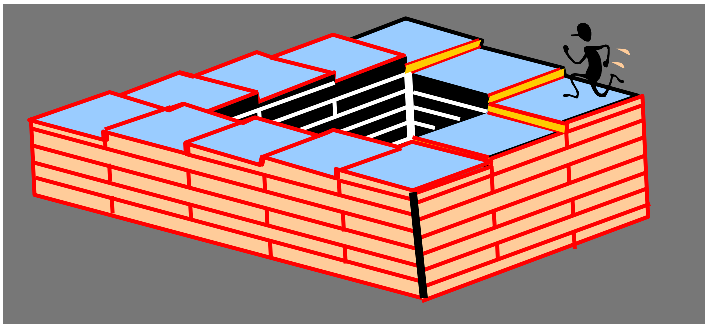
c) Las anteriores son falsas, pues "f" no es un homomorfismo

26) Tomando como base de referencia la canónica de $M_{2\times2}$, sea el homomorfismo $f : M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ tal que $f(H) = 2 \bullet H - 3 \bullet H^t$.

¿Cuál es la matriz asociada a "f" respecto de dicha base?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) Las anteriores son falsas, pues "f" no es un homomorfismo



La escalera del éxito tiene muchos peldaños.

27) Tomando como bases de referencia las respectivas canónicas de P_2 y $\Re^2$, sea el homomorfismo $f: P_2 \mapsto \Re^2$ tal que:

$$f(u(x)) = \left(\int_0^1 u(x).dx \ ; \int_0^1 2.u'(x).dx \right)$$

¿Cuál es la matriz asociada a "f" respecto de dichas bases?

a) $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) Las anteriores son falsas, pues "f" no es un homomorfismo

28) Tomando como bases de referencia las respectivas canónicas de P_2 y $\Re^2$, sea el homomorfismo $f: P_2 \mapsto \Re^2$ tal que

$$f(u(x)) = \left(\int_0^1 u(x).dx \ ; 7 + \int_0^1 2.u'(x).dx \right).$$

¿Cuál es la matriz asociada a "f" respecto de dichas bases?

a) $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) Las anteriores son falsas, pues "f" no es un homomorfismo

29) Si $f: U \mapsto V$ es un homomorfismo (aplicación lineal) y se conocen las imágenes de los vectores de la base de referencia elegida en "U", puede determinarse la imagen de cualquier vector de "U".

a) Falso ; b) Verdadero

30) Siendo $M = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $N = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ las respectivas bases de referencia en los espacios vectoriales "U" y "V", sea el homomorfismo $f: U \mapsto V$ tal que:

$$f(\bar{e}_1) = 3 \bullet \bar{s}_1 + 4 \bullet \bar{s}_2 \ ; \ f(\bar{e}_2) = 6 \bullet \bar{s}_1 + 7 \bullet \bar{s}_2 \ ; \ f(\bar{e}_3) = 7 \bullet \bar{s}_2$$

¿Cuál es la matriz asociada a "f" respecto de dichas bases?

a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 7 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$; c) Ninguna de las anteriores

31) El núcleo del homomorfismo $f: U \mapsto V$ es el subespacio de "U" que forman los vectores cuya imagen es el vector cero de "V".

a) Falso ; b) Verdadero

32) Siendo $f: U \mapsto V$ un homomorfismo con matriz asociada "H", es:

a) $\dim.(\ker.f) = \dim.(V) - rg(H)$; b) $\dim.(\ker.f) = rg(H)$

c) $\dim.(\ker.f) = \dim.(U) - rg(H)$

33) Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^4$ tal que:

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 ; x_1 - x_2 + x_3 ; 0 ; 2.x_1 + x_3)$$

a) $\dim.(\ker.f) = 2$; b) $\dim.(\ker.f) = 1$; c) $\dim.(\ker.f) = 0$

34) Sea $f: P_2 \mapsto P_2$ tal que $f(\theta_1.x^2 + \theta_2.x + \theta_3) = (\theta_1 + \theta_2 - \theta_3).x^2$.

a) $\dim.(\ker.f) = 2$; b) $\dim.(\ker.f) = 1$; c) $\dim.(\ker.f) = 0$

35) Sea $f:P_2 \mapsto P_2$ tal que:

$$f(\mu_1.x^2+\mu_2.x+\mu_3)=(\mu_1-\mu_2+2.\mu_3).x^2-7.\mu_3.x+5.\mu_2.$$

a) $\dim.(\ker.f)=2$; b) $\dim.(\ker.f)=1$; c) $\dim.(\ker.f)=0$

36) Sea el homomorfismo $f:P_2 \mapsto \Re^2$ tal que:

$$f(u(x))=\left(\int_0^1 u'(x).dx\ ;\ \int_2^4 2.u''(x).dx\right)$$

a) $\dim.(\ker.f)=2$; b) $\dim.(\ker.f)=1$; c) $\dim.(\ker.f)=0$

37) Sea el homomorfismo $f:M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ tal que $f(H)=H+2\bullet H^t$.

a) $\dim.(\ker.f)=2$; b) $\dim.(\ker.f)=1$; c) $\dim.(\ker.f)=0$

38) Sea el homomorfismo $f:M_{2\times2} \mapsto M_{2\times3}$ tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} m+n & 0 & 2.p \\ 0 & 5.p & q \end{bmatrix}$$

a) $\dim.(\ker.f)=2$; b) $\dim.(\ker.f)=1$; c) $\dim.(\ker.f)=0$

39) Si $f:U \mapsto V$ es un homomorfismo con matriz asociada "H" respecto de unas bases de "U" y "V", para determinar el núcleo de "f" basta resolver el sistema lineal homogéneo que tiene a "H" por matriz de coeficientes.

a) Falso ; b) Verdadero

40) Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^4$ tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3)=(x_1+x_2\,;x_1-x_2+2.x_3\,;0;2.x_1+2.x_3)$$

a) $\ker.f=\{(\theta;\theta;\theta),\forall\,\theta\in\Re\}$; b) $\ker.f=\{(-\theta;\theta;\theta),\forall\,\theta\in\Re\}$

c) $\ker.f=\{(\theta;0;0),\forall\,\theta\in\Re\}$

41) Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^4$ tal que $f(x_1;x_2;x_3)=(x_1+x_2\,;0\,;0\,;2.x_1+2.x_2)$.

a) $\ker.f=\{(\theta;\theta;\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\}$; b) $\ker.f=\{(\theta;0;\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\}$

c) $\ker.f=\{(-\theta;\theta;\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\}$

42) Sea $f:\Re^4 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1-x_4\,;0\,;x_1+x_2)$.

a) $\ker.f=\{(\delta;-\delta;\theta;\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\}$

b) $\ker.f=\{(\delta;\delta;\theta;\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\}$

c) $\ker.f=\{(\delta;0;\theta;\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\}$

43) Sea $f:\Re^4 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x_1;x_2;x_3;x_4)=(0\,;x_3\,;0)$.

a) $\ker.f=\{(\theta;\delta;0;0),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\}$

b) $\ker.f=\{(\theta;\delta;0;\varepsilon),\ \forall\,\theta,\delta,\varepsilon\in\Re\}$

c) $\ker.f=\{(\theta;\delta;\theta;\varepsilon),\ \forall\,\theta,\delta,\varepsilon\in\Re\}$

44) Sea $f:M_{2\times2} \mapsto M_{2\times3}$ tal que $f\left(\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} m+n & 0 & 2.p \\ 0 & 5.p & q \end{bmatrix}$.

a) $\ker.f=\left\{\begin{bmatrix} -\theta & \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\forall\,\theta\in\Re\right\}$; b) $\ker.f=\left\{\begin{bmatrix} \theta & \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\forall\,\theta\in\Re\right\}$

c) $\ker.f=$ c) $\left\{\begin{bmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\forall\,\theta\in\Re\right\}$

45) Si $f(m.x^3+n.x^2+p.x+q)=(m+n-p).x^3+2.n.x+2.q$.

a) $\ker.f=\left\{\theta.x^3+\theta.x,\ \forall\,\theta\in\Re\right\}$
b) $\ker.f=\left\{\theta.x^3-\theta.x,\ \forall\,\theta\in\Re\right\}$
c) $\ker.f=\left\{\theta.x^2+\theta.x,\ \forall\,\theta\in\Re\right\}$

46) Sea $f(x_1;x_2;x_3)=(x_1+x_2-x_3\,;x_3\,;k.x_1)$ tal que $\ker.f=\left\{\bar{0}\right\}$.

a) $k=0$; b) $k\neq 0$; c) $k\neq 1$

47) Sea $f(x_1;x_2;x_3)=(x_2-x_3\,;x_1+k.x_2+x_3\,;2.x_1+k.x_3)$ tal que $\ker.f\neq\left\{\bar{0}\right\}$.

a) $k=-2$; b) $k\neq -2$; c) $k=-1$

48) La imagen del homomorfismo $f:U\mapsto V$ es el subespacio de "V" que forman los vectores que son imagen del algún vector de "U".

a) Falso ; b) Verdadero

49) Siendo $f:U\mapsto V$ un homomorfismo con matriz asociada "H", es:

a) $\dim.(\mathrm{Img}.f)=\dim.(V)-rg(H)$
b) $\dim.(\mathrm{Img}.f)=rg(H)$
c) $\dim.(\mathrm{Img}.f)=\dim.(U)-rg(H)$

50) Siendo $f:U\mapsto V$ un homomorfismo, es:

$$\dim.(\ker.f)+\dim.(\mathrm{Img}.f)=\dim.(U).$$

a) Falso ; b) Verdadero

51) Si $f:U\mapsto V$ es un homomorfismo y $\left\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\right\}$ es la base de referencia en "U", los vectores $f(\bar{u}_1),\ldots,f(\bar{u}_n)$ constituyen una base del subespacio $\mathrm{Im\,g}.f$.

a) Falso ; b) Verdadero

52) Sea $f:\Re^4\mapsto\Re^3$ tal que $f(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1-x_4\,;x_3\,;x_1+x_2)$.

a) $\mathrm{Im\,g}.f=\left\{(\theta;0;\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$
b) $\mathrm{Im\,g}.f=\left\{(\theta;\delta;\delta),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$
c) $\mathrm{Im\,g}.f=\left\{(\theta;\delta;0),\ \forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$

53) Sea $f:\Re^4\mapsto\Re^3$ tal que $f(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1-x_4\,;0\,;x_1+x_2)$.

a) $\mathrm{Im\,g}.f=\left\{(\theta;0;\delta),\forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$
b) $\mathrm{Im\,g}.f=\left\{(\theta;-\delta;\delta),\forall\,\theta,\delta\in\Re\right\}$
c) $\mathrm{Im\,g}.f=\Re^3$

54) Sea el homomorfismo $f:M_{2\times 2}\mapsto M_{2\times 2}$ tal que:

$$f\left(\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 5.m+2.n & 0 \\ 0 & 7.m+3.p \end{bmatrix}$$

a) $\dim.(\ker.f)=2$; b) $\dim.(\ker.f)=1$; c) $\dim.(\ker.f)=0$

55) Sea el homomorfismo $f: M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ tal que:

$$f\left(\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5.m + 2.n & 6.q \\ 9.p & 7.m + 3.p \end{bmatrix}$$

Señale el subespacio $Im\,g.f.$

a) $\left\{\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall\, \varepsilon \in \Re\right\}$; b) $M_{2\times 2}$; c) $\left\{\begin{bmatrix} \varepsilon & \mu \\ \varepsilon & \mu \end{bmatrix}, \forall\, \varepsilon, \mu \in \Re\right\}$

56) Sea $f: P_3 \mapsto P_3$ tal que:

$$f(m.x^3 + n.x^2 + p.x + q) = (m + n - p).x^3 + 2.n.x + 3.m - 3.p.$$

Señale el subespacio $Im\,g.f.$

a) $\{ (\theta + \delta).x^3 + (2.\theta).x + 3.\theta, \ \forall\, \theta, \delta \in \Re \}$

b) $\{ \theta.x^3 - \delta.x, \ \forall\, \theta, \delta \in \Re \}$

c) $\{ \theta.x^2 + 2.\delta.x, \ \forall\, \theta, \delta \in \Re \}$

57) Sea $f: P_3 \mapsto P_2$ tal que:

$$f(m.x^3 + n.x^2 + p.x + q) = (m - n + p).x^2 + 2.n.x + 3.q$$

Señale el subespacio $Im\,g.f.$

a) $\{ (\theta + \delta).x^2 - \theta.x + \delta, \ \forall\, \theta, \delta \in \Re \}$

b) $\{ \theta.x^2 - \delta.x, \ \forall\, \theta, \delta \in \Re \}$; c) P_2

58) Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 - x_3 ; x_3 ; k.x_1)$.

Si $Img.f = \Re^3$, es:

a) $k = 0$; b) $k \neq 0$; c) $k \neq 1$

59) Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(\theta; \delta; \varepsilon) = (\delta - \varepsilon ; \theta + k.\delta + \varepsilon ; 2.\theta + k.\varepsilon)$.

Si $Img.f \subset \Re^3$, es:

a) $k = -2$; b) $k \neq -2$; c) $k = -1$

60) Si $f: U \mapsto V$ es un homomorfismo y $\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k\} \subset U$ es ligado, entonces:

a) $\{f(\bar{z}_1), \ldots, f(\bar{z}_k)\} \subset V$ es ligado

b) $\{f(\bar{z}_1), \ldots, f(\bar{z}_k)\} \subset V$ es libre

c) $\{f(\bar{z}_1), \ldots, f(\bar{z}_k)\} \subset V$ puede ser libre o ligado

61) Si $f: U \mapsto V$ es un homomorfismo y $\{f(\bar{z}_1), \ldots, f(\bar{z}_k)\} \subset V$ es libre, entonces:

a) $\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k\} \subset U$ es ligado ; b) $\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k\} \subset U$ es libre

c) $\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k\} \subset U$ puede ser libre o ligado

62) Un homomorfismo $f: U \mapsto V$ inyectivo se llama:

a) Isomorfismo ; b) Endomorfismo ; c) Monomorfismo

63) Un homomorfismo $f: U \mapsto V$ sobreyectivo se llama:

a) Isomorfismo ; b) Epimorfismo ; c) Endomorfismo

64) Un homomorfismo $f: U \mapsto V$ biyectivo se llama:

a) Endomorfismo ; b) Epimorfismo ; c) Isomorfismo

65) Un homomorfismo $f: U \mapsto U$ se llama:

a) Epimorfismo ; b) Automorfismo ; c) Isomorfismo

66) Un endomorfismo $f: U \mapsto U$ biyectivo se llama:

a) Epimorfismo ; b) Automorfismo ; c) Monomorfismo

67) Sea $f: U \mapsto V$ un monomorfismo de matriz asociada "H". Es falso que:

a) $\ker.f = \{\overline{0}\}$; b) $rg(H) = \dim.(U)$; c) $rg(H) < \dim.(U)$

68) Sea $f: U \mapsto V$ un epimorfismo de matriz asociada "H". Es falso que:

a) $Img.f = V$; b) $rg(H) < \dim.(U)$; c) $rg(H) = \dim.(V)$

69) Sea $f: U \mapsto V$ un isomorfismo de matriz asociada "H". Es falso que:

a) $\ker.f = \{\overline{0}\}$; b) $\dim.(U) \neq \dim.(V)$; c) $rg(H) = \dim.(V)$

70) Sean $f: U \mapsto V$ y $g: U \mapsto V$ homomorfismos.

Sea $h: U \mapsto V$ tal que $h(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x})$.

a) "h" es un homomorfismo
b) "h" puede no ser un homomorfismo

71) Siendo $\theta \in \Re$ y $f: U \mapsto V$ homomorfismo, sea $h: U \mapsto V$ tal que $h(\overline{x}) = \theta \bullet f(\overline{x})$.

a) "h" es un homomorfismo
b) "h" puede no ser un homomorfismo

72) Si $\theta, \mu \in \Re$ y $f: U \mapsto V$ y $g: U \mapsto V$ son homomorfismos con matrices asociadas "P" y "Q" respectivamente, la matriz asociada al homomorfismo $h: U \mapsto V$ tal que $h = \theta \bullet f + \mu \bullet g$ es:

a) $(\theta + \mu) \bullet (P + Q)$; b) $\theta \bullet P + \mu \bullet Q$; c) $(\theta \bullet P + \mu \bullet Q)^t$

73) Sean $f: U \mapsto V$ y $g: U \mapsto V$ monomorfismos.

Sea $h: U \mapsto V$ tal que $h(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x})$.

a) "h" es un monomorfismo
b) "h" puede no ser un monomorfismo

74) Sean $f: U \mapsto V$ y $g: U \mapsto V$ epimorfismos y $h: U \mapsto V$ tal que $h(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x})$.

a) "h" es un epimorfismo
b) "h" puede no ser un epimorfismo

75) Siendo $f: U \mapsto V$ y $g: V \mapsto W$ sendas aplicaciones lineales, sea $h = g \bullet f: U \mapsto W$ tal que $h(\overline{x}) = g(f(\overline{x}))$.

a) "h" es un homomorfismo
b) "h" puede no ser un homomorfismo

76) Si $f: U \mapsto V$ y $g: V \mapsto W$ son homomorfismos con matrices asociadas "P" y "Q" respectivamente, la matriz asociada al homomorfismo $h = g \bullet f$ es:

a) $P \bullet Q$; b) $Q \bullet P$; c) $(P \bullet Q)^{-1}$

77) Siendo $f: U \mapsto V$ y $g: V \mapsto W$ epimofismos, sea $h = g \bullet f$.

a) "h" es epimorfismo
b) "h" puede no ser epimorfismo
c) "h" es monomorfismo

78) Siendo $f: U \mapsto V$ y $g: V \mapsto W$ monomorfismos, sea $h = g \bullet f$.

a) "h" puede no ser monomorfismo
b) "h" es monomorfismo
c) "h" es epimorfismo

79) Siendo $f: U \mapsto V$ y $g: V \mapsto W$ isomorfismos, sea $h = g \bullet f$. Señale la falsa:

a) "h" puede no ser isomorfismo ; b) "h" es isomorfismo
c) "h" puede ser automorfismo

80) Sea $\theta \in \Re - \{0\}$ y $f: U \mapsto V$ un monomorfismo.
Sea $h: U \mapsto V$ tal que $h(\bar{x}) = \theta \bullet f(\bar{x})$.

a) "h" es un monomorfismo
b) "h" puede no ser un monomorfismo

81) Sea $\theta \in \Re - \{0\}$ y $f: U \mapsto V$ un epimorfismo.
Sea $h: U \mapsto V$ tal que $h(\bar{x}) = \theta \bullet f(\bar{x})$.

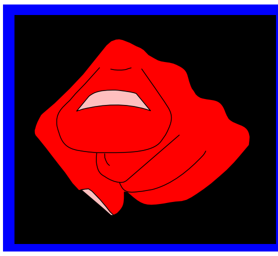
a) "h" es un epimorfismo
b) "h" puede no ser un epimorfismo

82) Sea $\theta \in \Re - \{0\}$ y $f: U \mapsto V$ un isomorfismo.
Sea $h: U \mapsto V$ tal que $h(\bar{x}) = \theta \bullet f(\bar{x})$.

a) "h" es un isomorfismo
b) "h" puede no ser un isomorfismo

83) Sea $f: U \mapsto V$ un homomorfismo con matriz asociada "P" respecto de ciertas bases de "U" y "V". Si en "U" realizamos el cambio de base de matriz asociada "M" y en "V" realizamos el cambio de base de matriz asociada "N", ¿cuál es la matriz asociada a "f" respecto de las nuevas bases?

a) $M^{-1} \bullet P \bullet N$; b) $N^{-1} \bullet P \bullet M$
c) $N \bullet P \bullet M$; d) $M \bullet P \bullet N$



En examen no importa lo que sabes, importa lo que a tu profe le parece que sabes.

Tema 6

El más famoso producto escalar

6.01 El más famoso producto escalar de vectores
6.02 Vectores ortogonales
6.03 Subespacios ortogonales
6.04 Base ortogonal
6.05 Ortogonalización de Graam-Schmidt
6.06 Módulo de un vector
6.07 Vectores ortonormales
6.08 Base ortonormal

6.1 EL MÁS FAMOSO PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

El producto escalar de los vectores $\overline{u} = (u_1; \ldots; u_n)$ y $\overline{v} = (v_1; \ldots; v_n)$ del espacio vectorial "V" es el número real que denotamos $\overline{u} \bullet \overline{v}$, siendo:

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = u_1.v_1 + \ldots + u_n.v_n$$

Por ejemplo: si $\overline{u} = (1; -2; 3; 4)$ y $\overline{v} = (5; -1; 0; 6)$, es:

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = 1.5 + (-2).(-1) + 3.0 + 4.6 = 31$$

PROPIEDADES

1) $\forall\ \overline{u}, \overline{v} \in V$, es $\overline{u} \bullet \overline{v} = \overline{v} \bullet \overline{u}$

2) $\forall\ \overline{u}, \overline{v} \in V$, $\forall \alpha \in \Re$, es $(\alpha \bullet \overline{u}) \bullet \overline{v} = \alpha.(\overline{u} \bullet \overline{v})$

3) $\forall\ \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$, es $\overline{u} \bullet (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} \bullet \overline{v}) + (\overline{u} \bullet \overline{w})$

Llorar a chorros. Llorar la digestión. Llorar el sueño.
Llorar ante las puertas y los puertos.
Llorar de amabilidad y de amarillo.
Abrir las canillas, las compuertas del llanto.
Empaparnos el alma, la camiseta.
Inundar las veredas y los paseos, y salvarnos, a nado,
de nuestro llanto.
Asistir a los cursos de antropología, llorando.
Festejar los cumpleaños familiares, llorando.
Atravesar el África, llorando.
Llorar como un cacuy, como un cocodrilo...
si es verdad que los cacuyes y los cocodrilos
no dejan nunca de llorar.
Llorarlo todo, pero llorarlo bien.
Llorarlo con la nariz, con las rodillas.
Llorarlo por el ombligo, por la boca.
Llorar de amor, de hastío, de alegría.
Llorar de frac, de flato, de flacura.
Llorar improvisando, de memoria.
¡Llorar todo el insomnio
y todo el día!

Oliverio Girondo

Profe de Álgebra después de corregir un examen

6.2 VECTORES ORTOGONALES

Se dice que dos vectores de un espacio vectorial son ortogonales si su producto escalar es cero.

Por ejemplo, los vectores $\overline{u} = (1;-2;3;0)$ y $\overline{v} = (-2;-1;0;6)$ son ortogonales, pues $\overline{u} \bullet \overline{v} = 1.(-2) + (-2).(-1) + 3.0 + 0.6 = 0$.

Por ejemplo, los vectores $\overline{p} = (2;-2;1;7)$ y $\overline{q} = (0;0;0;1)$ no son ortogonales, pues $\overline{p} \bullet \overline{q} = 2.0 + (-2).0 + 1.0 + 7.1 = 7 \neq 0$.

- El vector cero es ortogonal a cualquier vector, pues $\overline{0} \bullet \overline{x} = 0, \forall \overline{x}$.
- Si los vectores $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k$ (todos distintos del vector cero) son ortogonales dos a dos, son linealmente independientes.

  En efecto, al multiplicar escalarmente por $\overline{h}_j$ $(j = 1,2,\ldots,k)$ los dos miembros de la ecuación vectorial

$$\alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + \alpha_j \bullet \overline{h}_j + \ldots + \alpha_k \bullet \overline{h}_k = \overline{0} \quad \text{(I)}$$

  resulta:

$$\overline{h}_j \bullet (\alpha_1 \bullet \overline{h}_1 + \ldots + \alpha_j \bullet \overline{h}_j + \ldots + \alpha_k \bullet \overline{h}_k) = \overline{h}_j \bullet \overline{0} = 0 \Rightarrow$$

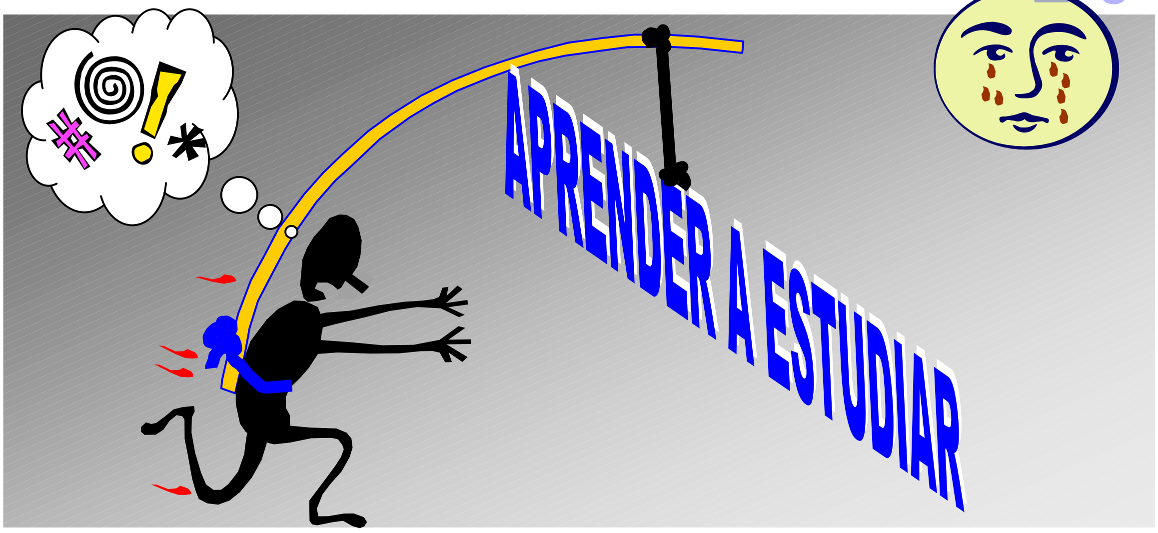
Por ser ortogonales dos a dos, ocurre que $\overline{h}_j \bullet \overline{h}_i = 0$ si $i \neq j$

$$\Rightarrow \alpha_j.(\overline{h}_j \bullet \overline{h}_j) = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$$

pues $\overline{h}_j \bullet \overline{h}_j \neq 0$, $\forall \overline{h}_j \neq \overline{0}$

  Por tanto, la ecuación vectorial (I) sólo admite la solución trivial; en consecuencia, los vectores $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k$ son LI.

¡Ojo!: se puede jugar, como sucede en el siguiente ejercicio, a definir un subespacio "S" utilizando la condición de ortogonalidad (producto escalar nulo); es decir, para identificar a "S", en vez de darte un SG de "S", una base o unas ecuaciones paramétricas o unas ecuaciones cartesianas de "S", te dicen que "S" está formado por los vectores del espacio vectorial "V" que son ortogonales a unos vectores dados Fulano, Mengano, etc.



FONEMATO 6.2.1

Demuestre que el conjunto "S" formado por los vectores que son ortogonales a $\overline{h}_1 = (2;1;1;-1)$, $\overline{h}_2 = (0;1;2;1)$ y $\overline{h}_3 = (1;-1;-1;-2)$ es subespacio de $\Re^4$. Determine su dimensión y una base.

SOLUCIÓN

Si $\overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in S \subset \Re^4$ es ortogonal a $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{x} \bullet \overline{h}_1 = 0 \\ \overline{x} \bullet \overline{h}_2 = 0 \\ \overline{x} \bullet \overline{h}_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad (I)$$

O sea, $\overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4$ es una solución del anterior SLH ... y mal asunto si a estas alturas no eres capaz de demostrar que el conjunto "S" formado por las soluciones de (I) es un subespacio de $\Re^4$, porque eso sería síntoma de que no has entendido nada, y deberías volver al ejercicio 4.1.2. Es:

$$\dim.(S) = \dim.(\Re^4) - rg\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1$$

Como el menor de orden 3 indicado es no nulo, en (I) parametrizamos x_4 y la pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2.x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \\ x_2 + 2.x_3 = -x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2.x_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(a;-a;0;a),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;-1;0;1),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_1 = (1;-1;0;1)$ es una base de "S".

6.3 SUBESPACIOS ORTOGONALES

Siendo S_1 y S_2 subespacios del espacio vectorial "V", se dice que son **ortogonales** si $\forall \overline{p} \in S_1$ y $\forall \overline{q} \in S_2$ sucede que $\overline{p} \bullet \overline{q} = 0$; o sea, cada vector de cualquiera de los subespacios es ortogonal a todos los vectores del otro subespacio.

Si $\dim.(V) = n$ y "S" es subespacio de "V", para hallar un sistema de ecuaciones cartesianas del subespacio S* ortogonal a "S", calculas una base de "S" y **exiges** que $\overline{x} = (x_1; \ldots ; x_n) \in V$ sea ortogonal a todo vector de esa base.

FONEMATO 6.3.1

Determine el subespacio ortogonal al subespacio "S":

$$S = \{(a + b + 2.c; b + c; 0; b + c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$$

SOLUCIÓN

Para hallar un sistema de cartesianas del subespacio S* ortogonal a "S", calcularemos una base de "S" y **exigiremos** que $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ sea ortogonal a todo vector de esa base. Vamos al tajo:

$$S = \{(a + b + 2.c; b + c; 0; b + c),\ \forall a,b,c \in \Re\} =$$

$$= \{a \bullet (1;0;0;0) + b \bullet (1;1;0;1) + c \bullet (2;1;0;1),\ \forall a,b,c \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{h}_1 = (1;0;0;0),\ \overline{h}_2 = (1;1;0;1) \text{ y } \overline{h}_3 = (2;1;0;1) \text{ forman un SG de "S"}$$

Es:
$$\dim.(S) = \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Como el menor indicado es no nulo, $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ forman una base de "S". Al exigir que $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ sea ortogonal a los vectores de dicha base, resulta:

$$S^* = \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \Big/ \begin{array}{r} \overline{x} \bullet \overline{h}_1 = 0 \\ \overline{x} \bullet \overline{h}_2 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \Big/ \begin{array}{r} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\overline{x} \bullet \overline{h}_1 = 0 \Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4) \bullet (1;0;0;0) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$\overline{x} \bullet \overline{h}_2 = 0 \Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4) \bullet (1;1;0;1) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

Si $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ es ortogonal a los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ que forman una base del subespacio "S" $(\Rightarrow \overline{x} \bullet \overline{h}_1 = \overline{x} \bullet \overline{h}_2 = 0)$, entonces $\overline{x}$ es ortogonal a cualquier vector de "S", pues como todo vector $\overline{w} \in S$ es CL de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ $(\Rightarrow$ existen $\alpha, \beta \in \Re$ tales que $\overline{w} = \alpha \bullet \overline{h}_1 + \beta \bullet \overline{h}_2)$, resulta ser:

$$\overline{x} \bullet \overline{w} = \overline{x} \bullet (\alpha \bullet \overline{h}_1 + \beta \bullet \overline{h}_2) = \alpha.(\overline{x} \bullet \overline{h}_1) + \beta.(\overline{x} \bullet \overline{h}_2) = \alpha.0 + \beta.0 = 0$$

6.4 BASE ORTOGONAL

Se dice que una base de un espacio vectorial es ortogonal si el producto escalar de cualesquiera dos vectores de la base es cero, lo que se expresa más rápido diciendo que los vectores de la base son ortogonales dos a dos.

Por ejemplo, la base de $\Re^2$ que forman los vectores $\overline{h}_1 = (2;1)$ y $\overline{h}_2 = (1;-2)$ es ortogonal, pues $\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_2 = 2.1 + 1.(-2) = 0$.

Por ejemplo, la base $\Re^2$ que forman los vectores $\overline{u}_1 = (1;7)$ y $\overline{u}_2 = (0;-2)$ no es ortogonal, pues $\overline{u}_1 \bullet \overline{u}_2 = 1.0 + 7.(-2) \neq 0$.

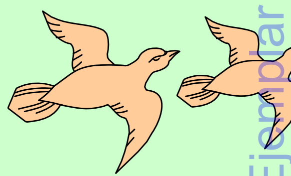
6.5 ORTOGONALIZACIÓN DE GRAAM-SCHMIDT

Si "V" es un espacio vectorial de dimensión "k" y $B_1 = \{\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k\}$ es una base de "V", a partir de la base B_1 podremos calcular una base $B_2 = \{\overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_k\}$ que sea ortogonal trabajando así:

$$
\begin{aligned}
&\overline{d}_1 = \overline{h}_1 \\
&\overline{d}_2 = \overline{h}_2 + \alpha \bullet \overline{d}_1 \\
&\overline{d}_3 = \overline{h}_3 + \beta_1 \bullet \overline{d}_1 + \beta_2 \bullet \overline{d}_2 \\
&\overline{d}_4 = \overline{h}_4 + \theta_1 \bullet \overline{d}_1 + \theta_2 \bullet \overline{d}_2 + \theta_3 \bullet \overline{d}_3 \\
&:: \\
&\overline{d}_k = \overline{h}_k + \lambda_1 \bullet \overline{d}_1 + \lambda_2 \bullet \overline{d}_2 + \lambda_3 \bullet \overline{d}_3 + \ldots + \lambda_{k-1} \bullet \overline{d}_{k-1}
\end{aligned}
$$

Los valores de $\alpha, \beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ los determinaremos al exigir que los vectores de la base $B_2 = \{\overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_k\}$ sean ortogonales dos a dos.

AVISO



Salvo que se nos aparezca la Virgen, para diagonalizar una forma cuadrática, asunto que trataremos en el Tema 9, habrá que recurrir a Graam –Schmidt.

FONEMATO 6.5.1

Determine una base ortogonal del subespacio "S":

$$S=\left\{\bar{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \Big/ \begin{matrix} x_1-x_2=0\\ x_2-x_3-x_4=0\end{matrix}\right\}$$

SOLUCIÓN

Calcularemos una base cualquiera de "S", y a partir de ella, mediante el método de Graam-Schmidt, calcularemos una base ortogonal de "S".

Es:

$$\dim.(S)=\dim.(\Re^4)-\mathrm{rg}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{matrix}\end{bmatrix}=4-2=2$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, parametrizamos x_3 y x_4, pasándolas a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} x_1-x_2=0\\ x_2=x_3+x_4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_1=x_3+x_4\\ x_2=x_3+x_4\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\{(a+b;a+b;a;b),\ \forall a,b\in\Re\}=$$

$$=\{(a;a;a;0)+(b;b;0;b),\ \forall a,b\in\Re\}=$$

$$=\{a\bullet(1;1;1;0)+b\bullet(1;1;0;1),\ \forall a,b\in\Re\}$$

Así, los vectores $\bar{h}_1=(1;1;1;0)$ y $\bar{h}_2=(1;1;0;1)$ forman una base de "S".

Como queda dicho, a partir de la base de "S" que forman $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$, y mediante el método de Graam-Schmidt, calcularemos una base $\{\bar{d}_1,\bar{d}_2\}$ que sea ortogonal.

Es:

$$\bar{d}_1=\bar{h}_1=(1;1;1;0)$$

$$\bar{d}_2=\bar{h}_2+\alpha\bullet\bar{d}_1=(1;1;0;1)-\frac{2}{3}\bullet(1;1;1;0)=(\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3};1)$$

VENTANA

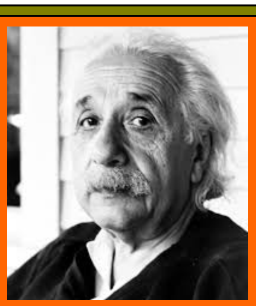
Para calcular "α" exigimos que $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_1\bullet\bar{d}_2=0\Rightarrow\bar{d}_1\bullet(\bar{h}_2+\alpha\bullet\bar{d}_1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\bar{d}_1\bullet\bar{h}_2+\alpha.(\bar{d}_1\bullet\bar{d}_1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1;1;1;0)\bullet(1;1;0;1)+\alpha.(1;1;1;0)\bullet(1;1;1;0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+3.\alpha=0\Rightarrow\alpha=-2/3$$



No guardes en la cabeza lo que cabe en un bolsillo.

Albert Einstein

6.6 MÓDULO DE UN VECTOR

- El módulo o norma de un vector $\overline{x}=(x_1;\dots;x_n)$ se denota $\|\overline{x}\|$, y es la raíz cuadrada (con signo positivo) del producto escalar de $\overline{x}$ por sí mismo:

$$\|\overline{x}\|=+\sqrt{\overline{x}\bullet\overline{x}}=+\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

Por ejemplo, si $\overline{x}=(4;-2;3;0)$, es $\|\overline{x}\|=+\sqrt{4^2+(-2)^2+3^2+0^2}=+\sqrt{29}$.

- **Observa:** si $\overline{u}=\alpha\bullet\overline{x}$, es $\|\overline{u}\|=|\alpha|.\|\overline{x}\|$. En efecto:

$$\|\overline{u}\|=\sqrt{(\alpha.x_1)^2+\dots+(\alpha.x_n)^2}=\sqrt{\alpha^2.(x_1^2+\dots+x_n^2)}=$$

$$\boxed{\overline{u}=\alpha\bullet\overline{x}=(\alpha.x_1;\dots;\alpha.x_n)}$$

$$=|\alpha|.\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}=|\alpha|.\|\overline{x}\|$$

Por ejemplo, si $\overline{x}=(4;-2;3;0)$ y $\overline{u}=-5\bullet\overline{x}$, es $\|\overline{u}\|=|-5|.\|\overline{x}\|=5.\sqrt{29}$.

- Se dice que un vector es unitario si tiene módulo unidad.
- Al dividir un vector (distinto del vector cero) por su módulo, siempre se obtiene un vector unitario. ***Por ejemplo,*** es unitario el vector $\overline{w}$ obtenido al dividir el vector no unitario $\overline{x}=(4;-2;3;0)$ por su módulo:

$$\overline{w}=\frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}=\frac{1}{\sqrt{29}}\bullet(4;-2;3;0)=\left(\frac{4}{\sqrt{29}};-\frac{2}{\sqrt{29}};\frac{3}{\sqrt{29}};0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\|\overline{w}\|=\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{29}}\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{29}{29}}=1$$

6.7 VECTORES ORTONORMALES

Se dice que dos vectores de un espacio vectorial "V" son ortonormales si son ortogonales (producto escalar nulo) y tienen módulo unidad (son unitarios). ***Por ejemplo,*** los vectores $\overline{u}=(1;0;0;0)$ y $\overline{v}=(0;0;0;1)$ son ortonormales, pues su producto escalar es nulo y ambos tienen módulo unidad.

Observa: si los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son ortonormales y $\overline{z}=\alpha\bullet\overline{u}+\beta\bullet\overline{v}$, es:

$$\|\overline{z}\|=+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

En efecto, sin pérdida de generalidad, supuesto que "V" tiene dimensión 2, si $\overline{u}=(x_1;x_2)$ y $\overline{v}=(y_1;y_2)$ son ortonormales y $\overline{z}=\alpha\bullet\overline{u}+\beta\bullet\overline{v}$, es:

$$\|\overline{z}\|=\|\alpha\bullet\overline{u}+\beta\bullet\overline{v}\|=\|(\alpha.x_1+\beta.y_1;\alpha.x_2+\beta.y_2)\|=$$

$$=\sqrt{(\alpha.x_1+\beta.y_1)^2+(\alpha.x_2+\beta.y_2)^2}=$$

$$=\sqrt{\alpha^2.(x_1^2+x_2^2)+\beta^2.(y_1^2+y_2^2)+2.\alpha.\beta.(x_1.y_1+x_2.y_2)}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$* \; x_1^2+x_2^2=1$, pues $\overline{u}$ es unitario
$* \; y_1^2+y_2^2=1$, pues $\overline{v}$ es unitario
$* \; x_1.y_1+x_2.y_2=0$, pues $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son ortogonales

6.8 BASE ORTONORMAL

Se dice que una base de un espacio vectorial es ortonormal si es ortogonal (o sea, está formada por vectores ortogonales dos a dos: el producto escalar de cualesquiera dos vectores de la base es cero) y todos sus vectores son unitarios.

> Para determinar una base ortonormal del espacio vectorial "Pepe", calculas una base ortogonal de "Pepe" (para ello acaso debas pedir auxilio a Graam-Schmidt), y luego divides cada vector de ésta por su módulo.

FONEMATO 6.8.1 (Tontorrón, subespacio de dimensión 1)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

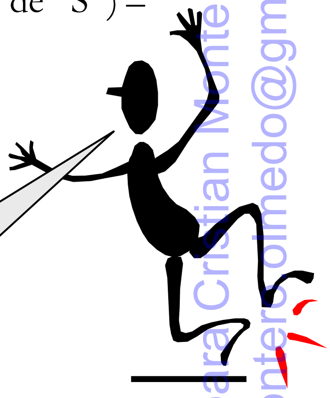
$$S = \left\{\bar{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \,/\, x_1 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = 0\right\}$$

SOLUCIÓN

Calculemos una base de $S = \left\{\bar{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \,\middle/\, \begin{array}{r} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\} \subset \Re^4$

Es: $\dim.(S) = \dim.(\Re^4) - (\text{n}^\circ \text{ de ec. cart. indep. de "S"}) =$

$$= 4 - rg\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1$$



¡Qué suerte!: el que $\dim.(S) = 1$ es lo mejor: en tal caso, el problema de calcular una base ortonormal de "S" se reduce a calcular un vector no nulo de "S" (que será base de "S") y dividirlo por su módulo

Como el menor de orden 3 indicado es no nulo, parametrizamos x_4 pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones:

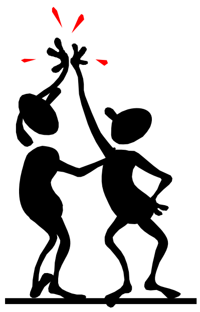
$$\left.\begin{array}{r} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(0;a;a;0),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (0;1;1;1),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (0;1;1;1)$ es una base de "S", y el vector $\bar{w}_1 = \bar{h}_1/\|\bar{h}_1\|$ es una base ortonormal de "S":

$$\bar{w}_1 = \bar{h}_1/\|\bar{h}_1\| = (0;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\boxed{\|\bar{h}_1\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}}$$



¡Yuppi... para determinar una base ortonormal del subespacio "S" no ha hecho falta recurrir a Graam-Schmidt!

FONEMATO 6.8.2 (Subespacio de dimensión 2, pero los dioses están con nosotros)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S = \{\bar{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \Re^4 \,/\, x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$$

SOLUCIÓN

¡Putada!: es $\dim.(S) > 1$, pues las cartesianas de "S" sólo son 2, y en $\Re^4$ hacen falta 3 ecuaciones independientes para que $\dim.(S) = 1$... por tanto, el ejercicio no es tan tonto como el anterior

Calculemos una base de $S = \left\{\bar{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \Re^4 \,\middle/\, \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{matrix}\right\} \subset \Re^4$:

$$\dim.(S) = \dim.(\Re^4) - \text{n}^\text{o} \text{ de ec. cart. indep. de "S"} =$$

$$= 4 - \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, parametrizamos x_1 y x_4, pasándolas a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} -x_2 = -x_1 \\ x_3 = -x_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_2 = x_1 \\ x_3 = -x_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(a; a; -b; b),\ \forall a, b \in \Re\} = \{a \bullet (1;1;0;0) + b \bullet (0;0;-1;1),\ \forall a, b \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{h}_1 = (1;1;0;0) \text{ y } \bar{h}_2 = (0;0;-1;1) \text{ forman una base de "S"}$$

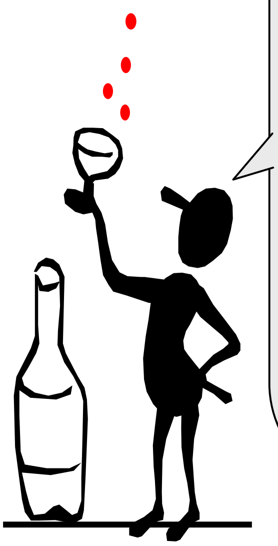
¡Qué suerte!: no hace falta recurrir a Graam-Schmidt, pues ha pasado lo mejor que podía pasar: por casualidad, los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ son **ortogonales**, ya que $\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2 = 0$; por tanto, la base de "S" que forman $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ es **ortogonal**, y la **base ortonormal** buscada de "S" se obtiene sin más que dividir cada vector por su módulo; o sea, es la base que forman los vectores $\bar{k}_1$ y $\bar{k}_2$:

$$\bar{k}_1 = \bar{h}_1 / \|\bar{h}_1\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right)$$

$$\boxed{\|\bar{h}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2}}$$

$$\bar{k}_2 = \bar{h}_2 / \|\bar{h}_2\| = \left(0; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{\|\bar{h}_2\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}}$$



FONEMATO 6.8.3 (Subespacio de dimensión 2 y los dioses nos abandonan a nuestra suerte)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S=\{\bar{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 / \ x_1-x_4=x_1+x_2+x_3=0\}$$

SOLUCIÓN

¡Mal rollo!: como $\dim.(S)>1$, si al calcular una base "S" no tengo la suerte de que, por casualidad, sea ortogonal, necesitaré la ayuda de Graam-Schmidt para determinar una base ortogonal de "S".

Calculemos una base $S=\left\{\bar{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \Big/ \begin{array}{r} x_1-x_4=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{array}\right\}\subset\Re^4$:

$$\dim.(S)=\dim.(\Re^4)-\mathrm{rg}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}}&\begin{matrix}0&-1\\1&0\end{matrix}\end{bmatrix}=4-2=2$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, parametrizamos x_3 y x_4, pasándolas a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x_1=x_4\\ x_1+x_2=-x_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1=x_4\\ x_2=-x_3-x_4\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\{(b;-a-b;a;b),\ \forall a,b\in\Re\}\Rightarrow$$

$$S=\{a\bullet(0;-1;1;0)+b\bullet(1;-1;0;1),\ \forall a,b\in\Re\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{h}_1=(0;-1;1;0) \text{ y } \bar{h}_2=(1;-1;0;1) \text{ forman una base de "S"}$$

Por desgracia, $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ no son ortogonales, pues $\bar{h}_1\bullet\bar{h}_2\neq 0$ .... y eso nos obliga a recurrir a Graam-Schmidt para hallar una base $B=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2\}$ de "S" que sea ortogonal:

$$\bar{d}_1=\bar{h}_1=(0;-1;1;0)$$

$$\bar{d}_2=\bar{h}_2+\alpha\bullet\bar{d}_1=(1;-1;0;1)-\frac{1}{2}\bullet(0;-1;1;0)=(1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1)$$

Para calcular el valor de "α" exigimos que $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_1\bullet\bar{d}_2=0\Rightarrow\bar{d}_1\bullet(\bar{h}_2+\alpha\bullet\bar{d}_1)=0\Rightarrow\bar{d}_1\bullet\bar{h}_2+\alpha.(\bar{d}_1\bullet\bar{d}_1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(0;-1;1;0)\bullet(1;-1;0;1)+\alpha.(0;-1;1;0)\bullet(0;-1;1;0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2.\alpha=0\Rightarrow\alpha=-1/2$$

VENTANA

Una base ortonormal de "S" es la $\{\bar{k}_1,\bar{k}_2\}$ obtenida al dividir por su módulo cada vector de la base ortogonal $B=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2\}$; como:

$$\|\bar{d}_1\|=\sqrt{2}\ ;\ \|\bar{d}_2\|=\sqrt{1^2+(-1/2)^2+(-1/2)^2+1^2}=\sqrt{5/2}$$

resulta:

$$\bar{k}_1=\frac{\bar{d}_1}{\|\bar{d}_1\|}=(0;-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0)\ ;\ \bar{k}_2=\frac{\bar{d}_2}{\|\bar{d}_2\|}=\left(\sqrt{\frac{2}{5}};-\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{5}};-\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{5}};\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$$

FONEMATO 6.8.4 (Subespacio de dimensión 2, pero los dioses están con nosotros)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S = \{\bar{x} = (a+c;b+c;a+c;b+c),\ \forall\, a,b,c \in \Re\}$$

SOLUCIÓN

El subespacio "S" está identificado en forma paramétrica; al desagregar los parámetros "a", "b" y "c", resulta:

$$\bar{x} = (a+c;b+c;a+c;b+c) =$$
$$= (a;0;a;0) + (0;b;0;b) + (c;c;c;c) =$$
$$= a \bullet \underbrace{(1;0;1;0)}_{\bar{h}_1} + b \bullet \underbrace{(0;1;0;1)}_{\bar{h}_2} + c \bullet \underbrace{(1;1;1;1)}_{\bar{h}_3}$$

Por tanto, los vectores $\bar{h}_1 = (1;0;1;0)$, $\bar{h}_2 = (0;1;0;1)$ y $\bar{h}_3 = (1;1;1;1)$ constituyen un SG de "S"; en consecuencia:

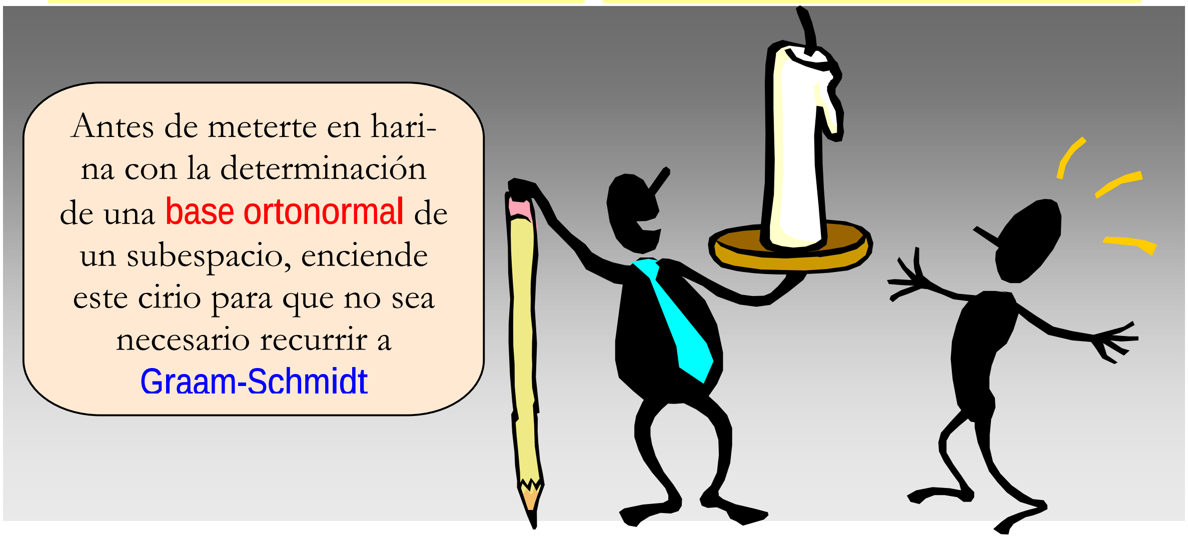
$$\dim.(S) = \mathrm{rg}\overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \\ \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \end{bmatrix}}^{A} = 2$$
$$\begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3\end{matrix}$$

Como el menor de orden dos indicado es no nulo, los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ son LI y constituyen una base de "S".

¡Qué suerte!: no hace falta recurrir a Graam-Schmidt, pues ha pasado lo mejor que podía pasar: de puro churro, los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ son ortogonales, pues $\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2 = 0$; así, la base de "S" que forman $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ es ortogonal, y sin más que dividir cada vector por su módulo obtenemos la base ortonormal buscada, es la que forman los vectores $\bar{k}_1$ y $\bar{k}_2$:

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{h}_1}{\|\bar{h}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}};0\right) \quad ; \quad \bar{k}_2 = \frac{\bar{h}_2}{\|\bar{h}_2\|} = \left(0;\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{\|\bar{h}_1\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}} \qquad \boxed{\|\bar{h}_2\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}}$$



FONEMATO 6.8.5 (Espantoso, subespacio de dimensión 3 y los dioses nos abandonan a nuestra suerte)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S=\{\overline{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \,/\, x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$$

SOLUCIÓN

Calculemos una base de "S":

$$\dim.(S)=4-rg\begin{bmatrix}\boxed{1} & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}=4-1=3$$

Como el menor de orden 1 indicado es no nulo, parametrizamos x_2, x_3 y x_4:

$$x_1=x_2-x_3+x_4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\{(a-b+c;a;b;c),\ \forall a,b,c\in\Re\}=$$

$$=\{a\bullet(1;1;0;0)+b\bullet(-1;0;1;0)+c\bullet(1;0;0;1),\ \forall a,b,c\in\Re\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{h}_1=(1;1;0;0),\ \overline{h}_2=(-1;0;1;0)\text{ y }\overline{h}_3=(1;0;0;1)\text{ forman una base de "S"}$$

Por desgracia, los vectores $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ no son ortogonales dos a dos, pues $\overline{h}_1\bullet\overline{h}_2=(1;1;0;0)\bullet(-1;0;1;0)=-1\neq 0$ .... y eso nos obliga a recurrir a Graam-Schmidt para determinar una base $B=\{\overline{d}_1,\overline{d}_2,\overline{d}_3\}$ de "S" que sea ortogonal:

$$\overline{d}_1=\overline{h}_1=(1;1;0;0)$$

$$\overline{d}_2=\overline{h}_2+\alpha\bullet\overline{d}_1=(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;0)$$

VENTANA

Para calcular "α" exigimos que $\overline{d}_1$ y $\overline{d}_2$ sean ortogonales:

$$\overline{d}_1\bullet\overline{d}_2=0\Rightarrow\overline{d}_1\bullet(\overline{h}_2+\alpha\bullet\overline{d}_1)=0\Rightarrow\overline{d}_1\bullet\overline{h}_2+\alpha.(\overline{d}_1\bullet\overline{d}_1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1;1;0;0)\bullet(-1;0;1;0)+\alpha.(1;1;0;0)\bullet(1;1;0;0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+2.\alpha=0\Rightarrow\alpha=1/2$$

$$\overline{d}_3=\overline{h}_3+\beta_1\bullet\overline{d}_1+\beta_2\bullet\overline{d}_2=(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3};1)$$

* Para calcular β_1 exigimos que $\overline{d}_1$ y $\overline{d}_3$ sean ortogonales:

$$\overline{d}_1\bullet\overline{d}_3=0\Rightarrow\overline{d}_1\bullet(\overline{h}_3+\beta_1\bullet\overline{d}_1+\beta_2\bullet\overline{d}_2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overline{d}_1\bullet\overline{h}_3+\beta_1.(\overline{d}_1\bullet\overline{d}_1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1;1;0;0)\bullet(1;0;0;1)+\beta_1.(1;1;0;0)\bullet(1;1;0;0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2.\beta_1=0\Rightarrow\beta_1=-1/2$$

* Para calcular β_2 exigimos que $\overline{d}_2$ y $\overline{d}_3$ sean ortogonales:

$$\overline{d}_2\bullet\overline{d}_3=0\Rightarrow\overline{d}_2\bullet(\overline{h}_3+\beta_1\bullet\overline{d}_1+\beta_2\bullet\overline{d}_2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overline{d}_2\bullet\overline{h}_3+\beta_2.(\overline{d}_2\bullet\overline{d}_2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;0)\bullet(1;0;0;1)+\beta_2.(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;0)\bullet(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;0)=0\Rightarrow$$

VENTANA

$$\Rightarrow -1+3.\beta_2=0\Rightarrow\beta_2=1/3$$

Una base ortonormal de "S" es la $\{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ que se obtiene al dividir por su módulo cada vector de la base ortogonal $B = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\}$; como

$$\|\bar{d}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$
$$\|\bar{d}_2\| = \sqrt{(-1/2)^2 + (1/2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3/2}$$
$$\|\bar{d}_3\| = \sqrt{(1/3)^2 + (-1/3)^2 + (1/3)^2 + 1^2} = 2/\sqrt{3}$$

resulta:

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{d}_1}{\|\bar{d}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right)$$
$$\bar{k}_2 = \frac{\bar{d}_2}{\|\bar{d}_2\|} = \left(-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right)$$
$$\bar{k}_3 = \frac{\bar{d}_3}{\|\bar{d}_3\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

FONEMATO 6.8.6

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S = \{\bar{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in \Re^4 \,/\, x_3 = 0,\ x_1 - x_4 = 0\}$$

SOLUCIÓN

Calculemos una base de "S":

$$\dim.(S) = \dim.(\Re^4) - \text{rg}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \\ 1 & 0 & \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, parametrizamos las incógnitas x_1 y x_2, pasándolas a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S = \{(a; b; 0; a),\ \forall a, b \in \Re\} =$$
$$= \{a \bullet (1;0;0;1) + b \bullet (0;1;0;0),\ \forall a, b \in \Re\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{h}_1 = (1;0;0;1) \text{ y } \bar{h}_2 = (0;1;0;0) \text{ forman una base de "S"}$$

¡Qué suerte!: no hace falta recurrir a Graam-Schmidt, pues ha pasado lo mejor que podía pasar: de puro churro, los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ son ortogonales (o sea, $\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2 = 0$); por tanto, la base de "S" que forman $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ es ortogonal, y sin más que dividir cada vector por su módulo obtendremos la base ortonormal buscada, es la que forman los vectores $\bar{k}_1$ y $\bar{k}_2$:

$$\bar{k}_1 = \bar{h}_1/\|\bar{h}_1\| = (1/\sqrt{2}; 0; 0; 1/\sqrt{2}) \ ; \ \bar{k}_2 = \bar{h}_2/\|\bar{h}_2\| = (0; 1/\sqrt{2}; 0; 0)$$

$$\boxed{\|\bar{h}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}} \qquad \boxed{\|\bar{h}_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = 1}$$

EJERCICIOS RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA PÁGINA WEB

EL MÁS FAMOSO PRODUCTO ESCALAR

Ejercicio 01.01

Demuestre que los vectores de $\Re^3$ ortogonales a $\overline{p}=(1;-2:3)$ constituyen
un subespacio de $\Re^3$. Determine su dimensión y una base.

Ejercicio 01.02

Demuestre que los vectores de $\Re^3$ ortogonales a $\overline{u}=(1;-1:0)$ y $\overline{v}=(0;-1:1)$ forman un subespacio de $\Re^3$. Determine una base.

SUBESPACIOS ORTOGONALES

Ejercicio 02.01

Determine el subespacio ortogonal a "S".

$$S=\{(a+b+2.c;b+c;0;b+c),\ \forall\, a,b,c\in\Re\}\subset\Re^4$$

Ejercicio 02.02

Determine el subespacio ortogonal al subespacio "S" de $\Re^4$.

$$S=<\overline{k}_1=(0;1;0;0),\ \overline{k}_2=(1;0;0;1),\ \overline{k}_3=(1;1;0;1)>$$

Ejercicio 02.03

Determine el subespacio ortogonal al subespacio "S" de $\Re^4$.

$$S_2=\{(x;y;z;t)\in\Re^4 /\ x-y=0\}$$

BASE ORTOGONAL. MÉTODO DE GRAAM

Ejercicio 03.01

Determine una base ortogonal del subespacio "S".

$$S=\{\overline{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 /\ x_1-x_2=x_3+x_4=0\}$$

Ejercicio 03.02

Determine una base ortogonal del subespacio "S".

$$S=\{\overline{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 /\ x_1-x_4=x_1+x_2+x_3=0\}$$

Ejercicio 03.03

Determine una base ortogonal del subespacio "S".

$$S=\{\overline{x}=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 /\ x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$$

AUTOCOMPROBACIÓN

Las soluciones están en los test de la web.

01) Si $\overline{u} = (u_1; \dots ;u_n)$ y $\overline{v} = (v_1; \dots ;v_n)$ son vectores de $\Re^n$, su producto escalar es el número real que denotamos $\overline{u} \bullet \overline{v}$, siendo:

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = u_1.v_1 + \dots + u_n.v_n$$

a) Verdadero ; b) Falso ; c) No tengo ni idea

02) El producto escalar de $\overline{u} = (3;-9;7)$ y $\overline{v} = (k;2;0)$ es 6.

a) $k = 0$; b) $k = -8$; c) $k = 8$

03) El espacio vectorial $\Re^n$ se dice euclídeo para indicar que en él se ha definido el producto escalar.

a) Verdadero ; b) Falso

04) ¿Son ciertas las siguientes propiedades del producto escalar de vectores?

1) $\forall\, \overline{u}, \overline{v} \in \Re^3$, es $\overline{u} \bullet \overline{v} = \overline{v} \bullet \overline{u}$

2) $\forall\, \overline{u}, \overline{v} \in \Re^3$, $\forall\, \theta \in \Re$, es $(\theta \bullet \overline{u}) \bullet \overline{v} = \theta.(\overline{u} \bullet \overline{v})$

3) $\forall\, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \Re^3$, es $\overline{u} \bullet (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} \bullet \overline{v}) + (\overline{u} \bullet \overline{w})$

a) Sí ; b) No ; c) No tengo ni idea

05) Los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son ortogonales si $\overline{u} \bullet \overline{v} = 0$.

a) Verdadero ; b) Falso

06) Los vectores $\overline{u} = (3;-9;7)$ y $\overline{v} = (k;2;0)$ son ortogonales.

a) $k \neq 6$; b) $k = -6$; c) $k = 6$

07) Los vectores $\overline{u} = (k;-8;7)$ y $\overline{v} = (k;2;0)$ no son ortogonales.

a) $k \neq \pm 4$; b) $k = \pm 4$; c) $k = 0$

08) El vector cero es ortogonal a cualquier vector.

a) Verdadero ; b) Falso

09) El conjunto de los vectores ortogonales a $\overline{u} \in \Re^n$ es subespacio de $\Re^n$.

a) Verdadero ; b) Falso

10) El conjunto de vectores ortogonales a $\overline{u} = (2;-3;4) \in \Re^3$ es:

a) $\{ (x;y;z) \in \Re^3 \ / \ 4.x - 3.y + 2.z = 0 \}$

b) $\{ (x;y;z) \in \Re^3 \ / \ 2.x - 3.y = 0 \}$

c) $\{ (x;y;z) \in \Re^3 \ / \ 2.x - 3.y + 4.z = 0 \}$

11) El conjunto de vectores ortogonales a $\overline{u} = (2;-1;0) \in \Re^3$ es:

a) $\{ (\theta;2.\theta;0),\ \forall\, \theta \in \Re \}$

b) $\{ (2.\theta;\mu;\theta),\ \forall\, \theta,\mu \in \Re \}$

c) $\{ (\theta;2.\theta;\mu),\ \forall\, \theta,\mu \in \Re \}$

12) El conjunto "S" de los vectores ortogonales a los vectores $\bar{u} = (2;0;4)$ y $\bar{v} = (5;-1;1)$ es:

a) $S = \left\{ (x;y;z) \in \Re^3 \middle/ \begin{array}{l} 4.x + 2.z = 0 \\ 5.x - y + z = 0 \end{array} \right\}$

b) $S = \left\{ (x;y;z) \in \Re^3 \middle/ \begin{array}{l} 2.x + 4.z = 0 \\ 5.x - y + z = 0 \end{array} \right\}$

c) $S = \left\{ (x;y;z) \in \Re^3 \middle/ \begin{array}{l} 2.x + 4.z = 0 \\ 5.x + y - z = 0 \end{array} \right\}$

13) El conjunto "S" de los vectores ortogonales a los vectores $\bar{u} = (1;0;0)$ y $\bar{v} = (1;-1;1)$ es:

a) $S = \{ (\theta;2.\theta;0), \forall \theta \in \Re \}$; b) $S = \{ (0;\theta;\theta), \forall \theta \in \Re \}$

c) $S = \{ (\theta;\theta;\mu), \forall \theta,\mu \in \Re \}$

14) El conjunto $H \subset \Re^n$ se dice ortogonal si está formado por vectores ortogonales dos a dos; es decir, $\bar{u} \bullet \bar{v} = 0, \forall \bar{u},\bar{v} \in H$.

a) Verdadero ; b) Falso

15) Sea $H = \{\bar{u}_1 = (\theta;1;-2), \bar{u}_2 = (-1;3;2), \bar{u}_3 = (\theta;2;0)\} \subset \Re^3$.

a) "H" no es ortogonal ; b) "H" es ortogonal si $\theta = -1$

c) "H" es ortogonal si $\theta = 6$

16) Todo subconjunto ortogonal de $\Re^n$ que no contenga al vector cero es libre.

a) Verdadero ; b) Falso

17) Sea $H \subset \Re^5$ un conjunto ortogonal tal que $\bar{0} \notin H$.
Señale la falsa:

a) "H" puede estar formado por 5 vectores
b) "H" puede estar formado por 2 vectores
c) "H" puede estar formado por 6 vectores

18) Sea $H = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\} \subset \Re^4$.

$\bar{v}_1 = (2;0;0;2), \bar{v}_2 = (0;3;2;0), \bar{v}_3 = (0;2;-3;0), \bar{v}_4 = (4;0;0;-4)$

a) "H" es ortogonal ; b) "H" es libre y no ortogonal

c) "H" es ligado

19) Sea $H = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\} \subset \Re^4$.

$\bar{v}_1 = (2;0;0), \bar{v}_2 = (0;3;2), \bar{v}_3 = (0;2;-3), \bar{v}_4 = (5;0;0)$

a) "H" es ortogonal ; b) "H" es libre y no ortogonal

c) "H" es ligado

20) Sea $H \subset \Re^n$ formado por 4 vectores y ortogonal.

a) $n = 4$; b) $n < 4$; c) $n \geq 4$

21) Se dice que una base de $\Re^n$ es ortogonal si el producto escalar de cualesquiera dos vectores de la base es cero; o sea, los vectores de la base son ortogonales dos a dos.

a) Verdadero ; b) Falso

22) La base $\{(2;-5;1),\ 7;3;1),(-8;5;k)\}$ es ortogonal.

a) $k=\pm 41$; b) $k=41$; c) $k=-41$

23) La base $\{(2;3;0),(-3;2;k),(3.k;-2.k;13)\}$ es ortogonal $\forall k \in \Re$.

a) Verdadero ; b) Falso

24) El módulo del vector $\overline{x}=(x_1;\ \ldots\ ;x_n)$ se denota $\|\overline{x}\|$, y es la raíz cuadrada (con signo +) del producto escalar $\overline{x}\bullet\overline{x}$; o sea:

$$\|\overline{x}\| = +\sqrt{\overline{x}\bullet\overline{x}} = +\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

a) Verdadero ; b) Falso

25) El vector $\overline{u}=(3;-4;k)$ tiene módulo $\sqrt{50}$.

a) $k=\pm 5$; b) $k=5$; c) $k=-5$

26) Si $\theta \in \Re$ y $\overline{x}=(u;v;w)\in\Re^3$, es $\|\theta\bullet\overline{x}\| = |\theta|.\|\overline{x}\|$.

a) Verdadero ; b) Falso

27) Si $\overline{x},\overline{y}\in\Re^3$, es $\|\overline{x}+\overline{y}\| \le \|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|$.

a) Verdadero ; b) Falso

28) Sean $\overline{x}$ e $\overline{y}$ vectores tales que $\|\overline{x}\|=5$ y $\|\overline{y}\|=7$.

a) $\|-3\bullet\overline{x}\|=-15$; b) $\|-3\bullet\overline{x}\|=15$; c) $\|\overline{x}+\overline{y}\|=12$

29) Un vector se dice unitario si su módulo es 1.

a) Verdadero ; b) Falso

30) Si $\overline{x}\neq\overline{0}$, el vector $\overline{x}/\|\overline{x}\|$ es unitario.

a) Verdadero ; b) Falso

31) El vector $\overline{x}=(1/2;1/3;k)$ es unitario.

a) $k=-\sqrt{23}/6$; b) $k=\sqrt{23}/6$; c) $|k|=\sqrt{23}/6$

32) Una base de $\Re^n$ se dice ortonormal si es ortogonal (o sea, está formada por vectores ortogonales dos a dos) y todos los vectores son unitarios.

a) Verdadero ; b) Falso

33) La base ortonormal más famosa de $\Re^3$ es la que forman los vectores $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ y $(0;0;1)$.

a) Verdadero ; b) Falso

34) Si cada vector de una base ortogonal se divide por su módulo se obtiene una base ortonormal.

a) Verdadero ; b) Falso

35) La base $\left\{\overline{u}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};0),\ \overline{u}_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0),\ \overline{u}_3=(0;0;k)\right\}$ es ortonormal.

a) $k=-1$; b) $k=1$; c) $|k|=1$

36) Sean $\bar{u} = (1;0;1)$ y $\bar{v} = (1;-1;-1)$.

a) $\dfrac{(\bar{u} \bullet \bar{v})^2}{\|\bar{u} - 3 \bullet \bar{v}\| \bullet \bar{u}} = 0$; b) $\dfrac{(\bar{u} \bullet \bar{v})^2}{\|\bar{u} - 3 \bullet \bar{v}\| \bullet \bar{u}} = (0;0;0)$

c) $\dfrac{(\bar{u} \bullet \bar{v})^2}{\|\bar{u} - 3 \bullet \bar{v}\| \bullet \bar{u}}$ no tiene sentido

37) La expresion $\bar{u} - \left(\dfrac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{\bar{u} \bullet \bar{u}}\right) \bullet \bar{u}$, donde $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores no nulos de $\Re^3$, es:

a) Un número real ; b) Un vector de $\Re^3$
c) Una expresión sin sentido

38) Si $\bar{u} = (1;0;1)$ e $\bar{v} = (2;-1;-1)$, el valor de $\left\| \dfrac{(\bar{u} \bullet \bar{v})^2 \bullet \bar{u}}{\|\bar{u}\|} \right\|$ es:

a) 1 ; b) $1/\sqrt{2}$; c) $(1/\sqrt{2};0;1/\sqrt{2})$

39) La expresion $\bar{u} - \left(\dfrac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{\bar{u} \bullet \bar{u}}\right)$, donde $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son no nulos, es:

a) Un número real ; b) Un vector de $\Re^3$
c) Una expresión sin sentido

40) Si $\bar{u} = (1;0;1)$ y $\bar{v} = (1;-1;-1)$, el valor de $\dfrac{(\bar{u} \bullet \bar{v})^3 \bullet \bar{u}}{\|\bar{u} + \bar{v}\|}$ es:

a) 0 ; b) $(0;0;0)$; c) No tiene sentido

41) Si $\bar{u} = (-1;0;-1)$, $\bar{v} = (2;-1;-1)$ y $\bar{z} = (0;1;2)$, señale el valor de la expresión $\bar{u} \bullet \dfrac{(\bar{u} \bullet \bar{v}) \bullet \bar{z}}{\|\bar{u} + \bar{v} + \bar{z}\|}$.

a) $(0;0;2)$; b) 2 ; c) -2

42) El conjunto $S = \{(1;0;1;3), (2;0;1;-1), (0;1;0;0)\} \subset \Re^4$ es:

a) Libre y ortonormal ; b) Libre y ortogonal
c) Ligado y ortogonal

43) Sean $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ vectores ortonormales.
Los vectores $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son:

a) Linealmente dependientes ; b) Ortonormales
c) Ortogonales

44) Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ vectores no nulos de $\Re^n$ tales que $\bar{u} \bullet \bar{v} = 0$.

a) $\bar{u}/\|\bar{u}\|$ y $\bar{v}/\|\bar{v}\|$ son ortonormales ; b) $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son ortonormales
c) $\bar{u}/\|\bar{u}\|$ y $2 \bullet \bar{v}$ no son ortogonales

45) Si $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son vectores ortogonales no nulos, los vectores $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ y $\bar{v}_1 + \bar{v}_3$ son:

a) Ortogonales ; b) Linealmente independientes
c) Linealmente dependientes

46) Si $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son vectores ortonormales de $\Re^n$, el resultado de la operación $(3\bullet\bar{v}_1+\bar{v}_2)\bullet(2\bullet\bar{v}_1+3\bullet\bar{v}_3)$ es:

a) 6 ; b) 3 ; c) -5

47) Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores ortogonales no nulos y λ y μ son números reales no nulos, $\lambda\bullet\bar{u}$ y $\mu\bullet\bar{v}$ son ortogonales.

a) Verdadero ; b) Falso

48) Siendo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ vectores de $\Re^n$ tales que $\bar{x}\bullet\bar{x}=\bar{y}\bullet\bar{y}$, es:

a) $\bar{x}=\bar{y}$; b) $\bar{x}=\pm\bar{y}$; c) $\|\bar{x}\|=\|\bar{y}\|$

49) Siendo $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ vectores cualesquiera de $\Re^n$, es:

a) $\bar{x}\bullet(\bar{y}\bullet\bar{z})=(\bar{x}\bullet\bar{y})\bullet\bar{z}$; b) $\bar{x}\bullet(\bar{y}+2\bullet\bar{z})=\bar{x}\bullet\bar{y}+2.(\bar{x}\bullet\bar{z})$

c) $|\bar{x}\bullet\bar{y}|=\|\bar{x}\|.\|\bar{y}\|$

50) Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son vectores ortonormales, $6\bullet\bar{v}_1$ y $-3\bullet\bar{v}_2$ son:

a) Unitarios ; b) Ortonormales ; c) Ortogonales

51) Sea $\{\bar{x},\bar{y},\bar{z}\}\subset\Re^3$ un conjunto ortogonal. Es:

a) $(\bar{x}\bullet\bar{y})\bullet\bar{z}=0$; b) $(\bar{x}\bullet\bar{y})\bullet\bar{z}>0$; c) $(\bar{x}\bullet\bar{y})\bullet\bar{z}=(0;0;0)$

52) Los vectores no nulos $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son tales que $\bar{u}\bullet\bar{v}+\bar{u}\bullet\bar{w}=0$.

a) $\bar{u}$ es ortogonal a $\bar{v}$ y a $\bar{w}$; b) $\bar{u}$ es ortogonal a $\bar{v}+\bar{w}$

c) Los vectores son ortogonales dos a dos

53) Los vectores no nulos $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ son tales que $\bar{u}\bullet(\bar{v}\bullet\bar{w})=0$.

a) Los 3 vectores son ortogonales ; b) $\bar{u}$ es ortogonal a $\bar{v}\bullet\bar{w}$

c) $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son ortogonales

54) Sean $\bar{x},\bar{y}\in\Re^n$ y $\lambda\in\Re$.

a) $\|\bar{x}+\bar{y}\|\geq\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|$; b) $\|\lambda\bullet\bar{x}-\lambda\bullet\bar{y}\|=|\lambda|.\|\bar{x}-\bar{y}\|$

c) $\|\lambda\bullet(\bar{x}-\bar{y})\|=\lambda.\|\bar{x}-\bar{y}\|$

55) Sea $\lambda\in\Re$ y $\bar{u},\bar{v}\in\Re^n$ no nulos y no ortogonales tales que se cumple que $(\lambda\bullet\bar{u})\bullet\bar{v}=0$.

a) $\lambda\bullet\bar{u}$ y $\bar{v}$ son ortogonales ; b) $\lambda=0$; c) $\lambda\neq0$

56) Si $\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_k$ son ortogonales dos a dos y unitarios, el módulo del vector $\bar{v}=\theta_1\bullet\bar{u}_1+\ldots+\theta_k\bullet\bar{u}_k$ es $\sqrt{\theta_1^2+\ldots+\theta_k^2}$.

a) Verdadero ; b) Falso

57) Si $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son ortonormales, el valor de $\|2\bullet\bar{x}-3\bullet\bar{y}\|$ es:

a) 1 ; b) 5 ; c) $\sqrt{13}$

58) Si $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ son ortonormales, señale el módulo de $2\bullet\bar{x}+3\bullet\bar{y}-\bar{z}$.

a) $\sqrt{14}$; b) 4 ; c) -4

59) Sean $\bar{x}$ e $\bar{y}$ vectores ortonormales tales que $\|k\bullet\bar{x}-3\bullet\bar{y}\|=7$.

a) $k=40$; b) $k=-40$; c) $|k|=\sqrt{40}$

60) Siendo $\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ vectores ortonormales de $\Re^n$, el resultado de la operación $\left\| 3\bullet(2\bullet\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})\right\| + \left\| -2\bullet\overline{x}-5\bullet\overline{z}\right\|$ es:

a) 4 ; b) 2 ; c) $\sqrt{54}+\sqrt{29}$

61) Es cierto que:

a) Cinco vectores de $\Re^4$ son linealmente dependientes
b) Tres vectores de $\Re^2$ pueden ser ortogonales
c) Tres vectores de $\Re^4$ siempre son ortogonales

62) Cinco vectores no nulos de $\Re^n$ cumplen que:

$$\overline{v}_i\bullet\overline{v}_j=0,\ i,j=1,2,\dots,5,\ i\neq j$$

a) $n\geq 5$; b) Los vectores son ortonormales ; c) $n=5$

63) Si $\overline{v}_1\bullet\overline{v}_2=0$ y $\overline{v}_3\bullet\overline{v}_4=0$, los vectores $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4\in\Re^3$ son:

a) Ortogonales ; b) LD ; c) LI

64) Dos subespacios de $\Re^n$ se dicen ortogonales si cada vector de cualquiera de los subespacios es ortogonal a todos los vectores del otro subespacio.

a) Verdadero ; b) Falso

65) Si $\overline{x}\in\Re^n$ es ortogonal a todo vector de una base del subespacio $S\subset\Re^n$, es ortogonal a todo vector de "S".

a) Verdadero ; b) Falso

66) ¿Son ortogonales los subespacios S_1 y S_2?

$$S_1=\{(a+b+2.c;\ b+c;0;\ b+c),\ \forall a,b,c\in\Re\}$$
$$S_2=\{(0;d;e;-d),\ \forall d,e\in\Re\}$$

a) Sí ; b) No

67) ¿Son ortogonales los subespacios S_1 y S_2?

$$S_1=\{(a+b;b;0;b),\ \forall a,b\in\Re\}\ ;\ S_2=\{(0;c;d;d-c),\ \forall c,d\in\Re\}$$

a) Sí ; b) No

68) ¿Son ortogonales los subespacios S_1 y S_2?

$$S_1=\{(a+b;\ b\ ;\ b;\ 0),\ \forall a,b\in\Re\}$$
$$S_2=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \middle/ \begin{array}{c} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2.x_1+x_2+x_3=0\end{array}\right\}$$

a) Sí ; b) No

69) Partiendo de una base cualquiera de un espacio vectorial, el método de Graam permite determinar una base ortogonal.

a) Verdadero ; b) Falso

70) Salvo que se nos aparezca la virgen, para diagonalizar una forma cuadrática hay que usar el método de Graam.

a) Verdadero ; b) Falso

Tema 7
Diagonalización de matrices cuadradas

7.01 Menores principales de una matriz cuadrada
7.02 El truco del almendruco
7.03 Autovalores y autovectores
7.04 Diagonalización de matrices
7.05 Potencias de una matriz cuadrada
7.06 Teoremas diversos
7.07 Forma canónica de Jordan

7.1 MENORES PRINCIPALES DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si $A \in M_{n\times n}$, se llama menor principal de orden "k" de "A" a todo menor de orden "k" cuyos elementos sean simétricos respecto a la diagonal principal de "A". Obviamente, los menores principales de orden 1 son los elementos de la diagonal principal de "A", y el único menor principal de orden "n" es $|A|$.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$, se tiene que:

- Los menores principales de orden 1 son 0, 6 y 11.
- Los menores principales de orden 2 son $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}$.
- El único menor principal de orden 3 es $|A|$.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$, se tiene que:

- Los menores principales de orden 1 son 0, 6, 11 y 16.
- Los menores principales de orden 2 son:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 13 & 16 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix}$$

- Los menores principales de orden 3 son:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

- El único menor principal de orden 4 es $|A|$.

Para venir a saberlo todo
no quieras saber algo en nada.
Para venir a gustarlo todo
no quieras gustar algo en nada.
Para venir a poseerlo todo
no quieras poseer algo en nada.
Para venir serlo todo
no quieras ser algo en nada.

San Juan de la Cruz

7.2 TRUCO DEL ALMENDRUCO

- Siendo "A" una matriz cuadrada de orden "n" e "I" la matriz unidad de orden "n", la matriz $A-\lambda\bullet I$ se obtiene restando λ a los elementos de la diagonal principal de "A". ***Por ejemplo:***

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\Rightarrow A-\lambda\bullet I=\begin{bmatrix}1-\lambda&2&3\\4&5-\lambda&6\\7&8&9-\lambda\end{bmatrix}$$

- Con el truco del almendruco podemos calcular $|A-\lambda\bullet I|$ sin escribir la matriz $A-\lambda\bullet I$, pues siendo "n" par, es:

$$|A-\lambda\bullet I|=\lambda^n-c_1.\lambda^{n-1}+c_2.\lambda^{n-2}+....-c_{n-1}.\lambda+c_n$$

Siendo "n" impar, es:

$$|A-\lambda\bullet I|=-\lambda^n+c_1.\lambda^{n-1}-c_2.\lambda^{n-2}+....-c_{n-1}.\lambda+c_n$$

donde:

$c_1=\mathrm{Tr}(A)\equiv$ suma de los menores principales de orden 1 de "A"
$c_2=$ suma de los menores principales de orden 2 de "A"
::
$c_{n-1}=$ suma de los menores principales de orden $n-1$ de "A"
$c_n=|A|$

Ejemplos

- Si $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}$, es $\mathrm{Tr}(A)=1+8=9$ y $|A|=2\Rightarrow|A-\lambda\bullet I|=\lambda^2-9.\lambda+2$

- Si $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}5&1&3\\7&8&2\\6&9&0\end{bmatrix}$, es:

$$|A-\lambda\bullet I|=-\lambda^3+(1+5+9).\lambda^2-\left\{\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&6\\7&9\end{vmatrix}\right\}.\lambda+|A|$$

$$|B-\lambda\bullet I|=-\lambda^3+(5+8+0).\lambda^2-\left\{\begin{vmatrix}5&1\\7&8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&3\\6&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}8&2\\9&0\end{vmatrix}\right\}.\lambda+|B|$$

- Si $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{bmatrix}$, es $|A-\lambda\bullet I|=\lambda^4-c_1.\lambda^3+c_2.\lambda^2-c_3.\lambda+|A|$,

siendo:

$c_1=$ suma de menores principales de orden 1 de "A"$=\mathrm{Tr}(A)$
$c_2=$ suma de menores principales de orden 2 de "A"
$c_3=$ suma de menores principales de orden 3 de "A"

o sea:

$$c_1=1+6+11+16$$

$$c_2=\begin{vmatrix}1&2\\5&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&3\\9&11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4\\13&16\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6&7\\10&11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6&8\\14&16\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}11&12\\15&16\end{vmatrix}$$

$$c_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\5&6&7\\9&10&11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&4\\5&6&8\\13&14&16\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&3&4\\9&11&12\\13&15&16\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6&7&8\\10&11&12\\14&15&16\end{vmatrix}$$

7.3 AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Autovalores

Siendo "A" una matriz cuadrada de orcen "n", diremos que el número λ es un **autovalor** de "A" o un **valor propio** de "A" o un **valor característico** de "A" si en $\Re^n$ hay vectores $\bar{x} \neq \bar{0}$ y tales que $A \bullet \bar{x} = \lambda \bullet \bar{x}$.

Por ejemplo, al afirmar que el número 17 es un autovalor de la matriz $A_{3\times3}$ se afirma que en $\Re^3$ hay vectores $\bar{x} \neq \bar{0}$ tales que $A \bullet \bar{x} = 17 \bullet \bar{x}$.

El vector $\bar{x}$ ha de ser distinto de $\bar{0}$ porque como $\forall\lambda$ es $A \bullet \bar{0} = \bar{0} = \lambda \bullet \bar{0}$, el vector $\bar{0}$ satisface la condición $A \bullet \bar{x} = \lambda \bullet \bar{x}$ para todo valor de λ.

Siendo "I" la matriz unidad de orden "n", los autovalores de "A" son las soluciones de $|A - \lambda \bullet I| = 0$, llamada **ecuación característica** de "A". En efecto:

$$A \bullet \bar{x} = \lambda \bullet \bar{x} \Rightarrow A \bullet \bar{x} - \lambda \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow (A - \lambda \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0}$$

Y como $(A - \lambda \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0}$ es un **sistema lineal homogéneo** de "n" ecuaciones con "n" incógnitas (los "n" componentes de $\bar{x}$), tiene soluciones distintas de la trivial (recuerda que ha de ser $\bar{x} \neq \bar{0}$) sólo si la matriz de los coeficientes del sistema tiene determinante nulo; o sea, sólo si $|A - \lambda \bullet I| = 0$.

Del polinomio $P(\lambda) = |A - \lambda \bullet I|$ se dice **polinomio característico** de "A".

- Se llama **multiplicidad algebraica** del autovalor λ al número de veces que dicho autovalor aparece como solución de la ecuación $|A - \lambda \bullet I| = 0$.
- **La suma de los autovalores de "A" coincide con la traza de "A", y su producto coincide con el determinante de "A".**
- **Si "A" es simétrica, sus autovalores siempre son números reales.**

Autovectores

- Si λ es un autovalor de la matriz $A_{n\times n}$ y $\bar{x} \neq \bar{0}$ es un vector de $\Re^n$ tal que $A \bullet \bar{x} = \lambda \bullet \bar{x}$ (o sea, $(A - \lambda \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0}$), se dice que $\bar{x}$ es un **autovector (vector propio o vector característico)** de "A" asociado al autovalor λ.
- El subconjunto de $\Re^n$ que forman los autovectores asociados al autovalor λ (incluyendo al vector $\bar{0}$, que también satisface la condición $A \bullet \bar{x} = \lambda \bullet \bar{x}$) es un **subespacio** de $\Re^n$, pues toda combinación lineal de autovectores de λ es un autovector de λ. En efecto, si $\bar{x}, \bar{y}$ son autovectores del autovalor λ, es $A \bullet \bar{x} = \lambda \bullet \bar{x}$ y $A \bullet \bar{y} = \lambda \bullet \bar{y}$; así, siendo $\alpha, \beta \in \Re$, sucede que:

$$A \bullet (\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}) = \alpha \bullet (A \bullet \bar{x}) + \beta \bullet (A \bullet \bar{y}) =$$

$$\boxed{A \bullet \bar{x} = \lambda \bullet \bar{x} \ ; \ A \bullet \bar{y} = \lambda \bullet \bar{y}}$$

$$= \alpha \bullet (\lambda \bullet \bar{x}) + \beta \bullet (\lambda \bullet \bar{y}) = \lambda \bullet (\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y})$$

  lo que demuestra que $\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}$ es un autovector de λ.
- Se llama **multiplicidad geométrica** de un autovalor a la dimensión de su subespacio de autovectores.

- **Nota bene:** si la multiplicidad algebraica de un autovalor es "k", su multiplicidad geométrica puede ser 1, 2, 3, ... , k−1, k. ***Por ejemplo,*** si la multiplicidad algebraica es 3, la multiplicidad geométrica puede ser 1, 2 , 3. Naturalmente, según lo anterior, si la multiplicidad algebraica de un autovalor es 1, la multiplicidad geométrica también es 1.
- **Atent@:** si la matriz "A" es simétrica, la multiplicidad algebraica de cada autovalor siempre coincide con su multiplicidad geométrica.

FONEMATO 7.3.1

Calcule los autovalores de "A" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Cálculo de los autovalores: son las soluciones de la ecuación característica de la matriz "A".

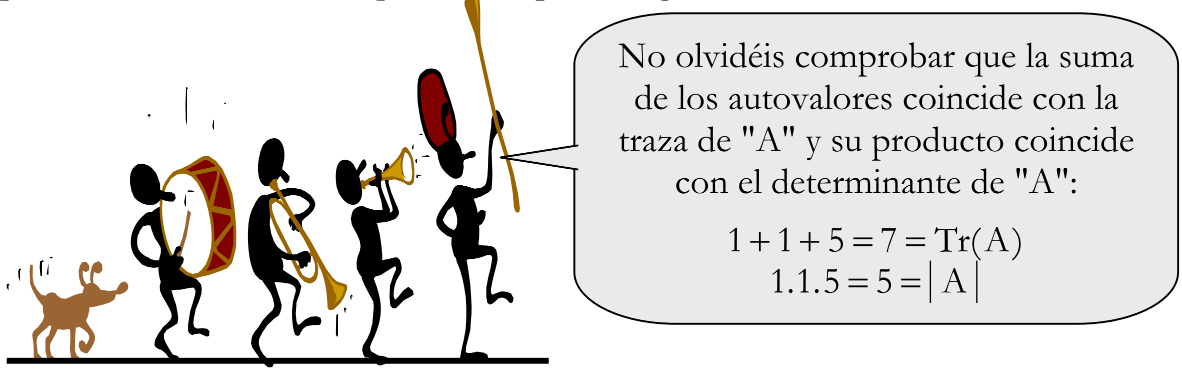
$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (2+3+2).\lambda^2 - \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right\}.\lambda + |A| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 7.\lambda^2 - 11..\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ (doble)} \\ \lambda = 5 \text{ (simple)} \end{cases}$$

Como $\lambda = 5$ aparece una vez como solución de la ecuación $|A - \lambda \bullet I| = 0$, su multiplicidad algebraica es 1... y en esta situación podemos apostar tranquilamente la vida a que su multiplicidad geométrica (dimensión del subespacio de autovectores asociados a $\lambda = 5$) también es 1.

Como $\lambda = 1$ aparece dos veces como solución de la ecuación $|A - \lambda \bullet I| = 0$, su multiplicidad algebraica es 2... y en este caso no apostamos nada, porque como "A" no es simétrica, la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$ (dimensión del subespacio de autovectores asociados a $\lambda = 1$) puede ser 1 ó 2, y hasta que no hagamos los cálculos no lo sabremos. Si "A" fuera simétrica podríamos asegurar a priori, sin hacer cálculos, que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$ también es 2.



Subespacio de autovectores de $\lambda = 5$

El que $\lambda = 5$ sea autovalor de "A" significa que en $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 5 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A - 5 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 5 \bullet \overline{x}$. Siendo $(x_1; x_2; x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A - 5 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, denotando $L(\lambda = 5)$ al subespacio en cuestión, es:

$$\dim.(L(\lambda = 5)) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 5 \bullet I) = 3 - 2 = 1$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos x_3. Resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2.x_2 = -x_3 \\ x_1 + 2.x_2 = 3.x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 5) = \{(a; a; a),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;1;1),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_1 = (1;1;1)$ es una base del subespacio $L(\lambda = 5)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

El que $\lambda = 1$ sea autovalor de "A" significa que en $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 1 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A - 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 1 \bullet \overline{x}$. Siendo $(x_1; x_2; x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, denotando $L(\lambda = 1)$ al subespacio en cuestión, es:

$$\dim.(L(\lambda = 1)) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 1 \bullet I) = 3 - 1 = 2$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 1 indicado es no nulo, eliminamos las ecuaciones 2ª y 3ª y parametrizamos x_2 y x_3. Resulta:

$$x_1 = -2.x_2 - x_3 \Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(-2.b - c; b; c),\ \forall b, c \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(-2.b; b; 0) + (-c; 0; c),\ \forall b, c \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{b \bullet (-2;1;0) + c \bullet (-1;0;1),\ \forall b, c \in \Re\}$$

Los vectores $\overline{h}_2 = (-2;1;0)$ y $\overline{h}_3 = (-1;0;1)$ son una base de $L(\lambda = 1)$.

NOTA

La matriz dada "A" es tal que la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con su multiplicidad geométrica, y cuando suceda tan mágica coincidencia puedes apostar la vida a que "A" es diagonalizable (¿qué coño será eso?).

FONEMATO 7.3.2

Calcule los autovalores de "A" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Cálculo de los autovalores:

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (2-1-1).\lambda^2 - \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right\}.\lambda + |A| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \text{ (doble)} \\ \lambda = 2 \text{ (simple)} \end{cases}$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A" y su producto coincide con el determinante de "A".

Como $\lambda = 2$ aparece una vez como solución de la ecuación $|A - \lambda \bullet I| = 0$, su multiplicidad algebraica es 1... y en esta situación podemos apostar tranquilamente la vida a que su multiplicidad geométrica (dimensión del subespacio de autovectores asociados a $\lambda = 2$) también es 1.

Como $\lambda = -1$ aparece dos veces como solución de la ecuación $|A - \lambda \bullet I| = 0$, su multiplicidad algebraica es 2... y en tal caso no apostamos nada, porque como "A" no es simétrica, la multiplicidad geométrica de $\lambda = -1$ (dimensión del subespacio de autovectores asociados a $\lambda = -1$) puede ser 1 ó 2, y hasta que no hagamos los cálculos no lo sabremos. Si "A" fuera simétrica podríamos asegurar a priori, sin hacer cálculos, que la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda = -1$ también es 2.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 2$

El que $\lambda = 2$ sea autovalor de "A" significa que en $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 2 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A - 2 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 2 \bullet \overline{x}$.

Siendo $(x_1; x_2; x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A - 2 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, denotando $L(\lambda = 2)$ al subespacio en cuestión, es:

$$\dim.(L(\lambda = 2)) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 2 \bullet I) = 3 - 2 = 1$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_1. Resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x_3 = 0 \\ -3.x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(a;0;0),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;0;0),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_1 = (1;0;0)$ es una base del subespacio $L(\lambda = 2)$; o sea, es:

$$L(\lambda = 2) = <\overline{h}_1>$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$

El que $\lambda = -1$ sea autovalor de "A" significa que en $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $A \bullet \overline{x} = -1 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A + 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $A \bullet \overline{x} = -1 \bullet \overline{x}$.

Siendo $(x_1;x_2;x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A + 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, denotando $L(\lambda = -1)$ al subespacio en cuestión, es:

$$\dim.(L(\lambda = -1)) = \dim.(\Re^3) - rg(A + 1 \bullet I) = 3 - 1 = 2$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_2. Resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 3.x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -1) = \{(0;b;0),\ \forall b \in \Re\} = \{b \bullet (0;1;0),\ \forall b \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_2 = (0;1;0)$ es una base del subespacio $L(\lambda = -1)$; o sea, es:

$$L(\lambda = -1) = <\overline{h}_2>$$

NOTA

Podemos asegurar que la matriz "A" no es diagonalizable (¿qué coño será eso?), pues la multiplicidad algebraica de cada autovalor de "A" no coincide con su multiplicidad geométrica: la multiplicidad algebraica de $\lambda = -1$ es 2 y su multiplicidad geométrica es 1.

FONEMATO 7.3.3

Calcule los autovalores de "A" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Cálculo de los autovalores:

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (1+3-1).\lambda^2 - \{ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \}.\lambda + |A| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ (simple)} \\ \lambda = 3 \text{ (simple)} \\ \lambda = -1 \text{ (simple)} \end{cases}$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A" y su producto coincide con el determinante de "A".

Como cada autovalor aparece una vez como solución de $|A - \lambda \bullet I| = 0$, todos tienen multiplicidad algebraica igual a 1 $\Rightarrow$ todos tienen multiplicidad geométrica igual a 1 $\Rightarrow$ la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con su multiplicidad geométrica $\Rightarrow$ la matriz "A" es diagonalizable (¿qué será eso?).

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

El que $\lambda = 1$ sea autovalor de "A" significa que en $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 1 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A - 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 1 \bullet \overline{x}$. Siendo $(x_1;x_2;x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix}} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos x_1. Resulta:

$$\left.\begin{matrix} 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -2.x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(a;0;0),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;0;0),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_1 = (1;0;0)$ es una base del subespacio $L(\lambda = 1)$; o sea, es:

$$L(\lambda = 1) = < \overline{h}_1 >$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 3$

El que $\lambda = 3$ sea autovalor de "A" significa que en $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 3 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A - 3 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $A \bullet \overline{x} = 3 \bullet \overline{x}$. Siendo $(x_1;x_2;x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A - 3 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_1. Resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 2.x_2 + x_3 = 2.x_1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 3) = \{(b;b;0),\ \forall b \in \Re\} = \{b \bullet (1;1;0),\ \forall b \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_2 = (1;1;0)$ es una base del subespacio $L(\lambda = 3)$; o sea, es:

$$L(\lambda = 3) = < \overline{h}_2 >$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$

El que $\lambda = -1$ sea autovalor de "A" significa que en $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $A \bullet \overline{x} = -1 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A + 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $A \bullet \overline{x} = -1 \bullet \overline{x}$. Siendo $(x_1;x_2;x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A + 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

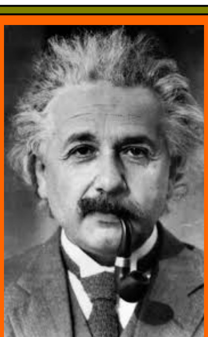
Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_1. Resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 2.x_2 + x_3 = -2.x_1 \\ 4.x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ x_3 = -4.x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -1) = \{(c;c;-4.c),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (1;1;-4),\ \forall c \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_3 = (1;1;-4)$ es una base del subespacio $L(\lambda = -1)$; o sea, es:

$$L(\lambda = -1) = < \overline{h}_3 >$$



Educación es lo que queda después de olvidar lo aprendido en la escuela.

Albert Einstein

FONEMATO 7.3.4

Calcule los autovalores de $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

SOLUCIÓN

Cálculo de los autovalores:

$$\left|A-\lambda\bullet I\right|=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=-1 \text{ (doble)}\\ \lambda=2 \text{ (simple)}\end{cases}$$

No hace falta hacer cálculos: si una matriz cuadrada es "triangular", sus autovalores son los elementos de la diagonal principal

Como $\lambda=2$ aparece una vez como solución de la ecuación $\left|A-\lambda\bullet I\right|=0$, su multiplicidad algebraica es 1.... y en esta situación podemos apostar tranquilamente la vida a que su multiplicidad geométrica (dimensión del subespacio de autovectores asociados a $\lambda=2$) también es 1.

Como $\lambda=-1$ es raíz doble de la ecuación $\left|A-\lambda\bullet I\right|=0$, su multiplicidad algebraica es 2... y en esta situación no apostamos nada, porque como "A" no es simétrica, la multiplicidad geométrica de $\lambda=-1$ (dimensión del subespacio de autovectores asociados a $\lambda=-1$) puede ser 1 ó 2, y hasta que no hagamos los cálculos no lo sabremos. Si "A" fuera simétrica podríamos asegurar a priori, sin hacer cálculos, que la multiplicidad geométrica de $\lambda=-1$ también es 2.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 2$

El que $\lambda=2$ sea autovalor de "A" significa que en $\Re^3$ hay vectores $\overline{x}\neq\overline{0}$ tales que $A\bullet\overline{x}=2\bullet\overline{x}$, o lo que es igual, $(A-2\bullet I)\bullet\overline{x}=\overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $A\bullet\overline{x}=2\bullet\overline{x}$. Siendo $(x_1;x_2;x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A-2\bullet I)\bullet\overline{x}=\overline{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Por tanto, denotando $L(\lambda=2)$ al subespacio en cuestión, es:

$$\dim.(L(\lambda=2))=\dim.(\Re^3)-rg(A-2\bullet I)=3-2=1$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_1. Resulta:

$$\left.\begin{aligned}x_3=0\\ -3.x_2+x_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}x_2=0\\ x_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=2)=\left\{(a;0;0),\ \forall a\in\Re\right\}=\left\{a\bullet(1;0;0),\ \forall a\in\Re\right\}$$

El vector $\overline{h}_1=1\bullet\overline{k}_1+0\bullet\overline{k}_2+0\bullet\overline{k}_3$ es base del subespacio $L(\lambda=2)$; o sea:

$$L(\lambda=2)=<\overline{h}_1>$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$

El que $\lambda = -1$ sea autovalor de "A" significa que en $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $A \bullet \overline{x} = -1 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A + 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $A \bullet \overline{x} = -1 \bullet \overline{x}$. Siendo $(x_1; x_2; x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A + 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, denotando $L(\lambda = -1)$ al subespacio en cuestión, es:

$$\dim.(L(\lambda = -1)) = \dim.(\Re^3) - rg(A + 1 \bullet I) = 3 - 1 = 2$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_2. Resulta:

$$\left.\begin{aligned} 3.x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

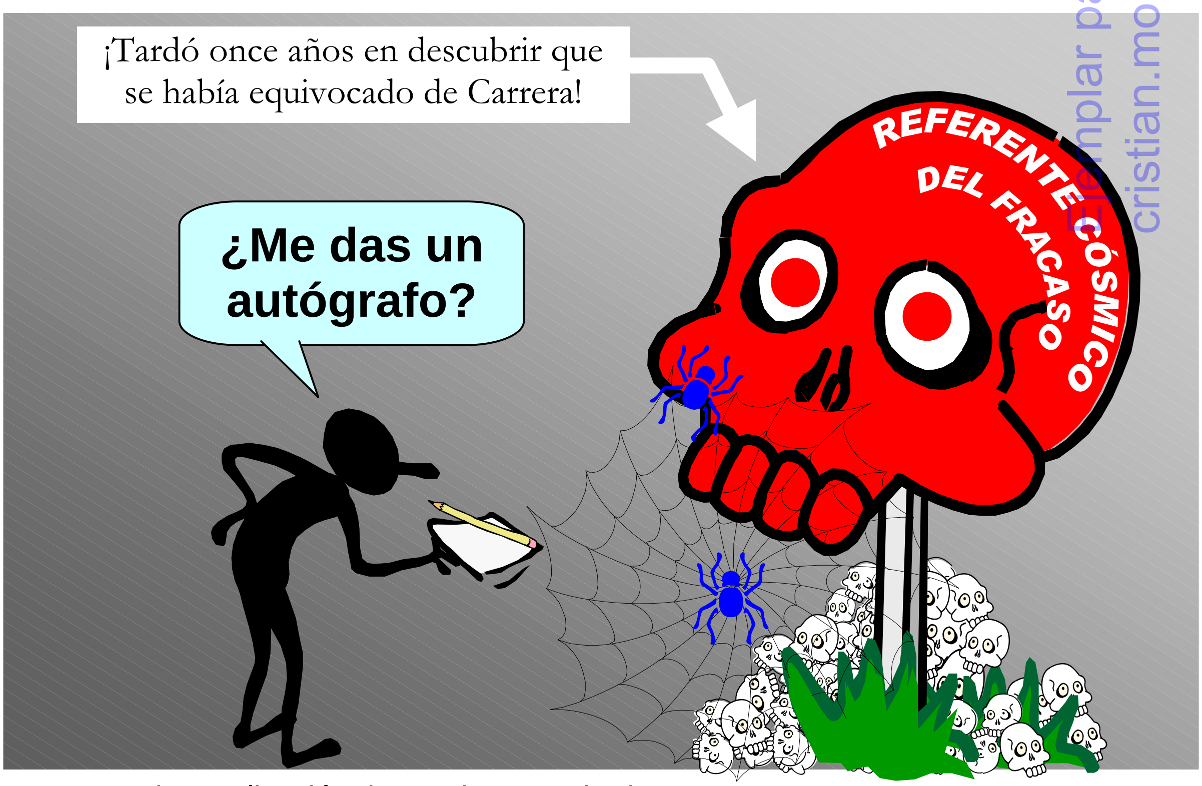
$$\Rightarrow L(\lambda = -1) = \{(0; b; 0),\ \forall b \in \Re\} = \{b \bullet (0; 1; 0),\ \forall b \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_2 = 0 \bullet \overline{k}_1 + 1 \bullet \overline{k}_2 + 0 \bullet \overline{k}_3$ es base del subespacio $L(\lambda = -1)$; o sea:

$$L(\lambda = -1) = < \overline{h}_2 >$$

NOTA

Como la multiplicidad algebraica de cada autovalor de "A" no coincide con su multiplicidad geométrica (la multiplicidad algebraica de $\lambda = -1$ es 2, y su multiplicidad geométrica es 1), apostamos tranquilamente la vida a que "A" no es diagonalizable (¿qué será eso?).



7.4 DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Se dice que la matriz cuadrada "A" es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal; o sea, "A" es diagonalizable si hay una matriz "C" del mismo orden que "A" y tal que la matriz $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es diagonal. En tal caso se dice que la matriz "C" diagonaliza a la matriz "A".

Existe la matriz "C" sólo si la multiplicidad algebraica de cada autovalor de "A" coincide con su multiplicidad geométrica. En tal caso, para construir "C" (por columnas), cada autovalor de "A" aporta una base de su subespacio de autovectores, y la matriz diagonal es la que tiene en la diagonal principal los autovalores de "A".

Si todos los autovalores de "A" son distintos (o sea, todos tienen multiplicidad algebraica igual a 1), entonces "A" es diagonalizable, pues en tal caso todos los subespacios de autovectores tienen dimensión 1 (todos tienen multiplicidad geométrica igual a 1).

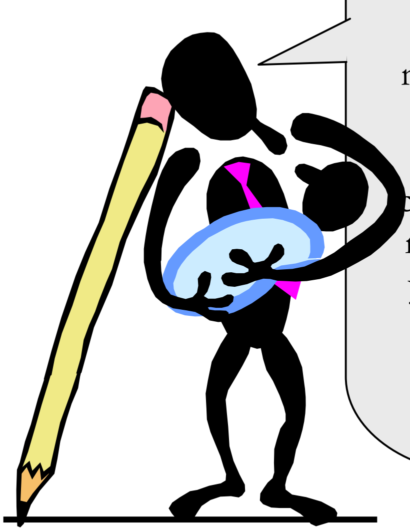
Si "A" es simétrica es diagonalizable, pues en tal caso la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con su multiplicidad geométrica.

FONEMATO 7.4.1

Si es posible, diagonalice la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: Si existe, debemos determinar una matriz $C_{3\times 3}$ tal que la matriz $C^{-1} \bullet A \bullet C$ sea diagonal... y existe "C" sólo si la multiplicidad algebraica de cada autovalor de "A" coincide con su multiplicidad geométrica; en tal caso, para construir "C", por columnas, cada autovalor "A" aporta una base de su subespacio de autovectores.



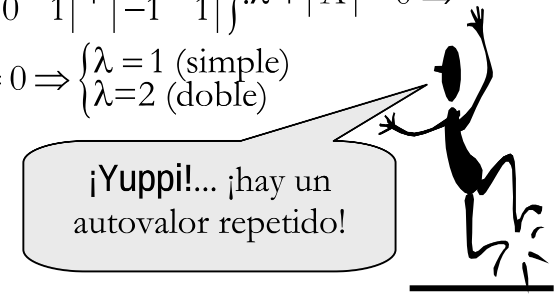
Como no somos masoquistas, rezamos para que "A" no sea diagonalizable, pues así tendremos menos trabajo que hacer. Por tanto, nos llevaremos un gran disgusto si la matriz "A" es simétrica o tiene todos los autovalores distintos (pues en ambos casos "A" será diagonalizable). Por el contrario, nos alegraremos moderadamente si "A" no es simétrica o si tiene autovalores "repetidos", y rezaremos para que la multiplicidad geométrica de alguno de dichos autovalores repetidos no coincida con su multiplicidad algebraica (pues en tal caso "A" no será diagonalizable).

Cálculo de los autovalores:

$$|A-\lambda\bullet I|=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+(2+2+1).\lambda^2-\left\{\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}\right\}.\lambda+|A|=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+5.\lambda^2-6.\lambda+4=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=1\ \text{(simple)}\\ \lambda=2\ \text{(doble)}\end{cases}$$



Como $\lambda=2$ es raíz doble de la ecuación característica, la matriz "A" será diagonalizable si el subespacio de autovectores de $\lambda=2$ tiene dimensión dos.

Subespacio de autovectores de $\lambda=2$

$$(A-2\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&\boxed{1}&1\\0&0&0\\0&-1&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Por tanto, denotando $L(\lambda=2)$ al subespacio de autovectores asociados a $\lambda=2$, es $\dim.(L(\lambda=2))=\dim.(\Re^3)-rg(A-2\bullet I)=3-1=2\Rightarrow$ "A" es diagonalizable.

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 1 indicado es no nulo, eliminamos las ecuaciones 2ª y 3ª y parametrizamos x_1 y x_3. Resulta:

$$x_2=-x_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=2)=\{(a;-b;b),\ \forall a,b\in\Re\}=$$

$$=\{(a;0;0)+(0;-b;b),\ \forall a,b\in\Re\}=\{a\bullet(1;0;0)+b\bullet(0;-1;1),\ \forall a,b\in\Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1=(1;0;0)$ y $\bar{h}_2=(0;-1;1)$ forman una base del subespacio:

$$L(\lambda=2)=<\bar{h}_1,\bar{h}_2>$$

Subespacio de autovectores de $\lambda=1$

Como $\lambda=1$ aparece una vez como solución de la ecuación característica, es seguro que el subespacio de autovectores de $\lambda=1$ tiene dimensión 1.

$$(A-1\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_3. Resulta:

$$\left.\begin{matrix}x_1+x_2=-x_3\\x_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=-x_3\\x_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=1)=\{(-c;0;c),\ \forall c\in\Re\}=\{c\bullet(-1;0;1),\ \forall c\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_3=(-1;0;1)$ es una base del subespacio; o sea, es:

$$L(\lambda=1)=<\bar{h}_3>$$

Diagonalización de "A"

Como queda dicho, para **construir** "C" (por columnas), cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores. Por tanto, el autovalor $\lambda = 2$ aporta, por ejemplo, los vectores $\overline{h}_1 = (1;0;0)$ y $\overline{h}_2 = (0;-1;1)$, y el autovalor $\lambda = 1$ aporta, por ejemplo, el vector $\overline{h}_3 = (-1;0;1)$.

En definitiva, es $C = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, siendo $C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

No vale poner a lo loco los autovalores de "A" en la diagonal principal, debe respetarse el orden elegido al **construir** la matriz "C".

TOMA BUENA NOTA

Si una matriz es diagonalizable, hay infinitas matrices que la diagonalizan.

En nuestro caso:

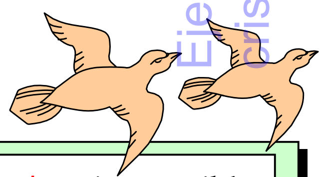
- Es $L(\lambda = 2) = \{(a;0;0) + (0;-b;b),\ \forall a,b \in \Re\}$, y si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los vectores $\overline{k}_1 = (a;0;0)$ y $\overline{k}_2 = (0;-b;b)$ forman una base de $L(\lambda = 2)$.
- Es $L(\lambda = 1) = \{(-c;0;c),\ \forall c \in \Re\}$, y si $c \neq 0$ el vector $\overline{k}_3 = (-c;0;c)$ es una base de $L(\lambda = 1)$.
- Para cualesquiera valores no nulos de "a", "b" y "c", si

$$H = \begin{bmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}$$

Base de $L(\lambda = 2)$ Base de $L(\lambda = 1)$

es:

$$H^{-1} \bullet A \bullet H = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D}$$



Recuerda: las matrices $D_1, D_2 \in M_{n\times n}$ se dicen **semejantes** si es posible encontrar una matriz regular $H \in M_{n\times n}$ tal que $D_2 = H^{-1} \bullet D_1 \bullet H$.

Pueden plantearte este mismo ejercicio con un enunciado alternativo que "juegue" con la semejanza de matrices: en vez de pedirte que, si es posible, diagonalices la matriz cuadrada "A", te piden que analices si "A" es semejante a una matriz diagonal "D" y que, en su caso, determines una matriz "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$.

FONEMATO 7.4.2

Estudie para qué valores de "a" y "b" es diagonalizable $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Cálculo de los autovalores:

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow$$

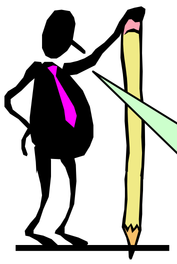
$$\Rightarrow -\lambda^3 + (5 - 1 + b).\lambda^2 - \left\{ \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & a \\ 0 & b \end{vmatrix} \right\}.\lambda + |A| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (4 + b).\lambda^2 - (4.b - 5).\lambda - 5.b = 0$$

que resulta absolutamente infumable, salvo si tienes una estupenda varita mágica. Sin embargo, si calculamos $|A - \lambda \bullet I|$ a lo bestia, el asunto es una gilipollez:

$$|A - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda).(-1-\lambda).(b-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = b \end{cases}$$



Para calcular los autovalores de una matriz "A" que está "contaminada" por parámetros desconocidos suele ser mejor calcular $|A - \lambda \bullet I|$ a lo bestia, como en este ejercicio.

- Si $b \neq 5$ y $b \neq -1 \Rightarrow$ los autovalores son distintos $\Rightarrow$ "A" es diagonalizable.
- Si $b = 5$, el autovalor $\lambda = 5$ tiene multiplicidad algebraica 2, y "A" será diagonalizable sólo si la multiplicidad geométrica de $\lambda = 5$ es 2 (o sea, si el subespacio de autovectores asociados a $\lambda = 5$ tiene dimensión 2). Como la matriz de coeficientes del sistema de cartesianas de dicho subespacio es:

  $$A - 5 \bullet I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & -6 \\ 3 & 0 \end{matrix}} & & a \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

  entonces $\dim.(L(\lambda = 5)) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 5 \bullet I) = 3 - 2 = 1$.
  Por tanto, "A" no es diagonalizable si $b = 5$.
- Si $b = -1$, el autovalor $\lambda = -1$ tiene multiplicidad algebraica 2, y "A" será diagonalizable sólo si la multiplicidad geométrica de $\lambda = -1$ es 2 (o sea, el subespacio de autovectores asociados a $\lambda = -1$ tiene dimensión 2). Como la matriz de coeficientes del sistema de cartesianas de dicho subespacio es:

  $$A + 1 \bullet I = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  entonces $\dim.(L(\lambda = -1)) = \dim.(\Re^3) - rg(A + 1 \bullet I) = \begin{cases} 2 \text{ si } a = 0 \\ 1 \text{ si } a \neq 0 \end{cases}$.

Así, si $b = -1$, la matriz "A" es diagonalizable si $a = 0$, y no lo es si $a \neq 0$.

FONEMATO 7.4.3

Si es posible, diagonalice la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Enunciado alternativo: analice si "A" es semejante a una matriz diagonal "D" y, en su caso, determine una matriz "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$.

Latiguillo: Si existe, debemos determinar $C \in M_{3\times 3}$ tal que la matriz $C^{-1} \bullet A \bullet C$ sea diagonal... y existe "C" sólo si la multiplicidad algebraica de cada autovalor de "A" coincide con su multiplicidad geométrica; en tal caso, para construir "C", por columnas, cada autovalor "A" aporta una base de su subespacio de autovectores.

¡Putada!: como "A" es simétrica, es diagonalizable; o sea, existe "C".

Autovalores: $|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 2.\lambda^2 + 5.\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 3, -2$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

Como $\lambda = 1$ aparece una vez como solución de la ecuación característica, es seguro que el subespacio de autovectores de $\lambda = 1$ tiene dimensión 1.

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 que forman los elementos de las cuatro "esquinas" de $A - 1 \bullet I$ es no nulo, eliminamos la segunda ecuación y parametrizamos x_2. Resulta:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2.x_3 &= 0 \\ 2.x_1 - 2.x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(0;a;0),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (0;1;0),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_1 = 0 \bullet \overline{d}_1 + 1 \bullet \overline{d}_2 + 0 \bullet \overline{d}_3$ es una base del subespacio.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 3$

Como $\lambda = 3$ aparece una vez como solución de la ecuación característica, es seguro que el subespacio de autovectores de $\lambda = 3$ tiene dimensión 1.

$$(A - 3 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_3. Resulta:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 &= -2.x_3 \\ 2.x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2.x_3 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 3) = \{(2.b;0;b),\ \forall b \in \Re\} = \{b \bullet (2;0;1),\ \forall b \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_2 = 2 \bullet \overline{d}_1 + 0 \bullet \overline{d}_2 + 1 \bullet \overline{d}_3$ es una base del subespacio.

Subespacio de autovectores de $\lambda = -2$

Como $\lambda = -2$ aparece una vez como solución de la ecuación característica, es seguro que el subespacio de autovectores de $\lambda = -2$ tiene dimensión 1.

$$(A-(-2)\bullet I)\bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_1. Resulta:

$$\left.\begin{matrix} 2.x_3 = -4.x_1 \\ 3.x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = -2.x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -2) = \{(c;0;-2.c),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (1;0;-2),\ \forall c \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_3 = 1 \bullet \overline{d}_1 + 0 \bullet \overline{d}_2 - 2 \bullet \overline{d}_3$ es una base del subespacio.

Si "A" es simétrica puedes detectar errores de cálculo comprobando que se cumple la propiedad que establece que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica siempre son ortogonales. En nuestro caso:

$$\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_2 = (0;1;0) \bullet (2;0;1) = 0$$
$$\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_3 = (0;1;0) \bullet (1;0;-2) = 0$$
$$\overline{h}_2 \bullet \overline{h}_3 = (2;0;1) \bullet (1;0;-2) = 0$$

Diagonalización de "A"

Como queda dicho, para construir "C", por columnas, cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores. Por tanto, el autovalor $\lambda = 1$ aporta, por ejemplo, el vector $\overline{h}_1 = 0 \bullet \overline{d}_1 + 1 \bullet \overline{d}_2 + 0 \bullet \overline{d}_3$; el autovalor $\lambda = 3$ aporta, por ejemplo, el vector $\overline{h}_2 = 2 \bullet \overline{d}_1 + 0 \bullet \overline{d}_2 + 1 \bullet \overline{d}_3$, y el autovalor $\lambda = -2$ aporta, por ejemplo, el vector $\overline{h}_3 = 1 \bullet \overline{d}_1 + 0 \bullet \overline{d}_2 - 2 \bullet \overline{d}_3$.

En definitiva, es $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, siendo $C^{-1} \bullet A \bullet C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}$.

No vale poner a lo loco los autovalores de "A" en la diagonal principal, debe respetarse el orden elegido al construir la matriz "C".

TOMA BUENA NOTA

Si una matriz es diagonalizable, hay infinitas matrices que la diagonalizan.

En nuestro caso:

- Es $L(\lambda = 1) = \{(0;a;0),\ \forall a \in \Re\}$, y $\overline{k}_1 = (0;a;0)$ es base de $L(\lambda = 1)$ si $a \neq 0$.
- Es $L(\lambda = 3) = \{(2.b;0;b),\ \forall b \in \Re\}$, y si $b \neq 0$ el vector $\overline{k}_2 = (2.b;0;b)$ es una base de $L(\lambda = 3)$.
- Es $L(\lambda = -2) = \{(c;0;-2.c),\ \forall c \in \Re\}$, y si $c \neq 0$ el vector $\overline{k}_3 = (c;0;-2.c)$ es una base de $L(\lambda = -2)$.
- Si $H = \begin{bmatrix} 0 & 2.b & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & -2.c \end{bmatrix}$ y $\left\{\begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{matrix}\right\}$ es $H^{-1} \bullet A \bullet H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.4

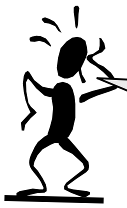
Si es posible, diagonalice la matriz $A=\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, $a, b \neq 0$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: como "A" es simétrica, es diagonalizable (o sea, es semejante a una matriz diagonal): puede encontrarse una matriz $C_{3\times 3}$ tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es diagonal... y para construir "C", por columnas, cada autovalor de "A" aporta una base de su subespacio de autovectores.

Cálculo de los autovalores:

$$|A-\lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow \underbrace{-\lambda^3 + 3.a.\lambda^2 - 3.(a^2-b^2).\lambda + (a^3+b^3-3.a.b) = 0}_{\text{infumable, salvo si tienes una varita mágica}}$$



¡Seré bruto!... para calcular los autovalores de una matriz "A" contaminada por parámetros desconocidos suele ser mejor calcular $|A-\lambda \bullet I|$ a lo bestia.

$$|A-\lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

a la primera fila le sumamos la segunda y la tercera

$$= \begin{vmatrix} a-\lambda+2.b & a-\lambda+2.b & a-\lambda+2.b \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

sacamos factor común $a-\lambda+2.b$ en la primera fila

$$= (a-\lambda+2.b).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

a las columnas segunda y tercera les restamos la primera

$$= (a-\lambda+2.b).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-\lambda-b & 0 \\ b & 0 & a-\lambda-b \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$= (a-\lambda+2.b).(a-\lambda-b)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = a+2.b \text{ (simple)},\ a-b \text{ (doble)}$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = a+2.b$

Como $\lambda = a+2.b$ aparece una vez como solución de la ecuación característica, es seguro que el subespacio de autovectores de $\lambda = a+2.b$ tiene dimensión 1.

$$(A-(a+2.b)\bullet I)\bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2.b & b & b \\ b & -2.b & b \\ b & b & -2.b \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

dividimos por "b" los dos miembros de cada ecuación del sistema

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos x_3. Resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2.x_2 = -x_3 \\ x_1 + x_2 = 2.x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = a + 2.b) = \{(\theta;\theta;\theta),\ \forall \theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (1;1;1),\ \forall \theta \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_1 = (1;1;1)$ es una base del subespacio.

Subespacio de autovectores de $\lambda = a - b$

Como $\lambda = a - b$ aparece dos veces como solución de la ecuación característica y "A" es simétrica, nos apostamos un brazo a que el subespacio de autovectores de $\lambda = a - b$ tiene dimensión 2.

$$(A - (a-b) \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & \boxed{b} & b \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base del subespacio, como el menor de orden 1 indicado es no nulo (pues $b \neq 0$), eliminamos la 1ª y 2ª ecuaciones y parametrizamos x_1 y x_3:

$$b.x_2 = -b.x_1 - b.x_3 \Rightarrow x_2 = -x_1 - x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = a - b) = \{(\beta;-\beta-\delta;\delta),\ \forall \beta,\delta \in \Re\} =$$

$$= \{\beta \bullet (1;-1;0) + \delta \bullet (0;1;1),\ \forall \beta,\delta \in \Re\}$$

Los vectores $\overline{h}_2 = (1;-1;0)$ y $\overline{h}_3 = (0;-1;1)$ forman una base del subespacio.

Recuerda: si "A" es simétrica, puedes detectar errores de cálculo comprobando si se cumple eso de que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica siempre son ortogonales. En nuestro caso:

$$\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_2 = (1;1;1) \bullet (1;-1;0) = 0$$
$$\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_3 = (1;1;1) \bullet (0;-1;1) = 0$$

Como $\overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ son autovectores del mismo autovalor, no tienen porqué ser ortogonales (aunque podrían serlo).

Diagonalización de "A"

Como queda dicho, para construir "C", por columnas, cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores. Por tanto, el autovalor $\lambda = a + 2.b$ aporta, por ejemplo, el vector $\overline{h}_1 = (1;1;1)$, y el autovalor $\lambda = a - b$ aporta, por ejemplo, los vectores $\overline{h}_2 = (1;-1;0)$ y $\overline{h}_3 = (0;-1;1)$.

En definitiva, es $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, siendo $C^{-1} \bullet A \bullet C = \underbrace{\begin{bmatrix} a+2.b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}}$.

No vale poner a lo loco los autovalores de "A" en la diagonal principal, debe respetarse el orden elegido al construir la matriz "C".

FONEMATO 7.4.5

Si es posible, diagonalice la matriz $A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

¡Gran putada!... por ser "A" simétrica, es diagonalizable (o sea, es semejante a una matriz diagonal); es decir, puede encontrarse una matriz "C" tal que $C^{-1}\bullet A\bullet C$ es diagonal. Para construir "C", por columnas, cada autovalor de "A" aporta una base de su subespacio de autovectores.

Cálculo de los autovalores:

$$|A-\lambda\bullet I|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&1\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=$$

a la 1ª fila le sumamos las restantes

factor común $1-\lambda$ en 1ª fila

$$=(1-\lambda).\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda).\begin{vmatrix}0&1&1&1+\lambda\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=$$

A la primera fila le restamos la cuarta

Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna

$$=-(1-\lambda).\begin{vmatrix}1&1&1+\lambda\\-\lambda&1&0\\1&-\lambda&0\end{vmatrix}=-(1-\lambda)(1+\lambda).\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-(1-\lambda)(1+\lambda).(\lambda^2-1)=0\Rightarrow\lambda=1\ (\text{doble}),\ \ -1\ (\text{doble})$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

Como $\lambda=1$ aparece 2 veces como solución de la ecuación característica y "A" es simétrica, apostamos un brazo a que el subespacio $L(\lambda=1)$ tiene dimensión 2.

$$(A-1\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos las ecuaciones 1ª y 2ª y parametrizamos x_3 y x_4, resultando $x_1=x_4$ y $x_2=x_3$. Por tanto:

$$L(\lambda=1)=\{(a;b;b;a),\ \forall a,b\in\Re\}=\{a\bullet(1;0;0;1)+b\bullet(0;1;1;0),\ \forall a,b\in\Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1=(1;0;0;1)$ y $\bar{h}_2=(0;1;1;0)$ forman una base del subespacio.

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$

Como $\lambda=-1$ aparece 2 veces como solución de la ecuación característica y "A" es simétrica, apostamos un pie a que el subespacio $L(\lambda=-1)$ tiene dimensión 2.

$$(A+1\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos las ecuaciones 1ª y 2ª y parametrizamos x_3 y x_4. Resulta $x_1 = -x_4$ y $x_2 = -x_3$; por tanto:

$$L(\lambda = -1) = \{(-c; -d; d; c),\ \forall c, d \in \mathfrak{R}\} =$$
$$= \{c \bullet (-1;0;0;1) + d \bullet (0;-1;1;0),\ \forall c, d \in \mathfrak{R}\}$$

Los vectores $\overline{h}_3 = (-1;0;0;1)$ y $\overline{h}_4 = (0;-1;1;0)$ forman una base de $L(\lambda = -1)$.

> No olvides comprobar que se cumple eso de que **autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica siempre son ortogonales.**
> En nuestro caso, debemos comprobar que:
> $$\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_3 = 0 \ ;\ \overline{h}_1 \bullet \overline{h}_4 = 0$$
> $$\overline{h}_2 \bullet \overline{h}_3 = 0 \ ;\ \overline{h}_2 \bullet \overline{h}_4 = 0$$
> Como $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son autovectores del mismo autovalor, no tienen porqué ser ortogonales... aunque en nuestro caso lo son. Lo mismo pasa con $\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.

Diagonalización de "A"

Para **construir** (por columnas) una matriz "C" que diagonalice a "A", cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores; así, $\lambda = 1$ aporta, por ejemplo, los vectores $\overline{h}_1 = (1;0;0;1)$ y $\overline{h}_2 = (0;1;1;0)$, y $\lambda = -1$ aporta, por ejemplo, los vectores $\overline{h}_3 = (-1;0;0;1)$ y $\overline{h}_4 = (0;-1;1;0)$. Por tanto, es:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es la matriz diagonal que en su diagonal principal tiene los autovalores de "A"... y no vale ponerlos al tun-tun, debe respetarse el orden elegido al **construir** la matriz "C":

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

TOMA BUENA NOTA

Si una matriz es diagonalizable, hay infinitas matrices que la diagonalizan.
En nuestro caso:

- Es $L(\lambda = 1) = \{(a;0;0;a) + (0;b;b;0),\ \forall a, b \in \mathfrak{R}\}$, y si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los vectores $\overline{k}_1 = (a;0;0;a)$ y $\overline{k}_2 = (0;b;b;0)$ forman una base de $L(\lambda = 1)$.
- Es $L(\lambda = -1) = \{(-c;0;0;c) + (0;-d;d;0),\ \forall c, d \in \mathfrak{R}\}$, y si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ los vectores $\overline{k}_3 = (-c;0;0;c)$ y $\overline{k}_4 = (0;-d;d;0)$ son una base de $L(\lambda = -1)$.
- Si $H = \begin{bmatrix} a & 0 & -c & 0 \\ 0 & b & 0 & -d \\ 0 & b & 0 & d \\ a & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{cases}$ es $H^{-1} \bullet A \bullet H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.6

Si es posible, diagonalice la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\\1&0&-2&5\end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Como "A" es simétrica, es diagonalizable; o sea, es posible encontrar una matriz "C" tal que la matriz $C^{-1}\bullet A\bullet C$ sea diagonal. Para construir "C", por columnas, cada autovalor de "A" aporta una base de su subespacio de autovectores.

Cálculo de los autovalores:

$$|A-\lambda\bullet I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&1\\0&1-\lambda&0&0\\0&0&1-\lambda&-2\\1&0&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda).\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&-2\\1&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=$$

Desarrollamos por los elementos de la segunda fila

$$=(1-\lambda).((1-\lambda)^2.(5-\lambda)-5.(1-\lambda))=(1-\lambda)^2.((1-\lambda).(5-\lambda)-5)=$$

$$=(1-\lambda)^2.(\lambda^2-6.\lambda)=0\Rightarrow\lambda=1\ (\text{doble}),\ 0\ (\text{simple}),\ 6\ (\text{simple})$$

Subespacio de autovectores de $\lambda=1$

Como $\lambda=1$ aparece dos veces como solución de $|A-\lambda\bullet I|=0$ y "A" es simétrica, seguro que el subespacio de autovectores de $\lambda=1$ tiene dimensión 2.

$$(A-1\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\\boxed{0}&0&0&\boxed{-2}\\\boxed{1}&0&-2&\boxed{4}\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ldots\Rightarrow L(\lambda=1)=\{a\bullet(2;0;1;0)+b\bullet(0;1;0;0),\ \forall a,b\in\mathfrak{R}\}$$

Los vectores $\bar{h}_1=(2;0;1;0)$ y $\bar{h}_2=(0;1;0;0)$ forman una base del subespacio.

Subespacio de autovectores de $\lambda=0$

Como $\lambda=0$ aparece una vez como solución de $|A-\lambda\bullet I|=0$, seguro que el subespacio de autovectores de $\lambda=0$ tiene dimensión 1.

$$(A+0\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\\1&0&-2&5\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ldots\Rightarrow L(\lambda=0)=\{c\bullet(-1;0;2;1),\ \forall c\in\mathfrak{R}\}$$

El vector $\bar{h}_3=(-1;0;2;1)$ es una base del subespacio.

Subespacio de autovectores de $\lambda=6$

Como $\lambda=6$ aparece una vez como solución de la ecuación característica, seguro que el subespacio de autovectores de $\lambda=6$ tiene dimensión 1.

$$(A-6\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}-5&0&0&1\\0&-5&0&0\\0&0&-5&-2\\1&0&-2&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ldots\Rightarrow L(\lambda=6)=\left\{\frac{d}{5}\bullet(1;0;-2;5),\ \forall d\in\mathfrak{R}\right\}$$

El vector $\bar{h}_4=(1;0;-2;5)$ es una base del subespacio.

Para detectar posibles errores de cálculo, no olvides comprobar que se cumple eso de que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica siempre son ortogonales. En nuestro caso, comprueba que:

$$\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_3 = 0 \;;\; \overline{h}_1 \bullet \overline{h}_4 = 0 \;;\; \overline{h}_2 \bullet \overline{h}_3 = 0 \;;\; \overline{h}_2 \bullet \overline{h}_4 = 0 \;;\; \overline{h}_3 \bullet \overline{h}_4 = 0$$

Como $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son autovectores del mismo autovalor, no tienen porqué ser ortogonales (aunque en nuestro caso lo son).

Diagonalización de "A"

Para construir "C" cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores: $\lambda = 1$ aporta, por ejemplo, los vectores $\overline{h}_1 = (2;0;1;0)$ y $\overline{h}_2 = (0;1;0;0)$, el autovalor $\lambda = 0$ aporta, por ejemplo, el vector $\overline{h}_3 = (-1;0;2;1)$, y el autovalor $\lambda = 6$ aporta, por ejemplo, el vector $\overline{h}_4 = (1;0;-2;5)$.

En definitiva, una matriz que diagonaliza a "A" es:

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{h}_4 \end{array} \end{array}$$

La matriz $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es la matriz diagonal que en su diagonal principal tiene los autovalores de "A"... y no vale ponerlos al tun-tun, debe respetarse el orden elegido al construir la matriz "C":

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\text{matriz diagonal semejante a "A"}}$$

TOMA BUENA NOTA

Si una matriz es diagonalizable, hay infinitas matrices que la diagonalizan.

En nuestro caso:

- Es $L(\lambda = 1) = \{(2.a;0;a;0) + (0;b;0;0),\ \forall a,b \in \Re\}$, y si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los vectores $\overline{k}_1 = (2.a;0;a;0)$ y $\overline{k}_2 = (0;b;0;0)$ forman una base de $L(\lambda = 1)$.
- Es $L(\lambda = 0) = \{(-c;0;2.c;c),\ \forall c \in \Re\}$, y el vector $\overline{k}_3 = (-c;0;2.c;c)$ es una base de $L(\lambda = 0)$ siempre que $c \neq 0$.
- Si $d \neq 0$ el vector $\overline{k}_4 = (d/5;0;-2.d/5;d)$ es una base de $L(\lambda = 6)$, pues $L(\lambda = 6) = \{(d/5;0;-2.d/5;d), \forall d \in \Re\}$.
- Si $H = \begin{bmatrix} 2.a & 0 & -c & d/5 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 2.c & -2.d/5 \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$ y $\left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{array}\right\}$ es $H^{-1} \bullet A \bullet H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

TOMA MUY BUENA NOTA

Si una matriz "A" cuadrada de orden "n" es **simétrica** ($(A = A^t)$ siempre puede hallarse una matriz "C" cuadrada de orden "n" que es **ortogonal** $(C^{-1} = C^t)$ y tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es una matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A". Para **construir** "C" (por columnas), cada autovalor de "A" aporta una base ortonormal de su subespacio de autovectores.

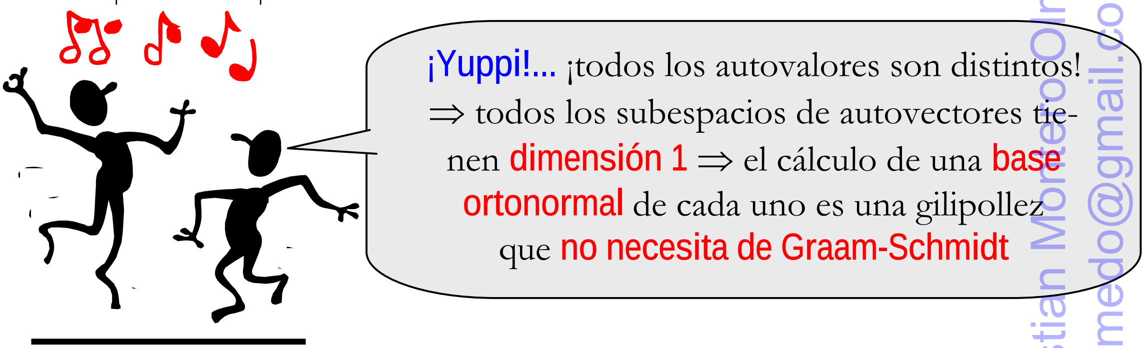
FONEMATO 7.4.7

Determine una matriz ortogonal que diagonalice a la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Autovalores

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda^2 + 6.\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ 4,\ -2$$



Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2.x_1 + x_2 = -x_3 \\ x_1 - x_2 = -2.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{ (-a;a;a),\ \forall a \in \Re \} = \{ a \bullet (-1;1;1),\ \forall a \in \Re \}$$

El vector $\bar{h}_1 = (-1;1;1)$ es una base de $L(\lambda = 1)$, y el vector

$$\bar{w}_1 = \bar{h}_1 / \|\bar{h}_1\| = (-1/\sqrt{3};1/\sqrt{3};1/\sqrt{3})$$

es una **base ortonormal** de $L(\lambda = 1)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 4$

$$(A - 4 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \end{matrix} & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ -4 \end{matrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 - 4.x_2 = -2.x_3 \\ x_1 + 2.x_2 = 4.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = 2.x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow L(\lambda = 4) = \{ (2.b;b;b),\ \forall b \in \Re \} = \{ b \bullet (2;1;1),\ \forall b \in \Re \}$$

El vector $\bar{h}_2 = (2;1;1)$ es una base de $L(\lambda = 4)$, y el vector

$$\bar{w}_2 = \bar{h}_2 / \|\bar{h}_2\| = (2/\sqrt{6};1/\sqrt{6};1/\sqrt{6})$$

es una **base ortonormal** de $L(\lambda = 4)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = -2$

$$(A+2\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\\ \begin{matrix}1 & 2\end{matrix} & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}5.x_1+x_2=-x_3\\ x_1+2.x_2=-2.x_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=0\\ x_2=-x_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow L(\lambda=-2)=\{\,(0;-c;c),\ \forall c\in\Re\,\}=\{\,c\bullet(0;-1;1),\ \forall c\in\Re\,\}$$

El vector $\bar{h}_3=(0;-1;1)$ es una base de $L(\lambda=-2)$, y el vector

$$\bar{w}_3=\bar{h}_3/\|\bar{h}_3\|=(0;-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$$

es una base ortonormal de $L(\lambda=-2)$.

> Para detectar errores de cálculo, no olvides comprobar que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales:
> $$\bar{h}_1\bullet\bar{h}_2=0\ ;\ \bar{h}_1\bullet\bar{h}_3=0\ ;\ \bar{h}_2\bullet\bar{h}_3=0$$

Diagonalización de "A"

- Una matriz ortogonal "C" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$C=\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}-1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } C^{-1}=C^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $C^{-1}\bullet A\bullet C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

- Otra matriz ortogonal "H" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$H=\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \bar{w}_2 & \bar{w}_1 & \bar{w}_3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } H^{-1}=H^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $H^{-1}\bullet A\bullet H=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

- Otra matriz ortogonal "P" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$P=\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \bar{w}_2 & \bar{w}_3 & \bar{w}_1\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } P^{-1}=P^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $P^{-1}\bullet A\bullet P=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.8

Determine una matriz ortogonal que diagonalice a la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.

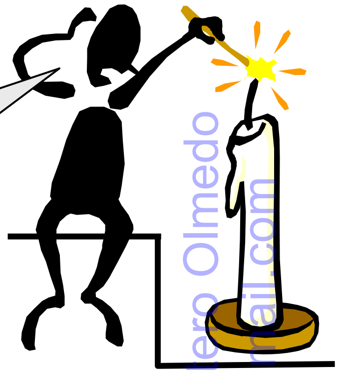
SOLUCIÓN

Autovalores

$$\left|A-\lambda\bullet I\right|=0\Rightarrow\lambda=1\ (\text{doble}),\ -1\ (\text{simple})$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A" y que su producto coincide con $|A|$.

¡Mal rollo!... como "A" es simétrica y $\lambda=1$ es raíz doble de $|A-\lambda\bullet I|=0$, seguro que $L(\lambda=1)$ tiene dimensión 2 $\Rightarrow$ si tengo mala suerte deberé recurrir a Graam-Schmidt para calcular una base ortonormal de $L(\lambda=1)$... ¡qué miedo!... ¡cirio al canto para no haya que beber de ese cáliz!



Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

$$(A-1\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&\boxed{1}&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow x_2=x_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=1)=\{(a;b;b),\ \forall a,b\in\Re\}=\{a\bullet(1;0;0)+b\bullet(0;1;1),\ \forall a,b\in\Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1=(1;0;0)$ y $\bar{h}_2=(0;1;1)$ son una base de $L(\lambda=1)$... y de puro churro resulta ser ortogonal, pues $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ son ortogonales.. Así, dividiendo cada vector por su módulo obtenemos una base ortonormal de $L(\lambda=1)$, es la que forman $\bar{p}_1=\bar{h}_1/\|\bar{h}_1\|=(1;0;0)$; $\bar{p}_2=\bar{h}_2/\|\bar{h}_2\|=(0;1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$

$$(A+1\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}2.x_1=0\\x_2=-x_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=0\\x_2=-x_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-1)=\{(0;-c;c),\ \forall c\in\Re\}=\{c\bullet(0;-1;1),\ \forall c\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_3=(0;-1;1)$ es una base de $L(\lambda=-1)$, y el vector

$$\bar{p}_3=\bar{h}_3/\|\bar{h}_3\|=(0;-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$$

es una base ortonormal.

Recuerda

Puedes detectar errores de cálculo comprobando que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales.

Diagonalización de "A"

- Una matriz ortogonal "C" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$C = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } C^{-1}=C^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- Otra matriz ortogonal "H" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$H = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{p}_3 & \bar{p}_2 & \bar{p}_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } H^{-1}=H^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $H^{-1} \bullet A \bullet H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Otra matriz ortogonal "P" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{p}_3 & \bar{p}_1 & \bar{p}_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } P^{-1}=P^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $P^{-1} \bullet A \bullet P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Otra matriz ortogonal "T" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$T = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{p}_2 & \bar{p}_3 & \bar{p}_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } T^{-1}=T^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $P^{-1} \bullet A \bullet P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.9

Determine una matriz ortogonal que diagonalice a la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Autovalores

$$\left| A - \lambda \bullet I \right| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ (simple)}, \ -1 \text{ (doble)}$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A" y que su producto coincide con $|A|$.

¡Putada!... como "A" es simétrica y $\lambda = -1$ es autovalor doble, seguro que $L(\lambda = -1)$ tiene dimensión $2 \Rightarrow$ si tengo mala suerte deberé recurrir a Graam-Schmidt para calcular una base ortonormal de $L(\lambda = -1)$... ¡qué horror!... ¡encender cirio gordo ipso facto!

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$

$$(A + 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -1) = \{(-a - b; a; b), \ \forall a, b \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -1) = \{a \bullet (-1;1;0) + b \bullet (-1;0;1), \ \forall a, b \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1 = (-1;1;0)$ y $\bar{h}_2 = (-1;0;1)$ son una base de $L(\lambda = -1)$, pero esta base no es ortogonal, pues $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ no son ortogonales. Por tanto, para calcular una base ortonormal de $L(\lambda = -1)$ debemos calcular previamente una base $\{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$ que sea ortogonal $\Rightarrow$ llamamos a Graam-Schmidt.

$$\bar{d}_1 = \bar{h}_1 = (-1;1;0)$$

$$\bar{d}_2 = \bar{h}_2 + \alpha \bullet \bar{d}_1 = (-1;0;1) - \frac{1}{2} \bullet (-1;1;0) = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$$

Para calcular "α" exigimos que $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_2 = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet (\bar{h}_2 + \alpha \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet \bar{h}_2 + \alpha.(\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1;1;0) \bullet (-1;0;1) + \alpha.(-1;1;0) \bullet (-1;1;0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2.\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

VENTANA

Una base ortonormal de $L(\lambda = -1)$ la forman $\bar{w}_1 = \frac{\bar{d}_1}{\|\bar{d}_1\|}$ y $\bar{w}_2 = \frac{\bar{d}_2}{\|\bar{d}_2\|}$:

$$\bar{w}_1 = \frac{\bar{d}_1}{\|\bar{d}_1\|} = (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0)$$

$$\bar{w}_2 = \frac{\bar{d}_2}{\|\bar{d}_2\|} = (-1/\sqrt{6}; -1/\sqrt{6}; \sqrt{2/3})$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 2$

$$(A - 2 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & & \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 - 2.x_2 = -x_3 \\ x_1 + x_2 = 2.x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(c;c;c), \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (1;1;1), \forall c \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (1;1;1)$ es una base del subespacio $L(\lambda = 2)$, y el vector $\bar{w}_3 = \bar{h}_3 / \|\bar{h}_3\| = (1/\sqrt{3};1/\sqrt{3};1/\sqrt{3})$ es base ortonormal.

Recuerda: puedes detectar errores de cálculo comprobando que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales.

Diagonalización de "A"

• Una matriz ortogonal "C" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$C = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } C^{-1}=C^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

• Otra matriz ortogonal "H" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$H = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{w}_2 & \bar{w}_1 & \bar{w}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } H^{-1}=H^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $H^{-1} \bullet A \bullet H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

• Otra matriz ortogonal "P" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{w}_2 & \bar{w}_3 & \bar{w}_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } P^{-1}=P^t}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $P^{-1} \bullet A \bullet P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.10

Determine una matriz ortogonal que diagonalice a $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Autovalores

$$\left|A-\lambda \bullet I\right| = 0 \Rightarrow .... \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (triple)}, \; -3 \text{ (simple)}$$

¡Qué putada Leoncio!... como "A" es simétrica y $\lambda = 1$ es triple, seguro que $\dim .(L(\lambda=1)) = 3$... esperemos que los dioses tengan piedad de mí y de puro churro obtengamos una base ortogonal de $L(\lambda=1)$, porque en caso contrario habrá que recurrir a Graam-Schmidt, y se me hiela la sangre al pensar en ese petardo...¡toca encender un cirio gordo por si eso ayuda!

Subespacio de autovectores de $\lambda = -3$

$$(A+3\bullet I)\bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 3.x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \\ x_1 + 3.x_2 - x_3 = -x_4 \\ x_1 - x_2 + 3.x_3 = -x_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-3) = \{(k;-k;-k;k),\ \forall k \in \Re\} = \{k \bullet (1;-1;-1;1),\ \forall k \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (1;-1;-1;1)$ es una base del subespacio $L(\lambda=-3)$, y el vector $\bar{w}_1 = \bar{h}_1 / \|\bar{h}_1\| = (1/2;-1/2;-1/2;1/2)$ es una base ortonormal.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

$$(A-1\bullet I)\bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 + x_3 - x_4 \Rightarrow L(\lambda=1) = \{(a+b-c;a;b;c),\ \forall a,b,c \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=1) = \{a \bullet (1;1;0;0) + b \bullet (1;0;1;0) + c \bullet (-1;0;0;1),\ \forall a,b,c \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_2 = (1;1;0;0)$, $\bar{h}_3 = (1;0;1;0)$ y $\bar{h}_4 = (-1;0;0;1)$ son una base de $L(\lambda=1)$, pero por desgracia esta base no es ortogonal, pues los vectores que la forman no son ortogonales dos a dos. Por tanto, para calcular una base ortonormal de $L(\lambda=1)$ debemos calcular previamente una base $\{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\}$ que sea ortogonal, y para ello recurrimos a Graam-Schmidt.

$$\bar{d}_1 = \bar{h}_2 = (1;1;0;0)$$

$$\bar{d}_2 = \bar{h}_3 + \alpha \bullet \bar{d}_1 = (\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1;0)$$

VENTANA

Para calcular "α" **exigimos** que $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_2 = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet (\bar{h}_3 + \alpha \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet \bar{h}_3 + \alpha.(\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1;1;0;0) \bullet (1;0;1;0) + \alpha.(1;1;0;0) \bullet (1;1;0;0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2.\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

$$\bar{d}_3 = \bar{h}_4 + \beta_1 \bullet \bar{d}_1 + \beta_2 \bullet \bar{d}_2 = (-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3};1)$$

VENTANA

* Para calcular β_1 **exigimos** que $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_3$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_3 = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet (\bar{h}_4 + \beta_1 \bullet \bar{d}_1 + \beta_2 \bullet \bar{d}_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{d}_1 \bullet \bar{h}_4 + \beta_1.(\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1;1;0;0) \bullet (-1;0;0;1) + \beta_1.(1;1;0;0) \bullet (1;1;0;0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + 2.\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 1/2$$

* Para calcular β_2 **exigimos** que $\bar{d}_2$ y $\bar{d}_3$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_2 \bullet \bar{d}_3 = 0 \Rightarrow \bar{d}_2 \bullet (\bar{h}_4 + \beta_1 \bullet \bar{d}_1 + \beta_2 \bullet \bar{d}_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{d}_2 \bullet \bar{h}_4 + \beta_2.(\bar{d}_2 \bullet \bar{d}_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1;0) \bullet (-1;0;0;1) + \beta_2.(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1;0) \bullet (\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1;0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + 3.\beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 = 1/3$$

Los vectores $\bar{w}_2 = \bar{d}_1/\|\bar{d}_1\|$, $\bar{w}_3 = \bar{d}_2/\|\bar{d}_2\|$ y $\bar{w}_4 = \bar{d}_3/\|\bar{d}_3\|$ forman una base **ortonormal** de $L(\lambda = 1)$:

$$\bar{w}_2 = \frac{\bar{d}_1}{\|\bar{d}_1\|} = (1/\sqrt{2}\,;1/\sqrt{2}\,;0\ \ 0) \ ; \ \bar{w}_3 = \frac{\bar{d}_2}{\|\bar{d}_2\|} = (\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}}\,;-\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}}\,;\sqrt{\frac{2}{3}}\,;0)$$

$$\bar{w}_4 = \frac{\bar{d}_3}{\|\bar{d}_3\|} = (-\frac{\sqrt{3}}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Diagonalización de "A"

Una matriz ortogonal "C" que diagonaliza a la matriz "A" es:

$$C = \overbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 & \bar{w}_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal: } C^{-1}=C^t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Si te molestas en ello, puedes comprobar que $C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7.5 POTENCIAS DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si $A \in M_{n\times n}$ no es diagonalizable y "k" es un natural, para calcular la matriz A^k no hay más remedio que multiplicar la matriz "A" por sí misma "k" veces.

Pero si "A" es diagonalizable, puede encontrarse una matriz cuadrada $C \in M_{n\times n}$ tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$, siendo "D" la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A"; así, es

$$A = C \bullet D \bullet C^{-1}$$

y por tanto:

$$A^2 = A \bullet A = (C \bullet D \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^2 \bullet C^{-1}$$
$$A^3 = A^2 \bullet A = (C \bullet D^2 \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^3 \bullet C^{-1}$$
$$A^4 = A^3 \bullet A = (C \bullet D^3 \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^4 \bullet C^{-1}$$
::
$$A^k = A^{k-1} \bullet A = (C \bullet D^{k-1} \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^k \bullet C^{-1}$$

<u>Observa</u>: como la matriz "D" es diagonal, para calcular D^k basta elevar a "k" los elementos de la diagonal principal de "D".

Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ es diagonalizable (ejercicio 7.4.1), siendo:

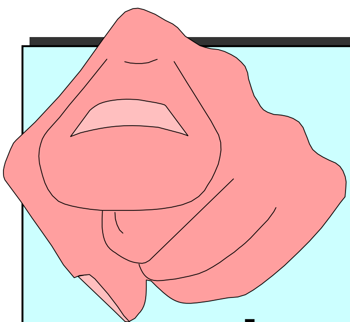
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ;\ C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

Por tanto:

$$A^4 = C \bullet D^4 \bullet C^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^4 \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1^4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \ldots\ldots$$



7.6 TEOREMAS DIVERSOS

01) Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante y la misma traza.

Si A_1 y A_2 son semejantes, existe "C" tal que $A_2 = C^{-1} \bullet A_1 \bullet C$; así:

$$|A_2| = |C^{-1} \bullet A_1 \bullet C| = |C^{-1}|.|A_1|.|C| = |A_1|$$

$$\boxed{|C^{-1}|.|C| = 1}$$

$$Tr(A_2) = Tr(C^{-1} \bullet A_1 \bullet C) = Tr(C^{-1} \bullet (A_1 \bullet C)) = Tr((A_1 \bullet C) \bullet C^{-1}) =$$

$$\boxed{Tr(Pepa \bullet Juana) = Tr(Juana \bullet Pepa)}$$

$$= Tr(A_1 \bullet C \bullet C^{-1}) = Tr(A_1)$$

$$\boxed{C \bullet C^{-1} = I \Rightarrow A_1 \bullet C \bullet C^{-1} = A_1}$$

02) Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico; por tanto, tienen los mismos autovalores.

Si A_1 y A_2 son semejantes, existe "C" tal que $A_2 = C^{-1} \bullet A_1 \bullet C$, así:

$$A_2 - \lambda \bullet I = C^{-1} \bullet A_1 \bullet C - \lambda \bullet I = C^{-1} \bullet A_1 \bullet C - \lambda \bullet C^{-1} \bullet C =$$
$$= C^{-1} \bullet (A_1 \bullet C - \lambda \bullet C) = C^{-1} \bullet (A_1 - \lambda \bullet I) \bullet C$$

luego, al tomar determinantes, es:

$$|A_2 - \lambda \bullet I| = |C^{-1} \bullet (A_1 - \lambda \bullet I) \bullet C| = |C^{-1}|.|A_1 - \lambda \bullet I|.|C| =$$
$$= |A_1 - \lambda \bullet I|, \text{ pues } |C^{-1}|.|C| = 1$$

- Como los autovalores de una matriz son las raíces de su polinomio característico, si dos matrices son semejantes, tienen los mismos autovalores, pues tienen el mismo polinomio característico.

03) Una matriz cuadrada y su traspuesta tienen los mismos autovalores.

En efecto, recordando que $|A| = |A^t|$, es:

$$|A - \lambda \bullet I| = |(A - \lambda \bullet I)^t| = |A^t - \lambda \bullet I^t| = |A^t - \lambda \bullet I|$$

04) Los autovalores de una matriz simétrica siempre son números reales (lo que no tiene porqué suceder si la matriz no es simétrica).

05) Autovectores asociados a autovalores <u>distintos</u> de una matriz simétrica son ortogonales.

En efecto, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de la matriz simétrica "A", y $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son autovectores asociados respectivamente a λ_1 y λ_2, es:

$$A \bullet \overline{h}_1 = \lambda_1 \bullet \overline{h}_1 \quad (I)$$
$$A \bullet \overline{h}_2 = \lambda_2 \bullet \overline{h}_2 \quad (II)$$

Al multiplicar escalarmente por $\overline{h}_2$ los dos miembros de (I), se obtiene:

$$\bar{h}_2 \bullet (A \bullet \bar{h}_1) = \lambda_1 \bullet (\bar{h}_2 \bullet \bar{h}_1) \quad \text{(III)}$$

Al multiplicar escalarmente por $\bar{h}_1$ los dos miembros de (II), se obtiene:

$$\bar{h}_1 \bullet (A \bullet \bar{h}_2) = \lambda_2 \bullet (\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2) \quad \text{(IV)}$$

Al restar miembro a miembro (III) y (IV), como $\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2 = \bar{h}_2 \bullet \bar{h}_1$, resulta:

$$\bar{h}_2 \bullet (A \bullet \bar{h}_1) - \bar{h}_1 \bullet (A \bullet \bar{h}_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) \bullet (\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{"A" simétrica} \Rightarrow \bar{h}_2 \bullet (A \bullet \bar{h}_1) = \bar{h}_1 \bullet (A \bullet \bar{h}_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{h}_2 \bullet (A \bullet \bar{h}_1) - \bar{h}_1 \bullet (A \bullet \bar{h}_2) = 0 \end{array}}$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \bullet (\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2) \Rightarrow \bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2 = 0$$

$$\boxed{\text{pues como } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ es } \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0}$$

que demuestra que los autovectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$, asociados respectivamente a los autovalores λ_1 y λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), son ortogonales.

06) Autovectores asociados a autovalores distintos son LI

Sea "A" una matriz cuadrada y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ autovalores de "A", con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$

Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ autovectores asociados respectivamente a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$; así: $A \bullet \bar{v}_i = \lambda_i \bullet \bar{v}_i$.

Por inducción: para $k = 1$ es $\alpha_1 \bullet \bar{v}_1 = \bar{0}$, y como $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$ (por ser $\bar{v}_1$ un vector propio), es $\alpha_1 = 0$, luego $\bar{v}_1$ es linealmente independiente. Supuesto cierto para $k = k - 1$, demostremos que también es cierto para $k = k$.

Sea la ecuación:

$$\alpha_1 \bullet \bar{v}_1 + \alpha_2 \bullet \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_k \bullet \bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{(I)}$$

Así:

$$A \bullet (\alpha_1 \bullet \bar{v}_1) + A \bullet (\alpha_2 \bullet \bar{v}_2) + \ldots + A \bullet (\alpha_k \bullet \bar{v}_k) = A \bullet \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bullet (A \bullet \bar{v}_1) + \alpha_2 \bullet (A \bullet \bar{v}_2) + \ldots + \alpha_k \bullet (A \bullet \bar{v}_k) = \bar{0}$$

$$\boxed{A \bullet \bar{v}_i = \lambda_i \bullet \bar{v}_i}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bullet (\lambda_1 \bullet \bar{v}_1) + \alpha_2 \bullet (\lambda_2 \bullet \bar{v}_2) + \ldots + \alpha_k \bullet (\lambda_k \bullet \bar{v}_k) = \bar{0} \quad \text{(II)}$$

Multiplicando por λ_k los dos miembros de (I), es:

$$\lambda_k \bullet (\alpha_1 \bullet \bar{v}_1) + \lambda_k \bullet (\alpha_2 \bullet \bar{v}_2) + \ldots + \lambda_k \bullet (\alpha_k \bullet \bar{v}_k) = \bar{0} \quad \text{(III)}$$

Restando miembro a miembro (II) y (III), resulta:

$$((\lambda_1 - \lambda_k).\alpha_1) \bullet \bar{v}_1 + ((\lambda_2 - \lambda_k).\alpha_2) \bullet \bar{v}_2 +$$
$$+ \ldots + ((\lambda_{k-1} - \lambda_k).\alpha_{k-1}) \bullet \bar{v}_{k-1} = \bar{0} \quad \text{(IV)}$$

y como $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{k-1}$ son LI (por el método de inducción), los coeficientes de (IV) son todos nulos; o sea, es $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$, pues por ser distintos los autovalores, es $\lambda_1 - \lambda_k \neq 0, \lambda_2 - \lambda_k \neq 0, \ldots + \lambda_{k-1} - \lambda_k \neq 0$. Haciendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$ en (I), resulta que $\alpha_k \bullet \bar{v}_k = \bar{0}$, y como $\bar{v}_k \neq \bar{0}$ (por ser $\bar{v}_k$ un vector propio), ha de ser $\alpha_k = 0$. Por tanto, se verifica (I) sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, por lo que $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ son LI.

07) Si λ es autovalor de "A" y $k \in \Re \Rightarrow \lambda.k$ es autovalor de $k \bullet A$:

$$\left|k \bullet A-(\lambda.k) \bullet I\right|=\left|k \bullet(A-\lambda \bullet I)\right| \underset{\boxed{\text{si "A" es cuadrada de orden "n"}}}{=} k^{n}.\left|A-\lambda \bullet I\right|=0$$

08) Si λ es autovalor de "A" y $k \in \Re \Rightarrow \lambda+k$ es autovalor de $A+k \bullet I$:

$$\left|(A+k \bullet I)-(\lambda+k) \bullet I\right|=\left|A+k \bullet I-\lambda \bullet I-k \bullet I\right|=\left|A-\lambda \bullet I\right|=0$$

09) Si λ es autovalor de "A" y "k" es un natural, λ^{k} es autovalor de A^{k}.

En efecto, si λ es autovalor de "A" $\Rightarrow \exists\, \bar{x} \neq \bar{0}$ tal que $A \bullet \bar{x}=\lambda \bullet \bar{x}$; así:

$$A \bullet(A \bullet \bar{x})=A \bullet(\lambda \bullet \bar{x}) \Rightarrow A^{2} \bullet \bar{x}=\lambda \bullet(A \bullet \bar{x}) \Rightarrow A^{2} \bullet \bar{x} \underset{\boxed{A \bullet \bar{x}=\lambda \bullet \bar{x}}}{=} \lambda^{2} \bullet \bar{x}$$

lo que demuestra que λ^{2} es autovalor de A^{2}.

Análogamente:

$$A \bullet(A^{2} \bullet \bar{x})=A \bullet(\lambda^{2} \bullet \bar{x}) \Rightarrow A^{3} \bullet \bar{x}=\lambda^{2} \bullet(A \bullet \bar{x}) \Rightarrow A^{3} \bullet \bar{x} \underset{\boxed{A \bullet \bar{x}=\lambda \bullet \bar{x}}}{=} \lambda^{3} \bullet \bar{x}$$

lo que demuestra que λ^{3} es autovalor de A^{3}.... y así sucesivamente.

10) Si λ es autovalor de la matriz regular "A" $\Rightarrow \lambda^{-1}$ es autovalor de A^{-1}.

En efecto, si λ es autovalor de "A" $\Rightarrow \exists\, \bar{x} \neq \bar{0}$ tal que $A \bullet \bar{x}=\lambda \bullet \bar{x}$; así:

$$A^{-1} \bullet(A \bullet \bar{x})=A^{-1} \bullet(\lambda \bullet \bar{x}) \Rightarrow \bar{x}=\lambda \bullet(A^{-1} \bullet \bar{x}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda^{-1} \bullet \bar{x}=A^{-1} \bullet \bar{x}$$

lo que demuestra que λ^{-1} (o sea, $1/\lambda$) es autovalor de la matriz A^{-1}.

Matriz de Eisenhover para la toma de decisiones

11) Teorema fundamental de la diagonalización: la matriz $A \in M_{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si existe una base de $\Re^n$ formada por autovectores de "A".

$\boxed{\Rightarrow}$

Sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\ldots,\lambda_n$ los autovalores de "A" (puede haberlos repetidos).
Si "A" es diagonalizable, hay una matriz regular "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$, siendo "D" la matriz diagonal formada por los autovalores de "A":

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots.. & 0 \\ \vdots & :::: & 0 \\ 0 & :::: & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sea $\overline{h}_k \in \Re^n$ el correspondiente a la k-ésima columna de "C":

Expresamos "C" mediante "bloques"

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & \ldots & c_{2k} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & :::: & \vdots & :::: & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \ldots & \uparrow & \ldots & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \ldots & \overline{h}_k & \ldots & \overline{h}_n \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \overline{h}_1 & \ldots & \overline{h}_k & \ldots & \overline{h}_n \end{bmatrix}$$

Como "C" tiene determinante no nulo, los "n" vectores $\overline{h}_1,\ldots,\overline{h}_k,\ldots,\overline{h}_n$ son LI, por lo que forman una base de $\Re^n$.

Veamos que $\overline{h}_1,\ldots,\overline{h}_k,\ldots,\overline{h}_n$ son autovectores de "A": como $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$, es $A \bullet C = C \bullet D$, y siendo

$$A \bullet C = A \bullet \begin{bmatrix} \overline{h}_1 & \ldots & \overline{h}_k & \ldots & \overline{h}_n \end{bmatrix}$$

y

$$C \bullet D = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & \ldots & c_{2k} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & :::: & \vdots & :::: & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \ldots & \uparrow & \ldots & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \ldots & \overline{h}_k & \ldots & \overline{h}_n \end{matrix} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots.. & 0 \\ \vdots & :::: & 0 \\ 0 & :::: & \lambda_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \lambda_1.c_{11} & \ldots & \lambda_k.c_{1k} & \ldots & \lambda_n.c_{1n} \\ \lambda_1.c_{21} & \ldots & \lambda_k.c_{2k} & \ldots & \lambda_n.c_{2n} \\ \vdots & :::: & \vdots & :::: & \vdots \\ \lambda_1.c_{n1} & \ldots & \lambda_k.c_{nk} & \ldots & \lambda_n.c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \ldots & \uparrow & \ldots & \uparrow \\ \lambda_1 \bullet \overline{h}_1 & \ldots & \lambda_k \bullet \overline{h}_k & \ldots & \lambda_n \bullet \overline{h}_n \end{matrix} \end{array} =$$

expresando $C \bullet D$ mediante "bloques"

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 \bullet \overline{h}_1 & \ldots & \lambda_k \bullet \overline{h}_k & \ldots & \lambda_n \bullet \overline{h}_n \end{bmatrix}$$

al exigir que $A \bullet C = C \bullet D$, resulta:

$$A \bullet \left[\bar{h}_1 \quad .... \quad \bar{h}_k \quad .... \quad \bar{h}_n \right] = \left[\lambda_1 \bullet \bar{h}_1 \quad .... \quad \lambda_k \bullet \bar{h}_k \quad .... \quad \lambda_n \bullet \bar{h}_n \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[A \bullet \bar{h}_1 \quad .... \quad A \bullet \bar{h}_k \quad .... \quad A \bullet \bar{h}_n \right] = \left[\lambda_1 \bullet \bar{h}_1 \quad .... \quad \lambda_k \bullet \bar{h}_k \quad .... \quad \lambda_n \bullet \bar{h}_n \right]$$

lo que indica que es $A \bullet \bar{h}_k = \lambda_k \bullet \bar{h}_k \ (k = 1,2,\ldots,n)$; o sea, $\bar{h}_k$ es autovector del autovalor λ_k.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supongamos que $\bar{h}_1,..,\bar{h}_k,..,\bar{h}_n$ son autovectores de "A" y forman una base de $\Re^n$. Sea "C" la matriz cuadrada cuya k-ésima columna $(k = 1,2,\ldots,n)$ es el vector $\bar{h}_k$:

$\boxed{\text{Expresamos "C" mediante "bloques"}}$

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & .... & c_{1k} & .... & c_{1n} \\ c_{21} & .... & c_{2k} & .... & c_{2n} \\ \vdots & :::: & \vdots & :::: & \vdots \\ c_{n1} & .... & c_{nk} & .... & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & .... & \uparrow & .... & \uparrow \\ \bar{h}_1 & .... & \bar{h}_k & .... & \bar{h}_n \end{matrix} \end{array} = \left[\bar{h}_1 \quad .... \quad \bar{h}_k \quad .... \quad \bar{h}_n \right]$$

Como los vectores $\bar{h}_1,..,\bar{h}_k,..,\bar{h}_n$ son una base de $\Re^n$, la matriz "C" tiene determinante no nulo; y por tanto, existe la matriz C^{-1}. Es:

$$A \bullet C = A \bullet \left[\bar{h}_1 \quad .... \quad \bar{h}_k \quad .... \quad \bar{h}_n \right] =$$
$$= \left[A \bullet \bar{h}_1 \quad .... \quad A \bullet \bar{h}_k \quad .... \quad A \bullet \bar{h}_n \right] =$$

$\boxed{\bar{h}_k \text{ es autovector de "A"} \Rightarrow \exists \lambda_k \ / \ A \bullet \bar{h}_k = \lambda_k \bullet \bar{h}_k, \ \forall k = 1,2,\ldots,n}$

$$= \left[\lambda_1 \bullet \bar{h}_1 \quad .... \quad \lambda_k \bullet \bar{h}_k \quad .... \quad \lambda_n \bullet \bar{h}_n \right] =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \lambda_1.c_{11} & .... & \lambda_k.c_{1k} & .... & \lambda_n.c_{1n} \\ \lambda_1.c_{21} & .... & \lambda_k.c_{2k} & .... & \lambda_n.c_{2n} \\ \vdots & :::: & \vdots & :::: & \vdots \\ \lambda_1.c_{n1} & .... & \lambda_k.c_{nk} & .... & \lambda_n.c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & .... & \uparrow & .... & \uparrow \\ \lambda_1 \bullet \bar{h}_1 & .... & \lambda_k \bullet \bar{h}_k & .... & \lambda_n \bullet \bar{h}_n \end{matrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & .... & c_{1k} & .... & c_{1n} \\ c_{21} & .... & c_{2k} & .... & c_{2n} \\ \vdots & :::: & \vdots & :::: & \vdots \\ c_{n1} & .... & c_{nk} & .... & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & .... & \uparrow & .... & \uparrow \\ \bar{h}_1 & .... & \bar{h}_k & .... & \bar{h}_n \end{matrix} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 & ..... & 0 \\ \vdots & ::::: & \vdots \\ 0 & ::::: & \lambda_n \end{bmatrix} = C \bullet D$$

Como $A \bullet C = C \bullet D$ y existe C^{-1}, es $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$ (siendo "D" la matriz diagonal formada por los autovalores de "A") $\Rightarrow$ "A" es diagonalizable.

7.7 FORMA CANÓNICA DE JORDAN

Se llama caja o bloque de Jordan a toda matriz cuadrada tal que todos los elementos de su diagonal principal son iguales, siendo iguales a 1 los elementos de la primera paralela superior a dicha diagonal, y los demás elementos de la matriz son nulos. ***Por ejemplo,*** las siguientes matrices son cajas de Jordan:

$$\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Forma canónica de Jordan: si $A \in M_{n\times n}$ no es diagonalizable, eso significa que no hay ninguna matriz diagonal semejante a "A"... pero siempre existe una matriz "J" semejante a "A", tal que "J" tiene en la diagonal principal los autovalores de "A", siendo unos o ceros los elementos situados en la primera paralela superior a dicha diagonal, y ceros los demás elementos de "J".

La matriz "J", cuadrada de orden "n", puede expresarse de la forma

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

donde "r" es la suma de las dimensiones de los subespacios de autovectores de los autovalores de "A" y las J_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ son cajas de Jordan.

El número de veces que cada autovalor de "A" aparece en la diagonal principal de "J" coincide con la multiplicidad algebraica del autovalor, y el número de cajas de Jordan que "aporta" dicho autovalor coincide con su multiplicidad geométrica.

Si "A" es diagonalizable, la matriz "J" es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A".

Si "A" es cuadrada de orden 3 no diagonalizable, por fuerza se presenta uno de los siguientes casos:

1) "A" tiene un autovalor triple λ

- Si $\dim.L(\lambda) = 2$, la matriz "J" está formada por 2 cajas de Jordan (el número de cajas de Jordan coincide con $\dim.L(\lambda)$). Así, según nos guste, elegimos entre las siguientes dos opciones:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ó } J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{bmatrix}$$

- Si $\dim.L(\lambda) = 1$, la matriz "J" está formada por 1 caja de Jordan (el número de cajas de Jordan coincide con $\dim.L(\lambda)$). Así, es:

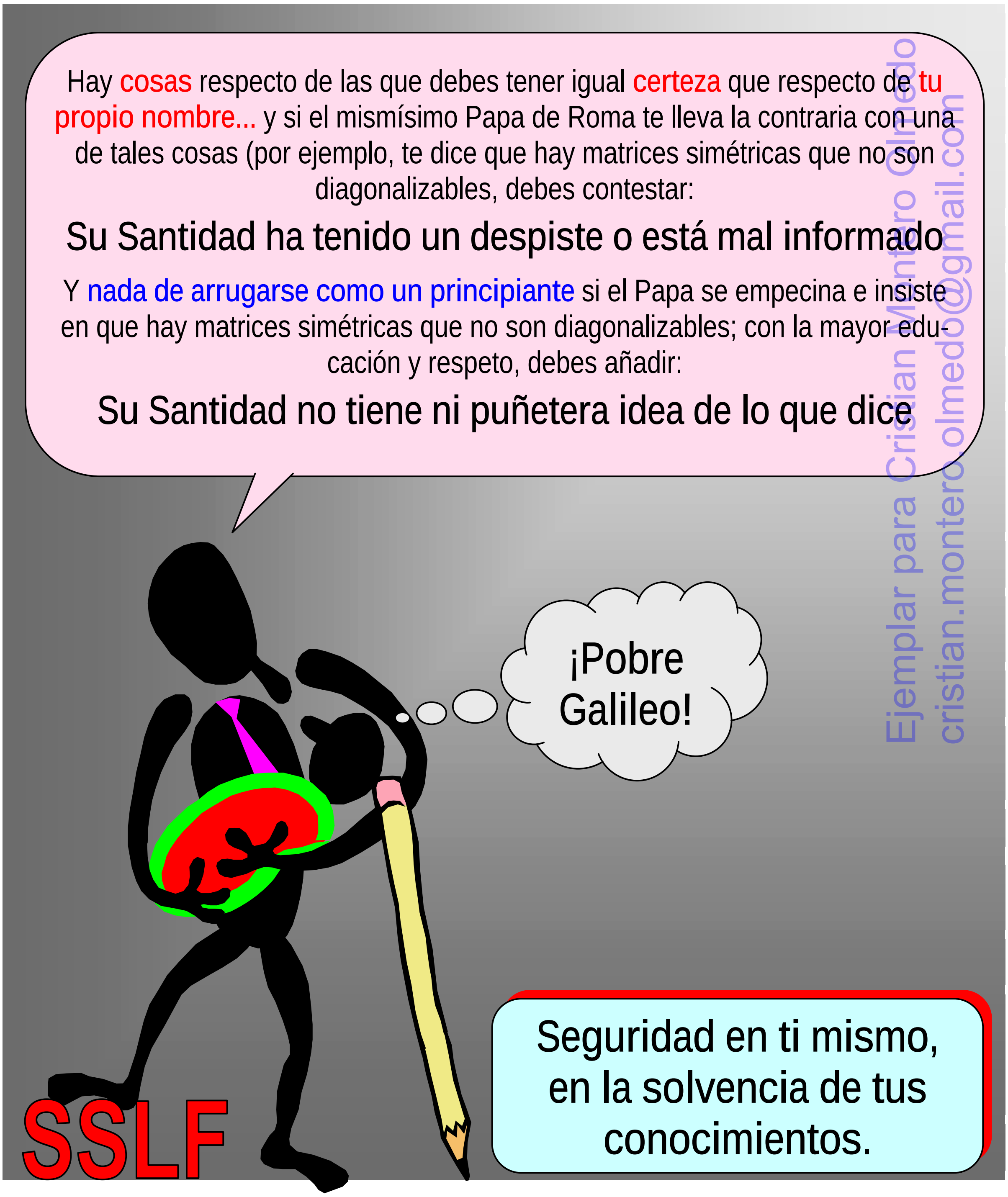
$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

2) "A" tiene un autovalor simple λ_1 y otro doble λ_2

- Si $\dim . L(\lambda_2) = 1$, la matriz "J" está formada por 2 cajas de Jordan (una correspondiente al autovalor simple λ_1 y otra al autovalor doble λ_2).
  Así, según nos guste, podemos elegir entre las siguientes:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ ó } J = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Para aprender a determinar la matriz "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = J$ consulta los ejercicios resueltos en los vídeos de la página web.



EJERCICIOS RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA PÁGINA WEB

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ CUADRADA

Ejercicio 03.01

Determine los autovalores y los autovectores de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 03.02

Determine los autovalores y los autovectores de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 03.03

Determine los autovalores y los autovectores de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 03.04

Determine los autovalores y los autovectores de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 03.05

Determine los autovalores y los autovectores de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 03.06

Determine los autovalores y los autovectores de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 03.07

Determine los autovalores y los autovectores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 03.08

Se dice que $A \in M_{n\times n}$ **es idempotente si** $A^2 = A$.
Demuestre que 0 y 1 son los únicos posibles autovalores de una matriz idempotente.

Ejercicio 03.09

Halle $A \in M_{3\times 3}$ **si** $\overline{p} = (1;0;1)$ **es autovector de** $\lambda = 2$, $\overline{q} = (0;0;1)$ **es autovector de** $\lambda = 3$, **y** $\overline{c} = (1;1;0)$ **es autovector de** $\lambda = 1$.

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

Ejercicio 04.01

Si es posible, diagonalice la matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3\\ 3 & 2 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Ejercicio 04.02

Si es posible, diagonalice la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Ejercicio 04.03

Si es posible, diagonalice la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Ejercicio 04.04

¿Para qué valores de "a" y "b" es diagonalizable $H=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & a\\ 3 & 0 & b\end{bmatrix}$?

Ejercicio 04.05

Si es posible, diagonalice la matriz $A=\begin{bmatrix}k & 1 & 0\\ 1 & k & 0\\ 1 & 1 & k\end{bmatrix}$.

Ejercicio 04.06

Si es posible, diagonalice la matriz $A=\begin{bmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{bmatrix}$, $a,b\neq 0$.

Ejercicio 04.07

Si es posible, diagonalice la matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

POTENCIAS DE UNA MATRIZ CUADRADA

Ejercicio 05.01

Si $A=\begin{bmatrix}0'2 & 0'4 & 0'4\\ 0'2 & 0'5 & 0'3\\ 0'6 & 0'1 & 0'3\end{bmatrix}$, **calcule** A^{1000}.

Ejercicio 05.02

En la actualidad, la empresa "A" controla el 60 % del mercado, y "B" y "C" se reparten el resto en partes iguales. De un año para otro, "B" consigue hacerse con el 20 % del mercado controlado anteriormente por "A", y con el 30 % del de "C". A su vez, "A" consigue arrebatar el 40 % del mercado controlado por sus competidores; y "C" consigue el 60 % del mercado controlado anteriormente por "A" y el 10 % del controlado por "B". Si esta dinámica se mantiene en el tiempo, determine la distribución del mercado a largo plazo.

Ejercicio 10.01

1) Si $A_{3\times 3}$ tiene un autovalor triple y no es diagonalizable, analice la correspondiente forma canónica de Jordan.

2) Si $A_{3\times 3}$ tiene un autovalor doble y otro simple y no es diagonalizable, analice la correspondiente forma canónica de Jordan.

Ejercicio 10.02

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, determine la forma canónica de Jordan.

Ejercicio 10.03

Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, determine la forma canónica de Jordan.

Ejercicio 10.04

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, determine la forma canónica de Jordan.

AUTOCOMPROBACIÓN

Las soluciones están en los test de la web.

01) Se dice que λ es un autovalor (valor propio o valor característico) de la matriz $A \in M_{n\times n}$ si en $\Re^n$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $A \bullet \overline{x} = \lambda \bullet \overline{x}$.

a) Verdadero ; b) Falso

02) Los autovalores de $A \in M_{n\times n}$ son las soluciones de la ecuación $|A - \lambda \bullet I| = 0$, que se llama ecuación característica de "A".

a) Verdadero ; b) Falso

03) Si $A \in M_{n\times n}$, el polinomio $P(\lambda) = |A - \lambda \bullet I|$ se llama característico de "A".

a) Verdadero ; b) Falso

04) La suma de los autovalores de $A \in M_{n\times n}$ coincide con $Tr(A)$.

a) Verdadero ; b) Falso

05) El producto de los autovalores de $A \in M_{n\times n}$ coincide con $|A|$.

a) Verdadero ; b) Falso

06) Si λ es un autovalor de "A" y $\overline{x} \neq \overline{0}$ es tal que $A \bullet \overline{x} = \lambda \bullet \overline{x}$, se dice que $\overline{x}$ es un autovector (vector propio o característico) de "A" asociado al autovalor λ.

a) Verdadero ; b) Falso

07) Si $A \in M_{n\times n}$, los autovectores del autovalor λ (incluyendo al vector cero, que también cumple la condición $A \bullet \overline{x} = \lambda \bullet \overline{x}$) constituyen un subespacio de $\Re^n$.

a) Verdadero ; b) Falso

08) Llamamos multiplicidad algebraica (MA) de un autovalor de la matriz $A \in M_{n\times n}$ al número de veces que aparece como solución de la ecuación característica de "A".

a) Verdadero ; b) Falso

09) Llamamos multiplicidad geométrica (MG) de un autovalor λ de la matriz $A \in M_{n\times n}$ a la dimensión de su subespacio de autovectores asociados a λ.

a) Verdadero ; b) Falso

10) Si la multiplicidad algebraica del autovalor λ de la matriz $A \in M_{n\times n}$ es "k", la multiplicidad geométrica del autovalor puede ser 1, 2, ... , k.

a) Verdadero ; b) Falso

11) Si la matriz $A \in M_{n\times n}$ es simétrica, la multiplicidad algebraica de cada autovalor λ coincide con su multiplicidad geométrica.

a) Verdadero ; b) Falso

12) Se dice que las matrices $A, P \in M_{n\times n}$ son semejantes si existe $C \in M_{n\times n}$ tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = P$.

a) Verdadero ; b) Falso

13) Se dice que $A \in M_{n\times n}$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal; es decir, existe $C \in M_{n\times n}$ tal que la matriz $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es diagonal.

a) Verdadero ; b) Falso

14) La matriz $A \in M_{n\times n}$ es diagonalizable si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones, que son equivalentes.

- La MA de cada autovalor de "A" coincide con su MG.
- Hay una base de $\Re^n$ formada por autovectores de "A".
- $\Re^n$ es suma directa de los subespacios de autovectores.

En cualquier caso, si "A" es simétrica o todos sus autovalores son distintos, podemos garantizar que es diagonalizable.

a) Verdadero ; b) Falso

15) Si la matriz $A \in M_{n\times n}$ es diagonalizable, para construir (por columnas) una matriz $C \in M_{n\times n}$ tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es diagonal, cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores.

a) Verdadero ; b) Falso

16) Si la matriz $A \in M_{n\times n}$ es diagonalizable, es semejante a toda matriz diagonal que en la diagonal principal tenga los autovalores de "A".

a) Verdadero ; b) Falso

17) Sea $A \in M_{n\times n}$ diagonalizable y $C \in M_{n\times n}$ tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$ es diagonal. Si "k" es un número natural, es $A^k = C \bullet D^k \bullet C^{-1}$.

a) Verdadero ; b) Falso

18) Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante, el mismo rango, la misma traza y el mismo polinomio característico.

a) Verdadero ; b) Falso

19) Una matriz cuadrada tiene los mismos autovalores que su traspuesta.

a) Verdadero ; b) Falso

20) SI λ es autovalor de la matriz "A" y $k \in \Re$, entonces $\lambda . k$ es autovalor de $\lambda \bullet A$.

a) Verdadero ; b) Falso

21) SI λ es autovalor de la matriz "A" y $k \in \Re$, entonces $\lambda + k$ es autovalor de $A + k \bullet I$.

a) Verdadero ; b) Falso

22) SI λ es autovalor de la matriz regular "A", entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}.

a) Verdadero ; b) Falso

23) SI λ es autovalor de la matriz "A" y $k \in \mathbb{N}$, entonces λ^k es autovalor de A^k.

a) Verdadero ; b) Falso

24) SI la matriz "A" es simétrica sus autovalores son números reales.

a) Verdadero ; b) Falso

25) Autovectores asociados a autovalores distintos de la matriz "A" son linealmente independientes.

a) Verdadero ; b) Falso

26) Si la matriz "A" es simétrica, autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

a) Verdadero ; b) Falso

27) Sea "A" una matriz diagonalizable de orden 3.

a) "A" tiene 3 autovalores distintos
b) "A" es simétrica
c) Pueden encontrarse 3 autovectores de "A" linealmente independientes

28) Sea "A" una matriz diagonalizable de orden 3.

a) "A" no siempre tiene 3 autovectores LI
b) "A" es diagonal
c) Si λ es autovalor doble de "A", el subespacio $L(\lambda)$ tiene dimensión 2

29) Sea $A \in M_{3\times3}$ tal que $A \bullet \overline{x} = \overline{x}$, con $\overline{x} \in \Re^3$, $\overline{x} \neq \overline{0}$.

a) $A = I$; b) $\lambda = 1$ es autovalor de "A"
c) $\lambda = 0$ es autovalor de "A"

30) La matriz "A" es semejante a $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) $rg(A) = 1$; b) $rg(A) = 2$; c) $rg(A) = 3$

31) Sea "A" una matriz simétrica de orden "n".

a) Todos los autovalores de "A" son reales y simples
b) "A" es diagonal
c) Existe $C_{n\times n}$ regular tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es diagonal

32) Siendo $\lambda = 2$ y $\lambda = -3$ sendos autovalores de $A_{3\times3}$, sea $\overline{u}$ un autovector de $\lambda = 2$ y $\overline{v}$ un autovector de $\lambda = -3$.

a) $\overline{u} + \overline{v}$ es autovector de $\lambda = -1$
b) $-\overline{u}$ es autovector de $\lambda = 3$
c) $-\overline{u}$ es autovector de $\lambda = -3$

33) El polinomio característico de "A" es $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es diagonalizable
c) "A" es diagonalizable si y sólo si es simétrica

34) Sea "A" una matriz simétrica de orden "n".

a) Todos sus autovalores son reales y simples
b) "A" es ortogonal
c) "A" es semejante a una matriz diagonal

35) Siendo $\lambda = 3$ y $\lambda = -2$ autovalores de una matriz cuadrada, sea $\overline{u}$ un autovector de $\lambda = 3$ y $\overline{v}$ un autovector de $\lambda = -2$.

a) $\overline{u} + \overline{v}$ no es un autovector ; b) $2 \bullet \overline{u}$ es autovector de $\lambda = 6$
c) $-\overline{u}$ es autovector de $\lambda = -3$

36) Sea "A" una matriz cuadrada de orden 3 con traza 9. Si $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$ son dos de sus autovalores, el otro autovalor es:

a) $\lambda = 2$; b) No puede determinarse
c) Las anteriores son falsas

37) El polinomio característico de "A" es $P(\lambda) = -(\lambda + 1).(1 + \lambda^2)$.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es simétrica
c) Las anteriores son falsas

38) Si $A \bullet \overline{x} = \lambda \bullet \overline{x}$, como $A \bullet (k \bullet \overline{x}) = \lambda \bullet (k \bullet \overline{x})$, $k \neq 0$, entonces:

a) $k \bullet \overline{x}$ es autovector del autovalor "k.λ"
b) $k \bullet \overline{x}$ es autovector de autovalor λ
c) $k \bullet \overline{x}$ no es autovector

39) Sea λ un autovalor triple de una matriz "A".

a) λ tiene 3 autovectores LI
b) λ tiene como máximo 3 autovectores
c) λ tiene como máximo 3 autovectores LI

40) Si dos matrices son semejantes, es falso que:

a) Tienen el mismo rango y la misma traza
b) Tienen la misma diagonal principal
c) Tienen el mismo determinante y la misma traza

41) Siendo $A_{3\times3}$ sea $C_{3\times3}$ tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) $rg(A) = 2$; b) "A" es diagonalizable
c) "A" no es diagonalizable

42) Sea $P(\lambda) = (\lambda + 1).(k - \lambda^2)$ el polinomio característico de una matriz "A" simétrica.

a) "A" es diagonalizable $\forall k \in \Re$
b) "A" no es diagonalizable $\forall k \in \Re$
c) Para saber si "A" es diagonalizable debemos conocer los autovectores

43) Sea $A_{3\times 3}$ con determinante 8. Si $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$ son dos de sus autovalores, el otro autovalor es:

a) $\lambda = 2$; b) No puede determinarse ; c) $\lambda = 1$

44) Las matrices $M = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$:

a) Son semejantes porque tienen la misma traza.
b) Son semejantes porque tienen la misma traza y el mismo rango.
c) No son semejantes.

45) Sea "A" una matriz cuadrada de orden 3.

a) Si $rg(A) = 3$, existe $\overline{x} \in \Re^3$ $(\overline{x} \neq \overline{0})$ tal que $A \bullet \overline{x} = \overline{0}$
b) Si $rg(A) = 2$, existe $\overline{x} \in \Re^3$ $(\overline{x} \neq \overline{0})$ tal que $A \bullet \overline{x} = \overline{0}$
c) Si $rg(A) = 1$, no existe $\overline{x} \in \Re^3$ $(\overline{x} \neq \overline{0})$ tal que $A \bullet \overline{x} = \overline{0}$

46) Sea $A_{3\times 3}$ diagonalizable, siendo $\lambda = -1$ autovalor triple de A. Sea $P_{3\times 3}$ tal que $P^{-1} \bullet A \bullet P = D$, siendo D la matriz diagonal de los autovalores de "A".

a) $A^3 = -A$; b) $A^3 = P^3 \bullet A^3 \bullet (D^{-1})^3$; c) $A^3 = A$

47) Sea $A_{3\times 3}$ diagonalizable con autovalores $\lambda = 4$ y $\lambda = 3$ (doble). Señale la falsa:

a) $\lambda = 3$ tiene 2 autovectores LI ; b) Hay 3 autovectores LI
c) Puede que no haya 2 autovectores LI asociados a $\lambda = 3$

48) El polinomio característico de una matriz "A" es $\lambda^2 - 5.\lambda + 6$.

a) $|A| = 2$; b) "A" es diagonalizable
c) "A" es de orden 3

49) Siendo $A_{3\times 3}$ una matriz singular, ¿cuál de las siguientes opciones no puede corresponder a sus autovalores?

a) $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$ (doble)
b) $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ y $\lambda = 3$
c) $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$

50) Siendo "A" y "B" matrices semejantes, es falso que:

a) Tienen igual rango ; b) $|A - \lambda \bullet I| = |B - \lambda \bullet I|$
c) $|A| \neq |B|$

51) Si "A" es una matriz simétrica, es falso que:

a) Es regular ; b) Es diagonalizable
c) Sus autovalores son reales

52) Sea "A" una matriz singular.

a) "A" no es diagonalizable ; b) "A" es diagonalizable
c) $\lambda = 0$ es autovalor de "A"

53) Siendo "A" y "B" matrices semejantes y regulares, señale la opción falsa.

a) A^{-1} y B^{-1} son semejantes ; b) $|A^{-1}| = |B^{-1}|$; c) $A^{-1} = B^{-1}$

54) Sean "A" y "B" matrices semejantes, siendo 1, 2 y 3 los autovalores de "A".

a) "B" es regular ; b) "B" es singular
c) "B" es simétrica

55) Sea $A_{4\times 4}$ con autovalores 2 (doble) y -1 (doble), siendo $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ autovectores de 2 y $\overline{v}_3$ y $\overline{v}_4$ autovectores de -1.

a) $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ son LI ; b) $\overline{v}_3$ y $\overline{v}_4$ son LI
c) $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_3$ son LI

56) Sea $A_{3\times 3}$ con autovalores -1 (doble) y 2, siendo (1;1;0) y $(-1;0;0)$ autovectores de -1 y $L(\lambda=2)=\{(x;y,z)/x=y=0\}$.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es diagonalizable
c) No puede saberse si "A" es diagonalizable

57) Sea $A_{3\times 3}$ con autovalores -1 (doble) y 2, siendo (1;1;0) y (2;2;0) autovectores de -1 y $L(\lambda=2)=\{(x;y,z)/x=y=0\}$.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es diagonalizable
c) No puede saberse si "A" es diagonalizable

58) Sean "A" y "B" matrices semejantes, siendo $|A|=10$. Señale la falsa:

a) $rg(A)=rg(B)$; b) $|A\bullet B|=10$; c) $|A\bullet B^{-1}|=1$

59) El polinomio característico de la matriz "A" es $P(\lambda)=-\lambda^3+\lambda$.

a) $|A|=0$; b) $|A|=1$; c) $rg(A)=3$

60) Sea "A" una matriz ortogonal.

a) $\lambda=0$ es autovalor de "A"
b) $\lambda=0$ no es autovalor de "A"
c) $\lambda=0$ puede ser autovalor de "A"

61) Sea "A" una matriz cuadrada.

a) $A+A^t$ es diagonalizable
b) $A+A^t$ no es diagonalizable
c) $A+A^t$ puede no ser diagonalizable

62) Sea "A" una matriz cuadrada.

a) $A\bullet A^t$ es diagonalizable
b) $A\bullet A^t$ no es diagonalizable
c) $A\bullet A^t$ puede no ser diagonalizable

63) Si "A" es una matriz idempotente (o sea, $A^2=A$), sus autovalores son:

a) Imaginarios ; b) 0 ó 1
c) Las anteriores son falsas

64) Sea $A_{2\times 2}$ con determinante negativo.

a) No es diagonalizable ; b) Es diagonalizable
c) Las anteriores son falsas

65) Una matriz simétrica $A_{3\times3}$ tiene un autovalor doble λ_1 y otro simple λ_2. ¿En qué caso podríamos estar ante los respectivos subespacios de autovectores?

a) $L(\lambda_1)=\{(\theta+\mu;\theta;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$ y $L(\lambda_2)=\{(\delta;\delta;0),\ \forall\,\delta\in\Re\}$

b) $L(\lambda_1)=\{(\theta;\theta;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$ y $L(\lambda_2)=\{(\delta;\delta;0),\ \forall\,\delta\in\Re\}$

c) $L(\lambda_1)=\{(\mu;\theta;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$ y $L(\lambda_2)=\{(\delta;0;-\delta),\ \forall\,\delta\in\Re\}$

66) Una matriz simétrica $A_{3\times3}$ tiene un autovalor doble λ_1 y otro simple λ_2. ¿En qué caso no podríamos estar ante los respectivos subespacios de autovectores?

a) $L(\lambda_1)=\{(\theta+\mu;-\theta-\mu;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$ y $L(\lambda_2)=\{(\delta;\delta;0),\forall\,\delta\in\Re\}$

b) $L(\lambda_1)=\{(\theta;\theta;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$ y $L(\lambda_2)=\{(\delta;-\delta;0),\ \forall\,\delta\in\Re\}$

c) $L(\lambda_1)=\{(\mu;\theta;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$ y $L(\lambda_2)=\{(\delta;\delta;-\delta),\ \forall\,\delta\in\Re\}$

67) Siendo $A_{2\times2}$, los autovalores de A^2 podrían ser:

a) $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1$; b) $\lambda_1=0,\ \lambda_2=2$; c) $\lambda_1=4,\ \lambda_2=-7$

68) Si λ es autovalor triple de la matriz diagonalizable $A_{4\times4}$, podría ser:

a) $L(\lambda)=\{(\theta+\mu;\theta+\varepsilon;\theta+\varepsilon;\theta+\mu),\ \forall\,\theta,\varepsilon,\mu\in\Re\}$

b) $L(\lambda)=\{(\theta+\mu;\varepsilon+\mu;0;0),\ \forall\,\theta,\varepsilon,\mu\in\Re\}$

c) $L(\lambda)=\{(\varepsilon+\mu;\varepsilon;\varepsilon+\mu;\theta+\mu),\ \forall\,\theta,\varepsilon,\mu\in\Re\}$

69) Sean "A" y "B" matrices cuadradas equidimensionales. Si alguna es invertible:

a) El polinomio característico $A\bullet B$ coincide con el de $B\bullet A$

b) $A\bullet B=B\bullet A$; c) Las anteriores son falsas

70) Sea $A_{3\times3}$ con un autovalor doble λ_1 y otro simple λ_2.
Si $L(\lambda_1)=\{(\theta;\theta;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$, ¿cuál de los siguientes vectores podría sea autovector de λ_2 ?

a) $\overline{u}=(1;1;1)$; b) $\overline{v}=(2;2;1)$; c) $\overline{w}=(1;0;2)$

71) Sea $P(\lambda)=(\lambda-1).(\lambda+1)$ el polinomio característico de $A_{2\times2}$.

a) $tr(A)=0$; b) $|A|=1$; c) "A" no es diagonalizable

72) Sea $H_{3\times3}$ simétrica con los autovalores distintos y "D" una matriz diagonal semejante a "H".
¿En qué caso podría ser $P^{-1}\bullet H\bullet P=D$?

a) $P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}$; b) $P=\begin{bmatrix}3&1&4\\0&-1&1\\1&2&0\end{bmatrix}$; c) $P=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$

73) Si λ es autovalor de "H", señale un autovalor de $H-I$.

a) $\lambda-1$; b) $\lambda+1$; c) λ

74) Sean "M" y "N" semejantes, siendo "M" diagonalizable.

a) "N" es diagonalizable y tiene iguales autovectores que "M".

b) "N" es diagonalizable y tiene iguales autovalores que "M"

c) "N" puede no ser diagonalizable.

75) De los siguientes conjuntos de autovalores, ¿cuál es necesariamente de una matriz diagonalizable de orden 3?

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$

c) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 0$

76) Sea $H_{3\times3}$ con $Tr(H) > 0$ y $|H| < 0$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Re$ son los autovalores de "A", ¿cuál puede ser su signo?

a) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$; b) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$

c) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$

77) Sea $A_{n\times n}$ tal que uno de sus autovalores es $\lambda = 0$.

a) $\lambda = 0$ también es valor propio de A^t

b) $\lambda = 0$ es valor propio de $A + B$ para toda matriz $B_{n\times n}$

c) En general, las anteriores son falsas

78) Sea $A_{n\times n}$ tal que uno de sus autovalores es $\lambda = 0$. Sea $B_{n\times n}$.

a) $\lambda = 0$ es autovalor de $A \bullet B$

b) $\lambda = 0$ es aautovalor de $A - B$

c) En general, las anteriores son falsas

79) Sea $A_{2\times2}$ tal que $|A| = 2$ y $Tr(A) = 3$.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es diagonalizable

c) No podemos saber si "A" es no diagonalizable

80) Los autovalores de una matriz $A_{3\times3}$ son 1, 0 y -1.

a) Los autovalores de A^{-1} son los mismos

b) No existe A^{-1}

c) A^{-1} es diagonalizable

81) Los autovalores de una matriz $A_{3\times3}$ son 1, 2 y -1.

a) Los autovalores de A^{-1} son 1, 1/2 y -1 ; b) No existe A^{-1}

c) A^{-1} no es diagonalizable

82) Sea $A_{3\times3}$ con autovalores no todos nulos y $Tr(A) = |A| = 0$.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es un diagonalizable

c) Forzosamente "A" es la matriz nula

83) Sea $A_{3\times3}$ singular tal que $Tr(A) = 5$ y $\lambda = 2$ es autovalor.

a) "A" no es diagonalizable ; b) "A" es diagonalizable

c) $\lambda = 2$ es un autovalor doble de "A"

84) Sean λ_1 y λ_2 autovalores distintos de una matriz "A", siendo $L(\lambda_1) = <(1;0;1)>$ y $L(\lambda_2) = <(0;1;1)>$.

a) "A" es diagonalizable ; b) "A" no es simétrica

c) "A" no es ortogonal

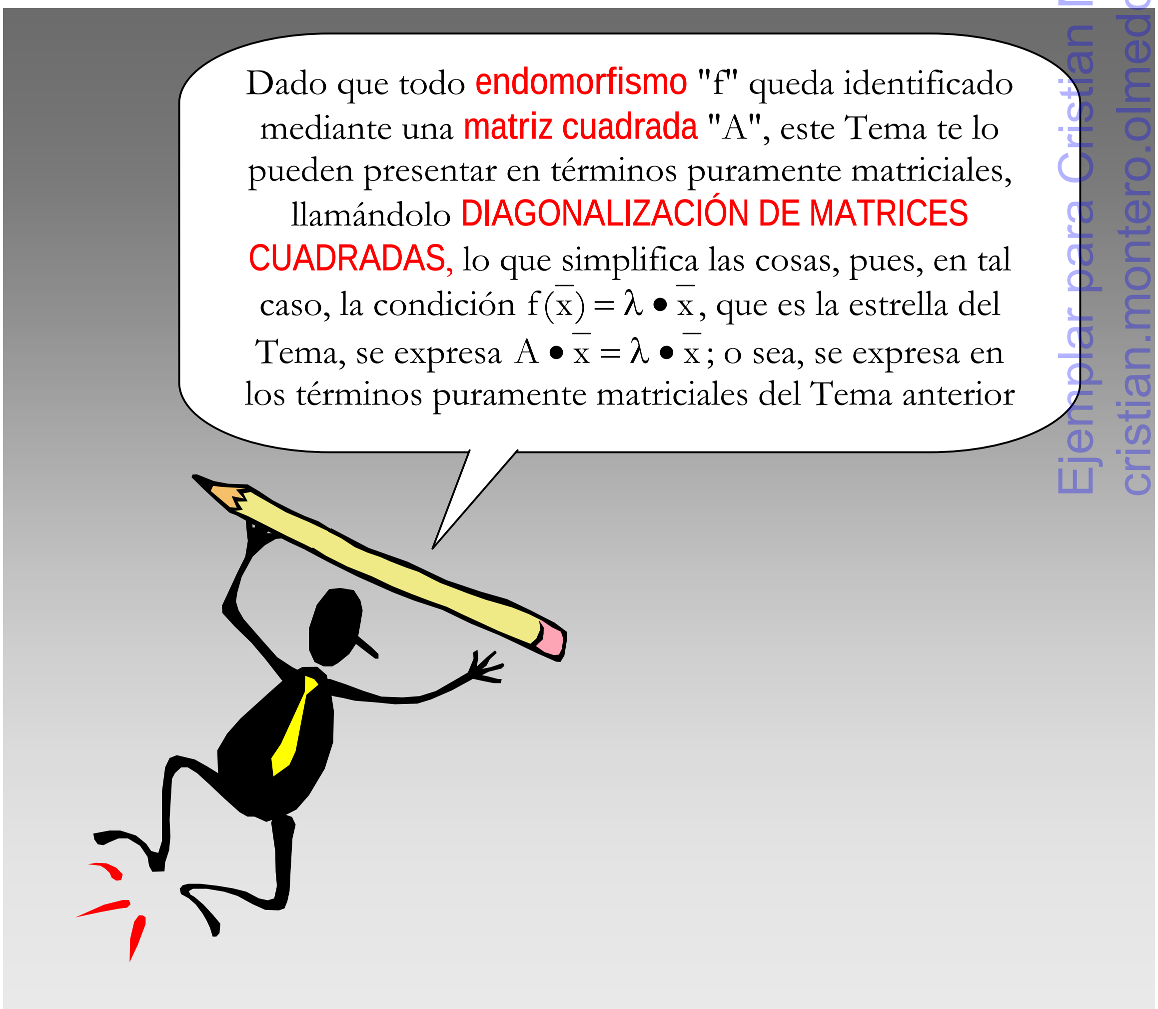
85) Sean λ_1 y λ_2 autovalores distintos de una matriz "A", siendo $L(\lambda_1)$ y $L(\lambda_2)$ sus respectivos subespacios de autovectores.

a) $L(\lambda_1) \cap L(\lambda_2) = \varnothing$; b) $L(\lambda_1) \cap L(\lambda_2) = \{\bar{0}\}$

c) En general, no se cumplen a) ni b)

Tema 8
Diagonalización de endomorfismos

8.01 Autovalores y autovectores
8.02 Diagonalización de endomorfismos
8.03 Potencias de una matriz cuadrada
8.04 La semejanza de matrices y los endomorfismos
8.05 Teoremas diversos
8.06 Caja de Jordan
8.07 Forma canónica de Jordan



8.1 AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Recuerda: si V_n es un espacio vectorial de dimensión "n", un endomorfismo es una aplicación lineal de V_n en sí mismo; por tanto, para los endomorfismos vale todo lo estudiado sobre aplicaciones lineales, con la peculiaridad de que la matriz representativa de un endomorfismo $f: V_n \mapsto V_n$ es cuadrada de orden "n", pues los espacios inicial y final tienen dimensión "n". Como no somos masoquistas, salvo que se indique lo contrario, siempre que trabajemos con un endomorfismo, usaremos la misma base de referencia en los espacios inicial y final.

$$\begin{array}{ccc} V_n & \xrightarrow{f} & V_n \\ \bar{x} & \longrightarrow & f(\bar{x}) \end{array}$$

Autovalores

Si $f: V_n \mapsto V_n$ es un endomorfismo y "A" es su matriz asociada respecto de una base "B" de V_n, se dice que el número λ es un autovalor, valor propio o valor característico de "f" si en el espacio inicial hay vectores $\bar{x} \neq \bar{0}$ tales que $f(\bar{x}) = \lambda \bullet \bar{x}$.

$$\begin{array}{ccc} V_n & \xrightarrow{f} & V_n \\ \bar{x} & \longrightarrow & \lambda \bullet \bar{x} \end{array}$$

Por ejemplo, al afirmar que 17 es un autovalor de "f", se afirma que en el espacio inicial hay vectores $\bar{x} \neq \bar{0}$ tales que $f(\bar{x}) = 17 \bullet \bar{x}$.

Decimos que $\bar{x} \neq \bar{0}$ porque $\forall\lambda$ es $f(\bar{0}) = \bar{0} = \lambda \bullet \bar{0}$; o sea, el vector $\bar{0}$ satisface la condición $f(\bar{x}) = \lambda \bullet \bar{x}$ sea cual sea el valor de λ

Siendo "I" la matriz unidad de orden "n", los autovalores de "f" son las soluciones de la ecuación $|A - \lambda \bullet I| = 0$, llamada ecuación característica de "f".

En efecto, siendo "A" la matriz asociada a "f", es $f(\bar{x}) = A \bullet \bar{x}$, por tanto:

$$f(\bar{x}) = \lambda \bullet \bar{x} \Rightarrow A \bullet \bar{x} = \lambda \bullet \bar{x} \Rightarrow A \bullet \bar{x} - \lambda \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow (A - \lambda \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0}$$

Como $(A - \lambda \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0}$ es un SLH de "n" ecuaciones y "n" incógnitas (los "n" componentes de $\bar{x}$), tiene soluciones no triviales (recuerda que ha de ser $\bar{x} \neq \bar{0}$) sólo si la matriz de coeficientes es singular; o sea, sólo si $|A - \lambda \bullet I| = 0$.

De $P(\lambda) = |A - \lambda \bullet I|$ se dice que es el polinomio característico de "f".

Por extensión, si λ es un autovalor del endomorfismo "f" cuya matriz asociada es "A", también se dice que λ es un **autovalor, valor propio o valor característico** de "A". La **ecuación característica** de "A" es $|A - \lambda \bullet I| = 0$, y el **polinomio característico** de "A" es $P(\lambda) = |A - \lambda \bullet I|$

- Se llama multiplicidad algebraica (MA) de un autovalor al número de veces que aparece como solución de la ecuación característica $|A - \lambda \bullet I| = 0$.

- La suma de los autovalores coincide con la traza de "A", y su producto coincide con el determinante de "A".

- **Obvio:** para calcular los autovalores debemos calcular el determinante de la matriz $A - \lambda \bullet I$ que se obtiene al restar λ a los elementos de la diagonal principal de la matriz cuadrada "A".

  Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda \bullet I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{bmatrix}$$

Si "A" es una matriz cuadrada de orden "n", se llama menor principal de orden "k" de "A" a todo menor de orden "k" cuyos elementos sean simétricos respecto a la diagonal principal de "A". Obvio: los menores principales de orden 1 son los elementos de la diagonal principal de "A", y el único menor principal de orden "n" es el determinante de "A".

TRUCO DEL ALMENDRUCO: podemos calcular $|A - \lambda \bullet I|$ sin necesidad de escribir $A - \lambda \bullet I$, pues si "A" es cuadrada de orden "n", siendo "n" par, es:

$$|A - \lambda \bullet I| = \lambda^n - c_1.\lambda^{n-1} + c_2.\lambda^{n-2} + ... - c_{n-1}.\lambda + c_n$$

y siendo "n" impar, es:

$$|A - \lambda \bullet I| = -\lambda^n + c_1.\lambda^{n-1} - c_2.\lambda^{n-2} + ... - c_{n-1}.\lambda + c_n$$

donde:

$$\begin{aligned} &c_1 = Tr(A) = \text{suma de los menores principales de orden 1 de "A"} \\ &c_2 = \text{suma de los menores principales de orden 2 de "A"} \\ &\vdots \\ &c_{n-1} = \text{suma de los menores principales de orden } n-1 \text{ de "A"} \\ &c_n = |A| \end{aligned}$$

Ejemplos

- Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, es $Tr(A) = 1 + 8 = 9$ y $|A| = 2 \Rightarrow |A - \lambda \bullet I| = \lambda^2 - 9.\lambda + 2$

- Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, es:

$$|A - \lambda \bullet I| = -\lambda^3 + (1+5+9).\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \right).\lambda + |A|$$

$$|B - \lambda \bullet I| = -\lambda^3 + (5+8+0).\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} \right).\lambda + |B|$$

- Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$, es:

$$\left| A - \lambda \bullet I \right| = \lambda^4 - c_1.\lambda^3 + c_2.\lambda^2 - c_3.\lambda + \left| A \right|$$

siendo:

$c_1 =$ suma de menores principales de orden 1 de "A" $= Tr(A)$
$c_2 =$ suma de menores principales de orden 2 de "A"
$c_3 =$ suma de menores principales de orden 3 de "A"

O sea:

$$c_1 = 1 + 6 + 11 + 16$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Autovectores

Si λ es un autovalor del endomorfismo "f" y $\bar{x} \neq \bar{0}$ es tal que $f(\bar{x}) = \lambda \bullet \bar{x}$, o lo que es igual, $(A - \lambda \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0}$, se dice que $\bar{x}$ es un **autovector, vector propio o vector característico** de "f" asociado al autovalor λ.

- Los autovectores de λ, incluyendo al vector $\bar{0}$, que también satisface la condición $f(\bar{x}) = \lambda \bullet \bar{x}$, constituyen un subespacio del espacio inicial, pues toda combinación lineal de autovectores de λ es autovector de λ.

  En efecto: si $\bar{x}, \bar{y}$ son autovectores de λ es $f(\bar{x}) = \lambda \bullet \bar{x}$ y $f(\bar{y}) = \lambda \bullet \bar{y}$; así, si $\alpha, \beta \in \Re$, sucede que:

$$f(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}) \underset{\uparrow \atop \text{pues "f" es una aplicación lineal}}{=} \alpha \bullet f(\bar{x}) + \beta \bullet f(\bar{y}) = \alpha \bullet (\lambda \bullet \bar{x}) + \beta \bullet (\lambda \bullet \bar{y}) =$$
$$= \lambda \bullet (\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y})$$

  lo que demuestra que $\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}$ también es autovector de λ.

- Llamamos **multiplicidad geométrica (MG)** de un autovalor a la dimensión de su subespacio de autovectores.

- **Nota bene:** si la multiplicidad algebraica (MA) del autovalor λ es "k", su multiplicidad geométrica (MG) puede ser 1, 2, 3, ... , k−1, k.
  Por ejemplo, si la MA es 3, la MG puede ser 1, 2 ó 3.
  Según lo anterior, si la MA es 1, la MG también es 1.
- **Atent@:** si la matriz "A" es **simétrica,** la MA de cada autovalor coincide siempre con la MG.

FONEMATO 8.1.1

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo que respecto de la base canónica de $\Re^3$ tiene asociada la matriz "A". Calcule los autovalores y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

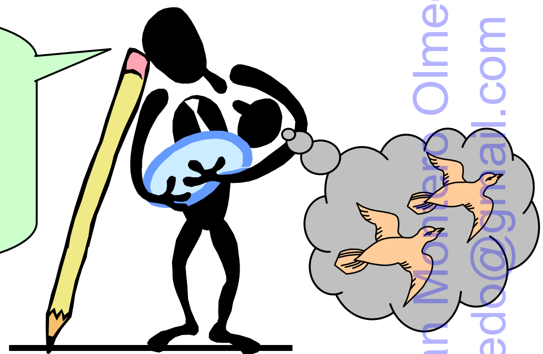
SOLUCIÓN

Autovalores: son las soluciones de la ecuación característica $|A - \lambda \bullet I| = 0$:

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\lambda^3 + (2+3+2).\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right).\lambda + |A| = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\lambda^3 + 7.\lambda^2 - 11..\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (doble)}, 5 \text{ (simple)}$$

Nunca olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A", y su producto coincide con $|A|$:

$$1+1+5 = 7 = Tr(A) \ ; \ 1.1.5 = 5 = |A|$$



Como $\lambda = 5$ es raíz simple de $|A - \lambda \bullet I| = 0$, su MA es 1; por tanto, puedes apostar tranquilamente la vida a que su MG (dimensión del subespacio de autovectores asociados a $\lambda = 5$) también es 1.

Como $\lambda = 1$ es raíz doble de $|A - \lambda \bullet I| = 0$, su MA es 2... y ahora no apostamos nada, porque como "A" no es simétrica, la MG de $\lambda = 1$ puede ser 1 ó 2, y hasta que no hagamos los cálculos no lo sabremos. Si "A" fuera simétrica podríamos asegurar a priori, sin hacer cálculos, que la MG de $\lambda = 1$ también es 2.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 5$ (simple)

El que $\lambda = 5$ sea autovalor de "f" significa que en el espacio inicial $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $f(\overline{x}) = 5 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A - 5 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $f(\overline{x}) = 5 \bullet \overline{x}$. Siendo $(x_1; x_2; x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A - 5 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denotando $L(\lambda = 5)$ al subespacio, como estaba previsto, es:

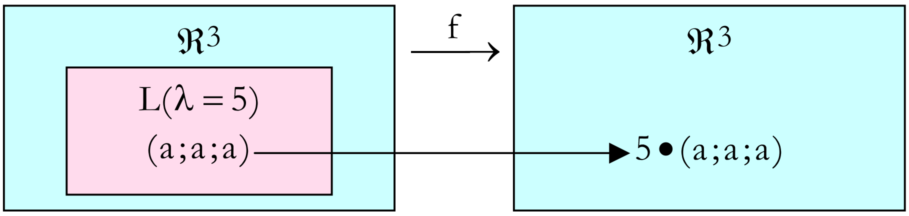
$$\dim.(L(\lambda = 5)) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 5 \bullet I) = 3 - 2 = 1$$

Para calcular una base de $L(\lambda=5)$, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos x_3:

$$\left.\begin{matrix} x_1 - 2.x_2 = -x_3 \\ x_1 + 2.x_2 = 3.x_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=5) = \{(a;a;a),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;1;1),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_1 = (1;1;1)$ es una base de $L(\lambda=5)$; o sea: $L(\lambda=5) = <\overline{h}_1>$.



Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$ (doble)

El que $\lambda=1$ sea autovalor de "f" significa que en el espacio inicial $\Re^3$ hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $f(\overline{x}) = 1 \bullet \overline{x}$, o lo que es igual, $(A - 1\bullet I)\bullet \overline{x} = \overline{0}$, que es un sistema de ecuaciones cartesianas (siempre dependientes) del subespacio de $\Re^3$ que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $f(\overline{x}) = 1\bullet\overline{x}$. Siendo $(x_1;x_2;x_3)$ las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$(A - 1\bullet I)\bullet\overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denotando $L(\lambda=1)$ al subespacio, es:

$$\dim.(L(\lambda=1)) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 1\bullet I) = 3 - 1 = 2$$

Para calcular una base de $L(\lambda=1)$, como el menor de orden 1 indicado es no nulo, eliminamos las ecuaciones 2ª y 3ª y parametrizamos x_2 y x_3:

$$x_1 = -2.x_2 - x_3 \Rightarrow$$

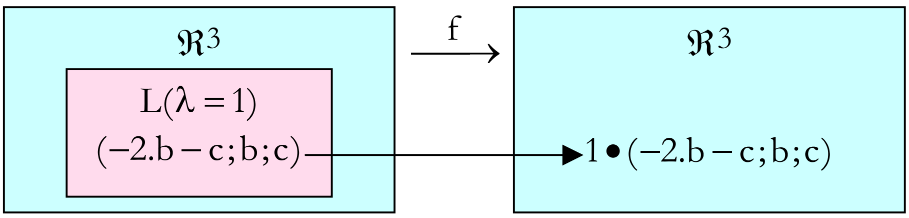
$$\Rightarrow L(\lambda=1) = \{(-2.b-c;b;c),\ \forall b,c \in \Re\} =$$

$$= \{(-2.b;b;0) + (-c;0;c),\ \forall b,c \in \Re\} =$$

$$= \{b\bullet(-2;1;0) + c\bullet(-1;0;1),\ \forall b,c \in \Re\}$$

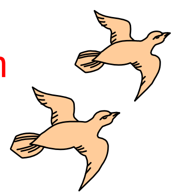
Los vectores $\overline{h}_2 = (-2;1;0)$ y $\overline{h}_3 = (-1;0;1)$ son una base de $L(\lambda=1)$: o sea:

$$L(\lambda=1) = <\overline{h}_1, \overline{h}_2>$$



OBSERVA ATENTAMENTE

El endomorfismo "f" es tal que la MA de cada autovalor coincide con su MG; pues bien, cuando suceda eso, puedes apostar tranquilamente la vida a que **"f" es diagonalizable** (¿qué coño será eso?).



FONEMATO 8.1.2

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + x_3; -x_2 + x_3; -x_3)$. Calcule los autovalores y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores.

SOLUCIÓN

$$\Re^3 \xrightarrow{f} \Re^3$$
$$(x_1;x_2;x_3) \longrightarrow (2.x_1 + x_3; -x_2 + x_3; -x_3)$$

La matriz asociada a "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Autovalores: son las soluciones de la ecuación característica $|A - \lambda \bullet I| = 0$:

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\lambda^3 + (2-1-1).\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right).\lambda + |A| = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ (doble)}, 2 \text{ (simple)}$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A", y su producto coincide con el determinante de "A".

Como $\lambda = 2$ es raíz simple de $|A - \lambda \bullet I| = 0$, su MA es 1; por tanto, apostamos tranquilamente la vida a que su MG (dimensión del subespacio de autovectores asociados a $\lambda = 2$) también es 1.

Como $\lambda = -1$ es raíz doble de $|A - \lambda \bullet I| = 0$, su MA es 2 .... y no apostamos nada: como "A" no es simétrica, la MG de $\lambda = -1$ puede ser 1 ó 2, y hasta que no hagamos los cálculos no lo sabremos. Si "A" fuera simétrica podríamos asegurar a priori, sin hacer cálculos, que la MG de $\lambda = -1$ también es 2.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 2$ (simple)

$$(A - 2 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base de $L(\lambda = 2)$, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_1:

$$\left. \begin{array}{r} x_3 = 0 \\ -3.x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(a;0;0),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;0;0),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (1;0;0)$ es una base de $L(\lambda = 2)$; o sea: $L(\lambda = 2) = <\bar{h}_1>$.

$$\Re^3 \xrightarrow{f} \Re^3$$
$$L(\lambda = 2)$$
$$(a;0;0) \longrightarrow 2 \bullet (a;0;0)$$

Subespacio de autovectores de λ =–1 (doble)

$$(A+1\bullet I)\bullet \bar{x}=\bar{0}\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

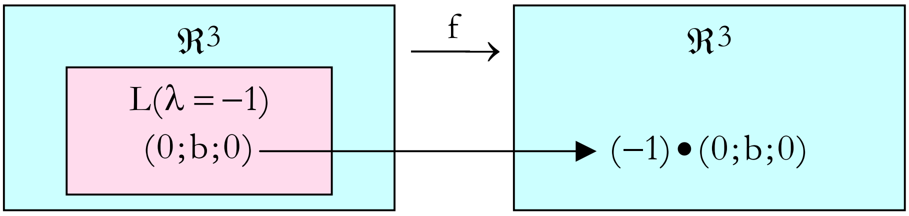
$$\dim.(L(\lambda=-1))=\dim.(\Re^3)-rg(A+1\bullet I)=3-2=1$$

Para calcular una base de $L(\lambda=-1)$, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_2:

$$\left.\begin{matrix} 3.x_1+x_3=0 \\ x_3=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1=0 \\ x_3=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-1)=\{(0;b;0),\ \forall b\in\Re\}=\{b\bullet(0;1;0),\ \forall b\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_2=(0;1;0)$ es una base de $L(\lambda=-1)$; o sea: $L(\lambda=-1)=<\bar{h}_2>$.



NOTA

Aunque no tenemos ni idea de qué significa que "f" sea diagonalizable, apostamos tranquilamente los ojos a que **"f" no es diagonalizable** pues la MA de cada autovalor no coincide con su MG, ya que la MA de $\lambda=-1$ es 2 y su MG es 1.

FONEMATO 8.1.3

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + 2.x_2 + x_3;3.x_2 + x_3;-x_3)$.
Calcule los autovalores y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ccc} \Re^3 & \xrightarrow{f} & \Re^3 \\ (x_1;x_2;x_3) & \longrightarrow & (x_1 + 2.x_2 + x_3;3.x_2 + x_3;-x_3) \end{array}$$

La matriz asociada a "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Autovalores: son las soluciones de la ecuación característica $|A - \lambda \bullet I| = 0$:

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (1+3-1).\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right).\lambda + |A| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\, 3,\, -1$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A" y que su producto coincide con el determinante de "A".

NOTA

Aunque no sabemos qué significa que "f" sea diagonalizable, apostamos la vida a que "f" es diagonalizable, pues la MA de cada autovalor coincide con su MG, ya que al ser distintos los autovalores, para cada uno de ellos es MA = MG =1.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$ (simple)

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos x_1:

$$\left.\begin{array}{r} 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -2.x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(a;0;0),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;0;0),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (1;0;0)$ es una base de $L(\lambda = 1)$; o sea: $L(\lambda = 1) = < \bar{h}_1 >$.

$$\begin{array}{ccc} \Re^3 & \xrightarrow{f} & \Re^3 \\ L(\lambda = 1) & & \\ (a;0;0) & \longrightarrow & 1 \bullet (a;0;0) \end{array}$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 3$ (simple)

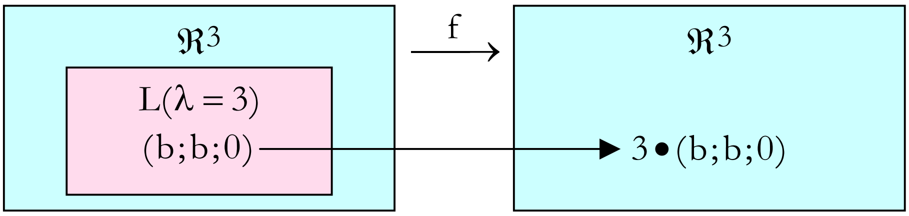
$$(A - 3 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular una base, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos x_1:

$$\left.\begin{array}{r} 2.x_2 + x_3 = 2.x_1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 3) = \{(b;b;0),\ \forall b \in \Re\} = \{b \bullet (1;1;0),\ \forall b \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_2 = (1;1;0)$ es una base de $L(\lambda = 3)$; o sea: $L(\lambda = 3) = < \bar{h}_2 >$.



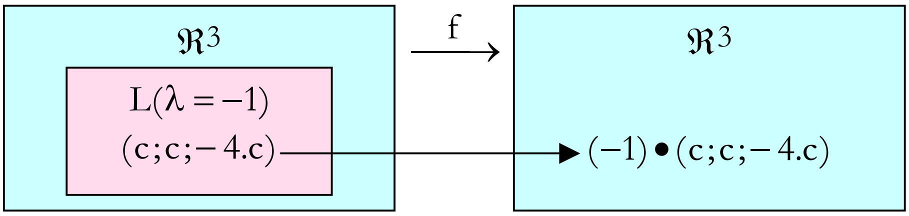
Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$ (simple)

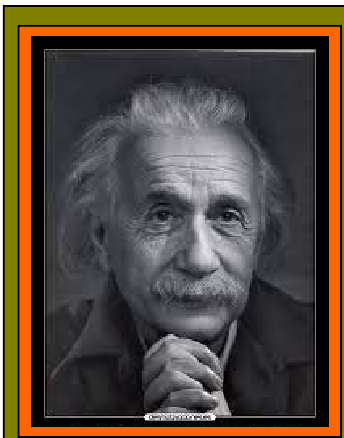
$$(A + 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2.x_2 + x_3 = -2.x_1 \\ 4.x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ x_3 = -4.x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -1) = \{(c;c;-4.c),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (1;1;-4),\ \forall c \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (1;1;-4)$ es una base de $L(\lambda = -1)$; o sea: $L(\lambda = -1) = < \bar{h}_3 >$.





El valor de una educación universitaria no es el aprendizaje de muchos datos, sino el entrenamiento de la mente para pensar.

Albert Einstein

FONEMATO 8.1.4

Siendo $a \neq 0$ y $b \neq 0$, sea $f: \Re^4 \mapsto \Re^4$ el endomorfismo cuya matriz asociada "A" respecto de la base canónica de $\Re^4$ es tal que $a_{ij} = a$ si $i = j$ y $a_{ij} = b$ si $i \neq j$. Calcule los autovalores y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores.

SOLUCIÓN

$$\Re^4 \xrightarrow{f} \Re^4$$

$$(x_1;x_2;x_3;x_4) \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Autovalores: son las soluciones de la ecuación característica $|A - \lambda \bullet I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & b \\ b & a-\lambda & b & b \\ b & b & a-\lambda & b \\ b & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

A la 1ª fila le sumamos las filas restantes

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda+3.b & a-\lambda+3.b & a-\lambda+3.b & a-\lambda+3.b \\ b & a-\lambda & b & b \\ b & b & a-\lambda & b \\ b & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

Sacamos factor común "$a-\lambda+3.b$" en la primera fila

$$\Rightarrow (a-\lambda+3.b).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a-\lambda & b & b \\ b & b & a-\lambda & b \\ b & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

A las columnas 2ª, 3ª y 4ª les restamos la 1ª

$$\Rightarrow (a-\lambda+3.b).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-\lambda-b & 0 & 0 \\ b & 0 & a-\lambda-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-\lambda-b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal

$$\Rightarrow (a-\lambda+3.b).(a-\lambda-b)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} a+3.b \text{ (simple)} \\ a-b \text{ (triple)} \end{cases}$$

Subespacio de autovectores de λ = a +3.b (simple)

$$(A-(a+3.b)\bullet I)\bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3.b & b & b & b \\ b & -3.b & b & b \\ b & b & -3.b & b \\ b & b & b & -3.b \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \end{matrix} & -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\neq 0$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3.x_1 + x_2 + x_3 = -x_4 \\ x_1 - 3.x_2 + x_3 = -x_4 \\ x_1 + x_2 - 3.x_3 = -x_4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = a + 3.b) = \{(\theta;\theta;\theta;\theta),\ \forall \theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (1;1;1;1),\ \forall \theta \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (1;1;1;1)$ es una base del subespacio $L(\lambda = a + 3.b)$; o sea:

$$L(\lambda = a + 3.b) = < \bar{h}_1 >$$

$$\begin{array}{ccc} \Re^4 & \xrightarrow{f} & \Re^4 \\ L(\lambda = a + 3.b) & & \\ (\theta;\theta;\theta;\theta) & \longrightarrow & (a + 3.b) \bullet (\theta;\theta;\theta;\theta) \end{array}$$

Subespacio de autovectores de λ = a –b (triple)

Como "A" es simétrica y $\lambda = a - b$ es autovalor triple, con cualquiera que se atreva apostamos tranquilamente la vida a que su correspondiente subespacio de autovectores tiene dimensión 3.

$$(A - (a - b) \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\neq 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = a - b) = \{(-\mu - \delta - \varepsilon;\mu;\delta;\varepsilon),\ \forall \mu,\delta,\varepsilon \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = a - b) = \{\mu \bullet (-1;1;0;0) + \delta \bullet (-1;0;1;0) + \varepsilon \bullet (-1;0;0;1),\ \forall \mu,\delta,\varepsilon \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_2 = (-1;1;0;0), \bar{h}_3 = (-1;0;1;0)$ y $\bar{h}_4 = (-1;0;0;1)$ forman una base del subespacio $L(\lambda = a - b)$; o sea: $L(\lambda = a - b) = < \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4 >$.

$$\begin{array}{ccc} \Re^4 & \xrightarrow{f} & \Re^4 \\ L(\lambda = a - b) & & \\ (-\mu - \delta - \varepsilon;\mu;\delta;\varepsilon) & \longrightarrow & (a - b) \bullet (-\mu - \delta - \varepsilon;\mu;\delta;\varepsilon) \end{array}$$

NOTA

Como "A" es simétrica, con cualquiera que se atreva apostamos tranquilamente la vida a que **el endomorfismo "A" es diagonalizable** (¿qué como será eso?)

FONEMATO 8.1.5

Sea $f:\mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^3$ un endomorfismo y $B=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2,\overline{k}_3\}$ una base de $\mathfrak{R}^3$. Calcule los autovalores de "f" y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores, sabiendo que $f(\overline{k}_1)=2\bullet\overline{k}_1$, $f(\overline{k}_2)=-\overline{k}_2$ y $f(\overline{k}_3)=\overline{k}_1+\overline{k}_2-\overline{k}_3$.

SOLUCIÓN

Como sabemos, la n-ésima columna de la matriz "A" matriz asociada a "f" respecto de la base "B" esta formada por las coordenadas del vector $f(\overline{k}_n)$; por tanto, es:

$$A=\begin{array}{ccc} \left[\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right] \\ \uparrow\quad\quad\uparrow\quad\quad\uparrow \\ f(\overline{k}_1)\ \ f(\overline{k}_2)\ \ f(\overline{k}_3) \end{array}$$

Autovalores: son las soluciones de la ecuación característica $|A-\lambda\bullet I|=0$:

$$|A-\lambda\bullet I|=0 \Rightarrow \lambda=-1 \text{ (doble)}, 2 \text{ (simple)}$$

No hace falta hacer cálculos: si una matriz cuadrada es "triangular", sus autovalores son los elementos de la diagonal principal

Subespacio de autovectores de $\lambda = 2$ (simple)

$$(A-2\bullet I)\bullet\overline{x}=\overline{0}\Rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_3=0 \\ -3.x_2+x_3=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_2=0 \\ x_3=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=2)=\{(a;0;0),\ \forall a\in\mathfrak{R}\}=\{a\bullet(1;0;0),\ \forall a\in\mathfrak{R}\}$$

El vector $\overline{h}_1=1\bullet\overline{k}_1+0\bullet\overline{k}_2+0\bullet\overline{k}_3$ es una base de $L(\lambda=2)$; o sea:

$$L(\lambda=2)=<\overline{h}_1>$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$ (doble)

$$(A+1\bullet I)\bullet\overline{x}=\overline{0}\Rightarrow\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim.(L(\lambda=-1))=\dim.(\mathfrak{R}^3)-rg(A+1\bullet I)=3-2=1$$

$$\left.\begin{matrix} 3.x_1+x_3=0 \\ x_3=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_1=0 \\ x_3=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-1)=\{(0;b;0),\ \forall b\in\mathfrak{R}\}=\{b\bullet(0;1;0),\ \forall b\in\mathfrak{R}\}$$

El vector $\overline{h}_2=0\bullet\overline{k}_1+1\bullet\overline{k}_2+0\bullet\overline{k}_3$ es una base de $L(\lambda=-1)$; o sea:

$$L(\lambda=-1)=<\overline{h}_2>$$

NOTA

A pesar de no tener ni idea de qué significa que "f" sea **diagonalizable,** apostamos las uñas a que **"f" no es diagonalizable,** pues la multiplicidad algebraica del autovalor $\lambda=-1$ es 2 y su multiplicidad geométrica es 1.

8.2 DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS

Sea $f: V \mapsto V$ un endomorfismo y "A" su matriz asociada respecto de la base de referencia "B" elegida para identificar a los vectores de "V".

Sea $B*$ otra base de "V" y "C" la matriz asociada al cambio de base $B \to B*$.

Como sabemos, si la base de referencia en los espacios inicial y final es $B*$, la matriz asociada a "f" respecto de $B*$ es $C^{-1} \bullet A \bullet C$: la que teníamos "A", post-multiplicada por la matriz "C" asociada al cambio de base realizado en el espacio inicial, y premultiplicada por la inversa de la matriz asociada al cambio de base realizado en el espacio final, como sucede con cualquier aplicación lineal.

El problema de diagonalizar el endomorfismo "f" es el problema de encontrar, si existe, una base B* tal que la matriz asociada a "f" respecto de la base B* sea diagonal.

Si existe (no existe) la base B* se dice que "f" es (no es) diagonalizable.

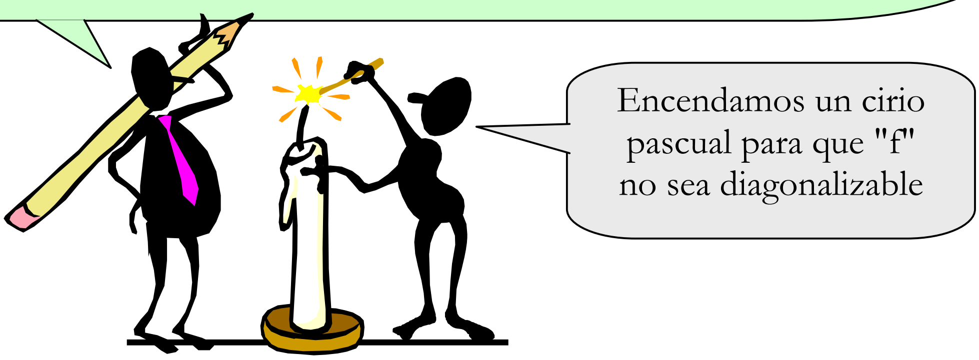
¿Cuándo es diagonalizable un endomorfismo?

Un endomorfismo "f" es diagonalizable sólo si la MA de cada autovalor coincide con su MG. En tal caso, B* es cualquier base de "V" formada por autovectores de "f"; y para "construir" B* cada autovalor "aporta" una base de su subespacio de autovectores. La matriz diagonal asociada a "f" respecto de la base B* es la que tiene en la diagonal principal los autovalores.

Si todos los autovalores de "f" son distintos (o sea, todos tienen MA igual a 1) entonces "f" es diagonalizable, pues en tal caso todos los subespacios de autovectores tendrán dimensión 1 (todos tendrán MG igual a 1).

Si la matriz asociada a "f" es simétrica, entonces "f" es diagonalizable, pues en tal caso la MA de cada autovalor siempre coincide con su MG.

Como no somos masoquistas, siempre rezaremos para que "f" no sea diagonalizable, pues así tendremos menos trabajo que hacer. Por tanto, nos enfadaremos si "A" es simétrica o todos los autovalores son distintos, pues en ambos casos "f" será diagonalizable. Por el contrario, nos alegraremos si "A" no es simétrica y hay autovalores repetidos, rezando para que la multiplicad algebraica de algún autovalor repetido no coincida con su multiplicad geométrica, pues en tal caso "f" no será diagonalizable



FONEMATO 8.2.1

Si es posible, diagonalice el endomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + x_2 + x_3; 2.x_2; -x_2 + x_3)$$

SOLUCIÓN

Consideramos que la base de referencia en $\Re^3$ es la canónica. Así, si respecto de dicha base el vector $\bar{x}$ tiene coordenadas $(x_1;x_2;x_3)$ y el vector $f(\bar{x})$ tiene coordenadas $(y_1;y_2;y_3)$, es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{array}{ccc} \Re^3 & \xrightarrow{f} & \Re^3 \\ \bar{x} & \longrightarrow & f(\bar{x}) \end{array}$$

Latiguillo: si existe, buscamos una base B* de $\Re^3$ tal que la matriz asociada a "f" respecto de B* sea diagonal. Existe B* sólo si la MA de cada autovalor coincide con su MG; en tal caso, para **construir** B* cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores.

Autovalores: $|A - \lambda \bullet I| = -\lambda^3 + 5.\lambda^2 - 8.\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (simple), 2 (doble)

Subespacio de autovectores de $\lambda = 2$ (doble)

$$(A - 2 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim.(L(\lambda = 2)) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 2 \bullet I) = 3 - 1 = 2$$

Como el menor de orden 1 indicado es no nulo, eliminamos las ecuaciones 2ª y 3ª y parametrizamos x_1 y x_3:

$$x_2 = -x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(a;-b;b),\ \forall a,b \in \Re\} =$$

$$= \{(a;0;0) + (0;-b;b),\ \forall a,b \in \Re\} = \{a \bullet (1;0;0) + b \bullet (0;-1;1),\ \forall a,b \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1 = (1;0;0)$ y $\bar{h}_2 = (0;-1;1)$ forman una base de $L(\lambda = 2)$; o sea:

$$L(\lambda = 2) = < \bar{h}_1, \bar{h}_2 >$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$ (simple)

Como la MA de $\lambda = 1$ es 1, su MG también es 1.

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & -1 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos x_3:

$$\left.\begin{matrix} x_1 + 2.x_2 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(-c;0;c),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (-1;0;1),\ \forall c \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (-1;0;1)$ es una base de $L(\lambda = 1)$; o sea: $L(\lambda = 1) = < \bar{h}_3 >$.

Diagonalización del endomorfismo

Una base de $\Re^3$ que diagonaliza a "f" es:

$$B^* = \{ \underbrace{\overline{h}_1 = (1;0;0) \,;\, \overline{h}_2 = (0;-1;1)}_{\boxed{\text{base de } L(\lambda = 2)}} \,;\, \underbrace{\overline{h}_3 = (-1;0;1)}_{\boxed{\text{base de } L(\lambda = 1)}} \}$$

Si en los espacios inicial y final tomamos como base de referencia B^*, se modifican las coordenadas de $\overline{x}$ y de $f(\overline{x})$, y como la matriz "C" asociada al cambio de la base canónica a B^* es:

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \end{array} \end{array}$$

entonces, si respecto de B^* el vector $\overline{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*;x_2^*;x_3^*)$, y el vector $f(\overline{x})$ tiene coordenadas $(y_1^*;y_2^*;y_3^*)$, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad (II) \quad ; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} \quad (III)$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I), obtenemos la expresión de "f" respecto de B^*:

$$C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} = A \bullet C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} = C^{-1} \bullet A \bullet C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

Puedes comprobar que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "f"... pero no vale ponerlos al tun-tun: debe respetarse el orden elegido al construir la base B^*:

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El que así sean las cosas no es magia: si $B^* = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$ es la base de referencia en los espacios inicial y final, las columnas de la matriz asociada a "f" respecto de B^* son las coordenadas de $f(\overline{h}_1)$, $f(\overline{h}_2)$ y $f(\overline{h}_3)$ respecto de B^*, y como:

$$* \; f(\overline{h}_1) = 2 \bullet \overline{h}_1 = 2 \bullet \overline{h}_1 + 0 \bullet \overline{h}_2 + 0 \bullet \overline{h}_3 = (2;0;0)$$

pues $\overline{h}_1$ es un autovector de $\lambda = 2$

$$* \; f(\overline{h}_2) = 2 \bullet \overline{h}_2 = 0 \bullet \overline{h}_1 + 2 \bullet \overline{h}_2 + 0 \bullet \overline{h}_3 = (0;2;0)$$

pues $\overline{h}_2$ es un autovector de $\lambda = 2$

$$* \; f(\overline{h}_3) = 1 \bullet \overline{h}_3 = 0 \bullet \overline{h}_1 + 0 \bullet \overline{h}_2 + 1 \bullet \overline{h}_3 = (0;0;1)$$

pues $\overline{h}_3$ es un autovector de $\lambda = 1$

la matriz asociada al endomorfismo "f" respecto de la base $B^{*}=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3\}$ es:

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{}^{C^{-1}\bullet A\bullet C} & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{h}_1) & f(\bar{h}_2) & f(\bar{h}_3) \end{array} \end{array}$$

QUE QUEDE MUY CLARO

Si un endomorfismo es diagonalizable, hay infinitas bases que lo diagonalizan.

En efecto, como $L(\lambda=2)=\{(a;0;0)+(0;-b;b),\ \forall a,b\in\Re\}$, si $a\neq 0$ y $b\neq 0$ los vectores $\bar{k}_1=(a;0;0)$ y $\bar{k}_2=(0;-b;b)$ forman una base de $L(\lambda=2)$. Y como $L(\lambda=1)=\{(-c;0;c),\ \forall c\in\Re\}$, si $c\neq 0$ el vector $\bar{k}_3=(-c;0;c)$ es una base de $L(\lambda=1)$. Además, para cualesquiera valores no nulos de "a", "b" y "c", es:

$$\begin{array}{c} rg\left[\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & c \end{array}\right]=3=\dim.(\Re^3) \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 \end{array} \end{array}$$

por lo que $B^{**}=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$ es una base de $\Re^3$, y como B^{**} está formada por autovectores de "f", diagonaliza a "f", pues si la base de referencia en los espacios inicial y el final es $B^{**}=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$, las columnas de la matriz asociada a "f" respecto de B^{**} son las coordenadas de $f(\bar{k}_1)$, $f(\bar{k}_2)$ y $f(\bar{k}_3)$ respecto de B^{**}:

* $f(\bar{k}_1)=2\bullet\bar{k}_1=2\bullet\bar{k}_1+0\bullet\bar{k}_2+0\bullet\bar{k}_3=(2;0;0)$

pues $\bar{k}_1$ es un autovector de $\lambda=2$

* $f(\bar{k}_2)=2\bullet\bar{k}_2=0\bullet\bar{k}_1+2\bullet\bar{k}_2+0\bullet\bar{k}_3=(0;2;0)$

pues $\bar{k}_2$ es un autovector de $\lambda=2$

* $f(\bar{k}_3)=1\bullet\bar{k}_3=0\bullet\bar{k}_1+0\bullet\bar{k}_2+1\bullet\bar{k}_3=(0;0;1)$

pues $\bar{k}_3$ es un autovector de $\lambda=1$

Por tanto, la matriz asociada a "f" respecto de $B^{**}=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$ es:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{k}_1) & f(\bar{k}_2) & f(\bar{k}_3) \end{array} \end{array}$$

FÍJATE

La matriz "W" asociada al cambio de la base canónica a $B^{**}=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$ es:

$$\begin{array}{c} W = \begin{bmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix} \\ \qquad\quad \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 \end{array} \end{array}$$

$$\Re^3 \xrightarrow{f} \Re^3 \qquad \bar{x} \longrightarrow f(\bar{x})$$

Así, si respecto de B^{**} el vector $\bar{x}$ tiene coordenadas $(x_1^{**};x_2^{**};x_3^{**})$, y el vector $f(\bar{x})$ tiene coordenadas $(y_1^{**};y_2^{**};y_3^{**})$, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = W \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \end{bmatrix} \quad (IV) \quad ; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = W \bullet \begin{bmatrix} y_1^{**} \\ y_2^{**} \\ y_3^{**} \end{bmatrix} \quad (V)$$

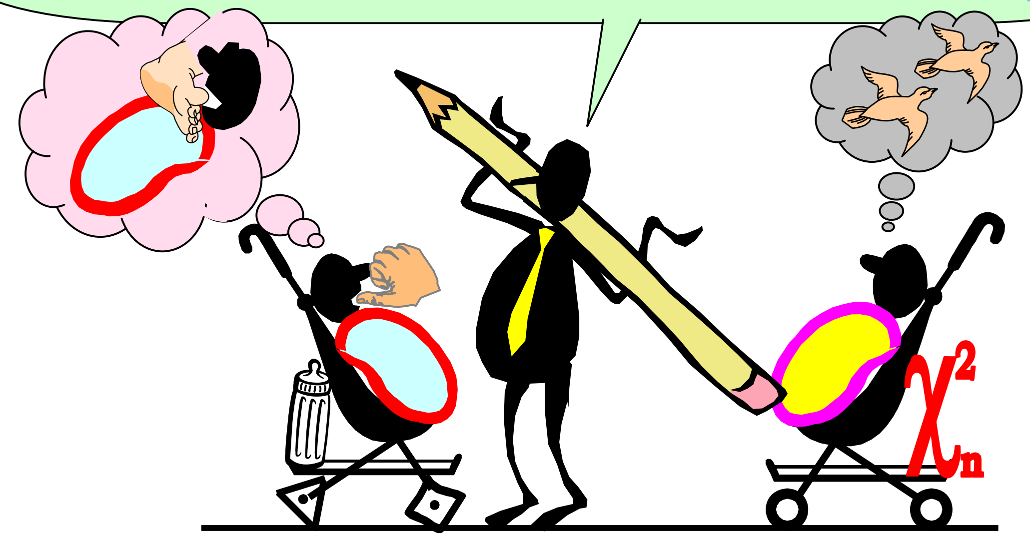
Sustituyendo (IV) y (V) en $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ obtenemos la expresión de "f" respecto de B^{**}:

$$W \bullet \begin{bmatrix} y_1^{**} \\ y_2^{**} \\ y_3^{**} \end{bmatrix} = A \bullet W \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^{**} \\ y_2^{**} \\ y_3^{**} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{W^{-1} \bullet A \bullet W} \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \end{bmatrix}$$

O sea, para cualesquiera valores no nulos de "a", "b" y "c", sucede que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}^{-1}}_{W^{-1}} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}}_{W} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 8.2.7 y 8.2.8 nos plantearemos la **diagonalización en términos puramente matriciales:** nos dan $A_{n\times n}$ y nos piden que, si es posible, la diagonalicemos; o sea, piden que, si existe, determinemos $C_{n\times n}$ tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ sea diagonal... y la secuencia de trabajo será la misma, salvo que los cambios de base no tendrán protagonismo alguno



FONEMATO 8.2.2

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ un endomorfismo y $B=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2,\bar{d}_3\}$ una base de $\Re^3$.
Si es posible, diagonalice "f" sabiendo que:

$$f(\bar{d}_1)=2\bullet\bar{d}_1+2\bullet\bar{d}_3\;;\;f(\bar{d}_2)=\bar{d}_2\;;\;f(\bar{d}_3)=2\bullet\bar{d}_1-\bar{d}_3$$

SOLUCIÓN

Si respecto de la base $B=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2,\bar{d}_3\}$ el vector $\bar{x}$ tiene coordenadas $(x_1;x_2;x_3)$, y $f(\bar{x})$ tiene coordenadas $(y_1;y_2;y_3)$, es:

$$\begin{array}{c} \Re^3 \xrightarrow{\;f\;} \Re^3 \\ \bar{x} \longrightarrow f(\bar{x}) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}}^{A}\bullet\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\quad(\mathrm{I})$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{d}_1) & f(\bar{d}_2) & f(\bar{d}_3)\end{array}$$

¡Mala noticia!.. como "A" es simétrica, "f" es diagonalizable; o sea, es posible encontrar una base $B*$ de $\Re^3$ tal que la matriz asociada a "f" respecto de $B*$ es diagonal. Diagonaliza a "f" cualquier base $B*$ de $\Re^3$ formada por autovectores, y para construir $B*$ cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores.

Autovalores: $|A-\lambda\bullet I|=-\lambda^3+2.\lambda^2+5.\lambda-6=0\Rightarrow\lambda=1,\,3,\,-2$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

$$(A-1\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} x_1+2.x_3=0\\ 2.x_1-2.x_3=0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix} x_1=0\\ x_3=0\end{Bmatrix}\Rightarrow L(\lambda=1)=\{(0;a;0),\ \forall a\in\Re\}=\{a\bullet(0;1;0),\ \forall a\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_1=0\bullet\bar{d}_1+1\bullet\bar{d}_2+0\bullet\bar{d}_3$ es una base de $L(\lambda=1)$; o sea:

$$L(\lambda=1)=<\bar{h}_1>$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 3$

$$(A-3\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix} -x_1=-2.x_3\\ 2.x_2=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} x_1=2.x_3\\ x_2=0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=3)=\{(2.b;0;b),\ \forall b\in\Re\}=\{b\bullet(2;0;1),\ \forall b\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_2=2\bullet\bar{d}_1+0\bullet\bar{d}_2+1\bullet\bar{d}_3$ es una base de $L(\lambda=3)$; o sea:

$$L(\lambda=3)=<\bar{h}_2>$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = -2$

$$(A + 2 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & \\ 2 & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.x_3 = -4.x_1 \\ 3.x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = -2.x_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

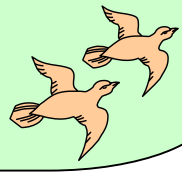
$$\Rightarrow L(\lambda = -2) = \{(c;0;-2.c),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (1;0;-2),\ \forall c \in \Re\}$$

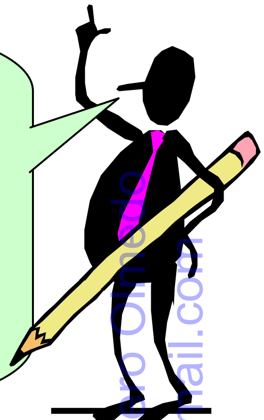
El vector $\bar{h}_3 = 1 \bullet \bar{d}_1 + 0 \bullet \bar{d}_2 - 2 \bullet \bar{d}_3$ es una base de $L(\lambda = -2)$; o sea:

$$L(\lambda = -2) = < \bar{h}_3 >$$

Si "A" es simétrica, puedes detectar errores de cálculo comprobando si se cumple la propiedad que establece que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica siempre son ortogonales. En nuestro caso:

$$\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2 = (0;1;0) \bullet (2;0;1) = 0$$
$$\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_3 = (0;1;0) \bullet (1;0;-2) = 0$$
$$\bar{h}_2 \bullet \bar{h}_3 = (2;0;1) \bullet (1;0;-2) = 0$$





Diagonalización del endomorfismo

Una base de $\Re^3$ que diagonaliza a "f" es:

$$B* = \{ \underbrace{\bar{h}_1 = (0;1;0)}_{\text{base de } L(\lambda = 1)} ; \underbrace{\bar{h}_2 = (2;0;1)}_{\text{base de } L(\lambda = 3)} ; \underbrace{\bar{h}_3 = (1;0;-2)}_{\text{base de } L(\lambda = -2)} \}$$

Si en los espacios inicial y final tomamos como base de referencia $B*$, se modifican las coordenadas de $\bar{x}$ y de $f(\bar{x})$, y como la matriz "C" asociada al cambio de la base $B = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\}$ a $B*$ es:

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad \uparrow & \quad \uparrow \\ \bar{h}_1 & \quad \bar{h}_2 & \quad \bar{h}_3 \end{matrix} \end{array}$$

entonces, si respecto de $B*$ el vector $\bar{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*;x_2^*;x_3^*)$, y el vector $f(\bar{x})$ tiene coordenadas $(y_1^*;y_2^*;y_3^*)$, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \text{(II)} \quad ; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} \text{(III)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I), obtenemos la expresión de "f" respecto de $B*$:

$$C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} = A \bullet C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} = C^{-1} \bullet A \bullet C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

Puedes comprobar que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "f"... pero no vale ponerlos al tun-tun: debe respetarse el orden elegido al construir la base B*:

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

El que así sean las cosas no es magia: si $B^* = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$ es la base de referencia en los espacios inicial y final, las columnas de la matriz asociada a "f" respecto de B* son las coordenadas de $f(\overline{h}_1)$, $f(\overline{h}_2)$ y $f(\overline{h}_3)$ respecto de B*, y como:

$$* \; f(\overline{h}_1) \underset{\uparrow}{=} 1 \bullet \overline{h}_1 = 1 \bullet \overline{h}_1 + 0 \bullet \overline{h}_2 + 0 \bullet \overline{h}_3 = (1;0;0)$$

pues $\overline{h}_1$ es un autovector de $\lambda = 1$

$$* \; f(\overline{h}_2) \underset{\uparrow}{=} 3 \bullet \overline{h}_2 = 0 \bullet \overline{h}_1 + 3 \bullet \overline{h}_2 + 0 \bullet \overline{h}_3 = (0;3;0)$$

pues $\overline{h}_2$ es un autovector de $\lambda = 3$

$$* \; f(\overline{h}_3) \underset{\uparrow}{=} -2 \bullet \overline{h}_3 = 0 \bullet \overline{h}_1 + 0 \bullet \overline{h}_2 - 2 \bullet \overline{h}_3 = (0;0;-2)$$

pues $\overline{h}_3$ es un autovector de $\lambda = -2$

la matriz asociada a "f" respecto de la base $B^* = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$ es:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \quad\quad \uparrow \\ f(\overline{h}_1) \;\; f(\overline{h}_2) \;\; f(\overline{h}_3) \end{array}$$

Si un endomorfismo es diagonalizable, hay infinitas bases que lo diagonalizan.

$$L(\lambda = 1) = \{(0;a;0), \; \forall a \in \Re\} \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \overline{k}_1 = (0;a;0) \text{ es base de } L(\lambda = 1)$$

si $a \neq 0$

$$L(\lambda = 3) = \{(2.b;0;b), \; \forall b \in \Re\} \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \overline{k}_2 = (2.b;0;b) \text{ es base de } L(\lambda = 3)$$

si $b \neq 0$

$$L(\lambda = -2) = \{(c;0;-2.c), \; \forall c \in \Re\} \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \overline{k}_3 = (c;0;-2.c) \text{ es base de } L(\lambda = -2)$$

si $c \neq 0$

Para cualesquiera valores no nulos de "a", "b" y "c", es:

$$\text{rg} \begin{bmatrix} 0 & 2.b & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & -2.c \end{bmatrix} = 3 = \dim.(\Re^3)$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \overline{k}_3 \end{array}$$

por lo que $B^{**} = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3\}$ es una base de $\Re^3$; y como B** está formada por autovectores de "f", diagonaliza a "f". Así, si en los espacios inicial y final tomamos como base de referencia $B^{**}=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$, las columnas de la matriz asociada a "f" respecto de B^{**} son las coordenadas de $f(\bar{k}_1)$, $f(\bar{k}_2)$ y $f(\bar{k}_3)$ respecto de B^{**}:

$$* \; f(\bar{k}_1) = 1 \bullet \bar{k}_1 = 1 \bullet \bar{k}_1 + 0 \bullet \bar{k}_2 + 0 \bullet \bar{k}_3 = (1;0;0)$$

$$\boxed{\text{pues } \bar{k}_1 \text{ es un autovector de } \lambda = 1}$$

$$* \; f(\bar{k}_2) = 3 \bullet \bar{k}_2 = 0 \bullet \bar{k}_1 + 3 \bullet \bar{k}_2 + 0 \bullet \bar{k}_3 = (0;3;0)$$

$$\boxed{\text{pues } \bar{k}_2 \text{ es un autovector de } \lambda = 3}$$

$$* \; f(\bar{k}_3) = -2 \bullet \bar{k}_3 = 0 \bullet \bar{k}_1 + 0 \bullet \bar{k}_2 - 2 \bullet \bar{k}_3 = (0;0;-2)$$

$$\boxed{\text{pues } \bar{k}_3 \text{ es un autovector de } \lambda = -2}$$

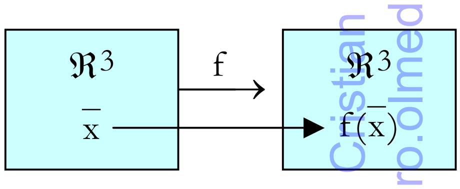
Por tanto, la matriz asociada a "f" respecto de $B^{**}=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$ es:

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{k}_1) & f(\bar{k}_2) & f(\bar{k}_3) \end{array}\end{array}$$

FÍJATE

La matriz "W" asociada al cambio de la base canónica a $B^{**}=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$ es:

$$W = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 \end{array}\end{array}$$



Así, si respecto de B^{**} el vector $\bar{x}$ tiene coordenadas $(x_1^{**};x_2^{**};x_3^{**})$, y el vector $f(\bar{x})$ tiene coordenadas $(y_1^{**};y_2^{**};y_3^{**})$, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = W \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \end{bmatrix} \quad (IV) \quad ; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = W \bullet \begin{bmatrix} y_1^{**} \\ y_2^{**} \\ y_3^{**} \end{bmatrix} \quad (V)$$

Sustituyendo (IV) y (V) en $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ obtenemos la expresión de "f" respecto de B^{**}:

$$W \bullet \begin{bmatrix} y_1^{**} \\ y_2^{**} \\ y_3^{**} \end{bmatrix} = A \bullet W \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^{**} \\ y_2^{**} \\ y_3^{**} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{W^{-1} \bullet A \bullet W} \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \end{bmatrix}$$

O sea, para cualesquiera valores no nulos de "a", "b" y "c", sucede que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}^{-1}}_{W^{-1}} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}}_{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

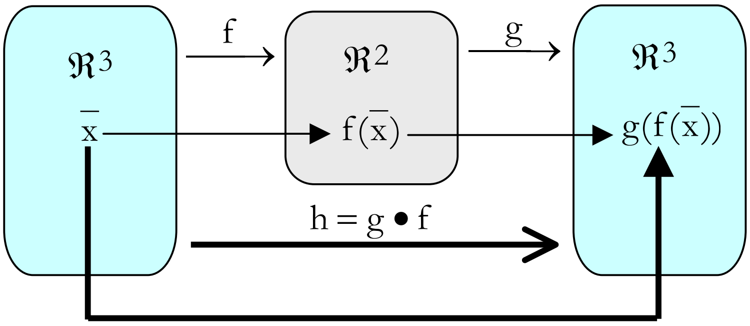
FONEMATO 8.2.3

Sean $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ y $g:\Re^2 \mapsto \Re^3$ las aplicaciones lineales tales que:

$$f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 - x_2 + x_3;x_1 - x_2 + x_3)$$
$$g(y_1;y_2) = (y_1;-y_1 + 3.y_2;y_1 - y_2)$$

Analice si el endomorfismo $h = g \bullet f$ es diagonalizable.

SOLUCIÓN



Las matrices asociadas a las aplicaciones lineales "f" y "g" son:

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; A_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

El endomorfismo $h = g \bullet f$ es tal que:

$$h(\bar{x}) = g(f(\bar{x})) = g(A_f \bullet \bar{x}) = A_g \bullet (A_f \bullet \bar{x}) = (A_g \bullet A_f) \bullet \bar{x} =$$

$$\boxed{f(\bar{x}) = A_f \bullet \bar{x}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \bullet \bar{x}$$

Autovalores

$$|P - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (1 - 2 + 0).\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right).\lambda + |P| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \text{ (simple)} \\ \lambda = 0 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Diagonalización

Como $\lambda = 0$ es raíz doble de la ecuación característica, el endomorfismo "h" es diagonalizable sólo el subespacio de autovectores de $\lambda = 0$ tiene dimensión 2... y así sucede:

$$h(\bar{x}) = 0 \bullet \bar{x} \Rightarrow P \bullet \bar{x} = 0 \bullet \bar{x} \Rightarrow (P - 0 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim.(L(\lambda = 0)) = \dim.(\Re^3) - \text{rg} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P - 0 \bullet I} = 3 - 1 = 2$$

FONEMATO 8.2.4

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de una base "B" de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3)=(5.x_1;-x_2+a.x_3;3.x_1+b.x_3)$, siendo "a" y "b" parámetros reales. Analice si "f" es diagonalizable.

SOLUCIÓN

La matriz asociada a "f" respecto de la base "B" es $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & a\\ 3 & 0 & b\end{bmatrix}$.

Autovalores:

$$|A-\lambda\bullet I|=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+(5-1+b).\lambda^2-\left(\begin{vmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 0\\ 3 & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & a\\ 0 & b\end{vmatrix}\right).\lambda+|A|=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+(4+b).\lambda^2-(4.b-5).\lambda-5.b=0$$

que resulta **infumable** salvo que tengas una estupenda varita mágica. Sin embargo, si calculamos $|A-\lambda\bullet I|$ **a lo bestia,** el asunto es una tontería:

$$|A-\lambda\bullet I|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -1-\lambda & a\\ 3 & 0 & b-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda).(-1-\lambda).(b-\lambda)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=5,-1,b$$

> Para calcular los autovalores de una matriz "A" con elementos locos, suele ser mejor calcular $|A-\lambda\bullet I|$ a lo bestia, como en este ejercicio.

- Si $b\neq 5$ y $b\neq -1\Rightarrow$ los tres autovalores son distintos $\Rightarrow$ "f" es diagonalizable.
- Si $b=5$, la MA de $\lambda=5$ es 2, y "f" es diagonalizable sólo si la MG de $\lambda=5$ es 2; o sea, si el subespacio de autovectores de $\lambda=5$ tiene dimensión 2.
  La matriz de coeficientes del sistema de cartesianas de dicho subespacio es:

  $$A-5\bullet I=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \boxed{\begin{matrix}0 & -6\\ 3 & 0\end{matrix}} & & a\\ & & 0\end{bmatrix}$$

  por tanto:

  $$\dim.(L(\lambda=5))=\dim.(\Re^3)-rg(A-5\bullet I)=3-2=1$$

  Así, "f" no es diagonalizable cuando $b=5$.

- Si $b=-1$, la MA de $\lambda=-1$ es 2, y "f" es diagonalizable sólo si MG de $\lambda=-1$ es 2; o sea, si el subespacio de autovectores de $\lambda=-1$ tiene dimensión 2.
  La matriz de coeficientes del sistema de cartesianas de dicho subespacio es:

  $$A+1\bullet I=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

  por tanto:

  $$\dim.(L(\lambda=-1))=\dim.(\Re^3)-rg(A+1\bullet I)=\begin{cases}2 \text{ si } a=0\\ 1 \text{ si } a\neq 0\end{cases}$$

  Así, si $b=-1$, el endomorfismo es diagonalizable si $a=0$, y no lo es si $a\neq 0$.

FONEMATO 8.2.5

Determine las matrices cuadradas de orden 2 cuyos autovalores son 1 y -1.

SOLUCIÓN

Siendo "A" cuadrada de orden 2, si su autovalores son 1 y -1, entonces:

$$\left|A-\lambda \bullet I\right| = (\lambda-1).(\lambda+1) = \lambda^2 + 0.\lambda - 1 \quad \text{(I)}$$

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces:

$$\left|A-\lambda \bullet I\right| = \lambda^2 - (a+d).\lambda + (a.d - b.c) \quad \text{(II)}$$

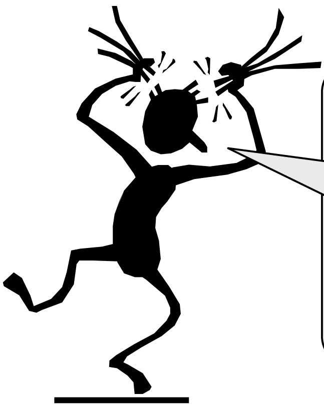
Al comparar (I) y (II) resulta obvio que los autovalores de "A" serán 1 y -1 sólo si $a+d=0$ y $a.d-b.c=-1$.

FONEMATO 8.2.6

Si es posible, determine una base de $\Re^3$ que diagonalice al endomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \;;\; a, b \neq 0$$

SOLUCIÓN



¡QUE DESASTRE!... como "A" es simétrica, "f" es diagonalizable; o sea, es posible encontrar una base $B*$ de $\Re^3$ tal que la matriz asociada a "f" respecto de $B*$ es diagonal. Diagonaliza a "f" cualquier base $B*$ de $\Re^3$ formada por autovectores, y para **construir** $B*$ cada autovalor **aporta** una base de su subespacio de autovectores.

Autovalores a lo bestia:

$$\left|A-\lambda \bullet I\right| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

a la primera fila le sumamos la segunda y la tercera

$$= \begin{vmatrix} a-\lambda+2.b & a-\lambda+2.b & a-\lambda+2.b \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

sacamos factor común $a-\lambda+2.b$ en la primera fila

$$= (a-\lambda+2.b).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

a las columnas segunda y tercera les restamos la primera

$$= (a-\lambda+2.b).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-\lambda-b & 0 \\ b & 0 & a-\lambda-b \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$= (a-\lambda+2.b).(a-\lambda-b)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = a+2.b \text{ (simple)} \\ \lambda = a-b \text{ (doble)} \end{cases}$$

Subespacio de autovectores de λ = a+2.b (simple)

$$(A-(a+2.b)\bullet I)\bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2.b & b & b \\ b & -2.b & b \\ b & b & -2.b \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

dividimos por "b" los dos miembros de cada ecuación del sistema

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 - 2.x_2 = -x_3 \\ x_1 + x_2 = 2.x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = a+2.b) = \{(\theta;\theta;\theta),\ \forall\theta\in\Re\} = \{\theta\bullet(1;1;1),\ \forall\theta\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (1;1;1)$ es una base de $L(\lambda = a+2.b)$.

Subespacio de autovectores de λ = a–b (doble)

$$(A-(a-b)\bullet I)\bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = -x_1 - x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = a-b) = \{(\beta;-\beta-\delta;\delta),\ \forall\beta,\delta\in\Re\} =$$

$$= \{(\beta;-\beta;0)+(0;\delta;\delta),\ \forall\beta,\delta\in\Re\} =$$

$$= \{\beta\bullet(1;-1;0)+\delta\bullet(0;1;1),\ \forall\beta,\delta\in\Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_2 = (1;-1;0)$ y $\bar{h}_3 = (0;-1;1)$ forman una base del subespacio.

Recuerda: si "A" es simétrica puedes detectar errores de cálculo comprobando que autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

En nuestro caso: $\begin{cases} \bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2 = (1;1;1)\bullet(1;-1;0) = 0 \\ \bar{h}_1 \bullet \bar{h}_3 = (1;1;1)\bullet(0;-1;1) = 0 \end{cases}$

Como $\bar{h}_2$ y $\bar{h}_3$ son autovectores del mismo autovalor, no tienen porqué ser ortogonales, aunque podrían serlo.

Diagonalización del endomorfismo

Una base de $\Re^3$ que diagonaliza a "f" es

$$B^* = \{ \underbrace{\bar{h}_1 = (1;1;1)}_{\text{base de } L(\lambda = a+2.b)} ; \underbrace{\bar{h}_2 = (1;-1;0) ; \bar{h}_3 = (0;-1;1)}_{\text{base de } L(\lambda = a-b)} \}$$

FONEMATO 8.2.7

Si es posible, diagonalice el endomorfismo $f: P_2 \mapsto P_2$ tal que

$$f(a.x^2+b.x+c)=(a+2.b+c).x^2+(3.b+c).x-c$$

SOLUCIÓN

Consideramos que la base de referencia en P_2 es la canónica $\{x^2,x,1\}$. Así, si respecto de esa base el vector $p(x)$ tiene coordenadas $(a_1;a_2;a_3)$ y el vector $f(p(x))$ tiene coordenadas $(b_1;b_2;b_3)$, es:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (I)$$

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ p(x) & \longrightarrow & f(p(x)) \end{array}$$

Latiguillo: si existe, buscamos una base $B*$ de P_2 tal que la matriz asociada a "f" respecto de P_2 sea diagonal. Existe $B*$ sólo si la MA de cada autovalor coincide con su MG; en tal caso, para **construir** $B*$ cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores.

Autovalores: como "A" es **triangular,** sus autovalores son los elementos de la diagonal principal; o sea: $\lambda=1,\ 3,\ -1$ (simples).

El endomorfismo es diagonalizable, pues los autovalores son todos distintos.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$ (simple)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A-1\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_2=a_3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=1)=\{(\delta;0;0),\ \forall\delta\in\Re\}=\{\delta\bullet(1;0;0),\ \forall\delta\in\Re\}$$

El vector $h_1(x)=(1;0;0)\equiv x^2$ es una base de $L(\lambda=1)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 3$ (simple)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{A-3\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_2=a_1 \\ a_3=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=3)=\{(\varepsilon;\varepsilon;0),\ \forall\varepsilon\in\Re\}=\{\varepsilon\bullet(1;1;0),\ \forall\varepsilon\in\Re\}$$

El vector $h_2(x)=(1;1;0)\equiv x^2+x$ es una base de $L(\lambda=3)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$ (simple)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A-(-1)\bullet I} \bullet \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_2=a_1 \\ a_3=-4.a_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-1)=\{(\theta;\theta;-4.\theta),\ \forall\theta\in\Re\}=\{\theta\bullet(1;1;-4),\ \forall\theta\in\Re\}$$

El vector $h_3(x)=(1;1;-4)\equiv x^2+x-4$ es una base de $L(\lambda=-1)$.

Diagonalización del endomorfismo

Una base de P_2 que diagonaliza a "f" es:

$$B* = \left\{ h_1(x) = x^2 \; ; h_2(x) = x^2 + x \; ; h_3(x) = x^2 + x - 4 \right\}$$

Si en los espacios inicial y final tomamos como base de referencia $B*$, se modifican las coordenadas de $p(x)$ y de $f(p(x))$, y como la matriz "C" asociada al cambio de la base canónica a $B*$ es:

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{array} \end{array}$$

entonces, si respecto de $B*$ el vector $p(x)$ tiene coordenadas $(a_1^*;a_2^*;a_3^*)$, y el vector $f(p(x))$ tiene coordenadas $(b_1^*;b_2^*;b_3^*)$, es:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} \text{ (II) } ; \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix} \text{ (III)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I), obtenemos la expresión de "f" respecto de $B*$:

$$C \bullet \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix} = A \bullet C \bullet \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix} = C^{-1} \bullet A \bullet C \bullet \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix}$$

Puedes comprobar que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "f"... pero no vale ponerlos al tun-tun: debe respetarse el orden elegido al **construir** la base $B*$:

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

No es magia: si $B* = \{h_1(x), h_2(x), h_3(x)\}$ es la base de referencia en los espacios inicial y final, las columnas de la matriz asociada a "f" respecto de $B*$ son las coordenadas de $f(h_1(x))$, $f(h_2(x))$ y $f(h_3(x))$ respecto de $B*$, y como:

$$f(h_1(x)) = 1 \bullet h_1(x) = 1 \bullet h_1(x) + 0 \bullet h_2(x) + 0 \bullet h_3(x) = (1;0;0)$$

pues $h_1(x)$ es un autovector de $\lambda = 1$

$$f(h_2(x)) = 3 \bullet h_2(x) = 0 \bullet h_1(x) + 3 \bullet h_2(x) + 0 \bullet h_3(x) = (0;3;0)$$

pues $h_2(x)$ es un autovector de $\lambda = 3$

$$f(h_3(x)) = (-1) \bullet h_3(x) = 0 \bullet h_1(x) + 0 \bullet h_2(x) + (-1) \bullet h_3(x) = (0;0;-1)$$

pues $h_3(x)$ es un autovector de $\lambda = -1$

la matriz asociada al endomorfismo "f" respecto de la base $B*$ es:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(h_1(x)) & f(h_2(x)) & f(h_3(x)) \end{array} \end{array}$$

FONEMATO 8.2.8

Si es posible, calcule una matriz "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ sea diagonal, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: como "A" es simétrica, es diagonalizable; o sea, es posible encontrar una matriz "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es diagonal. Para construir "C", por columnas, cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores.

Autovalores

$$|A - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

a la primera fila le sumamos las restantes

sacamos factor común $1-\lambda$ en la primera fila

$$= (1-\lambda).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1+\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

A la primera fila le restamos la cuarta

Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna

$$= -(1-\lambda).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda).\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda)(1+\lambda).(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (doble)}, -1 \text{ (doble)}$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$ (doble)

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(a;b;b;a),\ \forall a,b \in \Re\} = \{a \bullet (1;0;0;1) + b \bullet (0;1;1;0),\ \forall a,b \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1 = (1;0;0;1)$ y $\bar{h}_2 = (0;1;1;0)$ forman una base de $L(\lambda = 1)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$ (doble)

$$(A + 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -1) = \{(-c;-d;d;c),\ \forall c,d \in \Re\} =$$

$$= \{c \bullet (-1;0;0;1) + d \bullet (0;-1;1;0),\ \forall c,d \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_3 = (-1;0;0;1)$ y $\bar{h}_4 = (0;-1;1;0)$ forman una base de $L(\lambda = -1)$.

No olvides comprobar que se cumple eso de que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica siempre son ortogonales.
En nuestro caso, debemos comprobar que:

$$\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_3 = 0 \ ; \ \overline{h}_1 \bullet \overline{h}_4 = 0$$
$$\overline{h}_2 \bullet \overline{h}_3 = 0 \ ; \ \overline{h}_2 \bullet \overline{h}_4 = 0$$

Como $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son autovectores del mismo autovalor, no tienen porqué ser ortogonales, aunque en nuestro caso lo son; y lo mismo sucede con $\overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.

Diagonalización de la matriz "A"

Una matriz "C" que diagonaliza a "A" es:

$$C = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{h}_4 \end{array} \end{array}$$

$$\underbrace{\overline{h}_1 \quad \overline{h}_2}_{\boxed{\text{base de } L(\lambda = 1)}} \qquad \underbrace{\overline{h}_3 \quad \overline{h}_4}_{\boxed{\text{base de } L(\lambda = -1)}}$$

La matriz $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es la matriz diagonal que en su diagonal principal tiene los autovalores de "A" .... y no vale ponerlos al tun-tun: debe respetarse el orden elegido al construir "C":

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

NOTA

Como $L(\lambda = 1) = \{(a;0;0;a) + (0;b;b;0), \ \forall a,b \in \Re\}$, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los vectores $\overline{k}_1 = (a;0;0;a)$ y $\overline{k}_2 = (0;b;b;0)$ forman una base de $L(\lambda = 1)$.
Como $L(\lambda = -1) = \{(-c;0;0;c) + (0;-d;d;0), \ \forall c,d \in \Re\}$, si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ los vectores $\overline{k}_3 = (-c;0;0;c)$ y $\overline{k}_4 = (0;-d;d;0)$ forman una base de $L(\lambda = -1)$.
Así, para la matriz:

$$D = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} a & 0 & -c & 0 \\ 0 & b & 0 & -d \\ 0 & b & 0 & d \\ a & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \overline{k}_3 & \overline{k}_4 \end{array} \end{array}, \quad a,b,c,d \neq 0$$

también sucede que $D^{-1} \bullet A \bullet D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Puedes comprobar que "D" tiene determinante no nulo si "a", "b", "c" y "d" son no nulos; por tanto, existe D^{-1} si "a", "b", "c" y "d" son no nulos.

FONEMATO 8.2.9

Si es posible, calcule una matriz "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ sea diagonal, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: como "A" es simétrica, es diagonalizable; o sea, es posible encontrar una matriz "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es diagonal. Para construir "C", por columnas, cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores.

Autovalores:

$$|A - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

Desarrollamos por los elementos de la segunda fila

$$= (1-\lambda).((1-\lambda)^2.(5-\lambda) - 5.(1-\lambda)) = (1-\lambda)^2.((1-\lambda).(5-\lambda) - 5) =$$

$$= (1-\lambda)^2.(\lambda^2 - 6.\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (doble)}, 0 \text{ (simple)}, 6 \text{ (simple)}$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$ (doble)

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & \boxed{-2} \\ \boxed{1} & 0 & -2 & \boxed{4} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = 2.x_3 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(2.a;b;a;0),\ \forall a,b \in \Re\} =$$

$$= \{a \bullet (2;0;1;0) + b \bullet (0;1;0;0),\ \forall a,b \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1 = (2;0;1;0)$ y $\bar{h}_2 = (0;1;0;0)$ forman una base de $L(\lambda = 1)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 0$ (simple)

$$(A + 0 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2.x_4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 0) = \{(-c;0;2.c;c),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (-1;0;2;1),\ \forall c \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (-1;0;2;1)$ es una base de $L(\lambda = 0)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 6$ (simple)

$$(A - 6 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = x_4/5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2.x_4/5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 6) = \{(d/5;0;-2.d/5;d),\ \forall d \in \Re\} = \left\{\frac{d}{5} \bullet (1;0;-2;5),\ \forall d \in \Re\right\}$$

El vector $\bar{h}_4 = (1;0;-2;5)$ es una base de $L(\lambda = 6)$.

Para detectar posibles errores de cálculo, no olvides comprobar que se cumple eso de que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica siempre son ortogonales. En nuestro caso, comprueba que:

$$\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_3 = 0 \ ; \ \overline{h}_1 \bullet \overline{h}_4 = 0 \ ; \ \overline{h}_2 \bullet \overline{h}_3 = 0 \ ; \ \overline{h}_2 \bullet \overline{h}_4 = 0 \ ; \ \overline{h}_3 \bullet \overline{h}_4 = 0$$

Como $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son autovectores del mismo autovalor, no tienen porqué ser ortogonales, aunque en nuestro caso lo son.

Diagonalización de la matriz "A"

Una matriz "C" que diagonaliza a "A" es:

$$\begin{array}{c} C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{h}_4 \end{array} \end{array}$$

La matriz $C^{-1} \bullet A \bullet C$ es la matriz diagonal que en su diagonal principal tiene los autovalores de "A" .... y no vale ponerlos al tun-tun, debe respetarse el orden elegido al construir "C":

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

NOTA

Como $L(\lambda = 1) = \{(2.a;0;a;0) + (0;b;0;0), \ \forall a,b \in \Re\}$, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, los vectores $\overline{k}_1 = (2.a;0;a;0)$ y $\overline{k}_2 = (0;b;0;0)$ son una base de $L(\lambda = 1)$.

Como $L(\lambda = 0) = \{(-c;0;2.c;c), \ \forall c \in \Re\}$, si $c \neq 0$, el vector $\overline{k}_3 = (-c;0;2.c;c)$ es una base del subespacio $L(\lambda = 0)$.

Como $L(\lambda = 6) = \{(d/5;0;-2.d/5;d), \ \forall d \in \Re\}$, siempre que $d \neq 0$, el vector $\overline{k}_4 = (d/5;0;-2.d/5;d)$ es una base de $L(\lambda = 6)$.

Así, para la matriz:

$$\begin{array}{c} D = \begin{bmatrix} 2.a & 0 & -c & d/5 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 2.c & -2.d/5 \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}, \ a,b,c,d \neq 0 \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \overline{k}_3 & \overline{k}_4 \end{array} \end{array}$$

también sucede que $D^{-1} \bullet A \bullet D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Puedes comprobar que "D" es regular si "a", "b", "c" y "d" son no nulos; por tanto, existe D^{-1} para cualesquiera valores no nulos de "a", "b", "c" y "d".

FONEMATO 8.2.10

Sea $B=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2,\overline{k}_3\}$ una base de $\Re^3$ y $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ un endomorfismo. Determine la matriz asociada a "f" respecto de la base "B" sabiendo que:

El vector $\overline{p}=\overline{k}_1+\overline{k}_3$ es autovector del autovalor $\lambda=2$.
El vector $\overline{q}=\overline{k}_3$ es autovector del autovalor $\lambda=3$.
El vector $\overline{w}=\overline{k}_1+\overline{k}_2$ es tal que $f(\overline{w})=\overline{k}_1+\overline{k}_2+\overline{k}_3$.

SOLUCIÓN

Siendo "A" la matriz asociada a "f" respecto de "B", si $\overline{x}\in\Re^3$, es $f(\overline{x})=A\bullet\overline{x}$.

- Si $\overline{p}=1\bullet\overline{k}_1+0\bullet\overline{k}_2+1\bullet\overline{k}_3=(1;0;1)$ es autovector de $\lambda=2$, es $f(\overline{p})=2\bullet\overline{p}$, o sea: $A\bullet\overline{p}=2\bullet\overline{p}$.

$$A\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{\overline{p}}=\underbrace{\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}}_{2\bullet\overline{p}}\quad(\mathrm{I})$$

- Si $\overline{q}=0\bullet\overline{k}_1+0\bullet\overline{k}_2+1\bullet\overline{k}_3=(0;0;1)$ es autovector de $\lambda=3$, es $f(\overline{q})=3\bullet\overline{q}$, o sea: $A\bullet\overline{q}=3\bullet\overline{q}$.

$$A\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\overline{q}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}}_{3\bullet\overline{q}}\quad(\mathrm{II})$$

- Si $\overline{w}=1\bullet\overline{k}_1+1\bullet\overline{k}_2+0\bullet\overline{k}_3=(1;1;0)$ es tal que $f(\overline{w})=\overline{k}_1+\overline{k}_2+\overline{k}_3=(1;1;1)$, debe ser:

$$A\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{\overline{w}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{f(\overline{w})}\quad(\mathrm{III})$$

- Se verifican (I), (II) y (III), se cumplirá:

$$A\bullet\overbrace{\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}}^{M}=\overbrace{\begin{bmatrix}2&0&1\\0&0&1\\2&3&1\end{bmatrix}}^{N}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{cccccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \overline{p}&\overline{q}&\overline{w}&2\bullet\overline{p}&3\bullet\overline{q}&f(\overline{w})\end{array}$$

premultiplicando ambos miembros por M^{-1}, que existe, pues $|M|\neq 0$

$$\Rightarrow A=N\bullet M^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$$

8.3 POTENCIAS DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si la matriz cuadrada "A" no es diagonalizable y "k" es un número natural, para determinar la matriz A^k no hay más remedio que multiplicar la matriz "A" por sí misma "k" veces. Pero si "A" es diagonalizable, será posible encontrar una matriz cuadrada "C" del mismo orden que "A" y tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$, donde "D" es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A"; así, es:

$$A = C \bullet D \bullet C^{-1}$$

Por tanto:

$$A^2 = A \bullet A = (C \bullet D \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^2 \bullet C^{-1}$$
$$A^3 = A^2 \bullet A = (C \bullet D^2 \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^3 \bullet C^{-1}$$
$$A^4 = A^3 \bullet A = (C \bullet D^3 \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^4 \bullet C^{-1}$$
::
$$A^k = A^{k-1} \bullet A = (C \bullet D^{k-1} \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet D^k \bullet C^{-1}$$

Observa: como la matriz "D" es diagonal, para calcular D^k basta elevar a "k" los elementos de la diagonal principal de "D".

FONEMATO 8.3.1

Calcúlese A^4, siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

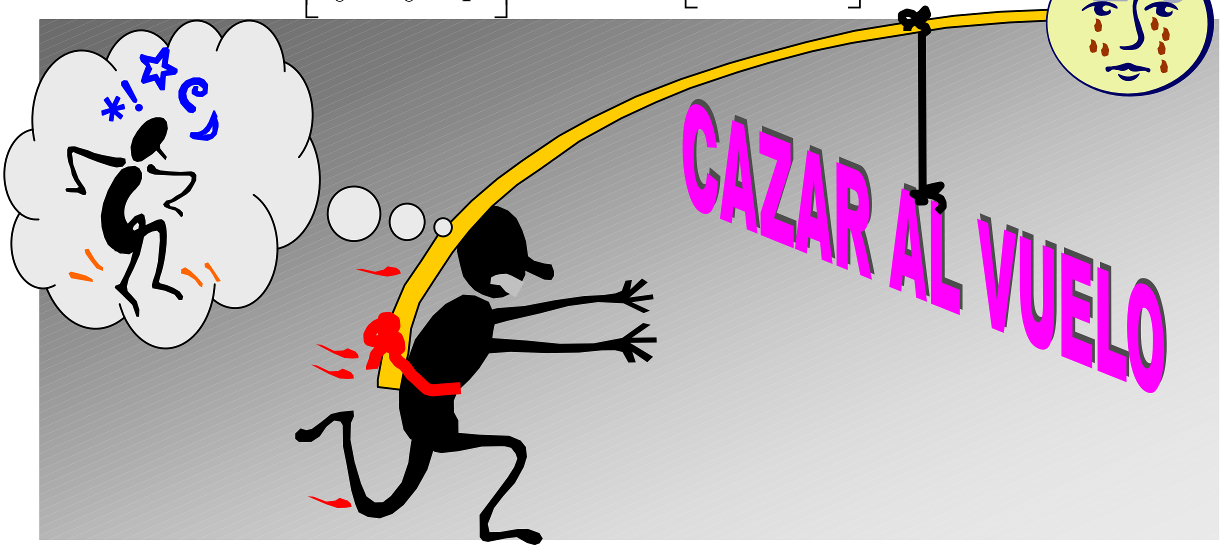
SOLUCIÓN

La matriz dada "A" es diagonalizable (es la del ejercicio 8.2.1).

Siendo $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, es $C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$. Por tanto:

$$A^4 = C \bullet D^4 \bullet C^{-1} = C \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^4 \bullet C^{-1} =$$

$$= C \bullet \begin{bmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1^4 \end{bmatrix} \bullet C^{-1} = C \bullet \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet C^{-1} = \ldots\ldots$$



FONEMATO 8.3.2

En la ínsula de Barataria hay tres empresas, Ferroín, Ferroval y Baraferro, que fabrican ferrines no valigerables. En la actualidad, Ferroín controla el 60 % del mercado, y las otras se reparten el resto por partes iguales.

Se ha comprobado que de un año a otro, Ferroval consigue hacerse con el 20 % del mercado controlado anteriormente por Ferroín, y con el 30 % del de Baraferro. A su vez, Ferroín consigue arrebatar el 40 % del mercado controlado por sus competidores; y finalmente, Baraferro consigue el 60 % del mercado controlado anteriormente por Ferroín y el 10 % del controlado por Ferroval. Si esta dinámica se mantiene a lo largo del tiempo, representar matricialmente la evolución del reparto del mercado de ferrines no valigerables, y la distribución del mercado a largo plazo.

SOLUCIÓN

Consideramos que el instante actual es el año cero $(k=0)$.

Sea $\overline{m}_k = (x_k ; y_k ; z_k) \in \Re^3$ el vector que expresa las cuotas de mercado controladas respectivamente por Ferroín, Ferroval y Baraferro en el k-ésimo año, y $\overline{m}_{k+1} = (x_{k+1} ; y_{k+1} ; z_{k+1}) \in \Re^3$ el vector que expresa las cuotas de mercado controladas respectivamente por dichas empresas el año siguiente.

Se nos dice que para $k=0$ es $\overline{m}_0 = (0'6;0'2;0'2)$. Si año tras año los robos de cuotas de mercado suceden como nos indican, es obvio que:

$$x_{k+1} = 0'2.x_k + 0'4.y_k + 0'4.z_k$$

VENTANA

La cuota de mercado de Ferroín en el año "k+1" es el 20 % de la que tenía el año "k" (pues Ferroval le roba el 20 % y Baraferro el 60 %), más el 40 % de la cuota de mercado de Ferroval en el año "k", más el 40 % de la cuota de Baraferro en el año "k".

$$y_{k+1} = 0'2.x_k + 0'5.y_k + 0'3.z_k$$

La cuota de mercado de Ferroval en el año "k+1" es el 50 % de la que tenía el año "k" (pues Ferroín le roba el 40 % y Baraferro el 10 %), más el 20 % de la cuota de mercado de Ferroín en el año "k", más el 30 % de la cuota de Baraferro en el año "k".

$$z_{k+1} = 0'6.x_k + 0'1.y_k + 0'3.z_k$$

La cuota de mercado de Baraferro en el año "k+1" es el 30 % de la que tenía el año "k" (pues Ferroín le roba el 40 % y Ferroval el 30 %), más el 60 % de la cuota de mercado de Ferroín en el año "k", más el 10 % de la cuota de Ferroval en el año "k".

Escribiendo matricialmente, es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix}}_{\overline{m}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'2 & 0'5 & 0'3 \\ 0'6 & 0'1 & 0'3 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}}_{\overline{m}_k}$$

Siendo $\overline{m}_{k+1} = A \bullet \overline{m}_k$, resulta evidente que:

$$\overline{m}_1 = A \bullet \overline{m}_0$$
$$\overline{m}_2 = A \bullet \overline{m}_1 = A \bullet (A \bullet \overline{m}_0) = A^2 \bullet \overline{m}_0$$
$$\overline{m}_3 = A \bullet \overline{m}_2 = A \bullet (A^2 \bullet \overline{m}_0) = A^3 \bullet \overline{m}_0$$
$$\overline{m}_4 = A \bullet \overline{m}_3 = A \bullet (A^3 \bullet \overline{m}_0) = A^4 \bullet \overline{m}_0$$
$$::$$
$$\overline{m}_k = A \bullet \overline{m}_{k-1} = A \bullet (A^{k-1} \bullet \overline{m}_0) = A^k \bullet \overline{m}_0$$

Al pedirnos la distribución del mercado a largo plazo, piden que calculemos el vector al que tiende $\overline{m}_k = A^k \bullet \overline{m}_0$ si $k \to \infty$... y **rezamos** para que "A" sea diagonalizable; o sea, para que exista una matriz "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$, siendo "D" una matriz diagonal, pues en tal caso será $A = C \bullet D \bullet C^{-1}$, con lo que $A^k = C \bullet D^k \bullet C^{-1}$, y así:

$$\lim_{k\to\infty} \overline{m}_k = \lim_{k\to\infty} A^k \bullet \overline{m}_0 = \lim_{k\to\infty} C \bullet D^k \bullet C^{-1} \bullet \overline{m}_0 =$$

$$= \lim_{k\to\infty} C \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0'2 & 0 \\ 0 & 0 & 0'2 \end{bmatrix}^k \bullet C^{-1} \bullet \overline{m}_0 =$$

VENTANA

* Cálculo de los autovalores de "A":

$$|A - \lambda \bullet I| = -\lambda^3 + \lambda^2 + 0'04.\lambda - 0'04 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -0'2, 0'2$$

Como los autovalores son distintos, "A" es diagonalizable.

* Puedes comprobar que los subespacios de autovectores son:

$$L(\lambda = 1) = \{(a;a;a),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;1;1),\ \forall a \in \Re\}$$
$$L(\lambda = -0'2) = \{(-4.b;-b;5.b),\ \forall b \in \Re\} = \{b \bullet (-4;-1;5),\ \forall b \in \Re\}$$
$$L(\lambda = 0'2) = \{(0;-c;c.),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (0;-1;1),\ \forall c \in \Re\}$$

Así, siendo $C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, es $D = C^{-1} \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0'2 & 0 \\ 0 & 0 & 0'2 \end{bmatrix}$

$$= \lim_{k\to\infty} C \bullet \begin{bmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & (-0'2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0'2^k \end{bmatrix} \bullet C^{-1} \bullet \overline{m}_0 =$$

pues $(-0'2)^k$ y $0'2^k$ tienden a cero cuando $k \to \infty$

$$= C \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet C^{-1} \bullet \overline{m}_0 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \bullet \overline{m}_0 =$$

$$\boxed{C \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0'6 \\ 0'2 \\ 0'2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

O sea, la matriz "A" que gobierna la feroz guerra que se desarrolla entre Ferroín, Ferroval y Baraferro a causa de los ferrines no valigerables es tan mágica que la distribución de cuotas de mercado entre las tres empresas tiende a **estabilizarse** a medida que pasa el tiempo.

En el ejemplo, la **estabilidad** consiste en que, a medida que pasa el tiempo, el mercado **tiende a repartirse por partes iguales entre las tres empresas.** Además, se tiende a la forma de estabilidad descrita **con independencia del reparto inicial** $(\overline{m}_0)$ **del mercado,** pues si en vez de ser $\overline{m}_0 = (0'6;0'2;0'2)$ fuera $\overline{m}_0 = (p;q;r)$, siendo "p", "q" y "r" reales entre 0 y 1 y tales que $p+q+r=1$, sería:

$$\lim_{k\to\infty} \overline{m}_k = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p+q+r)/3 \\ (p+q+r)/3 \\ (p+q+r)/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Observa: en general, si la distribución de cuotas de mercado tiende a la estabilidad, entonces $\lambda = 1$ debe ser autovalor de la matriz "A" que gobierna la guerra por el mercado, y la situación estable está expresada por un autovector de $\lambda = 1$. En efecto, al hablar de una situación estable hablamos de una situación tal que si se alcanza no se modifica con el paso del tiempo; o sea, de una situación en la que $\overline{m}_{k+1} = \overline{m}_k$, y al exigir que se satisfaga esta condición, resulta:

$$\overline{m}_{k+1} = \overline{m}_k \Rightarrow A \bullet \overline{m}_k = \overline{m}_k \Rightarrow (A - 1 \bullet I) \bullet \overline{m}_k = \overline{0}$$

que indica que $\lambda = 1$ es autovalor de "A" y $\overline{m}_k$ es un autovector de $\lambda = 1$. Para nosotros, como $L(\lambda = 1) = \{(a;a;a),\ \forall a \in \Re\}$, y ha de ser $a + a + a = 1$, resulta $a = 1/3$. Por tanto, la situación estable es la que reparte el mercado en partes iguales entre las tres empresas.

8.4 LA SEMEJANZA DE MATRICES Y LOS ENDOMORFISMOS

Al afirmar que dos matrices son semejantes se afirma que ambas representan al mismo endomorfismo, pero respecto de bases distintas.

En su momento vimos que si D_1 y D_2 son matrices cuadradas de orden "n", se dice que son semejantes si es posible encontrar una matriz regular "C" (cuadrada de orden "n") tal que $D_2 = C^{-1} \bullet D_1 \bullet C$... y también vimos que dos matrices semejantes tienen el mismo determinante y la misma traza:

$$|D_2| = |C^{-1} \bullet D_1 \bullet C| = |C^{-1}|.|D_1|.|C| = |D_1|$$

$$\boxed{|C^{-1}|.|C| = 1}$$

$$Tr(D_2) = Tr(C^{-1} \bullet D_1 \bullet C) = Tr(C^{-1} \bullet (D_1 \bullet C)) = Tr((D_1 \bullet C) \bullet C^{-1}) =$$

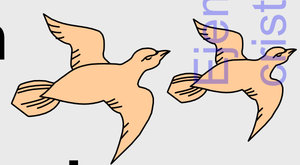
$$\boxed{Tr(Pepa \bullet Juana) = Tr(Juana \bullet Pepa)}$$

$$= Tr(D_1 \bullet C \bullet C^{-1}) = Tr(D_1)$$

$$\boxed{C \bullet C^{-1} = I \Rightarrow D_1 \bullet C \bullet C^{-1} = D_1}$$

Sabemos que si "f" es un endomorfismo definido sobre un espacio vectorial "V" de dimensión "n" y A_1 es la matriz (cuadrada de orden "n") asociada a "f" respecto de la base B_1, entonces, si B_2 es otra base de "V" y "C" es la matriz asociada al cambio $B_1 \to B_2$ (por tanto "C" es cuadrada de orden "n" y regular), la matriz A_2 asociada a "f" respecto de la base B_2 es $A_2 = C^{-1} \bullet A_1 \bullet C$; así, A_1 y A_2 son semejantes ($\Rightarrow tr(A_1) = tr(A_2)$ y $|A_1| = |A_2|$).

El primer objetivo de quien no se chupa el dedo es averiguar cuanto antes si se ha equivocado de Carrera o no... y eso te lo dicen las Matemáticas, no las asignaturas fáciles que aprueba todo el mundo.



8.5 TEOREMAS DIVERSOS

0) El polinomio característico de un endomorfismo $f: V_n \mapsto V_n$ no depende de la base de referencia empleada para identificar a los vectores de V_n.

En efecto, si A_1 y A_2 son las matrices asociadas a "f" respecto de dos bases de V_n, existe una matriz "C" tal que $A_2 = C^{-1} \bullet A_1 \bullet C$, así:

$$A_2 - \lambda \bullet I = C^{-1} \bullet A_1 \bullet C - \lambda \bullet I = C^{-1} \bullet A_1 \bullet C - \lambda \bullet C^{-1} \bullet C =$$
$$= C^{-1} \bullet (A_1 \bullet C - \lambda \bullet C) = C^{-1} \bullet (A_1 - \lambda \bullet I) \bullet C$$

luego, al tomar determinantes, es:

$$|A_2 - \lambda \bullet I| = |C^{-1} \bullet (A_1 - \lambda \bullet I) \bullet C| = |C^{-1}|.|A_1 - \lambda \bullet I|.|C| =$$
$$= |A_1 - \lambda \bullet I|, \text{ pues } |C^{-1}|.|C| = 1$$

- Como consecuencia inmediata se deduce que los autovalores de un endomorfismo $f: V_n \mapsto V_n$ no dependen de la base de referencia empleada para identificar a los vectores de V_n, pues los autovalores son las raíces del polinomio característico, y éste no depende de la base de referencia elegida.

Observa: hablando en términos matriciales, hemos demostrado que dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico; por tanto, tienen los mismos autovalores.

1) Una matriz (cuadrada) y su traspuesta tienen los mismos autovalores.

En efecto, recordando que $|A| = |A^t|$, es:

$$|A - \lambda \bullet I| = |(A - \lambda \bullet I)^t| = |A^t - \lambda \bullet I^t| = |A^t - \lambda \bullet I|$$

2) Los autovalores de una matriz simétrica siempre son números reales, lo que no tiene porqué suceder si la matriz no es simétrica.

La demostración es un petardo, pasamos de ella.

3) Autovectores asociados a autovalores **distintos** de una matriz simétrica son ortogonales.

En efecto, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de la matriz simétrica "A", y $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son autovectores asociados respectivamente a λ_1 y λ_2, es:

$$A \bullet \overline{h}_1 = \lambda_1 \bullet \overline{h}_1 \quad \text{(I)}$$
$$A \bullet \overline{h}_2 = \lambda_2 \bullet \overline{h}_2 \quad \text{(II)}$$

Al multiplicar escalarmente por $\overline{h}_2$ los dos miembros de (I), se obtiene:

$$\overline{h}_2 \bullet (A \bullet \overline{h}_1) = \lambda_1 \bullet (\overline{h}_2 \bullet \overline{h}_1) \quad \text{(III)}$$

Al multiplicar escalarmente por $\overline{h}_1$ los dos miembros de (II), se obtiene:

$$\overline{h}_1 \bullet (A \bullet \overline{h}_2) = \lambda_2 \bullet (\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_2) \quad \text{(IV)}$$

Al restar miembro a miembro (III) y (IV), como $\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_2 = \overline{h}_2 \bullet \overline{h}_1$, resulta:

$$\overline{h}_2 \bullet (A \bullet \overline{h}_1) - \overline{h}_1 \bullet (A \bullet \overline{h}_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) \bullet (\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_2) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{"A" simétrica} \Rightarrow \overline{h}_2 \bullet (A \bullet \overline{h}_1) = \overline{h}_1 \bullet (A \bullet \overline{h}_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{h}_2 \bullet (A \bullet \overline{h}_1) - \overline{h}_1 \bullet (A \bullet \overline{h}_2) = 0 \end{array}}$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \bullet (\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_2) \Rightarrow \overline{h}_1 \bullet \overline{h}_2 = 0$$

$$\boxed{\text{pues como } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ es } \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0}$$

que demuestra que los autovectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$, asociados respectivamente a los autovalores λ_1 y λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), son ortogonales.

4) Teorema fundamental de la diagonalización

Un endomorfismo $f: V_n \mapsto V_n$ es diagonalizable si y sólo si existe una base de V_n formada por autovectores de "f".

En efecto, sea $f: V_n \mapsto V_n$ un endomorfismo que tiene asociada la matriz "A" respecto de la base "B" de V_n.

$\boxed{\Rightarrow}$

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de "f" (puede haberlos repetidos).

Si "f" es diagonalizable, es posible encontrar una matriz regular "C" tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$, siendo "D" la matriz diagonal formada por los autovalores de "f"; o sea:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots\ldots & 0 \\ : & :::: & 0 \\ 0 & :::: & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sea $\overline{h}_k$ $(k = 1,2,\ldots.,n)$ el vector de V_n cuyas coordenadas respecto de la base "B" son las que forman la k-ésima columna de la matriz "C"; o sea:

$$\boxed{\text{Expresamos "C" mediante "bloques"}}$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & \vdots & c_{2k} & \vdots & c_{2n} \\ : & \vdots & : & \vdots & : \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \ldots & \uparrow & \ldots & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \ldots & \overline{h}_k & \ldots & \overline{h}_n \end{array} \end{array} = [\overline{h}_1 \;\; \ldots \;\; \overline{h}_k \;\; \ldots \;\; \overline{h}_n]$$

Como "C" tiene determinante no nulo, los "n" vectores $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k, \ldots, \overline{h}_n$ son LI, y por tanto forman una base de V_n.

Demostremos ahora que los vectores $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k, \ldots, \overline{h}_n$ son autovectores de "f": como $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$, es $A \bullet C = C \bullet D$, y como

$$A \bullet C = A \bullet [\overline{h}_1 \;\; \ldots \;\; \overline{h}_k \;\; \ldots \;\; \overline{h}_n]$$

y

$$C \bullet D = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \cdots & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \cdots & \overline{h}_k & \cdots & \overline{h}_n \end{matrix} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \lambda_1.c_{11} & \cdots & \lambda_k.c_{1k} & \cdots & \lambda_n.c_{1n} \\ \lambda_1.c_{21} & \cdots & \lambda_k.c_{2k} & \cdots & \lambda_n.c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1.c_{n1} & \cdots & \lambda_k.c_{nk} & \cdots & \lambda_n.c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \cdots & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \lambda_1 \bullet \overline{h}_1 & \cdots & \lambda_k \bullet \overline{h}_k & \cdots & \lambda_n \bullet \overline{h}_n \end{matrix} \end{array} =$$

expresando $C \bullet D$ mediante "bloques"

$$= \left[\lambda_1 \bullet \overline{h}_1 \quad \cdots \quad \lambda_k \bullet \overline{h}_k \quad \cdots \quad \lambda_n \bullet \overline{h}_n \right]$$

al exigir que $A \bullet C = C \bullet D$, resulta:

$$A \bullet \left[\overline{h}_1 \quad \cdots \quad \overline{h}_k \quad \cdots \quad \overline{h}_n \right] = \left[\lambda_1 \bullet \overline{h}_1 \quad \cdots \quad \lambda_k \bullet \overline{h}_k \quad \cdots \quad \lambda_n \bullet \overline{h}_n \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[A \bullet \overline{h}_1 \quad \cdots \quad A \bullet \overline{h}_k \quad \cdots \quad A \bullet \overline{h}_n \right] = \left[\lambda_1 \bullet \overline{h}_1 \quad \cdots \quad \lambda_k \bullet \overline{h}_k \quad \cdots \quad \lambda_n \bullet \overline{h}_n \right]$$

lo que indica que es $A \bullet \overline{h}_k = \lambda_k \bullet \overline{h}_k$ $(k = 1,2,\dots,n)$; o sea, $\overline{h}_k$ es autovector del autovalor λ_k.

$\Leftarrow$

Supongamos que $\overline{h}_1, .., \overline{h}_k, .., \overline{h}_n$ son autovectores de "f" y forman una base de V_n. Sea "C" la matriz cuadrada cuya k-ésima columna $(k = 1,2,\dots,n)$ está formada por las coordenadas del vector $\overline{h}_k$ respecto de la base "B"; o sea, si las coordenadas de $\overline{h}_k$ respecto de "B" son $(c_{1k}; c_{1k}; \dots; c_{nk})$, entonces:

Expresamos "C" mediante "bloques"

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \cdots & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \cdots & \overline{h}_k & \cdots & \overline{h}_n \end{matrix} \end{array} = \left[\overline{h}_1 \quad \cdots \quad \overline{h}_k \quad \cdots \quad \overline{h}_n \right]$$

Como los vectores $\overline{h}_1, .., \overline{h}_k, .., \overline{h}_n$ son una base de V_n, la matriz "C" tiene determinante no nulo; y por tanto, existe la matriz C^{-1}. Es:

$$A \bullet C = A \bullet \left[\overline{h}_1 \quad \cdots \quad \overline{h}_k \quad \cdots \quad \overline{h}_n \right] =$$

$$= \left[A \bullet \overline{h}_1 \quad \cdots \quad A \bullet \overline{h}_k \quad \cdots \quad A \bullet \overline{h}_n \right] =$$

como $\overline{h}_k$ es autovector de "f" $\Rightarrow \exists \lambda_k \, / \, A \bullet \overline{h}_k = \lambda_k \bullet \overline{h}_k, \forall k = 1,2,\dots,n$

$$= \left[\lambda_1 \bullet \overline{h}_1 \quad \dots \quad \lambda_k \bullet \overline{h}_k \quad \dots \quad \lambda_n \bullet \overline{h}_n \right] =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \lambda_1.c_{11} & \dots & \lambda_k.c_{1k} & \dots & \lambda_n.c_{1n} \\ \lambda_1.c_{21} & \dots & \lambda_k.c_{2k} & \dots & \lambda_n.c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1.c_{n1} & \dots & \lambda_k.c_{nk} & \dots & \lambda_n.c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \dots & \uparrow & \dots & \uparrow \\ \lambda_1 \bullet \overline{h}_1 & \dots & \lambda_k \bullet \overline{h}_k & \dots & \lambda_n \bullet \overline{h}_n \end{array} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2k} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \dots & \uparrow & \dots & \uparrow \\ \overline{h}_1 & \dots & \overline{h}_k & \dots & \overline{h}_n \end{array} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = C \bullet D$$

Como $A \bullet C = C \bullet D$ y "C" tiene inversa, es $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$ (siendo "D" la matriz diagonal formada por los autovalores de "f") $\Rightarrow$ "f" es diagonalizable.

5) Autovectores asociados a autovalores distintos son LI

En efecto, sea "A" una matriz cuadrada, siendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sus autovalores, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $i,j = 1, 2, \dots, k$.

Sean $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_k$ autovectores asociados respectivamente a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$; así: $A \bullet \overline{v}_i = \lambda_i \bullet \overline{v}_i$.

Por inducción: para $k = 1$ es $\alpha_1 \bullet \overline{v}_1 = \overline{0}$, y como $\overline{v}_1 \neq \overline{0}$ (por ser $\overline{v}_1$ un vector propio), es $\alpha_1 = 0$, luego $\overline{v}_1$ es linealmente independiente. Supuesto cierto para $k = k - 1$, demostremos que también es cierto para $k = k$.

Sea la ecuación:

$$\alpha_1 \bullet \overline{v}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{v}_2 + \dots + \alpha_k \bullet \overline{v}_k = \overline{0} \quad \text{(I)}$$

Así:

$$A \bullet (\alpha_1 \bullet \overline{v}_1) + A \bullet (\alpha_2 \bullet \overline{v}_2) + \dots + A \bullet (\alpha_k \bullet \overline{v}_k) = A \bullet \overline{0} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bullet (A \bullet \overline{v}_1) + \alpha_2 \bullet (A \bullet \overline{v}_2) + \dots + \alpha_k \bullet (A \bullet \overline{v}_k) = \overline{0}$$

$$\boxed{A \bullet \overline{v}_i = \lambda_i \bullet \overline{v}_i}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bullet (\lambda_1 \bullet \overline{v}_1) + \alpha_2 \bullet (\lambda_2 \bullet \overline{v}_2) + \dots + \alpha_k \bullet (\lambda_k \bullet \overline{v}_k) = \overline{0} \quad \text{(II)}$$

Multiplicando por λ_k los dos miembros de (I), es:

$$\lambda_k \bullet (\alpha_1 \bullet \overline{v}_1) + \lambda_k \bullet (\alpha_2 \bullet \overline{v}_2) + \dots + \lambda_k \bullet (\alpha_k \bullet \overline{v}_k) = \overline{0} \quad \text{(III)}$$

Restando miembro a miembro (II) y (III), resulta:

$$((\lambda_1 - \lambda_k).\alpha_1) \bullet \overline{v}_1 + \dots + ((\lambda_{k-1} - \lambda_k).\alpha_{k-1}) \bullet \overline{v}_{k-1} = \overline{0} \quad \text{(IV)}$$

y como los vectores $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_{k-1}$ son linealmente independientes (por el método de inducción), los coeficientes de la anterior ecuación son todos nulos; o sea, es $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, pues por ser distintos todos los autovalores, sucede que $\lambda_1 - \lambda_k \neq 0, \lambda_2 - \lambda_k \neq 0, \dots\dots + \lambda_{k-1} - \lambda_k \neq 0$.

Haciendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$ en (I), resulta que $\alpha_k \bullet \overline{v}_k = \overline{0}$, y como $\overline{v}_k \neq \overline{0}$ (por ser $\overline{v}_k$ un vector propio), ha de ser $\alpha_k = 0$. Por tanto, se verifica (I) sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, por lo que $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_k$ son LI.

6) Si λ es autovalor de la matriz "A" y $k \in \Re \Rightarrow \lambda . k$ es autovalor de $k \bullet A$:

$$\left|k \bullet A-(\lambda . k) \bullet I\right|=\left|k \bullet(A-\lambda \bullet I)\right| \underset{\uparrow}{=} k^{n} .\left|A-\lambda \bullet I\right|=0$$

$\boxed{\text{si "A" es cuadrada de orden "n"}}$

7) Si λ es autovalor de la matriz "A" y $k \in \Re \Rightarrow \lambda + k$ es autovalor de $A + k \bullet I$:

$$\left|(A+k \bullet I)-(\lambda+k) \bullet I\right|=\left|A+k \bullet I-\lambda \bullet I-k \bullet I\right|=\left|A-\lambda \bullet I\right|=0$$

8) Si λ es autovalor de "A" y "k" es un número natural, λ^k es autovalor de A^k.

En efecto, si λ es autovalor de "A" $\Rightarrow \exists\, \overline{x} \neq \overline{0}$ tal que $A \bullet \overline{x} = \lambda \bullet \overline{x}$; así:

$$A \bullet (A \bullet \overline{x}) = A \bullet (\lambda \bullet \overline{x}) \Rightarrow A^2 \bullet \overline{x} = \lambda \bullet (A \bullet \overline{x}) \Rightarrow A^2 \bullet \overline{x} \underset{\uparrow}{=} \lambda^2 \bullet \overline{x}$$

$\boxed{A \bullet \overline{x} = \lambda \bullet \overline{x}}$

lo que demuestra que λ^2 es autovalor de A^2. Análogamente:

$$A \bullet (A^2 \bullet \overline{x}) = A \bullet (\lambda^2 \bullet \overline{x}) \Rightarrow A^3 \bullet \overline{x} = \lambda^2 \bullet (A \bullet \overline{x}) \Rightarrow A^3 \bullet \overline{x} \underset{\uparrow}{=} \lambda^3 \bullet \overline{x}$$

$\boxed{A \bullet \overline{x} = \lambda \bullet \overline{x}}$

lo que demuestra que λ^3 es autovalor de A^3... y así sucesivamente.

9) Si λ es autovalor de la matriz regular "A" $\Rightarrow \lambda^{-1}$ es autovalor de A^{-1}.

En efecto, si λ es autovalor de "A" $\Rightarrow \exists\, \overline{x} \neq \overline{0}$ tal que $A \bullet \overline{x} = \lambda \bullet \overline{x}$; así:

$$A^{-1} \bullet (A \bullet \overline{x}) = A^{-1} \bullet (\lambda \bullet \overline{x}) \Rightarrow \overline{x} = \lambda \bullet (A^{-1} \bullet \overline{x}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda^{-1} \bullet \overline{x} = A^{-1} \bullet \overline{x}$$

lo que demuestra que λ^{-1} (o sea, $1/\lambda$) es autovalor de la matriz A^{-1}.

8.6 CAJA DE JORDAN

Se llama **caja o bloque de Jordan** a toda matriz cuadrada tal que todos los elementos de su diagonal principal son iguales, siendo 1 los elementos de la primera paralela superior a dicha diagonal y 0 los demás elementos de la matriz.

Ejemplo:

Las siguientes matrices son cajas de Jordan:

$$\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8.7 FORMA CANÓNICA DE JORDAN

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y $f:V \mapsto V$ un endomorfismo con matriz asociada "A" respecto de la base "B" de "V".
Si no hay una base de "V" formada por autovectores de "f", no hay matriz diagonal semejante a "A"; pero hay una base B_J de "V", llamada base de Jordan, tal que la matriz "J" asociada a "f" respecto de B_J es semejante a "A", siendo "J" una matriz cuadrada de orden "n" que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A", siendo 1 o 0 los elementos de la primera paralela superior a dicha diagonal, y 0 los demás elementos de "J", que puede expresarse de la forma

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

donde "r" es la suma de las dimensiones de los subespacios de autovectores de los distintos autovalores y los J_i $(i = 1,2, \ldots ,r)$ son cajas de Jordan.

El número de veces que el autovalor λ aparece en la diagonal principal de "J" coincide con la MA de λ, y el número de cajas de Jordan que "aporta" λ coincide con su MG. Si "f" es diagonalizable, la matriz "J" es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "f".

Si "A" es cuadrada de orden 3 y no diagonalizable, por fuerza debe presentarse alguno de los siguientes dos casos:

1) "A" tiene un autovalor triple λ.

- Si $\dim.L(\lambda) = 2 \Rightarrow$ "f" no es diagonalizable y "J" está formada por 2 cajas de Jordan (el número de cajas de Jordan coincide con $\dim.L(\lambda)$). Así, según nos guste más una u otra, podemos elegir entre las siguientes dos:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ó } J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- Si $\dim.L(\lambda) = 1 \Rightarrow$ "f" no es diagonalizable y "J" está formada por 1 caja de Jordan (el número de cajas de Jordan coincide con $\dim.L(\lambda)$). Así, es:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

2) "A" tiene un autovalor simple λ_1 y otro doble λ_2.

- Si $\dim.L(\lambda_2) = 1 \Rightarrow$ "f" no es diagonalizable y "J" está formada por 2 cajas de Jordan (una correspondiente al autovalor λ_1 y otra al autovalor λ_2).

  Así, según nos guste más una u otra podemos elegir entre las siguientes dos:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ ó } J = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 8.7.1 (AUTOVALOR TRIPLE Y DOS CAJAS DE JORDAN)

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 - 2.x_2;2.x_2;-x_2 + 2.x_3)$.

Determine una forma canónica de Jordan correspondiente a "f".

SOLUCIÓN

- Expresión matricial de "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{I})$$

$f(\bar{x})$ respecto B_c — $\bar{x}$ respecto B_c

$$\begin{array}{ccc} \Re^3 & \xrightarrow{f} & \Re^3 \\ \bar{x} & \longrightarrow & f(\bar{x}) \end{array}$$

- Autovalores: $|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 6.\lambda^2 - 12.\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ (triple).
- "f" no es diagonalizable, pues la MA de $\lambda = 2$ es 3, y su MG es 2:

$$\dim.L(\lambda = 2) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 2 \bullet I) = 3 - rg\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$$

- Como hará falta, determinemos el subespacio de autovectores de $\lambda = 2$:

$$(A - 2 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow$$

eliminamos las ecuaciones 1ª y 2ª, parametrizamos x_1 y x_3

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(a;0;b),\ \forall a,b \in \Re\}$$

Como "f" no es diagonalizable, no existe ninguna base de $\Re^3$ respecto de la cual la matriz asociada a "f" sea diagonal; o sea, no hay ninguna matriz diagonal semejante a "A". Pero en $\Re^3$ es posible encontrar una base B_J de Jordan tal que la matriz "J" asociada a "f" respecto de B_J es semejante a "A", siendo "J" una matriz cuadrada que en la diagonal principal tiene el autovalor $\lambda = 2$, siendo unos o ceros los elementos situados en la primera paralela superior a dicha diagonal y ceros los demás elementos de la matriz.

Una matriz "J" de Jordan semejante a "A"

Como la multiplicidad algebraica de $\lambda = 2$ es 3, el número 2 aparece 3 veces en la diagonal de la matriz de Jordan, y como la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es 2, la matriz "J" está formada por dos cajas de Jordan.

Así, podemos elegir una cualquiera de las dos siguientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Elegimos la primera: $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Para determinar la base $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ de Jordan respecto de la cual la matriz asociada a "f" es "J", tendremos en cuenta que ha de ser:

$$\underbrace{f(\bar{v}_1) = 2 \bullet \bar{v}_1 \;;\; f(\bar{v}_2) = 2 \bullet \bar{v}_2 \;;\; f(\bar{v}_3) = 1 \bullet \bar{v}_2 + 2 \bullet \bar{v}_3}$$

VENTANA

Si la base de referencia en $\Re^3$ es $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$, las columnas de la matriz "J" asociada a "f" respecto de "B" son $f(\bar{v}_1)$, $f(\bar{v}_2)$ y $f(\bar{v}_3)$:

$$J = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\bar{v}_1) & f(\bar{v}_2) & f(\bar{v}_3) \end{array} \end{array}$$

Así:

- El vector $\bar{v}_1$ es autovector de $\lambda = 2$, pues $f(\bar{v}_1) = 2 \bullet \bar{v}_1$. Por ejemplo, tomamos $\bar{v}_1 = (1;0;0)$, obtenido de $L(\lambda = 2) = \{(a;0;b)\}$ al hacer $a = 1$ y $b = 0$.
- El vector $\bar{v}_2$ es un autovector de $\lambda = 2$, pues es $f(\bar{v}_2) = 2 \bullet \bar{v}_2$; tomamos $\bar{v}_2 = (a;0;b)$, siendo $b \neq 0$, pues si fuera $b = 0$ los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ no serían LI, por lo que $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ no sería base de $\Re^3$.
- El vector $\bar{v}_3 = (z_1;z_2;z_3)$ ha de ser tal que:

$$f(\bar{v}_3) = 1 \bullet \bar{v}_2 + 2 \bullet \bar{v}_3 \Rightarrow f(\bar{v}_3) - 2 \bullet \bar{v}_3 = 1 \bullet \bar{v}_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{f(\bar{v}_3) = A \bullet \bar{v}_3}$$

$$\Rightarrow A \bullet \bar{v}_3 - 2 \bullet \bar{v}_3 = 1 \bullet \bar{v}_2 \Rightarrow (A - 2 \bullet I) \bullet \bar{v}_3 = 1 \bullet \bar{v}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

VENTANA

La matriz de los coeficientes del sistema es $A - 2 \bullet I$, cuyo rango es 1; así, el SL sólo tiene solución si la matriz ampliada también tiene rango 1:

$$rg \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b \end{array}\right] = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & a \\ -1 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2.b + a = 0 \Rightarrow a = 2.b \Rightarrow \bar{v}_2 = (2.b;0;b)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.b \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow -2.z_2 = 2.b \Rightarrow z_2 = -b$$

eliminamos las ecuaciones 2^a y 3^a y parametrizamos z_1 y z_3

Por tanto, el vector $\bar{v}_3$ es de la forma $\bar{v}_3 = (z_1; -b; z_3)$, donde "b" puede tomar cualquier valor no nulo y z_1 y z_3 pueden tomar los valores que queramos. Elegimos $b = 1$ y $z_1 = z_3 = 0$; así resulta $\bar{v}_3 = (0;-1;0)$ y $\bar{v}_2 = (2;0;1)$.

- La base $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ de Jordan respecto de la cual la matriz asociada a "f" es "J" resulta ser $B = \{\bar{v}_1 = (1;0;0), \bar{v}_2 = (2;0;1), \bar{v}_3 = (0;-1;0)\}$.

  Si en los espacios inicial y final tomamos como base de referencia la $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$, se modifican las coordenadas de $\bar{x}$ y de $f(\bar{x})$, y como la matriz "C" asociada al cambio de base $B_c \to B$ es

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{matrix} \end{array}$$

si $\bar{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*; x_2^*; x_3^*)$ respecto de "B" y $f(\bar{x})$ tiene coordenadas $(y_1^*; y_2^*; y_3^*)$, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad (II) \quad ; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} \quad (III)$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de la base de Jordan $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$:

$$C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} = A \bullet C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{C^{-1} \bullet A \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

NOTA: Si te molestas en ello, puedes comprobar que

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{J}$$

Es más cómodo comprobar que $A \bullet C = C \bullet J$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{J} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 8.7.2 (AUTOVALOR TRIPLE Y UNA CAJA DE JORDAN)

Sea $f:\mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\mathfrak{R}^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (4.x_1 + 8.x_2; 4.x_2 + 8.x_3; 4.x_3)$.

Determine una forma canónica de Jordan correspondiente a "f".

SOLUCIÓN

- Expresión matricial de "f" respecto de la base canónica de $\mathfrak{R}^3$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{f(\bar{x}) \text{ respecto } B_c} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\bar{x} \text{ respecto } B_c} \quad \text{(I)}$$

$$\mathfrak{R}^3 \xrightarrow{f} \mathfrak{R}^3, \qquad \bar{x} \longmapsto f(\bar{x})$$

- Como los autovalores de una matriz triangular son los elementos de su diagonal principal, resulta que $\lambda = 4$ es autovalor triple.

- El endomorfismo "f" no es diagonalizable, pues las respectivas multiplicidades algebraica (vale 3) y geométrica del autovalor $\lambda = 4$ no coinciden:

$$\dim.L(\lambda = 4) = \dim.(\mathfrak{R}^3) - rg(A - 4 \bullet I) = 3 - rg\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

- Como hará falta, determinemos el subespacio de autovectores de $\lambda = 4$:

$$(A - 4 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{matrix}} \\ 0 & \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos x_1

$$\Rightarrow L(\lambda = 4) = \{(a;0;0),\ \forall a \in \mathfrak{R}\}$$

El que "f" no sea diagonalizable significa que no existe ninguna base de $\mathfrak{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a "f" sea diagonal; o sea, no hay ninguna matriz diagonal semejante a "A". Pero en $\mathfrak{R}^3$ es posible encontrar una base B_J de Jordan tal que la matriz "J" asociada a "f" respecto de B_J es semejante a "A", siendo "J" una matriz cuadrada que en la diagonal principal tiene el autovalor $\lambda = 4$, siendo unos o ceros los elementos situados en la primera paralela superior a dicha diagonal y ceros los demás elementos de la matriz.

Una matriz "J" de Jordan semejante a "A"

Como la MA de $\lambda = 4$ es 3, el número 4 aparece 3 veces en la diagonal de la matriz de Jordan, y como la MG es 1, la matriz "J" está formada por una caja de Jordan. Por tanto, es:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Para determinar la base $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ de Jordan respecto de la cual la matriz asociada a "f" es "J", tendremos en cuenta que ha de ser:

$$f(\overline{v}_1) = 4 \bullet \overline{v}_1 \; ; \; f(\overline{v}_2) = 1 \bullet \overline{v}_1 + 4 \bullet \overline{v}_2 \; ; \; f(\overline{v}_3) = 1 \bullet \overline{v}_2 + 4 \bullet \overline{v}_3$$

Si la base de referencia en $\Re^3$ es $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$, las columnas de la matriz "J" asociada a "f" respecto de "B" son $f(\overline{v}_1)$, $f(\overline{v}_2)$ y $f(\overline{v}_3)$:

Así:

- El vector $\overline{v}_1$ es un autovector de $\lambda = 4$, pues es $f(\overline{v}_1) = 4 \bullet \overline{v}_1$. Tomamos $\overline{v}_1 = (a;0;0)$, siendo $a \neq 0$, pues si fuera $a = 0$ sería $\overline{v}_1 = (0;0;0)$ y entonces $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ no sería base de $\Re^3$.

- El vector $\overline{v}_2 = (z_1;z_2;z_3)$ ha de ser tal que:

$$f(\overline{v}_2) = 1 \bullet \overline{v}_1 + 4 \bullet \overline{v}_2 \Rightarrow f(\overline{v}_2) - 4 \bullet \overline{v}_2 = 1 \bullet \overline{v}_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{f(\overline{v}_2) = A \bullet \overline{v}_2}$$

$$\Rightarrow A \bullet \overline{v}_2 - 4 \bullet \overline{v}_2 = 1 \bullet \overline{v}_1 \Rightarrow (A - 4 \bullet I) \bullet \overline{v}_2 = 1 \bullet \overline{v}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

VENTANA

La matriz de los coeficientes del sistema es la $A - 4 \bullet I$, cuyo rango es 2; así, el SL sólo tiene solución si la matriz ampliada tiene rango 2, lo que sucede para todo valor de "a":

$$rg\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & 0 & a \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = 2, \forall\, a \in \Re$$

Como el menor de orden 2 indicado en $A - 4 \bullet I$ es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos z_1.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 8.z_2 = a \\ 8.z_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_2 = a/8 \\ z_3 = 0 \end{array}\right.$$

Así, $\overline{v}_2$ es de la forma $\overline{v}_2 = (z_1;a/8;0)$, donde "a" puede tomar cualquier valor no nulo y z_1 puede tomar el valor que queramos. Elegimos $a = 8$, por lo que $\overline{v}_1 = (8;0;0)$ y $\overline{v}_2 = (z_1;1;0)$.

- El vector $\overline{v}_3 = (k_1;k_2;k_3)$ ha de ser tal que:

$$f(\overline{v}_3) = 1 \bullet \overline{v}_2 + 4 \bullet \overline{v}_3 \Rightarrow f(\overline{v}_3) - 4 \bullet \overline{v}_3 = 1 \bullet \overline{v}_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{f(\overline{v}_3) = A \bullet \overline{v}_3}$$

$$\Rightarrow A \bullet \overline{v}_3 - 4 \bullet \overline{v}_3 = 1 \bullet \overline{v}_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A - 4 \bullet I) \bullet \overline{v}_3 = 1 \bullet \overline{v}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \boxed{8 & 0} \\ 0 & \boxed{0 & 8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

VENTANA

La matriz de los coeficientes del sistema es $A - 4 \bullet I$, cuyo rango es 2; así, el SL sólo tiene solución si la matriz ampliada tiene rango 2, lo que sucede para todo valor de z_1:

$$\text{rg}\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = 2, \forall\, z_1 \in \Re$$

Como el menor de orden 2 indicado en $A - 4 \bullet I$ es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos k_1.

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 8.k_2 = z_1 \\ 8.k_3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} k_2 = z_1/8 \\ k_3 = 1/8 \end{matrix}\right.$$

Así, $\overline{v}_3$ es de la forma $\overline{v}_3 = (k_1; z_1/8; 1/8)$, donde z_1 y k_1 son arbitrarios. Elegimos $z_1 = k_1 = 0$, con lo que $\overline{v}_2 = (0;1;0)$ y $\overline{v}_3 = (0;0;1/8)$.

- La base $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ de Jordan respecto de la cual la matriz asociada a "f" es "J" resulta ser $B = \{\overline{v}_1 = (8;0;0), \overline{v}_2 = (0;1;0), \overline{v}_3 = (0;0;1/8)\}$.

Si en los espacios inicial y final tomamos $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ como base de referencia, se modifican las coordenadas de $\overline{x}$ y de $f(\overline{x})$, y como la matriz "C" asociada al cambio de base $B_c \to B$ es

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$
$$\quad\ \ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$
$$\quad\ \ \overline{v}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{v}_3$$

entonces, si $\overline{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*; x_2^*; x_3^*)$ respecto de "B" y $f(\overline{x})$ tiene coordenadas $(y_1^*; y_2^*; y_3^*)$, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad (II) \quad ; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} \quad (III)$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de la base de Jordan $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$:

$$C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} = A \bullet C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{C^{-1} \bullet A \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

FONEMATO 8.7.3 (UN AUTOVALOR DOBLE Y OTRO SIMPLE)

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1;x_1+2.x_2;2.x_2+2.x_3)$.

Determine una forma canónica de Jordan correspondiente a "f".

SOLUCIÓN

- La expresión matricial de "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

$f(\bar{x})$ respecto de B_c | $\bar{x}$ respecto de B_c

- Como los autovalores de una matriz triangular son los elementos de su diagonal principal, resulta que $\lambda = 1$ es autovalor simple y $\lambda = 2$ lo es doble.
- El endomorfismo "f" no es diagonalizable, pues las respectivas multiplicidades algebraica (vale 2) y geométrica de $\lambda = 2$ no coinciden:

$$\dim.L(\lambda = 2) = \dim.(\Re^3) - rg(A - 2 \bullet I) = 3 - rg\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

- Como harán falta, determinemos los subespacios de autovectores:

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 2.x_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(a;-a;2.a),\ \forall\ a \in \Re\}$$

$$(A - 2 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{(0;0;b),\ \forall\ b \in \Re\}$$

- Como "f" no es diagonalizable, no hay ninguna base de $\Re^3$ respecto de la que la matriz asociada a "f" sea diagonal. Pero es posible encontrar una base B_J de Jordan tal que la matriz "J" asociada a "f" respecto de B_J es semejante a "A", siendo "J" una matriz cuadrada que tiene en la diagonal principal los autovalores de "A", siendo unos o ceros los elementos situados en la primera paralela superior a dicha diagonal y ceros los demás elementos de la matriz.

Una matriz "J" de Jordan semejante a "A"

Como la MA de $\lambda = 1$ es 1, dicho autovalor aparece una vez en la diagonal principal de "J"; y como la MG es 1, el autovalor $\lambda = 1$ aporta una caja de Jordan. Como la MA de $\lambda = 2$ es 2, dicho autovalor aparece dos veces en la diagonal principal de "J"; y la MG es 1, el autovalor $\lambda = 2$ aporta una caja de Jordan.. Así, según nos guste más, podemos elegir una cualquiera de las dos siguientes:

$$J=\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ó } J=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Elegimos la primera: $J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Para determinar la base $B=\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ de Jordan respecto de la cual la matriz asociada a "f" es "J", tendremos en cuenta que ha de ser:

$$\underbrace{f(\overline{v}_1)=1\bullet\overline{v}_1\ ;\ f(\overline{v}_2)=2\bullet\overline{v}_2\ ;\ f(\overline{v}_3)=1\bullet\overline{v}_2+2\bullet\overline{v}_3}$$

VENTANA

Si la base de referencia en $\Re^3$ es $B=\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$, las columnas de la matriz "J" asociada a "f" respecto de "B" son $f(\overline{v}_1)$, $f(\overline{v}_2)$ y $f(\overline{v}_3)$:

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\overline{v}_1) & f(\overline{v}_2) & f(\overline{v}_3) \end{array}$$

- El vector $\overline{v}_1$ es un autovector de $\lambda=1$, pues $f(\overline{v}_1)=1\bullet\overline{v}_1$. Tomamos $\overline{v}_1=(1;-1;2)$, obtenido al hacer $a=1$ en $L(\lambda=1)=\{(a;-a;2.a), \forall a\in\Re\}$.
- El vector $\overline{v}_2$ es un autovector de $\lambda=2$, pues $f(\overline{v}_2)=2\bullet\overline{v}_2$. Tomamos $\overline{v}_2=(0;0;b)$, siendo $b\neq 0$, pues si fuera $b=0$ entonces $\overline{v}_2$ sería el vector cero y $B=\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ no sería base de $\Re^3$.
- El vector $\overline{v}_3=(z_1;z_2;z_3)$ ha de ser tal que:

$$f(\overline{v}_3)=1\bullet\overline{v}_2+2\bullet\overline{v}_3 \Rightarrow f(\overline{v}_3)-2\bullet\overline{v}_3=1\bullet\overline{v}_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{f(\overline{v}_3)=A\bullet\overline{v}_3}$$

$$\Rightarrow A\bullet\overline{v}_3-2\bullet\overline{v}_3=1\bullet\overline{v}_2 \Rightarrow (A-2\bullet I)\bullet\overline{v}_3=1\bullet\overline{v}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1=0 \\ z_2=b/2 \end{cases}$$

VENTANA

La matriz de coeficientes $A-2\bullet I$ es de rango es 2; así, el SL sólo tiene solución si la matriz ampliada tiene rango 2, lo que sucede para todo "b":

$$\text{rg}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right]=2, \forall\ b\in\Re$$

Como el menor de orden 2 indicado en $A-2\bullet I$ es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos z_3.

Por tanto, $\overline{v}_3$ es de la forma $\overline{v}_3=(0;b/2;z_3)$, donde z_3 puede tomar el valor que queramos y "b" puede tomar cualquier valor no nulo. Por comodidad elegimos $z_3=1$ y $b=2$, así resulta $\overline{v}_2=(0;0;2)$ y $\overline{v}_3=(0;1;1)$.

- La base $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3\}$ de Jordan respecto de la cual la matriz asociada a "f" es "J" resulta ser $B=\{\overline{v}_1=(1;-1;2),\overline{v}_2=(0;0;2),\overline{v}_3=(0;1;1)\}$.

  Si en los espacios inicial y final tomamos $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3\}$ como base de referencia, la matriz "C" asociada al cambio $B_c\to B$ es

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\2&2&1\end{bmatrix}$$

  Así, si $\overline{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*;x_2^*;x_3^*)$ respecto de "B" y $f(\overline{x})$ tiene coordenadas $(y_1^*;y_2^*;y_3^*)$, es:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}\ \text{(II)}\quad;\quad\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=C\bullet\begin{bmatrix}y_1^*\\y_2^*\\y_3^*\end{bmatrix}\ \text{(III)}$$

  Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de la base de Jordan $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3\}$:

$$C\bullet\begin{bmatrix}y_1^*\\y_2^*\\y_3^*\end{bmatrix}=A\bullet C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}y_1^*\\y_2^*\\y_3^*\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}}_{C^{-1}\bullet A\bullet C}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}$$

SABER ESTUDIAR

Estudia sin prisas, leyendo despacio y pensando en lo que lees: tras leer cada palabra o cada símbolo matemático, invierte un nanosegundo en comprobar si tu cerebro es capaz de llenarlo de contenido pleno. En caso afirmativo pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso... pero, en caso de atranque, para el reloj y lucha a muerte hasta desatrancarte: invierte el tiempo que sea menester (2 minutos, 2 horas, 2 semanas, 2 meses) en recopilar la información que te permita desatrancarte... y después pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso.

EJERCICIOS RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA PÁGINA WEB

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UN ENDOMORFISMO

Ejercicio 03.01

Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x_1; x_2; x_3) = (2.x_1 + x_2 + 2.x_3; x_2; 3.x_3)$.
Halle los autovalores de "f" y los subespacios de autovectores.

Ejercicio 03.02

Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x_1; x_2; x_3) = (2.x_1 + x_2 + 2.x_3; 2.x_2; 3.x_3)$.
Calcule los autovalores de "f" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

Ejercicio 03.03

Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x_1; x_2; x_3) = (2.x_1 - 2.x_3; 2.x_2 - 2.x_3; x_3)$.
Calcule los autovalores de "f" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

Ejercicio 03.04

Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que $f(x_1; x_2; x_3) = (2.x_1 + x_2; x_1 + 2.x_2; x_3)$.
Calcule los autovalores de "f" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

Ejercicio 03.05

Sea $f: P_2 \mapsto P_2$ / $f(a.x^2 + b.x + c) = (a + b + c).x^2 + (2.b + c).x + b + 2.c$
Halle los autovalores de "f" y los subespacios de autovectores.

Ejercicio 03.06

Sea $f: M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ / $f(P) = P + P^t$.
Halle los autovalores de "f" y los subespacios de autovectores.

Ejercicio 03.07

Sea $f: M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ / $f(P) = P - P^t$.
Halle los autovalores de "f" y los subespacios de autovectores.

Ejercicio 03.08

Se dice que $A \in M_{n\times n}$ es idempotente si $A^2 = A$.
Demuestre que 0 y 1 son los únicos posibles autovalores de un endomorfismo cuya matriz asociada es idempotente.

Ejercicio 03.09

1) Halle $A \in M_{3\times3}$ si $\overline{p} = (1;0;1)$ es autovector de $\lambda = 2$, $\overline{q} = (0;0;1)$ es autovector de $\lambda = 3$ y $\overline{c} = (1;1;0)$ es autovector de $\lambda = 1$.
2) Halle $A \in M_{3\times3}$ si $\overline{p} = (1;0;1)$ es autovector de $\lambda = 2$, $\overline{q} = (0;0;1)$ es autovector de $\lambda = 3$ y $\overline{c} = (1;0;2)$ es autovector de $\lambda = 1$.
3) Halle $A \in M_{3\times3}$ si $\overline{p} = (1;0;1)$ es autovector de $\lambda = 2$, $\overline{q} = (0;1;0)$ y $\overline{c} = (1;0;0)$ son autovectores de $\lambda = 1$.
4) Halle $A \in M_{3\times3}$ si $\overline{p} = (1;0;1)$ es autovector de $\lambda = 2$, $\overline{q} = (0;1;0)$ y $\overline{c} = (0;2;0)$ son autovectores de $\lambda = 1$.

Ejercicio 03.10

Halle la matriz "A" asociada al endomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ respecto de la base $B = \left\{\overline{k}_1,\overline{k}_2,\overline{k}_3\right\}$ si $\overline{p} = \overline{k}_1 + \overline{k}_3$ es autovector de $\lambda = 2$ y $\overline{q} = \overline{k}_3$ es autovector de $\lambda = 3$, siendo $\overline{c} = \overline{k}_1 + \overline{k}_2$ tal que $f(\overline{c}) = \overline{k}_1 + \overline{k}_2 + \overline{k}_3$.

DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS

Ejercicio 04.01

Si es posible, diagonalice el endomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3) = (-x_1 - 3.x_3\ ;\ 3.x_1 + 2.x_2 + 3.x_3\ ;\ -3.x_1 - x_3)$$

Ejercicio 04.02

Si es posible, diagonalice el endomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + 2.x_3\ ;\ -x_2\ ;\ 2.x_1 + x_3)$$

Ejercicio 04.03

Si es posible, diagonalice el endomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + 2.x_2 + x_3\ ;\ 3.x_2 + x_3\ ;\ -x_3)$$

Ejercicio 04.04

Si $a,b \in \Re$, estudie para qué valores de "a" y "b" es diagonalizable el endomorfismo tal que

$$f(x_1;x_2;x_3) = (5.x_1; -x_2 + a.x_3; 3.x_1 + b.x_3)$$

Ejercicio 04.05

Si es posible, diagonalice el endomorfismo $f:P_2 \mapsto P_2$ tal que

$$f(a.x^2 + b.x + c) = (a + b + c).x^2 + (2.b + c).x + b + 2.c$$

Ejercicio 04.06

Si es posible, diagonalice el endomorfismo $f:P_2 \mapsto P_2$ tal que

$$f(p(x)) = (p''(0) + p'(0)).x^2 + 2.p'(0).x + p(0)$$

Ejercicio 04.07

Si es posible, diagonalice $f:M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}\ /\ f(P) = P + P^t$.

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

Ejercicio 06.01

Si es posible, diagonalice $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3\\ 3 & 2 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Ejercicio 06.02

Si es posible, diagonalice $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Ejercicio 06.03

Si es posible, diagonalice $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Ejercicio 06.04

Si es posible, diagonalice $A=\begin{bmatrix}k & 1 & 0\\ 1 & k & 0\\ 1 & 1 & k\end{bmatrix}$.

Ejercicio 06.05

Si es posible, diagonalice $A=\begin{bmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & b\end{bmatrix}$, $a,b\neq 0$.

POTENCIAS DE UNA MATRIZ CUADRADA

Ejercicio 07.01

Si $A=\begin{bmatrix}0'2 & 0'4 & 0'4\\ 0'2 & 0'5 & 0'3\\ 0'6 & 0'1 & 0'3\end{bmatrix}$, **determine** A^{1000}.

Ejercicio 07.02

En la actualidad, la empresa "A" controla el 60 % del mercado, y "B" y "C" se reparten el resto en partes iguales. De un año para otro, "B" consigue hacerse con el 20 % del mercado controlado anteriormente por "A", y con el 30 % del de "C". A su vez, "A" consigue arrebatar el 40 % del mercado controlado por sus competidores; y "C" consigue el 60 % del mercado controlado anteriormente por "A" y el 10 % del controlado por "B". Si esta dinámica se mantiene en el tiempo, determine la distribución del mercado a largo plazo.

AUTOCOMPROBACIÓN

Las soluciones están en los test de la web.

01) Si "V" es un espacio vectorial de dimensión "n" y "B" la base de referencia elegida en él, el endomorfismo $f: V \mapsto V$ queda identificado mediante una matriz "A" cuadrada de orden "n". De "A" se dice matriz asociada a "f" respecto de la base "B".

a) Verdadero ; b) Falso ; c) No tengo ni idea

02) Si "A" es la matriz asociada al endomorfismo $f: V \mapsto V$ respecto de la base "B", se dice que λ es autovalor, vector propio o vector característico de "f" (de "A") si en el espacio inicial hay vectores $\overline{x} \neq \overline{0}$ tales que $f(\overline{x}) = \lambda \bullet \overline{x}$; es decir $A \bullet \overline{x} = \lambda \bullet \overline{x}$. De $\overline{x}$ se dice autovector, vector propio o vector característico de λ. El conjunto de los autovectores de λ, junto con el vector cero de "V", es subespacio de "V" (el llamado subespacio de autovectores de λ).

a) Verdadero ; b) Falso

03) Si "A" es la matriz asociada al endomorfismo $f: V \mapsto V$ respecto de la base "B", los autovalores de "f" son las soluciones de la ecuación $|A - \lambda \bullet I| = 0$, que se llama ecuación característica de "f" (de "A"). La suma de los autovalores coincide con la traza de "A", y su producto coincide con $|A|$.

a) Verdadero ; b) Falso

04) Si "A" es la matriz asociada al endomorfismo $f: V \mapsto V$ respecto de la base "B", llamamos multiplicidad algebraica (MA) del autovalor λ al número de veces que es solución de la ecuación característica $|A - \lambda \bullet I| = 0$. La multiplicidad geométrica (MG) de λ es la dimensión de su subespacio de autovectores. Si la multiplicidad algebraica es "k", la geométrica puede ser 1, 2, ..., k.

a) Verdadero ; b) Falso

05) La matriz que identifica al endomorfismo $f: V \mapsto V$ cambia al cambiar la base de referencia empleada para identificar a los vectores de "V".

a) Verdadero ; b) Falso

06) Si "A" es la matriz asociada al endomorfismo $f: V \mapsto V$ respecto de la base "B" y en "V" se hace el cambio de base de matriz asociada "C", la matriz asociada a "f" respecto de la nueva base es $H = C^{-1} \bullet A \bullet C$; o sea, "A" y "H" son semejantes. Así, al afirmar que dos matrices son semejantes se afirma que representan al mismo endomorfismo respecto de bases distintas.

a) Verdadero ; b) Falso

07) Si "A" es la matriz asociada al endomorfismo $f: V \mapsto V$ respecto de la base "B", el problema de diagonalizar "f" es el problema de encontrar, si existe, una base de "V" tal que la matriz asociada a "f" respecto de ella sea diagonal; o sea, encontrar, si existe, una matriz diagonal "D" semejante a "A", hallando, en su caso, la matriz "C" tal que $D = C^{-1} \bullet A \bullet C$.

a) Verdadero ; b) Falso

08) El endomorfismo $f: V \mapsto V$ es diagonalizable si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones, que son equivalentes.

- La MA de cada autovalor de "f" coincide con su MG.
- Hay una base de "V" formada por autovectores de "f".
- "V" es suma directa de los subespacios de autovectores.

En cualquier caso, si todos los autovalores de "f" son distintos o la matriz asociada a "f" es simétrica, podemos garantizar que "f" es diagonalizable.

a) Verdadero ; b) Falso

09) Si "A" es la matriz asociada al endomorfismo diagonalizable $f: V \mapsto V$ respecto de la base "B", para construir una base B* que diagonalice a "f", cada autovalor aporta una base de su subespacio de autovectores. La matriz "C" asociada al cambio $B \to B^*$ es tal que la matriz $C^{-1} \bullet A \bullet C$ asociada a "f" respecto de B* coincide con la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "f" (de "A").

a) Verdadero ; b) Falso

10) Si un endomorfismo es diagonalizable hay infinitas bases que lo diagonalizan.

a) Verdadero ; b) Falso

11) Si el endomorfismo $f: V \mapsto V$ es biyectivo (automorfismo), $\lambda = 0$ es autovalor.

a) Verdadero ; b) Falso

12) Si λ es autovalor del endomorfismo $f: V \mapsto V$, entonces λ^k es autovalor del endomorfismo $h = \underbrace{f \bullet f \bullet .... \bullet f}_{\text{"k" veces}}$.

a) Verdadero ; b) Falso

13) Si λ es autovalor del endomorfismo $f: V \mapsto V$ y $k \in \Re$, entonces $\lambda.k$ es autovalor del endomorfismo $h = k \bullet f$.

a) Verdadero ; b) Falso

14) Si λ es autovalor del endomorfismo $f: V \mapsto V$, entonces λ^{-1} es autovalor del endomorfismo $f^{-1}: V \mapsto V$.

a) Verdadero ; b) Falso

15) Si λ es autovalor del endomorfismo biyectivo $f: V \mapsto V$, entonces λ^{-1} es autovalor del endomorfismo $f^{-1}: V \mapsto V$.

a) Verdadero ; b) Falso

16) Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ un endomorfismo con un autovalor doble λ_1 y otro simple λ_2. Si $L(\lambda_1) = \{(\theta;\theta;\mu), \forall\, \theta, \mu \in \Re\}$, ¿cuál de los siguientes vectores podría sea autovector de λ_2 ?

a) $\overline{u} = (1;1;1)$; b) $\overline{v} = (2;2;1)$; c) $\overline{w} = (1;0;2)$

17) Si λ es autovalor triple del endomorfismo diagonalizable $f: \Re^4 \mapsto \Re^4$, podría ser:

a) $L(\lambda) = \{(\theta+\mu;\theta+\varepsilon;\theta+\varepsilon;\theta+\mu), \forall\, \theta, \varepsilon, \mu \in \Re\}$

b) $L(\lambda) = \{(\theta+\mu;\varepsilon+\mu;0;0), \forall\, \theta, \varepsilon, \mu \in \Re\}$

c) $L(\lambda) = \{(\varepsilon+\mu;\varepsilon;\varepsilon+\mu;\theta+\mu), \forall\, \theta, \varepsilon, \mu \in \Re\}$

18) Siendo $f: \Re^2 \mapsto \Re^2$ un endomorfismo, los autovalores del endomorfismo $h = f \bullet f$ podrían ser:

a) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$

b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$

c) $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -7$

19) Un endomorfismo con matriz asociada $A_{3\times 3}$ simétrica tiene un autovalor doble λ_1 y otro simple λ_2.
¿En qué caso podríamos estar ante los respectivos subespacios de autovectores?

a) $L(\lambda_1) = \{(\theta+\mu;\theta;\mu), \forall\, \theta, \mu \in \Re\}$
$L(\lambda_2) = \{(\delta;\delta;0), \forall\, \delta \in \Re\}$

b) $L(\lambda_1) = \{(\theta;\theta;\mu), \forall\, \theta, \mu \in \Re\}$
$L(\lambda_2) = \{(\delta;\delta;0), \forall\, \delta \in \Re\}$

c) $L(\lambda_1) = \{(\mu;\theta;\mu), \forall\, \theta, \mu \in \Re\}$
$L(\lambda_2) = \{(\delta;0;-\delta), \forall\, \delta \in \Re\}$

20) Un endomorfismo con matriz asociada $A_{3\times 3}$ tiene un autovalor doble λ_1 y otro simple λ_2. ¿En qué caso no podríamos estar ante los respectivos subespacios de autovectores?

a) $L(\lambda_1) = \{(\theta+\mu;-\theta-\mu;\mu), \forall\, \theta, \mu \in \Re\}$
$L(\lambda_2) = \{(\delta;\delta;0), \forall\, \delta \in \Re\}$

b) $L(\lambda_1) = \{(\theta;\theta;\mu), \forall\, \theta, \mu \in \Re\}$
$L(\lambda_2) = \{(\delta;-\delta;0), \forall\, \delta \in \Re\}$

c) $L(\lambda_1) = \{(\mu;\theta;\mu), \forall\, \theta, \mu \in \Re\}$
$L(\lambda_2) = \{(\delta;\delta;-\delta), \forall\, \delta \in \Re\}$

21) Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re^2$ un endomorfismo tal que su matriz asociada "A" tiene determinante negativo.

a) "f" no es diagonalizable

b) "f" es diagonalizable

c) No puede saberse si "f" es diagonalizable

22) Si $f: V \mapsto V$ es un endomorfismo tal que $f \bullet f = f$, sus autovalores son:

a) Imaginarios
b) 0 ó 1
c) Las anteriores son falsas

23) Sea $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$ el polinomio característico de un endomorfismo "f".

a) "f" es un automorfismo
b) "f" no es un automorfismo
c) No puede saberse si "f" es un automorfismo

24) Sea "f" un endomorfismo cuya matriz asociada es ortogonal.

a) $\lambda = 0$ es autovalor de "f"
b) $\lambda = 0$ no es autovalor de "f"
c) $\lambda = 0$ puede ser autovalor de "f"

25) Siendo $f: V \mapsto V$ un endomorfismo con matriz asociada "A", sea $g: V \mapsto V$ el endomorfismo de matriz asociada A^t. Sea el endomorfismo $h = f + g$.

a) "h" es diagonalizable
b) "h" no es diagonalizable
c) "h" puede no ser diagonalizable

26) Siendo $f: V \mapsto V$ un endomorfismo con matriz asociada "A", sea $g: V \mapsto V$ el endomorfismo de matriz asociada A^t. Sea el endomorfismo $h = f \bullet g$.

a) "h" es diagonalizable
b) "h" no es diagonalizable
c) "h" puede no ser diagonalizable

27) Sean $f: V \mapsto V$ y $g: V \mapsto V$ endomorfismos. Si alguno es automorfismo:

a) El polinomio característico $f \bullet g$ coincide con el de $g \bullet f$
b) $f \bullet g = g \bullet f$
c) Las anteriores son falsas

28) Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ un endomorfismo con autovalores -1 (doble) y 2, siendo $L(\lambda = 2) = \{(x;y,z)/x = y = 0\}$ y $(1;1;0)$ y $(-1;0;0)$ autovectores de $\lambda = -1$.

a) "f" es diagonalizable
b) "f" no es diagonalizable
c) No puede saberse si "f" es diagonalizable

29) Sea $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ un endomorfismo con autovalores $\lambda = -1$ (doble) y $\lambda = 2$, siendo $(1;1;0)$ y $(2;2;0)$ autovectores de $\lambda = -1$ y $L(\lambda = 2) = \{(x;y,z)/x = y = 0\}$.

a) "f" es diagonalizable
b) "f" no es diagonalizable
c) No puede saberse si "f" es diagonalizable

30) Sea $f:\Re^4 \mapsto \Re^4$ un endomorfismo con autovalores $\lambda = 2$ (doble) y $\lambda = -1$ (doble), siendo $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ autovectores de $\lambda = 2$ y $\overline{v}_3$ y $\overline{v}_4$ autovectores de $\lambda = -1$.

a) $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ son LI
b) $\overline{v}_3$ y $\overline{v}_4$ son LI
c) $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_3$ son LI

31) Sea $f:V \mapsto V$ un endomorfismo no biyectivo.

a) "f" no es diagonalizable
b) "f" es diagonalizable
c) $\lambda = 0$ es autovalor de "f"

32) Siendo $\lambda = 3$ y $\lambda = -2$ autovalores de un endomorfismo "f", sea $\overline{u}$ un autovector de $\lambda = 3$ y $\overline{v}$ un autovector de $\lambda = -2$.

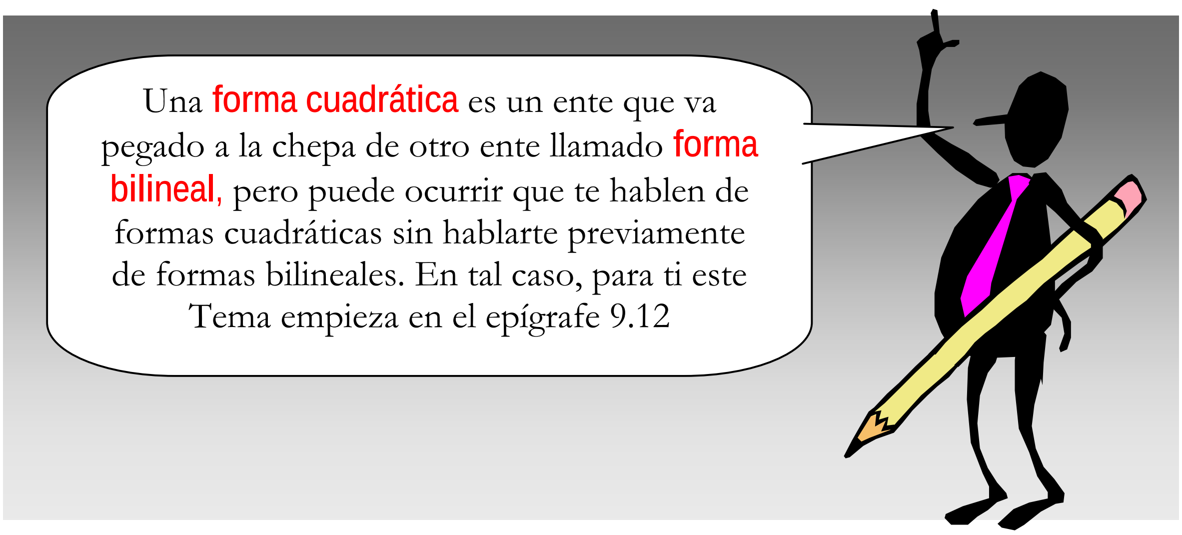
a) $\overline{u} + \overline{v}$ no es un autovector
b) $2 \bullet \overline{u}$ es autovector de $\lambda = 6$
c) $-\overline{u}$ es autovector de $\lambda = -3$

33) Sea $\lambda = 3$ un autovalor del endomorfismo $f:V \mapsto V$ y $\overline{u}$ y $\overline{v}$ autovectores del autovalor $\lambda = 3$.

a) $2 \bullet \overline{u} + 3 \bullet \overline{v}$ no es autovector de $\lambda = 3$
b) $2 \bullet \overline{u} + 3 \bullet \overline{v}$ es autovector de $\lambda = 3$
c) No puede saberse si $2 \bullet \overline{u} + 3 \bullet \overline{v}$ es autovector de $\lambda = 3$

Tema 9
Formas bilineales y formas cuadráticas

9.01 Forma bilineal
9.02 Expresión de una forma bilineal
9.03 Forma bilineal simétrica
9.04 Forma bilineal antisimétrica
9.05 Operaciones con formas bilineales
9.06 Descomposición de una forma bilineal
9.07 Núcleos de una forma bilineal
9.08 Vectores conjugados
9.09 Subespacios conjugados
9.10 Los cambios de base y las formas bilineales
9.11 Forma cuadrática asociada a una forma bilineal
9.12 Forma cuadrática (sin forma bilineal)
9.13 Los cambios de base y las formas cuadráticas
9.14 Diagonalización de una forma cuadrática
9.15 Diagonalización mediante cambio de base ortonormal
9.16 Diagonalización mediante transformaciones elementales
9.17 Diagonalización de Lagrange
9.18 Diagonalización mediante derivadas parciales
9.19 Rango, índice y signatura de una forma cuadrática
9.20 Clasificación de las formas cuadráticas
9.21 Forma cuadrática restringida a un subespacio



Sea "V" un espacio vectorial.

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{f} & \Re \\ (\overline{x};\overline{y}) & \longrightarrow & f(\overline{x};\overline{y}) \end{array}$$

Sea $V \times V = \{(\overline{x};\overline{y}) / \overline{x},\overline{y} \in V\}$ el producto cartesiano de "V" por sí mismo; o sea, cada elemento de $V \times V$ es un par ordenado de vectores del espacio vectorial "V".

Llamamos forma bilineal a toda aplicación $f: V \times V \mapsto \Re$ tal que $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \Re$ se cumple que

$$1)\ f(\alpha \bullet \overline{x} + \beta \bullet \overline{y} ; \overline{z}) = \alpha . f(\overline{x} ; \overline{z}) + \beta . f(\overline{y} ; \overline{z})$$
$$2)\ f(\overline{x} ; \alpha \bullet \overline{y} + \beta \bullet \overline{z}) = \alpha . f(\overline{x} ; \overline{y}) + \beta . f(\overline{x} ; \overline{z})$$

Recuerda: el par $(\overline{x};\overline{y})$ se dice ordenado si $(\overline{x};\overline{y}) \neq (\overline{y};\overline{x})$ siempre que $\overline{x} \neq \overline{y}$.

FONEMATO 9.1.1

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 2 y $B=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ la base de referencia en él. Sea $f:V\times V\mapsto\Re$ tal que $f(\bar{x};\bar{y})=4.x_1.y_1+3.x_1.y_2-x_2.y_2$, siendo

$$\bar{x}=x_1\bullet\bar{u}_1+x_2\bullet\bar{u}_2\ ;\ \bar{y}=y_1\bullet\bar{u}_1+y_2\bullet\bar{u}_2$$

Demuestre que "f" es una forma bilineal.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{c}V\times V\\ ((x_1;x_2);(y_1;y_2))\end{array}\xrightarrow{f}\begin{array}{c}\Re\\ 4.x_1.y_1+3.x_1.y_2-x_2.y_2\end{array}$$

Debemos demostrar que $\forall\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in V$ y $\forall\alpha,\beta\in\Re$ sucede que:

$$\text{a) } f(\alpha\bullet\bar{x}+\beta\bullet\bar{y};\bar{z})=\alpha.f(\bar{x};\bar{z})+\beta.f(\bar{y};\bar{z})$$
$$\text{b) } f(\bar{x};\alpha\bullet\bar{y}+\beta\bullet\bar{z})=\alpha.f(\bar{x};\bar{y})+\beta.f(\bar{x};\bar{z})$$

Vamos al tajo; sean:

$$\bar{x}=x_1\bullet\bar{u}_1+x_2\bullet\bar{u}_2$$
$$\bar{y}=y_1\bullet\bar{u}_1+y_2\bullet\bar{u}_2$$
$$\bar{z}=z_1\bullet\bar{u}_1+z_2\bullet\bar{u}_2$$

a) Es:

$$f(\alpha\bullet\bar{x}+\beta\bullet\bar{y};\bar{z})=f\big((\alpha.x_1+\beta.y_1;\alpha.x_2+\beta.y_2);(z_1;z_2)\big)=$$

$$\boxed{\alpha\bullet\bar{x}+\beta\bullet\bar{y}=(\alpha.x_1+\beta.y_1;\alpha.x_2+\beta.y_2)\ ;\ \bar{z}=(z_1;z_2)}$$

$$=4.(\alpha.x_1+\beta.y_1).z_1+3.(\alpha.x_1+\beta.y_1).z_2-(\alpha.x_2+\beta.y_2).z_2=$$
$$=\alpha.\underbrace{(4.x_1.z_1+3.x_1.z_2-x_2.z_2)}_{f(\bar{x};\bar{z})}+\beta.\underbrace{(4.y_1.z_1+3.y_1.z_2-y_2.z_2)}_{f(\bar{y};\bar{z})}=$$

$$=\alpha.f(\bar{x};\bar{z})+\beta.f(\bar{y};\bar{z})$$

$$\boxed{\text{pues}\begin{cases}f(\bar{x};\bar{z})=4.x_1.z_1+3.x_1.z_2-x_2.z_2\\ f(\bar{y};\bar{z})=4.y_1.z_1+3.y_1.z_2-y_2.z_2\end{cases}}$$

b) Es:

$$f(\bar{x};\alpha\bullet\bar{y}+\beta\bullet\bar{z})=f\big((x_1;x_2);(\alpha.y_1+\beta.z_1;\alpha.y_2+\beta.z_2)\big)=$$

$$\boxed{\bar{x}=(x_1;x_2)\ ;\ \alpha\bullet\bar{y}+\beta\bullet\bar{z}=(\alpha.y_1+\beta.z_1;\alpha.y_2+\beta.z_2)}$$

$$=4.x_1.(\alpha.y_1+\beta.z_1)+3.x_1.(\alpha.y_2+\beta.z_2)-x_2.(\alpha.y_2+\beta.z_2)=$$
$$=\alpha.\underbrace{(4.x_1.y_1+3.x_1.y_2-x_2.y_2)}_{f(\bar{x};\bar{y})}+\beta.\underbrace{(4.x_1.z_1+3.x_1.z_2-x_2.z_2)}_{f(\bar{x};\bar{z})}=$$

$$=\alpha.f(\bar{x};\bar{y})+\beta.f(\bar{x};\bar{z})$$

$$\boxed{\text{pues}\begin{cases}f(\bar{x};\bar{y})=4.x_1.y_1+3.x_1.y_2-x_2.y_2\\ f(\bar{x};\bar{z})=4.x_1.z_1+3.x_1.z_2-x_2.z_2\end{cases}}$$

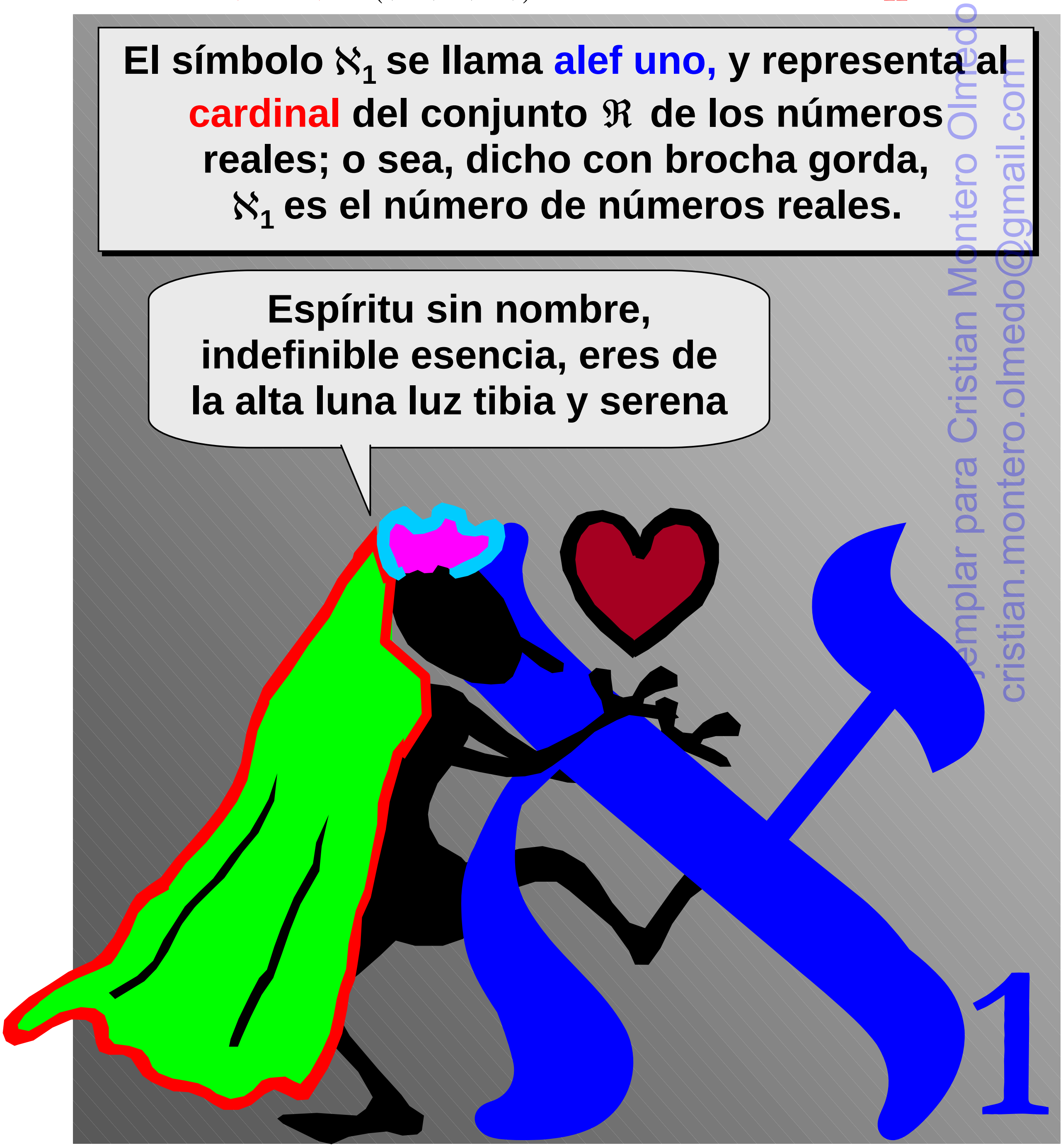
Observa: el número real $f(\bar{x};\bar{y}) = 4.x_1.y_1 + 3.x_1.y_2 - x_2.y_2$ que "f" asocia al par ordenado $(\bar{x};\bar{y})$ es el producto de tres matrices:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = 4.x_1.y_1 + 3.x_1.y_2 - x_2.y_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

el elemento a_{ij} de "A" es el coeficiente del producto $x_i.y_j$

Además, siendo $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ la base de referencia en "V", sucede que:

$$f(\bar{u}_1;\bar{u}_1) = f\big((1;0)\,;(1;0)\big) = 4.1.1 + 3.1.0 - 0.0 = 4 = a_{11}$$
$$f(\bar{u}_1;\bar{u}_2) = f\big((1;0)\,;(0;1)\big) = 4.1.0 + 3.1.1 - 0.1 = 3 = a_{12}$$
$$f(\bar{u}_2;\bar{u}_1) = f\big((0;1)\,;(1;0)\big) = 4.0.1 + 3.0.0 - 1.0 = 0 = a_{21}$$
$$f(\bar{u}_2;\bar{u}_2) = f\big((0;1)\,;(0;1)\big) = 4.0.0 + 3.0.1 - 1.1 = -1 = a_{22}$$



9.2 EXPRESIÓN DE UNA FORMA BILINEAL

Por comodidad, consideramos que "V" es un espacio vectorial de dimensión 2; así, siendo $B = \{\bar{k}_1, \bar{k}_2\}$ la base de referencia en "V", sea $f: V \times V \mapsto \Re$ una forma bilineal.

> Conociendo las imágenes de los elementos de V×V formados por vectores de la base "B", podemos determinar la imagen según "f" de todo elemento de V×V; es decir, podemos determinar la imagen según "f" de todo elemento $(\bar{x};\bar{y}) \in V \times V$ sin más que conocer los números reales
> $$f(\bar{k}_1;\bar{k}_1)\ ;\ f(\bar{k}_1;\bar{k}_2)\ ;\ f(\bar{k}_2;\bar{k}_1)\ ;\ f(\bar{k}_2;\bar{k}_2)$$
> que "f" asocia respectivamente a los siguientes elementos de $V \times V$:
> $$(\bar{k}_1;\bar{k}_1)\ ;\ (\bar{k}_1;\bar{k}_2)\ ;\ (\bar{k}_2;\bar{k}_1)\ ;\ (\bar{k}_2;\bar{k}_2)$$

En efecto, si $\bar{x}, \bar{y} \in V$ son tales que

$$\bar{x} = x_1 \bullet \bar{k}_1 + x_2 \bullet \bar{k}_2\ ;\ \bar{y} = y_1 \bullet \bar{k}_1 + y_2 \bullet \bar{k}_2$$

es:

$$\boxed{\text{pues } \bar{x} = x_1 \bullet \bar{k}_1 + x_2 \bullet \bar{k}_2}$$

$$f(\bar{x};\bar{y}) = f(x_1 \bullet \bar{k}_1 + x_2 \bullet \bar{k}_2;\bar{y}) = x_1.f(\bar{k}_1;\bar{y}) + x_2.f(\bar{k}_2;\bar{y}) =$$

$$\boxed{\text{pues "f" es una forma bilineal}}$$

$$\boxed{\text{pues } \bar{y} = y_1 \bullet \bar{k}_1 + y_2 \bullet \bar{k}_2}$$

$$= x_1.f(\bar{k}_1;y_1 \bullet \bar{k}_1 + y_2 \bullet \bar{k}_2) + x_2.f(\bar{k}_2;y_1 \bullet \bar{k}_1 + y_2 \bullet \bar{k}_2) =$$

$$\boxed{\text{pues "f" es una forma bilineal}}$$

$$= x_1.\big(y_1.f(\bar{k}_1;\bar{k}_1) + y_2.f(\bar{k}_1;\bar{k}_2)\big) + x_2.\big(y_1.f(\bar{k}_2;\bar{k}_1) + y_2.f(\bar{k}_2;\bar{k}_2)\big)$$

Gracias al curso de observación que hicimos con los indios chiricauas, nos damos cuenta de que número real

$$x_1.\big(y_1.f(\bar{k}_1;\bar{k}_1) + y_2.f(\bar{k}_1;\bar{k}_2)\big) + x_2.\big(y_1.f(\bar{k}_2;\bar{k}_1) + y_2.f(\bar{k}_2;\bar{k}_2)\big)$$

es el resultado del siguiente **producto de tres matrices:**

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} f(\bar{k}_1;\bar{k}_1) & f(\bar{k}_1;\bar{k}_2) \\ f(\bar{k}_2;\bar{k}_1) & f(\bar{k}_2;\bar{k}_2) \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

O sea, siendo $\bar{x} = x_1 \bullet \bar{k}_1 + x_2 \bullet \bar{k}_2$ e $\bar{y} = y_1 \bullet \bar{k}_1 + y_2 \bullet \bar{k}_2$, es:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{\bar{x}^t} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} f(\bar{k}_1;\bar{k}_1) & f(\bar{k}_1;\bar{k}_2) \\ f(\bar{k}_2;\bar{k}_1) & f(\bar{k}_2;\bar{k}_2) \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\bar{y}} = \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{y} \quad \text{(I)}$$

De (I) se dice que es la **expresión de "f" respecto de la base "B";** es decir, (I) es la expresión que permite determinar el número real $f(\bar{x};\bar{y})$ que "f" asocia a $(\bar{x};\bar{y}) \in V \times V$ si $\bar{x}$ e $\bar{y}$ se identifican mediante sus coordenadas respecto de la base "B". De "A" se dice **matriz asociada a "f" respecto de la base "B".**

Observa: la matriz $A=\{a_{ij}\}$ es tal que $a_{ij}=f(\overline{k}_i;\overline{k}_j)$.

Si "A" es singular (su determinante es nulo) se dice que "f" es **degenerada;** y si "A" es regular (tiene determinante no nulo), se dice que "f" es **no degenerada**.

> Dado el carácter **camaleónico** de los entes relacionados con los espacios vectoriales, me malicio que al cambiar la base de referencia en "V", cambiará la matriz asociada a la forma bilineal "f"

Generalización

El asunto se generaliza trivialmente para un espacio vectorial "V" de dimensión "n": si $B=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2,\ldots,\overline{k}_n\}$ es la base de referencia en "V" y $f:V\times V\mapsto\Re$ una forma bilineal, entonces, si

$$\overline{x}=x_1\bullet\overline{k}_1+x_2\bullet\overline{k}_2+\ldots+x_n\bullet\overline{k}_n\in V$$
$$\overline{y}=y_1\bullet\overline{k}_1+y_2\bullet\overline{k}_2+\ldots+y_n\bullet\overline{k}_n\in V$$

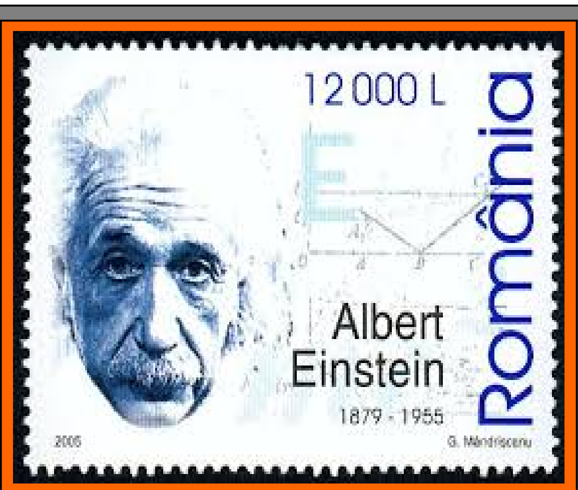
la expresión de "f" respecto de la base "B" es:

$$f(\overline{x};\overline{y})=\underbrace{\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{bmatrix}}_{\overline{x}^t}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}f(\overline{k}_1;\overline{k}_1) & f(\overline{k}_1;\overline{k}_2) & \ldots & f(\overline{k}_1;\overline{k}_n)\\ f(\overline{k}_2;\overline{k}_1) & f(\overline{k}_2;\overline{k}_2) & \ldots & f(\overline{k}_2;\overline{k}_n)\\ \vdots & \vdots & ::: & \vdots\\ f(\overline{k}_n;\overline{k}_1) & f(\overline{k}_n;\overline{k}_2) & \ldots & f(\overline{k}_n;\overline{k}_n)\end{bmatrix}}_{A}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}}_{\overline{y}}$$

O sea:

$$f(\overline{x};\overline{y})=\overline{x}^t\bullet A\bullet\overline{y}$$

$$\begin{array}{ccc} V\times V & \xrightarrow{f} & \Re\\ (\overline{x};\overline{y}) & \longrightarrow & \overline{x}^t\bullet A\bullet\overline{y}\end{array}$$



Yo no enseño a mis alumnos, solo les proporciono las condiciones en las que puedan aprender.

Albert Einstein

FONEMATO 9.2.1

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 2 y $B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ la base de referencia en él. Sea $f: V\times V \mapsto \Re$ la forma bilineal tal que $f(\overline{u}_i;\overline{u}_j)=2.i+3.j$.

Determínese la expresión de "f" respecto de la base "B", calculando $f(\overline{p};\overline{q})$ y $f(\overline{q};\overline{p})$ si $\overline{p}=1\bullet\overline{u}_1+1\bullet\overline{u}_2$ y $\overline{q}=1\bullet\overline{u}_1-1\bullet\overline{u}_2$.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{ccc} V\times V & \xrightarrow{f} & \Re \\ (\overline{x};\overline{y}) & \longrightarrow & f(\overline{x};\overline{y}) \end{array}$$

Sean $\overline{x},\overline{y}\in V$ tales que:

$$\overline{x}=x_1\bullet\overline{u}_1+x_2\bullet\overline{u}_2\ ;\ \overline{y}=y_1\bullet\overline{u}_1+y_2\bullet\overline{u}_2$$

La expresión de "f" respecto de la base $B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ es:

$$f(\overline{x};\overline{y})=\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{\overline{x}^t}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} f(\overline{u}_1;\overline{u}_1) & f(\overline{u}_1;\overline{u}_2) \\ f(\overline{u}_2;\overline{u}_1) & f(\overline{u}_2;\overline{u}_2) \end{bmatrix}}_{A}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\overline{y}}=$$

VENTANA

$$\text{Si } f(\overline{u}_i;\overline{u}_j)=2.i+3.j \Rightarrow \begin{cases} f(\overline{u}_1;\overline{u}_1)=2.1+3.1=5 \\ f(\overline{u}_1;\overline{u}_2)=2.1+3.2=8 \\ f(\overline{u}_2;\overline{u}_1)=2.2+3.1=7 \\ f(\overline{u}_2;\overline{u}_2)=2.2+3.2=10 \end{cases}$$

$$=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}}_{A}\bullet\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=5.x_1.y_1+8.x_1.y_2+7.x_2.y_1+10.x_2.y_2$$

el elemento a_{ij} de "A" es el coeficiente de $x_i.y_j$

Los vectores $\overline{p}$ y $\overline{q}$ están identificados mediante sus coordenadas respecto de la base $B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$, pues se nos dice que:

$$\overline{p}=1\bullet\overline{u}_1+1\bullet\overline{u}_2=(1;1)\ ;\ \overline{q}=1\bullet\overline{u}_1-1\bullet\overline{u}_2=(1;-1)$$

Así, es:

$$f(\overline{p};\overline{q})=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{p}^t}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}}_{A}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\overline{q}}=-6$$

$$f(\overline{q};\overline{p})=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\overline{q}^t}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}}_{A}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\overline{p}}=-4$$

Observa: la forma bilineal "f" es tal que $f(\overline{p};\overline{q})\neq f(\overline{q};\overline{p})$.

FONEMATO 9.2.2

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 3 y $B=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$ la base de referencia en él. Sea $f: V\times V \mapsto \Re$ la forma bilineal tal que $f(\bar{a}_i;\bar{a}_j)=i^2+j^2$. Determínese la expresión de la forma bilineal "f" respecto de la base "B", calculando $f(\bar{p};\bar{q})$ y $f(\bar{q};\bar{p})$ si $\bar{p}=1\bullet\bar{a}_1+1\bullet\bar{a}_3$ y $\bar{q}=1\bullet\bar{a}_2+1\bullet\bar{a}_3$.

SOLUCIÓN

Sean $\bar{x}=x_1\bullet\bar{a}_1+x_2\bullet\bar{a}_2+x_3\bullet\bar{a}_3\in V$ e $\bar{y}=y_1\bullet\bar{a}_1+y_2\bullet\bar{a}_2+y_3\bullet\bar{a}_3\in V$.

La expresión de la forma bilineal "f" respecto de la base $B=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2\}$ es:

$$f(\bar{x};\bar{y})=\underbrace{\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}}_{\bar{x}^t}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}f(\bar{a}_1;\bar{a}_1) & f(\bar{a}_1;\bar{a}_2) & f(\bar{a}_1;\bar{a}_3)\\ f(\bar{a}_2;\bar{a}_1) & f(\bar{a}_2;\bar{a}_2) & f(\bar{a}_2;\bar{a}_3)\\ f(\bar{a}_3;\bar{a}_1) & f(\bar{a}_3;\bar{a}_2) & f(\bar{a}_3;\bar{a}_3)\end{bmatrix}}_{A}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}}_{\bar{y}}=$$

VENTANA

$$f(\bar{a}_i;\bar{a}_j)=i^2+j^2 \Rightarrow \begin{cases} f(\bar{a}_1;\bar{a}_1)=1^2+1^2=2\\ f(\bar{a}_1;\bar{a}_2)=1^2+2^2=5\\ f(\bar{a}_1;\bar{a}_3)=1^2+3^2=10\\ f(\bar{a}_2;\bar{a}_1)=2^2+1^2=5\\ f(\bar{a}_2;\bar{a}_2)=2^2+2^2=8\\ f(\bar{a}_2;\bar{a}_3)=2^2+3^2=13\\ f(\bar{a}_3;\bar{a}_1)=3^2+1^2=10\\ f(\bar{a}_3;\bar{a}_2)=3^2+2^2=13\\ f(\bar{a}_3;\bar{a}_3)=3^2+3^2=18 \end{cases}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 5 & 10\\ 5 & 8 & 13\\ 10 & 13 & 18\end{bmatrix}}_{A}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=$$

el elemento a_{ij} de "A" es el coeficiente de $x_i.y_j$

$$=x_1.y_1+5.x_1.y_2+10.x_1.y_3+5.x_2.y_1+8.x_2.y_2+$$
$$+13.x_2.y_3+10.x_3.y_1+13.x_3.y_2+18.x_3.y_3$$

Los vectores $\bar{p}$ y $\bar{q}$ están identificados mediante sus coordenadas respecto de la base $B=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$, pues se nos dice que:

$$\bar{p}=1\bullet\bar{a}_1+1\bullet\bar{a}_3=(1;0;1)\ ;\ \bar{q}=1\bullet\bar{a}_2+1\bullet\bar{a}_3=(0;1;1)$$

Así, es:

$$f(\bar{p};\bar{q})=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 5 & 10\\ 5 & 8 & 13\\ 10 & 13 & 18\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=46$$

$$f(\bar{q};\bar{p})=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 5 & 10\\ 5 & 8 & 13\\ 10 & 13 & 18\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=46$$

Observa: la forma bilineal "f" es tal que $f(\bar{p};\bar{q})=f(\bar{q};\bar{p})$.

FONEMATO 9.2.3

Determínese la matriz asociada a la forma bilineal $f:\Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ tal que

$$f(\bar{x};\bar{y}) = 9.x_1.y_1 - 3.x_1.y_3 + 5.x_2.y_1 + 8.x_2.y_2 + 7.x_3.y_2$$

SOLUCIÓN

¡Vergonzoso!... por n-ésima vez encontramos un enunciado que olvida decir cuál es la base de referencia empleada para identificar los vectores del espacio vectorial en que vamos a trabajar.

Consideramos que dicha base de $\Re^3$ es la canónica:

$$B = \{\bar{a}_1 = (1;0;0) \ ; \ \bar{a}_2 = (0;1;0) \ ; \ \bar{a}_3 = (0;0;1)\}$$

Siendo $\bar{x}, \bar{y} \in \Re^3$ tales que

$$\bar{x} = x_1 \bullet \bar{a}_1 + x_2 \bullet \bar{a}_2 + x_3 \bullet \bar{a}_3 \ ; \ \bar{y} = y_1 \bullet \bar{a}_1 + y_2 \bullet \bar{a}_2 + y_3 \bullet \bar{a}_3$$

es:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{\bar{x}^t} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} f(\bar{a}_1;\bar{a}_1) & f(\bar{a}_1;\bar{a}_2) & f(\bar{a}_1;\bar{a}_3) \\ f(\bar{a}_2;\bar{a}_1) & f(\bar{a}_2;\bar{a}_2) & f(\bar{a}_2;\bar{a}_3) \\ f(\bar{a}_3;\bar{a}_1) & f(\bar{a}_3;\bar{a}_2) & f(\bar{a}_3;\bar{a}_3) \end{bmatrix}}_{C} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\bar{y}} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{\bar{x}^t} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\bar{y}}$$

el elemento c_{ij} de la matriz "C" es el coeficiente de $x_i.y_j$ en $f(\bar{x};\bar{y}) = 9.x_1.y_1 - 3.x_1.y_3 + 5.x_2.y_1 + 8.x_2.y_2 + 7.x_3.y_2$

NOTA

Si no sabes que c_{ij} es el coeficiente de $x_i.y_j$, deberás lidiar a lo bestia; o sea, a partir de $f(\bar{x};\bar{y}) = 9.x_1.y_1 - 3.x_1.y_3 + 5.x_2.y_1 + 8.x_2.y_2 + 7.x_3.y_2$, y teniendo en cuenta que $\bar{a}_1 = (1;0;0)$, $\bar{a}_2 = (0;1;0)$ y $\bar{a}_3 = (0;0;1)$, deberás armarte de paciencia y calcular los nueve números reales que forman la matriz $C = \{c_{ij}\}$:

$$c_{11} = f(\bar{a}_1;\bar{a}_1) = 9.1.1 - 3.1.0 + 5.0.1 + 8.0.0 + 7.0.0 = 9$$
$$c_{12} = f(\bar{a}_1;\bar{a}_2) = 9.1.0 - 3.1.0 + 5.0.0 + 8.0.1 + 7.0.1 = 0$$
$$c_{13} = f(\bar{a}_1;\bar{a}_3) = 9.1.0 - 3.1.1 + 5.0.0 + 8.0.0 + 7.0.0 = -3$$
$$c_{21} = f(\bar{a}_2;\bar{a}_1) = 9.0.1 - 3.0.0 + 5.1.1 + 8.1.0 + 7.0.0 = 5$$
$$c_{22} = f(\bar{a}_2;\bar{a}_2) = 9.0.0 - 3.0.0 + 5.1.0 + 8.1.1 + 7.0.1 = 8$$
$$c_{23} = f(\bar{a}_2;\bar{a}_3) = 9.0.0 - 3.0.1 + 5.0.0 + 8.0.0 + 7.0.0 = 0$$
$$c_{31} = f(\bar{a}_3;\bar{a}_1) = 9.0.1 - 3.0.0 + 5.0.1 + 8.0.0 + 7.1.0 = 0$$
$$c_{32} = f(\bar{a}_3;\bar{a}_2) = 9.0.0 - 3.0.1 + 5.0.0 + 8.0.1 + 7.1.1 = 7$$
$$c_{33} = f(\bar{a}_3;\bar{a}_3) = 9.0.0 - 3.0.1 + 5.0.0 + 8.0.0 + 7.1.0 = 0$$

FONEMATO 9.2.4

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 2 y $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ la base de referencia en él. Sea $f: V \times V \mapsto \Re$ tal que $f(\bar{x};\bar{y}) = 4.x_1.y_1 + 3.x_1.y_2 - x_2.y_2$, siendo:

$$\bar{x} = x_1 \bullet \bar{u}_1 + x_2 \bullet \bar{u}_2 \text{ e } \bar{y} = y_1 \bullet \bar{u}_1 + y_2 \bullet \bar{u}_2$$

Pruebe que "f" es una forma bilineal.

SOLUCIÓN

Para probar que $f: V \times V \mapsto \Re$ es una forma bilineal debemos probar que $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \Re$ se cumple que

$$\text{a) } f(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}; \bar{z}) = \alpha.f(\bar{x};\bar{z}) + \beta.f(\bar{y};\bar{z})$$
$$\text{b) } f(\bar{x}; \alpha \bullet \bar{y} + \beta \bullet \bar{z}) = \alpha.f(\bar{x};\bar{y}) + \beta.f(\bar{x};\bar{z})$$

Vamos al tajo; si

$$f(\bar{x};\bar{y}) = 4.x_1.y_1 + 3.x_1.y_2 - x_2.y_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{y}$$

es:

a) $$f(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}; \bar{z}) = (\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y})^t \bullet A \bullet \bar{z} =$$
$$= \alpha.\left(\bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{z}\right) + \beta.\left(\bar{y}^t \bullet A \bullet \bar{z}\right) = \alpha.f(\bar{x};\bar{z}) + \beta.f(\bar{y};\bar{z})$$

$$\boxed{\text{pues } \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{z} = f(\bar{x};\bar{z}) \text{ e } \bar{y}^t \bullet A \bullet \bar{z} = f(\bar{y};\bar{z})}$$

b) $$f(\bar{x}; \alpha \bullet \bar{y} + \beta \bullet \bar{z}) = \bar{x}^t \bullet A \bullet (\alpha \bullet \bar{y} + \beta \bullet \bar{z}) =$$
$$= \alpha.\left(\bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{y}\right) + \beta.\left(\bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{z}\right) = \alpha.f(\bar{x};\bar{y}) + \beta.f(\bar{x};\bar{z})$$

$$\boxed{\text{pues } \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{y} = f(\bar{x};\bar{y}) \text{ y } \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{z} = f(\bar{x};\bar{z})}$$

NOTA

Compara esta solución (rápida) con la del ejercicio 9.1.1 (petarda).

FONEMATO 9.2.5

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 1 y $B=\{1,x\}$ la base de referencia elegida en él. Pruebe que es bilineal la aplicación $f:V\times V\mapsto\Re$ tal que $f(p(x);q(x))=\int_0^1 p(x).q(x).dx$. Halle la expresión de "f" respecto de "B".

SOLUCIÓN

- Para probar que $f:V\times V\mapsto\Re$ es una forma bilineal debemos probar que $\forall\, p(x), q(x), r(x)\in V$ y $\forall\,\alpha,\beta\in\Re$ se cumple que:

$$\text{a) } f(\alpha.p(x)+\beta.q(x)\,;r(x))=\alpha.f(p(x)\,;r(x))+\beta.f(q(x)\,;r(x))$$
$$\text{b) } f(p(x)\,;\alpha.q(x)+\beta.r(x))=\alpha.f(p(x)\,;q(x)+\beta.f(p(x)\,;r(x))$$

a) Es: $$f(\alpha.p(x)+\beta.q(x)\,;r(x))=\int_0^1 (\alpha.p(x)+\beta.q(x)).r(x).dx=$$
$$=\alpha.\int_0^1 p(x).r(x).dx+\beta.\int_0^1 q(x).r(x).dx=$$
$$=\alpha.f(p(x)\,;r(x))+\beta.f(q(x)\,;r(x))$$

$$\boxed{\int_0^1 p(x).r(x).dx=f(p(x);r(x))\ ;\ \int_0^1 q(x).r(x).dx=f(q(x);r(x))}$$

b) Es: $$f(p(x)\,;\alpha.q(x)+\beta.r(x))=\int_0^1 p(x).(\alpha.q(x)+\beta.r(x)).dx=$$
$$=\alpha.\int_0^1 p(x).q(x).dx+\beta.\int_0^1 p(x).r(x).dx=$$
$$=\alpha.f(p(x)\,;q(x)+\beta.f(p(x)\,;r(x))$$

$$\boxed{\int_0^1 p(x).q(x).dx=f(p(x);q(x))\ ;\ \int_0^1 p(x).r(x).dx=f(p(x);r(x))}$$

- Siendo $p(x)=a_1+a_2.x$ y $q(x)=b_1+b_2.x$, la expresión de "f" respecto de la base "B" es:

$$f(p(x);q(x))=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}f(1;1) & f(1;x)\\ f(x;1) & f(x;x)\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=$$

VENTANA

$$\text{es}\begin{cases}f(1;1)=\int_0^1 1.1.dx=(x)_0^1=1\\ f(1;x)=\int_0^1 1.x.dx=(x^2/2)_0^1=1/2\\ f(x;1)=\int_0^1 x.1.dx=(x^2/2)_0^1=1/2\\ f(x;x)=\int_0^1 x.x.dx=(x^3/3)_0^1=1/3\end{cases}$$

$$=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=a_1.b_1+\frac{1}{2}.a_1.b_2+\frac{1}{2}.a_2.b_1+\frac{1}{3}.a_2.b_2$$

- ***Por ejemplo,*** si $p(x)=2+3.x$ y $q(x)=4-x$, es:

$$f(p(x);q(x))=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}=$$
$$=2.4+\frac{1}{2}.2.(-1)+\frac{1}{2}.3.4+\frac{1}{3}.3.(-1)=12\equiv\int_0^1 (2+3.x).(4-x).dx$$

FONEMATO 9.2.6

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno y $B=\{1,x\}$ la base de referencia elegida en él. Pruebe que es bilineal la aplicación $f:V\times V\mapsto\Re$ tal que $f(p(x);q(x))=p(1).q(1)+p(2).q(2)$. Determine la expresión de "f" respecto de la base "B".

SOLUCIÓN

1) Para probar que $f:V\times V\mapsto\Re$ es una forma bilineal debemos probar que $\forall\, p(x), q(x), r(x)\in V$ y $\forall\,\alpha,\beta\in\Re$ se cumple que

a) $f(\alpha.p(x)+\beta.q(x)\,;r(x))=\alpha.f(p(x)\,;r(x))+\beta.f(q(x)\,;r(x))$

b) $f(p(x)\,;\alpha.q(x)+\beta.r(x))=\alpha.f(p(x)\,;q(x)+\beta.f(p(x)\,;r(x))$

a) Es:

$$f(\alpha.p(x)+\beta.q(x)\,;r(x))=$$
$$=(\alpha.p(1)+\beta.q(1)).r(1)+(\alpha.p(2)+\beta.q(2)).r(2)=$$
$$=\alpha.(p(1).r(1)+p(2).r(2))+\beta.(q(1).r(1)+q(2).r(2))=$$
$$=\alpha.f(p(x)\,;r(x))+\beta.f(q(x)\,;r(x))$$

$$\boxed{\begin{array}{l}p(1).r(1)+p(2).r(2)=f(p(x);r(x))\\ q(1).r(1)+q(2).r(2)=f(q(x);r(x))\end{array}}$$

b) Es:

$$f(p(x)\,;\alpha.q(x)+\beta.r(x))=$$
$$=p(1).(\alpha.q(1)+\beta.r(1))+p(2).(\alpha.q(2)+\beta.r(2))=$$
$$=\alpha.(p(1).q(1)+p(2).q(2))+\beta.(p(1).r(1)+p(2).r(2))=$$
$$=\alpha.f(p(x)\,;q(x)+\beta.f(p(x)\,;r(x))$$

$$\boxed{\begin{array}{l}p(1).q(1)+p(2).q(2)=f(p(x);q(x))\\ p(1).r(1)+p(2).r(2)=f(p(x);r(x))\end{array}}$$

2) Si $B=\{1,x\}$ es la base de referencia, siendo

$$p(x)=a_1+a_2.x\ ;\ q(x)=b_1+b_2.x$$

la expresión de la forma bilineal "f" respecto de la base "B" es:

$$f(p(x);q(x))=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}f(1;1) & f(1;x)\\ f(x;1) & f(x;x)\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=2.a_1.b_1+3.a_1.b_2+3.a_2.b_1+5.a_2.b_2$$

VENTANA

$$f(p(x);q(x))=p(1).q(1)+p(2).q(2)\Rightarrow\begin{cases}f(1;1)=1.1+1.1=2\\ f(1;x)=1.1+1.2=3\\ f(x;1)=1.1+2.1=3\\ f(x;x)=1.1+2.2=5\end{cases}$$

• ***Por ejemplo,*** si $p(x)=2+3.x$ y $q(x)=4-x$, es:

$$f(p(x);q(x))=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}=$$
$$=2.2.4+3.2.(-1)+3.3.4+5.3.(-1)=31\equiv p(1).q(1)+p(2).q(2)$$

9.3 FORMA BILINEAL SIMÉTRICA

La forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ es simétrica si $f(\bar{x};\bar{y}) = f(\bar{y};\bar{x})$, $\forall \bar{x},\bar{y} \in V$. Sucede tal cosa sólo si la matriz asociada a "f" es simétrica.

9.4 FORMA BILINEAL ANTISIMÉTRICA

La forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ es antisimétrica si $f(\bar{x};\bar{y}) = -f(\bar{y};\bar{x}), \forall \bar{x},\bar{y} \in V$. Sucede tal cosa sólo si la matriz asociada a "f" es antisimétrica.

Observa: si "f" es antisimétrica, entonces:

$$f(\bar{x};\bar{x}) = -f(\bar{x};\bar{x}) \Rightarrow 2.f(\bar{x};\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x};\bar{x}) = 0$$

9.5 OPERACIONES CON FORMAS BILINEALES

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y "F" el conjunto de todas las formas bilineales que se pueden establecer sobre "V":

$$F = \{ f: V \times V \mapsto \Re \ / \ \text{"f" es forma bilineal} \}$$

Suma de formas bilineales

Si $f_1, f_2 \in F$, decimos que $h: V \times V \mapsto \Re$ es la suma de f_1 y f_2, y escribimos $h = f_1 + f_2$, si $h(\bar{x};\bar{y}) = f_1(\bar{x};\bar{y}) + f_2(\bar{x};\bar{y})$.

La suma de dos formas bilineales es una forma bilineal, pues $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \Re$, se cumple que

$$\text{a) } h(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y} ; \bar{z}) = \alpha . h(\bar{x} ; \bar{z}) + \beta . h(\bar{y} ; \bar{z})$$
$$\text{b) } h(\bar{x} ; \alpha \bullet \bar{y} + \beta \bullet \bar{z}) = \alpha . h(\bar{x} ; \bar{y}) + \beta . h(\bar{x} ; \bar{z})$$

a) Es:

$$h(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y} ; \bar{z}) = f_1(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y} ; \bar{z}) + f_2(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y} ; \bar{z}) =$$
$$= \alpha . f_1(\bar{x} ; \bar{z}) + \beta . f_1(\bar{y} ; \bar{z}) + \alpha . f_2(\bar{x} ; \bar{z}) + \beta . f_2(\bar{y} ; \bar{z}) =$$

$\boxed{\text{pues } f_1 \text{ y } f_2 \text{ son formas bilineales}}$

$$= \alpha .(f_1(\bar{x} ; \bar{z}) + f_2(\bar{x} ; \bar{z})) + \beta .(f_1(\bar{y} ; \bar{z}) + f_2(\bar{y} ; \bar{z})) = \alpha . h(\bar{x} ; \bar{z}) + \beta . h(\bar{y} ; \bar{z})$$

$$\boxed{\text{pues } \begin{cases} f_1(\bar{x} ; \bar{z}) + f_2(\bar{x} ; \bar{z}) = h(\bar{x} ; \bar{z}) \\ f_1(\bar{y} ; \bar{z}) + f_2(\bar{y} ; \bar{z}) = h(\bar{y} ; \bar{z}) \end{cases}}$$

b) Es:

$$h(\bar{x} ; \alpha \bullet \bar{y} + \beta \bullet \bar{z}) = f_1(\bar{x} ; \alpha \bullet \bar{y} + \beta \bullet \bar{z}) + f_2(\bar{x} ; \alpha \bullet \bar{y} + \beta \bullet \bar{z}) =$$
$$= \alpha . f_1(\bar{x} ; \bar{y}) + \beta . f_1(\bar{x} ; \bar{z}) + \alpha . f_2(\bar{x} ; \bar{y}) + \beta . f_2(\bar{x} ; \bar{z}) =$$

$\boxed{\text{pues } f_1 \text{ y } f_2 \text{ son formas bilineales}}$

$$= \alpha .(f_1(\bar{x} ; \bar{y}) + f_2(\bar{x} ; \bar{y})) + \beta .(f_1(\bar{x} ; \bar{z}) + f_2(\bar{x} ; \bar{z})) = \alpha . h(\bar{x} ; \bar{y}) + \beta . h(\bar{x} ; \bar{z})$$

$$\boxed{\text{pues } \begin{cases} f_1(\bar{x} ; \bar{y}) + f_2(\bar{x} ; \bar{y}) = h(\bar{x} ; \bar{y}) \\ f_1(\bar{x} ; \bar{z}) + f_2(\bar{x} ; \bar{z}) = h(\bar{x} ; \bar{z}) \end{cases}}$$

Observa: si A_1 es la matriz asociada a f_1 y A_2 es la matriz asociada a f_2, la matriz asociada a $h = f_1 + f_2$ es $A_1 + A_2$:

$$h(\overline{x};\overline{y}) = f_1(\overline{x};\overline{y}) + f_2(\overline{x};\overline{y}) = \overline{x}^t \bullet A_1 \bullet \overline{y} + \overline{x}^t \bullet A_2 \bullet \overline{y} =$$
$$= \overline{x}^t \bullet (A_1 + A_2) \bullet \overline{y}$$

Producto de una forma bilineal por un escalar

Siendo $f \in F$ y $\theta \in \Re$, decimos que $g: V \times V \mapsto \Re$ es el **producto** de la forma bilineal "f" por el escalar "θ", y escribimos $g = \theta \bullet f$, si $g(\overline{x};\overline{y}) = \theta . f(\overline{x};\overline{y})$.

El producto de una forma bilineales por un escalar es una forma bilineal, pues $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \Re$, se cumple que

$$\begin{aligned} &a)\ g(\alpha \bullet \overline{x} + \beta \bullet \overline{y} ; \overline{z}) = \alpha . g(\overline{x} ; \overline{z}) + \beta . g(\overline{y} ; \overline{z}) \\ &b)\ g(\overline{x} ; \alpha \bullet \overline{y} + \beta \bullet \overline{z}) = \alpha . g(\overline{x} ; \overline{y}) + \beta . g(\overline{x} ; \overline{z}) \end{aligned}$$

a) Es:

$$g(\alpha \bullet \overline{x} + \beta \bullet \overline{y} ; \overline{z}) = \theta . f(\alpha \bullet \overline{x} + \beta \bullet \overline{y} ; \overline{z}) \underset{\uparrow}{=} \theta . (\alpha . f(\overline{x} ; \overline{z}) + \beta . f(\overline{y} ; \overline{z})) =$$

pues "f" es una forma bilineal

$$= \alpha . (\theta . f(\overline{x} ; \overline{z})) + \beta . (\theta . f(\overline{y} ; \overline{z})) \underset{\uparrow}{=} \alpha . g(\overline{x} ; \overline{z}) + \beta . g(\overline{y} ; \overline{z})$$

$$\text{pues } \begin{cases} \theta . f(\overline{x} ; \overline{z}) = g(\overline{x} ; \overline{z}) \\ \theta . f(\overline{y} ; \overline{z}) = g(\overline{y} ; \overline{z}) \end{cases}$$

b) Es:

$$g(\overline{x} ; \alpha \bullet \overline{y} + \beta \bullet \overline{z}) = \theta . f(\overline{x} ; \alpha \bullet \overline{y} + \beta \bullet \overline{z}) \underset{\uparrow}{=} \theta . (\alpha . f(\overline{x} ; \overline{y}) + \beta . f(\overline{x} ; \overline{z})) =$$

pues "f" es una forma bilineal

$$= \alpha . (\theta . f(\overline{x} ; \overline{y})) + \beta . (\theta . f(\overline{y} ; \overline{z})) \underset{\uparrow}{=} \alpha . g(\overline{x} ; \overline{y}) + \beta . g(\overline{x} ; \overline{z})$$

$$\text{pues } \begin{cases} \theta . f(\overline{x} ; \overline{y}) = g(\overline{x} ; \overline{y}) \\ \theta . f(\overline{x} ; \overline{z}) = g(\overline{x} ; \overline{z}) \end{cases}$$

Observa: siendo "A" la matriz asociada a la forma bilineal "f", la matriz asociada a $g = \theta \bullet f$ es $\theta \bullet A$:

$$g(\overline{x};\overline{y}) = \theta .\ f(\overline{x};\overline{y}) = \theta . \overline{x}^t \bullet A \bullet \overline{y} = \overline{x}^t \bullet (\theta \bullet A) \bullet \overline{y}$$

El conjunto de las formas bilineales que pueden definirse sobre un espacio vectorial "V" es a su vez un espacio vectorial, pues la suma y el producto por un escalar definidos en $F = \{ f: V \times V \mapsto \Re \ / \ \text{"f" es forma bilineal} \}$ cumplen las 8 exigencias establecidas en la definición del ente llamado espacio vectorial; a saber:

1) La suma es conmutativa: $\forall f_1, f_2 \in F$ es $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$

2) La suma es asociativa:

$$\forall f_1, f_2, f_3 \in F \text{ es } f_1 + (f_2 + f_3) = (f_1 + f_2) + f_3$$

3) La suma admite elemento neutro, que es la forma bilineal nula (tiene asociada la matriz nula de orden "n").

4) Cada elemento de "F" tiene simétrico respecto de la suma: el simétrico de "f" es "−f".

5) $1 \bullet f = f, \forall f \in F$

6) $\forall \alpha, \beta \in \Re, \forall f \in F$ es $(\alpha + \beta) \bullet f = (\alpha \bullet f) + (\beta \bullet f)$

7) $\forall \alpha \in \Re, \forall f_1, f_2 \in F$ es $\alpha \bullet (f_1 + f_2) = (\alpha \bullet f_1) + (\alpha \bullet f_2)$

8) $\forall \alpha, \beta \in \Re, \forall f \in F$ es $\alpha \bullet (\beta \bullet f) = (\alpha . \beta) \bullet f$

Por tanto $(F;+;\bullet)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales; y siendo $\dim.(V) = n$, como cada forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ está representada por una matriz cuadrada de orden "n", es fácil entender que $\dim.(F) = n^2$.

FONEMATO 9.5.1

Se consideran las siguientes formas bilineales, todas ellas referidas a la base canónica de $\Re^2$:

$$g_1 : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; g_1(\overline{x};\overline{y}) = 5.x_1.y_2 + 3.x_2.y_2$$
$$g_2 : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; g_2(\overline{x};\overline{y}) = 7.x_2.y_1$$
$$g_3 : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; g_3(\overline{x};\overline{y}) = 2.x_1.y_1 + 3.x_1.y_2 + 7.x_2.y_1 + 4.x_2.y_2$$

Determínese la expresión de $h = 3 \bullet g_1 + 4 \bullet g_2 - 5 \bullet g_3$ respecto de la base canónica de $\Re^2$.

SOLUCIÓN

Sea A_i la matriz asociada a la forma bilineal $g_i : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ respecto de la base canónica de $\Re^2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \;;\; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \;;\; A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Siendo $h : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ tal que $h = 3 \bullet g_1 + 4 \bullet g_2 - 5 \bullet g_3$, es:

$$h(\overline{x};\overline{y}) = 3 \bullet g_1(\overline{x};\overline{y}) + 4 \bullet g_2(\overline{x};\overline{y}) - 5 \bullet g_3(\overline{x};\overline{y}) =$$
$$= 3.\overline{x}^t \bullet A_1 \bullet \overline{y} + 4.\overline{x}^t \bullet A_2 \bullet \overline{y} - 5.\overline{x}^t \bullet A_1 \bullet \overline{y} =$$
$$= \overline{x}^t \bullet (3 \bullet A_1 + 4 \bullet A_2 - 5 \bullet A_3) \bullet \overline{y}$$

Así, la matriz asociada a la forma bilineal $h = 3 \bullet g_1 + 4 \bullet g_2 - 5 \bullet g_3$ respecto de la base canónica de $\Re^2$ es $3 \bullet A_1 + 4 \bullet A_2 - 5 \bullet A_3$.

FONEMATO 9.5.2

En el conjunto $F = \{ f : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \ / \ "f" \text{ es forma bilineal} \}$, se consideran las siguientes formas bilineales, todas ellas referidas a la base canónica de $\Re^2$:

$$h_1 : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \ / \ h_1(\overline{x};\overline{y}) = 5.x_1.y_2 + 3.x_2.y_2$$
$$h_2 : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \ / \ h_2(\overline{x};\overline{y}) = 7.x_2.y_1$$
$$h_3 : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \ / \ h_3(\overline{x};\overline{y}) = 5.x_1.y_2 + 7.x_2.y_1 + 3.x_2.y_2$$

1) Estúdiese su dependencia o independencia lineal.
2) ¿Constituyen un sistema de generadores de "F"?, ¿y una base?
3) Calcúlese la dimensión y una base de la variedad lineal que engendran.

SOLUCIÓN

Siendo "F" el espacio vectorial que constituyen las formas bilineales que pueden definirse sobre $\Re^2$, es $\dim.(F) = 2^2 = 4$, y la base canónica de "F" es la que forman los siguientes cuatro vectores (formas bilineales):

$$f_1(\overline{x};\overline{y}) = x_1.y_1 \ ; \ f_2(\overline{x};\overline{y}) = x_1.y_2 \ : \ f_3(\overline{x};\overline{y}) = x_2.y_1 \ ; \ f_4(\overline{x};\overline{y}) = x_2.y_2$$

cuyas respectivas matrices asociadas respecto de la base canónica de $\Re^2$ son:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices asociadas a las formas bilineales h_1, h_2 y h_3 son respectivamente:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ; \ H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} ; \ H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Cuando el enunciado dice $\left\{ \begin{array}{l} h_1(\overline{x};\overline{y}) = 5.x_1.y_2 + 3.x_2.y_2 \\ h_2(\overline{x};\overline{y}) = 7.x_2.y_1 \\ h_3(\overline{x};\overline{y}) = 5.x_1.y_2 + 7.x_2.y_1 + 3.x_2.y_2 \end{array} \right\}$ nos dice que:

$$h_1 = 0 \bullet f_1 + 5 \bullet f_2 + 0 \bullet f_3 + 3 \bullet f_4 \ ; \ h_2 = 0 \bullet f_1 + 0 \bullet f_2 + 7 \bullet f_3 + 0 \bullet f_4$$
$$h_3 = 0 \bullet f_1 + 5 \bullet f_2 + 7 \bullet f_3 + 3 \bullet f_4$$

O sea, las coordenadas de h_1, h_2 y h_3 respecto de la base canónica del espacio vectorial "F" son respectivamente $(0;5;0;3)$, $(0;0;7;0)$ y $(0;5;7;3)$.

1) Los vectores h_1, h_2, h_3 son LI si la ecuación vectorial:

$$\alpha_1 \bullet (0;5;0;3) + \alpha_2 \bullet (0;0;7;0) + \alpha_3 \bullet (0;5;7;3) = \overline{0} \quad \text{(I)}$$

sólo tiene la solución $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; en caso contrario son LD.

$$\text{(I)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 0 = 0 \\ 5.\alpha_1 + 5.\alpha_3 = 0 \\ 7.\alpha_2 + 7.\alpha_3 = 0 \\ 3.\alpha_1 + 3.\alpha_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 7 \\ 3 & 0 \end{matrix}} & & \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $rg(A) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es indeterminado, tiene infinitas soluciones; así, los tres vectores dados son LD. Como el menor de orden 2 indicado es no nulo, apostamos un brazo a que h_1, h_2 son LI y h_3 es combinación lineal de ellos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \beta_1 \bullet \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \beta_2 \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow h_3 = 1 \bullet h_1 + 1 \bullet h_2$$

NOTA

Si tenemos prisa usamos la **solución rápida:** sabemos que el problema de averiguar si unos vectores son LI ó LD es el problema de calcular el rango de las matriz "A" cuyas columnas son dichos vectores, de modo que los vectores son LI (LD) si rg(A) es igual (menor) que el número de vectores. Así, "pasamos" de $\alpha_1 \bullet h_1 + \alpha_2 \bullet h_2 + \alpha_3 \bullet h_3 = \bar{0}$ y **vamos al grano:** a la vista de las matrices

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ; \; H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} ; \; H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

con la rapidez del rayo escribimos la matriz "A" para nuestro caso:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 7 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{matrix} \end{array}$$

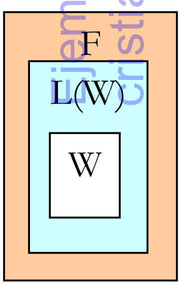
Tras comprobar que $rg(A) = 2 <$ número de vectores, apostamos la vida a que las formas bilineales h_1, h_2, h_3 son LD.

2) Como $\dim.(F) = 4$, cualquier subconjunto de "F" en el que se puedan encontrar 4 vectores LI es un sistema de generadores de "F"; por tanto, los vectores h_1, h_2 y h_3 no son un SG de "F" $\Rightarrow$ tampoco son una base de "F" (recuerda que una base de "F" es un SG de "F" que esté formado por 4 vectores LI, pues $\dim.(F) = 4$).

3) Si $W = \{h_1, h_2, h_3\}$, el subespacio o variedad lineal L(W) engendrado por "W" es el conjunto que forman los vectores de "F" (formas bilineales) que se obtienen combinando linealmente los vectores de "W":

$$L(W) = \{ f \in F \,/\, f = \sum_{i=1}^{i=3} \theta_i \bullet h_i , \theta_i \in \Re, \forall i = 1,2,3 \}$$

- De "W" se dice que es un sistema de generadores del subespacio L(W).
- La dimensión de L(W), que es el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en L(W), coincide con el número máximo de vectores LI que se pueden encontrar en "W", que a su vez coincide con el rango de la matriz "A" cuyas columnas son los vectores de "W". Así, la dimensión de L(W) es 2; por tanto, cualesquiera dos vectores de L(W) que sean LI forman una base de L(W). Como ya sabemos que h_1 y h_2 son LI, estos vectores forman una base del subespacio L(W).



Observa: el que h_1 y h_2 formen una base de L(W) significa que todo vector de L(W) es CL de h_1 y h_2; así, es obvio que, siendo $W* = \{h_1, h_2\}$, la variedad lineal $L(W*)$ engendrada por $W*$ es la misma que la engendrada por $W = \{h_1, h_2, h_3\}$.

9.6 DESCOMPOSICIÓN DE UNA FORMA BILINEAL

Toda matriz cuadrada "A" puede descomponerse en suma de una matriz simétrica "S" y otra antisimétrica "H".

En efecto, si $A = S + H$, es:

$$A^t = (S+H)^t = S^t + H^t = S - H$$

$$\boxed{\text{"S" simétrica "S"} \Rightarrow S^t = S \;;\; \text{"H" antisimétrica} \Rightarrow H^t = -H}$$

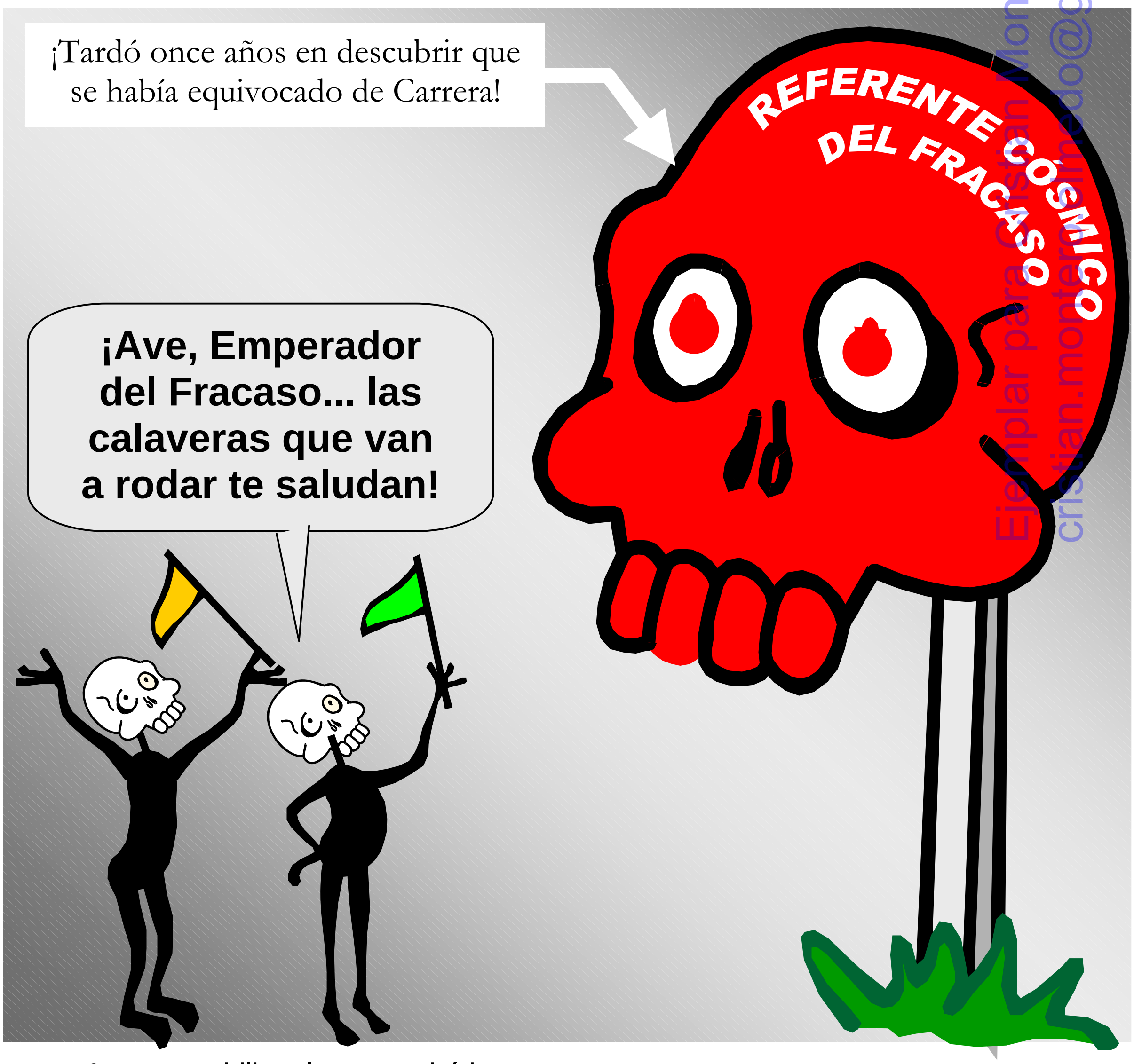
Al sumar miembro a miembro $A = S + H$ y $A^t = S - H$, resulta:

$$S = \frac{A + A^t}{2} = \left\{\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}\right\}$$

Al restar miembro a miembro $A = S + H$ y $A^t = S - H$, resulta:

$$H = \frac{A - A^t}{2} = \left\{\frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}\right\}$$

Por tanto, si "A" es la matriz asociada a una forma bilineal "f", basta descomponer "A" como se ha indicado para así expresar "f" como suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica.



FONEMATO 9.6.1

Sea $f:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^2$ es $f(\bar{x};\bar{y}) = 5.x_1.y_1 + 6.x_1.y_2 + 2.x_2.y_1 + 7.x_2.y_2$.

Descomponga "f" en suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica.

SOLUCIÓN

Expresión matricial de "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } \bar{x} \text{ respecto de } B_c} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } \bar{y} \text{ respecto de } B_c}$$

Siendo $\dfrac{A + A^t}{2} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ y $\dfrac{A - A^t}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, es:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$

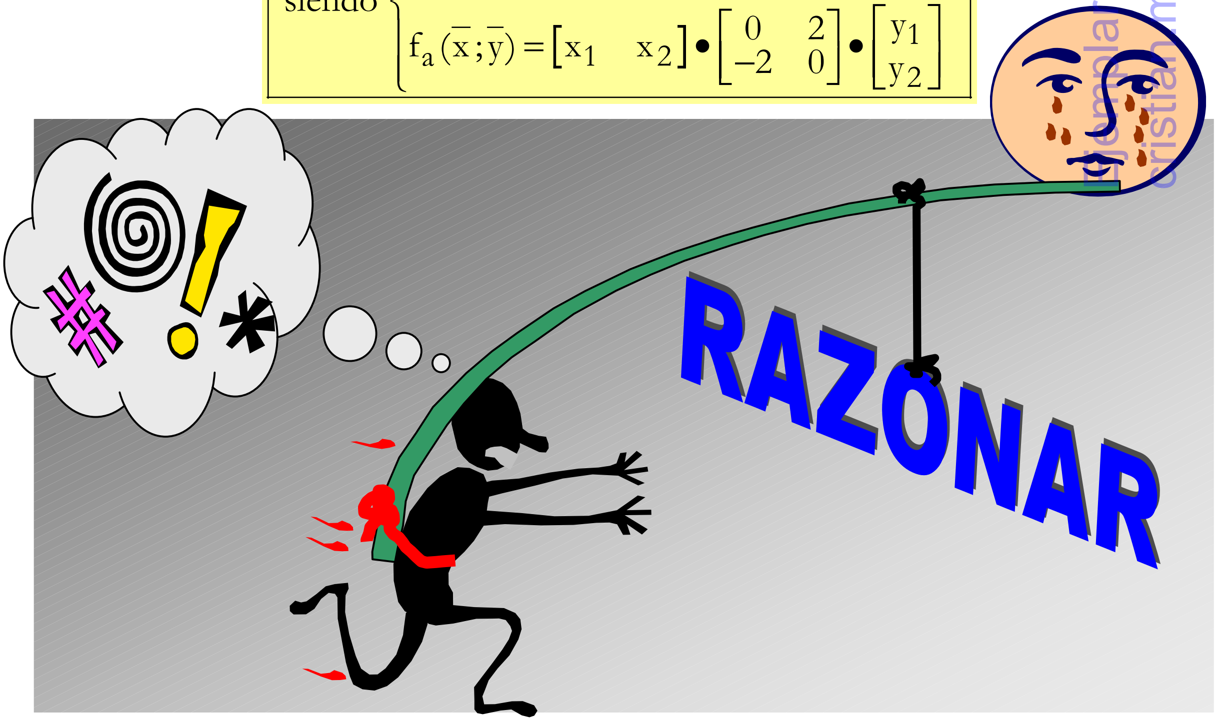
$$\boxed{\text{pues } A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right) \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= f_s(\bar{x};\bar{y}) + f_a(\bar{x};\bar{y})$$

$$\boxed{\text{siendo } \begin{cases} f_s(\bar{x};\bar{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ f_a(\bar{x};\bar{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{cases}}$$



9.7 NÚCLEOS DE UNA FORMA BILINEAL

- Sea $f: V \times V \mapsto \Re$ una forma bilineal.
- El núcleo izquierdo de "f" se denota $\ker_i f$, y es el subconjunto de "V" que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $f(\overline{x};\overline{y}) = 0,\ \forall \overline{y} \in V$; o sea:

$$\ker_i f = \{\overline{x} \in V / f(\overline{x};\overline{y}) = 0,\ \forall \overline{y} \in V\}$$

El conjunto $\ker_i f$ es subespacio de "V", pues $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \ker_i f$ y $\forall \alpha, \beta \in \Re$ sucede que $\alpha \bullet \overline{a} + \beta \bullet \overline{b} \in \ker_i f$.

En efecto, si $\overline{a}, \overline{b} \in \ker_i f$, para todo $\overline{y} \in V$, es $f(\overline{a};\overline{y}) = 0$ y $f(\overline{b};\overline{y}) = 0$; así:

$$f(\alpha \bullet \overline{a} + \beta \bullet \overline{b}\,;\overline{y}) = \alpha . f(\overline{a};\overline{y}) + \beta . f(\overline{b};\overline{y}) = \alpha . 0 + \beta . 0 = 0$$

lo que prueba que $\alpha \bullet \overline{a} + \beta \bullet \overline{b} \in \ker_i f$.

- El núcleo derecho de "f" se denota $\ker_d f$, y es el subconjunto de "V" que forman los vectores $\overline{y}$ tales que $f(\overline{x};\overline{y}) = 0,\ \forall \overline{x} \in V$; o sea:

$$\ker_d f = \{\overline{y} \in V / f(\overline{x};\overline{y}) = 0,\ \forall \overline{x} \in V\}$$

El conjunto $\ker_d f$ es subespacio de "V", pues $\forall \overline{p}, \overline{q} \in \ker_d f$ y $\forall \alpha, \beta \in \Re$ sucede que $\alpha \bullet \overline{p} + \beta \bullet \overline{q} \in \ker_d f$.

En efecto, si $\overline{p}, \overline{q} \in \ker_d f$, para todo $\overline{x} \in V$, es $f(\overline{x};\overline{p}) = 0$ y $f(\overline{x};\overline{q}) = 0$; así:

$$f(\overline{x}\,; \alpha \bullet \overline{p} + \beta \bullet \overline{q}) = \alpha . f(\overline{x};\overline{p}) + \beta . f(\overline{x};\overline{q}) = \alpha . 0 + \beta . 0 = 0$$

lo que prueba que $\alpha \bullet \overline{p} + \beta \bullet \overline{q} \in \ker_d f$.

Observa: si "f" es simétrica sucede que $\ker_i f = \ker_d f$:

$$\ker_i f = \{\overline{x} \in V / f(\overline{x};\overline{y}) = 0,\ \forall \overline{y} \in V\} =$$

siendo "f" simétrica, es $f(\overline{x};\overline{y}) = f(\overline{y};\overline{x})$

$$= \{\overline{x} \in V / f(\overline{y};\overline{x}) = 0,\ \forall \overline{y} \in V\} = \ker_d f$$

FONEMATO 9.7.1

Sea $f: \Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(\overline{x};\overline{y}) = 2.x_1.y_1 + 2.x_2.y_3 + x_3.y_1 + x_3.y_3$.

Determine los subespacios $\ker_i f$ y $\ker_d f$.

SOLUCIÓN

- Expresión matricial de "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$:

$$f(\overline{x};\overline{y}) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } \overline{x} \text{ respecto de } B_c} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } \overline{y} \text{ respecto de } B_c}$$

• Es $\ker_i f = \{\bar{x} \in \Re^3 / f(\bar{x};\bar{y}) = 0,\ \forall \bar{y} \in \Re^3\}$; o sea, el subespacio $\ker_i f$ lo forman los vectores $\bar{x} = (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3$ tales que:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0,\ \forall \bar{y} = (y_1;y_2;y_3) \in \Re^3 \quad \text{(I)}$$

La condición (I) se satisface sólo si:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

eliminamos la 2ª ecuación y parametrizamos x_3

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.x_1 = -x_3 \\ 2.x_2 = -x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = -x_3/2 \\ x_2 = -x_3/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker_i f = \{(-a;-a;2.a),\ \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (-1;-1;2),\ \forall a \in \Re\}$$

El vector $\bar{u} = (-1;-1;2)$ es una base de $\ker_i f$; o sea, es $\ker_i f = <\bar{u}>$.

$$\begin{array}{ccc} \Re^3 \times \Re^3 & \xrightarrow{f} & \Re \\ ((-a;-a;2.a);(y_1;y_2;y_3)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

• Es $\ker_d f = \{\bar{y} \in \Re^3\ /\ f(\bar{x};\bar{y}) = 0,\ \forall \bar{x} \in \Re^3\}$; o sea, el subespacio $\ker_d f$ lo forman los vectores $\bar{y} = (y_1;y_2;y_3) \in \Re^3$ tales que:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0,\ \forall \bar{x} = (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3 \quad \text{(II)}$$

La condición (II) se satisface sólo si:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.y_1 = 0 \\ 2.y_2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow$$

eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos y_3

$$\Rightarrow \ker_d f = \{(0;0;b),\ \forall b \in \Re\} = \{b \bullet (0;0;1),\ \forall b \in \Re\}$$

El vector $\bar{v} = (0;0;1)$ es una base de $\ker_d f$; o sea, es $\ker_d f = <\bar{v}>$.

$$\begin{array}{ccc} \Re^3 \times \Re^3 & \xrightarrow{f} & \Re \\ ((x_1;x_2;x_3);(0;0;b)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Observa: si fuera $rg(A) = 1$ los subespacios $\ker_i f$ y $\ker_d f$ tendrían dimensión 2; y si fuera $rg(A) = 3$ sería $\ker_i f = \ker_d f = \{\bar{0}\}$.

FONEMATO 9.7.2

Sea $f:\Re^3\times\Re^3 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(\overline{x};\overline{y}) = 2.x_1.y_1 + 2.x_1.y_3 + 2.x_3.y_1 + 2.x_3.y_3$.

Determine los subespacios $\ker_i f$ y $\ker_d f$.

SOLUCIÓN

• Expresión matricial de "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$:

$$f(\overline{x};\overline{y}) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } \overline{x} \text{ respecto de } B_c} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } \overline{y} \text{ respecto de } B_c}$$

• Es $\ker_i f = \{\overline{x} \in \Re^3 \,/\, f(\overline{x};\overline{y}) = 0,\ \forall \overline{y} \in \Re^3\}$; o sea, el subespacio $\ker_i f$ lo forman los vectores $\overline{x} = (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3$ tales que:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0,\ \forall \overline{y} = (y_1;y_2;y_3) \in \Re^3 \quad \text{(I)}$$

La condición (I) se satisface sólo si

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{eliminamos las ecuaciones } 2^a \text{ y } 3^a \text{ y parametrizamos } x_2 \text{ y } x_3}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker_i f = \{(-a;b;a),\ \forall a,b \in \Re\} =$$
$$= \{a \bullet (-1;0;1) + b \bullet (0;1;0),\ \forall a,b \in \Re\}$$

Los vectores $\overline{u} = (-1;0;1)$ y $\overline{v} = (0;1;0)$ forman una base de $\ker_i f$; o sea, es:

$$\ker_i f = <\overline{u},\overline{v}>$$

$$\begin{array}{ccc} \Re^3\times\Re^3 & \xrightarrow{f} & \Re \\ ((-a;b;a);(y_1;y_2;y_3)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

• La forma bilineal "f" es simétrica, pues la matriz "A" es simétrica; por tanto, sucede que $\ker_d f = \ker_i f$.

$$\begin{array}{ccc} \Re^3\times\Re^3 & \xrightarrow{f} & \Re \\ ((x_1;x_2;x_3);(-a;b;a)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

FONEMATO 9.7.3

Sea la forma bilineal $f: P_2 \times P_2 \mapsto \Re$ tal que:

$$f(p(x);q(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx\right).\left(\int_0^1 q''(x).dx\right)$$

Determine los subespacios $\ker_i f$ y $\ker_d f$.

SOLUCIÓN

• Consideramos que la base de referencia en P_2 es $B = \{x^2, x, 1\}$.

• Siendo $p(x) = p_1.x^2 + p_2.x + p_3 \in P_2$ y $q(x) = q_1.x^2 + q_2.x + q_3 \in P_2$, es:

$$f(p(x);q(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx\right).\left(\int_0^1 q''(x).dx\right) =$$

VENTANA

$$* \int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx = \int_0^1 (2.p_1.x + 2.p_1 + p_2).dx =$$

$$\left\{\begin{matrix} p'(x) = 2.p_1.x + p_2 \\ p''(x) = 2.p_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p'(x) + p''(x) = 2.p_1.x + 2.p_1 + p_2$$

$$= \left(p_1.x^2 + 2.p_1.x + p_2.x\right)_{x=0}^{x=1} = 3.p_1 + p_2$$

$$* \int_0^1 q''(x).dx = \int_0^1 2.q_1.dx = (2.q_1.x)_{x=0}^{x=1} = 2.q_1$$

$$= (3.p_1 + p_2).(2.q_1) = 6.p_1.q_1 + 2.p_2.q_1 = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

• Es $\ker_i f = \{p(x) \in P_2 / f(p(x);q(x)) = 0,\ \forall q(x) \in P_2\}$.

Sucede que $f(p(x);q(x)) = 0,\ \forall q(x) \in P_2$ sólo si:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow$$

eliminamos las ecuaciones 2ª y 3ª y parametrizamos p_2 y p_3

$$\Rightarrow \ker_i f = \{0.x^2 + p_2.x + p_3,\ \forall p_2, p_3 \in \Re\}$$

Los vectores $u(x) = x$ y $v(x) = 1$ forman una base de $\ker_i f$; o sea, es:

$$\ker_i f = \langle u(x), v(x) \rangle$$

• Es $\ker_d f = \{q(x) \in P_2 / f(p(x);q(x)) = 0,\ \forall p(x) \in P_2\}$.

Sucede que $f(p(x);q(x)) = 0,\ \forall p(x) \in P_2$ sólo si:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow q_2 = -3.q_1 \Rightarrow$$

eliminamos las ecuaciones 2ª y 3ª y parametrizamos q_1 y q_3

$$\Rightarrow \ker_d f = \{q_1.x^2 - 3.q_1.x + q_3,\ \forall q_1, q_3 \in \Re\}$$

Los vectores $r(x) = x^2 - 3.x$ y $s(x) = 1$ forman una base de $\ker_d f$; o sea, es:

$$\ker_i f = \langle r(x), s(x) \rangle$$

9.8 VECTORES CONJUGADOS

Si $f:V\times V\mapsto\Re$ es una forma bilineal simétrica, los vectores $\bar{x},\bar{y}\in V$ se dicen conjugados respecto a "f" si $f(\bar{x};\bar{y})=0$.

9.9 SUBESPACIOS CONJUGADOS

Sea $f:V\times V\mapsto\Re$ una forma bilineal simétrica.

Si "H" y "S" son subespacios de "V", se dice que "H" y "S" son conjugados respecto a "f" si $\forall\bar{p}\in H$ y $\forall\bar{q}\in S$ es $f(\bar{p};\bar{q})=0$.

Obviamente, si "H" y "S" son conjugados respecto a "f" y $B_1=\{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_k\}$ es una base de "H" y $B_2=\{\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_r\}$ es una base de "S", sucederá que

$$f(\bar{a}_i;\bar{s}_j)=0,\ \begin{cases}\forall i=1,2,\ldots,k\\ \forall j=1,2,\ldots,r\end{cases}$$

Para determinar el subespacio conjugado de "H" calcularemos una base de "H" y exigiremos que los vectores de "S" sean conjugados de todo vector de esa base.

FONEMATO 9.9.1

Sea $f:\Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$, es

$$f(\overline{x};\overline{y}) = 2.x_1.y_1 + x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_2.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_1 + x_3.y_3$$

Determine el subespacio conjugado de $H = \{(x_1;x_2;x_3)/x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

SOLUCIÓN

La expresión matricial de "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es

$$f(\overline{x};\overline{y}) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } \overline{x} \text{ respecto de } B_c} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } \overline{y} \text{ respecto de } B_c}$$

- Calculemos una base del subespacio "H":

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H = \{(a-b;a;b),\ \forall a,b \in \Re\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H = \{a \bullet (1;1;0) + b \bullet (-1;0;1),\ \forall a,b \in \Re\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{u} = (1;1;0) \text{ y } \overline{v} = (-1;0;1) \text{ son una base de "H"}$$

- Siendo "S" el subespacio conjugado de "H" respecto de la forma bilineal "f", el vector $\overline{z} = (z_1;z_2;z_3) \in S$ debe ser conjugado de $\overline{u} = (1;1;0)$ y $\overline{v} = (-1;0;1)$ respecto de "f"; es decir, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} f(\overline{u};\overline{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0 \\ f(\overline{v};\overline{z}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 3.z_1 + 2.z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 + z_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 = -z_2 \\ z_3 = z_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(-\theta;\theta;\theta),\ \forall \theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (-1;1;1),\ \forall \theta \in \Re\}$$

El vector $\overline{w} = (-1;1;1)$ es una base de "S"; o sea, es $S = \langle \overline{w} \rangle$.

9.10 LOS CAMBIOS DE BASE Y LAS FORMAS BILINEALES

Las formas bilineales son camaleónicas; es decir, la matriz asociada a una forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ es una u otra dependiendo de cuál sea la base de referencia empleada para identificar a los vectores de "V".

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y "B" la base de referencia en él. Sea $f: V \times V \mapsto \Re$ una forma bilineal cuya matriz asociada respecto de la base "B" es "A"; así, siendo $\bar{x} = (x_1; \ldots ; x_n)$ e $\bar{y} = (y_1; \ldots ; y_n)$, es:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \bullet A \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

Si en "V" tomamos como nueva base de referencia la $B*$, se modifican las coordenadas de $\bar{x}$ e $\bar{y}$, y sabemos que si "C" es la matriz asociada al cambio $B \to B*$, si $(x_1^*; \ldots ; x_n^*)$ son las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de $B*$ e $(y_1^*; \ldots ; y_n^*)$ las coordenadas de $\bar{y}$ respecto de dicha base, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \text{ (II) } ; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix} \text{ (III)}$$

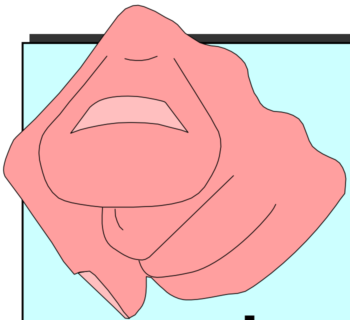
Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de la forma bilineal "f" respecto de la base $B*$; resulta:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \right)^t \bullet A \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix} \right) =$$

traspuesta de un producto = producto de traspuestas en orden contrario

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & \ldots & x_n^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet A \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix}$$

O sea, la matriz asociada a "f" respecto de la nueva base es la que teníamos "A", postmultiplicada por la matriz "C" asociada al cambio de base realizado, y premultiplicada por la traspuesta de "C".



¡Remueve Roma con Santiago para conseguir exámenes de Álgebra de años anteriores... sin ellos tendrás que a estudiar a ciegas!

FONEMATO 9.10.1

Sea $f:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya matriz asociada respecto de la base $B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ es $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Determínese la expresión de "f" respecto de la base $B^*=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2\}$, si $\overline{v}_1 = 2\bullet\overline{u}_1 + 3\bullet\overline{u}_2$ y $\overline{v}_2 = 4\bullet\overline{u}_2$.

SOLUCIÓN

Siendo $\overline{x},\overline{y}\in\Re^2$ tales que $\overline{x}=x_1\bullet\overline{u}_1+x_2\bullet\overline{u}_2$ e $\overline{y}=y_1\bullet\overline{u}_1+y_2\bullet\overline{u}_2$, la expresión de "f" respecto de la base $B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ es:

$$f(\overline{x};\overline{y})=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}\quad\text{(I)}$$

o sea:

$$f(\overline{x};\overline{y})=x_1.y_2+x_2.y_1$$

Las columnas de la matriz "C" asociada al cambio $B\to B^*$ son las coordenadas que respecto de la base **vieja** "B" tienen los vectores de la base **nueva** B^*... y el enunciado es tan **maternal** que nos da esa información, con lo que podemos determinar "C" a la velocidad de la luz:

$$C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc}\uparrow & \uparrow\\ \overline{v}_1 & \overline{v}_2\end{array}$$

Así, si $(x_1^*;x_2^*)$ son las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de B^* e $(y_1^*;y_2^*)$ las coordenadas de $\overline{y}$ respecto de dicha base, se verifica que:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix}\quad\text{(II)}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=C\bullet\begin{bmatrix}y_1^*\\ y_2^*\end{bmatrix}\quad\text{(III)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de la forma bilineal "f" respecto de la base B^*; resulta:

$$f(\overline{x};\overline{y})=\left(C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix}\right)^t\bullet A\bullet\left(C\bullet\begin{bmatrix}y_1^*\\ y_2^*\end{bmatrix}\right)=$$

traspuesta de un producto = producto de traspuestas en orden contrario

$$=\begin{bmatrix}x_1^* & x_2^*\end{bmatrix}\bullet(C^t\bullet A\bullet C)\bullet\begin{bmatrix}y_1^*\\ y_2^*\end{bmatrix}=$$

$$=12.x_1^*.y_1^*+8.x_1^*.y_2^*+8.x_2^*.y_1^*$$

$$C^t\bullet A\bullet C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 8\\ 8 & 0\end{bmatrix}$$

FONEMATO 9.10.2

Sea $f:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya matriz asociada respecto de la base $B=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2\}$ es $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Determínese la expresión de "f" respecto de la base $B^*=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2\}$ si $\overline{k}_1 = 5\bullet\overline{a}_1 + 6\bullet\overline{a}_2$ y $\overline{k}_2 = 7\bullet\overline{a}_1 + 8\bullet\overline{a}_2$.

SOLUCIÓN

Siendo $\overline{x},\overline{y} \in \Re^2$ tales que $\overline{x} = x_1\bullet\overline{k}_1 + x_2\bullet\overline{k}_2$ e $\overline{y} = y_1\bullet\overline{k}_1 + y_2\bullet\overline{k}_2$, la expresión de "f" respecto de la base $B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ es:

$$f(\overline{x};\overline{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}_{A}\bullet\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (I)$$

o sea:

$$f(\overline{x};\overline{y}) = 4.x_1.y_1 + 3.x_2.y_2 + 4.x_1.y_2 + 4.x_2.y_1$$

Las columnas de la matriz "C" asociada al cambio $B \to B^*$ son las coordenadas que respecto de la base vieja "B" tienen los vectores de la base nueva B^*... y el enunciado es casi maternal, pues con la información que no da podemos determinar C^{-1} a la velocidad de la luz:

$$C^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \overline{k}_1 & \overline{k}_2 \end{matrix} \end{array}$$

Así, si $(x_1^*;x_2^*)$ son las coordenadas de $\overline{x}$ respecto de B^* e $(y_1^*;y_2^*)$ las coordenadas de $\overline{y}$ respecto de dicha base, se verifica que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \quad (II)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} \quad (III)$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de la forma bilineal "f" respecto de la base B^*; resulta:

$$f(\overline{x};\overline{y}) = \left(\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}\right)^t\bullet A\bullet\left(\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix}\right) =$$

traspuesta de un producto = producto de traspuestas en orden contrario

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}\bullet\left(\left(\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^{-1}\right)^t\bullet A\bullet\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^{-1}\right)\bullet\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix}$$

FONEMATO 9.10.3

Sea $f:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ la forma bilineal tal que:

$$f((2;3);(2;3)) = 15 \;;\; f((2;3);(4;1)) = f((4;1);(2;3)) = 12 \;;\; f((4;1);(4;1)) = 19$$

Determine la expresión de "f" respecto de la base $B = \{(0;5), (-2;7)\}$.

SOLUCIÓN

Los vectores $\bar{e}_1 = (2;3)$ y $\bar{e}_2 = (4;1)$ son linealmente independientes, por lo que forman una base de $\Re^2$.

Siendo $\bar{x}, \bar{y} \in \Re^2$ tales que $\bar{x} = x_1 \bullet \bar{e}_1 + x_2 \bullet \bar{e}_2$ e $\bar{y} = y_1 \bullet \bar{e}_1 + y_2 \bullet \bar{e}_2$, la expresión de "f" respecto de la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ es:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 12 & 19 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$\boxed{a_{ij} = f(\bar{e}_i;\bar{e}_j)}$$

o sea: $f(\bar{x};\bar{y}) = 15.x_1.y_1 + 19.x_2.y_2 + 12.x_2.y_1 + 12.x_1.y_2$

Las columnas de la matriz "C" asociada al cambio $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \to B$ son las coordenadas que respecto de la base **vieja** $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tienen los vectores de la base **nueva** $B = \{(0;5), (-2;7)\}$... y para determinar "C" basta resolver dos sistemas lineales de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

VENTANA

$$(0;5) = \alpha \bullet (2;3) + \beta \bullet (4;1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 = 2.\alpha + 4.\beta \\ 5 = 3.\alpha + \beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0;5) = 2 \bullet (2;3) + (-1) \bullet (4;1)$$

$$(-2;7) = \alpha \bullet (2;3) + \beta \bullet (4;1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} -2 = 2.\alpha + 4.\beta \\ 7 = 3.\alpha + \beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0;5) = 3 \bullet (2;3) + (-2) \bullet (4;1)$$

Así, si $(x_1^*;x_2^*)$ son las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base "B" e $(y_1^*;y_2^*)$ las coordenadas de $\bar{y}$ respecto de dicha base, se verifica que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \;\text{(II)} \;;\; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} \;\text{(III)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de la forma bilineal "f" respecto de la base $B = \{(0;5), (-2;7)\}$:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}\right)^t \bullet A \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet A \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{traspuesta de un producto} = \text{producto de traspuestas en orden contrario}}$$

9.11 FORMA CUADRÁTICA ASOCIADA A UNA FORMA BILINEAL

Siendo "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y "B" la base de referencia elegida en él, sea $f: V \times V \mapsto \Re$ una forma bilineal con matriz asociada "A" respecto de la base "B".

La **forma cuadrática** asociada a "f" es la aplicación $Q: V \mapsto \Re$ tal que:

$$Q(\bar{x}) = f(\bar{x};\bar{x})$$

O sea, el número real $Q(\bar{x})$ que "Q" asocia a $\bar{x} \in V$ es el que la forma bilineal "f" asocia al par $(\bar{x};\bar{x}) \in V \times V$.

$$\boxed{\begin{matrix} V\times V \\ (\bar{x};\bar{x}) \end{matrix}} \xrightarrow{f} \boxed{\begin{matrix} \Re \\ \text{Pepe} \end{matrix}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} V \\ \bar{x} \end{matrix}} \xrightarrow{Q} \boxed{\begin{matrix} \Re \\ \text{Pepe} \end{matrix}}$$

Si f_s es la forma bilineal **simétrica** cuya matriz asociada respecto de la base "B" es $(A + A^t)/2$ y f_a la forma bilineal **antisimétrica** cuya matriz asociada respecto de la base "B" es $(A - A^t)/2$, sabemos que $f = f_s + f_a$; por tanto:

es $f_a(\bar{x};\bar{x}) = 0$, pues f_a es antisimétrica

$$Q(\bar{x}) = f(\bar{x};\bar{x}) = f_s(\bar{x};\bar{x}) + f_a(\bar{x};\bar{x}) = f_s(\bar{x};\bar{x}) = \bar{x}^t \bullet \frac{A + A^t}{2} \bullet \bar{x}$$

pues la matriz asociada a f_s es $(A + A^t)/2$

FONEMATO 9.11.1

La expresión de una forma bilineal respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$1)\ f(\bar{x};\bar{y}) = 3.x_1.y_1 + x_1.y_2 + 7.x_{.2}.y_2 + 5.x_2.y_1 + \\ + 6.x_3.y_1 + 8.x_2.y_3 + 9.x_3.y_3$$

$$2)\ g(\bar{x};\bar{y}) = 3.x_1.y_1 + 2.x_1.y_2 + 6.x_1.y_3 + 7.x_{.2}.y_2 + \\ + 4.x_2.y_1 + 8.x_3.y_2 + 9.x_3.y_3$$

Determine la forma cuadrática asociada a la forma bilineal.

SOLUCIÓN

1) La matriz $A = \{a_{ij}\}$ asociada a "f" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

el elemento a_{ij} de la matriz "A" es el coeficiente de $x_i.y_j$

La forma cuadrática asociada a "f" es la aplicación $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ tal que $Q(\bar{x}) = f(\bar{x};\bar{x})$; es decir, el número real $Q(\bar{x})$ que "Q" asocia a $\bar{x} \in \Re^3$ es el que la forma bilineal "f" asocia al par $(\bar{x};\bar{x}) \in \Re^3 \times \Re^3$:

$$Q(\overline{x}) = f(\overline{x};\overline{x}) = f_s(\overline{x};\overline{x}) + f_a(\overline{x};\overline{x}) =$$

Es $f = f_s + f_a$, siendo f_s la forma bilineal **simétrica** cuya matriz asociada respecto de la base canónica es $(A + A^t)/2$ y f_a la forma bilineal **antisimétrica** cuya matriz asociada respecto de dicha base es $(A - A^t)/2$

$f_a(\overline{x};\overline{x}) = 0$, pues f_a es antisimétrica

$$= f_s(\overline{x};\overline{x}) = \overline{x}^t \bullet \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \bullet \overline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \bullet \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

la matriz asociada a f_s es $\dfrac{A + A^t}{2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$$= 3.x_1^2 + 7.x_2^2 + 9.x_3^2 + \mathbf{2}.(3.x_1.x_2 + 3.x_1.x_3 + 4.x_2.x_3)$$

2) La matriz $C = \{c_{ij}\}$ asociada a "g" respecto de la base canónica de $\Re^3$, es:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

el elemento c_{ij} de la matriz "C" es el coeficiente de $x_i.y_j$

La forma cuadrática asociada a "g" es la aplicación $W:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que $W(\overline{x}) = g(\overline{x};\overline{x})$; es decir, el número real $W(\overline{x})$ que "W" asocia a $\overline{x} \in \Re^3$ es el que la forma bilineal "g" asocia al par $(\overline{x};\overline{x}) \in \Re^3 \times \Re^3$:

$$W(\overline{x}) = g(\overline{x};\overline{x}) = g_s(\overline{x};\overline{x}) + g_a(\overline{x};\overline{x}) =$$

VENTANA

Es $g = g_s + g_a$, siendo g_s la forma bilineal **simétrica** cuya matriz asociada respecto de la base canónica es $(C + C^t)/2$ y g_a la forma bilineal **antisimétrica** cuya matriz asociada respecto de dicha base es $(C - C^t)/2$.

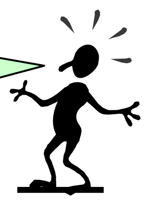
$g_a(\overline{x};\overline{x}) = 0$, pues g_a es antisimétrica

$$= g_s(\overline{x};\overline{x}) = \overline{x}^t \bullet \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \bullet \overline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \bullet \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

la matriz asociada a g_s es $\dfrac{C + C^t}{2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$$= 3.x_1^2 + 7.x_2^2 + 9.x_3^2 + \mathbf{2}.(3.x_1.x_2 + 3.x_1.x_3 + 4.x_2.x_3)$$

¡Alucina!... las formas cuadráticas "W" y "Q" son la misma; o sea, la forma cuadrática asociada a la forma bilineal "f" es la misma que la asociada a la forma bilineal "g"



Hay infinidad de formas bilineales que tienen asociada la misma forma cuadrática... puedes comprobar que, independientemente de los valores que tomen "a", "b" y "c", la forma bilineal $h:\Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ cuya matriz "D" asociada respecto de la base canónica es

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 6-a & 6-b \\ a & 7 & 8-c \\ b & c & 9 \end{bmatrix}$$

tiene asociada la misma forma cuadrática que "f" y "g"; y sucede eso porque independientemente de los valores de "a", "b" y "c" sucede que

$$\frac{D+D^t}{2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Forma bilineal "polar" de una forma cuadrática

Entre las infinitas formas bilineales que tienen asociada la misma forma cuadrática "Q", sólo hay una simétrica, y de ella se dice que es la forma bilineal polar de "Q": es aquella cuya matriz asociada coincide con la matriz asociada a "Q".

En nuestro caso, la forma bilineal polar correspondiente a la forma cuadrática

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 3.x_1^2 + 7.x_2^2 + 9.x_3^2 + 2.(3.x_1.x_2 + 3.x_1.x_3 + 4.x_2.x_3)$$

es la $f_p:\Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ tal que:

$$f_p(\bar{x};\bar{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 3.x_1.y_1 + 3.x_1.y_2 + 3.x_1.y_3 + 3.x_2.y_1 + 7.x_2.y_2 + 4.x_2.y_3 +$$
$$+ 3.x_3.y_1 + 4.x_3.y_2 + 9.x_3.y_3$$

Por ejemplo, la forma bilineal polar correspondiente a la forma cuadrática

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 2.x_1^2 + 5.x_2^2 + 4.x_3^2 + 2.(0.x_1.x_2 + 3.x_1.x_3 + 6.x_2.x_3)$$

es la $f_p:\Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ tal que:

$$f_p(\bar{x};\bar{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

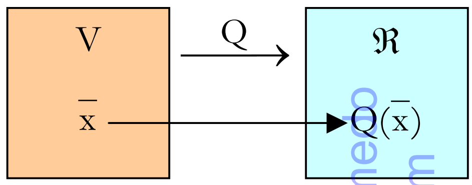
$$= 2.x_1.y_1 + 0.x_1.y_2 + 3.x_1.y_3 + 0.x_2.y_1 + 5.x_2.y_2 + 6.x_2.y_3 +$$
$$+ 3.x_3.y_1 + 6.x_3.y_2 + 4.x_3.y_3$$

En el índice de este Tema ya advertimos que una **forma cuadrática** es un ente que va pegado a la chepa de otro ente llamado **forma bilineal.** No obstante, acaso te hablen de formas cuadráticas sin hablarte previamente de formas bilineales; en tal caso, para ti este Tema empieza en el siguiente epígrafe.

9.12 FORMA CUADRÁTICA (SIN FORMA BILINEAL)

Si "V" es un espacio vectorial de dimensión "n" y "B" es la base de referencia elegida en él, se llama **forma cuadrática** a toda aplicación $Q:V \mapsto \Re$ tal que si las coordenadas de $\bar{x} \in V$ respecto de la base "B" son $(x_1;...;x_n)$, el número real $Q(\bar{x})$ que "Q" asocia a $\bar{x} \in V$ es:

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & .... & x_n \end{bmatrix} \bullet A \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{bmatrix} \quad (I)$$



donde "A" es una matriz **simétrica** de orden "n". De "A" se dice que es la matriz asociada a "Q" respecto de la base "B". De (I) se dice que es la expresión de "Q" respecto de la base "B", siendo habitual abreviar escribiendo $Q(\bar{x}) = \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{x}$.

Por ejemplo, es una forma cuadrática la aplicación $Q_1:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que

$$Q_1(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 8.x_1^2 + 4.x_2^2 + 6.x_3^2 + \mathbf{2}.(7.x_1.x_2 + 3.x_1.x_3 + 5.x_2.x_3)$$

Por ejemplo, es una forma cuadrática la aplicación $Q_2:\Re^4 \mapsto \Re$ tal que:

$$Q_2(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 & 9 & 7 & 0 \\ 9 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =$$

$$= 4.x_1^2 + 3.x_2^2 + 6.x_3^2 + 8.x_4^2 +$$

$$+ \mathbf{2}.(9.x_1.x_2 + 7.x_1.x_3 + 0.x_1.x_4 + 5.x_2.x_3 + 2.x_2.x_4 - 2.x_3.x_4)$$

Por ejemplo, es una forma cuadrática la aplicación $Q_3:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que:

$$Q_3(\bar{x}) = 9.x_1^2 + 3.x_2^2 - 6.x_3^2 + 5.x_1.x_2 + 8.x_1.x_3 + 7.x_2.x_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 9 & 5/2 & 8/2 \\ 5/2 & 3 & 7/2 \\ 8/2 & 7/2 & -6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, es una forma cuadrática la aplicación $Q_4:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que:

$$Q_4(\bar{x}) = x_1^2 - 8.x_2^2 + 9.x_1.x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 9/2 \\ 9/2 & -8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

9.13 LOS CAMBIOS DE BASE Y LAS FORMAS CUADRÁTICAS

Las formas cuadráticas son camaleónicas, y con esto queremos decir que la matriz simétrica que representa a una forma cuadrática $Q:V \mapsto \Re$ es una u otra dependiendo de cuál sea la base de referencia empleada para identificar a los vectores del espacio vectorial "V".

Si "A" es la matriz asociada a la forma cuadrática $Q:V \mapsto \Re$ respecto de la base "B" del espacio "V" y $\bar{x} \in V$ tiene coordenadas $(x_1; \dots ; x_n)$ respecto de dicha base, es:

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \bullet A \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

Si en "V" tomamos B* como nueva base de referencia, se modifican las coordenadas del vector $\bar{x}$, y sabemos que si "C" es la matriz asociada al cambio de base $B \to B*$ y $(x_1^*; \dots ; x_n^*)$ son las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base B*, se verifica que:

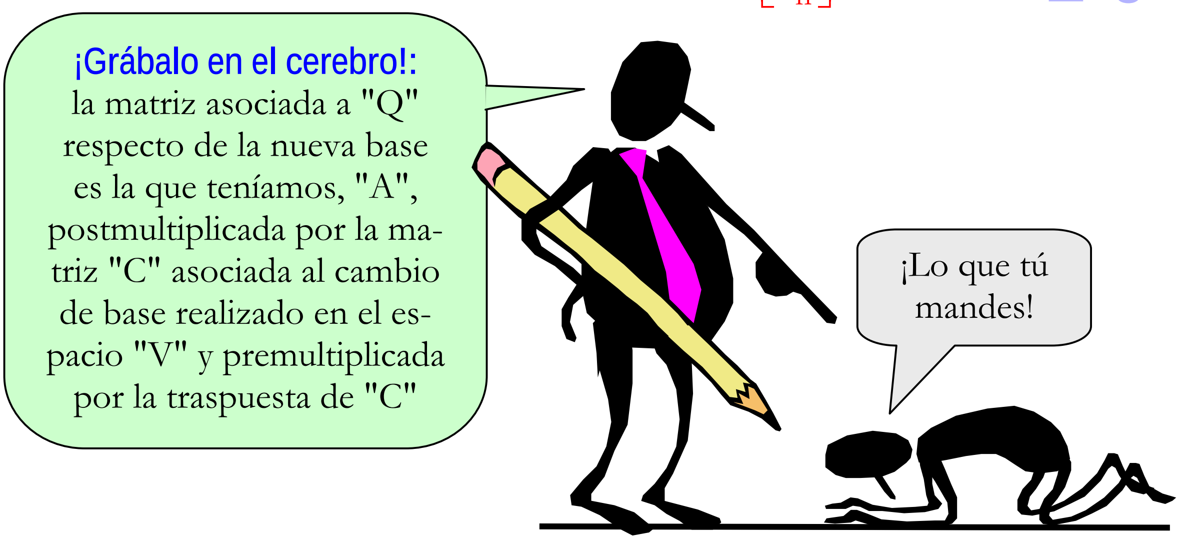
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "Q" respecto de la base B*; resulta:

$$Q(\bar{x}) = \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \right)^t \bullet A \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \right) =$$

la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas en orden contrario

$$= \begin{bmatrix} x_1^*; \dots ; x_n^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet A \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix}$$



FONEMATO 9.13.1

Sea $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ la forma cuadrática cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $Q(\bar{x}) = x_1^2 + 3.x_2^2 - 6.x_3^2 + 8.x_1.x_2 + 4.x_1.x_3$.

Determine la expresión de "Q" respecto de la base

$$B^* = \{\bar{h}_1 = (2;4;5), \bar{h}_2 = (3;7;0), \bar{h}_3 = (9;0;0)\}$$

SOLUCIÓN

La expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$a_{ii} = \text{coeficiente de } x_i^2 \;\; ; \text{ si } i \neq j \text{ es } a_{ij} = \frac{\text{coeficiente de } x_i.x_j}{2}$$

donde $(x_1;x_2;x_3)$ son las coordenadas de $\bar{x} \in \Re^3$ respecto de dicha base canónica. Las coordenadas del vector $\bar{x} \in \Re^3$ se modifican si en $\Re^3$ tomamos B^* como nueva base de referencia, y si $(x_1^*;x_2^*;x_3^*)$ son las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de B^*, o sea, si $\bar{x} = x_1^* \bullet \bar{h}_1 + x_2^* \bullet \bar{h}_2 + x_3^* \bullet \bar{h}_3$, se verifica que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

las columnas de "C" son las coordenadas respecto de la base "vieja" (la canónica) de los vectores de la base "nueva" $B*$. El enunciado es tan maternal que nos las da: $\bar{h}_1 = (2;4;5)$, $\bar{h}_2 = (3;7;0)$, $\bar{h}_3 = (9;0;0)$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "Q" respecto de B*; resulta:

$$Q(\bar{x}) = \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \right)^t \bullet A \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet A \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} =$$

la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas en orden contrario

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

FONEMATO 9.13.2

Sea $B=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2\}$ una base de $\Re^2$ y $Q:\Re^2 \mapsto \Re$ la forma cuadrática cuya expresión respecto de "B" es $Q(\bar{x}) = 2.x_1^2 + x_2^2 + 6.x_1.x_2$.

Determine su expresión respecto de la base $B^* = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$, siendo:

$$\bar{k}_1 = 9 \bullet \bar{h}_2 \ ; \ \bar{k}_2 = 2 \bullet \bar{h}_1 + 3 \bullet \bar{h}_2$$

SOLUCIÓN

La expresión matricial de "Q" cuando los vectores de $\Re^2$ se identifican mediante sus coordenadas respecto de la base $B=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2\}$ es

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$a_{ii} = \text{coeficiente de } x_i^2 \ ; \ \text{si } i \neq j \text{ es } a_{ij} = \frac{\text{coeficiente de } x_i.x_j}{2}$$

siendo $(x_1;x_2)$ las coordenadas de $\bar{x} \in \Re^2$ respecto de dicha base:; es decir:

$$\bar{x} = x_1 \bullet \bar{k}_1 + x_2 \bullet \bar{k}_2$$

Las coordenadas del vector $\bar{x} \in \Re^2$ se modifican si en $\Re^2$ tomamos como nueva base de referencia la B^*; si $(x_1^*;x_2^*)$ son las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base B^* (o sea, si $\bar{x} = x_1^* \bullet \bar{h}_1 + x_2^* \bullet \bar{h}_2$), es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}^{-1}}_{C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

VENTANA

las columnas de "C" son las coordenadas respecto de la base vieja $B=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2\}$ de los vectores de la base nueva $B^*=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$, y el enunciado es "casi maternal", pues nos da justo lo contrario:

$$\bar{k}_1 = 9 \bullet \bar{h}_2 = (0;9) \ ; \ \bar{k}_2 = 2 \bullet \bar{h}_1 + 3 \bullet \bar{h}_2 = (2;3)$$

con lo que nos está dando las columnas de la matriz inversa de "C"

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "Q" respecto de la base B^*; resulta:

$$Q(\bar{x}) = \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \right)^t \bullet A \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet A \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \right)^t \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

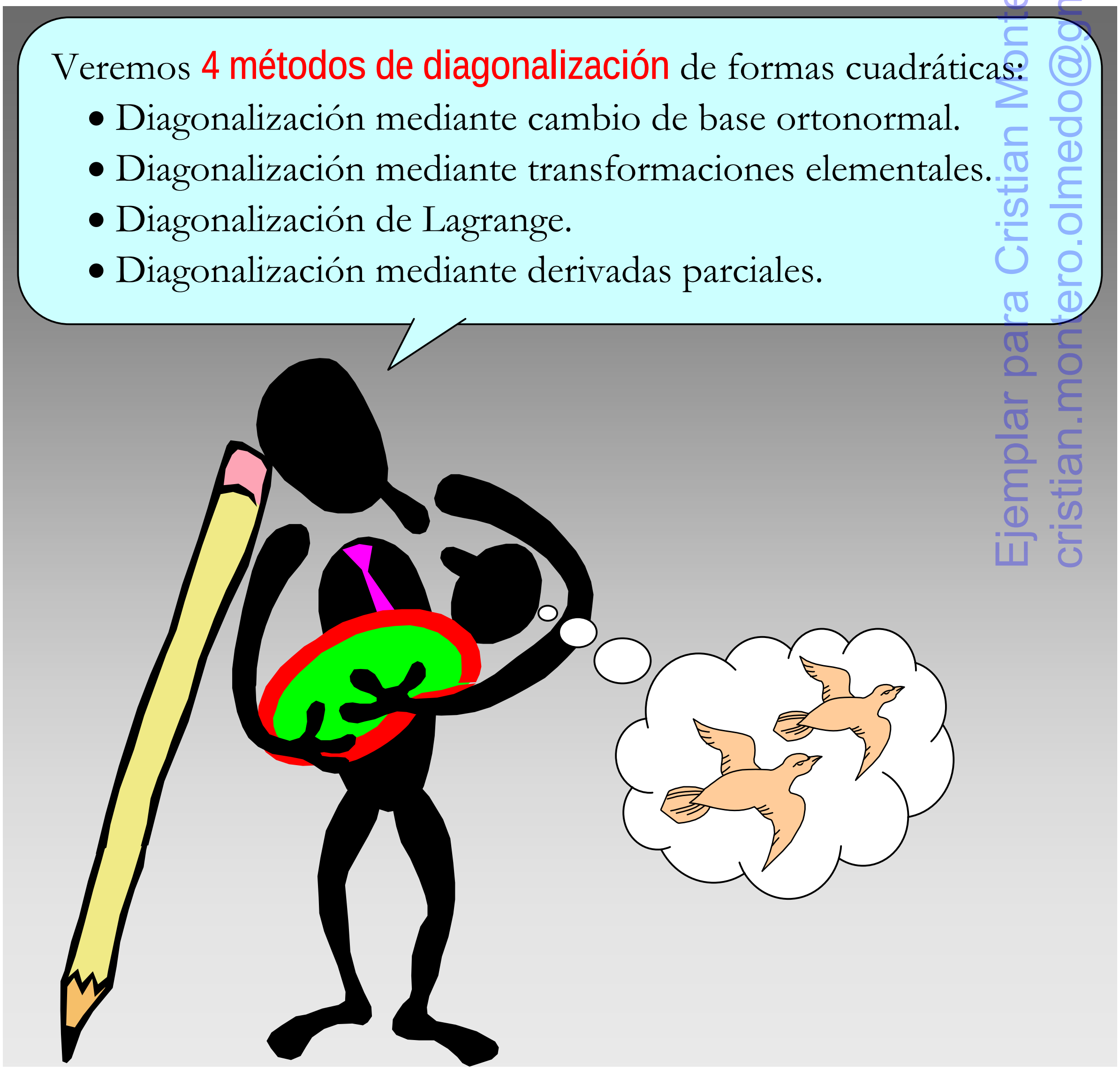
9.14. DIAGONALIZACIÓN DE UNA FORMA CUADRÁTICA

Sea $Q: V \mapsto \Re$ una forma cuadrática que respecto de la base "B" tiene asociada la matriz "A" (¡simétrica!).

El problema de **diagonalizar** "Q" es el problema de encontrar una base B^* del espacio vectorial "V" tal que la matriz asociada a "Q" respecto de la base B^* sea diagonal.

Planteado en términos matriciales, el problema de diagonalizar una forma cuadrática cuya matriz asociada es "A", es el problema de encontrar una matriz "C" tal que la matriz $C^t \bullet A \bullet C$ sea diagonal. Naturalmente, "C" es la matriz asociada al cambio de base $B \to B^*$.

Al contrario que los endomorfismos, las formas cuadráticas siempre pueden diagonalizarse.



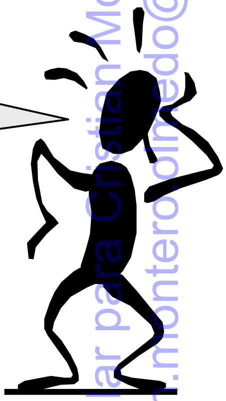
9.15. DIAGONALIZACIÓN MEDIANTE CAMBIO DE BASE ORTONORMAL

Sea $Q: V \mapsto \Re$ una forma cuadrática que respecto de la base "B" del espacio vectorial "V" tiene asociada la matriz "A", simétrica. Puede demostrarse que si B^* es la base ortonormal de "V" que está formada por autovectores de "A", la matriz asociada a "Q" respecto de B^* es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A"... y para construir B^* cada autovalor de "A" aporta una base ortonormal de su subespacio de autovectores.

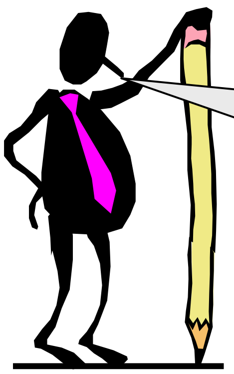
Por tanto, la secuencia de trabajo para diagonalizar "Q" es la siguiente:

1) Calculamos los autovalores de "A"; o sea, resolvemos $|A - \lambda \bullet I| = 0$
2) Determinamos una base ortonormal de cada subespacio de autovectores. Para ello, si tenemos mala suerte, será necesario usar el método de Graam-Schmidt.
3) Reunimos las bases ortonormales de los distintos subespacios de autovectores para así construir una base ortonormal B^* de "V".
4) Tomamos B^* como base de referencia en "V"; así, siendo "C" la matriz asociada al cambio de base $B \to B^*$, la matriz asociada a "Q" respecto de la base B^* es $C^t \bullet A \bullet C$, que es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A".

¡Qué bobada!... a pesar de que un endomorfismo y una forma cuadrática son "entes" que se parecen uno a otro tanto como un elefante a una hormiga, el calculote para diagonalizar una forma cuadrática es el mismo que para diagonalizar un endomorfismo, salvo que en el caso de las formas cuadráticas deberemos calcular bases ortonormales de los subespacios de autovectores



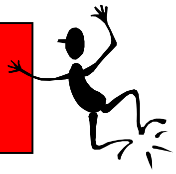
Como la matriz "A" asociada a una forma cuadrática es simétrica, la MA de cada autovalor de "A" siempre coincide con la MG.



Nos alegraremos si los autovalores de "A" son distintos, pues así los subespacios de autovectores tendrán dimensión 1, y el cálculo de una base ortonormal de cada uno de ellos no precisa de Graam-Schmidt. Nos cabrearemos si "A" tiene algún autovalor repetido λ, y en tal caso rezaremos para que, de puro churro, obtengamos una base ortogonal de $L(\lambda)$, pues así podremos calcular una base ortonormal de $L(\lambda)$ sin necesidad de Graam-Schmidt.

Los siguientes 3 ejemplos ilustran las 3 situaciones que podemos encontrar.

1 Los dioses están con nosotros: los autovalores son distintos.



Sea "A" la matriz asociada a la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ respecto de la base $B = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$. Supongamos que los autovalores de "A" son todos distintos, por ejemplo, $\lambda = 2$, $\lambda = 5$ y $\lambda = 7$, siendo:

$$L(\lambda = 2) = \{(a;a;0), \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (1;1;0), \forall a \in \Re\}$$
$$L(\lambda = 5) = \{(b;-b;0), \forall b \in \Re\} = \{b \bullet (1;-1;0), \forall b \in \Re\}$$
$$L(\lambda = 7) = \{(0;0;c), \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (0;0;1), \forall c \in \Re\}$$

En estas condiciones, el cálculo de una base ortonormal de cada subespacio de autovectores no puede ser más sencillo:

✓ El vector $\overline{k}_1 = 1 \bullet \overline{h}_1 + 1 \bullet \overline{h}_2 + 0 \bullet \overline{h}_3 = (1;1;0)$ es una base de $L(\lambda = 2)$, y el vector $\overline{w}_1 = \overline{k}_1 / \|\overline{k}_1\| = (1/\sqrt{2}\,; 1/\sqrt{2}\,; 0)$ es una base ortonormal de $L(\lambda = 2)$:
El vector $\overline{k}_2 = 1 \bullet \overline{h}_1 - 1 \bullet \overline{h}_2 + 0 \bullet \overline{h}_3 = (1;-1;0)$ es una base de $L(\lambda = 5)$, y $\overline{w}_2 = \overline{k}_2 / \|\overline{k}_2\| = (1/\sqrt{2}\,; -1/\sqrt{2}\,; 0)$ es una base ortonormal de $L(\lambda = 5)$:

✓ El vector $\overline{k}_3 = 0 \bullet \overline{h}_1 + 0 \bullet \overline{h}_2 + 1 \bullet \overline{h}_3 = (0;0;1)$ es una base de $L(\lambda = 7)$, y $\overline{w}_3 = \overline{k}_3 / \|\overline{k}_3\| = (0\,;0\,;1)$ es una base ortonormal de $L(\lambda = 7)$:

Diagonalización de la forma cuadrática

La base ortonormal de $\Re^3$ que diagonaliza a "Q" es $B^* = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\}$.

La matriz "C" asociada al cambio de base $B \to B^*$ es:

$$C = \begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \end{array}$$

La matriz "C" es ortogonal; o sea: $C^t = C^{-1}$.
La matriz asociada a "Q" respecto de la base $B^* = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\}$ es:

$$C^t \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

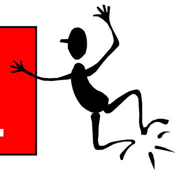
no vale escribir los autovalores en la diagonal al tun - tun, hay que respetar el orden elegido al "construir" la base B^*

Así, si $\overline{x} \in \Re^3$ tiene coordenadas $(x_1^*; x_2^*; x_3^*)$ respecto de B^*, es:

$$Q(\overline{x}) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = 2.x_1^{*2} + 5.x_2^{*2} + 7.x_3^{*2}$$

que es una expresión canónica de la forma cuadrática "Q".

2 Hay autovalores repetidos, pero los dioses están con nosotros.



Sea "A" la matriz asociada a la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ respecto de la base $B=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3\}$. Supongamos que los autovalores de "A" no son todos distintos, por ejemplo $\lambda=3$ y $\lambda=5$ (doble), y que:

$$L(\lambda=3)=\{(a;-a;0),\ \forall a\in\Re\}=\{a\bullet(1;-1;0),\ \forall a\in\Re\}$$
$$L(\lambda=5)=\{(b;b;c),\ \forall b\in\Re\}=\{b\bullet(1;1;0)+c\bullet(0;0;1),\ \forall b,c\in\Re\}$$

En estas condiciones, el cálculo de una base ortonormal de cada subespacio de autovectores no puede ser más tontorrón:

✓ El vector $\bar{k}_1=1\bullet\bar{h}_1-1\bullet\bar{h}_2+0\bullet\bar{h}_3=(1;-1;0)$ es una base de $L(\lambda=3)$, y $\bar{w}_1=\bar{k}_1/\|\bar{k}_1\|=(1/\sqrt{2}\,;-1/\sqrt{2}\,;0)$ es una base ortonormal de $L(\lambda=3)$:

✓ Los vectores $\begin{Bmatrix}\bar{k}_2=1\bullet\bar{h}_1+1\bullet\bar{h}_2+0\bullet\bar{h}_3=(1;1;0)\\ \bar{k}_3=0\bullet\bar{h}_1+0\bullet\bar{h}_2+1\bullet\bar{h}_3=(0;0;1)\end{Bmatrix}$ son una base de $L(\lambda=5)$

y da la casualidad que esta base es ortogonal (el producto escalar $\bar{k}_2\bullet\bar{k}_3$ es cero), los vectores $\bar{w}_2=\bar{k}_2/\|\bar{k}_2\|$ y $\bar{w}_3=\bar{k}_3/\|\bar{k}_3\|$ forman una base ortonormal de $L(\lambda=5)$. Así, $\{\bar{w}_2,\bar{w}_3\}$ es una base ortonormal de $L(\lambda=5)$:

$$\bar{w}_2=\bar{k}_2/\|\bar{k}_2\|=(1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0)\ \ ;\ \ \bar{w}_3=\bar{k}_3/\|\bar{k}_3\|=(0;0;1)$$

Diagonalización de la forma cuadrática

La base ortonormal de $\Re^3$ que diagonaliza a "Q" es $B^*=\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3\}$.

La matriz "C" asociada al cambio de base $B\to B^*$ es:

$$C=\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

La matriz "C" es ortogonal; o sea: $C^t=C^{-1}$.

La matriz asociada a "Q" respecto de $B^*=\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3\}$ es:

$$C^t\bullet A\bullet C=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

no vale escribir los autovalores en la diagonal al tun - tun, hay que respetar el orden elegido al "construir" la base B^*

Así, si $\bar{x}\in\Re^3$ tiene coordenadas $(x_1^*;x_2^*;x_3^*)$ respecto de la base B^*, es:

$$Q(\bar{x})=\begin{bmatrix}x_1^* & x_2^* & x_3^*\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\\ x_3^*\end{bmatrix}=3.x_1^{*2}+5.x_2^{*2}+5.x_3^{*2}$$

que es una expresión canónica de la forma cuadrática "Q".

3 Hay autovalores repetidos y los dioses nos abandonan.

Sea "A" la matriz asociada a la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ respecto de la base $B=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2,\bar{h}_3\}$, siendo $\lambda=6$ (doble) y $\lambda=4$ los autovalores de "A". Además:

$$L(\lambda=6)=\{a\bullet(1;0;-1)+b\bullet(0;1;-1),\ \forall a,b\in\Re\}$$
$$L(\lambda=4)=\{c\bullet(1;1;1),\ \forall c\in\Re\}$$

✓ Los vectores $\begin{Bmatrix}\bar{k}_1=1\bullet\bar{h}_1+0\bullet\bar{h}_2-1\bullet\bar{h}_3=(1;0;-1)\\ \bar{k}_2=0\bullet\bar{h}_1+1\bullet\bar{h}_2-1\bullet\bar{h}_3=(0;1;-1)\end{Bmatrix}$ son una base no ortogonal de $L(\lambda=6)$, pues $\bar{k}_1\bullet\bar{k}_2=2\neq 0$. Para hallar una base ortonormal de $L(\lambda=6)$ obtenemos antes (Graam-Schmidt) una base ortogonal $\{\bar{d}_1,\bar{d}_2\}$:

$$\bar{d}_1=\bar{k}_1=(1;0;-1)$$
$$\bar{d}_2=\bar{k}_2+\alpha\bullet\bar{d}_1=(0;1;-1)-\frac{1}{2}\bullet(1;0;-1)=(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2})$$

Para calcular "α" exigimos que $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_1\bullet\bar{d}_2=0\Rightarrow\bar{d}_1\bullet(\bar{k}_2+\alpha\bullet\bar{d}_1)=0\Rightarrow\bar{d}_1\bullet\bar{k}_2+\alpha.(\bar{d}_1\bullet\bar{d}_1)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(1;0;-1)\bullet(0;1;-1)+\alpha.(1;0;-1)\bullet(1;0;-1)=0\Rightarrow 1+2.\alpha=0\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$$

Los vectores $\bar{w}_1=\dfrac{\bar{d}_1}{\|\bar{d}_1\|}$ y $\bar{w}_2=\dfrac{\bar{d}_2}{\|\bar{d}_2\|}$ forman base ortonormal de $L(\lambda=6)$:

$$\bar{w}_1=\frac{\bar{d}_1}{\|\bar{d}_1\|}=(1/\sqrt{2};0;-1/\sqrt{2})\ ;\ \bar{w}_2=\frac{\bar{d}_2}{\|\bar{d}_2\|}=(-\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}})$$

✓ El vector $\bar{k}_3=1\bullet\bar{h}_1+1\bullet\bar{h}_2+1\bullet\bar{h}_3=(1;1;1)$ es una base de $L(\lambda=4)$, y $\bar{w}_3=\bar{k}_3/\|\bar{k}_3\|=(1/\sqrt{3};1/\sqrt{3};1/\sqrt{3})$ es una base ortonormal de $L(\lambda=4)$.

Diagonalización de la forma cuadrática

La base ortonormal de $\Re^3$ que diagonaliza a "Q" es $B^*=\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3\}$. La matriz "C" asociada al cambio $B\to B^*$ tiene por columnas a $\bar{w}_1,\bar{w}_2$ y $\bar{w}_3$.

La matriz "C" es ortogonal, o sea: $C^t=C^{-1}$.

La matriz asociada a "Q" respecto de la base $B^*=\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3\}$ es:

$$C^t\bullet A\bullet C=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

no vale escribir los autovalores en la diagonal al tun - tun, hay que respetar el orden elegido al "construir" la base B^*

Así, siendo $(x_1^*;x_2^*;x_3^*)$ las coordenadas de $\bar{x}\in\Re^3$ respecto de B^*, es:

$$Q(\bar{x})=\begin{bmatrix}x_1^* & x_2^* & x_3^*\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}=6.x_1^{*2}+6.x_2^{*2}+4.x_3^{*2}$$

que es una expresión canónica de la forma cuadrática "Q".

FONEMATO 9.15.1

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que:

$$Q(\bar{x}) = 3.x_1^2 + 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 4.x_2.x_3$$

SOLUCIÓN

Como no se dice nada al respecto, consideramos que la base de referencia en $\Re^3$ es la canónica:

$$\begin{array}{ccc} \Re^3 & \xrightarrow{Q} & \Re \\ \bar{x} & \longrightarrow & Q(\bar{x}) \end{array}$$

$$B = \{\bar{k}_1 = (1;0;0), \bar{k}_2 = (0;1;0), \bar{k}_3 = (0;0;1)\}$$

La expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica es

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (I)$$

siendo $(x_1;x_2;x_3)$ las coordenadas de $\bar{x} \in \Re^3$ respecto de dicha base.

Latiguillo: debemos determinar una base B^* de $\Re^3$ tal que la matriz asociada a "Q" respecto de B^* sea diagonal. B^* es la base ortonormal de $\Re^3$ formada por autovectores de "A", y para construirla, cada autovalor de "A" aporta una base ortonormal de su subespacio de autovectores.

Autovalores

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda^2 + 6.\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 4, -2$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A" y que su producto coincide con $|A|$.

¡Yuppi!... ¡todos los autovalores son distintos! $\Rightarrow$ todos los subespacios de autovectores tienen dimensión 1 $\Rightarrow$ el cálculo de una base ortonormal de cada uno es una gilipollez que no necesita de Graam-Schmidt

Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 2.x_1 + x_2 = -x_3 \\ x_1 - x_2 = -2.x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(-a;a;a), \forall a \in \Re\} = \{a \bullet (-1;1;1), \forall a \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (-1;1;1)$ es una base de $L(\lambda = 1)$, y el vector

$$\bar{w}_1 = \bar{h}_1 / \|\bar{h}_1\| = (-1/\sqrt{3};1/\sqrt{3};1/\sqrt{3})$$

es una base ortonormal de $L(\lambda = 1)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 4$

$$(A - 4 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 - 4.x_2 = -2.x_3 \\ x_1 + 2.x_2 = 4.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = 2.x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow L(\lambda = 4) = \{ (2.b;b;b),\ \forall b \in \Re \} = \{ b \bullet (2;1;1),\ \forall b \in \Re \}$$

El vector $\bar{h}_2 = (2;1;1)$ es una base de $L(\lambda = 4)$, y el vector

$$\bar{w}_2 = \bar{h}_2 / \|\bar{h}_2\| = (2/\sqrt{6};1/\sqrt{6};1/\sqrt{6})$$

es una base ortonormal de $L(\lambda = 4)$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = -2$

$$(A + 2 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 5.x_1 + x_2 = -x_3 \\ x_1 + 2.x_2 = -2.x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow L(\lambda = -2) = \{ (0;-c;c),\ \forall c \in \Re \} = \{ c \bullet (0;-1;1),\ \forall c \in \Re \}$$

El vector $\bar{h}_3 = (0;-1;1)$ es una base de $L(\lambda = -2)$, y el vector

$$\bar{w}_3 = \bar{h}_3 / \|\bar{h}_3\| = (0;-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$$

es una base ortonormal de $L(\lambda = -2)$.

Para detectar errores de cálculo, no olvides comprobar que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales:

$$\bar{h}_1 \bullet \bar{h}_2 = 0 \,;\, \bar{h}_1 \bullet \bar{h}_3 = 0 \,;\, \bar{h}_2 \bullet \bar{h}_3 = 0$$

Diagonalización de la forma cuadrática

Si tomamos la base ortonormal $B^* = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ como nueva base de referencia en $\Re^3$, la matriz "C" asociada al cambio de la base canónica a la B^* es:

$$C = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\text{matriz ortogonal}}$$

Si $\bar{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*;x_2^*;x_3^*)$, respecto de B^*, es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$ (II).

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "Q" respecto de B^*:

$$Q(\bar{x}) = \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \right)^t \bullet A \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}^{C^t \bullet A \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} =$$

$$= x_1^{*2} + 4.x_2^{*2} - 2.x_3^{*2}$$

que es una expresión canónica de la forma cuadrática "Q".

FONEMATO 9.15.2

Diagonalícese la forma cuadrática $Q:\mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}$ tal que $Q(\overline{x}) = x_1^2 + 2.x_2.x_3$

SOLUCIÓN

Como no se dice nada al respecto, suponemos que la base de referencia en $\mathfrak{R}^3$ es la canónica. La expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica es

$$Q(\overline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

siendo $(x_1;x_2;x_3)$ las coordenadas de $\overline{x} \in \mathfrak{R}^3$ respecto de dicha base.

Latiguillo: debemos determinar una base B^* de $\mathfrak{R}^3$ tal que la matriz asociada a "Q" respecto de B^* sea diagonal. B^* es la base ortonormal de $\mathfrak{R}^3$ formada por autovectores de "A", y para construirla, cada autovalor de "A" aporta una base ortonormal de su subespacio de autovectores.

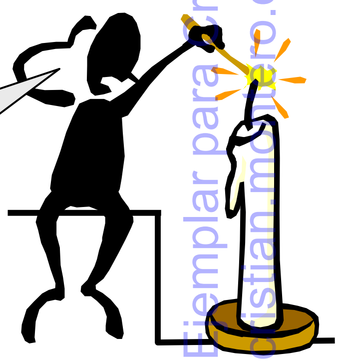
Autovalores

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ (doble)} \\ \lambda = -1 \text{ (simple)} \end{cases}$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A" y que su producto coincide con $|A|$.

¡Mal rollo!... como "A" es simétrica y $\lambda = 1$ es raíz doble de $|A - \lambda \bullet I| = 0$, seguro que $L(\lambda = 1)$ tiene dimensión 2 $\Rightarrow$ si tengo mala suerte deberé recurrir a Graam-Schmidt para calcular una base ortonormal de $L(\lambda = 1)$... ¡qué miedo!... ¡cirio al canto para no haya que beber de ese cáliz!



Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(a;b;b),\ \forall a,b \in \mathfrak{R}\} = \{a \bullet (1;0;0) + b \bullet (0;1;1),\ \forall a,b \in \mathfrak{R}\}$$

Los vectores $\overline{h}_1 = (1;0;0)$ y $\overline{h}_2 = (0;1;1)$ son una base de $L(\lambda = 1)$... y de puro churro resulta ser ortogonal, pues $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ son ortogonales.. Así, dividiendo cada vector por su módulo obtenemos una base ortonormal de $L(\lambda = 1)$, es la que forman $\overline{p}_1 = \overline{h}_1/\|\overline{h}_1\| = (1;0;0)$; $\overline{p}_2 = \overline{h}_2/\|\overline{h}_2\| = (0;1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$.

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$

$$(A + 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2.x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -1) = \{(0; -c; c),\ \forall c \in \Re\} = \{c \bullet (0; -1; 1),\ \forall c \in \Re\}$$

El vector $\bar{h}_3 = (0; -1; 1)$ es una base de $L(\lambda = -1)$, y el vector

$$\bar{p}_3 = \bar{h}_3 / \|\bar{h}_3\| = (0; -1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$$

es una base ortonormal.

Recuerda

Puedes detectar errores de cálculo comprobando que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales.

Diagonalización de la forma cuadrática

La base ortonormal de $\Re^3$ que diagonaliza a "Q" es $B^* = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3\}$.

Si B^* es la nueva base de referencia en $\Re^3$, se modifican las coordenadas de $\bar{x}$, y como la matriz "C" asociada al cambio de la base canónica a B^* es:

$$C = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal}}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 \end{matrix}$$

Así, si respecto de B^* el vector $\bar{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*; x_2^*; x_3^*)$, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I), obtenemos la expresión de "Q" respecto de B^*:

$$Q(\bar{x}) = \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \right)^t \bullet A \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{C^t \bullet A \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} =$$

$$= x_1^{*2} + x_2^{*2} - x_3^{*2}$$

que es una expresión canónica de "Q".

Observa

La expresión canónica de "Q" tiene la ventaja de que identifica al número real $Q(\bar{x})$ que "Q" asocia a $\bar{x} \in \Re^4$ como una simple suma de cuadrados, y no como $Q(\bar{x}) = x_1^2 + 2.x_2.x_3$.

FONEMATO 9.15.3

Diagonalice la forma cuadrática $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ tal que:

$$Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3$$

SOLUCIÓN

Consideramos que la base de referencia en el espacio vectorial $\Re^3$ es la canónica. La expresión matricial de "Q" respecto de dicha base es

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

donde $(x_1; x_2; x_3)$ son las coordenadas de $\bar{x} \in \Re^3$ respecto de dicha base.

Autovalores

$$|A - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3.\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ (simple)}, \ -1 \text{ (doble)}$$

No olvides comprobar que la suma de los autovalores coincide con la traza de "A" y que su producto coincide con $|A|$.

¡Putada!... como "A" es simétrica y $\lambda = -1$ es autovalor doble, seguro que $L(\lambda = -1)$ tiene dimensión $2 \Rightarrow$ si tengo mala suerte deberé recurrir a Graam-Schmidt para calcular una base ortonormal de $L(\lambda = -1)$... ¡qué horror!... ¡encender cirio gordo ipso facto!

Subespacio de autovectores de $\lambda = -1$

$$(A + 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = -1) = \{(-a - b; a; b), \ \forall a, b \in \Re\} = \{a \bullet (-1;1;0) + b \bullet (-1;0;1), \ \forall a, b \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1 = (-1;1;0)$ y $\bar{h}_2 = (-1;0;1)$ son una base de $L(\lambda = -1)$, pero esta base no es ortogonal, pues $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ no son ortogonales. Por tanto, para calcular una base ortonormal de $L(\lambda = -1)$ debemos calcular previamente una base $\{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$ que sea ortogonal $\Rightarrow$ llamamos a Graam-Schmidt.

$$\bar{d}_1 = \bar{h}_1 = (-1;1;0)$$

$$\bar{d}_2 = \bar{h}_2 + \alpha \bullet \bar{d}_1 = (-1;0;1) - \frac{1}{2} \bullet (-1;1;0) = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$$

Para calcular "α" exigimos que $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_2 = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet (\bar{h}_2 + \alpha \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet \bar{h}_2 + \alpha.(\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1;1;0) \bullet (-1;0;1) + \alpha.(-1;1;0) \bullet (-1;1;0) = 0 \Rightarrow$$

VENTANA

$$\Rightarrow 1 + 2.\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

Una base ortonormal de $L(\lambda=-1)$ la forman $\bar{w}_1=\bar{d}_1/\|\bar{d}_1\|$ y $\bar{w}_2=\bar{d}_2/\|\bar{d}_2\|$:

$$\bar{w}_1=\bar{d}_1/\|\bar{d}_1\|=(-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0)$$

$$\bar{w}_2=\bar{d}_2/\|\bar{d}_2\|=(-1/\sqrt{6};-1/\sqrt{6};\sqrt{2/3})$$

Subespacio de autovectores de λ = 2

$$(A-2\bullet I)\bullet\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_1-2.x_2=-x_3\\x_1+x_2=2.x_3\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=2)=\{(c;c;c),\ \forall c\in\Re\}=\{c\bullet(1;1;1),\ \forall c\in\Re\}$$

El vector $\bar{h}_3=(1;1;1)$ es una base del subespacio $L(\lambda=2)$, y el vector $\bar{w}_3=\bar{h}_3/\|\bar{h}_3\|=(1/\sqrt{3};1/\sqrt{3};1/\sqrt{3})$ es base ortonormal.

Recuerda: puedes detectar errores de cálculo comprobando que autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica son ortogonales.

Diagonalización de la forma cuadrática

La base ortonormal de $\Re^3$ que diagonaliza a "Q" es $B^*=\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3\}$.

Si B^* es la nueva base de referencia en $\Re^3$, se modifican las coordenadas de $\bar{x}$, y como la matriz "C" asociada al cambio de la base canónica a B^* es:

$$C=\begin{bmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\bar{w}_1&\bar{w}_2&\bar{w}_3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&\sqrt{2/3}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal}}$$

Así, si respecto de B^* el vector $\bar{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*;x_2^*;x_3^*)$, es:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}\quad\text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "Q" respecto de la base B^*:

$$Q(\bar{x})=\left(C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}\right)^t\bullet A\bullet\left(C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1^*&x_2^*&x_3^*\end{bmatrix}\bullet\overbrace{\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}}^{C^t\bullet A\bullet C}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{bmatrix}=$$

$$=-x_1^{*2}-x_2^{*2}+2.x_3^{*2}$$

que es una expresión canónica de "Q".

Observa

La expresión canónica de "Q" tiene la ventaja de que identifica al número real $Q(\bar{x})$ que "Q" asocia a $\bar{x}\in\Re^4$ como una simple suma de cuadrados, y no como $Q(\bar{x})=2.x_1.x_2+2.x_1.x_3-2.x_1.x_4-2.x_2.x_3+2.x_2.x_4+2.x_3.x_4$, que identifica a $Q(\bar{x})$ de manera mucho más petarda.

FONEMATO 9.15.4

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^4 \mapsto \Re$ tal que

$$Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 - 2.x_1.x_4 - 2.x_2.x_3 + 2.x_2.x_4 + 2.x_3.x_4$$

SOLUCIÓN

Consideramos que la base de referencia en $\Re^4$ es la canónica.

La expresión de "Q" respecto de dicha base es

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

siendo $(x_1;x_2;x_3;x_4)$ las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de dicha base.

Autovalores

$$|A - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

a la 1ª fila le sumamos las restantes

$$= (1-\lambda).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

a las filas 1ª, 2ª y 3ª les sumamos la 4ª

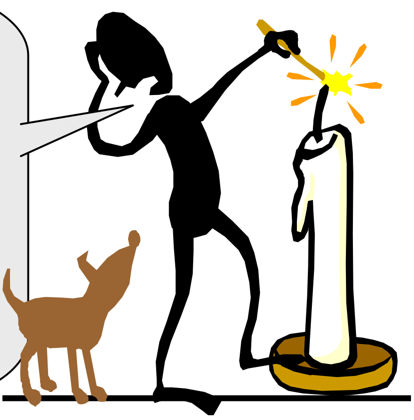
desarrollamos por los elementos de la 1ª columna

$$= (1-\lambda).\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2.\left((1-\lambda)^2 - 4.(1-\lambda)\right) = (1-\lambda)^3.(1-\lambda-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ (triple)} \\ \lambda = -3 \text{ (simple)} \end{cases}$$

¡Qué putada Leoncio!... como "A" es simétrica y $\lambda = 1$ es triple, seguro que $\dim.(L(\lambda=1)) = 3$... esperemos que los dioses tengan piedad de mí y de puro churro obtengamos una base ortogonal de $L(\lambda=1)$, porque en caso contrario habrá que recurrir a Graam-Schmidt, y se me hiela la sangre al pensar en ese petardo...¡toca encender un cirio gordo por si eso ayuda!



Subespacio de autovectores de $\lambda = 1$

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 + x_3 - x_4 \Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(a + b - c; a; b; c),\ \forall a, b, c \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{a \bullet (1;1;0;0) + b \bullet (1;0;1;0) + c \bullet (-1;0;0;1),\ \forall a, b, c \in \Re\}$$

Los vectores $\bar{h}_1 = (1;1;0;0)$, $\bar{h}_2 = (1;0;1;0)$ y $\bar{h}_3 = (-1;0;0;1)$ son una base de $L(\lambda = 1)$, pero por desgracia esta base no es ortogonal, pues los vectores que la forman no son ortogonales dos a dos. Por tanto, para calcular una base ortonormal de $L(\lambda = 1)$ debemos calcular previamente una base $\{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\}$ que sea ortogonal, y para ello recurrimos a Graam-Schmidt.

$$\bar{d}_1 = \bar{h}_1 = (1;1;0;0)$$

$$\bar{d}_2 = \bar{h}_2 + \alpha \bullet \bar{d}_1 = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; 0)$$

$$\bar{d}_3 = \bar{h}_3 + \beta_1 \bullet \bar{d}_1 + \beta_2 \bullet \bar{d}_2 = (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1)$$

MEGAVENTANA

* Para calcular "α" exigimos que $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_2 = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet (\bar{h}_2 + \alpha \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet \bar{h}_2 + \alpha.(\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1;1;0;0) \bullet (1;0;1;0) + \alpha.(1;1;0;0) \bullet (1;1;0;0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2.\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

* Para calcular β_1 exigimos que $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_3$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_3 = 0 \Rightarrow \bar{d}_1 \bullet (\bar{h}_3 + \beta_1 \bullet \bar{d}_1 + \beta_2 \bullet \bar{d}_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{d}_1 \bullet \bar{h}_3 + \beta_1.(\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1;1;0;0) \bullet (-1;0;0;1) + \beta_1.(1;1;0;0) \bullet (1;1;0;0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + 2.\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 1/2$$

* Para calcular β_2 exigimos que $\bar{d}_2$ y $\bar{d}_3$ sean ortogonales:

$$\bar{d}_2 \bullet \bar{d}_3 = 0 \Rightarrow \bar{d}_2 \bullet (\bar{h}_3 + \beta_1 \bullet \bar{d}_1 + \beta_2 \bullet \bar{d}_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{d}_2 \bullet \bar{h}_3 + \beta_2.(\bar{d}_2 \bullet \bar{d}_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; 0) \bullet (-1;0;0;1) + \beta_2.(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; 0) \bullet (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + 3.\beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 = 1/3$$

Los vectores $\bar{w}_1 = \bar{d}_1 / \|\bar{d}_1\|$, $\bar{w}_2 = \bar{d}_2 / \|\bar{d}_2\|$ y $\bar{w}_3 = \bar{d}_3 / \|\bar{d}_3\|$ forman una base ortonormal de $L(\lambda = 1)$:

$$\bar{w}_1 = \bar{d}_1 / \|\bar{d}_1\| = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0\ \ 0)$$

$$\bar{w}_2 = \bar{d}_2 / \|\bar{d}_2\| = (\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}}; -\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}; 0)$$

$$\bar{w}_3 = \bar{d}_3 / \|\bar{d}_3\| = (-\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Subespacio de autovectores de $\lambda = -3$

$$(A+3\bullet I)\bullet \overline{x}=\overline{0}\Rightarrow\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\ 1\\ 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}-1 & 1 & 1\end{matrix} & 3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}3.x_1+x_2+x_3=x_4\\ x_1+3.x_2-x_3=-x_4\\ x_1-x_2+3.x_3=-x_4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=x_4\\ x_2=-x_4\\ x_3=-x_4\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda=-3)=\{(k;-k;-k;k),\ \forall k\in\mathfrak{R}\}=\{k\bullet(1;-1;-1;1),\ \forall k\in\mathfrak{R}\}$$

El vector $\overline{h}_4=(1;-1;-1;1)$ es una base del subespacio $L(\lambda=-3)$, y el vector $\overline{w}_4=\overline{h}_4/\|\overline{h}_4\|=(1/2;-1/2;-1/2;1/2)$ es una base **ortonormal.**

Diagonalización de la forma cuadrática

La base ortonormal de $\mathfrak{R}^4$ que diagonaliza a "Q" es $B^*=\{\overline{w}_1,\overline{w}_2,\overline{w}_3,\overline{w}_4\}$.
Si B^* es la nueva base de referencia en $\mathfrak{R}^4$, se modifican las coordenadas de $\overline{x}$, y como la matriz asociada al cambio de la base canónica a B^* es:

$$C=\overbrace{\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3 & \overline{w}_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}}^{\text{matriz ortogonal}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Así, si respecto de B^* el vector $\overline{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*;x_2^*;x_3^*,x_4^*)$, es:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\\x_4^*\end{bmatrix}\quad\text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "Q" respecto de la base B^*:

$$Q(\overline{x})=\left(C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\\x_4^*\end{bmatrix}\right)^t\bullet A\bullet\left(C\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\\x_4^*\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4^*\end{bmatrix}\bullet\overbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}}^{C^t\bullet A\bullet C}\bullet\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\\x_4^*\end{bmatrix}=x_1^{*2}+x_2^{*2}+x_3^{*2}-3.x_4^{*2}$$

que es una **expresión canónica** de "Q".

9.16 DIAGONALIZACIÓN MEDIANTE TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y $Q: V \mapsto \Re$ la forma cuadrática que respecto de la base "B" tiene asociada la matriz "A", simétrica.

Podemos determinar una base de "V" de modo que la matriz asociada a "Q" respecto de dicha base sea diagonal trabajando así: siendo I_n la matriz unidad de orden "n", formamos la matriz $A \mid I_n$ y en ella realizamos transformaciones elementales de filas y las mismas transformaciones elementales de columnas con el objetivo de transformar la matriz "A" en una matriz diagonal; después de estas transformaciones la matriz $A \mid I_n$ se habrá convertido en $A_d \mid P^t$, donde A_d es la matriz diagonal buscada y P^t es la traspuesta de la matriz asociada al cambio de base que hemos de realizar en "V" para que A_d sea la matriz asociada a la forma cuadrática "Q".

Incluso cuando no se ve luz al final del túnel, hay que pensar que existe, y que acabará apareciendo.

FONEMATO 9.16.1

Diagonalice la forma del ejercicio 9.13.1, es decir la $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que

$$Q(\overline{x}) = 3.x_1^2 + 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 4.x_2.x_3$$

SOLUCIÓN

Consideramos que la base de referencia en $\Re^3$ es la canónica. La expresión de "Q" respecto de ella es:

$$Q(\overline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (I)$$

siendo $(x_1;x_2;x_3)$ las coordenadas de $\overline{x} \in \Re^3$ respecto de dicha base.

Construimos la matriz

$$A \mid I_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y en ella realizamos transformaciones elementales de filas y las mismas transformaciones elementales de columnas con el objetivo de transformar la matriz "A" en una matriz diagonal:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

a la 2ª columna le restamos la 3ª columna

a la 2ª fila le restamos la 3ª fila

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

a la 3ª columna le restamos la mitad de la 2ª columna

a la 3ª fila le restamos la mitad de la 2ª fila

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

a la 1ª columna le restamos la 3ª columna

a la 1ª fila le restamos la 3ª fila

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Matriz diagonal → A_d $\qquad$ P^t

La matriz P^t es la traspuesta de la matriz asociada al cambio de base que hemos de realizar en $\Re^3$ para que A_d sea la matriz asociada a la forma cuadrática "Q". Obviamente, a la vista de la matriz P^t, es:

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 \end{array} \end{array}$$

Por tanto, si en $\Re^3$ tomamos como base de referencia la

$$B^{**} = \{\bar{k}_1 = (1;-1/2;-1/2)\,;\, \bar{k}_2 = (0;1;-1)\,;\, \bar{k}_3 = (0;1/2;-1/2)\}$$

en lugar de la canónica, entonces, si las coordenadas de $\bar{x} \in \Re^3$ respecto de la base B^{**} son $(x_1^{**};x_2^{**};x_3^{**})$, sabemos que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "Q" respecto de la base B^{**}; resulta ser:

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1^{**} & x_2^{**} & x_3^{**} \end{bmatrix} \bullet P^t \bullet A \bullet P \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \end{bmatrix}$$

y siendo $P^t \bullet A \bullet P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_d$, se obtiene:

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1^{**} & x_2^{**} & x_3^{**} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \end{bmatrix} = 2.(x_1^{**})^2 - 4.(x_2^{**})^2 + (x_3^{**})^2$$

que es una **expresión reducida** de "Q".

Compara este resultado con el que obtuvimos en el ejercicio 9.15.1: en ambos casos realizamos un cambio de base que consigue que la matriz asociada a "Q" sea diagonal... la diferencia es que si diagonalizamos mediante un cambio de base ortonormal, como en 9.15.1, la matriz diagonal asociada a "Q" tiene en la diagonal los autovalores de la matriz "A".

$$\overbrace{Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1^{*} & x_2^{*} & x_3^{*} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^{*} \\ x_2^{*} \\ x_3^{*} \end{bmatrix} = x_1^{*2} + 4.x_2^{*2} - 2.x_3^{*2}}^{\text{Expresión canónica de "Q" que obtuvimos en el ejercicio 9.15.1}}$$

$$\boxed{\text{siendo} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^{*} \\ x_2^{*} \\ x_3^{*} \end{bmatrix}}$$

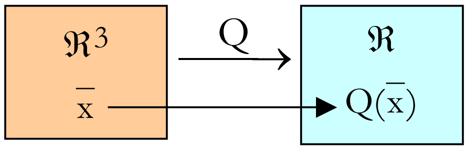
FONEMATO 9.16.2

Sea $Q:\Re^2 \mapsto \Re$ la forma cuadrática cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^2$ es $Q(\bar{x}) = x_1^2 + 2.x_1.x_2 + x_2^2$. Diagonalice "Q" mediante cambio de base ortonormal y mediante transformaciones elementales.

SOLUCIÓN

La expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica de $\Re^2$ es:

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (I)$$



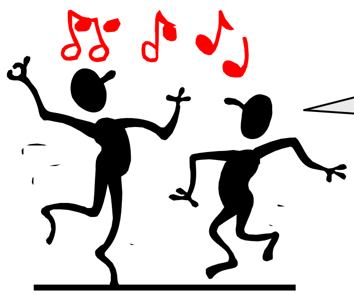
siendo $(x_1;x_2)$ las coordenadas de $\bar{x} \in \Re^2$ respecto de dicha base.

Diagonalización mediante cambio de base ortonormal

Debemos determinar una base B^* del espacio vectorial $\Re^2$ tal que la matriz asociada a "Q" respecto de B^* sea diagonal, y B^* es la base ortonormal de $\Re^2$ formada por autovectores de la matriz "A". Para construir B^*, cada autovalor de "A" aporta una base ortonormal de su subespacio de autovectores.

Autovalores

$$|A - \lambda \bullet I| = \lambda^2 - (1+1).\lambda + |A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2.\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$



¡Yuppi!... ¡todos los autovalores son distintos! $\Rightarrow$ todos los subespacios de autovectores tienen dimensión 1 $\Rightarrow$ el cálculo de una base ortonormal de cada subespacio es una gilipollez que no necesita de Graam-Schmidt

Subespacio de autovectores de $\lambda = 0$

$$(A - 0 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 0) = \{\ (a;-a), \forall a \in \Re\ \} = \{\ a \bullet (1;-1), \forall a \in \Re\ \}$$

El vector $\bar{h}_1 = (1;-1)$ es base de $L(\lambda = 0)$ y $\bar{w}_1 = \bar{h}_1 / \|\bar{h}_1\| = (1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2})$ es base ortonormal.

Subespacio de autovectores de $\lambda = 2$

$$(A - 2 \bullet I) \bullet \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 2) = \{\ (b;b), \forall b \in \Re\ \} = \{\ b \bullet (1;1), \forall b \in \Re\ \}$$

El vector $\bar{h}_2 = (1;1)$ es base de $L(\lambda = 2)$ y $\bar{w}_2 = \bar{h}_2 / \|\bar{h}_2\| = (1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$ es base ortonormal.

Diagonalización de la forma cuadrática

La base ortonormal de $\Re^2$ que diagonaliza a "Q" es $B^* = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$, y la matriz "C" asociada al cambio de la base canónica a la B^* es $C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow \\ \overline{w}_1 & \quad\overline{w}_2 \end{matrix} \end{array}$.

Así, si $\overline{x}$ tiene coordenadas $(x_1^*; x_2^*)$ respecto de B^*, es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$ (II).

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos la expresión de "Q" respecto de B^*:

$$Q(\overline{x}) = \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}\right)^t \bullet A \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^{C^t \bullet A \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 2.x_2^{*2}$$

o sea, $Q(\overline{x}) = 2.x_2^{*2}$, que es una **expresión canónica** de "Q".

Diagonalización mediante transformaciones elementales

Construimos la matriz $A \mid I_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ y en ella realizamos transformaciones elementales de filas y las mismas transformaciones elementales de columnas con el objetivo de transformar la matriz "A" en una matriz diagonal:

a la 2ª columna le restamos la 1ª columna

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{A_d} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}}_{P^t} \end{array}\right]$$

a la 2ª fila le restamos la 1ª fila

La matriz P^t es la traspuesta de la matriz del cambio de base que debe realizarse en $\Re^2$ para que A_d sea la matriz asociada a "Q". Obviamente, es:

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow \\ \overline{k}_1 & \quad\overline{k}_2 \end{matrix} \end{array}$$

Si en $\Re^2$ tomamos como base de referencia $B^{**} = \{\overline{k}_1 = (1;0), \overline{k}_2 = (-1;1)\}$ y las coordenadas de $\overline{x} \in \Re^2$ respecto de B^{**} son $(x_1^{**}; x_2^{**})$, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \end{bmatrix} \quad \text{(III)}$$

Sustituyendo (III) en (I) obtenemos la expresión de "Q" respecto de B^{**}:

$$Q(\overline{x}) = \begin{bmatrix} x_1^{**} & x_2^{**} \end{bmatrix} \bullet P^t \bullet A \bullet P \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \end{bmatrix}$$

y como $P^t \bullet A \bullet P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A_d$, es $Q(\overline{x}) = \begin{bmatrix} x_1^{**} & x_2^{**} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \end{bmatrix} = (x_1^{**})^2$,

que es una **expresión reducida** de "Q".

Observa:

$$Q(\overline{x}) = \begin{cases} [x_1 \quad x_2] \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2.x_1.x_2 + x_2^2 \\[2ex] [x_1^* \quad x_2^*] \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{C^t \bullet A \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 2.x_2^{*2} \\[2ex] [x_1^{**} \quad x_2^{**}] \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P^t \bullet A \bullet P} \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \end{bmatrix} = (x_1^{**})^2 \end{cases}$$

VENTANA

Según que $\overline{x} \in \Re^2$ se identifique mediante sus coordenadas $(x_1 ; x_2)$ respecto de la base canónica de $\Re^2$, o se identifique mediante sus coordenadas $(x_1^* ; x_2^*)$ respecto de $B^* = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$, o se identifique mediante sus coordenadas $(x_1^{**} ; x_2^{**})$ respecto de $B^{**} = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$

- Si, por ejemplo, las coordenadas del vector $\overline{u} \in \Re^2$ respecto de la base canónica de $\Re^2$ son $(2;3)$, siendo $Q(\overline{x}) = x_1^2 + 2.x_1.x_2 + x_2^2$ la expresión de "Q" respecto de dicha base, es $Q(\overline{u}) = Q(2;3) = 2^2 + 2.2.3 + 3^2 = 25$.
- Las coordenadas de $\overline{u}$ respecto de $B^* = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$ las obtenemos de (II):

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = C^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 5/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, si la base de referencia en $\Re^2$ es $B^* = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$, como la expresión de "Q" respecto de ella es

$$Q(\overline{x}) = [x_1^* \quad x_2^*] \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^{C^t \bullet A \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 2.x_2^{*2}$$

resulta ser $Q(\overline{u}) = Q(-1/\sqrt{2} ; 5/\sqrt{2}) = 2.(5/\sqrt{2})^2 = 25$.

- Las coordenadas de $\overline{u}$ respecto de $B^{**} = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$ las obtenemos de (III):

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \end{bmatrix} = P^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Así, si la base de referencia en $\Re^2$ es $B^{**} = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$, como la expresión de "Q" respecto de ella es

$$Q(\overline{x}) = [x_1^{**} \quad x_2^{**}] \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P^t \bullet A \bullet P} \bullet \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \end{bmatrix} = (x_1^{**})^2$$

resulta ser $Q(\overline{u}) = Q(5;3) = 5^2 = 25$.

9.17 DIAGONALIZACIÓN DE LAGRANGE

Formación reiterada de cuadrados perfectos

Supuesto que "V" es un espacio vectorial de dimensión 3 y que $Q: V \mapsto \Re$ es la forma cuadrática cuya matriz asociada respecto de una base "B" es "A", siendo $(x;y;z)$ las coordenadas de $\overline{v} \in V$ respecto de la base "B", es:

$$Q(\overline{v}) = [x \quad y \quad z] \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\text{"A", simétrica}} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}.x^2 + a_{22}.y^2 + a_{33}.z^2 + \mathbf{2}.(a_{12}.x.y + a_{13}.x.z + a_{23}.y.z)$$

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $a_{11} \neq 0$, por lo que "x" será la estrella de la primera parte de la película:

- Salvo en el sumando $a_{11}.x^2$, sacamos factor común $2.x$ en todos los sumandos en que esté "x":

$$Q(\overline{v}) = a_{11}.x^2 + 2.x.(a_{12}.y + a_{13}.z) + a_{22}.y^2 + a_{33}.z^2 + 2.a_{23}.y.z$$

- Sacamos factor común a_{11} en todos los sumandos en que esté "x":

$$Q(\overline{v}) = a_{11}.\left(x^2 + \frac{2}{a_{11}}.x.(a_{12}.y + a_{13}.z)\right) + a_{22}.y^2 + a_{33}.z^2 + 2.a_{23}.y.z$$

- Para que aparezca el primer **cuadrado perfecto**, en el segundo miembro de la última igualdad sumamos y restamos $\frac{1}{a_{11}}.(a_{12}.y + a_{13}.z)^2$; resulta:

Aparece el primer **cuadrado perfecto**, pues este pedrusco es el cuadrado de $x + \frac{1}{a_{11}}.(a_{12}.y + a_{13}.z)$

$$Q(\overline{v}) = a_{11}.\overbrace{\left(x^2 + \frac{2}{a_{11}}.x.(a_{12}.y + a_{13}.z) + \frac{1}{a_{11}^2}.(a_{12}.y + a_{13}.z)^2\right)} +$$
$$\underbrace{+\ a_{22}.y^2 + a_{33}.z^2 + 2.a_{23}.y.z - \frac{1}{a_{11}}.(a_{12}.y + a_{13}.z)^2}$$

Este pedrusco, en el que no aparece "x", es la expresión de una forma cuadrática a la que ponemos nombre (por ejemplo, la llamamos Q_1); tras simplificar al máximo, quedará $Q_1(y;z) = b_{11}.y^2 + 2.b_{12}.y.z + b_{22}.z^2$, y con Q_1 se repite el proceso realizado con "Q".

- Al hacer $k_1 = x + \frac{1}{a_{11}}.(a_{12}.y + a_{13}.z)$, resulta $Q(\overline{v}) = a_{11}.k_1^2 + Q_1(y;z)$, y como se ha indicado, se repite el proceso con $Q_1(y;z)$.

FONEMATO 9.17.1

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $Q(\overline{v}) = x^2 + 7.y^2 + 8.z^2 - 6.x.y + 4.x.z - 10.y.z$

SOLUCIÓN

Siendo $(x;y;z)$ las coordenadas de $\overline{v} \in \Re^3$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, la expresión matricial de "Q" respecto de dicha base es:

$$Q(\overline{v}) = [x \quad y \quad z] \bullet \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overline{v}^t \bullet A \bullet \overline{v}$$

Como el coeficiente a_{11} de x^2 es no nulo, la "x" será la estrella inicial de la película. Además, el que $a_{11} = 1$ es un estupendo chollo.

- Salvo en el sumando x^2, sacamos factor común $2.x$ en todo sumando donde esté "x"; o sea: $Q(\overline{v}) = x^2 + 2.x.(-3.y + 2.z) + 7.y^2 + 8.z^2 - 10.y.z$
- Siendo $a_{11} = 1$, ni el que asó la manteca se plantearía sacar factor común $a_{11} = 1$ en todos los sumandos en que esté "x".
- Para que aparezca el primer **cuadrado perfecto**, en el 2º miembro de la última igualdad sumamos y restamos $\frac{1}{a_{11}}.(-3.y + 2.z)^2 \equiv (-3.y + 2.z)^2$. Resulta:

$$Q(\overline{v}) = \overbrace{\left(x^2 + 2.x.(-3.y + 2.z) + (-3.y + 2.z)^2\right)}^{\text{este ladrillo es el cuadrado de } x + (-3.y+2.z)} + \underbrace{7.y^2 + 8.z^2 - 10.y.z - (-3.y + 2.z)^2}_{\text{Denotando } Q_1(y;z) \text{ este ladrillo, tras simplificar resulta ser } Q_1(y;z) = -2.y^2 + 4.z^2 + 2.y.z}$$

Haciendo $k_1 = x + (-3.y + 2.z)$, es $Q(\overline{v}) = k_1^2 + \underbrace{(-2.y^2 + 4.z^2 + 2.y.z)}_{Q_1(y;z)}$ (I)

Ahora **repetimos el proceso** para la forma cuadrática Q_1:

$$Q_1(y;z) = -2.y^2 + 4.z^2 + 2.y.z = [y \quad z] \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{C} \bullet \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Como el coeficiente c_{11} de y^2 es $\neq 0$, la "y" será la siguiente estrella de la película. El que sea $c_{11} \neq 1$ es una **putadita** que nos complicará un poco el calculote.

- Salvo en el sumando $-2.y^2$, sacamos factor común $2.y$ en todo sumando de $Q_1(y;z)$ donde esté "y"; o sea: $Q_1(y;z) = -2.y^2 + 2.y.(z) + 4.z^2$
- Como el coeficiente de y^2 es -2, sacamos factor común -2 en todos los sumandos de $Q_1(y;z)$ en que esté "y":

$$Q_1(y;z) = -2.\left(y^2 + \frac{2}{-2}.y.(z)\right) + 4.z^2 = -2.\left(y^2 - y.(z)\right) + 4.z^2$$

- Para que aparezca otro **cuadrado perfecto**, en el segundo miembro de la última igualdad sumamos y restamos $\frac{1}{c_{11}}.(z)^2 \equiv \frac{1}{-2}.(z)^2$. Resulta:

$$Q_1(y;z) = -2.\overbrace{\left(y^2 - y.(z) + \frac{1}{4}.z^2\right)}^{\text{este ladrillo es el cuadrado de } y-(z/2)} + \underbrace{4.z^2 + \frac{1}{2}.z^2}_{9.z^2/2}$$

Haciendo $k_2 = y - \frac{1}{2}.z$, es $Q_1(y;z) = -2.k_2^2 + \frac{9}{2}.z^2 = -2.k_2^2 + \frac{9}{2}.k_3^2$ (II)

por razones puramente estéticas, hacemos $z = k_3$

Sustituyendo (II) en (I) expresamos $Q(\overline{v})$ como **suma de cuadrados:**

$$Q(\overline{v}) = k_1^2 - 2.k_2^2 + \frac{9}{2}.k_3^2 = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix}}_{D} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

que es una **expresión reducida** de "Q".

Como

$$\left\{\begin{array}{r} k_1 = x - 3.y + 2.z \\ k_2 = y - (z/2) \\ k_3 = z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = S^{-1} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3 \end{array}$$

la matriz asociada a "Q" es "D" si en $\Re^3$ se toma como base de referencia la $B^* = \{\overline{w}_1 = (1;0;0), \overline{w}_2 = (3;1;0), \overline{w}_3 = (-1/2;1/2;1)\}$.

NOTA

Se puede diagonalizar la forma cuadrática de modo que los números 1, –1 y 0 sean los únicos que aparecen en la diagonal principal:

$$Q(\overline{v}) = k_1^2 - 2.k_2^2 + \frac{9}{2}.k_3^2 = p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{k_1 = p_1 \,;\, k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.p_2 \,;\, k_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}}.p_3}$$

que es **otra expresión reducida** de "Q".

FONEMATO 9.17.2

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $Q(\bar{v}) = x^2 + 5.y^2 - 4.z^2 + 2.x.y - 4.x.z$.

SOLUCIÓN

Siendo $(x;y;z)$ las coordenadas de $\bar{v} \in \Re^3$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, la expresión matricial de "Q" respecto de dicha base es:

$$Q(\bar{v}) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v}$$

Como el coeficiente a_{11} de x^2 es no nulo, la "x" será la estrella inicial de la película. Además, el que $a_{11} = 1$ es un estupendo chollo.

- Salvo en el sumando x^2, sacamos factor común $2.x$ en todos los sumandos donde esté "x": $Q(\bar{v}) = x^2 + 2.x.(y - 2.z) + 5.y^2 - 4.z^2$
- Como $a_{11} = 1$, nadie se plantearía sacar factor común $a_{11} = 1$ en todos los sumandos en que esté "x".
- Para que aparezca el primer **cuadrado perfecto**, en el segundo miembro de la última igualdad sumamos y restamos $\frac{1}{a_{11}}.(y - 2.z)^2 \equiv (y - 2.z)^2$. Resulta:

$$Q(\bar{v}) = \overbrace{\left(x^2 + 2.x.(y - 2.z) + (y - 2.z)^2\right)}^{\text{este ladrillo es el cuadrado de } x + (y - 2.z)} \underbrace{+ 5.y^2 - 4.z^2 - (y - 2.z)^2}_{\substack{\text{Denotando } Q_1(y;z) \text{ este ladrillo, tras simplificar resulta ser} \\ Q_1(y;z) = 4.y^2 - 8.z^2 + 4.y.z}}$$

Haciendo $k_1 = x + (y - 2.z)$, resulta $Q(\bar{v}) = k_1^2 + \underbrace{\left(4.y^2 - 8.z^2 + 4.y.z\right)}_{Q_1(y;z)}$ (I).

Ahora **repetimos el proceso** para la forma cuadrática Q_1:

$$Q_1(y;z) = 4.y^2 - 8.z^2 + 4.y.z = \begin{bmatrix} y & z \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}}_{C} \bullet \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Como el coeficiente c_{11} de y^2 es no nulo, la "y" será la siguiente estrella de la película. El que sea $c_{11} \neq 1$ es una **putadita** que complicará un poco el cálculo.

- Salvo en el sumando $4.y^2$, sacamos factor común $2.y$ en todos los sumandos de $Q_1(y;z)$ donde esté "y"; o sea: $Q_1(y;z) = 4.y^2 + 2.y.(2.z) - 8.z^2$
- Como el coeficiente de y^2 es 4, sacamos factor común 4 en todos los sumandos de $Q_1(y;z)$ donde esté "y":

$$Q_1(y;z) = 4.\left(y^2 + \frac{2}{4}.y.(2.z)\right) - 8.z^2 = 4.\left(y^2 + \frac{1}{2}.y.(2.z)\right) - 8.z^2$$

- Para que aparezca otro **cuadrado perfecto,** en el segundo miembro de la última igualdad sumamos y restamos $\frac{1}{c_{11}}.(2.z)^2 \equiv \frac{1}{4}.(2.z)^2 \equiv z^2$:

$$Q_1(y;z) = 4.\overbrace{\left(y^2 + \frac{1}{2}.y.(2.z) + \frac{1}{4}.z^2\right)}^{\boxed{\text{este ladrillo es el cuadrado de } y+(z/2)}} \underbrace{-8.z^2 - z^2}_{-9.z^2}$$

Haciendo $k_2 = y+(z/2)$, resulta ser:

$$Q_1(y;z) = 4.k_2^2 - 9.z^2 \underset{\boxed{\text{por razones puramente estéticas, hacemos } z = k_3}}{=} 4.k_2^2 - 9.k_3^2 \quad \text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I) conseguimos expresar el número real $Q(\overline{v})$ como **suma de cuadrados:**

$$Q(\overline{v}) = k_1^2 + 4.k_2^2 - 9.k_3^2 = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}}_{D} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

que es una **expresión reducida** de "Q".
Como

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= x + y - 2.z \\ k_2 &= y + \frac{1}{2}.z \\ k_3 &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = S^{-1} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3 \end{matrix}$$

la matriz asociada a "Q" es "D" si en $\Re^3$ se toma como base de referencia la $B^* = \{\overline{w}_1 = (1;0;0), \overline{w}_2 = (-1;1;0), \overline{w}_3 = (5/2;-1/2;1)\}$.

NOTA

Se puede diagonalizar la forma cuadrática de modo que los números 1, –1 y 0 sean los únicos que aparecen en la diagonal principal:

$$Q(\overline{v}) = k_1^2 + 4.k_2^2 - 9.k_3^2 \underset{\boxed{k_1 = p_1\ ;\ k_2 = \frac{1}{\sqrt{4}}.p_2\ ;\ k_3 = \frac{1}{\sqrt{9}}.p_3}}{=} p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

que es **otra expresión reducida** de "Q".

FONEMATO 9.17.3

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $Q(\overline{v}) = 2.x.y + 2.x.z + 2.y.z$

SOLUCIÓN

Siendo $(x;y;z)$ las coordenadas de $\overline{v} \in \Re^3$ respecto de la base canónica de $\Re^3$, la expresión matricial de "Q" respecto de dicha base es:

$$Q(\overline{v}) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

El que sean nulos todos los elementos de la diagonal principal de "A" nos impide arrancar la secuencia de trabajo; el problema desaparece sin más que hacer $x = \alpha + \beta$, $y = \alpha - \beta$ y $z = \delta$:

$$Q(\overline{v}) = 2.x.y + 2.x.z + 2.y.z =$$

$$\boxed{x = \alpha + \beta \; ; \; y = \alpha - \beta \; ; \; z = \delta}$$

$$= 2.(\alpha + \beta).(\alpha - \beta) + 2.(\alpha + \beta).\delta + 2.(\alpha - \beta).\delta =$$

$$= 2.\alpha^2 - 2.\beta^2 + 4.\alpha.\delta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \bullet \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix}$$

Como el coeficiente m_{11} de α^2 es no nulo, α será la estrella inicial de la película. El que $m_{11} \neq 1$ es un leve contratiempo que nos complicará un poquito los cálculos.

- Salvo en el sumando $2.\alpha^2$, sacamos factor común $2.\alpha$ en todos los sumandos donde esté α ; o sea: $Q(\overline{v}) = 2.\alpha^2 + 2.\alpha.(2.\delta) - 2.\beta^2$.
- Como el coeficiente de α^2 es 2, sacamos factor común 2 en todos los sumandos donde esté α ; o sea: $Q(\overline{v}) = 2.\left(\alpha^2 + \frac{2}{2}.\alpha.(2.\delta)\right) - 2.\beta^2$
- Para que aparezca el primer cuadrado perfecto, en el segundo miembro de la última igualdad sumamos y restamos $\frac{1}{m_{11}}.(2.\delta)^2 \equiv \frac{1}{2}.(2.\delta)^2 \equiv 2.\delta^2$:

$$\boxed{\text{este ladrillo es el cuadrado de } \alpha + \frac{1}{2}.(2.\delta) \equiv \alpha + \delta}$$

$$Q(\overline{v}) = 2.\overbrace{\left(\alpha^2 + \frac{2}{2}.\alpha.(2.\delta) + \delta^2\right)} - 2.\beta^2 - 2.\delta^2$$

Haciendo $k_1 = \alpha + \delta$, resulta ser:

$$Q(\overline{v}) = 2.k_1^2 - 2.\beta^2 - 2.\delta^2 = 2.k_1^2 - 2.k_2^2 - 2.k_3^2 \Rightarrow$$

$\boxed{\text{por razones puramente estéticas, hacemos } \beta = k_2 \text{ y } \delta = k_3}$

$$\Rightarrow Q(\overline{v}) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{D} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

O sea, es $Q(\overline{v}) = 2.k_1^2 - 2.k_2^2 - 2.k_3^2$, que es una **expresión reducida** de "Q".

Observa: para llegar a (I) hemos realizado **dos cambios de base.** El primero de ellos es el definido mediante

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \beta \\ y &= \alpha - \beta \\ z &= \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{p}_1 & \overline{p}_2 & \overline{p}_3 \end{array} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix}$$

O sea, en el **primer cambio de base** hemos pasado de la canónica de $\Re^3$ a la base $B*$ que forman los vectores $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3$ cuyas coordenadas respecto de la canónica son $\overline{p}_1 = (1;1;0)$, $\overline{p}_2 = (1;-1;0)$ y $\overline{p}_3 = (0;0;1)$, habiendo denotado $(\alpha;\beta;\delta)$ a las coordenadas de $\overline{v} \in \Re^3$ respecto de $B*$. El **2º cambio de base** es tal que:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \alpha + \delta \\ k_2 &= \beta \\ k_3 &= \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \bullet \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix} = S^{-1} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \overline{w}_3 \end{array} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Es decir, en el segundo cambio hemos pasado de la base $B* = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3\}$ a la base $B**$ que forman los vectores $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3$ cuyas coordenadas respecto de la base $B* = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3\}$ son $\overline{w}_1 = (1;0;0)$, $\overline{w}_2 = (0;1;0)$ y $\overline{w}_3 = (-1;0;1)$, denotando $(k_1;k_2;k_3)$ a las coordenadas de $\overline{v} \in \Re^3$ respecto de $B**$.

NOTA

Se puede diagonalizar la forma cuadrática de modo que los números 1, –1 y 0 sean los únicos que aparecen en la diagonal principal:

$$Q(\overline{v}) = 2.k_1^2 - 2.k_2^2 - 2.k_3^2 = c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{k_1 = c_1 \; ; \; k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.c_2 \; ; \; k_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.c_3}$$

que es otra **expresión reducida** de "Q".

FONEMATO 9.17.4

Diagonalice $Q:\Re^4 \mapsto \Re$ cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^4$ es

$$Q(\overline{v}) = x^2 - y^2 + 3.z^2 - 3.t^2 + 2.x.y + 2.x.z + 2.x.t + 6.y.z - 6.y.t + 2.z.t$$

SOLUCIÓN

Naturalmente, $(x;y;z;t)$ son las coordenadas de $\overline{v} \in \Re^4$ respecto de la base canónica de $\Re^4$.

Como el coeficiente a_{11} de x^2 es no nulo, la "x" será la estrella inicial de la película. Además, el que $a_{11} = 1$ es estupendo.

- Salvo en el sumando x^2, sacamos factor común $2.x$ en todo sumando donde esté "x", o sea: $Q(\overline{v}) = x^2 + 2.x.(y+z+t) - y^2 + 3.z^2 - 3.t^2 + 6.y.z - 6.y.t + 2.z.t$
- Para que aparezca el primer cuadrado perfecto, en el segundo miembro de la última igualdad sumamos y restamos $\frac{1}{a_{11}}.(y+z+t)^2 \equiv (y+z+t)^2$. Resulta:

$$Q(\overline{v}) = \overbrace{\left(x^2 + 2.x.(y+z+t) + (y+z+t)^2\right)}^{\boxed{\text{este ladrillo es el cuadrado de } x + (y+z+t)}} + \underbrace{- y^2 + 3.z^2 - 3.t^2 + 6.y.z - 6.y.t + 2.z.t - (y+z+t)^2}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{Denotando } Q_1(y;z;t) \text{ este ladrillo, tras simplificar se obtiene} \\ Q_1(y;z;t) = -2.y^2 + 2.z^2 - 4.t^2 + 4.y.z - 8.y.t\end{array}}}$$

Haciendo $k_1 = x+(y+z+t)$, es $Q(\overline{v}) = k_1^2 + \underbrace{\left(-2.y^2 + 2.z^2 - 4.t^2 + 4.y.z - 8.y.t\right)}_{Q_1(y;z;t)}$ (I)

- Repetimos el proceso con $Q_1(y;z;t) = -2.y^2 + 2.z^2 - 4.t^2 + 4.y.z - 8.y.t$, cuya matriz asociada es $C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
- Como el coeficiente c_{11} de y^2 es no nulo, la "y" será la siguiente estrella de la película. El que sea $c_{11} \neq 1$ es una putadita.
- Salvo en $-2.y^2$, sacamos factor común $2.y$ en todo sumando de $Q_1(y;z;t)$ donde esté "y"; o sea: $Q_1(y;z;t) = -2.y^2 + 2.y.(2.z - 4.t) + 2.z^2 - 4.t^2$.
- Como el coeficiente de y^2 es -2, sacamos factor común -2 en todo sumando de $Q_1(y;z;t)$ donde esté "y":

$$Q_1(y;z;t) = -2.\left(y^2 + \frac{2}{-2}.y.(2.z - 4.t)\right) + 2.z^2 - 4.t^2$$

- Para que aparezca otro cuadrado perfecto, en el 2º miembro de la última igualdad sumamos y restamos $\frac{1}{c_{11}}.(2.z - 4.t)^2 \equiv \frac{1}{-2}.(2.z - 4.t)^2$.

  Resulta:

este ladrillo es el cuadrado de $y-(z-2.t)$

$$Q_1(y;z;t)=-2.\overbrace{\left(y^2+\frac{2}{-2}.y.(2.z-4.t)+\frac{1}{4}.(2.z-4.t)^2\right)}+\underbrace{2.z^2-4.t^2+\frac{1}{2}.(2.z-4.t)^2}$$

Denotando $Q_2(z;t)$ este ladrillo, tras simplificar se obtiene $Q_2(z;t)=4.z^2+4.t^2-8.z.t$

Haciendo $k_2=y-(z-2.t)$, es $Q_1(y;z;t)=-2.k_2^2+\underbrace{\left(4.z^2+4.t^2-8.z.t\right)}_{Q_2(z;t)}$ (II)

- Ahora **deberíamos repetir el proceso** para $Q_2(z;t)=4.z^2+4.t^2-8.z.t$, **pero es innecesario,** pues $Q_2(z;t)$ es **cuadrado perfecto:**

$$Q_2(z;t)=4.z^2+4.t^2-8.z.t=4.(z-t)^2$$

Haciendo $k_3=z-t$ y, por estética, $k_4=t$, es: $Q_2(z;t)=4.k_3^2+0.k_4^2$ (III)

Sustituyendo (III) en (II), resulta $Q_1(y;z;t)=-2.k_2^2+4.k_3^3+0.k_4^2$ (IV)

Al sustituir (IV) en (I) expresamos $Q(\bar{v})$ como **suma de cuadrados:**

$$\underbrace{Q(\bar{v})=k_1^2-2.k_2^2+4.k_3^2+0.k_4^2}_{\text{Una expresión reducida de "Q"}}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3 & k_4\end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{D}\bullet\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\\ k_4\end{bmatrix}$$

Para determinar la base de $\Re^4$ respecto de la cual la matriz asociada a la forma cuadrática "Q" es "D" basta tener en cuenta que

$$\left.\begin{array}{r}k_1=x+y+z+t\\ k_2=y-z+2.t\\ k_3=z-t\\ k_4=t\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\\ k_4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{S}\bullet\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix}=S^{-1}\bullet\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\\ k_4\end{bmatrix}$$

por lo que la matriz asociada a "Q" es "D" si en $\Re^4$ se toma como base de referencia la $B*$ que forman los cuatro vectores de $\Re^4$ que corresponden a las cuatro columnas de la matriz S^{-1}.

NOTA

Se puede diagonalizar la forma cuadrática de modo que los números 1, –1 y 0 sean los únicos que aparecen en la diagonal principal:

$$Q(\bar{v})=k_1^2-2.k_2^2+4.k_3^2+0.k_4^2=1.c_1^2-1.c_2^2+1.c_3^2+0.c_4^2=$$

$$\boxed{k_1=c_1\,;\,k_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.c_2\,;\,k_3=\frac{1}{\sqrt{4}}.c_3\,;\,k_4=c_4}$$

$$=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{bmatrix}$$

que es otra **expresión reducida** de "Q".

FONEMATO 9.17.5

Sea la forma bilineal $f: P_2 \times P_2 \mapsto \Re$ tal que:

$$f(p(x);q(x)) = \left(\int_0^1 (2.p'(x)+p''(x)).dx\right).\left(\int_0^2 \frac{1}{4}.q''(x).dx\right)$$

Diagonalice la forma cuadrática "Q" asociada a "f".

SOLUCIÓN

- Consideramos que la base de referencia en P_2 es $B = \{x^2, x, 1\}$.
- Siendo $p(x) = p_1.x^2 + p_2.x + p_3 \in P_2$ y $q(x) = q_1.x^2 + q_2.x + q_3 \in P_2$, es:

$$f(p(x);q(x)) = \left(\int_0^1 (2.p'(x)+p''(x)).dx\right).\left(\frac{1}{4}.\int_0^2 q''(x).dx\right) =$$

VENTANA

$$* \int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx = \int_0^1 (4.p_1.x + 2.p_1 + 2.p_2).dx =$$

$$\left\{\begin{matrix} p'(x) = 2.p_1.x + p_2 \\ p''(x) = 2.p_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2.p'(x) + p''(x) = 4.p_1.x + 2.p_1 + 2.p_2$$

$$= \left(2.p_1.x^2 + 2.p_1.x + 2.p_2.x\right)_{x=0}^{x=1} = 4.p_1 + 2.p_2$$

$$* \frac{1}{4}.\int_0^2 q''(x).dx = \frac{1}{4}.\int_0^2 2.q_1.dx = \frac{1}{4}.(2.q_1.x)_{x=0}^{x=2} = q_1$$

$$= (4.p_1 + 2.p_2).(q_1) = 4.p_1.q_1 + 2.p_2.q_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

- La forma cuadrática "Q" asociada a "f" es la aplicación $Q: P_2 \mapsto \Re$ tal que:

Es $f = f_s + f_a$, siendo f_s la forma bilineal **simétrica** de matriz asociada $(A + A^t)/2$ y f_a la forma bilineal **antisimétrica** de matriz asociada $(A - A^t)/2$.

$$Q(p(x)) = f(p(x);p(x)) = f_s(p(x);p(x)) + f_a(p(x);p(x)) = f_s(p(x);p(x)) =$$

$f_a(p(x);p(x)) = 0$, pues f_a es antisimétrica

$$= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(A+A^t)/2} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = 4.p_1^2 + 2.p_1.p_2$$

- **El remate del ejercicio lo dejamos al cuidado del lector, que debe suicidarse si, a estas alturas de la película, no es capaz de lidiarlo, ya sea mediante un cambio de base ortonormal, mediante transformaciones elementales o mediante Lagrange (formación de cuadrados perfectos).**

9.18 DIAGONALIZACIÓN MEDIANTE DERIVADAS PARCIALES

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y $Q: V \mapsto \Re$ la forma cuadrática con matriz asociada "A" respecto de una base "B"; así, siendo $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ las coordenadas de $\overline{x} \in V$ respecto de la base "B", es:

$$Q(\overline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots\ldots & x_n \end{bmatrix} \bullet A \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Si en la diagonal principal de matriz "A" hay algún a_{ii} no nulo, es

$$Q(\overline{x}) = \frac{1}{4.a_{ii}} \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} \right)^2 + Q_1(\overline{x})$$

  donde $Q_1(\overline{x})$ se determina despejando en la expresión anterior. El proceso se repite con $Q_1(\overline{x})$.

- Si todos los elementos de la diagonal principal de "A" son 0 pero $a_{ij} \neq 0$, es:

$$Q(\overline{x}) = \frac{1}{8.a_{ij}} \cdot \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} + \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right)^2 \right) + Q_2(\overline{x})$$

  donde $Q_2(\overline{x})$ se determina despejando en la expresión anterior. El proceso se repite con $Q_2(\overline{x})$.

FONEMATO 9.18.1

Diagonalice $Q:\Re^4 \mapsto \Re$ tal que, respecto de la base canónica, es

$$Q(\bar{x}) = 4.x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4.x_1.x_2 - 4.x_1.x_3 + \\ + 4.x_1.x_4 + 4.x_2.x_3 - 4.x_2.x_4$$

SOLUCIÓN

La expresión de "Q" respecto de la base canónica de $\Re^4$ es:

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

siendo $(x_1;x_2;x_3;x_4)$ las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de dicha base.

- Como $a_{11} = 4 \neq 0$ y $\partial Q/\partial x_1 = 8.x_1 - 4.x_2 - 4.x_3 + 4.x_4$, es:

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{4.a_{11}}.\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)^2 + Q_1(\bar{x}) = \frac{1}{4.4}.(8.x_1 - 4.x_2 - 4.x_3 + 4.x_4)^2 + Q_1(\bar{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(\bar{x}) = (2.x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + Q_1(\bar{x}) \quad \text{(I)}$$

Al despejar $Q_1(\bar{x})$, se obtiene:

$$Q_1(\bar{x}) = Q(\bar{x}) - (2.x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 = \underbrace{.....}_{\text{sustituimos } Q(\bar{x}) \text{ por su valor y simplificamos}} = 2.x_2.x_3 - 2.x_2.x_4 + 2.x_3.x_4 =$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \bullet \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- En $Q_1(\bar{x})$ son nulos los c_{ii}; así, para seguir, usamos la fórmula

$$Q_1(\bar{x}) = \frac{1}{8.c_{ij}}.\left(\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_i} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_j}\right)^2 - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_i} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_j}\right)^2\right) + Q_2(\bar{x})$$

En nuestro caso, como $c_{23} = 1 \neq 0$, es:

$$Q_1(\bar{x}) = \frac{1}{8.c_{23}}.\left(\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_3}\right)^2\right) + Q_2(\bar{x}) \Rightarrow$$

Es $c_{23} = 1$, y como $\dfrac{\partial Q_1}{\partial x_2} = 2.x_3 - 2.x_4$ y $\dfrac{\partial Q_1}{\partial x_3} = 2.x_2 + 2.x_4$, es:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} = 2.x_2 + 2.x_3$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_3} = 2.x_3 - 2.x_2 - 4.x_4$$

VENTANA

$$\Rightarrow Q_1(\bar{x}) = \frac{1}{8}.\left((2.x_2 + 2.x_3)^2 - (2.x_3 - 2.x_2 - 4.x_4)^2\right) + Q_2(\bar{x}) \quad \text{(II)}$$

Al despejar $Q_2(\bar{x})$ en (II), resulta:

$$Q_2(\bar{x}) = Q_1(\bar{x}) - \frac{1}{8}.\left((2.x_2 + 2.x_3)^2 - (2.x_3 - 2.x_2 - 4.x_4)^2\right) = 2.x_4^2$$

Al sustituir $Q_2(\bar{x})$ en (II), resulta:

$$Q_1(\bar{x}) = \frac{1}{8}.\left((2.x_2 + 2.x_3)^2 - (2.x_3 - 2.x_2 - 4.x_4)^2\right) + 2.x_4^2$$

o sea:

$$Q_1(\bar{x}) = \frac{1}{2}.(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}.(x_3 - x_2 - x_4)^2 + 2.x_4^2$$

Al sustituir $Q_1(\bar{x})$ en (I), resulta

$$Q(\bar{x}) = (2.x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{2}.(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}.(x_3 - x_2 - x_4)^2 + 2.x_4^2 =$$

$$= \underbrace{k_1^2 + \frac{1}{2}.k_2^2 - \frac{1}{2}.k_3^2 + 2.k_4^2}_{\text{Una expresión reducida de "Q"}} =$$

VENTANA

$$\left.\begin{array}{r} k_1 = 2.x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ k_2 = x_2 + x_3 \\ k_3 = x_3 - x_2 - x_4 \\ k_4 = x_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = S^{-1} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} \bullet \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

La matriz asociada a "Q" es "D" si en $\Re^4$ se toma como base de referencia la $B*$ que forman los cuatro vectores de $\Re^4$ que corresponden a las cuatro columnas de la matriz S^{-1}.

9.19 RANGO, ÍNDICE, SIGNATURA

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y $Q: V \mapsto \Re$ una forma cuadrática definida sobre "V".

Consideremos una expresión **reducida** de "Q":

$$Q(\overline{x}) = a_{11}.x_1^2 + a_{22}.x_2^2 + ... + a_{nn}.x_n^2 \quad \text{(I)}$$

donde algunos de los a_{ii} pueden ser nulos.

- Se llama **rango** de la forma cuadrática al número de coeficientes no nulos que hay en (I).
- Se llama **índice** de la forma cuadrática al número de coeficientes positivos que hay en (I).
- Se llama **signatura** de la forma cuadrática a la diferencia entre el rango y el índice.

Por ejemplo, para la forma cuadrática $Q: \Re^4 \mapsto \Re$ tal que

$$Q(\overline{x}) = 3.x_1^2 + 2.x_2^2 - 5.x_3^2 + 7.x_4^2$$

el rango es 4 (pues hay 4 coeficientes no nulos) y el índice es 3 (pues hay 3 coeficientes positivos); por tanto, la signatura es $4 - 3 = 1$.

- Hay quien llama **signatura** de la forma cuadrática al par $(a;b)$, siendo respectivamente "a" y "b" el número de coeficientes positivos y negativos que hay en (I). Así, para $Q(\overline{x}) = 3.x_1^2 + 2.x_2^2 - 5.x_3^2 + 7.x_4^2$ la signatura es $(3;1)$, pues hay tres coeficientes positivos uno negativo.

9.20 CLASIFICACIÓN DE LAS FORMAS CUADRÁTICAS

Observa: si $Q:V \mapsto \Re$ es una forma cuadrática definida sobre el espacio vectorial "V", la imagen del vector cero de "V" siempre es el número cero, pues siendo "A" la matriz asociada a "Q", es $Q(\bar{0}) = \bar{0}^t \bullet A \bullet \bar{0} = 0$.

La clasificación de la forma cuadrática "Q" se establece en función del signo que tengan las imágenes según "Q" de los vectores de "V".

- Se dice que "Q" es definida positiva si todos los vectores de "V", salvo el vector cero, tienen imagen positiva.
- Se dice que "Q" es definida negativa si todos los vectores de "V", salvo el vector cero, tienen imagen negativa.
- Se dice que "Q" es semidefinida positiva si todos los vectores de "V" tienen imagen no negativa (≥ 0).
- Se dice que "Q" es semidefinida negativa si todos los vectores de "V" tienen imagen no positiva (≤ 0).
- Se dice que "Q" es indefinida si en "V" hay vectores que tienen imagen positiva y también hay vectores que tienen imagen negativa.

Podemos clasificar "Q" mediante los autovalores de su matriz asociada "A", mediante la sucesión de menores principales de "A", o mediante el rango e índice.

Clasificación mediante los autovalores

Considera que los autovalores de "A" son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; por tanto, la expresión canónica de "Q" es:

$$Q(\bar{x}) = (x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*) \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda_1 . x_1^{*2} + \lambda_2 . x_2^{*2} + \ldots + \lambda_n . x_n^{*2}$$

Así, es evidente que:

- los autovalores de "A" son $> 0 \Leftrightarrow$ "Q" es definida positiva
- los autovalores de "A" son $< 0 \Leftrightarrow$ "Q" es definida negativa
- los autovalores de "A" son $\geq 0 \Leftrightarrow$ "Q" es semidefinida positiva
- los autovalores de "A" son $\leq 0 \Leftrightarrow$ "Q" es semidefinida negativa
- los autovalores de "A" son de distinto signo $\Leftrightarrow$ "Q" es indefinida

Clasificación mediante menores principales

Siendo $A=\{a_{ij}\}$ la matriz asociada a "Q" respecto de una base, sean:

$$H_1=a_{11}\ ;\ H_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\ ;\ H_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\ ;\ ....\ ;\ H_n=|A|$$

Puede demostrarse que:

1) La forma cuadrática "Q" es definida positiva si y sólo si
$$H_1>0\ ;\ H_2>0\ ;\ H_3>0\ ;\ H_4>0\ ;\ ....$$
2) La forma cuadrática "Q" es definida negativa si y sólo si
$$H_1<0\ ;\ H_2>0\ ;\ H_3<0\ ;\ H_4>0\ ;\ ....$$
3) Si sucede como en 1) pero el último menor $(H_n=|A|)$ es cero, "Q" es semidefinida positiva.
4) Si sucede como en 2) pero el último menor $(H_n=|A|)$ es cero, "Q" es semidefinida negativa.
5) Si $H_n\neq 0$ y no se cumple ni 1) ni 2), entonces "Q" es indefinida.
6) Si $H_n=0$ y $H_{n-1}\neq 0$ y no se cumple ni 3) ni 4), entonces "Q" es indefinida.

Hay formas cuadráticas que no pueden clasificarse mediante los menores principales. ***Por ejemplo,*** sucede tal cosa si "A" es cuadrada de orden 3 y $H_1>0,\ H_2=H_3=0$, como ocurre si

$$Q(\bar{x})=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix}$$

Observa: la forma cuadrática "Q" es indefinida si en la diagonal principal de "A" hay elementos de distinto signo.

Por ejemplo, si $a_{11}>0$ y $a_{22}<0$, entonces:

$$Q(x_1;0;0;\ldots;0)=a_{11}.x_1^2>0,\ \forall x_1\neq 0$$
$$Q(0;x_2;0;\ldots;0)=a_{22}.x_2^2<0,\ \forall x_2\neq 0$$

lo que prueba que "Q" es indefinida.

Clasificación mediante el rango y el índice

Rango	Indice	Clasificación
n	n	Definida positiva
n	0	Definida negativa
$p<n$	$p<n$	Semidefinida positiva
$p<n$	0	Semidefinida negativa
Otros casos		Indefinida

FONEMATO 9.20.1

Clasifique la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que

$$Q(\bar{x}) = 2.x_1^2 + a.x_2^2 + \frac{1}{2}.x_3^2 + 2.x_1.x_3$$

SOLUCIÓN

La matriz asociada a "Q" es $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Clasificación mediante menores

Es $H_1 = 2$, $H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 2.a$ y $H_3 = |A| = 0$; por tanto:

* Si $a > 0 \Rightarrow H_1 = 2 > 0,\ H_2 = 2.a > 0$ y $H_3 = 0 \Rightarrow$ semidefinida positiva
* Si $a < 0 \Rightarrow H_1 = 2 > 0,\ H_2 = 2.a < 0$ y $H_3 = 0 \Rightarrow$ indefinida
* Si $a = 0 \Rightarrow H_1 = 2 > 0,\ H_2 = 2.a = 0$ y $H_3 = 0 \Rightarrow$ no podemos clasificarla mediante los menores principales; no obstante, siendo $a = 0$, es:

$$Q(\bar{x}) = 2.x_1^2 + 0.x_2^2 + \frac{1}{2}.x_3^2 + 2.x_1.x_3 =$$
$$= 2.x_1^2 + \frac{1}{2}.x_3^2 + 2.x_1.x_3 = 2.(x_1^2 + \frac{1}{4}.x_3^2 + x_1.x_3) =$$
$$= 2.(x_1 + \frac{1}{2}.x_3)^2 \geq 0,\ \forall (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{"Q" es semidefinida positiva si } a = 0$$

Clasificación mediante los autovalores

$$|A - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & (1/2)-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda).(a-\lambda).(\frac{1}{2}-\lambda) - (a-\lambda) = (a-\lambda).\Big((2-\lambda).(\frac{1}{2}-\lambda) - 1\Big) =$$
$$= (a-\lambda).(\lambda^2 - \frac{5}{2}.\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \frac{5}{2}, a$$

Por tanto, si $a \geq 0$ todos los autovalores son no negativos (≥ 0), por lo que "Q" es semidefinida positiva; es decir, $Q(\bar{x}) \geq 0,\ \forall \bar{x} \in \Re^3$.

Si $a < 0$ hay autovalores de signo distinto, por lo que "Q" es indefinida; es decir, en $\Re^3$ hay vectores cuya imagen según "Q" es positiva y también hay vectores cuya imagen según "Q" es negativa.

FONEMATO 9.20.2

Clasifique las siguientes formas cuadráticas:

$$h:\Re^2 \mapsto \Re \ / \ h(\bar{x}) = 3.x_1^2 + 2.x_2^2 - 2.a.x_1.x_2$$
$$g:\Re^3 \mapsto \Re \ / \ g(\bar{x}) = a.x_1^2 - 2.x_2^2 - x_3^2 + 2.x_2.x_3$$

SOLUCIÓN

1) La matriz asociada a "h" es $A = \begin{bmatrix} 3 & -a \\ -a & 2 \end{bmatrix}$.

Clasificación mediante menores

Es $H_1 = 3$ y $H_2 = |A| = 6 - a^2$, que se anula sólo si $|a| = \sqrt{6}$; así:

* Si $|a| > \sqrt{6} \Rightarrow H_1 > 0$ y $H_2 < 0 \Rightarrow$ indefinida.
* Si $|a| < \sqrt{6} \Rightarrow H_1 > 0$ y $H_2 > 0 \Rightarrow$ definida positiva.
* Si $|a| = \sqrt{6} \Rightarrow H_1 > 0$ y $H_2 = 0 \Rightarrow$ semidefinida positiva.

Clasificación mediante los autovalores

$$|A - \lambda \bullet I| = \lambda^2 - 5.\lambda + 6 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{1 + 4.a^2}}{2}$$

En consecuencia:

* Si $\sqrt{1+4.a^2} > 5$ $(\Rightarrow 1 + 4.a^2 > 25 \Rightarrow a^2 > 6 \Rightarrow |a| > \sqrt{6})$, los dos autovalores tienen signo distinto, por lo que "h" es indefinida.
* Si $\sqrt{1+4.a^2} < 5$ $(\Rightarrow 1 + 4.a^2 < 25 \Rightarrow a^2 < 6 \Rightarrow |a| < \sqrt{6})$, los dos autovalores son positivos, por lo que "h" es definida positiva.
* Si $\sqrt{1+4.a^2} = 5$ $(\Rightarrow 1 + 4.a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow |a| = \sqrt{6})$, los dos autovalores son ≤ 0 (uno es el 5 y el otro el 0), por lo que "h" es semidefinida positiva.

2) La matriz asociada a "g" es $P = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Clasificación mediante menores

Es $H_1 = a$, $H_2 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.a$ y $H_3 = |A| = a$; así:

* Si $a > 0 \Rightarrow H_1 > 0, H_2 < 0$ y $H_3 > 0 \Rightarrow$ indefinida
* Si $a < 0 \Rightarrow H_1 < 0, H_2 > 0$ y $H_3 < 0 \Rightarrow$ definida negativa
* Si $a = 0 \Rightarrow H_1 = H_2 = H_3 = 0 \Rightarrow$ no podemos clasificarla mediante los menores principales; no obstante, siendo $a = 0$, es:

$$g(\bar{x}) = 0.x_1^2 + -2.x_2^2 - x_3^2 + 2.x_2.x_3 =$$
$$= -2.x_2^2 - x_3^2 + 2.x_2.x_3 = -(x_2^2 + x_3^2 - 2.x_2.x_3) - x_2^2 =$$
$$= -(x_2 - x_3)^2 - x_2^2 \leq 0, \ \forall (x_1; x_2; x_3) \in \Re^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{"g" es semidefinida negativa si } a = 0$$

Clasificación mediante los autovalores

$$\left|P-\lambda\bullet I\right|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$$

desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$=(a-\lambda).\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(a-\lambda).\left((-2-\lambda).(-1-\lambda)-1\right)=$$

$$=(a-\lambda).(\lambda^2+3.\lambda+1)=0\Rightarrow\begin{cases} \lambda=a \\ \lambda=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}<0 \\ \lambda=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}<0 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $a<0$, todos los autovalores son negativos, por lo que "g" es definida negativa.
- Si $a>0$ hay autovalores con signo distinto, por lo que "g" es indefinida.
- Si $a=0$ todos los autovalores son no positivos (≤ 0), por lo que "g" es semidefinida negativa.

FONEMATO 9.20.3

Clasifique la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que

$$Q(\overline{x}) = 3.x_1^2 + a.x_2^2 + 3.x_3^2 - 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 - 2.x_2.x_3$$

SOLUCIÓN

La matriz asociada a "Q" es $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, siendo:

$$H_1 = 3 > 0,\ \forall a$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 3.a - 1 \text{ que se anula si } a = 1/3$$

$$H_3 = |A| = 8.a - 4 \text{ que se anula si } a = 1/2$$

Debemos analizar 5 situaciones distintas:

$$a < 1/3 \ ;\ a = 1/3 \ ;\ 1/3 < a < 1/2 \ ;\ a = 1/2 \ ;\ a > 1/2$$

- Si $a < 1/3$, por ejemplo $a = 0$, es:

$$H_1 = 3 > 0 \ ;\ H_2 = 3.0 - 1 < 0 \ ;\ H_3 = 8.0 - 4 < 0$$

  Por tanto, "Q" es indefinida si $a < 1/3$.

- Si $a = 1/3$ la forma cuadrática es indefinida, pues:

$$H_1 = 3 > 0 \ ;\ H_2 = 3.\frac{1}{3} - 1 = 0 \ ;\ H_3 = 8.\frac{1}{3} - 4 < 0$$

- Si $1/3 < a < 1/2$, por ejemplo $a = 0'4$, es:

$$H_1 = 3 > 0 \ ;\ H_2 = 3.0'4 - 1 > 0 \ ;\ H_3 = 8.0'4 - 4 < 0$$

  Por tanto, "Q" es indefinida si $1/3 < a < 1/2$.

- Si $a = 1/2$ la forma cuadrática es semidefinida positiva, pues:

$$H_1 = 3 > 0 \ ;\ H_2 = 3.\frac{1}{2} - 1 > 0 \ ;\ H_3 = 8.\frac{1}{2} - 4 = 0$$

- Si $a > 1/2$, por ejemplo $a = 7$, es:

$$H_1 = 3 > 0 \ ;\ H_2 = 3.7 - 1 > 0 \ ;\ H_3 = 8.7 - 4 > 0$$

  Por tanto, "Q" es definida positiva si $a > 1/2$

FONEMATO 9.20.4

Siendo $a \in \Re$, sea $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ la forma cuadrática tal que:

$$Q(x;y;z) = a.x^2 + a.y^2 + a.z^2 + 2.\sqrt{2}.x.y + 2.\sqrt{2}.y.z$$

Clasifique "Q" en función de los valores del parámetro $a \in \Re$.

SOLUCIÓN

La matriz asociada a "Q" es $A = \begin{bmatrix} a & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & a & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & a \end{bmatrix}$, y se tiene que:

$$|A - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & a-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)^3 - 4.(a-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} a-\lambda = 0 \\ (a-\lambda)^2 - 4 = 0 \end{matrix}\right\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = a-2 \\ \lambda_3 = a+2 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $a < -2$ es $\left\{\begin{matrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 < 0 \end{matrix}\right\}$, por lo que "Q" es definida negativa.
- Si $a = -2$ es $\left\{\begin{matrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}\right\}$, por lo que "Q" es semidefinida negativa.
- Si $-2 < a < 0$ es $\left\{\begin{matrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 > 0 \end{matrix}\right\}$, por lo que "Q" es indefinida.
- Si $a = 0$ es $\left\{\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 > 0 \end{matrix}\right\}$, por lo que "Q" es indefinida.
- Si $0 < a < 2$ es $\left\{\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 > 0 \end{matrix}\right\}$, por lo que "Q" es indefinida.
- Si $a = 2$ es $\left\{\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 > 0 \end{matrix}\right\}$, por lo que "Q" es semidefinida positiva.
- Si $a > 2$ es $\left\{\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \\ \lambda_3 > 0 \end{matrix}\right\}$, por lo que "Q" es definida positiva.

FONEMATO 9.20.5

Sea la forma cuadrática $Q(X) = X^t \bullet A \bullet X$.

Sea la forma cuadrática $Q_B(X) = (B \bullet X)^t \bullet A \bullet (B \bullet X)$, siendo "B" una matriz ortogonal.

Demuestre que "Q" y "Q_B" tienen el mismo signo.

SOLUCIÓN

- Es: $Q_B(X) = (B \bullet X)^t \bullet A \bullet (B \bullet X) = X^t \bullet (B^t \bullet A \bullet B) \bullet X =$

  "B" es ortogonal $\Rightarrow$ $B^t = B^{-1}$

  $$= X^t \bullet (B^{-1} \bullet A \bullet B) \bullet X$$

- La matriz "A" (asociada a la forma cuadrática "Q") y la matriz $H = B^{-1} \bullet A \bullet B$ (asociada a la forma cuadrática "Q_B") son **semejantes**, por lo que tienen el mismo polinomio característico. En efecto, es:

  $$H - \lambda \bullet I = B^{-1} \bullet A \bullet B - \lambda \bullet I = B^{-1} \bullet A \bullet B - \lambda \bullet (B^{-1} \bullet B) =$$
  $$= B^{-1} \bullet (A \bullet B - \lambda \bullet B) = B^{-1} \bullet (A - \lambda \bullet I) \bullet B$$

  y tomando determinantes:

  $$|H - \lambda \bullet I| = |B^{-1} \bullet (A - \lambda \bullet I) \bullet B| = |B^{-1}| . |A - \lambda \bullet I| . |B| = |A - \lambda \bullet I|$$

  "B" es ortogonal $\Rightarrow |B^{-1}| . |B| = 1$

- Como "A" y "H" tienen el mismo polinomio característico, tienen los mismos autovalores, por lo que tienen el mismo signo.

FONEMATO 9.20.6

Sea $f:\Re^n \mapsto \Re^n$ una aplicación lineal.

Sea $Q:\Re^n \mapsto \Re$ una forma cuadrática definida positiva con matriz asociada "A".

Sea la forma cuadrática $Q_1:\Re^n \mapsto \Re$ tal que $Q_1(\bar{x}) = Q(f(\bar{x}))$.
Demuestre "Q" es definida positiva si "f" es monomorfismo.
¿Qué puede afirmarse si "f" no es monomorfismo?

SOLUCIÓN

- El que "Q" sea definida positiva significa que $Q(\bar{x}) > 0, \forall\, \bar{x} \neq \bar{0}$.

  El que "f" sea monomorfismo significa que $f(\bar{x}) \neq \bar{0}, \forall\, \bar{x} \neq \bar{0}$.

  Por tanto, siendo $\bar{x} \neq \bar{0}$, es:

$$Q_1(\bar{x}) = Q(f(\bar{x})) \underset{\uparrow}{>} 0$$

$$\boxed{\text{ya } f(\bar{x}) \neq \bar{0} \text{ y } Q(\text{Pepe}) > 0, \forall\, \text{Pepe} \neq \bar{0}}$$

- Si "f" no es monomorfismo, la forma cuadrática Q_1 es semidefinida positiva.

  En efecto, si "f" no es monomorfismo, hay vectores $\bar{x} \in \Re^n$ $(\bar{x} \neq \bar{0})$ tales que $f(\bar{x}) = \bar{0}$, y para esos vectores sucede que:

$$Q_1(\bar{x}) = Q(f(\bar{x})) \underset{\uparrow}{=} Q(\bar{0}) = 0$$

$$\boxed{\text{pues } f(\bar{x}) = \bar{0}}$$

  Para los vectores $\bar{x} \in \Re^n$ $(\bar{x} \neq 0)$ tales que $f(\bar{x}) \neq \bar{0}$, se tiene que:

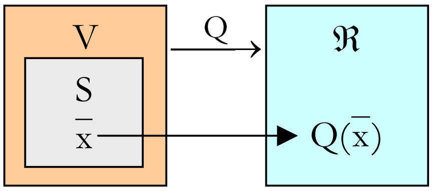
$$Q_1(\bar{x}) = Q(f(\bar{x})) \underset{\uparrow}{>} 0$$

$$\boxed{\text{ya } f(\bar{x}) \neq \bar{0} \text{ y } Q(\text{Pepe}) > 0, \forall\, \text{Pepe} \neq \bar{0}}$$

9.21 FORMA CUADRÁTICA RESTRINGIDA A UN SUBESPACIO

Sea $Q: V \mapsto \Re$ una forma cuadrática definida sobre el espacio vectorial "V" y "S" un subespacio de "V".

Al plantearnos el estudio del signo de "Q" restringida al subespacio "S", nos planteamos estudiar el signo que tienen las imágenes según "Q" de los vectores de "S".



- Se dice que "Q" es **definida positiva en "S"** si todo vector de "S", salvo el vector cero, tiene imagen positiva.
- Se dice que "Q" es **definida negativa en "S"** si todo vector de "S", salvo el vector cero, tiene imagen negativa.
- Se dice que "Q" es **semidefinida positiva en "S"** si todo vector de "S" tiene imagen no negativa (≥ 0).
- Se dice que "Q" es **semidefinida negativa en "S"** si todo vector de "S" tiene imagen no positiva (≤ 0).
- Se dice que "Q" es **indefinida en "S"** si en "S" hay vectores con imagen positiva y también hay vectores con imagen negativa.

Obvio

- Si "Q" es definida positiva en "V" $\Rightarrow$ es definida positiva en "S".
- Si "Q" es definida negativa en "V" $\Rightarrow$ es definida negativa en "S".
- Si "Q" es semidefinida positiva en "V" $\Rightarrow$ es semidefinida positiva o definida positiva en "S".
- Si "Q" es semidefinida negativa en "V" $\Rightarrow$ es semidefinida negativa o definida negativa en "S".
- Si "Q" es indefinida en "V", al restringirla al subespacio "S" puede pasar cualquier cosa; es decir, "Q" puede ser definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa o indefinida.

FONEMATO 9.21.1

Sea $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que $Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3$.

Clasifique "Q" restringida a los siguientes subespacios de $\Re^3$:

$$S_1 = \{(x_1;x_2;x_3) \in \Re^3 \,/\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$

$$S_2 = \left\{(x_1;x_2;x_3) \in \Re^3 \middle/ \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3.x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

SOLUCIÓN

La forma cuadrática "Q" es indefinida en $\Re^3$, pues su matriz asociada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene autovalores de signo distinto $\lambda = 2$ (simple) y $\lambda = -1$ (doble).

• Si $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, al parametrizar x_2 y x_3 resulta $x_1 = x_2 + x_3$. Así:

$$Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3 =$$

sustituimos x_1 por $x_2 + x_3$

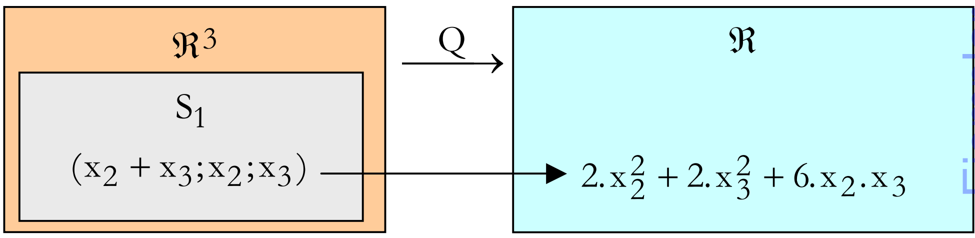
$$= 2.(x_2 + x_3).x_2 + 2.(x_2 + x_3).x_3 + 2.x_2.x_3 =$$

operamos y simplificamos todo lo que se pueda

obtenemos una forma cuadrática en la que no aparece x_1

$$= \overbrace{2.x_2^2 + 2.x_3^2 + 6.x_2.x_3} = (x_2;x_3) \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{P} \bullet \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

escribimos matricialmente



La forma cuadrática "Q" es indefinida en S_1, pues la matriz "P" tiene autovalores de signo distinto: $|P - \lambda \bullet I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4.\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 5, -1$.

• Si $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ y $x_1 - x_2 - 3.x_3 = 0$, al parametrizar x_3 resulta $x_1 = 2.x_3$ y $x_2 = -x_3$. Así:

$$Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3 =$$

sustituimos x_1 por $2.x_3$ y x_2 por $-x_3$

$$= 2.(2.x_3).(-x_3) + 2.(2.x_3).x_3 + 2.(-x_3).x_3 = -2.x_3^2 < 0, \forall x_3 \neq 0$$

Por tanto, "Q" es definida negativa en el subespacio S_2.

FONEMATO 9.21.2

Sea $Q:\mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}$ tal que $Q(\overline{u}) = x^2 - y^2 + 2.x.z + 2.y.z$.

Clasifique "Q" restringida a los siguientes subespacios de $\mathfrak{R}^3$:

$$S_1 = \{(x;y;z) \in \mathfrak{R}^3 \ / \ x - y = 0\} \ ; \ S_2 = \left\{(x;y;z) \in \mathfrak{R}^3 \middle/ \begin{matrix} x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$S_3 = \{(x;y;z) \in \mathfrak{R}^3 \ / \ y - z = 0\}$$

SOLUCIÓN

La forma cuadrática "Q" es indefinida en $\mathfrak{R}^3$, pues los coeficientes de x^2 y de y^2 tienen distinto signo.

- Si $\overline{u} = (x;y;z) \in S_1$ es $x - y = 0$, y al parametrizar "x" y "z" resulta $y = x$. Así:

$$Q(\overline{u}) = x^2 - y^2 + 2.x.z + 2.y.z =$$

$$\boxed{\text{sustituimos "y" por "x"}}$$

$$= x^2 - x^2 + 2.x.z + 2.x.z = 4.x.z = (x;z) \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \bullet \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

La forma cuadrática "Q" es indefinida en S_1, pues la matriz "P" tiene autovalores de signo distinto:

$$|P - \lambda \bullet I| = \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, -2$$

- Si $\overline{u} = (x;y;z) \in S_2$, es $x-y+z = 0$ y $x-z = 0$; al parametrizar "z" resulta $x = z$ e $y = 2.z$. Así:

$$Q(\overline{u}) = x^2 - y^2 + 2.x.z + 2.y.z =$$

$$\boxed{\text{sustituimos "x" por "z" e "y" por "2.z"}}$$

$$= z^2 - (2.z)^2 + 2.z.z + 2.(2.z).z = 3.z^2 > 0, \forall z \neq 0$$

Por tanto, "Q" es definida positiva en S_2.

- Si $\overline{u} = (x;y;z) \in S_3$ es $y - z = 0$, y al parametrizar "x" y "z" resulta $y = z$. Así:

$$Q(\overline{u}) = x^2 - y^2 + 2.x.z + 2.y.z =$$

$$\boxed{\text{sustituimos "y" por "z"}}$$

$$= x^2 - z^2 + 2.x.z + 2.z^2 = x^2 + z^2 + 2.x.z = (x;z) \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{W} \bullet \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

La forma cuadrática "Q" es semidefinida positiva en S_3, pues la matriz "W" tiene autovalores no negativos:

$$|W - \lambda \bullet I| = \lambda^2 - 2.\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 2$$

FONEMATO 9.21.3

Sea $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que $Q(x;y;z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2.a.x.y$.

1) Clasifique "Q" según los valores del parámetro $a \in \Re$.

2) Si $a \neq 0$, clasifique "Q" restringida al subespacio "S".

$$S = \{(x;y;z) \in \Re^3 \ / \ z - y = 0, \ a.x + y - 2.z = 0\}$$

SOLUCIÓN

1) La matriz asociada a "Q" es $A = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, y se tiene que:

$$|A - \lambda \bullet I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & a & 0 \\ a & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda).\begin{vmatrix} -1-\lambda & a \\ a & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

desarrollamos por los elementos de la tercera fila

$$\Rightarrow (-1-\lambda).\left((-1-\lambda)^2 - a^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 - a \\ \lambda_3 = -1 + a \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $a < -1$ es $\begin{Bmatrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \\ \lambda_3 < 0 \end{Bmatrix}$, por lo que "Q" es indefinida.
- Si $a = -1$ es $\begin{Bmatrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 < 0 \end{Bmatrix}$, por lo que "Q" es semidefinida negativa.
- Si $-1 < a < 1$ es $\begin{Bmatrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 < 0 \end{Bmatrix}$, por lo que "Q" es definida negativa.
- Si $a = 1$ es $\begin{Bmatrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{Bmatrix}$, por lo que "Q" es semidefinida negativa.
- Si $a > 1$ es $\begin{Bmatrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 > 0 \end{Bmatrix}$, por lo que "Q" es indefinida.

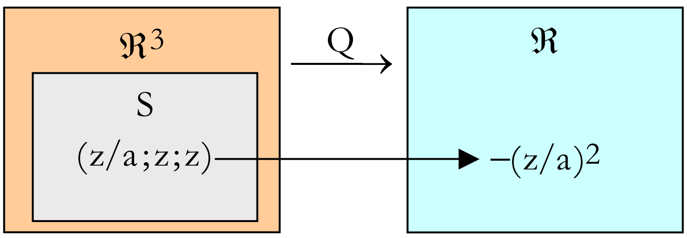
2) Es:

$$S = \{(x;y;z) \in \Re^3 \ / \ z - y = 0, \ a.x + y - 2.z = 0\} = \{(z/a;z;z), \ \forall z \in \Re\}$$

pametrizando la incógnita "z"

La forma cuadrática "Q" es definida negativa en "S", pues:

$$Q(z/a;z;z) = -(z/a)^2 - z^2 - z^2 + 2.a.(z/a).z = -(z/a)^2 < 0, \ \forall z \neq 0$$



FONEMATO 9.21.4

Sea $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ la forma cuadrática tal que:

$$Q(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + b^2.x_3^2 + 2.b.x_2.x_3 \ ; \ b \in \Re,\ b \neq 0$$

1) Clasifique "Q" en función de los valores del parámetro "b" .

2) Diagonalice "Q".

3) Si $a \in \Re$, determine el signo de "Q" si se restringe al subespacio vectorial "S".

$$S = \left\{\bar{x} \in \Re^3 / x_1 - a.x_2 = 0,\ x_2 - b.x_3 = 0\right\}$$

4) Halle una aplicación lineal cuyo núcleo sea "S" y diga qué tipo de aplicación es.

SOLUCIÓN

Consideramos que la base de referencia en $\Re^3$ es la canónica; así, entendemos que x_1, x_2, x_3 son las coordenadas de un vector $\bar{x} \in \Re^3$ respecto de dicha base. Por tanto, la expresión matricial de "Q" respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$Q(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & b^2 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I)}$$

1) La forma cuadrática "Q" es **semidefinida positiva**, pues todos los autovalores de "A" son no negativos (≥ 0):

$$\left|A - \lambda \bullet I\right| = -\lambda^3 + (2 + b^2).\lambda^2 - (1 + b^2).\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 1 + b^2 > 0,\ \forall\, b \end{cases}$$

2) Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 0$:

$$(A - 0 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & b^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -b.x_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{eliminamos la 3}^{\text{a}} \text{ ecuación y parametrizamos } x_3}$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 0) = \left\{(0; -b.\theta; \theta),\ \forall \theta \in \Re\right\} = \left\{\theta \bullet (0; -b; 1),\ \forall \theta \in \Re\right\}$$

El vector $\bar{h}_1 = (0; -b; 1)$ es una base del subespacio, y el vector

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{h}_1}{\left\|\bar{h}_1\right\|} = \left(0; -\frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}\right)$$

es una base ortonormal del subespacio.

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$:

$$(A - 1 \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & b^2 - 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Si } b \neq 0, \text{ es } \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & b^2 - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{eliminamos la primera ecuación y parametrizamos } x_1}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} b.x_3 = 0 \\ b.x_2 + (b^2 - 1).x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1) = \{(\theta;0;0),\ \forall\theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (1;0;0),\ \forall\theta \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_2 = (1;0;0)$ es una base del subespacio, y una base ortonormal del subespacio es la formada por el vector $\overline{u}_2 = \overline{h}_2 / \|\overline{h}_2\| = (1;0;0)$.

- Subespacio de autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1 + b^2$:

$$(A - (1+b^2) \bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & b \\ 0 & b & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Si $b \neq 0$, es $\begin{vmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ eliminamos la segunda ecuación y parametrizamos x_2

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -b^2.x_1 = 0 \\ x_3 = b.x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_3 = b.x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\lambda = 1 + b^2) = \{(0;\theta;b.\theta),\ \forall\theta \in \Re\} = \{\theta \bullet (0;1;b),\ \forall\theta \in \Re\}$$

El vector $\overline{h}_3 = (0;1;b)$ es una base del subespacio, y una base ortonormal del subespacio es la formada por el vector

$$\overline{u}_3 = \frac{\overline{h}_3}{\|\overline{h}_3\|} = \left(0;\frac{1}{\sqrt{1+b^2}};\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right)$$

- Si en el espacio $\Re^3$ tomamos como base de referencia la base ortonormal que forman los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ y $\overline{u}_3$, se modifican las coordenadas de $\overline{x} \in \Re^3$, de modo que si $\overline{x} = x_1^* \bullet \overline{u}_1 + x_2^* \bullet \overline{u}_2 + x_3^* \bullet \overline{u}_3$, entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b/\sqrt{1+b^2} & 0 & 1/\sqrt{1+b^2} \\ 1/\sqrt{1+b^2} & 0 & b/\sqrt{1+b^2} \end{bmatrix}}^{C} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{u}_1 & \overline{u}_2 & \overline{u}_3 \end{array}$$

Sustituyendo (II) en (I) obtenemos **la expresión canónica** de "Q":

$$Q(\overline{x}) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet A \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+b^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = (x_2^*)^2 + (1+b^2).(x_3^*)^2$$

$$C^t \bullet A \bullet C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+b^2 \end{bmatrix}$$

3) Es:

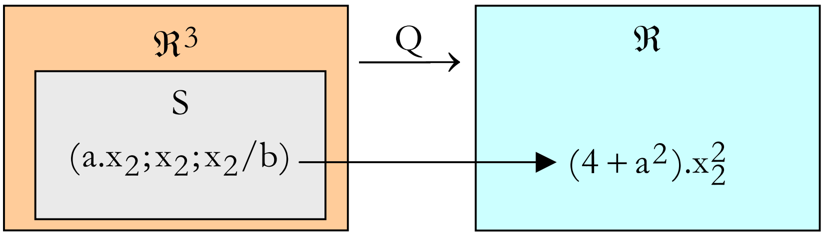
$$S=\left\{\bar{x}\in\Re^3 / x_1-a.x_2=0,\ x_2-b.x_3=0\right\}=\left\{(x_1;x_2;x_3)\Big/ \begin{matrix} x_1=a.x_2 \\ x_3=x_2/b \end{matrix}\right\}$$

Es

$$Q(a.x_2;x_2;x_2/b)=(a.x_2)^2+x_2^2+b^2.(x_2/b)^2+2.b.x_2.(x_2/b)=$$

$$=(4+a^2).x_2^2>0,\ \forall\ x_2\neq 0,\ \forall a\in\Re$$

Así, la forma cuadrática "Q" es **definida positiva** si se restringe a "S".



4) Una aplicación lineal con núcleo "S" es la $f:\Re^3\mapsto\Re^6$ cuya expresión respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^6$ es:

$$f(x_1;x_2;x_3)=(x_1-a.x_2;x_2-b.x_3;0;0;0;0)$$

La matriz asociada a "f" respecto de dichas bases es $P=\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La aplicación "f" no es monomorfismo (no es inyectiva), pues el rango de "P" no coincide con la dimensión del espacio "inicial" $\Re^3$; tampoco es epimorfismo (no es sobreyectiva), pues el rango de "P" no coincide con la dimensión del espacio "final" $\Re^6$.

Otra aplicación lineal con núcleo "S" es la $g:\Re^3\mapsto\Re^2$ cuya expresión respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^2$ es:

$$g(x_1;x_2;x_3)=(x_1-a.x_2;x_2-b.x_3)$$

La matriz asociada a "g" respecto de dichas bases es $H=\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{bmatrix}$.

La aplicación "g" no es monomorfismo (no es inyectiva), pues el rango de "H" no coincide con la dimensión del espacio "inicial" $\Re^3$; pero es epimorfismo (es sobreyectiva), pues el rango de "H" coincide con la dimensión del espacio "final" $\Re^2$.

EJERCICIOS SOBRE FORMAS BILINEALES RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA WEB

FORMA BILINEAL

Ejercicio 01.01

Sea "V" un espacio vectorial real y $B=\left\{\overline{u}_1, \overline{u}_2\right\}$ la base de referencia en él. Siendo $\overline{x}=x_1 \bullet \overline{u}_1+x_2 \bullet \overline{u}_2$ e $\overline{y}=y_1 \bullet \overline{u}_1+y_2 \bullet \overline{u}_2$, sea $f: V \times V \mapsto \Re$ tal que $f(\overline{x}\,;\overline{y})=2.x_1.y_1+3.x_1.y_2+4.x_2.y_1$.
Demuestre que "f" es una forma bilineal.

Ejercicio 01.02

Demuestre que "f" es una forma bilineal.

$$f(\overline{x}\,;\overline{y})=2.x_1.y_1+3.x_1.y_2-4.x_1.y_3-3.x_2.y_1+4.x_3.y_1$$

Ejercicio 01.03

Sea "V" el EV de los polinomios de grado ≤ 1 y $B=\{1, x\}$ la base de referencia en él.

Demuestre que $f(p(x); q(x))=\int_0^1 p(x).q(x).dx$ es una forma bilineal.

Ejercicio 01.04

Demuestre que $f: M_{2\times2} \times M_{2\times2} \mapsto \Re$ es una forma bilineal, siendo:

$$f(A; B)=Tr.(A \bullet B^t)$$

Ejercicio 01.05

Sea "V" el EV de los polinomios de grado ≤ 1 y $B=\{1, x\}$ la base de referencia elegida en él.
Demuestre que $f(p(x); q(x))=p(1).q(1)+p(2).q(2)$ es una forma bilineal.

Ejercicio 01.06

Sea "V" el EV de los polinomios de grado ≤ 1 y $B=\{1, x\}$ la base de referencia elegida en él.
Demuestre que $f(p(x); q(x))=p'(1).q''(1)+p(2).q(2)$ es una forma bilineal.

Ejercicio 01.07

Sean $f: V \mapsto \Re$ y $g: V \mapsto \Re$ aplicaciones lineales.

Demuestre que $h: V \times V \mapsto \Re$ tal que $h(\overline{x}; \overline{y})=f(\overline{x}).g(\overline{y})$ es una forma bilineal.

Ejercicio 01.08

Sea $f: V \times V \mapsto \Re$ una forma bilineal y $g: V \times V \mapsto \Re$ tal que $g(\overline{x}; \overline{y})=f(\overline{y}; \overline{x})$. Demuestre que "g" es una forma bilineal.

Ejercicio 01.09

Sea $f: V \times V \mapsto \Re$ una forma bilineal y $g: V \times V \mapsto \Re$ tal que $g(\overline{x}; \overline{y})=f(\overline{y}; \overline{x})$. Demuestre que "g" es una forma bilineal.

NÚCLEOS DE UNA FORMA BILINEAL

Ejercicio 02.01

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado ≤ 2. Determine los núcleos de $f: V \times V \mapsto \Re$ si:

$$f(p(x);q(x)) = \int_0^1 p'(x).q''(x).dx$$

Ejercicio 02.02

Determine los núcleos de $f: \Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$.

$$f(\overline{x};\overline{y}) = 2.x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 + 2.x_2.y_1 + x_2.y_3 + x_3.y_2$$

Ejercicio 02.03

Determine los núcleos de $f: \Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$.

$$f(\overline{x};\overline{y}) = 2.x_1.y_2 + 2.x_2.y_1 + x_2.y_3 + x_3.y_2$$

Ejercicio 02.04

Determine los núcleos de $f: M_{2\times 2} \times M_{2\times 2} \mapsto \Re$ si:

$$f(A;B) = Tr.(A \bullet B)$$

Ejercicio 02.05

Determine los núcleos de $f: M_{2\times 2} \times M_{2\times 2} \mapsto \Re$ si:

$$f(A;B) = Tr.(A + B)$$

VECTORES CONJUGADOS
SUBESPACIOS CONJUGADOS

Ejercicio 03.01

Sea $f: \Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ la forma bilineal tal que, respecto de la B_c de $\Re^3$, es:

$$f(\overline{x};\overline{y}) = 3.x_1.y_1 + x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_2.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_1 + x_3.y_3$$

Si $H = \{(x_1;x_2;x_3) / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$, determine su conjugado "T".

Ejercicio 03.02

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2.

Sea $f: V \times V \mapsto \Re$ la forma bilineal tal que

$$f(a(x);b(x)) = \int_0^1 a(x).b(x).dx$$

Sea $H = \left\{ \theta + \delta.x + \delta.x^2,\ \forall \theta,\delta \in \Re \right\}$.

Determine el subespacio "T" conjugado de "H".

LAS FORMAS BILINEALES Y LOS CAMBIOS DE BASE

Ejercicio 04.01

Sea $f: V \times V \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya matriz asociada respecto de la base $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine la expresión de "f" respecto de la base $B^* = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, si $\overline{e}_1 = 2 \bullet \overline{u}_1 + 3 \bullet \overline{u}_2$ y $\overline{e}_2 = 4 \bullet \overline{u}_2$.

EJERCICIOS SOBRE FORMAS CUADRÁTICAS RESUELTOS EN LOS VÍDEOS DE LA WEB

Ejercicio 03.01

Sea $Q: V \mapsto \Re$ la forma cuadrática cuya expresión respecto de la base $B = \{\bar{k}_1, \bar{k}_2\}$ es $Q(\bar{x}) = 2.x_1^2 + x_2^2 + 6.x_1.x_2$.

Determine la expresión de "Q" respecto de la base $B^* = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ si $\bar{h}_1 = 5 \bullet \bar{k}_1 + 9 \bullet \bar{k}_2$ y $\bar{h}_2 = 2 \bullet \bar{k}_1 + 3 \bullet \bar{k}_2$.

Ejercicio 05.01

Diagonalice $Q: \Re^2 \mapsto \Re$ tal que $Q(\bar{x}) = 4.x_1^2 + x_2^2 + 4.x_1.x_2$

Ejercicio 05.02

Diagonalice $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ tal que:

$$Q(\bar{x}) = 3.x_1^2 + 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 4.x_2.x_3$$

Ejercicio 05.03

Diagonalice $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ tal que $Q(\bar{x}) = x_1^2 + 2.x_2.x_3$

Ejercicio 05.04

Diagonalice $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ tal que $Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3$

AUTOCOMPROBACIÓN SOBRE FORMAS BILINEALES

Las soluciones están en los test de la web.

01) Siendo "V" un espacio vectorial, la aplicación $f: V \times V \mapsto \Re$ se llama forma bilineal si $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \Re$ se cumple que:

$$f(\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y} ; \bar{z}) = \alpha . f(\bar{x} ; \bar{z}) + \beta . f(\bar{y} ; \bar{z})$$
$$f(\bar{x} ; \alpha \bullet \bar{y} + \beta \bullet \bar{z}) = \alpha . f(\bar{x} ; \bar{y}) + \beta . f(\bar{x} ; \bar{z})$$

a) Verdadero ; b) Falso ; c) No tengo ni idea

02) Siendo "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y "B" la base de referencia elegida en él, la forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ queda identificada mediante una matriz "A" cuadrada de orden "n". De "A" se dice matriz asociada a "f" respecto de la base "B".

a) Verdadero ; b) Falso

03) Siendo "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y $B = \{\bar{e}_1; \ldots ; \bar{e}_n\}$ la base de referencia elegida en él, la matriz $A = \{a_{ij}\}$ asociada a la forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ respecto de la base "B" es tal que $a_{ij} = f(\bar{e}_i ; \bar{e}_j)$.

a) Verdadero ; b) Falso

04) Una forma bilineal se dice degenerada si su matriz asociada es singular.

a) Verdadero ; b) Falso

05) La forma bilineal $f(\bar{x} ; \bar{y}) = 2.x_1.y_1 - 3.x_1.y_2 + k.x_2.y_1 + 9.x_2.y_2$ es degenerada.

a) $k \neq -6$; b) $k = -6$; c) $k = 6$

06) Una forma bilineal se dice no degenerada si su matriz asociada es regular.

a) Verdadero ; b) Falso

07) La forma bilineal $f(\bar{x} ; \bar{y}) = x_1.y_3 - 3.x_2.y_1 + k.x_2.y_2 + 4.x_3.y_1$ no es degenerada.

a) $k \neq 0$; b) $k = 0$; c) $k \neq 1$

08) Siendo "V" el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 1 y $B = \{1, x\}$ la base de referencia elegida en él, señale la matriz asociada a la forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ tal que:

$$f(p(x) ; q(x)) = \int_0^2 p(x).q(x).dx$$

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 8/3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 8/3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8/3 \end{bmatrix}$

09) Siendo "V" el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 1 y $B = \{1, x\}$ la base de referencia elegida en él, señale la matriz asociada a la forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ tal que:

$$f(p(x); q(x)) = p(1).q(0) + p(2).q(3)$$

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

10) Siendo "V" el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 1 y $B = \{1, x\}$ la base de referencia elegida en él, señale la matriz asociada a la forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ tal que:

$$f(p(x); q(x)) = p'(0).q''(1) + p(1).q(3)$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

11) Sea $f: M_{2\times 2} \times M_{2\times 2} \mapsto \Re$ la forma bilineal tal que:

$$f(A; B) = Tr.(A \bullet B)$$

Señale la matriz asociada a "f" respecto de la base canónica.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12) La forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ es dice simétrica si:

$$f(\overline{x}; \overline{y}) = f(\overline{y}; \overline{x}),\ \forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V$$

a) Verdadero ; b) Falso

13) ¿En qué caso no es simétrica la forma bilineal "f"?

a) $f(\overline{x}; \overline{y}) = 7.x_1.y_3 + 3.x_2.y_2 + 7.x_3.y_1 + x_3.y_3$

b) $f(\overline{x}; \overline{y}) = 5.x_1.y_3 + 4.x_2.y_2 + 4.x_3.y_1 + x_3.y_3$

c) $f(\overline{x}; \overline{y}) = 5.x_1.y_2 + 5.x_2.y_1 + x_2.y_2 + 9.x_3.y_3$

14) La forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ es antisimétrica si:

$$f(\overline{x}; \overline{y}) = -f(\overline{y}; \overline{x}), \forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V$$

a) Verdadero ; b) Falso

15) ¿En qué caso no es antisimétrica la forma bilineal "f"?

a) $f(\overline{x}; \overline{y}) = 7.x_1.y_2 - 7.x_2.y_1 - x_1.y_3 + x_3.y_1$

b) $f(\overline{x}; \overline{y}) = 3.x_1.y_2 - 3.x_2.y_1 + x_2.y_3 - x_3.y_2$

c) $f(\overline{x}; \overline{y}) = 5.x_1.y_2 - 5.x_2.y_1 + 9.x_3.y_3$

16) Siendo $f: V \times V \mapsto \Re$ una forma bilineal antisimétrica, es:

$$f(\overline{x}; \overline{x}) = 0,\ \forall\, \overline{x} \in V$$

a) Verdadero ; b) Falso

17) El núcleo izquierdo de la forma bilineal $f: V \times V \mapsto \Re$ es el subespacio de "V" que forman los vectores $\overline{x}$ tales que $f(\overline{x}; \overline{y}) = 0,\ \forall\, \overline{y} \in V$.

a) Verdadero ; b) Falso

18) Señale el núcleo izquierdo de la forma bilineal $f:\Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ tal que $f(\overline{x};\overline{y}) = x_1.y_2 + 2.x_2.y_1 + x_2.y_3 + x_3.y_2$.

a) $\{(\theta;0;0),\ \forall\,\theta \in \Re\}$; b) $\{(\theta;\theta;-\theta),\ \forall\,\theta \in \Re\}$

c) $\{(\theta;0;-\theta),\ \forall\,\theta \in \Re\}$

19) El núcleo derecho de la forma bilineal $f:V \times V \mapsto \Re$ es el subespacio de "V" que forman los vectores $\overline{y}$ tales que:

$$f(\overline{x};\overline{y}) = 0,\ \forall\,\overline{x} \in V$$

a) Verdadero ; b) Falso

20) Señale el núcleo derecho de la forma bilineal $f:\Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ tal que $f(\overline{x};\overline{y}) = x_1.y_2 + 2.x_2.y_1 + x_2.y_3 + x_3.y_2$.

a) $\{(\theta;0;2.\theta),\ \forall\,\theta \in \Re\}$; b) $\{(\theta;0;-2.\theta),\ \forall\,\theta \in \Re\}$

c) $\{(\theta;\theta;-2.\theta),\ \forall\,\theta \in \Re\}$

21) Si la matriz asociada a la forma bilineal "f" es regular, el núcleo izquierdo de "f" está formado sólo por el vector cero, lo mismo que el núcleo derecho.

a) Verdadero ; b) Falso

22) Si la matriz asociada a la forma bilineal $f:V \times V \mapsto \Re$ es simétrica, el núcleo derecho de "f" coincide con el núcleo izquierdo.

a) Verdadero ; b) Falso

23) Siendo $f:V \times V \mapsto \Re$ una forma bilineal, se dice que $\overline{x},\overline{y} \in V$ son conjugados respecto a "f" si $f(\overline{x};\overline{y}) = 0$.

a) Verdadero ; b) Falso

24) Sea la forma bilineal $f:\Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ tal que

$$f(\overline{x};\overline{y}) = x_1.y_2 + x_2.y_1 + x_2.y_3 + x_3.y_2$$

Señale el conjunto de vectores conjugados de $\overline{u} = (2;0;1)$.

a) $\{(\theta;\mu;3.\mu),\ \forall\,\theta,\mu \in \Re\}$; b) $\{(\theta;\mu;-3.\mu),\ \forall\,\theta,\mu \in \Re\}$

c) $\{(\theta;\mu;0),\ \forall\,\theta,\mu \in \Re\}$

25) Los subespacio V_1 y V_2 de "V" se dicen conjugados respecto a la forma bilineal $f:V \times V \mapsto \Re$ si $\forall\,\overline{p} \in V_1$ y $\forall\,\overline{q} \in V_2$ sucede que $f(\overline{p};\overline{q}) = 0$.

a) Verdadero ; b) Falso

26) Si $f:V \times V \mapsto \Re$ es una forma bilineal y V_1 un subespacio de "V", para hallar el subespacio V_2 conjugado de V_1 respecto a "f", calculamos una base de V_1 y exigimos que un vector genérico $\overline{y} \in V_2$ sea conjugado de todo vector de dicha base, pues así $\overline{y} \in V_2$ es conjugado de todo vector $\overline{x} \in V_1$.

a) Verdadero ; b) Falso

27) Sea $f:\Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ tal que:

$$f(\overline{x};\overline{y}) = x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_2.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_1 + x_3.y_3$$

Señale el subespacio conjugado de $H =< (1;1;0), (0;0;1) >$.

a) $\{(\theta;\theta;-\theta), \forall\, \theta \in \Re\}$; b) $\{(\theta;0;-\theta), \forall\, \theta \in \Re\}$

c) $\{(\theta;0;\theta), \forall\, \theta \in \Re\}$

29) La matriz que identifica a la forma bilineal $f:V \times V \mapsto \Re$ cambia al cambiar la base de referencia en "V".

a) Verdadero ; b) Falso

30) Siendo $f:V \times V \mapsto \Re$ y $g:V \times V \mapsto \Re$ sendas formas bilineales, se dice que $h:V \times V \mapsto \Re$ es suma de ambas si:

$$h(\overline{x};\overline{y}) = f(\overline{x};\overline{y}) + g(\overline{x};\overline{y})$$

a) Verdadero ; b) Falso

28) Si "A" es la matriz asociada a la forma bilineal $f:V \times V \mapsto \Re$ respecto de una base y en "V" se hace el cambio de base de matriz asociada "C", la matriz asociada a "f" respecto de la nueva base es $H = C^t \bullet A \bullet C$; o sea, "A" y "H" son congruentes. Así, al afirmar que dos matrices son congruentes se afirma que representan a la misma forma bilineal respecto de bases distintas.

a) Verdadero ; b) Falso

31) La suma de dos formas bilineales "f" y "g" es una forma bilineal, y su matriz asociada es la suma de las respectivas matrices asociadas a "f" y "g".

a) Verdadero ; b) Falso

32) Siendo $f:V \times V \mapsto \Re$ una forma bilineal y $\theta \in \Re$, se dice que $h:V \times V \mapsto \Re$ es producto de ambos si $h(\overline{x};\overline{y}) = \theta.f(\overline{x};\overline{y})$.

a) Verdadero ; b) Falso

33) Si "f" es una forma bilineal con matriz asociada "A" y $\theta \in \Re$, entonces $h = \theta \bullet f$ es una forma bilineal con matriz asociada $\theta \bullet A$.

a) Verdadero ; b) Falso

34) El conjunto de las formas bilineales que pueden definirse sobre un espacio vectorial es a su vez un espacio vectorial, pues la suma de formas bilineales y el producto de una forma bilineal por un escalar satisfacen todas las exigencias establecidas en la definición del ente que llamamos espacio vectorial.

a) Verdadero ; b) Falso

35) Toda forma bilineal $f(\overline{x};\overline{y}) = \overline{x}^t \bullet A \bullet \overline{y}$ puede expresarse como suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica.

a) Verdadero ; b) Falso

AUTOCOMPROBACIÓN SOBRE FORMAS CUADRÁTICAS

Las soluciones están en los test de la web.

01) Si "V" es un espacio vectorial de dimensión "n" y "B" es la base de referencia elegida en él, llamamos forma cuadrática (FC) a toda aplicación $Q : V \mapsto \Re$ tal que si $\overline{x} \in V$ tiene coordenadas $(x_1; \ldots; x_n)$ respecto de "B", es:

$$Q(\overline{x}) = [x_1 \quad \ldots \quad x_n] \bullet \underset{\uparrow}{A} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

matriz simétrica de orden "n"

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Q"] & \Re \\ \overline{x} \arrow[r] & Q(\overline{x}) \end{tikzcd}$$

De "A" se dice que es la matriz asociada a "Q" respecto de la base "B".

a) Verdadero ; b) Falso ; c) No tengo ni idea

02) ¿Qué opción es una forma cuadrática $Q : \Re^4 \mapsto \Re$?

a) $Q(x;y;z;t) = x^2 + x.y.z + y.z + t^2 + z.t$
b) $Q(x;y;z;t) = 2.x^2 - 4.z^2 - 7.t^2 - 2.x.y + 4.z.x + y.t + 6.z.t$
c) $Q(x;y;z;t) = x^2 + y^2 + t^2 + 7.x.z - 3.y.z + 7.z$

03) ¿Qué opción es una forma cuadrática $Q : \Re^3 \mapsto \Re$?

a) $Q(x;y;z) = x^2 + 2.x.y + y.z + z^2 + x.z + 1789$
b) $Q(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2 + 7.x.z - 3.y.z + \sqrt{x}$
c) $Q(x;y;z) = 2.x^2 - 4.y^2 - 7.z^2 - 2.x.y + 4.x.z + y.z$

04) Si la base de referencia en $\Re^3$ es la canónica, señale la expresión matricial de la forma cuadrática "Q" respecto de esa base si $Q(x;y;z) = 2.x^2 - 4.y^2 - 7.z^2 + 9.x.y + 5.x.z + 3.y.z$.

a) $[x \quad y \quad z] \bullet \begin{bmatrix} 2 & 5/2 & 9/2 \\ 5/2 & -4 & 3/2 \\ 9/2 & 3/2 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

b) $[x \quad y \quad z] \bullet \begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 9 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

c) $[x \quad y \quad z] \bullet \begin{bmatrix} 2 & 9/2 & 5/2 \\ 9/2 & -4 & 3/2 \\ 5/2 & 3/2 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

05) Si la base de referencia en $\Re^2$ es la canónica, señale la expresión matricial de la forma cuadrática $Q(\theta;\mu) = -7.\theta.\mu$ respecto de esa base.

a) $[\theta \quad \mu] \bullet \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \theta \\ \mu \end{bmatrix}$; b) $[\theta \quad \mu] \bullet \begin{bmatrix} 0 & -7/2 \\ -7/2 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \theta \\ \mu \end{bmatrix}$

c) $[\theta \quad \mu] \bullet \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \theta \\ \mu \end{bmatrix}$

06) Si la base de referencia es la canónica, señale la expresión polinómica de la forma cuadrática "Q" respecto de esa base.

$$Q(x;y;z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & -9 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a) $Q(x;y;z) = 8.x^2 - 4.y^2 + 3.x.y + 5.x.z - 9.y.z$
b) $Q(x;y;z) = 8.x^2 - 4.y^2 + 5.x.y + 3.x.z - 9.y.z$
c) $Q(x;y;z) = 8.x^2 - 4.y^2 + 6.x.y + 10.x.z - 18.y.z$

07) Siendo $Q_1 : V \mapsto \Re$ y $Q_2 : V \mapsto \Re$ formas cuadráticas, se dice que $Q : V \mapsto \Re$ es suma de ambas si $Q(\bar{x}) = Q_1(\bar{x}) + Q_2(\bar{x})$. Se denota $Q = Q_1 + Q_2$.

a) Verdadero ; b) Falso

08) La suma de dos formas cuadráticas Q_1 y Q_2 es una forma cuadrática, y su matriz asociada es la suma de las respectivas matrices asociadas a Q_1 y Q_2.

a) Verdadero ; b) Falso

09) Siendo $Q_1 : V \mapsto \Re$ una forma cuadrática y $\theta \in \Re$, se dice que $Q : V \mapsto \Re$ es producto de ambos si $Q(\bar{x}) = \theta . Q(\bar{x})$. Se denota $h = \theta \bullet f$.

a) Verdadero ; b) Falso

10) Si Q_1 es una forma cuadrática con matriz asociada "A" y $\theta \in \Re$, entonces $Q = \theta \bullet Q_1$ es una forma cuadrática y su matriz asociada es $\theta \bullet A$.

a) Verdadero ; b) Falso

11) El conjunto de las formas cuadráticas que pueden definirse sobre un espacio vectorial es a su vez un espacio vectorial, pues la suma de formas cuadráticas y el producto de una forma cuadrática por un escalar satisfacen todas las exigencias establecidas en la definición del ente llamado espacio vectorial.

a) Verdadero ; b) Falso

12) La matriz que identifica a la forma cuadrática $Q : V \mapsto \Re$ cambia al cambiar la base de referencia empleada para identificar a los vectores de "V".

a) Verdadero ; b) Falso

13) Si "A" es la matriz asociada a la forma cuadrática $Q : V \mapsto \Re$ respecto de la base "B" y en "V" se hace el cambio de base de matriz asociada "C", la matriz asociada a "Q" respecto de la nueva base es $H = C^t \bullet A \bullet C$.

a) Verdadero ; b) Falso

14) Si "A" es la matriz asociada a la forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ respecto de la base "B", el problema de diagonalizar "Q" es el problema de encontrar una base de "V" tal que la matriz "D" asociada a "Q" respecto de la nueva base sea diagonal, determinando la matriz "C" tal que $D = C^t \bullet A \bullet C$.

a) Verdadero ; b) Falso

15) Si $Q: V \mapsto \Re$ es una forma cuadrática con matriz asociada "A" respecto de la base "B" de "V" y B^* es la base ortonormal de "V" formada por autovectores de "A", la matriz "C" asociada al cambio de base $B \to B^*$ es ortogonal, y la matriz $C^t \bullet A \bullet C$ asociada a "Q" respecto de B^* es la matriz diagonal que en la diagonal principal tiene los autovalores de "A".

a) Verdadero ; b) Falso

16) Si $Q: V \mapsto \Re$ es una forma cuadrática y su matriz "A" asociada respecto de la base "B" de "V" tiene todos los autovalores distintos, para determinar una base ortonormal de cada subespacio de autovectores no hace falta tener ni idea del método de Graam-Schmidt.

a) Verdadero ; b) Falso

17) Si $Q: V \mapsto \Re$ es una forma cuadrática y su matriz "A" asociada respecto de la base "B" de "V" tiene algún autovalor λ repetido, para determinar una base ortonormal del subespacio de autovectores de λ puede ser necesario emplear el método de Graam-Schmidt.

a) Verdadero ; b) Falso

18) Siendo $Q: V \mapsto \Re$ una forma cuadrática, siempre es $Q(\bar{0}) = 0$.

a) Verdadero ; b) Falso

19) Una forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ con matriz asociada "A" respecto de la base "B" de "V" se dice definida positiva si $Q(\bar{x}) > 0, \forall \bar{x} \neq \bar{0}$. Sucede tal cosa sólo si todos los autovalores de "A" son positivos.

a) Verdadero ; b) Falso

20) Una forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ con matriz asociada "A" respecto de la base "B" de "V" se dice definida negativa si $Q(\bar{x}) < 0, \forall \bar{x} \neq \bar{0}$. Sucede tal cosa sólo si todos los autovalores de "A" son negativos.

a) Verdadero ; b) Falso

21) Una forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ con matriz asociada "A" respecto de la base "B" de "V" se dice semidefinida positiva si $Q(\bar{x}) \geq 0$. Sucede tal cosa sólo si todos los autovalores de "A" son no negativos.

a) Verdadero ; b) Falso

22) Una forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ con matriz asociada "A" respecto de la base "B" de "V" se dice semidefinida negativa si $Q(\bar{x}) \leq 0$. Sucede tal cosa sólo si todos los autovalores de "A" son no positivos.

a) Verdadero ; b) Falso

23) Una forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ con matriz asociada "A" respecto de la base "B" de "V" se dice indefinida si "V" hay vectores cuya imagen es positiva y también hay vectores con imagen negativa. Sucede tal cosa sólo si "A" tiene autovalores de distinto signo.

a) Verdadero ; b) Falso

24) Si en la diagonal principal de la matriz asociada a una forma cuadrática "Q" hay elementos de signo distinto, puedes apostar tranquilamente la vida a que "Q" es indefinida.

a) Verdadero ; b) Falso

25) Dos autovalores de la matriz "A" asociada a una forma cuadrática $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$:

a) La forma cuadrática es definida positiva
b) Si $|A| \neq 0$, la forma cuadrática es semidefinida positiva
c) Si $|A| = 0$, la forma cuadrática es semidefinida positiva

26) Dos autovalores de la matriz "A" asociada a una forma cuadrática $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ son $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = -7$:

a) La forma cuadrática es definida negativa
b) Si $|A| \neq 0$, la forma cuadrática es semidefinida negativa
c) Si $|A| \neq 0$, la forma cuadrática es semidefinida negativa

27) Dos autovalores de la matriz "A" asociada a una forma cuadrática $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$:

a) La forma cuadrática es definida positiva
b) Si $|A| < 0$, la forma cuadrática es indefinida
c) Si $|A| > 0$, la forma cuadrática es semidefinida positiva

28) La forma cuadrática $Q(x;y;z) = 2.y^2 + 2.x.z + 2.y.z$ es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida positiva ; c) Indefinida

29) La forma cuadrática $Q(x;y;z) = 5.x^2 - 2.y^2 + 2.x.z + 2.y.z$ es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida positiva
c) Indefinida

30) Sea $A_{n\times n}$ la matriz de una forma cuadrática definida negativa, siendo $|A| = 5$.

a) "n" es par ; b) "n" es impar
c) "n" puede ser par o impar

31) La forma cuadrática $Q(x;y;z) = (x - 2.y)^2 + 5.z^2$ es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida positiva
c) Indefinida

32) Si el determinante de la matriz "A" asociada a la forma cuadrática $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ es 2, la forma cuadrática puede ser:

a) Indefinida o definida negativa
b) Definida positiva o semidefinida positiva
c) Indefinida o definida positiva

33) Sea $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ una FC tal que $Q(1;0;2) = 6$ y $Q(1;0;3) = 0$.

a) Con estos datos no puede clasificarse
b) Es semidefinida positiva ; c) Es definida positiva

34) Sea $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ una FC con matriz asociada singular y tal que $Q(1;0;2) = -6$.

a) "Q" es semidefinida positiva
b) "Q" es definida positiva ; c) "Q" no es definida

35) La forma cuadrática $Q(x;y;z) = x^2+2.y^2+k.z^2+2.x.y+2.x.z$ es semidefinida si:

a) $k = 0$; b) $k = 2$; c) $k \le 0$

36) Si una forma cuadrática "Q" tiene asociada la matriz regular "A", sobre la FC de matriz asociada A^2 puede decirse que:

a) Es definida positiva
b) Puede ser semidefinida positiva
c) Nada se sabe de su signo

37) Si la forma cuadrática "Q" tiene asociada la matriz "A", sobre la FC cuya matriz asociada es A^2 puede decirse que:

a) Es definida positiva
b) Puede ser semidefinida negativa
c) No es indefinida

38) Si la forma cuadrática semidefinida positiva "Q" tiene asociada la matriz "A", la FC de matriz asociada A^2 es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida positiva
c) Semidefinida negativa

39) Si la forma cuadrática definida negativa "Q" tiene asociada la matriz "A", la forma cuadrática de matriz asociada A^2 es:

a) Definida positiva ; b) Definida negativa
c) Semidefinida negativa

40) Si la forma cuadrática semidefinida negativa "Q" tiene asociada la matriz "A", la FC de matriz asociada A^2 es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida positiva

c) Semidefinida negativa

41) Si la forma cuadrática indefinida "Q" tiene asociada la matriz "A", la forma cuadrática de matriz asociada A^2 es:

a) Indefinida

b) Semidefinida positiva o definida positiva

c) Definida positiva

42) Si la forma cuadrática definida positiva "Q" tiene asociada la matriz "A", la forma cuadrática de matriz asociada A^3 es:

a) Definida positiva ; b) Semidefinida negativa

c) Semidefinida positiva

43) Si la forma cuadrática definida "Q" tiene asociada la matriz "A", la forma cuadrática de matriz asociada A^3 es:

a) Definida ; b) Semidefinida ; c) Indefinida

44) La matriz "A" asociada a una forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tiene un autovalor doble λ_1 y otro simple λ_2. Podría ser:

a) $L(\lambda_1) = \{(\theta+\mu;\theta;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$ y $L(\lambda_2) = \{(\delta;\delta;0),\ \forall\,\delta\in\Re\}$

b) $L(\lambda_1) = \{(\theta;\theta;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$ y $L(\lambda_2) = \{(\delta;\delta;0),\ \forall\,\delta\in\Re\}$

c) $L(\lambda_1) = \{(\mu;\theta;\mu),\ \forall\,\theta,\mu\in\Re\}$ y $L(\lambda_2) = \{(\delta;0;-\delta),\ \forall\,\delta\in\Re\}$

45) Indique cuál podría ser el polinomio característico de la matriz "A" asociada a una forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$.

a) $-\lambda^3-\lambda^2-\lambda$; b) $-\lambda^3-4.\lambda$; c) $\lambda^2-4.\lambda$

d) Ninguno de los anteriores

46) Indique cuál podría ser el polinomio característico de la matriz "A" asociada a una forma cuadrática semidefinida.

a) $-\lambda^3-\lambda^2+3$; b) $-\lambda^3+4.\lambda-5$; c) $-\lambda^3+\lambda+7$

d) Ninguno de los anteriores

47) Si "A" es la matriz asociada a una forma cuadrática definida positiva $Q:\Re^n \mapsto \Re$, la forma cuadrática Q_1 que tiene asociada la matriz $(-A)^{2.n+1}$ es:

a) Definida positiva ; b) Indefinida ; c) Definida negativa

48) Si "H" es la matriz asociada a la forma cuadrática definida negativa $Q_1:\Re^n \mapsto \Re$ y "T" es la matriz asociada a la forma cuadrática definida positiva $Q_2:\Re^n \mapsto \Re$, la forma cuadrática "Q" de matriz asociada $H-T$ es:

a) Definida positiva ; b) Indefinida

c) Definida negativa

49) Sea "A" la matriz asociada a la forma cuadrática $Q:\Re^2 \mapsto \Re$, siendo $|A| < 0$.

a) "Q" es definida negativa
b) "Q" es indefinida
c) "Q" puede ser definida negativa o indefinida

50) Sea "A" la matriz asociada a la forma cuadrática $Q:\Re^4 \mapsto \Re$, siendo $|A| < 0$.

a) "Q" es definida negativa
b) "Q" es indefinida
c) "Q" puede ser definida negativa o indefinida

51) Sea "A" la matriz asociada a la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$, siendo $|A| < 0$.

a) "Q" es definida negativa
b) "Q" es indefinida
c) "Q" puede ser definida negativa o indefinida

52) Sea "Q" una FC con matriz asociada "A" de orden impar y tal que $|A| > 0$.

a) "Q" es definida positiva
b) "Q" no puede ser indefinida
c) "Q" no puede ser definida negativa

53) Sea "Q" una FC con matriz asociada idempotente.

a) "Q" es definida positiva
b) "Q" es semidefinida positiva
c) "Q" no puede ser indefinida

54) Siendo "H" la matriz asociada a la FC semidefinida positiva $Q_1:\Re^n \mapsto \Re$, sea "Q" la FC de matriz asociada $H + 2 \bullet I$.

a) "Q" es semidefinida positiva
b) "Q" es definida positiva
c) A priori no puede saberse el signo de "Q"

55) Si "H" es la matriz asociada a la FC definida negativa Q_1, la forma cuadrática "Q" de matriz asociada H^{-1} es:

a) Definida positiva
b) Indefinida
c) Definida negativa

56) Sea "H" una matriz simétrica.

a) $\exists P$ ortogonal tal que $P^t \bullet A \bullet P = D$, con "D" diagonal
b) $\exists P$ singular tal que $P^t \bullet A \bullet P = D$, con "D" diagonal
c) $\exists P$ simétrica tal que $P^t \bullet A \bullet P = D$, con "D" diagonal

57) Sea $Q: V \mapsto \Re$ una FC y "S" un subespacio de "V".

- "Q" es definida positiva en "S" si $Q(\bar{x}) > 0,\ \forall \bar{x} \in S\ \ (\bar{x} \neq \bar{0})$.
- "Q" es definida negativa en "S" si $Q(\bar{x}) < 0,\ \forall \bar{x} \in S\ \ (\bar{x} \neq \bar{0})$.
- "Q" es semidefinida positiva en "S" si $Q(\bar{x}) \geq 0,\ \forall \bar{x} \in S$.
- "Q" es semidefinida negativa en "S" si $Q(\bar{x}) \leq 0,\ \forall \bar{x} \in S$.
- "Q" es indefinida en "S" si en "S" hay vectores que tienen imagen > 0 y también hay vectores que tienen imagen < 0.

a) Verdadero ; b) Falso

58) Para clasificar la forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ restringida al subespacio $S \subset V$ basta estudiar el signo de la imagen de un vector genérico de "S".

a) Verdadero ; b) Falso

59) Restringida al al subespacio

$$S = \left\{(x_1;x_2;x_3) \in \Re^3\ /\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$$

la forma cuadrática $Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3$, es:

a) Definida positiva
b) Definida negativa
c) Indefinida

60) Restringida al subespacio

$$S = \left\{(x;y;z) \in \Re^3\ /\ x - y + z = 0,\ x + y = 0\right\}$$

la forma cuadrática $Q(\bar{u}) = 2.x.y + 2.x.z + 2.y.z$, es:

a) Definida positiva ; b) Definida negativa
c) Indefinida

61) Si $Q: V \mapsto \Re$ es una forma cuadrática definida positiva, es definida positiva en todo subespacio de "V".

a) Verdadero ; b) Falso

62) Si $Q: V \mapsto \Re$ es una forma cuadrática definida negativa, es definida negativa en todo subespacio de "V".

a) Verdadero ; b) Falso

63) Una forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ semidefinida positiva se restringe al subespacio $S \subset V$. Señale la falsa:

a) En "S" es definida positiva o semidefinida positiva
b) En "S" puede ser indefinida
c) En "S" no es definida negativa ni semidefinida negativa

64) Una forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ semidefinida negativa se restringe al subespacio $S \subset V$. Señale la falsa:

a) En "S" es definida negativa o semidefinida negativa
b) En "S" no es indefinida
c) En "S" no puede ser semidefinida negativa

65) Una forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ indefinida se restringe al subespacio $S \subset V$. Señale la falsa:

a) En "S" puede ser definida ; b) En "S" es indefinida

c) En "S" no puede ser semidefinida

66) La forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ es definida positiva en el subespacio $S \subset V$. Señale la falsa:

a) En "V" puede ser definida positiva o semidefinida positiva

b) En "V" puede ser indefinida

c) En "V" puede ser definida negativa o semidefinida negativa

67) La forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ es definida negativa en el subespacio $S \subset V$. Señale la falsa:

a) En "V" puede ser definida positiva o semidefinida positiva

b) En "V" puede ser indefinida

c) En "V" es definida negativa o semidefinida negativa

68) La forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ es semidefinida positiva en el subespacio $S \subset V$. Señale la falsa:

a) En "V" puede ser definida positiva o semidefinida positiva

b) En "V" no puede ser indefinida

c) En "V" no es definida negativa ni semidefinida negativa

69) La forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ es semidefinida negativa en el subespacio $S \subset V$. Señale la falsa:

a) En "V" puede ser definida positiva o semidefinida positiva

b) En "V" puede ser indefinida

c) En "V" puede ser definida negativa o semidefinida negativa

70) La forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ es indefinida en el subespacio $S \subset V$. Señale la falsa:

a) En "V" no puede ser definida ; b) En "V" es indefinida

c) En "V" puede ser semidefinida

71) Sea $Q(x;y;z) = (-1)^{\alpha}.x^2 + z^2 + 2.\alpha.x.y + 2.\alpha.y.z$, donde "$\alpha$" es un natural impar. ¿Cuál es el signo de "Q" en el subespacio $S = \{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, y = 0\}$?

a) Indefinida ; b) Definida positiva

c) Definida negativa

72) Si $Q(x_1;x_2;x_3) = m.x_1^2 + n.x_2^2 + 3.x_3^2$ es indefinida, puede ser:

a) $m \leq 0$ y $n < 0$; b) $m > 0$ y $n = 0$; c) $m \geq 0$ y $n \geq 0$

73) Si "A" es una matriz simétrica regular y "B" es una matriz simétrica singular, de la forma cuadrática "Q" cuya matriz asociada es "A•B" puede afirmarse:

a) Tiene igual signo que "A" ; b) Tiene igual signo que "B"

c) No es definida positiva

74) Si la forma cuadrática $Q: V \mapsto \Re$ es semidefinida positiva en el subespacio $S \subset V$, en el subespacio $H \subset S$ sucede que:

a) "Q" es definida positiva ; b) "Q" es semidefinida positiva
c) "Q" puede ser definida positiva

76) Toda forma cuadrática puede clasificarse mediante los autovalores de su matriz asociada, pero no siempre mediante la sucesión de menores principales.

a) Verdadero ; b) Falso

77) $Q(x;y;z) = 3.x^2 + 2.y^2 + 4.z^2 - 2.x.y + 2.y.z$ es:

a) Definida positiva ; b) Definida negativa
c) Semidefinida negativa

78) La forma cuadrática $Q(x;y;z) = x^2 + y^2 + 2.x.z + 2.y.z$ es:

a) Indefinida ; b) Definida positiva
c) Semidefinida positiva

79) La forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ es:

a) Indefinida ; b) Definida positiva
c) Semidefinida positiva

80) La forma cuadrática $Q(x;y) = (k^2 - 1).x^2 - y^2 + 2.x.y$ restringida al subespacio $k.x - y = 0$ es:

a) Semidefinida positiva si $k < 1/2$
b) Definida positiva si $k > 1/2$
c) Las anteriores son falsas

81) La forma cuadrática semidefinida $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ es tal que $Q(1;1;0) = 0$. Al restringirla al subespacio $x - y = 0$ es:

a) Definida ; b) Indefinida ; c) Semidefinida

82) La FC indefinida $Q: \Re^3 \mapsto \Re$ es tal que $Q(1;0;2) = 6$. Al restringirla al subespacio $2.x - z = 0$:

a) Es definida positiva o semidefinida positiva
b) Es indefinida ; c) No puede ser definida negativa

83) Si $Q(x;y;z) = 3.x^2 + 2.y^2 + 7.z^2 + 2.x.y + 2.x.z - 6.y.z$ no es definida en el subespacio "S", en "S" es:

a) Indefinida
b) Semidefinida positiva
c) Semidefinida negativa

84) Al restringir $(x - 2.y)^2 + 5.z^2$ a un subespacio, puede ser:

a) De cualquier signo
b) Sólo definida positiva o semidefinida positiva
c) Sólo definida negativa o semidefinida negativa

86) Si "V" es un espacio vectorial de dimensión "n" y $Q : V \mapsto \Re$ la FC que respecto de la base "B" tiene asociada la matriz "A", podemos obtener una base de "V" respecto de la cual la matriz asociada a "Q" es diagonal trabajando del siguiente modo: siendo I_n la matriz unidad de igual orden que "A", formamos la matriz $A|I_n$ y hacemos transformaciones elementales de filas y las mismas transformaciones elementales de columnas hasta transformar "A" en una matriz diagonal; así, la matriz $A|I_n$ se habrá convertido en $A_d|P^t$, donde A_d es la matriz diagonal buscada y P^t es la traspuesta de la matriz asociada al cambio de base que debe hacerse en "V" para que A_d sea la matriz asociada a "Q".

a) Verdadero ; b) Falso

87) Mediante transformaciones elementales, siempre puede determinarse una base de "V" tal que la diagonal principal de la matriz diagonal asociada a "Q" respecto de dicha base no contiene números distintos de "1", "0" y "–1".

a) Verdadero ; b) Falso

88) Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y $Q : V \mapsto \Re$ una forma cuadrática definida sobre "V". Consideremos una expresión reducida de "Q":

$$Q(\overline{x}) = a_{11}.x_1^2 + a_{22}.x_2^2 + ... + a_{nn}.x_n^2 \quad (I)$$

donde algunos de los a_{ii} pueden ser nulos.

- Se llama rango de "Q" al número de coeficientes no nulos que hay en (I).
- Se llama índice de "Q" al número de coeficientes positivos que hay en (I).
- Se llama signatura de "Q" a la diferencia entre el rango y el índice.

a) Verdadero ; b) Falso

89) Sea "V" un espacio vectorial de dimensión "n" y $Q : V \mapsto \Re$ una forma cuadrática definida sobre "V".

Rango de "Q"	Índice de "Q"	Clasificación de "Q"
n	n	Definida positiva
n	0	Definida negativa
$p < n$	$p < n$	Semidefinida positiva
$p < n$	0	Semidefinida negativa
Otros casos		Indefinida

a) Verdadero ; b) Falso

Tema 10
Producto escalar

10.01 Producto escalar de vectores
10.02 Espacio vectorial euclídeo
10.03 Módulo de un vector
10.04 Ángulo de dos vectores
10.05 Vectores ortogonales
10.06 Subespacios ortogonales
10.07 Base ortogonal
10.08 Base ortonormal
10.09 Coordenadas contravariantes y covariantes
10.10 Base recíproca

10.1 PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Sea "V" un espacio vectorial y $V \times V = \{(\overline{x};\overline{y}) / \overline{x},\overline{y} \in V\}$ el producto cartesiano de "V" por sí mismo; o sea, cada elemento de $V \times V$ es un par ordenado de vectores de "V".

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{f} & \Re \\ (\overline{x};\overline{y}) & \longrightarrow & f(\overline{x};\overline{y}) \end{array}$$

Llamamos producto escalar o producto interno a toda aplicación $f: V \times V \mapsto \Re$ que satisfaga las siguientes condiciones:

1) Conmutatividad: $f(\overline{x};\overline{y}) = f(\overline{y};\overline{x}),\ \forall\ \overline{x},\overline{y} \in V$.

2) Bilinealidad: $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V$ y $\forall \alpha,\beta \in \Re$ se cumple que

$$\text{a) } f(\alpha \bullet \overline{x} + \beta \bullet \overline{y} ; \overline{z}) = \alpha.f(\overline{x} ; \overline{z}) + \beta.f(\overline{y} ; \overline{z})$$
$$\text{b) } f(\overline{x} ; \alpha \bullet \overline{y} + \beta \bullet \overline{z}) = \alpha.f(\overline{x} ; \overline{y}) + \beta.f(\overline{x} ; \overline{z})$$

3) Positividad: $f(\overline{x};\overline{x}) > 0,\ \forall \overline{x} \neq \overline{0}$.

Dicho de otro modo: un producto escalar "f" es una forma bilineal (condición 2)) simétrica (condición 1)) cuya forma cuadrática asociada sea definida positiva (condición 3)).

Si $f: V \times V \mapsto \Re$ es un producto escalar, se suele escribir $\overline{x} \bullet \overline{y}$ para denotar al número real $f(\overline{x};\overline{y})$ que "f" asocia al par ordenado $(\overline{x};\overline{y}) \in V \times V$.

En 6.1 dijimos que el producto escalar de los vectores $\overline{x} = (x_1; .... ; x_n)$ e $\overline{y} = (y_1; .... ; y_n)$ es el número real $\overline{x} \bullet \overline{y} = x_1.y_1 + ... + x_n.y_n$. Naturalmente, aunque en aquél momento no lo sabíamos, estábamos ante la expresión de la más tontorrona forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es definida positiva: su matriz asociada es la matriz unidad.

$$\overline{x} \bullet \overline{y} = x_1.y_1 + x_2.y_2 + ... + x_n.y_n =$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ : & : & ::: & : \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

10.2 ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Se llama **espacio vectorial euclídeo** a todo espacio vectorial en el que se haya definido un **producto escalar.**

FONEMATO 10.2.1

Siendo la base de referencia en $\Re^2$ la canónica, sea $f:\Re^2\times\Re^2\mapsto\Re$ tal que:

$$f(\bar{x};\bar{y})=5.x_1.y_1+2.x_1.y_2+2.x_2.y_1+3.x_2.y_2$$

Demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a $\Re^2$ en un espacio vectorial euclídeo.

SOLUCIÓN

• Trivialmente, si $f(\bar{x};\bar{y})=10.x_1.y_1+14.x_1.y_2+14.x_2.y_1+20.x_2.y_2$, es:

$$f(\bar{x};\bar{y})=\underbrace{\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}}_{\bar{x}^t}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}}_{G}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}}_{\bar{y}}=\bar{x}^t\bullet G\bullet\bar{y}$$

el elemento g_{ij} de "G" es el coeficiente del producto $x_i.y_j$

• **Latiguillo:** para demostrar que "f" es un producto escalar debemos demostrar que se satisfacen las siguientes condiciones:

1) Conmutatividad: $f(\bar{x};\bar{y})=f(\bar{y};\bar{x}),\ \forall\ \bar{x},\bar{y}\in V$.

2) Bilinealidad: $\forall\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in V$ y $\forall\alpha,\beta\in\Re$ se cumple que

$$\text{a) } f(\alpha\bullet\bar{x}+\beta\bullet\bar{y};\bar{z})=\alpha.f(\bar{x};\bar{z})+\beta.f(\bar{y};\bar{z})$$
$$\text{b) } f(\bar{x};\alpha\bullet\bar{y}+\beta\bullet\bar{z})=\alpha.f(\bar{x};\bar{y})+\beta.f(\bar{x};\bar{z})$$

3) Positividad: $f(\bar{x};\bar{x})>0,\ \forall\bar{x}\neq\bar{0}$.

Veamos:

1) Conmutatividad: $f(\bar{x};\bar{y})=\bar{x}^t\bullet G\bullet\bar{y}=\bar{y}^t\bullet G\bullet\bar{x}=f(\bar{y};\bar{x})$

pues "G" es simétrica

2) Bilinealidad:

a)
$$f(\alpha\bullet\bar{x}+\beta\bullet\bar{y};\bar{z})=(\alpha\bullet\bar{x}+\beta\bullet\bar{y})^t\bullet G\bullet\bar{z}$$
$$=(\alpha\bullet\bar{x})^t\bullet G\bullet\bar{z}+(\beta\bullet\bar{y})^t\bullet G\bullet\bar{z}=$$
$$=\alpha.(\bar{x}^t\bullet G\bullet\bar{z})+\beta.(\bar{y}^t\bullet G\bullet\bar{z})=\alpha.f(\bar{x};\bar{z})+\beta.f(\bar{y};\bar{z})$$

$\bar{x}^t\bullet G\bullet\bar{z}=f(\bar{x};\bar{z})$; $\bar{y}^t\bullet G\bullet\bar{z}=f(\bar{y};\bar{z})$

b)
$$f(\bar{x};\alpha\bullet\bar{y}+\beta\bullet\bar{z})=\bar{x}^t\bullet G\bullet(\alpha\bullet\bar{y}+\beta\bullet\bar{z})=$$
$$=\bar{x}^t\bullet G\bullet(\alpha\bullet\bar{y})+\bar{x}^t\bullet G\bullet(\beta\bullet\bar{z})=$$
$$=\alpha.(\bar{x}^t\bullet G\bullet\bar{y})+\beta.(\bar{x}^t\bullet G\bullet\bar{z})=\alpha.f(\bar{x};\bar{y})+\beta.f(\bar{x};\bar{z})$$

$\bar{x}^t\bullet G\bullet\bar{y}=f(\bar{x};\bar{y})$; $\bar{x}^t\bullet G\bullet\bar{z}=f(\bar{x};\bar{z})$

3) Positividad: $f(\bar{x};\bar{x})=\bar{x}^t\bullet G\bullet\bar{x}>0$

siempre que $\bar{x}\neq\bar{0}$, pues los dos autovalores de "G" son positivos

FONEMATO 10.2.2

Siendo $f: M_{2\times 2}\times M_{2\times 2}\mapsto \Re$ tal que $f(A;B)=tr.(A\bullet B^t)$, demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a $M_{2\times 2}$ en un espacio vectorial euclídeo.

SOLUCIÓN

• Siendo $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}$, es:

$$f(A;B)=tr.(A\bullet B^t)=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3+a_4.b_4=$$

$$\boxed{A\bullet B^t=\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} b_1 & b_3\\ b_2 & b_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1.b_1+a_2.b_2 & \text{pasamos}\\ \text{pasamos} & a_3.b_3+a_4.b_4\end{bmatrix}}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}}_{\bar{x}_A^t}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{G}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_3\end{bmatrix}}_{\bar{x}_B}=\bar{x}_A^t\bullet G\bullet\bar{x}_B$$

• **Latiguillo:** para demostrar que "f" es un producto escalar debemos demostrar que se satisfacen las siguientes condiciones:

1) Conmutatividad: $f(A;B)=f(B;A),\ \forall A,B\in M_{2\times 2}$.

2) Bilinealidad: $\forall A,B,C\in M_{2\times 2}$ y $\forall \alpha,\beta\in\Re$ se cumple que

$$\text{a) } f(\alpha\bullet A+\beta\bullet B;C)=\alpha.f(A;C)+\beta.f(B;C)$$
$$\text{b) } f(A;\alpha\bullet B+\beta\bullet C)=\alpha.f(A;B)+\beta.f(A;C)$$

3) Positividad: $f(A;A)>0,\ \forall A\neq\bar{0}$.

Veamos:

1) Conmutatividad: $f(A;B)=\bar{x}_A^t\bullet G\bullet\bar{x}_B=\bar{x}_B^t\bullet G\bullet\bar{x}_A=f(B;A)$

$\boxed{\text{pues "G" es simétrica}}$

2) Bilinealidad:

a)
$$f(\alpha\bullet A+\beta\bullet B;C)=(\alpha\bullet\bar{x}_A+\beta\bullet\bar{x}_B)^t\bullet G\bullet\bar{x}_C$$
$$=(\alpha\bullet\bar{x}_A)^t\bullet G\bullet\bar{z}+(\beta\bullet\bar{x}_B)^t\bullet G\bullet\bar{x}_C=$$
$$=\alpha.(\bar{x}_A^t\bullet G\bullet\bar{x}_C)+\beta.(\bar{x}_b^t\bullet G\bullet\bar{x}_C)=\alpha.f(A;C)+\beta.f(B;C)$$

$$\boxed{\bar{x}_A^t\bullet G\bullet\bar{x}_C=f(A;C)\ ;\ \bar{x}_B^t\bullet G\bullet\bar{x}_C=f(B;C)}$$

b)
$$f(A;\alpha\bullet B+\beta\bullet C)=\bar{x}_A^t\bullet G\bullet(\alpha\bullet\bar{x}_B+\beta\bullet\bar{x}_C)=$$
$$=\bar{x}_A^t\bullet G\bullet(\alpha\bullet\bar{x}_B)+\bar{x}^t\bullet G\bullet(\beta\bullet\bar{x}_C)=$$
$$=\alpha\ .(\bar{x}_A^t\bullet G\bullet\bar{x}_B)+\beta.(\bar{x}_A^t\bullet G\bullet\bar{x}_C)=\alpha.f(A;B)+\beta.f(A;C)$$

$$\boxed{\bar{x}_A^t\bullet G\bullet\bar{x}_B=f(A;B)\ ;\ \bar{x}_A^t\bullet G\bullet\bar{x}_C=f(A;C)}$$

3) Positividad: $f(A;A)=\bar{x}_A^t\bullet G\bullet\bar{x}_A>0$

$\boxed{\text{siempre que } A\neq\bar{0}\text{, pues los autovalores de "G" son positivos}}$

FONEMATO 10.2.3

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 2 y $B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ la base de referencia en él. Sean $\overline{x},\overline{y}\in V$ tales que $\overline{x}=x_1\bullet\overline{u}_1+x_2\bullet\overline{u}_2$, $\overline{y}=y_1\bullet\overline{u}_1+y_2\bullet\overline{u}_2$.

Sea $f:V\times V\mapsto\Re$ tal que $f(\overline{x};\overline{y})=10.x_1.y_1+14.x_1.y_2+14.x_2.y_1+20.x_2.y_2$

Demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a "V" en un espacio vectorial euclídeo.

SOLUCIÓN

- Trivialmente, si $f(\overline{x};\overline{y})=10.x_1.y_1+14.x_1.y_2+14.x_2.y_1+20.x_2.y_2$, es:

$$f(\overline{x};\overline{y})=\underbrace{\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}}_{\overline{x}^t}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}10 & 14\\ 14 & 20\end{bmatrix}}_{G}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}}_{\overline{y}}=\overline{x}^t\bullet G\bullet\overline{y}$$

el elemento g_{ij} de "G" es el coeficiente del producto $x_i.y_j$

- Latiguillo: para demostrar que "f" es un producto escalar debemos demostrar que "f" es una **forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es definida positiva;** o sea, demostrar que "f" satisface las siguientes condiciones:

  1) Conmutatividad: $f(\overline{x};\overline{y})=f(\overline{y};\overline{x}),\ \forall\,\overline{x},\overline{y}\in V$.

  2) Bilinealidad: $\forall\,\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in V$ y $\forall\,\alpha,\beta\in\Re$ se cumple que

  $$\text{a) } f(\alpha\bullet\overline{x}+\beta\bullet\overline{y};\overline{z})=\alpha.f(\overline{x};\overline{z})+\beta.f(\overline{y};\overline{z})$$
  $$\text{b) } f(\overline{x};\alpha\bullet\overline{y}+\beta\bullet\overline{z})=\alpha.f(\overline{x};\overline{y})+\beta.f(\overline{x};\overline{z})$$

  3) Positividad: $f(\overline{x};\overline{x})>0,\ \forall\,\overline{x}\neq\overline{0}$.

  Veamos:

  1) Conmutatividad: $f(\overline{x};\overline{y})=\overline{x}^t\bullet G\bullet\overline{y}=\overline{y}^t\bullet G\bullet\overline{x}=f(\overline{y};\overline{x})$

  pues "G" es simétrica

  2) Bilinealidad:

  a)
  $$f(\alpha\bullet\overline{x}+\beta\bullet\overline{y};\overline{z})=(\alpha\bullet\overline{x}+\beta\bullet\overline{y})^t\bullet G\bullet\overline{z}$$
  $$=(\alpha\bullet\overline{x})^t\bullet G\bullet\overline{z}+(\beta\bullet\overline{y})^t\bullet G\bullet\overline{z}=$$
  $$=\alpha.(\overline{x}^t\bullet G\bullet\overline{z})+\beta.(\overline{y}^t\bullet G\bullet\overline{z})=\alpha.f(\overline{x};\overline{z})+\beta.f(\overline{y};\overline{z})$$

  $\overline{x}^t\bullet G\bullet\overline{z}=f(\overline{x};\overline{z})$; $\overline{y}^t\bullet G\bullet\overline{z}=f(\overline{y};\overline{z})$

  b)
  $$f(\overline{x};\alpha\bullet\overline{y}+\beta\bullet\overline{z})=\overline{x}^t\bullet G\bullet(\alpha\bullet\overline{y}+\beta\bullet\overline{z})=$$
  $$=\overline{x}^t\bullet G\bullet(\alpha\bullet\overline{y})+\overline{x}^t\bullet G\bullet(\beta\bullet\overline{z})=$$
  $$=\alpha.(\overline{x}^t\bullet G\bullet\overline{y})+\beta.(\overline{x}^t\bullet G\bullet\overline{z})=\alpha.f(\overline{x};\overline{y})+\beta.f(\overline{x};\overline{z})$$

  $\overline{x}^t\bullet G\bullet\overline{y}=f(\overline{x};\overline{y})$; $\overline{x}^t\bullet G\bullet\overline{z}=f(\overline{x};\overline{z})$

Hemos hecho el pardillo con la exigencia b): siempre que "f" sea conmutativa y se cumpla la exigencia a), podemos apostar tranquilamente la vida a que también se cumple la exigencia b)... ¡nunca perderemos la apuesta!

3) Positividad:

$$f(\bar{x};\bar{x}) = \bar{x}^t \bullet G \bullet \bar{x} > 0$$

siempre que $\bar{x} \neq \bar{0}$, pues los dos autovalores de "G" son positivos

En definitiva, la ley "f" es un producto escalar que convierte a "V" en un espacio vectorial euclídeo.

Nota 1

- De la matriz "G" se dice que es la matriz asociada al producto escalar "f" respecto de la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. También se dice que "G" es la **matriz de Graam** de "f" respecto de la base de referencia $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ elegida en "V". Así, si nos dicen que "V" es un espacio vectorial euclídeo cuya matriz de Graam es "G", nos están diciendo que en "V" se ha definido una forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es definida positiva y que "G" es la matriz asociada a dicha forma bilineal respecto de la base de referencia elegida en "V".
- Como sabemos, el elemento g_{ij} de "G" coincide con $f(\bar{u}_i;\bar{u}_j) \equiv \bar{u}_i \bullet \bar{u}_j$.

  Así, en nuestro caso, siendo

$$\bar{u}_1 = 1 \bullet \bar{u}_1 + 0 \bullet \bar{u}_2 = (1;0) \ ; \ \bar{u}_2 = 0 \bullet \bar{u}_1 + 1 \bullet \bar{u}_2 = (0;1)$$

  y siendo $f(\bar{x};\bar{y}) \equiv \bar{x} \bullet \bar{y} = 10.x_1.y_1 + 14.x_1.y_2 + 14.x_2.y_1 + 20.x_2.y_2$, es:

$$f(\bar{u}_1;\bar{u}_1) \equiv (1;0) \bullet (1;0) = 10.1.1 + 14.1.0 + 14.0.1 + 20.0.0 = 10 = g_{11}$$
$$f(\bar{u}_1;\bar{u}_2) \equiv (1;0) \bullet (0;1) = 10.1.0 + 14.1.1 + 14.0.0 + 20.0.1 = 14 = g_{12}$$
$$f(\bar{u}_2;\bar{u}_1) \equiv (0;1) \bullet (1;0) = 14 \equiv g_{12}, \text{ debido a la conmutatividad de "f"}$$
$$f(\bar{u}_2;\bar{u}_2) \equiv (0;1) \bullet (0;1) = 10.0.0 + 14.0.1 + 14.1.0 + 20.1.1 = 20 = g_{22}$$

Nota 2

En lo que se refiere a los cambios de base, cualquier producto escalar se comporta como forma bilineal que es: si "G" es la matriz de Graam respecto de la base "B", la matriz de Graam respecto de la base B^* es $C^t \bullet G \bullet C$, siendo "C" la matriz asociada al cambio de base $B \to B^*$ (las columnas de "C" son las coordenadas respecto de la base "B" de los vectores de la base B^*).

Por ejemplo, siendo $B^* = \{\bar{v}_1 = 2 \bullet \bar{u}_1 + 3 \bullet \bar{u}_2, \ \bar{v}_2 = 4 \bullet \bar{u}_1 + 5 \bullet \bar{u}_2\}$ otra base de "V", la matriz "C" asociada al cambio de base $B \to B^*$ es $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Así, si los vectores de "V" se identifican mediante sus coordenadas respecto de la base B^*, la expresión del producto escalar "f" respecto de la base B^* es:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^t \bullet \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_{C^t \bullet G \bullet C} \bullet \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix}$$

coordenadas de $\bar{x}$ respecto de B^* — coordenadas de $\bar{y}$ respecto de B^*

FONEMATO 10.2.4

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2. Sea $B = \left\{ \bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = x, \bar{k}_3 = x^2 \right\}$ la base de referencia en "V".

Sea la aplicación $f : V \times V \mapsto \mathfrak{R}$ tal que

$$f(p(x);q(x)) = p(1).q(1) + p(2).q(2) + p(3).q(3)$$

Demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a "V" en un espacio vectorial euclídeo, determinando la matriz de Graam respecto de la base "B".

SOLUCIÓN

- Latiguillo: para demostrar que "f" es un producto escalar debemos demostrar que "f" es una forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es definida positiva; o sea, demostrar que "f" satisface las siguientes condiciones:

  1) Conmutatividad: $f(p(x);q(x)) = f(q(x);p(x)),\ \forall\, p(x),\ q(x) \in V$.

  2) Bilinealidad: $\forall\, p(x),\ q(x),\ r(x) \in V$ y $\forall\, \alpha,\beta \in \mathfrak{R}$ se cumple que

  $$\text{a) } f(\alpha.p(x) + \beta.q(x)\,;\, r(x)) = \alpha.f(p(x)\,;\, r(x)) + \beta.f(q(x)\,;\, r(x))$$
  $$\text{b) } f(p(x)\,;\, \alpha.q(x) + \beta.r(x)) = \alpha.f(p(x)\,;\, q(x)) + \beta.f(p(x)\,;\, r(x))$$

  3) Positividad: $f(p(x);p(x)) > 0,\ \forall\, p(x) \neq 0$.

Veamos:

1) Conmutatividad:

Si $f(p(x);q(x)) = p(1).q(1) + p(2).q(2) + p(3).q(3)$, es:

$$f(q(x);p(x)) = q(1).p(1) + q(2).p(2) + q(3).p(3)$$

Resulta obvio que $f(p(x);q(x)) = f(q(x);p(x)),\ \forall\, p(x),\ q(x) \in V$.

2) Bilinealidad:

a)
$$f(\alpha.p(x) + \beta.q(x)\,;\, r(x)) =$$
$$= (\alpha.p(1) + \beta.q(1)).r(1) + (\alpha.p(2) + \beta.q(2)).r(2) + (\alpha.p(3) + \beta.q(3)).r(3) =$$
$$= \alpha.(p(1).r(1) + p(2).r(2) + p(3).r(3)) + \beta.(q(1).r(1) + q(2).r(2) + q(3).r(3)) =$$
$$= \alpha.f(p(x)\,;\, r(x)) + \beta.f(q(x)\,;\, r(x))$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p(1).r(1) + p(2).r(2) + p(3).r(3) = f(p(x)\,;\, r(x)) \\ q(1).r(1) + q(2).r(2) + q(3).r(3) = f(q(x)\,;\, r(x)) \end{array}}$$

b) Como "f" es conmutativa y se cumple a), se cumple b).

3) Positividad:

$$f(p(x);p(x)) = p(1).p(1)+p(2).p(2)+p(3).p(3) = (p(1))^2+(p(2))^2+(p(3))^2 > 0$$

- Es $(p(1))^2 + (p(2))^2 + (p(3))^2 \geq 0$, pues todos los sumandos son no negativos.
- Es $(p(1))^2 + (p(2))^2 + (p(3))^2 = 0$ sólo si $p(1) = p(2) = p(3) = 0$; y siendo $p(x) = \delta_1 + \delta_2.x + \delta_3.x^2$, es:

VENTANA

$$\begin{aligned} p(1) &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \\ p(2) &= \delta_1 + 2.\delta_2 + 4.\delta_3 \\ p(3) &= \delta_1 + 3.\delta_2 + 9.\delta_3 \end{aligned}$$

Por tanto, será $p(1) = p(2) = p(3) = 0$ sólo si

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 &= 0 \\ \delta_1 + 2.\delta_2 + 4.\delta_3 &= 0 \\ \delta_1 + 3.\delta_2 + 9.\delta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Como la matriz de coeficientes de (I) tiene determinante no nulo, el sistema sólo tiene la solución trivial $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Así, es $p(1) = p(2) = p(3) = 0$ sólo si $p(x)$ es el vector cero de "V".

En definitiva, por satisfacer las exigencias de conmutatividad, bilinealidad y positividad, la ley "f" es un producto escalar que convierte a "V" en un espacio vectorial euclídeo.

- Siendo "G" la matriz asociada a "f" **(matriz de Graam)** respecto de la base $B = \left\{ \bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = x, \bar{k}_3 = x^2 \right\}$, es $g_{ij} = f(\bar{k}_i ; \bar{k}_j)$:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix}$$

Si $\bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = x$ y $\bar{k}_3 = x^2$, es:

VENTANA

$$\bar{k}_1(1) = 1 \ ; \ \bar{k}_1(2) = 1 \ ; \ \bar{k}_1(3) = 1$$
$$\bar{k}_2(1) = 1 \ ; \ \bar{k}_2(2) = 2 \ ; \ \bar{k}_2(3) = 3$$
$$\bar{k}_3(1) = 1 \ ; \ \bar{k}_3(2) = 2^2 = 4 \ ; \ \bar{k}_3(3) = 3^2 = 9$$

Por tanto:

$$g_{11} = f(\bar{k}_1;\bar{k}_1) \equiv \bar{k}_1 \bullet \bar{k}_1 = \bar{k}_1(1).\bar{k}_1(1) + \bar{k}_1(2).\bar{k}_1(2) + \bar{k}_1(3).\bar{k}_1(3) = = 1.1 + 1.1 + 1.1 = 3$$

$$g_{12} = f(\bar{k}_1;\bar{k}_2) \equiv \bar{k}_1 \bullet \bar{k}_2 = \bar{k}_1(1).\bar{k}_2(1) + \bar{k}_1(2).\bar{k}_2(2) + \bar{k}_1(3).\bar{k}_2(3) = = 1.1 + 1.2 + 1.3 = 6 = g_{21}$$

$$g_{13} = f(\bar{k}_1;\bar{k}_3) \equiv \bar{k}_1 \bullet \bar{k}_3 = \bar{k}_1(1).\bar{k}_3(1) + \bar{k}_1(2).\bar{k}_3(2) + \bar{k}_1(3).\bar{k}_3(3) = = 1.1 + 1.4 + 1.9 = 14 = g_{31}$$

$$g_{22} = f(\bar{k}_2;\bar{k}_2) \equiv \bar{k}_2 \bullet \bar{k}_2 = \bar{k}_2(1).\bar{k}_2(1) + \bar{k}_2(2).\bar{k}_2(2) + \bar{k}_2(3).\bar{k}_2(3) = = 1.1 + 2.2 + 3.3 = 14$$

$$g_{23} = f(\bar{k}_2;\bar{k}_3) \equiv \bar{k}_2 \bullet \bar{k}_3 = \bar{k}_2(1).\bar{k}_3(1) + \bar{k}_2(2).\bar{k}_3(2) + \bar{k}_2(3).\bar{k}_3(3) = = 1.1 + 2.4 + 3.9 = 36 = g_{32}$$

$$g_{33} = f(\bar{k}_3;\bar{k}_3) \equiv \bar{k}_3 \bullet \bar{k}_3 = \bar{k}_3(1).\bar{k}_3(1) + \bar{k}_3(2).\bar{k}_3(2) + \bar{k}_3(3).\bar{k}_3(3) = = 1.1 + 4.4 + 9.9 = 98$$

FONEMATO 10.2.5

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2. Sea $B=\{\bar{k}_1=1, \bar{k}_2=x, \bar{k}_3=x^2\}$ la base de referencia en "V".

Sea la aplicación $f:V\times V\mapsto\Re$ tal que $f(p(x);q(x))=\int_0^1 p(x).q(x).dx$.

Demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a "V" en un espacio vectorial euclídeo, determinando la matriz de Graam respecto de la base "B" y la matriz de Graam respecto de la base B^*.

$$B^*=\{\bar{h}_1=2+3.x+4.x^2,\ \bar{h}_2=2.x-5.x^2,\ \bar{h}_3=6.x^2\}$$

SOLUCIÓN

- Latiguillo: para demostrar que "f" es un producto escalar debemos demostrar que "f" es una forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es definida positiva; o sea, demostrar que "f" satisface las siguientes condiciones:

 1) Conmutatividad: $f(p(x);q(x))=f(q(x);p(x)),\ \forall\, p(x), q(x)\in V$.

 2) Bilinealidad: $\forall\, p(x), q(x), r(x)\in V$ y $\forall\,\alpha,\beta\in\Re$ se cumple que

$$\text{a) } f(\alpha.p(x)+\beta.q(x)\,;r(x))=\alpha.f(p(x)\,;r(x))+\beta.f(q(x)\,;r(x))$$
$$\text{b) } f(p(x)\,;\alpha.q(x)+\beta.r(x))=\alpha.f(p(x)\,;q(x))+\beta.f(p(x)\,;r(x))$$

 3) Positividad: $f(p(x);p(x))>0,\ \forall\, p(x)\neq 0$.

 Veamos:

 1) Conmutatividad:

$$f(p(x);q(x))=\int_0^1 p(x).q(x).dx=\int_0^1 q(x).p(x).dx=f(q(x);p(x))$$

propiedad elemental de las integrales definidas

 2) Bilinealidad:

 a)
$$f(\alpha.p(x)+\beta.q(x)\,;r(x))=\int_0^1(\alpha.p(x)+\beta.q(x)).r(x).dx=$$
$$=\int_0^1(\alpha.p(x).r(x)+\beta.q(x).r(x)).dx=$$
$$=\alpha.\int_0^1 p(x).r(x).dx+\beta.\int_0^1 q(x).r(x)).dx=\alpha.f(p(x)\,;r(x))+\beta.f(q(x)\,;r(x))$$

$$\boxed{\int_0^1 p(x).r(x).dx=f(p(x)\,;r(x))\ ;\ \int_0^1 q(x).r(x)).dx=f(q(x)\,;r(x))}$$

 b) Como "f" es conmutativa y se cumple a), se cumple b).

 3) Positividad:

$$f(p(x);p(x))=\int_0^1 p(x).p(x).dx=\int_0^1(p(x))^2.dx>0$$

si p(x) no es el polinomio nulo, pues,
en tal caso, $(p(x))^2$ no toma valores negativos

 En definitiva, por satisfacer las exigencias de conmutatividad, bilinealidad y positividad, la ley "f" es un producto escalar que convierte a "V" en un espacio vectorial euclídeo.

- Siendo "G" la matriz asociada a "f" **(matriz de Graam)** respecto de la base $B=\{\bar{k}_1=1, \bar{k}_2=x, \bar{k}_3=x^2\}$, es $g_{ij}=f(\bar{k}_i;\bar{k}_j)\equiv \bar{k}_i \bullet \bar{k}_j$. Por tanto:

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

VENTANA

$$g_{11}=f(\bar{k}_1;\bar{k}_1)\equiv \bar{k}_1 \bullet \bar{k}_1=\int_0^1 (1).(1).dx=(x)_0^1=1$$

$$g_{12}=f(\bar{k}_1;\bar{k}_2)\equiv \bar{k}_1 \bullet \bar{k}_2=\int_0^1 (1).(x).dx=(x^2/2)_0^1=1/2=g_{21}$$

$$g_{13}=f(\bar{k}_1;\bar{k}_3)\equiv \bar{k}_1 \bullet \bar{k}_3=\int_0^1 (1).(x^2).dx=(x^3/3)_0^1=1/3=g_{31}$$

$$g_{22}=f(\bar{k}_2;\bar{k}_2)\equiv \bar{k}_2 \bullet \bar{k}_2=\int_0^1 (x).(x).dx=(x^3/3)_0^1=1/3$$

$$g_{23}=f(\bar{k}_2;\bar{k}_3)\equiv \bar{k}_2 \bullet \bar{k}_3=\int_0^1 (x).(x^2).dx=(x^4/4)_0^1=1/4=g_{32}$$

$$g_{33}=f(\bar{k}_3;\bar{k}_3)\equiv \bar{k}_3 \bullet \bar{k}_3=\int_0^1 (x^2).(x^2).dx=(x^5/5)_0^1=1/5$$

Así, si $\left\{\begin{matrix} p(x)=p_1\bullet\bar{k}_1+p_2\bullet\bar{k}_2+p_3\bullet\bar{k}_3=p_1+p_2.x+p_3.x^2 \\ q(x)=q_1\bullet\bar{k}_1+q_2\bullet\bar{k}_2+q_3\bullet\bar{k}_3=q_1+q_2.x+q_3.x^2 \end{matrix}\right\}$, su producto escalar es:

$$f(p(x);q(x))\equiv p(x)\bullet q(x)=\int_0^1 p(x).q(x).dx=$$

$$=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}\bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}}_{G}\bullet\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}=$$

$$=p_1.q_1+\frac{p_1.q_2}{2}+\frac{p_1.q_3}{3}+\frac{p_2.q_1}{2}+\frac{p_2.q_2}{3}+\frac{p_2.q_3}{4}+\frac{p_3.q_1}{3}+\frac{p_3.q_2}{4}+\frac{p_3.q_3}{5}$$

Por ejemplo, si $\left\{\begin{matrix} u(x)=2+3.x+x^2=(2;3;1) \\ v(x)=4+5.x+6.x^2=(4;5;6) \end{matrix}\right\}$, es:

$$f(u(x);v(x))\equiv u(x)\bullet v(x)=\int_0^1 u(x).v(x).dx=$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}=$$

$$=2.4+\frac{2.5}{2}+\frac{2.6}{3}+\frac{3.4}{2}+\frac{3.5}{3}+\frac{3.6}{4}+\frac{1.4}{3}+\frac{1.5}{4}+\frac{1.6}{5}=\frac{2177}{60}$$

Los incrédulos pueden comprobar que, en efecto, es:

$$f(u(x);v(x))=\int_0^1 u(x).v(x).dx=\int_0^1 (2+3.x+x^2).(4+5.x+6.x^2).dx=$$

$$=\int_0^1 (8+22.x+31.x^2+23.x^3+6.x^4).dx=$$

$$=\left(8.x+11.x^2+\frac{31}{3}.x^3+\frac{23}{4}.x^4+\frac{6}{5}.x^5\right)_0^1=\frac{2177}{60}$$

- Sabemos que la i-ésima columna de la matriz "C" asociada al cambio de base $B \to B^*$ está formada por las coordenadas que respecto de la base **vieja** "B" tiene el i-ésimo vector de la base **nueva** B^*... y el enunciado es tan **maternal** que nos da esa información; pues nos dice que:

$$B^* = \left\{ \bar{h}_1 = 2 + 3.x + 4.x^2, \bar{h}_2 = 2.x - 5.x^2, \bar{h}_3 = 6.x^2 \right\}$$

Así, es:

$$\begin{array}{cc} C = & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \end{array} \end{array}$$

La **matriz de Graam** asociada a "f" respecto de la base B^* es $C^t \bullet G \bullet C$.

En efecto, si $\begin{cases} p(x) = p_1^* \bullet \bar{h}_1 + p_2^* \bullet \bar{h}_2 + p_3^* \bullet \bar{h}_3 \\ q(x) = q_1^* \bullet \bar{h}_1 + q_2^* \bullet \bar{h}_2 + q_3^* \bullet \bar{h}_3 \end{cases}$, es:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{bmatrix} \text{ (I)} \quad ; \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = C \bullet \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{bmatrix} \text{ (II)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en $f(p(x);q(x)) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \bullet G \bullet \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ obtenemos la expresión de "f" respecto de la base B^*:

$$f(p(x);q(x)) \equiv p(x) \bullet q(x) =$$

$$= \left(C \bullet \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{bmatrix} \right)^t \bullet G \bullet \left(C \bullet \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{bmatrix} \right) =$$

la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas en orden contrario

$$= \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* & p_3^* \end{bmatrix} \bullet (C^t \bullet G \bullet C) \bullet \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{bmatrix}$$

La mente intuitiva es un regalo sagrado y la mente racional es un fiel sirviente. Hemos creado una sociedad que rinde honores al sirviente y ha olvidado al regalo.
Albert Einstein

FONEMATO 10.2.6

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2, siendo $B=\{\bar{u}_1=1, \bar{u}_2=x, \bar{u}_3=x^2\}$ la base de referencia en "V". Si $f: V\times V \mapsto \Re$ es un producto escalar y $G=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix}$ es su matriz de Graam respecto de la base "B" determine la matriz de Graam respecto de la base

$$B^*=\{\bar{h}_1=1+6.x+7.x^2,\ \bar{h}_2=3-2.x,\ \bar{h}_3=5\}$$

SOLUCIÓN

Si $p(x)=\delta_1\bullet\bar{u}_1+\delta_2\bullet\bar{u}_2+\delta_3\bullet\bar{u}_3\in V$ y $q(x)=\mu_1\bullet\bar{u}_1+\mu_2\bullet\bar{u}_2+\mu_3\bullet\bar{u}_3\in V$, la expresión matricial de "f" respecto de la base $B=\{\bar{u}_1=1, \bar{u}_2=x, \bar{u}_3=x^2\}$ es

$$f(p(x);q(x))\equiv p(x)\bullet q(x)=\begin{bmatrix}\delta_1 & \delta_2 & \delta_3\end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix}}_{G}\bullet\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix}\quad (I)$$

La k-ésima columna de la matriz "C" asociada al cambio de base $B\to B^*$ está formada por las coordenadas que respecto de la base **vieja** "B" tiene el k-ésimo vector de la base **nueva** B^* ... y el enunciado es tan **maternal** que nos da esa información; así, es:

$$\begin{array}{cccc} C= & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5\\ 6 & -2 & 0\\ 7 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3\end{array}\end{array}$$

Por tanto, si $\begin{cases} p(x)=\delta_1^*\bullet\bar{h}_1+\delta_2^*\bullet\bar{h}_2+\delta_3^*\bullet\bar{h}_3\\ q(x)=\mu_1^*\bullet\bar{h}_1+\mu_2^*\bullet\bar{h}_2+\mu_3^*\bullet\bar{h}_3\end{cases}$, es:

$$\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}=C\bullet\begin{bmatrix}\delta_1^*\\ \delta_2^*\\ \delta_3^*\end{bmatrix}\ (II)\quad ;\quad \begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix}=C\bullet\begin{bmatrix}\mu_1^*\\ \mu_2^*\\ \mu_3^*\end{bmatrix}\ (III)$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) obtenemos la expresión de "f" respecto de B^*:

$$f(p(x);q(x))=\begin{bmatrix}\delta_1 & \delta_2 & \delta_3\end{bmatrix}\bullet G\bullet\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix}=\left(C\bullet\begin{bmatrix}\delta_1^*\\ \delta_2^*\\ \delta_3^*\end{bmatrix}\right)^t\bullet G\bullet\left(C\bullet\begin{bmatrix}\mu_1^*\\ \mu_2^*\\ \mu_3^*\end{bmatrix}\right)=$$

la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas en orden contrario

$$=\begin{bmatrix}\delta_1^* & \delta_2^* & \delta_3^*\end{bmatrix}\bullet(C^t\bullet G\bullet C)\bullet\begin{bmatrix}\mu_1^*\\ \mu_2^*\\ \mu_3^*\end{bmatrix}$$

FONEMATO 10.2.7

Sea el espacio vectorial $V = \left\{ \begin{bmatrix} p & q \\ r & q \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \Re \right\}$.

Sea $H = \left\{ \bar{k}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{k}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ la base de referencia en "V".

Sea la aplicación $f : V \times V \mapsto \Re$ tal que

$$f(A;B) = a_1.b_1 + (a_1 - a_2).(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2 + a_3).(b_1 + b_2 + b_3)$$

Demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a "V" en un espacio vectorial euclídeo, determinando la matriz de Graam respecto de la base "H" y la matriz de Graam respecto de la base H^*.

$$H^* = \left\{ \bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \right\}$$

SOLUCIÓN

- Latiguillo: para demostrar que "f" es un producto escalar debemos demostrar que "f" es una **forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es definida positiva;** o sea, demostrar que "f" satisface las siguientes condiciones:

 1) Conmutatividad: $f(A;B) = f(B;A), \forall A, B \in V$.

 2) Bilinealidad: $\forall A, B, C \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \Re$ se cumple que

$$\text{a) } f(\alpha \bullet A + \beta \bullet B ; C) = \alpha.f(A;C) + \beta.f(B;C)$$
$$\text{b) } f(A ; \alpha \bullet B + \beta \bullet C) = \alpha.f(A;B) + \beta.f(A;C)$$

 3) Positividad: $f(A;A) > 0, \forall A \neq 0$.

 Veamos:

 1) Conmutatividad:

 Es $f(A;B) = a_1.b_1 + (a_1 - a_2).(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2 + a_3).(b_1 + b_2 + b_3)$.

 Es $f(B;A) = b_1.a_1 + (b_1 - b_2).(a_1 - a_2) + (b_1 + b_2 + b_3).(a_1 + a_2 + a_3)$.

 Resulta obvio que $f(A;B) = f(B;A), \forall A, B \in V$.

 2) Bilinealidad:

 a) Siendo

$$A = a_1 \bullet \bar{k}_1 + a_2 \bullet \bar{k}_2 + a_3 \bullet \bar{k}_3 \ ; \ B = b_1 \bullet \bar{k}_1 + b_2 \bullet \bar{k}_2 + b_3 \bullet \bar{k}_3$$
$$C = c_1 \bullet \bar{k}_1 + c_2 \bullet \bar{k}_2 + c_3 \bullet \bar{k}_3$$

 es:

$$\alpha \bullet A + \beta \bullet B = (\alpha.a_1 + \beta.b_1) \bullet \bar{k}_1 + (\alpha.a_2 + \beta.b_2) \bullet \bar{k}_2 + (\alpha.a_3 + \beta.b_3) \bullet \bar{k}_3$$

 Por tanto:

$$\begin{aligned} & f(\alpha \bullet A + \beta \bullet B ; C) = \\ & = (\alpha.a_1 + \beta.b_1).c_1 + \big((\alpha.a_1 + \beta.b_1) - (\alpha.a_2 + \beta.b_2)\big).(c_1 - c_2) + \\ & + \big((\alpha.a_1 + \beta.b_1) + (\alpha.a_2 + \beta.b_2) + (\alpha.a_3 + \beta.b_3)\big).(c_1 + c_2 + c_3) = \\ & = \alpha.\big(a_1.c_1 + (a_1 - a_2).(c_1 - c_2) + (a_1 + a_2 + a_3).(c_1 + c_2 + c_3)\big) + \\ & + \beta.\big(b_1.c_1 + (b_1 - b_2).(c_1 - c_2) + (b_1 + b_2 + b_3).(c_1 + c_2 + c_3)\big) = \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1.c_1 + (a_1 - a_2).(c_1 - c_2) + (a_1 + a_2 + a_3).(c_1 + c_2 + c_3) = f(A;C) \\ b_1.c_1 + (b_1 - b_2).(c_1 - c_2) + (b_1 + b_2 + b_3).(c_1 + c_2 + c_3) = f(B;C) \end{array}}$$

$$= \alpha.f(A;C) + \beta.f(B;C)$$

 b) Como "f" es conmutativa y se cumple a), se cumple b).

3) Positividad:

$$f(A;A) = a_1.a_1 + (a_1 - a_2).(a_1 - a_2) + (a_1 + a_2 + a_3).(a_1 + a_2 + a_3) =$$
$$= a_1^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 + a_2 + a_3)^2 \geq 0, \ \forall A \neq 0$$

VENTANA

- No puede ser negativo, pues todos los sumandos son no negativos.
- Es $a_1^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 + a_2 + a_3)^2 = 0$ sólo si:

$$\left.\begin{array}{r} a_1 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{array}\right\} \text{(I)}$$

Como la matriz de coeficientes de (I) es regular, el sistema sólo tiene la solución trivial $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Así, es $f(A;A) = 0$ sólo si "A" es el vector cero del espacio "V".

En definitiva, por satisfacer las exigencias de conmutatividad, bilinealidad y positividad, la ley "f" es un producto escalar que convierte a "V" en un espacio vectorial euclídeo.

- Siendo "G" la matriz asociada a "f" **(matriz de Graam)** respecto de la base $B = \left\{\bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = x, \bar{k}_3 = x^2\right\}$, es $g_{ij} = f(\bar{k}_i;\bar{k}_j)$. Por tanto:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

VENTANA

$$g_{11} = f(\bar{k}_1;\bar{k}_1) = 1.1 + (1-0).(1-0) + (1+0+0).(1+0+0) = 3$$
$$g_{12} = f(\bar{k}_1;\bar{k}_2) = 1.0 + (1-0).(0-1) + (1+0+0).(0+1+0) = 0 = g_{21}$$
$$g_{13} = f(\bar{k}_1;\bar{k}_3) = 1.0 + (1-0).(0-0) + (1+0+0).(0+0+1) = 1 = g_{31}$$
$$g_{22} = f(\bar{k}_2;\bar{k}_2) = 0.0 + (0-1).(0-1) + (0+1+0).(0+1+0) = 2$$
$$g_{23} = f(\bar{k}_2;\bar{k}_3) = 0.0 + (0-1).(0-0) + (0+1+0).(0+0+1) = 1 = g_{32}$$
$$g_{33} = f(\bar{k}_3;\bar{k}_3) = 0.0 + (0-0).(0-0) + (0+0+0).(0+0+1) = 1$$

Así, si

$$A = a_1 \bullet \bar{k}_1 + a_2 \bullet \bar{k}_2 + a_3 \bullet \bar{k}_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}$$
$$B = b_1 \bullet \bar{k}_1 + b_2 \bullet \bar{k}_2 + b_3 \bullet \bar{k}_3 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}$$

su producto escalar es

$$f(A;B) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} =$$
$$= 3.a_1.b_1 + 0.a_1.b_2 + 1.a_1.b_3 + 0.a_2.b_1 + 2.a_2.b_2 +$$
$$+ 1.a_2.b_3 + 1.a_3.b_1 + 1.a_3.b_2 + 1.a_3.b_3$$

Por ejemplo, si $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (2;3;1)$ y $T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = (4;5;6)$, es:

$$f(S;T) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} =$$
$$= 3.2.4 + 0.2.5 + 1.2.6 + 0.3.4 + 2.3.5 + 1.3.6 + 1.1.4 + 1.1.5 + 1.1.6 = 99$$

- Como todo el mundo sabe, la i-ésima columna de la matriz "Q" asociada al cambio de base $H \to H^*$ está formada por las coordenadas que respecto de la base **vieja** $H = \left\{ \bar{k}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{k}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ tiene el i-ésimo vector de la base **nueva** H^*... y el enunciado es tan **maternal** que nos da esa información; pues cuando nos dice que $H^* = \left\{ \bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \right\}$, nos está diciendo que:

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 &= 2 \bullet \bar{k}_1 + 3 \bullet \bar{k}_2 + 4 \bullet \bar{k}_3 \\ \bar{h}_2 &= 7 \bullet \bar{k}_1 + 5 \bullet \bar{k}_2 + 0 \bullet \bar{k}_3 \\ \bar{h}_3 &= 8 \bullet \bar{k}_1 + 9 \bullet \bar{k}_2 + 6 \bullet \bar{k}_3 \end{aligned}$$

Así, es $Q = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, y la matriz de Graam asociada a "f" respecto de la base H^* es $Q^t \bullet G \bullet Q$:

$$f(A;B) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \bullet G \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} =$$

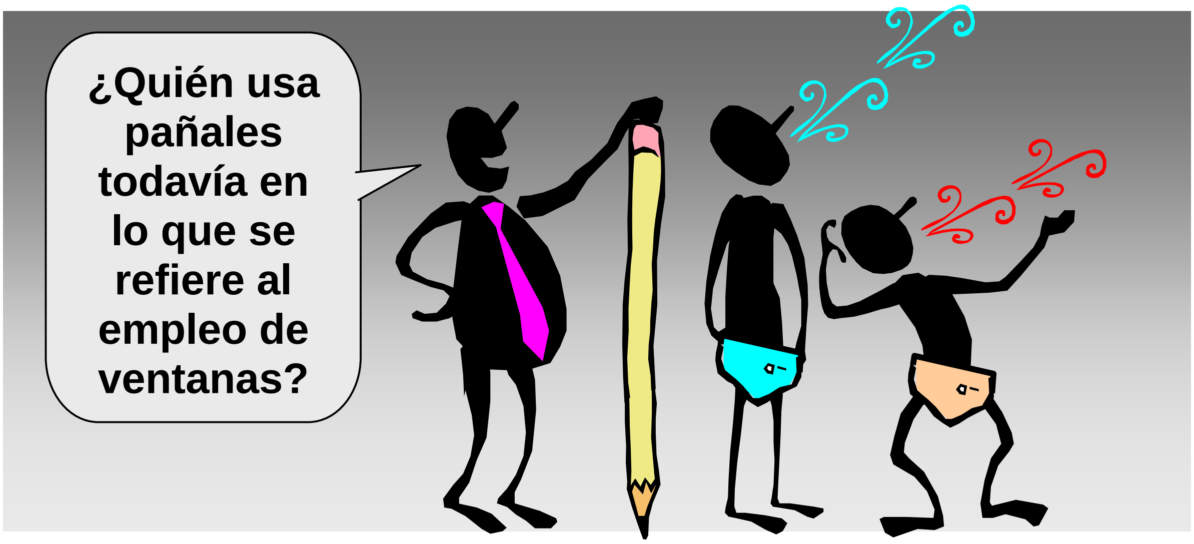
VENTANA

Si $\begin{cases} A = a_1^* \bullet \bar{h}_1 + a_2^* \bullet \bar{h}_2 + a_3^* \bullet \bar{h}_3 \\ B = b_1^* \bullet \bar{h}_1 + b_2^* \bullet \bar{h}_2 + b_3^* \bullet \bar{h}_3 \end{cases}$, es:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = Q \bullet \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = Q \bullet \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix}$$

$$= \left(Q \bullet \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} \right)^t \bullet G \bullet \left(Q \bullet \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{bmatrix} \bullet (Q^t \bullet G \bullet Q) \bullet \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix}$$

la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas en orden contrario



10.3 MÓDULO DE UN VECTOR

Si "V" es un espacio vectorial euclídeo el módulo o norma de $\overline{u} \in V$ es la raíz cuadrada (con signo +) del producto escalar $\overline{u} \bullet \overline{u}$. Se denota $\|\overline{u}\|$, o sea:

$$\|\overline{u}\| = +\sqrt{\overline{u} \bullet \overline{u}}$$

Propiedades

* $\|\overline{u}\| = 0 \Leftrightarrow \overline{u} = \overline{0}$
* Desigualdad triangular: $\|\overline{u} + \overline{v}\| \leq \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$
* $\|\delta \bullet \overline{u}\| = |\delta| . \|\overline{u}\|, \ \forall \delta \in \Re$
* Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\overline{u} \bullet \overline{v}| \leq \|\overline{u}\| . \|\overline{v}\|$
* Regla del paralelogramo: $\|\overline{u} + \overline{v}\|^2 + \|\overline{u} - \overline{v}\|^2 = 2.\left(\|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2\right)$

10.4 ÁNGULO DE DOS VECTORES

Si "V" es un espacio vectorial euclídeo y $\overline{u}, \overline{v} \in V$, el ángulo "θ" que forman los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ es tal que

$$\cos\theta = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{u}\| . \|\overline{v}\|}$$

Por ejemplo, siendo $G = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam correspondiente al producto escalar definido en "V", el ángulo "θ" que forman los vectores $\overline{u} = (1;1)$ y $\overline{v} = (0;1)$ es tal que:

$$\cos\theta = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{u}\| . \|\overline{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{7}.\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

VENTANA

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\|\overline{u}\| = +\sqrt{\overline{u} \bullet \overline{u}} = +\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = +\sqrt{7}$$

$$\|\overline{v}\| = +\sqrt{\overline{v} \bullet \overline{v}} = +\sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = +\sqrt{2}$$

10.5 VECTORES ORTOGONALES

- Dos vectores del espacio vectorial euclídeo "V" se dicen **ortogonales** si su producto escalar es nulo; o sea, si son conjugados (ver 9.8) respecto de la forma bilineal (simétrica y con forma cuadrática asociada definida positiva) que hemos definido sobre "V" y llamamos producto escalar.
- **Si unos vectores, todos distintos del vector cero, son ortogonales dos a dos son linealmente independientes.**

  En efecto, si los vectores $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, \bar{u}_j, \ldots, \bar{u}_k$ son ortogonales dos a dos (o sea, es $\bar{u}_i \bullet \bar{u}_j = 0$ si $i \neq j$), la ecuación vectorial

$$\lambda_1 \bullet \bar{u}_1 + \ldots + \lambda_i \bullet \bar{u}_i + \ldots \lambda_j \bullet \bar{u}_j + \ldots + \lambda_k \bullet \bar{u}_k = \bar{0} \quad (I)$$

  sólo tiene la solución trivial $\lambda_1 = \ldots = \lambda_i = \ldots = \lambda_j = \ldots = \lambda_k = 0$, pues al multiplicar escalarmente por $\bar{u}_i$ ambos miembros de (I) resulta

$$\bar{u}_i \bullet \left(\lambda_1 \bullet \bar{u}_1 + \ldots + \lambda_i \bullet \bar{u}_i + \ldots \lambda_j \bullet \bar{u}_j + \ldots + \lambda_k \bullet \bar{u}_k\right) = 0 \quad (II)$$

  y como $\bar{u}_i \bullet \bar{u}_j = 0$ si $i \neq j$, la ecuación (II) se transforma en $\lambda_i .(\bar{u}_i \bullet \bar{u}_i) = 0$, que sólo se satisface cuando $\lambda_i = 0$, pues $\bar{u}_i \bullet \bar{u}_i > 0$.

FONEMATO 10.5.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Demuestre que el conjunto "H" que forman los vectores ortogonales a $\bar{u} = 2 \bullet \bar{e}_1 - 3 \bullet \bar{e}_2 + 2 \bullet \bar{e}_3$ es subespacio "V", determinando una base de "H".

SOLUCIÓN

Latiguillo: para demostrar que el conjunto "H" es subespacio de "V" debemos demostrar que toda combinación lineal de vectores de "H" es un vector de "H". En efecto:

- Si $\bar{x}, \bar{y} \in H$ es $\bar{u} \bullet \bar{x} \equiv \bar{u}^t \bullet G \bullet \bar{x} = 0$ y $\bar{u} \bullet \bar{y} \equiv \bar{u}^t \bullet G \bullet \bar{y} = 0$.
- Sean $\alpha, \beta \in \Re$.
- Veamos que $\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}$ es ortogonal a $\bar{u}$:

$$\bar{u}^t \bullet G \bullet (\alpha \bullet \bar{x} + \beta \bullet \bar{y}) = \alpha.\left(\bar{u}^t \bullet G \bullet \bar{x}\right) + \beta.\left(\bar{u}^t \bullet G \bullet \bar{y}\right) = \alpha.0 + \beta.0 = 0$$

Trivialmente determinamos una ecuaciones cartesianas de "H", y a partir de ellas una base de "H":

$$\bar{u}^t \bullet G \bullet \bar{x} = 0 \Rightarrow [2 \ \ -3 \ \ 2] \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [6 \ \ -6 \ \ 6] \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \{(\delta - \mu; \delta; \mu), \forall \delta, \mu \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \{\delta \bullet (1;1;0) + \mu \bullet (-1;0;1), \forall \delta, \mu \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{v} = (1;1;0) \text{ y } \bar{w} = (-1;0;1) \text{ forman una base de "H"}$$

10.6 SUBESPACIOS ORTOGONALES

- Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y "A" y "S" subespacios de "V". Se dice que "A" y "S" son **ortogonales** si $\forall \bar{p} \in A$ y $\forall \bar{q} \in S$ sucede que $\bar{p} \bullet \bar{q} = 0$; o sea, "A" y "S" son conjugados (ver 7.9) respecto de la forma bilineal (simétrica y con forma cuadrática asociada definida positiva) que hemos definido sobre "V" y llamamos producto escalar. Naturalmente, si $B_1 = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}$ es una base de "A" y $B_2 = \{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_r\}$ es una base de "S", sucederá que

$$\bar{a}_i \bullet \bar{s}_j = 0, \begin{cases} \forall i = 1, 2, \dots, k \\ \forall j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

  Así, dado "A", para determinar "S" calcularemos una base de "A" y exigiremos que los vectores de "S" sean ortogonales a todo vector de dicha base.

- Puede demostrarse que **si los subespacios "A" y "S" son ortogonales, el espacio "V" es suma directa de ellos.** O sea, puede demostrarse que **si "A" y "S" son ortogonales son suplementarios;** es decir:

$$A \cap S = \bar{0} \;;\; A + S = V$$

  Por tanto, cualquier vector $\bar{v} \in V$ puede expresarse de modo único de la forma $\bar{v} = \bar{a} + \bar{s}$, siendo $\bar{a} \in A$, $\bar{s} \in S$ y $\bar{a} \bullet \bar{s} = 0$.

- Puede demostrarse que "S" es el único subespacio suplementario de "A" que es ortogonal a "A"; por eso, también se dice que "S" es el **suplemento ortogonal** de "A".

- El **endomorfismo** $g: V \mapsto V$ tal que $g(\bar{v}) = \bar{a}$ se llama **proyección ortogonal** del espacio "V" sobre el subespacio "A". También se dice que $\bar{a} \in A$ es la proyección ortogonal de $\bar{v} \in V$ sobre el subespacio "A". Siempre es:

$$\ker.(g) = S \;;\; \operatorname{Im} g.(g) = A$$

- El **endomorfismo** $h: V \mapsto V$ tal que $h(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{s}$ se llama **simetría** del espacio "V" respecto al subespacio "A". También se dice que el vector $\bar{a} - \bar{s}$ es simétrico del vector $\bar{v} \in V$ respecto al subespacio "A".

Si M_g es la matriz asociada al endomorfismo "g" y M_h es la matriz asociada al endomorfismo "h", siempre es $M_h = 2 \bullet M_g - I$. En efecto:

$$\boxed{\bar{a} = g(\bar{v})}$$

$$h(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{s} \Rightarrow h(\bar{v}) = g(\bar{v}) - \bar{s} \Rightarrow h(\bar{v}) = 2 \bullet g(\bar{v}) - \bar{v} \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{v} = \bar{a} + \bar{s} \Rightarrow \bar{v} = g(\bar{v}) + \bar{s} \Rightarrow \bar{s} = \bar{v} - g(\bar{v})}$$

$$\Rightarrow M_h \bullet \bar{v} = 2 \bullet M_g \bullet \bar{v} - \bar{v} \Rightarrow M_h \bullet \bar{v} = (2 \bullet M_g - I) \bullet \bar{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_h = 2 \bullet M_g - I$$

Saber que $M_h = 2 \bullet M_g - I$ es estupendo, pues nos permite determinar trivialmente la matriz que identifica al endomorfismo "h" si conocemos la matriz que identifica al endomorfismo "g"... y al revés.

FONEMATO 10.6.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Sea el subespacio $A=\{\bar{x}=(x_1;x_2)\in V\ /\ x_1-x_2=0\}$.

1) Determine el subespacio ortogonal al subespacio "A".
2) Determine la proyección ortogonal de "V" sobre "A".
3) Determine la simetría de "V" respecto de "A".

SOLUCIÓN

1) Determinamos una base del subespacio "A":

$$x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow A=\{(\delta;\delta),\ \forall\delta\in\Re\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\{\delta\bullet(1;1),\ \forall\delta\in\Re\}\Rightarrow \bar{a}_1=(1;1)\text{ es una base de "A"}$$

- Sea "S" el subespacio ortogonal al subespacio "A".
  Si $\bar{m}=(m_1;m_2)\in S$, el vector $\bar{m}$ es ortogonal a $\bar{a}_1$; así, ha de ser:

$$\bar{a}_1\bullet\bar{m}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}m_1\\ m_2\end{bmatrix}=0\Rightarrow 3.m_1+2.m_2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1=-\frac{2}{3}.m_2\Rightarrow S=\{(-2.\varepsilon;3.\varepsilon),\ \forall\varepsilon\in\Re\}=\{\varepsilon\bullet(-2;3),\ \forall\varepsilon\in\Re\}$$

  Por tanto, el vector $\bar{w}=(-2;3)$ es una base de "S".

2) Como "A" y "S" son ortogonales, el espacio "V" es suma directa de "A" y "S"; por tanto, todo vector $\bar{v}=\lambda_1\bullet\bar{e}_1+\lambda_2\bullet\bar{e}_2\in V$ puede expresarse de modo único de la forma $\bar{v}=\bar{a}+\bar{s}$, siendo $\bar{a}\in A$, $\bar{s}\in S$ y $\bar{a}\bullet\bar{s}=0$.

- Como $\bar{a}\in A$ y $\{\bar{a}_1\}$ es una base de "A", ha de ser $\bar{a}=\alpha_1\bullet\bar{a}_1$.
- Como $\bar{s}\in S$ y $\{\bar{w}\}$ es una base de "S", ha de ser $\bar{s}=\alpha_2\bullet\bar{w}$.
- Por tanto, es $\bar{v}=\lambda_1\bullet\bar{e}_1+\lambda_2\bullet\bar{e}_2=\alpha_1\bullet\bar{a}_1+\alpha_2\bullet\bar{w}$.
- Como $\{\bar{a}_1,\bar{w}\}$ es una base de "V" (pues $A\cap S=\bar{0}$ y $A+S=V$), es:

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\\ \uparrow\ \bar{a}_1\quad \uparrow\ \bar{w}\end{array}\bullet\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}}^{\text{Ecuación del cambio de la base }\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}\text{ a la base }\{\bar{a}_1,\bar{w}\}}\Rightarrow\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}\ \underset{\text{haciendo los cálculos}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\alpha_1=(3.\lambda_1+2.\lambda_2)/5\ \text{y}\ \alpha_2=(-\lambda_1+\lambda_2)/5$$

- La proyección ortogonal de "V" sobre "A" es el endomorfismo $g:V\mapsto V$ tal que $g(\bar{v})=\bar{a}$:

$$g(\bar{v})=\underset{\boxed{\bar{a}=\alpha_1\bullet\bar{a}_1}}{\bar{a}=\alpha_1\bullet\bar{a}_1}\underset{\boxed{\alpha_1=(3.\lambda_1+2.\lambda_2)/5}}{=}\frac{1}{5}.(3.\lambda_1+2.\lambda_2)\bullet(1;1)=$$

$$=\frac{1}{5}.(3.\lambda_1+2.\lambda_2\ ;\ 3.\lambda_1+2.\lambda_2)=\frac{1}{5}\bullet\begin{bmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la proyección ortogonal del vector $\bar{k} = 4 \bullet \bar{e}_1 + 5 \bullet \bar{e}_2 \in V$ sobre el subespacio "A" es el vector $g(\bar{k}) = \frac{22}{5} \bullet \bar{e}_1 + \frac{22}{5} \bullet \bar{e}_2$, pues:

$$g(\bar{k}) = \frac{1}{5} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \bullet \begin{bmatrix} 22 \\ 22 \end{bmatrix} \in A$$

- **Nota:** puedes garantizar que se ha deslizado algún error de cálculo si no sucede que $\operatorname{Im} g.(g) = A$ y $\ker.(g) = S$.

3) La **simetría** del espacio "V" respecto al subespacio "A" es el endomorfismo $h : V \mapsto V$ tal que $h(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{s}$.

$$h(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{s} = \alpha_1 \bullet \bar{a}_1 - \alpha_2 \bullet \bar{w} =$$

$$\boxed{\bar{a} = \alpha_1 \bullet \bar{a}_1 \; ; \; \bar{s} = \alpha_2 \bullet \bar{w}}$$

$$\boxed{\alpha_1 = (3.\lambda_1 + 2.\lambda_2)/5 \; ; \; \alpha_2 = (-\lambda_1 + \lambda_2)/5}$$

$$= \left(\frac{1}{5}.(3.\lambda_1 + 2\lambda_2)\right) \bullet (1;1) - \left(\frac{1}{5}.(-\lambda_1 + \lambda_2)\right) \bullet (-2;3) =$$

$$= \frac{1}{5} \bullet (3.\lambda_1 + 2\lambda_2 \; ; 3.\lambda_1 + 2\lambda_2) - \frac{1}{5} \bullet (2.\lambda_1 - 2.\lambda_2 \; ; -3.\lambda_1 + 3.\lambda_2) =$$

$$= \frac{1}{5} \bullet (\lambda_1 + 4.\lambda_2 \; ; 6.\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{1}{5} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el simétrico del vector $\bar{k} = 4 \bullet \bar{e}_1 + 5 \bullet \bar{e}_2 \in V$ respecto al subespacio "A" es el vector $h(\bar{k}) = \frac{24}{5} \bullet \bar{e}_1 + \frac{19}{5} \bullet \bar{e}_2$, pues:

$$h(\bar{k}) = \frac{1}{5} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \bullet \begin{bmatrix} 24 \\ 19 \end{bmatrix}$$

- **Nota bene:** podemos identificar al endomorfismo "h" de modo más rápido teniendo en cuenta que $M_h = 2 \bullet M_g - I$, siendo M_h la matriz asociada a "h" y M_g la matriz asociada a "g". Así, en nuestro caso, siendo

Nota bene ≡ fíjate bien

$$M_g = \frac{1}{5} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

es:

$$M_h = 2 \bullet M_g - I = \frac{2}{5} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

- **Nota:** si queremos expresar el vector $\bar{v} = \lambda_1 \bullet \bar{e}_1 + \lambda_2 \bullet \bar{e}_2 \in V$ como suma de un vector del subespacio "A" y otro vector del subespacio "S", la cosa no puede ser más fácil, pues siendo:

$$\bar{v} = \bar{a} + \bar{s}, \text{ con } \bar{a} \in A, \; \bar{s} \in S, \; \bar{a} \bullet \bar{s} = 0$$

como $g(\bar{v}) = \bar{a}$ y $h(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{s}$, es $\bar{s} = g(\bar{v}) - h(\bar{v})$.

Por ejemplo, para expresar $\bar{k} = 4 \bullet \bar{e}_1 + 5 \bullet \bar{e}_2 \in V$ como suma de un vector $\bar{p} \in A$ y otro vector $\bar{q} \in S$, la cosa no puede ser más fácil, pues siendo:

$$\bar{k} = \bar{p} + \bar{q}, \text{ con } \bar{p} \in A, \; \bar{q} \in S, \; \bar{p} \bullet \bar{q} = 0$$

como $g(\bar{k}) = \bar{p}$ y $h(\bar{k}) = \bar{p} - \bar{q}$, es $\bar{q} = g(\bar{k}) - h(\bar{k}) = -\frac{2}{5} \bullet \bar{e}_1 + \frac{3}{5} \bullet \bar{e}_2$.

$$\boxed{g(\bar{k}) = \frac{22}{5} \bullet \bar{e}_1 + \frac{22}{5} \bullet \bar{e}_2 \; ; \; h(\bar{k}) = \frac{24}{5} \bullet \bar{e}_1 + \frac{19}{5} \bullet \bar{e}_2}$$

FONEMATO 10.6.2

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Sea el subespacio $A = \{\bar{x} = (x_1;x_2;x_3) \in V \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

1) Determine el subespacio ortogonal al subespacio "A".
2) Determine la proyección ortogonal de "V" sobre "A".
3) Determine la simetría de "V" respecto de "A".

SOLUCIÓN

1) Determinamos una base del subespacio "A":

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3 \Rightarrow A = \{(\delta - \mu;\delta;\mu),\ \forall \delta,\mu \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \{\delta \bullet (1;1;0) + \mu \bullet (-1;0;1),\ \forall \delta,\mu \in \Re\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{a}_1 = (1;1;0) \text{ y } \bar{a}_2 = (-1;0;1) \text{ forman una base de "A"}$$

- Sea "S" el subespacio ortogonal al subespacio "A".
  Si $\bar{m} = (m_1;m_2;m_3) \in S$, el vector $\bar{m}$ es ortogonal a $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$; así, ha de ser:

$$\bar{a}_1 \bullet \bar{m} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3.m_1 + 2.m_2 + 2.m_3 = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$\bar{a}_2 \bullet \bar{m} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -2.m_1 + m_2 = 0 \quad (\mathrm{II})$$

  Las ecuaciones (I) y (II) son unas cartesianas de "S".
  Resolviendo el sistema que forman (I) y (II), resulta:

$$S = \{(2.\varepsilon;4.\varepsilon;-7.\varepsilon),\ \forall \varepsilon \in \Re\} = \{\varepsilon \bullet (2;4;-7),\ \forall \varepsilon \in \Re\}$$

  Por tanto, el vector $\bar{w} = (2;4;-7)$ es una base de "S".

2) Como "A" y "S" son ortogonales, el espacio "V" es suma directa de "A" y "S"; por tanto, todo vector $\bar{v} = \lambda_1 \bullet \bar{e}_1 + \lambda_2 \bullet \bar{e}_2 + \lambda_3 \bullet \bar{e}_3 \in V$ puede expresarse de modo único de la forma $\bar{v} = \bar{a} + \bar{s}$, siendo $\bar{a} \in A$, $\bar{s} \in S$ y $\bar{a} \bullet \bar{s} = 0$.

- Como $\bar{a} \in A$ y $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ es una base de "A", ha de ser $\bar{a} = \alpha_1 \bullet \bar{a}_1 + \alpha_2 \bullet \bar{a}_2$.
- Como $\bar{s} \in S$ y $\{\bar{w}\}$ es una base de "S", ha de ser $\bar{s} = \alpha_3 \bullet \bar{w}$.
- Por tanto, es $\bar{v} = \lambda_1 \bullet \bar{e}_1 + \lambda_2 \bullet \bar{e}_2 + \lambda_3 \bullet \bar{e}_3 = \alpha_1 \bullet \bar{a}_1 + \alpha_2 \bullet \bar{a}_2 + \alpha_3 \bullet \bar{w}$
- Como $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{w}\}$ es una base de "V" (pues $A \cap S = \bar{0}$ y $A + S = V$), es:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \\ \uparrow\ \bar{a}_1 \quad \uparrow\ \bar{a}_2 \quad \uparrow\ \bar{w} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}^{\text{Ecuación del cambio de la base } \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \text{ a la base } \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{w}\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

haciendo los cálculos

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = (4.\lambda_1 + 5.\lambda_2 + 4.\lambda_3)/9 \\ \alpha_2 = (-7.\lambda_1 + 7.\lambda_2 + 2.\lambda_3)/9 \\ \alpha_3 = (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)/9 \end{cases}$$

- La **proyección ortogonal** de "V" sobre "A" es el endomorfismo $g: V \mapsto V$ tal que $g(\overline{v}) = \overline{a}$:

$$g(\overline{v}) = \overline{a} = \alpha_1 \bullet \overline{a}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{a}_2 =$$

$$\boxed{\overline{a} = \alpha_1 \bullet \overline{a}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{a}_2}$$

$$\boxed{\alpha_1 = (4.\lambda_1 + 5.\lambda_2 + 4.\lambda_3)/9 \ ; \ \alpha_2 = (-7.\lambda_1 + 7.\lambda_2 + 2.\lambda_3)/9}$$

$$= \left(\frac{1}{9}.(4.\lambda_1 + 5.\lambda_2 + 4.\lambda_3)\right) \bullet (1;1;0) + \left(\frac{1}{9}.(-7.\lambda_1 + 7.\lambda_2 + 2.\lambda_3)\right) \bullet (-1;0;1) =$$

$$= \frac{1}{9} \bullet \left(11.\lambda_1 - 2.\lambda_2 + 2.\lambda_3 \ ; 4.\lambda_1 + 5.\lambda_2 + 4.\lambda_3 \ ; -7.\lambda_1 + 7.\lambda_2 + 2.\lambda_3\right) =$$

$$= \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} 11 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -7 & 7 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la proyección ortogonal del vector $\overline{k} = 2 \bullet \overline{e}_1 + 3 \bullet \overline{e}_2 + 4 \bullet \overline{e}_3 \in V$ sobre el subespacio "A" es el vector $g(\overline{k}) = \frac{24}{9} \bullet \overline{e}_1 + \frac{39}{9} \bullet \overline{e}_2 + \frac{15}{9} \bullet \overline{e}_3$, pues:

$$g(\overline{k}) = \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} 11 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -7 & 7 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} 24 \\ 39 \\ 15 \end{bmatrix} \in A$$

- **Nota:** puedes garantizar que se ha deslizado algún error de cálculo si no sucede que $\operatorname{Im} g.(g) = A$ y $\ker.(g) = S$.

3) La **simetría** del espacio "V" respecto al subespacio "A" es el endomorfismo $h: V \mapsto V$ tal que $h(\overline{v}) = \overline{a} - \overline{s}$.

$$h(\overline{v}) = \overline{a} - \overline{s} = \alpha_1 \bullet \overline{a}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{a}_2 - \alpha_3 \bullet \overline{w} =$$

$$\boxed{\overline{a} = \alpha_1 \bullet \overline{a}_1 + \alpha_2 \bullet \overline{a}_2 \ ; \ \overline{s} = \alpha_3 \bullet \overline{w}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \alpha_1 = (4.\lambda_1 + 5.\lambda_2 + 4.\lambda_3)/9 \ ; \ \alpha_2 = (-7.\lambda_1 + 7.\lambda_2 + 2.\lambda_3)/9 \\ \alpha_3 = (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)/9 \end{gathered}}$$

$$= \left(\frac{1}{9}.(4.\lambda_1 + 5.\lambda_2 + 4.\lambda_3)\right) \bullet (1;1;0) + \left(\frac{1}{9}.(-7.\lambda_1 + 7.\lambda_2 + 2.\lambda_3)\right) \bullet (-1;0;1) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9}.(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\right) \bullet (2;4;-7) =$$

$$= \frac{1}{9} \bullet \left(13.\lambda_1 - 4.\lambda_2 + 4.\lambda_3 \ ; 8.\lambda_1 + 1.\lambda_2 + 1.\lambda_3 \ ; -14.\lambda_1 + 14.\lambda_2 - 5.\lambda_3\right) =$$

$$= \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} 13 & -4 & 4 \\ 8 & 1 & 8 \\ -14 & 14 & -5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el simétrico del vector $\overline{k} = 2 \bullet \overline{e}_1 + 3 \bullet \overline{e}_2 + 4 \bullet \overline{e}_3 \in V$ respecto al subespacio "A" es el vector $h(\overline{k}) = \frac{30}{9} \bullet \overline{e}_1 + \frac{51}{9} \bullet \overline{e}_2 - \frac{6}{9} \bullet \overline{e}_3$, pues:

$$h(\overline{k}) = \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} 13 & -4 & 4 \\ 8 & 1 & 8 \\ -14 & 14 & -5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} 30 \\ 51 \\ -6 \end{bmatrix}$$

- ## Nota bene

Podemos identificar al endomorfismo "h" **de modo más rápido** teniendo en cuenta que $M_h = 2 \bullet M_g - I$, siendo M_h la matriz asociada a "h" y M_g la matriz asociada a "g".

Nota bene ≡ fíjate bien

Así, en nuestro caso, siendo

$$M_g = \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} 11 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -7 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

es:

$$M_h = 2 \bullet M_g - I = \frac{2}{9} \bullet \begin{bmatrix} 11 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -7 & 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} 13 & -4 & 4 \\ 8 & 1 & 8 \\ -14 & 14 & -5 \end{bmatrix}$$

- ## Nota

Si queremos expresar el vector $\bar{v} = \lambda_1 \bullet \bar{e}_1 + \lambda_2 \bullet \bar{e}_2 + \lambda_3 \bullet \bar{e}_3 \in V$ como suma de un vector del subespacio "A" y otro vector del subespacio "S", la cosa no puede ser más fácil, pues siendo:

$$\bar{v} = \bar{a} + \bar{s}, \text{ con } \bar{a} \in A,\ \bar{s} \in S,\ \bar{a} \bullet \bar{s} = 0$$

como $g(\bar{v}) = \bar{a}$ y $h(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{s}$, es $\bar{s} = g(\bar{v}) - h(\bar{v})$.

Por ejemplo, para expresar el vector $\bar{k} = 2 \bullet \bar{e}_1 + 3 \bullet \bar{e}_2 + 4 \bullet \bar{e}_3 \in V$ como suma de un vector $\bar{p} \in A$ y otro vector $\bar{q} \in S$, la cosa no puede ser más fácil, pues siendo:

$$\bar{k} = \bar{p} + \bar{q}, \text{ con } \bar{p} \in A,\ \bar{q} \in S,\ \bar{p} \bullet \bar{q} = 0$$

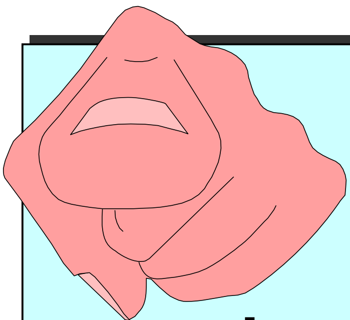
como

$$g(\bar{k}) = \bar{p}$$
$$h(\bar{k}) = \bar{p} - \bar{q}$$

es:

$$\bar{q} = g(\bar{k}) - h(\bar{k}) = -\frac{2}{3} \bullet \bar{e}_1 - \frac{4}{3} \bullet \bar{e}_2 + \frac{7}{3} \bullet \bar{e}_3$$

$$g(\bar{k}) = \frac{24}{9} \bullet \bar{e}_1 + \frac{39}{9} \bullet \bar{e}_2 + \frac{15}{9} \bullet \bar{e}_3 \ ; \ h(\bar{k}) = \frac{30}{9} \bullet \bar{e}_1 + \frac{51}{9} \bullet \bar{e}_2 - \frac{6}{9} \bullet \bar{e}_3$$



¡Remueve Roma con Santiago para conseguir exámenes de Álgebra de años anteriores... sin ellos tendrás que a estudiar a ciegas!

FONEMATO 10.6.3

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Sea el subespacio $A=\left\{\bar{x}=(x_1;x_2;x_3)\in V \;\Big/\; \begin{matrix}x_1+x_2=0\\ x_1-x_2-2.x_3=0\end{matrix}\right\}$.

1) Determine el subespacio ortogonal al subespacio "A".
2) Determine la proyección ortogonal de "V" sobre "A".
3) Determine la simetría de "V" respecto de "A".

SOLUCIÓN

1) Determinamos una base del subespacio "A":

$$\left\{\begin{matrix}x_1+x_2=0\\ x_1-x_2-2.x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=x_3\\ x_2=-x_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\{(\delta;-\delta;\delta),\ \forall\delta\in\Re\}\Rightarrow$$

parametrizando x_3

$$\Rightarrow A=\{\delta\bullet(1;-1;1),\ \forall\delta\in\Re\}\Rightarrow \bar{a}_1=(1;-1;1) \text{ es una base de "A"}$$

- Sea "S" el subespacio ortogonal al subespacio "A".
  Si $\bar{m}=(m_1;m_2;m_3)\in S$, el vector $\bar{m}$ es ortogonal a $\bar{a}_1$; así, ha de ser:

$$\bar{a}_1\bullet\bar{m}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{bmatrix}=0\Rightarrow 4.m_1-m_2+m_3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2=4.m_1+m_3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\{(\mu;4.\mu+\varepsilon;.\varepsilon),\ \forall\mu,\varepsilon\in\Re\}=\{\mu\bullet(1;4;0)+\varepsilon\bullet(0;1;1),\ \forall\mu,\varepsilon\in\Re\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{w}_1=(1;4;0) \text{ y } \bar{w}_2=(0;1;1) \text{ forman una base de "S"}$$

2) Como "A" y "S" son ortogonales, el espacio "V" es suma directa de "A" y "S"; por tanto, todo vector $\bar{v}=\lambda_1\bullet\bar{e}_1+\lambda_2\bullet\bar{e}_2+\lambda_3\bullet\bar{e}_3\in V$ puede expresarse de modo único de la forma $\bar{v}=\bar{a}+\bar{s}$, siendo $\bar{a}\in A$, $\bar{s}\in S$ y $\bar{a}\bullet\bar{s}=0$.

- Como $\bar{a}\in A$ y $\{\bar{a}_1\}$ es una base de "A", ha de ser $\bar{a}=\alpha_1\bullet\bar{a}_1$.
- Como $\bar{s}\in S$ y $\{\bar{w}_1,\bar{w}_2\}$ es base de "S", ha de ser $\bar{s}=\alpha_2\bullet\bar{w}_1+\alpha_3\bullet\bar{w}_2$.
- Por tanto, es $\bar{v}=\lambda_1\bullet\bar{e}_1+\lambda_2\bullet\bar{e}_2+\lambda_3\bullet\bar{e}_3=\alpha_1\bullet\bar{a}_1+\alpha_2\bullet\bar{w}_1+\alpha_3\bullet\bar{w}_2$
- Como $\{\bar{a}_1,\bar{w}_1,\bar{w}_2\}$ es una base de "V" (pues $A\cap S=\bar{0}$ y $A+S=V$), es:

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&4&1\\1&0&1\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \bar{a}_1&\bar{w}_1&\bar{w}_2\end{matrix}\end{array}\bullet\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}}^{\text{Ecuación del cambio de la base }\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}\text{ a la base }\{\bar{a}_1,\bar{w}_1,\bar{w}_2\}}\Rightarrow\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&4&1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}\Rightarrow$$

haciendo los cálculos

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = (4.\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)/6 \\ \alpha_2 = (2.\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)/6 \\ \alpha_3 = (-4.\lambda_1 + \lambda_2 + 5.\lambda_3)/6 \end{cases}$$

- La **proyección ortogonal** de "V" sobre "A" es el **endomorfismo** $g : V \mapsto V$ tal que $g(\bar{v}) = \bar{a}$:

$$g(\bar{v}) = \bar{a} = \alpha_1 \bullet \bar{a}_1 = \left(\frac{1}{6}.(4.\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\right) \bullet (1;-1;1) =$$

$$\boxed{\bar{a} = \alpha_1 \bullet \bar{a}_1} \qquad \boxed{\alpha_1 = (4.\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)/6}$$

$$= \frac{1}{6} \bullet (4.\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \,;\, -4.\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \,;\, 4.\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) =$$

$$= \frac{1}{6} \bullet \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la proyección ortogonal del vector $\bar{k} = 2 \bullet \bar{e}_1 + 3 \bullet \bar{e}_2 + 4 \bullet \bar{e}_3 \in V$ sobre el subespacio "A" es el vector $g(\bar{k}) = \frac{3}{2} \bullet \bar{e}_1 - \frac{3}{2} \bullet \bar{e}_2 + \frac{3}{2} \bullet \bar{e}_3$, pues:

$$g(\bar{k}) = \frac{1}{6} \bullet \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \bullet \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \in A$$

- **Nota**

  Puedes apostar tranquilamente la vida a que se ha deslizado un **error de cálculo** si no sucede que $\operatorname{Im} g.(g) = A$ y $\ker.(g) = S$.

3) La **simetría** del espacio "V" respecto al subespacio "A" es el **endomorfismo** $h : V \mapsto V$ tal que $h(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{s}$.

$$h(\bar{v}) = \bar{a} - \bar{s} = \alpha_1 \bullet \bar{a}_1 - \alpha_2 \bullet \bar{w}_1 - \alpha_3 \bullet \bar{w}_2 =$$

$$\boxed{\bar{a} = \alpha_1 \bullet \bar{a}_1 \;;\; \bar{s} = \alpha_2 \bullet \bar{w}_1 + \alpha_3 \bullet \bar{w}_2}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \alpha_1 = (4.\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)/6 \;;\; \alpha_2 = (2.\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)/6 \\ \alpha_3 = (-4.\lambda_1 + \lambda_2 + 5.\lambda_3)/6 \end{gathered}}$$

$$= \left(\frac{1}{6}.(4.\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\right) \bullet (1;-1;1) - \left(\frac{1}{6}.(2.\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\right) \bullet (1;4;0) -$$

$$- \left(\frac{1}{6}.(-4.\lambda_1 + \lambda_2 + 5.\lambda_3)\right) \bullet (0;1;1) =$$

$$= \frac{1}{6} \bullet (2.\lambda_1 - 2.\lambda_2 + 2.\lambda_3 \,;\, -8.\lambda_1 - 4.\lambda_2 - 2.\lambda_3 \,;\, 8.\lambda_1 - 2.\lambda_2 - 4.\lambda_3) =$$

$$= \frac{1}{6} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -8 & -4 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el simétrico del vector $\bar{k} = 2 \bullet \bar{e}_1 + 3 \bullet \bar{e}_2 + 4 \bullet \bar{e}_3 \in V$ respecto al subespacio "A" es el vector $h(\bar{k}) = 1 \bullet \bar{e}_1 - 6 \bullet \bar{e}_2 - 1 \bullet \bar{e}_3$, pues:

$$h(\bar{k}) = \frac{1}{6} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -8 & -4 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \bullet \begin{bmatrix} 6 \\ -36 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- ## Nota bene

Podemos identificar al endomorfismo "h" de modo más rápido teniendo en cuenta que $M_h = 2 \bullet M_g - I$, siendo M_h la matriz asociada a "h" y M_g la matriz asociada a "g". Así, en nuestro caso, siendo

Nota bene ≡ fíjate bien

$$M_g = \frac{1}{6} \bullet \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es:

$$M_h = 2 \bullet M_g - I = \frac{2}{6} \bullet \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -8 & -4 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

- ## Nota

Si queremos expresar el vector $\overline{v} = \lambda_1 \bullet \overline{e}_1 + \lambda_2 \bullet \overline{e}_2 + \lambda_3 \bullet \overline{e}_3 \in V$ como suma de un vector del subespacio "A" y otro vector del subespacio "S", la cosa no puede ser más fácil, pues siendo:

$$\overline{v} = \overline{a} + \overline{s}, \text{ con } \overline{a} \in A,\ \overline{s} \in S,\ \overline{a} \bullet \overline{s} = 0$$

como $g(\overline{v}) = \overline{a}$ y $h(\overline{v}) = \overline{a} - \overline{s}$, es $\overline{s} = g(\overline{v}) - h(\overline{v})$.

Por ejemplo, para expresar el vector $\overline{k} = 2 \bullet \overline{e}_1 + 3 \bullet \overline{e}_2 + 4 \bullet \overline{e}_3 \in V$ como suma de un vector $\overline{p} \in A$ y otro vector $\overline{q} \in S$, la cosa no puede ser más fácil, pues siendo:

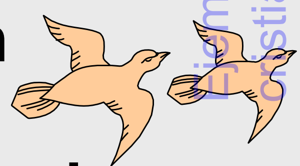
$$\overline{k} = \overline{p} + \overline{q}, \text{ con } \overline{p} \in A,\ \overline{q} \in S,\ \overline{p} \bullet \overline{q} = 0$$

como $g(\overline{k}) = \overline{p}$ y $h(\overline{k}) = \overline{p} - \overline{q}$, es:

$$\overline{q} = g(\overline{k}) - h(\overline{k}) = \frac{1}{2} \bullet \overline{e}_1 + \frac{9}{2} \bullet \overline{e}_2 + \frac{5}{2} \bullet \overline{e}_3 .$$

$$g(\overline{k}) = \frac{3}{2} \bullet \overline{e}_1 - \frac{3}{2} \bullet \overline{e}_2 + \frac{3}{2} \bullet \overline{e}_3 \ ; \ h(\overline{k}) = 1 \bullet \overline{e}_1 - 6 \bullet \overline{e}_2 - 1 \bullet \overline{e}_3$$

El primer objetivo de quien no se chupa el dedo es averiguar cuanto antes si se ha equivocado de Carrera o no... y eso te lo dicen las Matemáticas, no las asignaturas fáciles que aprueba todo el mundo.



FONEMATO 10.6.4

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo cuya matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ es la matriz unidad.

1) Demuestre que si $\bar{p}, \bar{q} \in V$ y $\bar{p} \neq \bar{0}$, siempre puede descomponerse el vector $\bar{q}$ en suma de un vector $\lambda \bullet \bar{p}$ proporcional a $\bar{p}$ y un vector ortogonal a $\bar{p}$, siendo única dicha descomposición. De $\lambda \bullet \bar{p}$ se dice proyección ortogonal de $\bar{q}$ sobre $\bar{p}$.

2) Determine la proyección ortogonal de $\bar{q} = (1;1;0;0)$ sobre $\bar{p} = (2;1;1;0)$.

SOLUCIÓN

1) Sean

$$\begin{Bmatrix} \bar{p} = p_1 \bullet \bar{e}_1 + p_2 \bullet \bar{e}_2 + p_3 \bullet \bar{e}_3 + p_4 \bullet \bar{e}_4 \\ \bar{q} = q_1 \bullet \bar{e}_1 + q_2 \bullet \bar{e}_2 + q_3 \bullet \bar{e}_3 + q_4 \bullet \bar{e}_4 \end{Bmatrix}$$

Demostremos que hay un único $\bar{r} = r_1 \bullet \bar{e}_1 + r_2 \bullet \bar{e}_2 + r_3 \bullet \bar{e}_3 + r_4 \bullet \bar{e}_4 \in V$ y un único número real λ tales que $\lambda \bullet \bar{p} + \bar{r} = \bar{q}$ y $\bar{p} \bullet \bar{r} = 0$. Es:

$$* \ \lambda \bullet \bar{p} + \bar{r} = \bar{q} \to \begin{cases} \lambda.p_1 + r_1 = q_1 \\ \lambda.p_2 + r_2 = q_2 \\ \lambda.p_3 + r_3 = q_3 \\ \lambda.p_4 + r_4 = q_4 \end{cases}$$

$$* \ \bar{p} \bullet \bar{r} = 0 \longrightarrow p_1.r_1 + p_2.r_2 + p_3.r_3 + p_4.r_4 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda.p_1 + r_1 = q_1 \\ \lambda.p_2 + r_2 = q_2 \\ \lambda.p_3 + r_3 = q_3 \\ \lambda.p_4 + r_4 = q_4 \\ p_1.r_1 + p_2.r_2 + p_3.r_3 + p_4.r_4 = 0 \end{matrix}\right\} \ (I)$$

Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$, el sistema lineal (I), que tiene 5 ecuaciones y 5 incógnitas r_1, r_2, r_3, r_4 y λ, siempre es compatible y determinado (siempre tiene solución única), pues su matriz de coeficientes siempre es regular:

$$\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} = \ldots = -(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) \neq 0$$

$\boxed{\text{pues } \bar{p} = (p_1;p_2;p_3;p_4) \neq \bar{0}}$

2) Si $\bar{q} = (1;1;0;0)$ y $\bar{p} = (2;1;1;0)$, el sistema (I) se convierte en:

$$\left.\begin{matrix} \lambda.2 + r_1 = 1 \\ \lambda.1 + r_2 = 1 \\ \lambda.1 + r_3 = 0 \\ \lambda.0 + r_4 = 0 \\ 2.r_1 + 1.r_2 + 1.r_3 + 0.r_4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda = 1/2 \\ r_1 = 0 \\ r_2 = 1/2 \\ r_3 = -1/2 \\ r_4 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ \bar{r} = (0;1/2;-1/2;0) \end{cases}$$

Por tanto, es:

$$\bar{q} = \underbrace{\frac{1}{2} \bullet \bar{p}}_{\boxed{\text{proporcional a } \bar{p}}} + \underbrace{(0;1/2;-1/2;0)}_{\boxed{\text{ortogonal a } \bar{p}}}$$

La proyección ortogonal de $\bar{q} = (1;1;0;0)$ sobre $\bar{p} = (2;1;1;0)$ es $\frac{1}{2} \bullet \bar{p}$.

FONEMATO 10.6.5

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\overline{e}_1, \overline{e}_2$.

1) Determine la proyección ortogonal de $\overline{q}=(2;1)$ sobre $\overline{p}=(3;4)$.

2) Determine la proyección ortogonal de $\overline{q}$ sobre $\overline{p}$ si $G=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3) Determine la proyección ortogonal de $\overline{q}$ sobre $\overline{p}$ si $G=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

• Debemos determinar el único vector $\overline{r}=r_1\bullet\overline{e}_1+r_2\bullet\overline{e}_2\in V$ y el único número real λ tales que:

$$\underbrace{\lambda\bullet\overline{p}}_{\boxed{\text{proyección orotogonal de } \overline{q} \text{ sobre } \overline{p}}}+\overline{r}=\overline{q}\ ;\ \overline{p}\bullet\overline{r}=0$$

1) Es:

$$\left.\begin{array}{l} *\ \lambda\bullet\overline{p}+\overline{r}=\overline{q}\Rightarrow\begin{cases}\lambda.3+r_1=2\\ \lambda.4+r_2=1\end{cases} \\ *\ \overline{p}\bullet\overline{r}=0\Rightarrow[3\quad 4]\bullet\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} 3.\lambda+r_1=2\\ 4.\lambda+r_2=1\\ 2.r_1+r_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \lambda=1/2\\ r_1=1/2\\ r_2=-1\end{array}\right\}$$

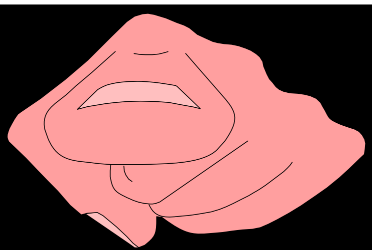
La proyección ortogonal de $\overline{q}=(2;1)$ sobre $\overline{p}=(3;4)$ es $\frac{1}{2}\bullet\overline{p}\equiv(\frac{3}{2};2)$.

2) Es:

$$\left.\begin{array}{l} *\ \lambda\bullet\overline{p}+\overline{r}=\overline{q}\Rightarrow\begin{cases}\lambda.3+r_1=2\\ \lambda.4+r_2=1\end{cases} \\ *\ \overline{p}\bullet\overline{r}=0\Rightarrow[3\quad 4]\bullet\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \lambda.3+r_1=2\\ \lambda.4+r_2=1\\ 3.r_1+4.r_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \lambda=2/5\\ r_1=4/5\\ r_2=-3/5\end{array}\right\}$$

La proyección ortogonal de $\overline{q}=(2;1)$ sobre $\overline{p}=(3;4)$ es $\frac{2}{5}\bullet\overline{p}\equiv(\frac{6}{5};\frac{8}{5})$.

3) La matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ no corresponde a un producto escalar, pues no corresponde a una forma bilineal simétrica con forma cuadrática asociada definida positiva, ya que los autovalores de $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ son 4 y 0, por lo que la forma cuadrática asociada es semidefinida positiva.



¡No te fíes ni de tu padre!

10.7 BASE ORTOGONAL

- Se dice que una base del espacio vectorial euclídeo "V" es ortogonal si está formada por vectores ortogonales dos a dos; o sea, el producto escalar de cualesquiera dos vectores de la base es cero.
- Siendo $B=\{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$ una base ortogonal de "V", es $\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j = 0$ si $i \neq j$; en consecuencia, la matriz de Graam respecto de la base "B" es diagonal.

FONEMATO 10.7.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de "V". Determine una base ortogonal de "V".

UNA SOLUCIÓN

- Elegimos un vector no nulo cualquiera de "V". Por ejemplo, elegimos

$$\bar{e}_1 = 1 \bullet \bar{e}_1 + 0 \bullet \bar{e}_2 = (1;0)$$

- Determinamos el subespacio "S" que forman los vectores ortogonales a $\bar{e}_1$:

$$S = \{(\mu; -3.\mu),\ \forall \mu \in \Re\}$$

VENTANA

Si $\bar{x} = (x_1; x_2) \in S$ debe ser $\bar{x} \bullet \bar{e}_1 = 0$:

$$\bar{x} \bullet \bar{e}_1 = 0 \Rightarrow [x_1 \quad x_2] \bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3.x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = -3.x_1 \Rightarrow S = \{(\theta; -3.\theta),\ \forall \theta \in \Re\}$$

- El vector $\bar{w} = (1;-3)$ es una base de "S", y $\{\bar{e}_1, \bar{w}\}$ es una base ortogonal del espacio vectorial euclídeo "V".

OTRA SOLUCIÓN

Empleando el método de Graam-Schmidt (6.5), a partir de la base $B=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ determinamos una base ortogonal $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ de "V":

$$\bar{u}_1 = \bar{e}_1 = (1;0)$$

$$\bar{u}_2 = \alpha \bullet \bar{u}_1 + \bar{e}_2 = (-\frac{1}{3}) \bullet (1;0) + (0;1) = (-\frac{1}{3}; 1)$$

VENTANA

Para determinar α exigimos que $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ sean ortogonales:

$$\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_2 = 0 \Rightarrow \bar{u}_1 \bullet (\alpha \bullet \bar{u}_1 + \bar{e}_2) = 0 \Rightarrow \alpha.(\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_1) + \bar{u}_1 \bullet \bar{e}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha.\left([1 \quad 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + [1 \quad 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3.\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$

Observa que $\bar{w} = (1;-3)$ y $\bar{u}_2 = (-\frac{1}{3}; 1)$ son proporcionales: $\bar{w} = (-3) \bullet \bar{u}_2$

10.8 BASE ORTONORMAL

- Se dice que una base del espacio vectorial euclídeo "V" es **ortonormal** si es ortogonal y todos los vectores de la base tienen módulo unidad.
- Siendo $B = \{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$ una base ortogonal de "V", es:

$$\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j = 0 \text{ si } i \neq j \ ; \ \bar{e}_i \bullet \bar{e}_j = 1 \text{ si } i = j$$

Por tanto, la matriz de Graam respecto de la base "B" es la **matriz unidad.**

FONEMATO 10.8.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de "V". Determine una base ortonormal de "V".

SOLUCIÓN

- Empleando el **método de Graam-Schmidt** (6.5), a partir de la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ determinamos una base **ortogonal** $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ de "V":

$$\bar{u}_1 = \bar{e}_1 = (1;0)$$

$$\bar{u}_2 = \alpha \bullet \bar{u}_1 + \bar{e}_2 = (-\frac{1}{2}) \bullet (1;0) + (0;1) = (-\frac{1}{2};1)$$

VENTANA

Para determinar α exigimos que $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ sean ortogonales:

$$\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_2 = 0 \Rightarrow \bar{u}_1 \bullet (\alpha \bullet \bar{u}_1 + \bar{e}_2) = 0 \Rightarrow \alpha.(\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_1) + \bar{u}_1 \bullet \bar{e}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha.\left([1 \ \ 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + [1 \ \ 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2.\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

- Los vectores $\bar{v}_1 = \dfrac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|}$ y $\bar{v}_2 = \dfrac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|}$ forman una base ortonormal de "V".

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = (1/\sqrt{2};0)$$

$$\boxed{\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_1 = [1 \ \ 0] \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow \|\bar{u}_1\| = \sqrt{2}}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|} = (\sqrt{2}/2;\sqrt{2})$$

$$\boxed{\bar{u}_2 \bullet \bar{u}_2 = [-1/2 \ \ 1] \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow \|\bar{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

FONEMATO 10.8.2

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\overline{m},\overline{n},\overline{p}\}$ de "V".

1) Determine una base ortogonal de "V".

2) Determine una base ortonormal de "V".

SOLUCIÓN

1) Elegimos un vector no nulo cualquiera de "V". Por ejemplo, elegimos

$$\overline{m}=1\bullet\overline{m}+0\bullet\overline{n}+0\bullet\overline{p}=(1;0;0)$$

Determinamos el subespacio S_1 que forman los vectores ortogonales a $\overline{m}$:

$$S_1=\{(\mu;\delta;-3.\mu),\ \forall\delta,\mu\in\Re\}$$

VENTANA

Si $\overline{x}=(x_1;x_2;x_3)\in S_1$ debe ser $\overline{x}\bullet\overline{m}=0$:

$$\overline{x}\bullet\overline{m}=0\Rightarrow[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\bullet\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=0\Rightarrow 3.x_1+x_3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3=-3.x_1\Rightarrow S_1=\{(\mu;\delta;-3.\mu),\ \forall\delta,\mu\in\Re\}$$

- Elegimos un vector no nulo cualquiera de S_1. Por ejemplo, elegimos el vector $\overline{c}=(1;0;-3)$ que resulta al hacer $\mu=1$ y $\delta=0$.

  Determinamos el subespacio S_2 que forman los vectores ortogonales a $\overline{c}$:

$$S_2=\{(\lambda;2.\theta;-3.\theta),\ \forall\lambda,\theta\in\Re\}$$

VENTANA

Si $\overline{x}=(x_1;x_2;x_3)\in S_2$ debe ser $\overline{x}\bullet\overline{c}=0$:

$$\overline{x}\bullet\overline{c}=0\Rightarrow[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\bullet\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\0\\-3\end{bmatrix}=0\Rightarrow 3.x_2+2.x_3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3=-3.x_2/2\Rightarrow S_2=\{(\lambda;2.\theta;-3.\theta),\ \forall\lambda,\theta\in\Re\}$$

- Al reunir las ecuaciones cartesianas de S_1 y las de S_2 obtenemos un sistema de ecuaciones cartesianas del subespacio $S_1\cap S_2$:

$$S_1\cap S_2=\left\{(x_1;x_2;x_3)\in V\ \middle/\ \begin{matrix}3.x_1+x_3=0 & (I)\\ 3.x_2+2.x_3=0 & (II)\end{matrix}\right\}$$

  Por cumplir (I), los vectores de $S_1\cap S_2$ son ortogonales a $\overline{m}=(1;0;0)$.

  Por cumplir (II), los vectores de $S_1\cap S_2$ son ortogonales a $\overline{c}=(1;0;-3)$.

  Así, si $\overline{k}\in S_1\cap S_2$ $(\overline{k}\neq\overline{0})$, los vectores $\overline{m}$, $\overline{c}$ y $\overline{k}$ forman una base ortogonal de "V", pues son ortogonales dos a dos: $\overline{m}\bullet\overline{c}=0$, $\overline{m}\bullet\overline{k}=0$ y $\overline{c}\bullet\overline{k}=0$.

  La obtención de un vector $\overline{k}\in S_1\cap S_2$ $(\overline{k}\neq\overline{0})$ es trivial, pues de (I) y (II) resulta $x_2=2.x_1$ y $x_3=-3.x_1$. Así, es $S_1\cap S_2=\{(\varepsilon;2.\varepsilon;-3.\varepsilon),\ \forall\varepsilon\in\Re\}$ y, como queda dicho, todo vector no nulo de $S_1\cap S_2$ forma una base ortogonal de "V" junto a los vectores $\overline{m}=(1;0;0)$ y $\overline{c}=(1;0;-3)$. Por ejemplo, elegimos $\overline{k}=(1;2;-3)$, obtenido al hacer $\varepsilon=1$.

2) Como la base $\{\overline{m}, \overline{c}, \overline{k}\}$ es ortogonal, dividiendo cada vector por su módulo obtenemos una base ortonormal. Es:

$$\overline{m} \bullet \overline{m} = g_{11} = 3 \Rightarrow \|\overline{m}\| = \sqrt{3}$$

$$\overline{c} \bullet \overline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \bullet G \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 6 \Rightarrow \|\overline{c}\| = \sqrt{6}$$

$$\overline{k} \bullet \overline{k} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow \|\overline{k}\| = \sqrt{2}$$

Una base ortonormal de "V" es la que forman $\dfrac{\overline{m}}{\|\overline{m}\|}$, $\dfrac{\overline{c}}{\|\overline{c}\|}$ y $\dfrac{\overline{k}}{\|\overline{k}\|}$:

$$\frac{\overline{m}}{\|\overline{m}\|} = (1/\sqrt{3};0;0) \;;\; \frac{\overline{c}}{\|\overline{c}\|} = (1/\sqrt{6};0;-1/\sqrt{6}) \;;\; \frac{\overline{k}}{\|\overline{k}\|} = (1/\sqrt{2};2/\sqrt{2};-3/\sqrt{2})$$

Nota bene

Hemos matado moscas a cañonazos: habríamos trabajado menos si hubiéramos observado que en la base de referencia $B = \{\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}\}$ los vectores $\overline{m}$ y $\overline{n}$ son ortogonales, pues en la matriz "G" es $g_{12} = g_{21} = 0$.

Así, como $\dim.(V) = 3$, para encontrar una base ortogonal de "V" basta encontrar $\overline{z} \in V$ que sea ortogonal a $\overline{m}$ y $\overline{n}$; o sea, encontrar $\overline{z} = (z_1;z_2;z_3) \in V$ tal que $\overline{z} \bullet \overline{m} = 0$ y $\overline{z} \bullet \overline{n} = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{z} \bullet \overline{m} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \bullet G \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3.z_1 + z_3 = 0 \\ \overline{z} \bullet \overline{n} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \bullet G \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2.z_1 + z_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_2 = 3.z_1/2 \\ z_3 = -3.z_1 \end{array}\right\}$$

Por tanto, el subespacio "W" de "V" que forman los vectores ortogonales a $\overline{m}$ y $\overline{n}$ es $W = \{(2.\beta;3.\beta;-6.\beta), \forall \beta \in \Re\}$, y, como queda dicho, todo vector no nulo de "W" forma una base ortogonal de "V" junto a los vectores $\overline{m}$ y $\overline{n}$. Por ejemplo, el vector $\overline{u} = (2;3;-6) \in W$ obtenido al hacer $\beta = 1$.

FONEMATO 10.8.3

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&2&2\\1&2&4\end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\overline{m},\overline{n},\overline{p}\}$ de "V". Determine una base ortogonal de "V" y una base ortonormal de "V".

SOLUCIÓN

Como **la matriz de Graam es diagonal respecto de una base ortogonal de "V"**, diagonalizaremos "G" mediante transformaciones elementales (9.16) y así determinaremos una base de "V" respecto de la cual es diagonal la matriz de Graam del producto escalar definido en "V".

Construimos la matriz $G\,|\,I_3$ y en ella realizamos transformaciones elementales de filas y las mismas transformaciones elementales de columnas con el objetivo de transformar "G" en una matriz diagonal "D":

a la 2ª columna le restamos la 3ª columna

a la 2ª fila le restamos la 3ª fila

a la 3ª columna le sumamos la 2ª columna

a la 3ª fila le sumamos la 2ª fila

$$G\,|\,I_3=\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&1&1&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\1&2&4&0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\1&-2&4&0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\0&2&-2&0&1&-1\\1&-2&4&0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\0&2&0&0&1&-1\\1&-2&2&0&1&0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\0&2&0&0&1&-1\\1&0&2&0&1&0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}5/2&0&1&1&0&0\\0&2&0&0&1&-1\\0&0&2&0&1&0\end{array}\right]\Rightarrow$$

a la 1ª columna le restamos la mitad de la 3ª columna

a la 1ª fila le restamos la mitad de la 3ª fila

$$\Rightarrow\left[\underbrace{\begin{array}{ccc}5/2&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{array}}_{D}\;\middle|\;\underbrace{\begin{array}{ccc}1&-1/2&0\\0&1&-1\\0&1&0\end{array}}_{P^t}\right]$$

donde "D" es la matriz diagonal buscada y P^t es la traspuesta asociada al cambio de base que debe hacerse en "V" para que "D" sea la matriz asociada al producto escalar definido en "V". Naturalmente, como

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/2&1&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\\end{array}$$
$$\qquad\uparrow\qquad\uparrow\qquad\uparrow$$
$$\qquad\overline{h}_1\qquad\overline{h}_2\qquad\overline{h}_3$$

los vectores

$$\overline{h}_1=1\bullet\overline{m}-\frac{1}{2}\bullet\overline{n}+0\bullet\overline{p}\;;\;\overline{h}_2=0\bullet\overline{m}+1\bullet\overline{n}-1\bullet\overline{p}\;;\;\overline{h}_3=0\bullet\overline{m}+1\bullet\overline{n}+0\bullet\overline{p}$$

forman una base de "V" respecto de la cual la matriz de Graam es "D".

Como "D" es diagonal, la base de "V" que forman $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$ es ortogonal.

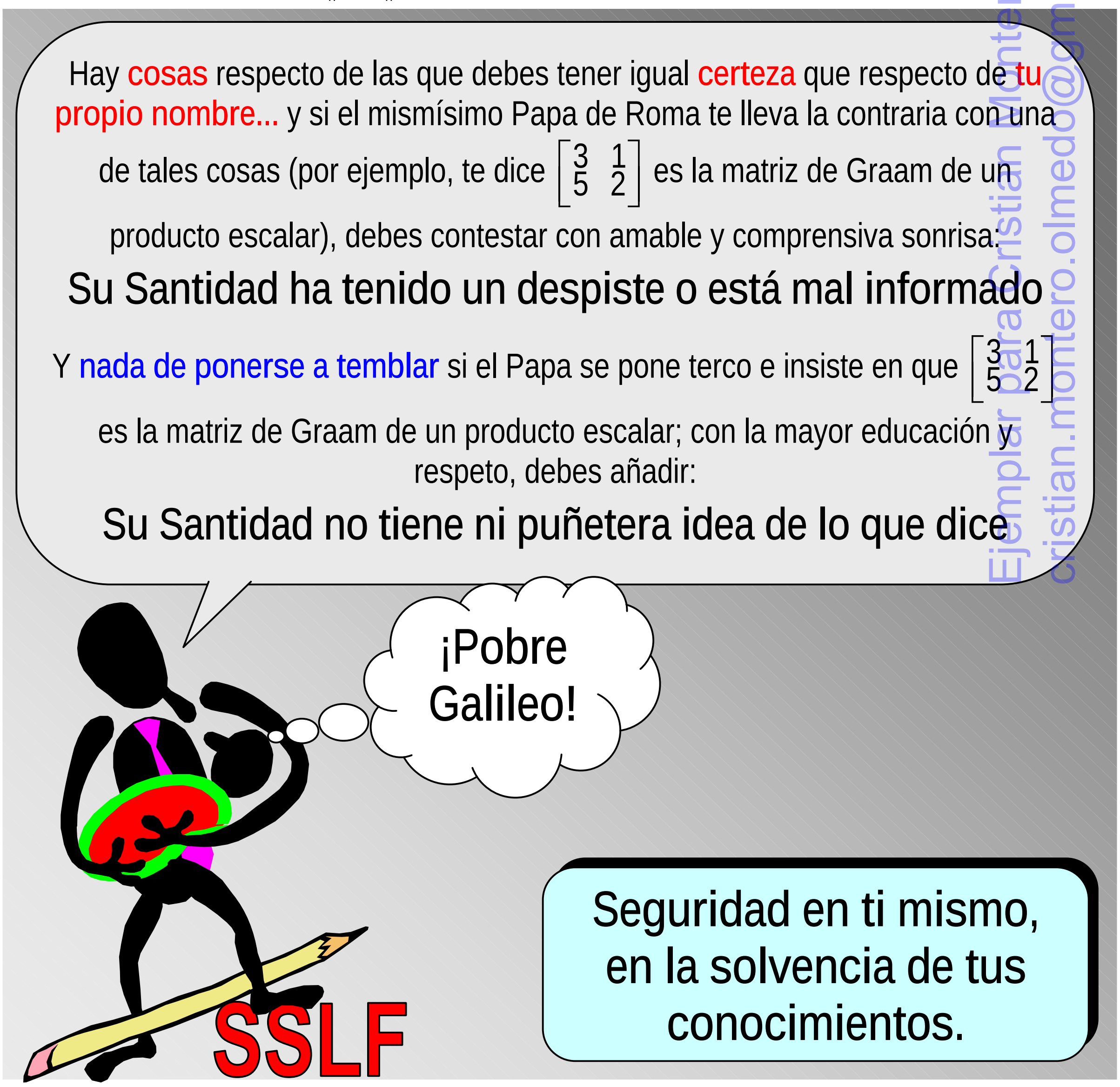
> Recuérdese que $D = \{d_{ij}\}$ es tal que $d_{ij} = \overline{h}_i \bullet \overline{h}_j$. Por tanto, siendo $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$, está garantizado que $\overline{h}_i$ y $\overline{h}_j$ son ortogonales si $i \neq j$.

Dividiendo por su módulo cada vector de la base ortogonal $\{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3\}$ obtenemos una base ortonormal de "V". Como:

$$\overline{h}_1 \bullet \overline{h}_1 = d_{11} = 5/2 \Rightarrow \| \overline{h}_1 \| = \sqrt{5/2}$$
$$\overline{h}_2 \bullet \overline{h}_2 = d_{22} = 2 \Rightarrow \| \overline{h}_2 \| = \sqrt{2}$$
$$\overline{h}_3 \bullet \overline{h}_3 = d_{33} = 2 \Rightarrow \| \overline{h}_3 \| = \sqrt{2}$$

una base ortonormal de "V" es la que forman los vectores $\frac{\overline{h}_1}{\|\overline{h}_1\|}$, $\frac{\overline{h}_2}{\|\overline{h}_2\|}$ y $\frac{\overline{h}_3}{\|\overline{h}_3\|}$:

$$\frac{\overline{h}_1}{\|\overline{h}_1\|} = \sqrt{\frac{2}{5}} \bullet \left(1 \bullet \overline{m} - \frac{1}{2} \bullet \overline{n} + 0 \bullet \overline{p}\right) \; ; \; \frac{\overline{h}_2}{\|\overline{h}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bullet (0 \bullet \overline{m} + 1 \bullet \overline{n} - 1 \bullet \overline{p})$$
$$\frac{\overline{h}_3}{\|\overline{h}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bullet (0 \bullet \overline{m} + 1 \bullet \overline{n} + 0 \bullet \overline{p})$$



FONEMATO 10.8.4

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\overline{m},\overline{n},\overline{p},\overline{q}\}$ de "V". Determine una base ortonormal del subespacio $H=\{(x_1;x_2;x_3;x_4)/x_1+x_2+x_3+x_4=0\}\subset V$.

SOLUCIÓN

Determinamos una base cualquiera de "H":

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0\Rightarrow x_1=-x_2-x_3-x_4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow H=\{(-a-b-c;a;b;c),\ \forall a,b,c\in\Re\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow H=\{a\bullet\underbrace{(-1;1;0;0)}_{\overline{e}_1}+b\bullet\underbrace{(-1;0;1;0)}_{\overline{e}_2}+c\bullet\underbrace{(-1;0;0;1)}_{\overline{e}_3},\ \forall a,b,c\in\Re\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow B_1=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}\text{ es una base de "H"}$$

A partir de la base B_1, y empleando el **método de Graam-Schmidt** (6.5), determinamos una base **ortogonal** $B_2=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\}$ de "H":

MEGAVENTANA

$$\overline{u}_1=\overline{e}_1=(-1;1;0;0)$$
$$\overline{u}_2=\alpha\bullet\overline{u}_1+\overline{e}_2 \rightarrow \overline{u}_2=(0;-1;1;0)$$
$$\overline{u}_3=\beta_1\bullet\overline{u}_1+\beta_2\bullet\overline{u}_2+\overline{e}_3 \rightarrow \overline{u}_3=(0;0;-1;1)$$

Exigimos que los vectores $\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3$ sean ortogonales dos a dos.

$$\overline{u}_1\bullet\overline{u}_2=0\Rightarrow\overline{u}_1\bullet(\alpha\bullet\overline{u}_1+\overline{e}_2)=0\Rightarrow\alpha.(\overline{u}_1\bullet\overline{u}_1)+\overline{u}_1\bullet\overline{e}_2=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha.\left(\begin{bmatrix}-1&1&0&0\end{bmatrix}\bullet G\bullet\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}-1&1&0&0\end{bmatrix}\bullet G\bullet\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=0\Rightarrow\alpha=-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\overline{u}_2=(-1)\bullet\overline{u}_1+\overline{e}_2=-(-1;1;0;0)+(-1;0;1;0)=(0;-1;1;0)$$

$$\overline{u}_1\bullet\overline{u}_3=0\Rightarrow\overline{u}_1\bullet(\beta_1\bullet\overline{u}_1+\beta_2\bullet\overline{u}_2+\overline{e}_3=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\beta_1.(\overline{u}_1\bullet\overline{u}_1)+\beta_2.\underbrace{(\overline{u}_1\bullet\overline{u}_2)}_{0}+\overline{u}_1\bullet\overline{e}_3=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\beta_1.\left(\begin{bmatrix}-1&1&0&0\end{bmatrix}\bullet G\bullet\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}-1&1&0&0\end{bmatrix}\bullet G\bullet\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow\beta_1=-1$$

$$\overline{u}_2\bullet\overline{u}_3=0\Rightarrow\overline{u}_2\bullet(\beta_1\bullet\overline{u}_1+\beta_2\bullet\overline{u}_2+\overline{e}_3=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\beta_1.\underbrace{(\overline{u}_2\bullet\overline{u}_1)}_{0}+\beta_2.(\overline{u}_2\bullet\overline{u}_2)+\overline{u}_2\bullet\overline{e}_3=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\beta_2.\left(\begin{bmatrix}0&-1&1&0\end{bmatrix}\bullet G\bullet\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0&-1&1&0\end{bmatrix}\bullet G\bullet\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow\beta_2=-1$$

Si $\beta_1=\beta_2=-1$, es $\overline{u}_3=(-1)\bullet\overline{u}_1+(-1)\bullet\overline{u}_2+\overline{e}_3=\ldots.=(0;0;-1;1)$

Dividiendo por su módulo cada vector de la base ortogonal $B_2=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$ obtenemos una base **ortonormal** de "V"... y como

$$\bar{u}_1\bullet\bar{u}_1=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=....=1\Rightarrow\|\bar{u}_1\|=\sqrt{\bar{u}_1\bullet\bar{u}_1}=1$$

$$\bar{u}_2\bullet\bar{u}_2=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=....=1\Rightarrow\|\bar{u}_2\|=\sqrt{\bar{u}_2\bullet\bar{u}_2}=1$$

$$\bar{u}_3\bullet\bar{u}_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=....=1\Rightarrow\|\bar{u}_3\|=\sqrt{\bar{u}_3\bullet\bar{u}_3}=1$$

resulta que la base $B_2=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$ es ortonormal.

10.9 COORDENADAS CONTRAVARIANTES. COORDENADAS COVARIANTES

- Si "V" es un espacio vectorial euclídeo de dimensión "n" y "G" es la matriz de Graam respecto de la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$, todo vector $\bar{x} \in V$ tiene dos tipos de coordenadas respecto de la base "B", las llamadas **contravariantes** $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ tales que

$$\bar{x} = x_1 \bullet \bar{e}_1 + x_2 \bullet \bar{e}_2 + \ldots + x_n \bullet \bar{e}_n$$

y las llamadas **covariantes** $\underbrace{(x^1; x^2; \ldots; x^n)}$ tales que

$$\boxed{\text{1,2, ... y "n" son superíndices, no exponentes}}$$

$$x^1 = \bar{x} \bullet \bar{e}_1 \;;\; x^2 = \bar{x} \bullet \bar{e}_2 \;;\; \ldots\ldots \;;\; x^n = \bar{x} \bullet \bar{e}_n$$

- Las coordenadas contravariantes (covariantes) se llaman también **coordenadas paralelas (coordenadas perpendiculares).** Unas y otras identifican al vector $\bar{x} \in V$, y están relacionadas mediante la matriz de Graam:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = G^{-1} \bullet \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = G \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Las coordenadas contravariantes coinciden con las covariantes si la base "B" es ortonormal, pues en tal caso la matriz de Graam es la matriz unidad.
- El producto escalar de los vectores $\bar{x}, \bar{y} \in V$ puede expresarse así:

$$\bar{x} \bullet \bar{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & .. & x_n \end{bmatrix} \bullet G \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & .. & x^n \end{bmatrix} \bullet G^{-1} \bullet \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & .. & x_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

FONEMATO 10.9.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ la base de referencia en "V". Se sabe que $\|\bar{e}_1\|=\|\bar{e}_1\|=1$ y $\|\bar{e}_3\|=2$, siendo:

$$\text{áng.}(\bar{e}_1;\bar{e}_2)=\pi/3\ ;\ \text{áng.}(\bar{e}_1;\bar{e}_3)=\text{áng.}(\bar{e}_2;\bar{e}_3)=\pi/2$$

Sean los vectores $\bar{a}=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3$ y $\bar{b}=\bar{e}_1-\bar{e}_3$.

1) Calcule $\bar{a}\bullet\bar{b}$ y las coordenadas covariantes de $\bar{a}$.

2) Calcule las coordenadas contravariantes del vector $\bar{k}$ cuyas coordenadas covariantes son $(5;1;8)$.

3) Calcule una base formada por $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y otro vector unitario $\bar{c}\in<\bar{e}_1,\bar{e}_2>$ que forme un ángulo $\pi/6$ con $\bar{e}_1$.

SOLUCIÓN

1) La matriz de Graam respecto de la base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ es:

$$G=\begin{bmatrix}\bar{e}_1\bullet\bar{e}_1 & \bar{e}_1\bullet\bar{e}_2 & \bar{e}_1\bullet\bar{e}_3\\ \bar{e}_2\bullet\bar{e}_1 & \bar{e}_2\bullet\bar{e}_2 & \bar{e}_2\bullet\bar{e}_3\\ \bar{e}_3\bullet\bar{e}_1 & \bar{e}_3\bullet\bar{e}_2 & \bar{e}_3\bullet\bar{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

VENTANA

$$\bar{e}_1\bullet\bar{e}_1=(\|\bar{e}_1\|)^2=1$$
$$\bar{e}_2\bullet\bar{e}_2=(\|\bar{e}_2\|)^2=1$$
$$\bar{e}_3\bullet\bar{e}_3=(\|\bar{e}_3\|)^2=4$$
$$\bar{e}_1\bullet\bar{e}_2=\|\bar{e}_1\|.\|\bar{e}_2\|.\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\bar{e}_2\bullet\bar{e}_1$$
$$\bar{e}_1\bullet\bar{e}_3=\|\bar{e}_1\|.\|\bar{e}_3\|.\cos\frac{\pi}{2}=0=\bar{e}_3\bullet\bar{e}_1$$
$$\bar{e}_2\bullet\bar{e}_3=\|\bar{e}_2\|.\|\bar{e}_3\|.\cos\frac{\pi}{2}=0=\bar{e}_3\bullet\bar{e}_2$$

Por tanto, como $\bar{a}=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=(1;1;1)$ y $\bar{b}=\bar{e}_1-\bar{e}_3=(1;0;-1)$, es:

$$\bar{a}\bullet\bar{b}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}}_{G}\bullet\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=5/3$$

Las coordenadas contravariantes de $\bar{a}=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3$ respecto de la base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ son $(1;1;1)$, pues $\bar{a}=1\bullet\bar{e}_1+1\bullet\bar{e}_2+1\bullet\bar{e}_3$.

Si las coordenadas covariantes de $\bar{a}$ respecto de "B" son $(x^1;x^2;x^3)$, es:

$$x^1=\bar{a}\bullet\bar{e}_1\ ;\ x^2=\bar{a}\bullet\bar{e}_2\ ;\ x^3=\bar{a}\bullet\bar{e}_3$$

siendo:

$$\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}}_{G}\bullet\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/2\\ 3/2\\ 4\end{bmatrix}$$

2) Si las coordenadas covariantes de $\bar{k}$ respecto de la base "B" son $(5;1;8)$, es:

$$5=\bar{k}\bullet\bar{e}_1 \;;\; 1=\bar{k}\bullet\bar{e}_2 \;;\; 8=\bar{k}\bullet\bar{e}_3$$

Así, si $\bar{k}=k_1\bullet\bar{e}_1+k_2\bullet\bar{e}_2+k_3\bullet\bar{e}_3$, es:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{G}{}^{-1}\bullet\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3) Si $\bar{c}\in<\bar{e}_1,\bar{e}_2>$, es $\bar{c}=c_1\bullet\bar{e}_1+c_2\bullet\bar{e}_2+0\bullet\bar{e}_3$.

Si $\|\bar{c}\|=1$, ha de ser $\bar{c}\bullet\bar{c}=1^2=1$:

$$\bar{c}\bullet\bar{c}=1\Rightarrow\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix}\bullet G\bullet\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix}=1\Rightarrow c_1^2+c_2^2+c_1.c_2=1 \quad \text{(I)}$$

Si el ángulo que forma $\bar{c}$ con $\bar{e}_1$ es $\pi/6$, debe ser:

$$\bar{c}\bullet\bar{e}_1=\|\bar{c}\|.\|\bar{e}_1\|.\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow c_1+\frac{1}{2}.c_2=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(II)}$$

$$\boxed{\bar{c}\bullet\bar{e}_1=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix}\bullet G\bullet\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=c_1+\frac{1}{2}.c_2 \;;\; \|\bar{e}_1\|=1 \;;\; \|\bar{c}\|=1}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que forman (I) y (II), obtenemos los valores de c_1 y c_2 que determinan al vector $\bar{c}$.

10.10 BASE RECÍPROCA

- Si "V" es un espacio vectorial euclídeo de dimensión "n" y "G" es la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$, en hay "V" hay otra base $B^*=\{\bar{e}_1^*,\bar{e}_2^*,\ldots,\bar{e}_n^*\}$ llamada **base recíproca** de "B" y tal que:

$$\bar{e}_i\bullet\bar{e}_j^*=1 \text{ si } i=j \;;\; \bar{e}_i\bullet\bar{e}_j^*=0 \text{ si } i\neq j$$

  La matriz de Graam respecto de la base B^* es G^{-1}.

- Las coordenadas contravariantes de $\bar{x}\in V$ respecto de la base "B" coinciden con las coordenadas covariantes de $\bar{x}\in V$ respecto de B^*, y al revés: las coordenadas covariantes de $\bar{x}\in V$ respecto de la base "B" coinciden con las coordenadas contravariantes de $\bar{x}\in V$ respecto de B^*. O sea, siendo

$$\bar{x}=x_1\bullet\bar{e}_1+x_2\bullet\bar{e}_2+\ldots+x_n\bullet\bar{e}_n$$
$$x^1=\bar{x}\bullet\bar{e}_1 \;;\; x^2=\bar{x}\bullet\bar{e}_2 \;;\; \ldots\ldots \;;\; x^n=\bar{x}\bullet\bar{e}_n$$

  es:

$$\bar{x}=x^1\bullet\bar{e}_1^*+x^2\bullet\bar{e}_2^*+\ldots+x^n\bullet\bar{e}_n^*$$
$$x_1=\bar{x}\bullet\bar{e}_1^* \;;\; x_2=\bar{x}\bullet\bar{e}_2^* \;;\; \ldots\ldots \;;\; x_n=\bar{x}\bullet\bar{e}_n^*$$

FONEMATO 10.10.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Sea $\bar{k} = 2 \bullet \bar{e}_1 + 3 \bullet \bar{e}_2 \in V$.

1) Calcule la base B^* recíproca de "B".
2) Calcule las coordenadas covariantes de $\bar{k}$ respecto de la base "B".
3) Compruebe que las coordenadas covariantes de $\bar{k}$ respecto de la base "B" coinciden con las coordenadas contravariantes de $\bar{k}$ respecto de la base B^*.
4) Calcule $\bar{k} \bullet \bar{h}$, siendo $\bar{h}$ el vector cuyas coordenadas contravariantes respecto de B^* son $(2;1)$.

SOLUCIÓN

1) Sea $B^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*\}$ la base recíproca de la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, siendo:

$$\bar{e}_1^* = x_1 \bullet \bar{e}_1 + x_2 \bullet \bar{e}_2 \quad ; \quad \bar{e}_2^* = y_1 \bullet \bar{e}_1 + y_2 \bullet \bar{e}_2$$

- Debe ser $\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j^* = 1$ si $i = j$ y $\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j^* = 0$ si $i \neq j$. Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{e}_1 \bullet \bar{e}_1^* = [1\ 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow 2.x_1 + x_2 = 1 \\ \bar{e}_2 \bullet \bar{e}_1^* = [0\ 1] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{e}_1^* = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{e}_1 \bullet \bar{e}_2^* = [1\ 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2.y_1 + y_2 = 0 \\ \bar{e}_2 \bullet \bar{e}_2^* = [0\ 1] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{e}_2^* = -\bar{e}_1 + 2 \bullet \bar{e}_2$$

2) Las coordenadas contravariantes de $\bar{k}$ respecto de la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ son $(2;3)$, pues $\bar{k} = 2 \bullet \bar{e}_1 + 3 \bullet \bar{e}_2$. Así, siendo $(k^1; k^2)$ las coordenadas covariantes de $\bar{k}$ respecto de "B" (o sea $k^1 = \bar{k} \bullet \bar{e}_1$ y $k^2 = \bar{k} \bullet \bar{e}_2$), es:

$$\begin{bmatrix} k^1 \\ k^2 \end{bmatrix} = G \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3) Determinemos el vector cuyas coordenadas contravariantes respecto de la base $B^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*\}$ son $(7;5)$:

$$7 \bullet \bar{e}_1^* + 5 \bullet \bar{e}_2^* = 7 \bullet (\bar{e}_1 - \bar{e}_2) + 5 \bullet (-\bar{e}_1 + 2 \bullet \bar{e}_2) = 2 \bullet \bar{e}_1 + 3 \bullet \bar{e}_2 = \bar{k}$$

$$\boxed{\bar{e}_1^* = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \ ; \ \bar{e}_2^* = -\bar{e}_1 + 2 \bullet \bar{e}_2}$$

4) Si las coordenadas contravariantes de $\bar{h}$ respecto de la base B^* son $(2;1)$, éstas son las coordenadas covariantes de $\bar{h}$ respecto de la base "B". Por tanto:

$$\bar{k} \bullet \bar{h} = [2\ \ 3] \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2.1 + 3.2 = 9$$

FONEMATO 10.10.2

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y "G" la matriz de Graam respecto de la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine la base recíproca la base $B_1 = \{\bar{u}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{u}_1 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{u}_3 = \bar{e}_3\}$ expresada en coordenadas covariantes respecto de la base "B".

SOLUCIÓN

- Sea $B^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*\}$ la base recíproca de la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.
- Sea $B_1^* = \{\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \bar{u}_3^*\}$ la base recíproca de la base $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.
- Las coordenadas covariantes de un vector de "V" respecto de la base "B" coinciden con las coordenadas contravariantes de dicho vector respecto de la base B^* recíproca de "B"; por tanto, para identificar los vectores de la base B_1^* mediante sus coordenadas covariantes respecto de la base "B" basta identificar los vectores de B_1^* mediante sus coordenadas contravariantes respecto de B^*. Así, siendo:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^* &= a^1 \bullet \bar{e}_1^* + a^2 \bullet \bar{e}_2^* + a^3 \bullet \bar{e}_3^* \\ \bar{u}_2^* &= b^1 \bullet \bar{e}_1^* + b^2 \bullet \bar{e}_2^* + b^3 \bullet \bar{e}_3^* \\ \bar{u}_3^* &= c^1 \bullet \bar{e}_1^* + c^2 \bullet \bar{e}_2^* + c^3 \bullet \bar{e}_3^* \end{aligned}$$

debe ser

$$\bar{u}_i \bullet \bar{u}_j^* = 1 \text{ si } i = j \;\; ; \;\; \bar{u}_i \bullet \bar{u}_j^* = 0 \text{ si } i \neq j$$

Por tanto:

$$\blacklozenge \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 \bullet \bar{u}_1^* = 1 \\ \bar{u}_2 \bullet \bar{u}_1^* = 0 \\ \bar{u}_3 \bullet \bar{u}_1^* = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \bullet (a^1 \bullet \bar{e}_1^* + a^2 \bullet \bar{e}_2^* + a^3 \bullet \bar{e}_3^*) = 1 \\ (\bar{e}_2 + \bar{e}_3) \bullet (a^1 \bullet \bar{e}_1^* + a^2 \bullet \bar{e}_2^* + a^3 \bullet \bar{e}_3^*) = 0 \\ (\bar{e}_3) \bullet (a^1 \bullet \bar{e}_1^* + a^2 \bullet \bar{e}_2^* + a^3 \bullet \bar{e}_3^*) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Como las bases $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $B^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*\}$ son recíprocas, es:

$$\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j^* = 1 \text{ si } i = j \;\; ; \;\; \bar{e}_i \bullet \bar{e}_j^* = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^1 + a^2 = 1 \\ a^2 + a^3 = 0 \\ a^3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^1 = 1 \\ a^2 = 0 \\ a^3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\blacklozenge \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 \bullet \bar{u}_2^{*} = 0 \\ \bar{u}_2 \bullet \bar{u}_2^{*} = 1 \\ \bar{u}_3 \bullet \bar{u}_2^{*} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \bullet (b^1 \bullet \bar{e}_1^{*} + b^2 \bullet \bar{e}_2^{*} + b^3 \bullet \bar{e}_3^{*}) = 0 \\ (\bar{e}_2 + \bar{e}_3) \bullet (b^1 \bullet \bar{e}_1^{*} + b^2 \bullet \bar{e}_2^{*} + b^3 \bullet \bar{e}_3^{*}) = 1 \\ (\bar{e}_3) \bullet (b^1 \bullet \bar{e}_1^{*} + b^2 \bullet \bar{e}_2^{*} + b^3 \bullet \bar{e}_3^{*}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Como las bases $B = \{ \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \}$ y $B^* = \{ \bar{e}_1^{*}, \bar{e}_2^{*}, \bar{e}_3^{*} \}$ son recíprocas, es:

$\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j^{*} = 1$ si $i = j$; $\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j^{*} = 0$ si $i \neq j$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} b^1 + b^2 = 0 \\ b^2 + b^3 = 1 \\ b^3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} b^1 = -1 \\ b^2 = 1 \\ b^3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\blacklozenge \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 \bullet \bar{u}_3^{*} = 0 \\ \bar{u}_2 \bullet \bar{u}_3^{*} = 0 \\ \bar{u}_3 \bullet \bar{u}_3^{*} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \bullet (c^1 \bullet \bar{e}_1^{*} + c^2 \bar{e}_2^{*} + c^3 \bullet \bar{e}_3^{*}) = 0 \\ (\bar{e}_2 + \bar{e}_3) \bullet (c^1 \bullet \bar{e}_1^{*} + c^2 \bullet \bar{e}_2^{*} + c^3 \bullet \bar{e}_3^{*}) = 0 \\ (\bar{e}_3) \bullet (c^1 \bullet \bar{e}_1^{*} + c^2 \bullet \bar{e}_2^{*} + c^3 \bullet \bar{e}_3^{*}) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c^1 + c^2 = 0 \\ c^2 + c^3 = 0 \\ c^3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c^1 = 1 \\ c^2 = -1 \\ c^3 = 1 \end{array} \right\}$$

FONEMATO 10.10.3

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$.

Determine la base recíproca la base $B_1=\{\bar{u}_1=\bar{e}_1-\bar{e}_3,\ \bar{u}_1=\bar{e}_1+\bar{e}_2,\ \bar{u}_3=\bar{e}_2\}$ expresada en coordenadas contravariantes respecto de la base "B".

SOLUCIÓN

- Sea $B_1^*=\left\{\bar{u}_1^*,\bar{u}_2^*,\bar{u}_3^*\right\}$ la base recíproca de la base $B_1=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$.
- Para identificar a los vectores de la base $B_1^*=\left\{\bar{u}_1^*,\bar{u}_2^*,\bar{u}_3^*\right\}$ mediante sus coordenadas contravariantes respecto de la base "B" debemos expresar cada vector de B_1^* como combinación lineal de los vectores de la base "B". Sean:

$$\bar{u}_1^*=a_1\bullet\bar{e}_1+a_2\bullet\bar{e}_2+a_3\bullet\bar{e}_3\ ;\ \bar{u}_2^*=b_1\bullet\bar{e}_1+b_2\bullet\bar{e}_2+b_3\bullet\bar{e}_3$$
$$\bar{u}_3^*=c_1\bullet\bar{e}_1+c_2\bullet\bar{e}_2+c_3\bullet\bar{e}_3$$

- Siendo $B_1^*=\left\{\bar{u}_1^*,\bar{u}_2^*,\bar{u}_3^*\right\}$ la base recíproca de $B_1=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$, debe ser

$$\bar{u}_i\bullet\bar{u}_j^*=1\text{ si } i=j\ ;\ \bar{u}_i\bullet\bar{u}_j^*=0\text{ si } i\neq j$$

Por tanto:

$$\blacklozenge\left\{\begin{array}{l}\bar{u}_1\bullet\bar{u}_1^*=1\\ \bar{u}_2\bullet\bar{u}_1^*=0\\ \bar{u}_3\bullet\bar{u}_1^*=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}[1\ 0\ -1]\bullet G\bullet\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=1\\ [1\ 1\ 0]\bullet G\bullet\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=0\\ [0\ 1\ 0]\bullet G\bullet\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}-a_2-2.a_3=1\\ 2.a_1+3.a_2+3.a_3=0\\ a_1+2.a_2+2.a_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a_1=1\\ a_2=0\\ a_3=-1\end{array}\right\}$$

$$\blacklozenge \left\{ \begin{array}{l} \overline{u}_1 \bullet \overline{u}_2^* = 0 \\ \overline{u}_2 \bullet \overline{u}_2^* = 1 \\ \overline{u}_3 \bullet \overline{u}_2^* = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [1\ 0\ -1] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \\ [1\ 1\ 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 1 \\ [0\ 1\ 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -b_2 - 2.b_3 = 0 \\ 2.b_1 + 3.b_2 + 3.b_3 = 1 \\ b_1 + 2.b_2 + 2b_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} b_1 = 2 \\ b_2 = -2 \\ b_3 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\blacklozenge \left\{ \begin{array}{l} \overline{u}_1 \bullet \overline{u}_3^* = 0 \\ \overline{u}_2 \bullet \overline{u}_3^* = 0 \\ \overline{u}_3 \bullet \overline{u}_3^* = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

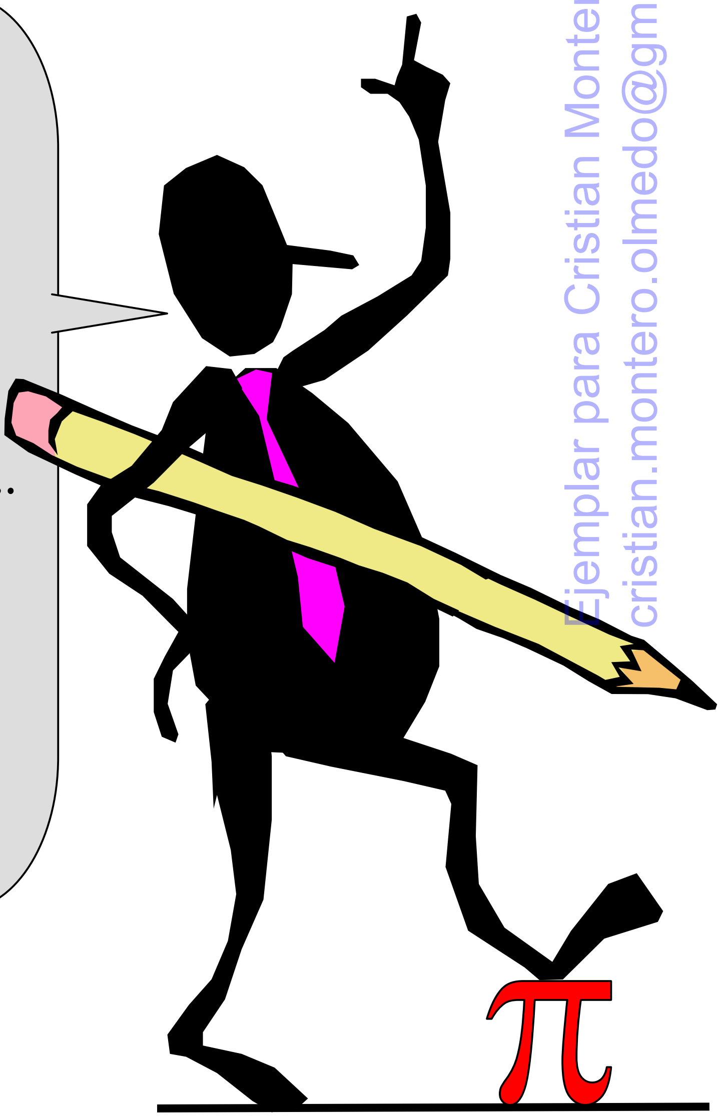
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [1\ 0\ -1] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0 \\ [1\ 1\ 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0 \\ [0\ 1\ 0] \bullet G \bullet \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -c_2 - 2.c_3 = 0 \\ 2.c_1 + 3.c_2 + 3.c_3 = 0 \\ c_1 + 2.c_2 + 2c_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_1 = -3 \\ c_2 = 4 \\ c_3 = -2 \end{array} \right\}$$

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS EN EL LIBRO

Inicialmente no debe preocuparte si los problemas te "salen" o no, sólo debe preocuparte **aprender a sufrir con ellos**... si eres perseverante, al final ninguno se resistirá, **lo que te producirá enorme gozo**



Tema 1
Cálculo Matricial

FONEMATO 1.1.1 (TODAS LAS RAÍCES ENTERAS)

Resuélvase la ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x) = 2.x^5 - 10.x^3 + 8.x$.

FONEMATO 1.1.2 (TODAS LAS RAÍCES FRACCIONARIAS)

Resuélvase la ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x) = 12.x^3 - 4.x^2 - 3.x + 1$

FONEMATO 1.1.3 (RAÍCES IMAGINARIAS)

Resuélvase la ecuación $x^6 + 64 = 0$

FONEMATO 1.6.1

1) Determine "A" y "B" si $A+B=C$ y $2\bullet A+3\bullet B=C$, siendo $C=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 7 & 9\end{bmatrix}$.

2) Halle dos matrices "A" y "B", cuadradas de orden 3 y tales que $A-B=D$ y $3\bullet A+2\bullet B=C$, si:

$$C=\begin{bmatrix}3 & 8 & -3\\ -2 & 2 & -3\\ 7 & 2 & 4\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.8.1

1) Si $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ e $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, calcúlense "x" e "y" de modo que:

$$A^2+x\bullet A+y\bullet I=0$$

2) Determínese la matriz "B" si su primera fila es $(1,0)$ y verifica:

$$A\bullet B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix};\ A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.8.2

1) Determine para qué valores de "a", "b", "c" y "d" se verifica $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

2) Determine las matrices "X" de la forma $\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$ tales que $X^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

3) Sean $A=\{a_{ij}\}$ y $B=\{b_{ij}\}$ matrices cuadradas de orden 3, siendo $a_{ij}=0$ si $i\neq j$. ¿Podemos afirmar que $A\bullet B=B\bullet A$ para cualquier matriz "B"? ¿Cómo debería ser "A" para que $A\bullet B=B\bullet A$ para cualquier matriz "B"?

FONEMATO 1.8.3

Si "A" es una matriz cuadrada de orden dos tal que $A^2=A$, determínese un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda\bullet A-I)^2=I$, siendo $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

FONEMATO 1.14.1

Resuélvase la ecuación $\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0$

FONEMATO 1.14.2

Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$.

FONEMATO 1.14.3

Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

FONEMATO 1.14.4

Calcule el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & .... & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & .... & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & .... & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & .... & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & .... & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & :::: & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & .... & 0 \end{vmatrix}$.

FONEMATO 1.14.5

Probar que $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a.(b-a).(c-b).(d-c)$.

FONEMATO 1.14.6

1) Aplicando las propiedades de los determinantes (o sea, sin desarrollar el determinante), calcúlese una solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & \mu & 8 \\ 1 & 8 & \mu^2 \end{vmatrix} = 0$$

2) Determínese la raíz múltiple de la ecuación $\begin{vmatrix} \theta & 1 & 8 & 1 \\ 1 & \theta & 1 & 8 \\ 8 & 1 & \theta & 1 \\ 1 & 8 & 1 & \theta \end{vmatrix} = 0$

FONEMATO 1.14. 7

1) Si $\begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ halle, sin desarrollarlo, el valor de $\begin{vmatrix} \theta & \lambda & \delta \\ 2.\theta+5 & 2.\lambda & 2.\delta+3 \\ \theta+1 & \lambda+1 & \delta+1 \end{vmatrix}$.

2) Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0.$

FONEMATO 1.14.8

Demostrar que si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, es $A^2 - (a + d) \bullet A + |A| \bullet I = 0$, siendo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.14.9

Dadas las matrices "A" y "B", hallar una matriz simétrica "P" que sea regular y tal que $P \bullet B = A \bullet P$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.1

Determine "a" para que "A" tenga inversa. Calcule la inversa de "A" si $a = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.2

Determine "a" para que "B" tenga inversa. Calcule la inversa de "B" si $a = 1$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.3

Determine "a" para que "C" tenga inversa. Calcule C^{-1}.

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.4

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$.

1) ¿Cuándo el determinante de "A" es el seno de algún número real?
2) Calcula la inversa de "A" cuando exista.
3) Determina todos los pares (a, b) para los que "A" coincide con su inversa.

FONEMATO 1.16.5

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Si existe, calcule la inversa de "A".
2) Determine una matriz "X" que verifique la ecuación $A \bullet B = A \bullet X \bullet A$.

FONEMATO 1.16.6

Siendo $n \in \mathbb{Z}$, sea $A_n = \begin{bmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{bmatrix}$, $x \in \Re$.

Compruebe que $A_n A_m = A_{n+m}$, y como aplicación calcule A_n^{-1}.

FONEMATO 1.16.7

Si "A" es una matriz invertible tal que $|A + I| \neq 0$ y $|A - I| \neq 0$, demuéstrese que la matriz "B" es singular si se verifica que $A \bullet B = A^{-1} \bullet B$.

FONEMATO 1.16.8

Compruébese que la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & \tau & \eta \\ \tau + \eta & \xi + \eta & \xi + \tau \end{bmatrix}$ carece de inversa.

FONEMATO 1.16.9

Calcule "k" para que $N=\begin{bmatrix}1 & k & 2\\ k & 3 & k\\ 1 & k & 3\end{bmatrix}$ tenga inversa y, en su caso, calcule N^{-1}.

FONEMATO 1.16.10

Calcúlense "X" e "Y" tales que $2\bullet X+3\bullet Y=A$ y $-3\bullet X+Y=B$, siendo:

$$A=\begin{bmatrix}8 & 13\\ -7 & 6\end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.11

Calcúlense "X" e "Y" tales que $X+A\bullet Y=I$ y $X-3\bullet Y=0$, siendo:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\ ;\ I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ ;\ 0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.12

¿Para qué valores de "k" la matriz "A" carece de inversa? Calcule A^{-1} si $k=4$.

$$A=\begin{bmatrix}3 & k & -1\\ 0 & 4 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.13

Resolver razonadamente la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\bullet X-\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.14

Encontrar dos matrices "X" e "Y", de orden 2×2 con coeficientes reales tales que $AX+BY=C$ y $AX=Y$, siendo:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -2 & -1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}6 & 7\\ -2 & -5\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.16.15

Sea la ecuación matricial $X\bullet A=B$, siendo $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$.

1) ¿Cuáles son las dimensiones de una matriz solución de la ecuación anterior?
2) Calcula una solución. ¿Es única la solución? Razona la respuesta.

FONEMATO 1.16.16

Calcule todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa, determinando el cuadrado de dichas matrices.

FONEMATO 1.16.17

Despeje X en la ecuación matricial $(A\bullet X-C)^{-1}-B^{-1}=0$.

FONEMATO 1.16.18

Sean A, B y X matrices cuadradas de orden "n", siendo A regular.
Despeja X en la ecuación matricial $(X-3\bullet I)\bullet A-B\bullet A=I$.

FONEMATO 1.16.19

Sean A y B matrices regulares de orden "n".

Despeje X en la ecuación matricial $(X \bullet B^{-1} - I) \bullet A = I$.

FONEMATO 1.16.20

Despeje X en la ecuación matricial $(A^t \bullet A \bullet X)^{-1} = (A^t \bullet B)^{-1}$.

FONEMATO 1.16.21

Despeje X en la ecuación matricial $B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = A$.

FONEMATO 1.16.22

Despeje X en la ecuación $(B \bullet A - B \bullet X) \bullet A^{-1} = (A \bullet B^{-1})^{-1}$.

FONEMATO 1.16.23

Sea $B \in M_{n\times 1}$ tal que $B^t \bullet B = 1$ e "I" la matriz unidad de orden "n".

Si $A = I - 2 \bullet B \bullet B^t$, demuestre que "A" es simétrica y que $A \bullet A^t = I$.

FONEMATO 1.16.24

Sea "C" una matriz regular tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$ y $C^{-1} \bullet B \bullet C = H$, siendo "D" y "H" matrices diagonales. Demuéstrese que $A \bullet B = B \bullet A$.

FONEMATO 1.17.1

1) Sean A, B y C matrices cuadradas de orden "n", siendo B regular y C ortogonal. Despéjese X en la ecuación matricial $C \bullet (A - X) \bullet B = B$.
2) Sean A, B y C matrices cuadradas de orden "n", siendo B regular y C ortogonal. Despéjese X en la ecuación matricial $B \bullet (A - 3 \bullet X) \bullet C^t = I$.

FONEMATO 1.17.2

Siendo A una matriz ortogonal, despeje X en la siguiente ecuación matricial:

$$I + (A^t \bullet X \bullet A)^{-1} + A^2 = (A^t - 2 \bullet I) \bullet A + (A + I)^2$$

FONEMATO 1.17.3

Despeje X en la ecuación matricial $(A - I)^{-1} \bullet X \bullet A^t = A^t + I$, siendo A y X matrices cuadradas de orden "n", con A ortogonal y $(A - I)$ regular.

FONEMATO 1.17.4

1) Si las matrices A y C conmutan y las matrices $B - C$ y B son ortogonales, despéjese A en la ecuación matricial $B \bullet A - A \bullet C = B$.
2) Sea "B" una matriz de orden $n \times 1$ tal que $B^t \bullet B = 1$ e "I" la matriz unidad de orden "n". Si $A = I - 2 \bullet B \bullet B^t$, demuestre que "A" es simétrica y ortogonal.

FONEMATO 1.17.5

1) Sea "C" una matriz regular tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$ y $C^{-1} \bullet B \bullet C = H$, siendo "D" y "H" matrices diagonales. Demuestre que $A \bullet B = B \bullet A$.
2) Demuestre que una matriz cuadrada "A" es simétrica si existe una matriz ortogonal "P" tal que $P^t \bullet A \bullet P = D$, siendo "D" una matriz diagonal.

FONEMATO 1.20.1

Calcúlese el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 1.20.2

Calcúlese el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 1.20.3

Calcúlese el rango de las siguientes matrices:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \ ;\ 2)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.20.4

Calcúlese el rango de las siguientes matrices:

$$1)\ C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ ;\ 2)\ D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \ ;\ 3)\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.20.5

Calcula los valores de "a" y "b" para los que la matriz "A" tiene rango 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 5 & 1 & 3 + b + 2.a \\ 1 & 0 & b \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.20.6

Estúdiese el rango de las siguientes matrices según el valor del número real "k":

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 6 & k & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \ ;\ 2)\ B = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 2 & -1 & -k \\ k & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.20.7

Estúdiese el rango de la matriz "C" según el valor del número real "k".

$$C = \begin{bmatrix} 2.k + 2 & k & 2 \\ 2 & 2 - k & 0 \\ k + 1 & 0 & k + 1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.20.8

Estúdiese el rango de la matriz "D" según el valor del número real "k".

$$D = \begin{bmatrix} k - 1 & 1 & 1 \\ 1 & k - 1 & 1 \\ 1 & 1 & k - 1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.20.9

Estúdiese el rango de la matriz "E" según el valor del número real "k".

$$E=\begin{bmatrix}3 & k & k\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.20.10

Estúdiese el rango de $F=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -1 & 5\\ 1 & 1 & k & 3\\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2\end{bmatrix}$ según el valor del real "k".

FONEMATO 1.20.11

Estudie el rango de $M=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & b & 1\\ 1 & -a & -1\end{bmatrix}$ según los valores de $a,b\in\Re$.

FONEMATO 1.20.12

Estudie el rango de $N=\begin{bmatrix}a & b & 1\\ 1 & a.b & 1\\ 1 & b & a\end{bmatrix}$ según los valores de $a,b\in\Re$.

FONEMATO 1.20.13

Estudie el rango de $S=\begin{bmatrix}1 & -b & 1\\ 1 & 1 & -1\\ a & -2 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$ según los valores de $a,b\in\Re$.

FONEMATO 1.20.14

Calcule el rango de $A=\begin{bmatrix}1 & a^2-1 & a\\ 1 & 2.a^2-2 & 2.a-1\\ 1 & 0 & a^2\end{bmatrix}$ según los valores de $a\in\Re$.

FONEMATO 1.20.15

Calcule el rango de $A=\begin{bmatrix}a & a & 1 & 1\\ 1 & a & a & 1\\ 1 & 1 & a & a\end{bmatrix}$ según los valores de $a\in\Re$.

FONEMATO 1.20.16

Determine la relación que debe existir entre los parámetros "θ", "λ" y "τ" para que $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \theta\\ 1 & 0 & \lambda\\ 1 & 1 & \tau\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & \theta\\ 0 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & \tau\end{bmatrix}$ tengan rango 2.

FONEMATO 1.20.17

Determine el rango de $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & \sigma & \sigma\\ -1 & \sigma & -1\end{bmatrix}$ según los valores de $\sigma\in\Re$.

FONEMATO 1.20.18

Siendo "μ", "γ" y "ψ" tres números reales arbitrarios, calcula A^n para todo número natural "n", siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mu & \gamma \\ 0 & 0 & \Psi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea "B" una matriz 3×3 arbitraria. Indica, justificando la respuesta, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones

1) Si el rango de "B" es 2, el rango de B^2 también es 2.

2) Si el rango de "B" es 3, el rango de B^3 también es 3.

FONEMATO 1.20.19

Determínese el rango de las siguientes matrices:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}\ ;\ 2)\ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}\ ;\ 3)\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.20.20

Determínese el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -4 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 1.20.21

Determínese el rango de la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Tema 2
Sistemas de ecuaciones lineales

FONEMATO 2.5.1

Resuélvase el sistema $\left\{\begin{array}{r} 2.x_1 - x_2 + 3.x_3 = 4 \\ 4.x_1 + x_2 - 5.x_3 = 6 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 2.x_3 = 2 \end{array}\right\}$

FONEMATO 2.5.2

Calcúlese "k" para que el siguiente sistema lineal de ecuaciones tenga solución única. Determínese la solución cuando exista.

$$\begin{array}{r} x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 + k.x_3 = 0 \end{array}$$

FONEMATO 2.6.1

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$1)\begin{cases} 2.x+3.y+4.z+5.t=1 \\ 3.x+4.y+5.z+6.t=2 \\ x+y+z+t=3 \end{cases};\ 2)\begin{cases} x+2.y=3 \\ 2.x+y=6 \\ 3.x+y=9 \\ x+4.y=3 \end{cases};\ 3)\begin{cases} x+2.y=3 \\ 2.x+4.y=6 \\ 3.x+y=4 \end{cases}$$

FONEMATO 2.6.2

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ 2.x+2.y+z&=9 \\ 3.x+y+z&=8 \\ x+4.y&=9 \end{aligned}$$

FONEMATO 2.6.3

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6.x_1+2.x_2-3.x_3&=0 \\ 2.x_1-2.x_2+x_3&=0 \\ 8.x_1-2.x_3&=0 \end{aligned}$$

FONEMATO 2.6.4

Resuélvase el sistema $\begin{cases} -2.x_1+x_2+x_3-x_4+3.x_5=0 \\ -2.x_1+x_2+2.x_3+x_4-3.x_5=0 \\ 2.x_1-x_2-x_3-2.x_4+6.x_5=0 \\ -2.x_1+x_2+2.x_3-2.x_4+6.x_5=0 \end{cases}$

FONEMATO 2.6.5

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x_1+2.x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2-2.x_3=0 \\ 2.x_1+x_2-x_3=3 \end{cases}$

FONEMATO 2.6.6

Resuélvase el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2.x_1+x_2+x_3-x_4-4.x_5=5 \\ x_2+2.x_3+x_4-4.x_5=1 \\ x_1-x_2-x_3-2.x_4+x_5=1 \\ 3.x_1+x_2+2.x_3-2.x_4-7.x_5=7 \end{cases}$

FONEMATO 2.6.7

1) Resuélvase la ecuación matricial $A \bullet X - 2 \bullet B = C$, siendo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Resuélvase la ecuación matricial $X \bullet (A+B) = 3 \bullet C$.

FONEMATO 2.6.8

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$1)\left\{\begin{array}{r} -3.x+y+2.z=1 \\ x+5.y-z=4 \\ -4.x-2.y+3.z=-1 \end{array}\right. ;\ 2)\left\{\begin{array}{r} x+2.y+z=1 \\ 2.x+y+2.z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right. ;\ 3)\left\{\begin{array}{l} x+2.y+2.z+3.w=6 \\ 2.x+4.y+3.z+5.w=10 \\ x+2.y-z=0 \end{array}\right.$$

FONEMATO 2.6.9

Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b \\ a \end{bmatrix}$

1) Calcula los valores de "a" y "b" sabiendo que el par $(2;-1)$ satisface la primera ecuación y el par $(2;0)$ satisface la segunda.
2) ¿Es compatible y determinado el sistema que resulta al sustituir los valores de "a" y "b" calculados?

FONEMATO 2.6.10

Halla las soluciones comunes a los sistemas:

$$S_1:\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-y-z=1 \end{array}\right. ;\ S_2:\left\{\begin{array}{r} 3.x+y+z=5 \\ 2.x-4.y-4.z=0 \end{array}\right.$$

FONEMATO 2.6.11

Una empresa fabrica tres tipos de fertilizantes (I, II y III) con tres compuestos químicos A, B y C, en los porcentajes de composición indicados en la tabla. Mezclando los tres tipos de fertilizantes, la empresa quiere obtener otro que contenga el 8 % de cada uno de los tres compuestos químicos. ¿Qué cantidad debe utilizar de cada fertilizante para obtener 100 kg. del nuevo?

	I	II	III
A	6%	8%	12%
B	6%	12%	8%
C	8%	4%	12%

FONEMATO 2.6.12

Discuta y resuelva el $\left\{\begin{array}{r} 3.x+m.y=1 \\ 2.x-y+m.z=1 \\ m.x-3.y+2.z=1 \end{array}\right\}$ sistema según los valores $m \in \Re$.

FONEMATO 2.6.13

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro real "m":

$$\begin{gathered} (2.m+2).x+m.y+2.z=2.m-2 \\ 2.x+(2-m).y=0 \\ (m+1).x+(m+1).z=m+1 \end{gathered}$$

FONEMATO 2.6.14

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro real "m":

$$\begin{gathered} m.x+y+z=x \\ x+m.y+z=y \\ x+y+m.z=z \end{gathered}$$

FONEMATO 2.6.15

Discuta y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "n" y "k":

$$1)\left\{\begin{array}{r} x-y-z=7 \\ 5.x-2.y+z=9 \\ x+y+z=4 \\ 2.x-y+2.z=k \end{array}\right. ;\ 2)\left\{\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ 3.x+4.y-z=5 \\ x+y+k.z=3 \\ x+2.y+(k+2).z=k^2-2 \end{array}\right.$$

FONEMATO 2.6.16

Discútanse y resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "n" y "k":

$$\left\{\begin{array}{r} x-n.y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ k.x-2.y-5.z=0 \\ 3.x+y+z=0 \end{array}\right.$$

FONEMATO 2.6.17

Discuta y resuelva el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{r} 3.x-y+a.z=1 \\ x+4.y+z=3 \\ 2.x-5.y+z=b \end{array}\right\}$ según los valores de los parámetros reales "a" y "b":

FONEMATO 2.6.18

Discútanse los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "a" y "b":

$$1)\left\{\begin{array}{r} 3.x-y+z=0 \\ 2.x+b.y+z=0 \\ x-a.y-z=0 \end{array}\right. ;\ 2)\left\{\begin{array}{l} a.x+b.y+z=1 \\ x+a.b.y+z=b \\ x+b.y-a.z=1 \end{array}\right.$$

FONEMATO 2.6.19

Discútase el siguiente sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{r} x+2.y=1 \\ x+y+t=1 \\ x+3.y+2.a.z+2.t=1 \\ 2.x+6.y+2.z+a.t=b \end{array}\right.$.

FONEMATO 2.6.20

Discútase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{r} x+z=c \\ x+y+2.t=0 \\ b.x+y+2.z+t=0 \\ a.x+2.y+z+3.t=c \end{array}\right.$$

FONEMATO 2.6.21

Discútase el siguiente sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{r} 2.x+a.y+z=7 \\ x+a.y+z+t=b \\ x+2.a.y+t=-1 \\ b.x+a.y=b \end{array}\right.$

FONEMATO 2.6.22

1) Discútase el siguiente sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} 2.x + y = 0 \\ x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + 2.y = k \end{cases}$

2) Siendo "A" y "B" matrices cuadradas equidimensionales, demuéstrese que "B" es la matriz nula si "A" es regular y $A \bullet B = 0$.

FONEMATO 2.6.23

Discútase el siguiente sistema según los valores de "k", resolviéndolo si $k = 1$.

$$\begin{aligned} k.x + 2.z &= 0 \\ k.y - z &= k \\ x + 3.y + z &= 5 \end{aligned}$$

FONEMATO 2.6.24

Clasifíquese el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b":

$$\begin{aligned} a.x + y + b.z &= 1 \\ x + a.y + b.z &= 1 \\ x + y + a.b.z &= b \end{aligned}$$

FONEMATO 2.6.25

Discútanse los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores del parámetro "a", hallando todas sus soluciones cuando sea compatible e indeterminado.

$$1) \begin{cases} a.x + a.y = a \\ (1-a).z = a + 1 \\ y + z = a - 1 \end{cases} ;\ 2) \begin{cases} a.x + y + z = a \\ x + a.y - z = 1 \\ 3.x + y + a.z = 2 \end{cases}$$

FONEMATO 2.6.26

Discuta el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + y + a.z = 1 \\ x + y + b.z = a \\ x + a.y + z = a \end{array} \right\}$ en función de los parámetros "a" y " b":

FONEMATO 2.6.27

Estúdiese el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro real "a", resolviéndolo cuando sea compatible.

$$1) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} ;\ 2) \begin{cases} y + a.z = -a \\ x + a.y + z = 0 \\ x - a.y + a.z = 2 \end{cases}$$

FONEMATO 2.6.28

Estúdiense los siguientes sistemas lineales.

$$1) \begin{cases} k.x + y + z = 3 \\ x - k.y + z = 1 \\ x + y + z = k + 2 \end{cases} ;\ 2) \begin{cases} 6.x + 2.k.y + 3.z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ 9.x - y + 6.k.z = 10 \end{cases} ;\ 3) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + k.y + z = 8 \\ k.x + y + k.z = 10 \end{cases}$$

FONEMATO 2.6.29

Estúdiense los siguientes sistemas lineales.

$$1)\begin{cases} x+y+z=k+1 \\ k.x+k.y+(k-1).z=k \\ x+k.y+z=1 \end{cases} \; ; \; 2)\begin{cases} -x-k.z=k \\ x+y+3.z=5 \\ 2.x+k.y=0 \end{cases}$$

FONEMATO 2.6.30

Discútanse los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en función de los parámetros "a" y " b":

$$1)\begin{cases} x+(a+1).y+b.z=a \\ a.y+b.z=a+b \\ x+2.y+z=b \end{cases} \; ; \; 2)\begin{cases} x+y=1 \\ x+2.y=a \\ x+3.y=b \\ x+4.y=2.a \end{cases}$$

FONEMATO 2.6.31

Estúdiense los siguientes sistemas lineales.

$$1)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2.x+y+k.z=1 \\ 4.x+y+k^2.z=k \end{cases} \; ; \; 2)\begin{cases} 2.x+k.y+z=2 \\ k.x-z=1 \\ x+y+2.z=1 \end{cases}$$

FONEMATO 2.6.32

Discuta los siguientes sistemas según los valores de los parámetros "a", "b" y "c".

$$1)\begin{cases} (a+1).x+3.y+a.z=1 \\ 3.x+(a+1).y+2.z=b-1 \\ a.x+2.y+a.z=2 \end{cases} \; ; \; 2)\begin{cases} a.x+y+(a+1).z=0 \\ a.y+(a+1).z=0 \\ x+2.z=1 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} a.x+b.y+2.z=1 \\ a.x+(2.b-1).y+3.z=1 \\ a.x+b.y+3.z=2.b-1 \end{cases}$$

FONEMATO 2.7.1

Resuélvanse por sustitución los siguiente sistemas lineales de ecuaciones:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases} ;\ 2)\ \begin{cases} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2.x + 3.y + 4.z + 5.t = 1 \\ 3.x + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases} ;\ 4)\ \begin{cases} x + 2.y = 3 \\ 2.x + y = 6 \\ 3.x + y = 9 \\ x + 4.y = 3 \end{cases}$$

FONEMATO 2.8.1

Resuelva el siguiente sistema lineal mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+2.y+3.z=-1 \\ 2.x+5.y+7.z=-2 \\ 3.x+8.y+9.z=-1 \end{cases}$$

FONEMATO 2.8.2

Resuelva el sistema $\left\{\begin{array}{r} 2.x+3.y+4.z+5.t=1 \\ 3.x+4.y+5.z+6.t=2 \\ x+y+z+t=3 \end{array}\right\}$ mediante el método de Gauss:

FONEMATO 2.8.3

Resuélvanse los siguientes sistemas lineales por el método de Gauss:

$$1)\ \begin{cases} x+2.y=3 \\ 2.x+y=6 \\ 3.x+y=9 \\ x+4.y=3 \end{cases} ;\quad 2)\ \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2.x+2.y+z=9 \\ 3.x+y+z=8 \\ x+4.y=9 \end{cases}$$

FONEMATO 2.8.4

Resuelva el siguiente sistema lineal mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x_1+2.x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2-2.x_3=0 \\ 2.x_1+x_2-x_3=3 \end{cases}$$

FONEMATO 2.8.5

Resuélvase el siguiente sistema lineal por el método de Gauss:

$$\begin{array}{r} 2.x+y+z-t-4.u=5 \\ y+2.z+t-4.u=1 \\ x-y-z-2.y+u=1 \\ 3.x+y+2.z-2.t-7.u=7 \end{array}$$

FONEMATO 2.8.6

Clasifíquese el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b".

$$\begin{array}{c} a.x+y+b.z=1 \\ x+a.y+b.z=1 \\ x+y+a.b.z=b \end{array}$$

FONEMATO 2.8.7

Discuta y resuelva el siguiente sistema lineal según los valores de "k".

$$\begin{array}{c} k.x+2.z=0 \\ k.y-z=k \\ x+3.y+z=5 \end{array}$$

FONEMATO 2.8.8

Discuta el siguiente sistema lineal: $\begin{cases} x+y+a.z=a \\ a.x+a.y+z=1 \\ x+a.y+z=a \end{cases}$.

FONEMATO 2.8.9

Discútanse los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$1)\ \begin{cases} x+y+a.z=1 \\ x+y+b.z=a \\ x+a.y+z=a \end{cases} ;\ 2)\ \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2.y+3.z=a \\ 2.x+3.y+4.z=a \end{cases} ;\ 3)\ \begin{cases} x+y=1 \\ x+2.y=a \\ x+3.y=b \\ x+4.y=2.a \end{cases}$$

FONEMATO 2.8.10

Discútase el siguiente sistema lineal según los valores del parámetro "a".

$$(a-2).x-y+z=0\ ;\ x+(2.a-1).y-a.z=0\ ;\ x+a.y-z=0$$

FONEMATO 2.9.1

1) Determínense tres sistemas lineales cuyo conjunto de soluciones sea S_1.

$$S_1 = \{(a + b; a - b; 2.a - b; b), \forall a, b \in \Re\}$$

2) Determínese un sistema lineal cuyo conjunto de soluciones sea S_2.

$$S_2 = \{(a + b + 2.c; a - b; 2.a - b + c; b + c), \forall a, b, c \in \Re\}$$

FONEMATO 2.9.2

Determínese un sistema lineal cuyo conjunto de soluciones sea S_1.

$$S_1 = \{(a + b + 2.c; a - b; 2.a - b + c; b - c), \forall a, b, c \in \Re\}$$

FONEMATO 2.9.3

Determínense dos sistemas lineales cuyo conjunto de soluciones sea S_1.

$$S_1 = \{(1 + a + b; a - b; 2.a - b; 2 + b), \forall a, b \in \Re\}$$

Tema 3
Espacios vectoriales

FONEMATO 3.3.1

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(2;3;1;2)\ ;\ \overline{h}_2=(1;2;5;2)\ ;\ \overline{x}=(5;8;7;6)$$

Estúdiese si el vector $\overline{x}$ es combinación lineal de los vectores $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$.

FONEMATO 3.3.2

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{p}=(2;3;4)\ ;\ \overline{q}=(-2;1;5)\ ;\ \overline{m}=(8;4;6)$$

Estúdiese si el vector $\overline{m}$ es combinación lineal de los vectores $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

FONEMATO 3.3.3

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{a}=(2;3;4)\ ;\ \overline{b}=(2;1;5)\ ;\ \overline{c}=(1;1;k)$$

Determínese "k" de modo que $\overline{c}$ sea combinación lineal de $\overline{a}$ y $\overline{b}$.

FONEMATO 3.3.4

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{p}=(3;1;2)\ ;\ \overline{q}=(-1;4;-5)\ ;\ \overline{m}=(a;1;1)\ ;\ \overline{x}=(1;3;b)$$

Estúdiese si $\overline{x}$ es combinación lineal de $\overline{p}, \overline{q}$ y $\overline{m}$.

FONEMATO 3.3.5

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(1;1;1;2)\ ;\ \overline{h}_2=(2;1;3;6)\ ;\ \overline{h}_3=(0;0;2.a;2)\ ;\ \overline{h}_4=(0;1;2;a)$$

Estúdiese si el vector $\overline{x}=(1;1;1;b)$ es combinación lineal de $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3$ y $\overline{h}_4$.

FONEMATO 3.3.6

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(1;3;1;1)\ ;\ \overline{h}_2=(1;4;1;2)\ ;\ \overline{h}_3=(-1;-1;a;a+2)$$

Estúdiese si el vector $\overline{x}=(3;5;3;a^2-2)$ es combinación lineal de $\overline{h}_1, \overline{h}_2$ y $\overline{h}_3$.

FONEMATO 3.3.7

En el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{p}=2+3.x+4.x^2\ ;\ \overline{q}=-2+x+5.x^2\ ;\ \overline{m}=8+4.x+6.x^2$$

Estúdiese si $\overline{m}$ es combinación lineal de $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

FONEMATO 3.3.8

En el espacio vectorial P_3 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 3 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\bar{h}_1 = 1 + x + x^2 + 2.x^3 \;\; ; \;\; \bar{h}_2 = 2 + x + 3.x^2 + 6.x^3$$
$$\bar{h}_3 = 2.a.x^2 + 2.x^3 \;\; ; \;\; \bar{h}_4 = x + 2.x^2 + a.x^3$$

Estúdiese si $\bar{x} = 1 + x + x^2 + b.x^3$ es combinación lineal de $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ y $\bar{h}_4$.

FONEMATO 3.3.9

En el espacio vectorial $M_{2\times 2}$ de las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ; \; \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} ; \; \bar{x} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Estúdiese si el vector $\bar{x}$ es combinación lineal de los vectores $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$.

FONEMATO 3.3.10

Sea $H = \left\{ \bar{u} = a_1.x^5 + a_2.e^x + a_3.\text{sen}\, x \;/\; a_i \in \Re, \forall i = 1,2,3 \right\}$ espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales. Estúdiese si el vector $\bar{m}$ es CL de los vectores $\bar{p}$ y $\bar{q}$.

$$\bar{p} = 2.x^5 + 3.e^x + 4.\text{sen } x \;\; ; \;\; \bar{q} = -2.x^5 + e^x + 5.\text{sen } x \;\; ; \;\; \bar{m} = 8.x^5 + 6.\text{sen } x$$

FONEMATO 3.4.1

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(4;2;5;3)\ ;\ \overline{h}_2=(3;2;2;6)\ ;\ \overline{h}_3=(4;7;4;2)$$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal.

FONEMATO 3.4.2

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores $\overline{h}_1=(4;3)$ y $\overline{h}_2=(2;2)$. Estúdiese su dependencia o independencia lineal.

FONEMATO 3.4.3

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

1) $\overline{h}_1=(1;2;3;1)\ ;\ \overline{h}_2=(2;1;1;3)\ ;\ \overline{h}_3=(3;3;\lambda;4)$
2) $\overline{h}_1=(1;2;3;1)\ ;\ \overline{h}_2=(2;1;1;3)\ ;\ \overline{h}_3=(3;3;\lambda;6)$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal según el valor de λ.

FONEMATO 3.4.4

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(4;2;5;3)\ ;\ \overline{h}_2=(3;2;2;6)\ ;\ \overline{h}_3=(5;2;8;0)$$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal.

FONEMATO 3.4.5

En el espacio vectorial $(\Re^4;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(1;1;a;3)\ ;\ \overline{h}_2=(1;-1;-5;1)\ ;\ \overline{h}_3=(-b;1;-2;1)$$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal según los valores de "a" y "b".

FONEMATO 3.4.6

En el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2 sobre el cuerpo de los reales, estúdiese la dependencia o independencia lineal de los siguientes vectores:

$$3.x^2+2.x+5\ ;\ 2.x^2+3\ ;\ x^2+x+1$$

FONEMATO 3.4.7

En el espacio vectorial $M_{2\times 3}$ de las matrices de orden 2×3 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&4&5\end{bmatrix};\ \overline{h}_2=\begin{bmatrix}2&3&6\\1&1&4\end{bmatrix};\ \overline{h}_3=\begin{bmatrix}3&5&6\\4&5&9\end{bmatrix}$$

Estúdiese su dependencia o independencia lineal.

FONEMATO 3.4.8

En el espacio vectorial P_3 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 3 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=3.x^3-x^2+1\ ;\ \overline{h}_2=2.x^3+x^2+3.x+2\ ;\ \overline{h}_3=8.x^3-x^2+\lambda.x+4$$

Analícese su dependencia o independencia lineal según los valores de λ.

FONEMATO 3.4.9

En el espacio vectorial $M_{2\times 2}$ de las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{h}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{h}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix}$$

Analícese su dependencia o independencia lineal según el valor de λ.

FONEMATO 3.4.10

En el espacio vectorial $M_{2\times 2}$ de las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{h}_3 = \begin{bmatrix} 6 & a \\ 5 & b \end{bmatrix}$$

Determínense "a" y "b" para que sean linealmente dependientes y calcúlese la relación de dependencia en tal caso.

FONEMATO 3.4.11

En el espacio vectorial $(\Re^4 ;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1 = (1;2;0;1) \ ; \ \overline{h}_2 = (-1;1;0;2) \ ; \ \overline{h}_3 = (1;5;0;4) \ ; \ \overline{h}_4 = (5;4;0;-1)$$

1) Estúdiese su dependencia o independencia lineal.

2) Analícese si $\overline{x} = (7;8;0;1)$ es combinación lineal de ellos.

FONEMATO 3.4.12

Sobre el cuerpo de los reales, sea el espacio vectorial

$$H = \left\{ \overline{u} = a_1.2^x + a_2.3^x + a_3.5^{4.x} \ / \ a_i \in \Re, \ \forall i = 1,2,3 \right\}$$

Analícese la dependencia o independencia lineal de los vectores:

$$\overline{h}_1 = 7.2^x + 9.3^x + 6.5^{4.x} \ ; \ \overline{h}_2 = 8.3^x + 2.5^{4.x} \ ; \ \overline{h}_3 = 7.5^{4.x}$$

FONEMATO 3.4.13

Sean $\overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{c}$ vectores linealmente independientes. Estúdiese la dependencia o independencia lineal de los vectores $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{a} - \overline{b}$ y $2 \bullet \overline{a} + \overline{c}$.

FONEMATO 3.4.14

Si los vectores $\overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{c}$ son linealmente independientes, estúdiese la dependencia o independencia lineal de los vectores $\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{a} - \overline{b}$ y $\overline{a} + \overline{b}$.

FONEMATO 3.5.1

Analícese la independencia lineal de los siguientes vectores de $\Re^3$:

$$\overline{h}_1 = (1;2;3)\ ;\ \overline{h}_2 = (2;1;3)\ ;\ \overline{h}_3 = (3;3;4)\ ;\ \overline{h}_4 = (2;9;9)$$

FONEMATO 3.5.2

Analícese la independencia lineal de los siguientes vectores del espacio vectorial P_3 que forman los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 3

$$\overline{h}_1 = 3.x^3 + 1\ ;\ \overline{h}_2 = x^2 + 3.x\ ;\ \overline{h}_3 = x^3 - x^2\ ;\ \overline{h}_4 = x^3\ ;\ \overline{h}_5 = x^2$$

FONEMATO 3.6.1

En el espacio vectorial $\Re^3$, sean los conjuntos:

$$H_1 = \{\bar{d}_1 = (2;3;4),\ \bar{d}_2 = (-2;1;5)\}$$
$$H_2 = \{\bar{u}_1 = (2;3;4),\ \bar{u}_2 = (-2;1;5),\ \bar{u}_3 = (0;4;9),\ \bar{u}_4 = (4;2;-1)\}$$

Determínese cuáles constituyen un sistema de generadores de $\Re^3$.

FONEMATO 3.6.2

En el espacio vectorial $\Re^3$, sean los conjuntos:

$$H_1 = \{\bar{b}_1 = (4;5;6),\ \bar{b}_2 = (-4;1;0),\ \bar{b}_3 = (0;0;3)\}$$
$$H_2 = \{\bar{a}_1 = (5;0;0),\ \bar{a}_2 = (-2;1;0),\ \bar{a}_3 = (2;1;9),\ \bar{a}_4 = (6;1;-1)\}$$

Determínese cuáles constituyen un sistema de generadores de $\Re^3$.

FONEMATO 3.6.3

En el espacio vectorial $M_{2\times 2}$, sean los conjuntos:

$$H_1 = \left\{\bar{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \bar{d}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{d}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$
$$H_2 = \left\{\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \bar{u}_4 = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$
$$H_3 = \left\{\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \bar{b}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{b}_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$
$$H_4 = \left\{\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \bar{a}_5 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$
$$H_5 = \left\{\bar{n}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \bar{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \bar{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, \bar{n}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \bar{n}_5 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

FONEMATO 3.9.1

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(1;2)\ ;\ \overline{h}_2=(3;4)$$

Estúdiese si $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ forman una base de $\Re^2$. En caso afirmativo, determínense las coordenadas del vector $\overline{x}=(2;6)$ respecto de dicha base.

FONEMATO 3.9.2

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=(1;2;3)\ ;\ \overline{h}_2=(3;4;0)\ ;\ \overline{h}_3=(0;0;1)$$

Compruébese que forman una base de $\Re^3$ y determínense las coordenadas del vector $\overline{x}=(2;4;7)$ respecto de dicha base.

FONEMATO 3.9.3

Sea $(V;+;\bullet)$ un espacio vectorial de dimensión 2 sobre el cuerpo de los reales, y $B=\{\overline{h}_1,\overline{h}_2\}$ la base de referencia elegida en "V". Determínense las coordenadas de $\overline{h}_1$ y $\overline{h}_2$ respecto de la base "B".

FONEMATO 3.9.4

1) Hallar una base de $\Re^3$ que contenga los vectores $\overline{u}=(1;1;1)$ y $\overline{v}=(1;0;5)$.

2) Hallar una base de $\Re^3$ que contenga al vector $\overline{w}=(3;4;1)$.

FONEMATO 3.9.5

Determínese una base de $\Re^4$ que contenga a los vectores

$$\overline{u}=(1;1;5;1)\ ;\ \overline{v}=(1;0;1;0)\ ;\ \overline{w}=(1;2;9;2)$$

FONEMATO 3.9.6

Determínese una base del espacio vectorial $M_{2\times 2}$ que contenga a los vectores

$$\overline{u}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix};\ \overline{v}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix};\ \overline{w}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

FONEMATO 3.9.7

En el espacio vectorial $M_{2\times 2}$ sobre el cuerpo de los reales, sean los vectores:

$$\overline{h}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\ ;\ \overline{h}_2=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix};\ \overline{h}_3=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ \overline{h}_4=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Compruébese que forman una base de $M_{2\times 2}$, determinando las coordenadas del vector $\overline{x}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ respecto de dicha base.

FONEMATO 3.10.1 (MATERNAL)

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_1=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ y $B_2=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$, siendo:

$$\overline{p}_1=2\bullet\overline{u}_1+3\bullet\overline{u}_2\ ;\ \overline{p}_2=5\bullet\overline{u}_1+6\bullet\overline{u}_2$$

1) Determínese la ecuación del cambio de base $B_1\to B_2$.

2) Determínense las coordenadas del vector $\overline{c}=9\bullet\overline{p}_1+8\bullet\overline{p}_2$ respecto de B_1.

3) Determínense las coordenadas del vector $\overline{w}=4\bullet\overline{u}_1+7\bullet\overline{u}_2$ respecto de B_2.

FONEMATO 3.10.2 (MATERNAL)

En $\Re^2$ se consideran las bases $B_5=\{\overline{w}_1,\overline{w}_2\}$ y $B_3=\{\overline{b}_1,\overline{b}_2\}$, y se sabe que:

$$\overline{b}_1=9\bullet\overline{w}_1+2\bullet\overline{w}_2\ ;\ \overline{b}_2=3\bullet\overline{w}_1-4\bullet\overline{w}_2$$

1) Determínese la ecuación del cambio de base $B_5\to B_3$.

2) Determínense las coordenadas del vector $\overline{m}=1\bullet\overline{b}_1+6\bullet\overline{b}_2$ respecto de B_5.

3) Determínense las coordenadas del vector $\overline{n}=1\bullet\overline{w}_1+2\bullet\overline{w}_2$ respecto de B_3.

FONEMATO 3.10.3 (CASI MATERNAL)

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_1=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ y $B_2=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$; se sabe que:

$$\overline{u}_1=4\bullet\overline{p}_1+5\bullet\overline{p}_2\ ;\ \overline{u}_2=6\bullet\overline{p}_1+8\bullet\overline{p}_2$$

Determínese la ecuación del cambio de base $B_1\to B_2$.

FONEMATO 3.10.4 (CASI MATERNAL)

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_7=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2\}$ y $B_2=\{\overline{w}_1,\overline{w}_2\}$; se sabe que:

$$\overline{w}_1=5\bullet\overline{k}_1+7\bullet\overline{k}_2\ ;\ \overline{w}_2=6\bullet\overline{k}_1+9\bullet\overline{k}_2$$

Determínese la ecuación del cambio de base $B_2\to B_7$.

FONEMATO 3.10.5 (MATERNAL)

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_4=\{\overline{d}_1,\overline{d}_2,\overline{d}_3\}$ y $B_8=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2,\overline{k}_3\}$; se sabe que:

$$\overline{k}_1=\overline{d}_1+3\bullet\overline{d}_2+4\bullet\overline{d}_3\ ;\ \overline{k}_2=2\bullet\overline{d}_1-2\bullet\overline{d}_2+5\bullet\overline{d}_3\ ;\ \overline{k}_3=\overline{d}_3$$

Determínese la ecuación del cambio de base $B_4\to B_8$.

FONEMATO 3.10.6 (BASE "PUENTE")

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_3=\{\overline{p}_1,\overline{p}_2\}$, $B_2=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2\}$ y $B_4=\{\overline{m}_1,\overline{m}_2\}$; se sabe que:

$$\overline{k}_1=1\bullet\overline{p}_1+2\bullet\overline{p}_2\ ;\ \overline{k}_2=3\bullet\overline{p}_1+4\bullet\overline{p}_2$$

$$\overline{p}_1=5\bullet\overline{m}_1+6\bullet\overline{m}_2\ ;\ \overline{p}_2=7\bullet\overline{m}_1+8\bullet\overline{m}_2$$

Determínese la ecuación del cambio de base $B_4\to B_2$.

FONEMATO 3.10.7 (BASE "PUENTE")

En el espacio vectorial $(\Re^2;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_7=\{\overline{w}_1=(2;5)\ ,\ \overline{w}_2=(6;7)\}$ y $B_9=\{\overline{k}_1=(1;2)\ ,\ \overline{k}_2=(9;9)\}$. Determínese la ecuación del cambio de base $B_7\to B_9$.

FONEMATO 3.10.8

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_1=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\}$ y $B_2=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3\}$. Si existen, determínense los vectores con iguales coordenadas respecto de las dos bases, en los siguientes casos:

1) $\overline{v}_1=2\bullet\overline{u}_1,\ \overline{v}_2=\overline{u}_1+2\bullet\overline{u}_2-\overline{u}_3,\ \overline{v}_3=\overline{u}_1+\overline{u}_3$

2) $\overline{v}_1=2\bullet\overline{u}_1+\overline{u}_2+\overline{u}_3,\ \overline{v}_2=2\bullet\overline{u}_1+3\bullet\overline{u}_2+2\bullet\overline{u}_3,\ \overline{v}_3=\overline{u}_1+\overline{u}_2+2\bullet\overline{u}_3$

3) $\overline{v}_1=2\bullet\overline{u}_1,\ \overline{v}_2=-\overline{u}_2,\ \overline{v}_3=\overline{u}_1+\overline{u}_2-\overline{u}_3$

FONEMATO 3.10.9

En el espacio vectorial $(\Re^3;+;\bullet)$ sobre el cuerpo de los reales, se consideran las bases $B_1=\{\overline{d}_1,\overline{d}_2,\overline{d}_3\}$ y $B_2=\{\overline{k}_1,\overline{k}_2,\overline{k}_3\}$. Si $\overline{d}_1=\overline{k}_1$ y $\overline{d}_2=\overline{k}_1+\overline{k}_2$, determínense las coordenadas del vector $\overline{d}_3$ respecto de la base B_2 si el vector $\overline{p}\in\Re^3$ tiene coordenadas $(2;1;1)$ respecto de B_1 y coordenadas $(1;1;1)$ respecto de B_2.

Tema 4
Subespacios vectoriales

FONEMATO 4.1.1

Demuestre que el conjunto "S" que forman las soluciones de un sistema lineal homogéneo (SLH) con "k" incógnitas es un subespacio vectorial de $\mathfrak{R}^k$.

FONEMATO 4.1.2

Demuestre que el conjunto "S" que forman las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones es un subespacio del espacio vectorial $\mathfrak{R}^4$:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (I)}$$

FONEMATO 4.1.3

Demuestre que el conjunto "S" que forman las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones es un subespacio del espacio vectorial $\mathfrak{R}^4$:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (I)}$$

FONEMATO 4.1.4

1) Siendo "S" el subconjunto de $M_{2\times2}$ formado por las matrices simétricas, demuestre que "S" el subespacio de $M_{2\times2}$.
2) Siendo "H" el subconjunto de $M_{2\times2}$ formado por las matrices antisimétricas, demuestre que "S" el subespacio de $M_{2\times2}$.

FONEMATO 4.1.5

Determine la dimensión y una base del subespacio "S" de $\mathfrak{R}^4$ que forman las soluciones del siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (I)}$$

FONEMATO 4.1.6

Determine la dimensión y una base del subespacio "S" de $\mathfrak{R}^4$ que forman las soluciones del siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ 2.x_2 - 2.x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (I)}$$

FONEMATO 4.1.7

Determine la dimensión y una base del subespacio "S" de $\mathfrak{R}^4$ que forman las soluciones del siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$2.x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 = 0 \quad \text{(I)}$$

FONEMATO 4.1.8

Determine la dimensión y una base "S".

$$1)\ S=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \big/\ x_3=0\right\}$$

$$2)\ S=\left\{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\Re^4 \big/\ x_1=x_2+x_3=0\right\}$$

FONEMATO 4.1.9

En el espacio vectorial P_3 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior 3 se considera el conjunto $S=\{u(x)\in P_3\ /\ u'(1)=u''(2)=0\}$. Demuestre que "S" es subespacio de P_3, determinando su dimensión y una base.

FONEMATO 4.1.10

En el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior 2 se considera el conjunto $S=\left\{u(x)\in P_2\ /\ \int_0^1 u(x).dx=0\right\}$. Demuestre que "S" es subespacio de P_2, determinando su dimensión y una base.

FONEMATO 4.1.11

En el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior 2 se considera el conjunto $S=\{u(x)\in P_2\ /\ u(x+1)-u(x)=0\}$. Demuestre que "S" es subespacio de P_2, determinando su dimensión y una base.

FONEMATO 4.2.1

Sea $H_2 = \{\overline{h}_1 = (2;3;4)\ ;\ \overline{h}_2 = (-2;1;5)\ ;\ \overline{h}_3 = (0;4;9)\ ;\ \overline{h}_4 = (4;2;-1)\} \subset \Re^3$

Determine la dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de la variedad lineal engendrada por H_2.

FONEMATO 4.2.2

Sea $H = \{\overline{h}_1 = (1;0;1;0), \overline{h}_2 = (0;1;0;1), \overline{h}_3 = (1;1;1;1)\} \subset \Re^4$. Demuestre que la variedad lineal engendrada por "H" es subespacio de $\Re^4$, calculando su dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas.

FONEMATO 4.2.3

Sea $H = \{\overline{h}_1 = (0;0;1;1), \overline{h}_2 = (1;1;0;1), \overline{h}_3 = (1;0;0;0)\} \subset \Re^4$.

Determine la dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de la variedad lineal engendrada por "H".

FONEMATO 4.2.4

Sea $H = \left\{ \overline{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \overline{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \overline{h}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \overline{h}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}$.

Determine la dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de la variedad lineal engendrada por "H".

FONEMATO 4.2.5

En el espacio vectorial P_3 de los polinomios de grado no superior a 3, sea "H" el conjunto formado por los vectores:

$$\overline{h}_1 = 1 + t^3,\ \overline{h}_2 = t + t^2 + t^3,\ \overline{h}_3 = 1 + t + t^2 + t^3,\ \overline{h}_4 = 2 + t + t^2 + 3.t^3$$

Determine la dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas de la variedad lineal engendrada por "H".

FONEMATO 4.2.6

Demuestre que $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a+b & a \end{bmatrix},\ \forall a,b,c \in \Re \right\}$ es un subespacio de $M_{2\times 3}$, calculando su dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas.

FONEMATO 4.2.7

Demuestre que $S = \{(a+b\,;2.a+b\,;a+3.b\,;0),\ \forall a,b \in \Re\}$ es subespacio vectorial de $\Re^4$, calculando su dimensión, una base y unas ecuaciones cartesianas.

FONEMATO 4.2.8

En $\Re^4$, sea el subespacio $S = \{(b+c\,;a+2.c\,;a+b+3.c\,;a+2.c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$

Determine la dimensión, una base y unas ecuaciones cartesianas de "S".

¿Pertenecen a "S" los vectores $\overline{u} = (2;3;8;3)$ y $\overline{v} = (2;5;7;5)$?

FONEMATO 4.2.9

Demuestre que el subconjunto de $M_{2\times 2}$ que forman las matrices que conmutan con $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}$. Determine su dimensión y una base.

FONEMATO 4.2.10

Demuestre que $S=\left\{\begin{bmatrix} a & b & 4 \\ c & a+b & a \end{bmatrix},\ \forall a,b,c \in \Re\right\}$ es subespacio de $M_{2\times 3}$.

FONEMATO 4.2.11

Sea "S" el subconjunto de $M_{2\times 2}$ que forman las matrices simétricas. Demuestre que "S" es un subespacio de $M_{2\times 2}$, calculando su dimensión y una base.

FONEMATO 4.2.12

En el espacio vectorial P_3 formado por los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 3, se considera el conjunto "S" definido como:

$$S=\left\{(a+b+2.c).x^3+(a+c).x^2+b.x,\ \forall a,b,c \in \Re\right\}$$

Demuestre que "S" es subespacio de P_3, calculando su dimensión y una base.

FONEMATO 4.2.13

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 3, y "S" un subespacio de "V".

Sean $B_1=\left\{\overline{h}_1=(1;1;0), \overline{h}_2=(1;0;1)\right\}$ y $B_2=\left\{\overline{d}_1=(5;2;3), \overline{d}_2=(9;4;5)\right\}$ sendas bases de "S".

1) Determine la ecuación del cambio de base $B_1 \to B_2$.

2) Determine las coordenadas respecto de B_1 del vector $\overline{u}=2\bullet\overline{d}_1+5\bullet\overline{d}_2$.

3) Determine las coordenadas respecto de B_2 del vector $\overline{v}=\overline{h}_1+\overline{h}_2$.

FONEMATO 4.2.14

Sea "S" el subespacio de $\Re^3$ cuyas ecuaciones cartesianas respecto de la base $B=\left\{\overline{h}_1,\overline{h}_2,\overline{h}_3\right\}$ son $x_1+x_2+x_3=0,\ x_1-x_3=0$. Determine las ecuaciones cartesianas de "S" respecto de la base $B*=\left\{\overline{h}_1-\overline{h}_2, \overline{h}_2-\overline{h}_3, \overline{h}_3\right\}$.

FONEMATO 4.4.1

En el espacio vectorial $\Re^4$, sea S_1 el subespacio engendrado por los vectores $\overline{h}_1 = (0;-1;1;1)$ y $\overline{h}_2 = (0;-1;0;1)$. Sea S_2 el subespacio tal que:

$$S_2 = \left\{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \; / \; \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

1) Determine la dimensión y una base de su intersección.
2) Determine la dimensión y una base de su suma.
3) Compruebe que el vector $\overline{w} = (2;-6;4;2)$ pertenece a la suma, expresándolo como suma de un vector de S_1 y otro de S_2.

FONEMATO 4.4.2

En el espacio vectorial $\Re^4$, sean los subespacios:

$$S_1 = \{(a+c;b+c;b+c;a+c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$$

$$S_2 = \left\{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \Big/ \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

1) Determine la dimensión y una base de su intersección.
2) Determine la dimensión y una base de su suma.

FONEMATO 4.5.1

En el espacio vectorial $\Re^4$, sea $S = \{(a+b;2.a+2.c;a+c;a+b),\ \forall a,b,c \in \Re\}$. Determine un subespacio suplementario a "S".

FONEMATO 4.5.2

En el espacio vectorial $\Re^3$, sean los subespacios:

$$S_1 = \{(a+b;2.b;b),\ \forall a,b \in \Re\}\ ;\ S_2 = \{(2.y;y;y),\ \forall y \in \Re\}$$

$$S_3 = \{(p+q;2.q;2.p),\ \forall p,q \in \Re\}$$

1) ¿Son suplementarios S_1 y S_2?

2) Determine $(S_1 + S_2) \cap S_3$.

Tema 5
Aplicaciones lineales

FONEMATO 5.3.1

1) Considerando que las bases de referencia en $\Re^2$ y $\Re^3$ son las respectivas canónicas, demuestre que es lineal la aplicación $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ tal que
$$f(x_1;x_2) = (2.x_1 + x_2 ; x_1 - x_2 ; 0)$$
2) Determine las imágenes de los vectores de la base canónica de $\Re^2$ y la imagen del vector $\overline{p} = (2;3) \in \Re^2$.
3) Determine las antiimágenes de los vectores $\overline{d}_1 = (7;2;0)$ y $\overline{d}_2 = (3;4;5)$.

FONEMATO 5.3.2

1) Considerando que las bases de referencia en $\Re^4$ y $\Re^3$ son las respectivas canónicas, demuestre que es lineal la aplicación $f:\Re^4 \mapsto \Re^3$ tal que
$$f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1 - x_2 + x_4 ; x_1 - x_3 ; x_2 - x_3 - x_4)$$
2) Determine las imágenes de los vectores de la base canónica de $\Re^4$.
3) Determine la antiimagen del vector $\overline{d}_1 = (2;5;3)$.

FONEMATO 5.3.3

Considerando que las bases de referencia en $\Re^3$ y $\Re^4$ son las respectivas canónicas, demuestre que es lineal la aplicación $f:\Re^3 \mapsto \Re^4$ tal que
$$f(x_1;x_2;x_3) = (7 + x_1 - x_2 ; x_1 - x_3 ; x_2 - x_3)$$

FONEMATO 5.3.4

Sea $f:M_{2\times 2} \mapsto M_{2\times 2}$ tal que $f(A) = 2 \bullet A + 3 \bullet A^t$
Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

FONEMATO 5.3.5

Sea V_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2 y V_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3.
Sea $f:V_2 \mapsto V_3$ la aplicación tal que
$$f(a_1.x^2 + a_2.x + a_3) = a_2.x^3 + a_1.x^2 + (a_1 + a_2).x + a_3$$
Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

FONEMATO 5.3.6

Sea V_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3 y V_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2.
Sea $f : V_3 \mapsto V_2$ la aplicación tal que $f(p(x)) = p'(x) - p''(x)$.
Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

FONEMATO 5.3.7

Sea V_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2.
Sea $f : V_2 \mapsto \Re^2$ la aplicación tal que $f(p(x)) = (2.p(0) ; p'(1))$.
Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

FONEMATO 5.3.8

Sea V_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2.

Sea $f : V_2 \mapsto \Re^2$ la aplicación tal que

$$f(p(x)) = \left(6.\int_0^1 p(x).dx \ ; \ \int_0^2 (p'(x) - p''(x)).dx\right)$$

Demuestre que "f" es una aplicación lineal u homomorfismo.

FONEMATO 5.4.1

Siendo las bases de referencia en $\Re^3$ y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal u homomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3)=(2.x_1+7.x_2-5.x_3\ ;\ 3.x_1-4.x_2+9.x_3)$$

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

FONEMATO 5.4.2

Siendo las bases de referencia en $\Re^4$ y $\Re^3$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal u homomorfismo $f:\Re^4 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4)=(3.x_1+5.x_2+7.x_4\ ;\ 4.x_1+2.x_3\ ;\ 8.x_2-6.x_4)$$

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

FONEMATO 5.4.3

Sea $f:V_2 \mapsto V_3$ una aplicación lineal, siendo $B_1=\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\}$ la base de referencia en el espacio V_2 y $B_2=\{\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3\}$ la base de referencia en el espacio V_3. Determine la expresión de "f" respecto de las bases B_1 y B_2 sabiendo que:

$$f(\bar{h}_1)=2\bullet\bar{k}_1+3\bullet\bar{k}_2+4\bullet\bar{k}_3$$
$$f(\bar{h}_2)=5\bullet\bar{k}_1+6\bullet\bar{k}_2+7\bullet\bar{k}_3$$

FONEMATO 5.4.4

Sea $g:V_3 \mapsto V_2$ una aplicación lineal, siendo $B_1=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2,\bar{d}_3\}$ la base de referencia en el espacio V_3 y $B_2=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ la base de referencia en el espacio V_2.
Determine la expresión de "g" respecto de las bases B_1 y B_2 sabiendo que:

$$g(\bar{d}_1)=9\bullet\bar{u}_1+8\bullet\bar{u}_2\quad;\quad g(\bar{d}_2)=7\bullet\bar{u}_1+6\bullet\bar{u}_2\quad;\quad g(\bar{d}_3)=5\bullet\bar{u}_1+4\bullet\bar{u}_2$$

FONEMATO 5.4.5

Sea $f:V_3 \mapsto V_4$ una aplicación lineal, siendo $B_1=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$ la base de referencia en el espacio vectorial V_3 y $B_2=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{u}_4\}$ la base de referencia en el espacio vectorial V_4.
Determine la expresión de "f" respecto de las bases B_1 y B_2 sabiendo que:

$$f(\bar{a}_1)=3\bullet\bar{u}_1+5\bullet\bar{u}_2-7\bullet\bar{u}_3$$
$$f(\bar{a}_2)=2\bullet\bar{u}_1-3\bullet\bar{u}_2+5\bullet\bar{u}_3+6\bullet\bar{u}_4$$
$$f(\bar{a}_3)=\bar{0}$$

FONEMATO 5.4.6

Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2 y P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3. Siendo las bases de referencia en P_2 y P_3 las canónicas, sea el homomorfismo $f:P_2 \mapsto P_3$ tal que:

$$f(c_1.x^2+c_2.x+c_3)=(c_1-c_2).x^3+(c_2+c_3).x^2+(c_1+c_2-c_3).x+(c_1+c_3)$$

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

FONEMATO 5.4.7

Siendo las bases de referencia en P_3 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_3 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x)) = (3.p(1) - p'(0)\ ;\ p''(1))$.

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

FONEMATO 5.4.8

Siendo las bases de referencia en P_3 y P_2 las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_3 \mapsto P_2$ tal que $f(p(x)) = p'(x) - \frac{1}{2}.p''(x)$.

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

FONEMATO 5.4.9

Siendo las bases de referencia en P_2 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_2 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x) - p''(x)).dx\ ;\ \int_0^2 p''(x).dx \right)$.

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

FONEMATO 5.4.10

Si las bases de referencia en P_2 y $\Re^3$ son las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_2 \mapsto \Re^3$ tal que $f(p(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x) + p''(x)).dx\ ;\ 0\ ;\ \int_0^1 p''(x).dx \right)$.

Determine la expresión matricial de "f" respecto de dichas bases.

FONEMATO 5.5.1

Sea $f:\Re^4 \mapsto \Re^3$ la aplicación lineal tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1 + 2.x_4 \, ; x_2 + x_3 \, ; x_1 + x_2 + 3.x_4)$$

1) Determine la dimensión y una base del núcleo de "f".
2) Determine la dimensión y una base de la imagen de "f".

FONEMATO 5.5.2

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^4$ la aplicación lineal tal que:

$$f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + x_2 + 7.x_3 \, ; x_2 + x_3 \, ; 5.x_3 \, ; 0)$$

1) Determine la dimensión y una base del núcleo de "f".
2) Determine la dimensión y una base de la imagen de "f".

FONEMATO 5.5.3

Sea $f:V_3 \mapsto V_4$ una aplicación lineal, $B_1 = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3\}$ la base de referencia en V_3 y $B_2 = \{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4\}$ la base de referencia en V_4. Determine la dimensión y una base de $\ker.f$ y de $\mathrm{Img}.f$ sabiendo que:

$$f(\bar{h}_1) = 2 \bullet \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 + \bar{k}_4$$
$$f(\bar{h}_2) = \bar{k}_1 + \bar{k}_4$$
$$f(\bar{h}_3) = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3$$

FONEMATO 5.5.4

Sea $f:M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ tal que $f(A) = A + A^t$

1) Demuestre que "f" es una aplicación lineal.
2) Determine la dimensión y una base del núcleo de "f".
3) Determine la dimensión y una base de la imagen de "f".

FONEMATO 5.5.5

Si la base de referencia en el espacio vectorial $M_{2\times2}$ es la canónica, halle la matriz asociada a la aplicación lineal $f:M_{2\times2} \mapsto M_{2\times2}$ tal que $f(A) = 3 \bullet A - 2 \bullet A^t$

FONEMATO 5.5.6

Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2 y P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3.

Sea $f : P_2 \mapsto P_3$ la aplicación lineal tal que

$$f(a_1.x^2+a_2.x+a_3) = (a_1+a_2).x^3 + (a_1+a_3).x^2 + (a_1+a_2+a_3).x + (a_1-a_3)$$

1) Determine la dimensión y una base del núcleo de "f".
2) Determine la dimensión y una base de la imagen de "f".

FONEMATO 5.5.7

Sea P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 3 y P_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2.

Sea $f : P_3 \mapsto P_2$ la aplicación lineal tal que

$$f(a_1.x^3+a_2.x^2+a_3.x + a_4) = (a_2-a_4).x^2 + (a_1-a_3)$$

Determine la dimensión y una base del núcleo de "f" y de la imagen de "f".

FONEMATO 5.5.8

Siendo las bases de referencia en P_3 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_3 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x)) = (p'(0) - p(0)\,;\, p''(0))$.

Determine la dimensión y una base del núcleo de "f" y de la imagen de "f".

FONEMATO 5.5.9

Siendo las bases de referencia en P_3 y P_2 las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_3 \mapsto P_2$ tal que $f(p(x)) = 2.p'(x) - p''(x)$.

Determine la dimensión y una base del núcleo de "f" y de la imagen de "f".

FONEMATO 5.5.10

Siendo las bases de referencia en P_2 y $\Re^2$ las respectivas canónicas, sea la aplicación lineal $f: P_2 \mapsto \Re^2$ tal que $f(p(x)) = \left(\int_0^1 (p'(x)+p''(x)).dx\,;\, 3.\int_0^2 p''(x).dx\right)$.

Determine la dimensión y una base del núcleo de "f" y de la imagen de "f".

FONEMATO 5.7.1

Sean U y V espacios vectoriales y $f: U \mapsto V$ la aplicación lineal cuya matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{bmatrix}$$

Clasifique "f" según los valores del parámetro real "k".

FONEMATO 5.7.2

Sean U y V espacios vectoriales y $f: U \mapsto V$ la aplicación lineal cuya matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a.b & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix}$$

Clasifique "f" según los valores de los parámetros reales "a" y "b".

FONEMATO 5.7.3

Sean V_n y V_m espacios vectoriales de dimensiones "n" y "m" respectivamente y $f: V_n \mapsto V_m$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de unas ciertas bases es "A". Estudie bajo qué condiciones es aplicación lineal $f^{-1}: V_m \mapsto V_n$.

FONEMATO 5.8.1

Siendo $B_1 = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ la base de referencia en $\Re^2$ y $B_2 = \{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ la base de referencia en $\Re^3$, sea $f: \Re^2 \mapsto \Re^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(\bar{h}_1) = 3 \bullet \bar{k}_1 + 3 \bullet \bar{k}_2 + 5 \bullet \bar{k}_3 \ ; \ f(\bar{h}_2) = 8 \bullet \bar{k}_1 + 2 \bullet \bar{k}_2 + 6 \bullet \bar{k}_3$$

Halle la expresión de la aplicación lineal "f" respecto de las bases $B_1^* = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$ y $B_2^* = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, sabiendo que:

$$\bar{d}_1 = 5 \bullet \bar{h}_1 + 7 \bullet \bar{h}_2 \ ; \ \bar{d}_2 = 4 \bullet \bar{h}_1 + 9 \bullet \bar{h}_2$$

$$\bar{u}_1 = 2 \bullet \bar{k}_1 + 3 \bullet \bar{k}_2 + 4 \bullet \bar{k}_3 \ ; \ \bar{u}_2 = 2 \bullet \bar{k}_1 + 3 \bullet \bar{k}_2 \ ; \ \bar{u}_3 = 3 \bullet \bar{k}_1$$

FONEMATO 5.8.2

Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re^3$ una aplicación lineal de la que se sabe que

$$f(2;3) = (4;5;6) \ ; \ f(3;4) = (7;8;9)$$

Determine la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^3$.

FONEMATO 5.8.3

Halla la expresión de $f: \Re^3 \mapsto \Re^2$ respecto de las bases canónicas de $\Re^3$ y $\Re^2$ si $f(1;0;0) = (0;1)$, $f(1;1;1) = (1;0)$ y $\ker.f = \{\bar{x} \in \Re^3 \ / \ x_1 - x_2 = x_3 = 0\}$.

FONEMATO 5.8.4

Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re^4$ una aplicación lineal referida a las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^4$. Se sabe que $f(1;0) = (2;1;0;1)$ engendra al subespacio Img.f y que $(1;1) \in \ker.f$. Determínese la expresión de "f" respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^4$.

FONEMATO 5.9.1

Se consideran las siguientes aplicaciones lineales de $\Re^4$ en $\Re^3$, todas ellas referidas a las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^3$:

$$g_1 : \Re^4 \mapsto \Re^3 \ / \ g_1(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1 + 3.x_2 \ ; x_2 + x_4 \ ; x_1 - x_4)$$
$$g_2 : \Re^4 \mapsto \Re^3 \ / \ g_2(x_1;x_2;x_3;x_4) = (0 \ ; x_2 \ ; x_3)$$
$$g_3 : \Re^4 \mapsto \Re^3 \ / \ g_3(x_1;x_2;x_3;x_4) = (2.x_3 + 5.x_4 \ ; 0 \ ; 0)$$
$$g_4 : \Re^4 \mapsto \Re^3 \ / \ g_4(x_1;x_2;x_3;x_4) = (0 \ ; 0 \ ; x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Determínese la expresión de $h = 3 \bullet g_1 + 4 \bullet g_2 - 5 \bullet g_3 + 6 \bullet g_4$ respecto de las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^3$.

FONEMATO 5.9.2

Tomando como bases de referencia en $\Re^3$ y $\Re^2$ las respectivas bases canónicas, en el espacio vectorial "F" que forman las aplicaciones lineales de $\Re^3$ en $\Re^2$, se consideran los siguientes vectores:

$$h_1 : \Re^3 \mapsto \Re^2 \ / \ h_1(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + 2.x_2 \ ; 3.x_1 + 4.x_2 + 5.x_3)$$
$$h_2 : \Re^3 \mapsto \Re^2 \ / \ h_2(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + 3.x_2 + 6.x_3 \ ; x_1 + x_2 + 4.x_3)$$
$$h_3 : \Re^3 \mapsto \Re^2 \ / \ h_3(x_1;x_2;x_3) = (3.x_1 + 5.x_2 + 6.x_3 \ ; 4.x_1 + 5.x_2 + 9.x_3)$$

1) Estúdiese su dependencia o independencia lineal.
2) ¿Constituyen un sistema de generadores de "F"?, ¿y una base?
3) Calcúlese la dimensión y una base de la variedad lineal que engendran.

FONEMATO 5.10.1

Sea la aplicación lineal $f:\Re^2 \mapsto \Re^4$ cuya expresión respecto de las bases canónicas de $\Re^2$ y $\Re^4$ es $f(x_1;x_2) = (0;0;0;x_2)$. Sea $g:\Re^4 \mapsto \Re^3$ la aplicación lineal que tiene expresión $g(x_1;x_2;x_3;x_4) = (0;x_3;0;x_2)$ respecto de las bases canónicas de $\Re^4$ y $\Re^3$. Determínese el núcleo y la imagen de $g \bullet f$ y de $f \bullet g$.

FONEMATO 5.10.2

Referidas a las bases canónicas, se consideran la siguientes aplicaciones lineales:

$$f:\Re^2 \mapsto \Re^3 \;/\; f(x_1;x_2) = (2.x_1 + x_2;3.x_1 + 8.x_2;0)$$
$$g:\Re^3 \mapsto \Re^2 \;/\; g(y_1;y_2;y_3) = (y_1 + 5.y_2 + 3.y_3;0)$$
$$t:\Re^2 \mapsto \Re^3 \;/\; t(z_1;z_2) = (z_1 + z_2;0;0)$$

Determínense $t \bullet g \bullet f$, $f \bullet g \bullet t$ y $t \bullet f \bullet g$.

FONEMATO 5.10.3

Sean $f:U \mapsto V$ y $g:V \mapsto W$ aplicaciones lineales.

1) Demuéstrese que si "f" y "g" son monomorfismos, $g \bullet f$ es monomorfismo.

2) Demuéstrese que si "f" y "g" son epimorfismos, $g \bullet f$ es epimorfismo.

FONEMATO 5.10.4

Sean $f:\Re^n \mapsto \Re^m$ y $g:\Re^m \mapsto \Re^k$ dos aplicaciones lineales, siendo "g" un monomorfismo. Determine $\ker.g \bullet f$.

Tema 6
El más famoso producto escalar

FONEMATO 6.2.1

Demuestre que el conjunto "S" formado por los vectores que son ortogonales a $\overline{h}_1 = (2;1;1;-1)$, $\overline{h}_2 = (0;1;2;1)$ y $\overline{h}_3 = (1;-1;-1;-2)$ es subespacio de $\Re^4$. Determine su dimensión y una base.

FONEMATO 6.3.1

Determine el subespacio ortogonal al subespacio "S":

$$S = \{(a + b + 2.c;b + c;0;b + c),\ \forall a,b,c \in \Re\}$$

FONEMATO 6.5.1

Determine una base ortogonal del subespacio "S":

$$S = \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 \middle/ \begin{array}{r} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

FONEMATO 6.8.1 (Tontorrón, subespacio de dimensión 1)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S = \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 / \ x_1 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

FONEMATO 6.8.2 (Subespacio de dimensión 2, pero los dioses están con nosotros)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S = \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 / \ x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

FONEMATO 6.8.3 (Subespacio de dimensión 2, y los dioses nos abandonan a nuestra suerte)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S = \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 / \ x_1 - x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

FONEMATO 6.8.4 (Subespacio de dimensión 2, pero los dioses están con nosotros)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S = \left\{ \overline{x} = (a + c;b + c;a + c;b + c),\ \forall a,b,c \in \Re \right\}$$

FONEMATO 6.8.5 (Espantoso, subespacio de dimensión 3 y los dioses nos abandonan)

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S = \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 / \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

FONEMATO 6.8.6

Determine una base ortonormal del subespacio "S":

$$S = \left\{ \overline{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \in \Re^4 / \ x_3 = 0,\ x_1 - x_4 = 0 \right\}$$

Tema 7 Diagonalización de matrices cuadradas

FONEMATO 7.3.1

Calcule los autovalores de "A" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 7.3.2

Calcule los autovalores de "A" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 7.3.3

Calcule los autovalores de "A" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 7.3.4

Calcule los autovalores de "A" y la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a cada autovalor.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 7.4.1

Si es posible, diagonalice la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.2

Estudie para qué valores de "a" y "b" es diagonalizable $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.3

Si es posible, diagonalice la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.4

Si es posible, diagonalice la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, $a, b \neq 0$.

FONEMATO 7.4.5

Si es posible, diagonalice la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.6

Si es posible, diagonalice la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.7

Determine una matriz ortogonal que diagonalice a $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.8

Determine una matriz ortogonal que diagonalice a $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.9

Determine una matriz ortogonal que diagonalice a $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 7.4.10

Determine una matriz ortogonal que diagonalice a $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Tema 8
Diagonalización de endomorfismos

FONEMATO 8.1.1

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo que respecto de la base canónica de $\Re^3$ tiene asociada la matriz "A". Calcule los autovalores y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 8.1.2

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 + x_3; -x_2 + x_3; -x_3)$. Calcule los autovalores y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores.

FONEMATO 8.1.3

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + 2.x_2 + x_3; 3.x_2 + x_3; -x_3)$. Calcule los autovalores y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores.

FONEMATO 8.1.4

Siendo $a \neq 0$ y $b \neq 0$, sea $f:\Re^4 \mapsto \Re^4$ el endomorfismo cuya matriz asociada "A" respecto de la base canónica de $\Re^4$ es tal que $a_{ij} = a$ si $i = j$ y $a_{ij} = b$ si $i \neq j$. Calcule los autovalores y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores.

FONEMATO 8.1.5

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ un endomorfismo y $B = \{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ una base de $\Re^3$. Calcule los autovalores de "f" y la dimensión y una base de cada subespacio de autovectores, sabiendo que $f(\bar{k}_1) = 2 \bullet \bar{k}_1$, $f(\bar{k}_2) = -\bar{k}_2$ y $f(\bar{k}_3) = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 - \bar{k}_3$.

FONEMATO 8.2.1

Si es posible, diagonalice el endomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(x_1;x_2;x_3)=(2.x_1+x_2+x_3;2.x_2;-x_2+x_3)$$

FONEMATO 8.2.2

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ un endomorfismo y $B=\{\bar{d}_1,\bar{d}_2,\bar{d}_3\}$ una base de $\Re^3$.

Si es posible, diagonalice "f" sabiendo que:

$$f(\bar{d}_1)=2\bullet\bar{d}_1+2\bullet\bar{d}_3 \;;\; f(\bar{d}_2)=\bar{d}_2 \;;\; f(\bar{d}_3)=2\bullet\bar{d}_1-\bar{d}_3$$

FONEMATO 8.2.3

Sean $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$ y $g:\Re^2 \mapsto \Re^3$ las aplicaciones lineales tales que:

$$f(x_1;x_2;x_3)=(x_1-x_2+x_3;x_1-x_2+x_3)$$
$$g(y_1;y_2)=(y_1;-y_1+3.y_2;y_1-y_2)$$

Analice si el endomorfismo $h=g\bullet f$ es diagonalizable.

FONEMATO 8.2.4

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de una base "B" de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3)=(5.x_1;-x_2+a.x_3;3.x_1+b.x_3)$, siendo "a" y "b" parámetros reales. Analice si "f" es diagonalizable.

FONEMATO 8.2.5

Determine las matrices cuadradas de orden 2 cuyos autovalores son 1 y -1.

FONEMATO 8.2.6

Si es posible, determine una base de $\Re^3$ que diagonalice al endomorfismo $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \;;\; a,b\neq 0$$

FONEMATO 8.2.7

Si es posible, diagonalice el endomorfismo $f:P_2 \mapsto P_2$ tal que

$$f(a.x^2+b.x+c)=(a+2.b+c).x^2+(3.b+c).x-c$$

FONEMATO 8.2.8

Si es posible, calcule una matriz "C" tal que $C^{-1}\bullet A\bullet C$ sea diagonal, siendo:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 8.2.9

Si es posible, calcule una matriz "C" tal que $C^{-1}\bullet A\bullet C$ sea diagonal, siendo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 8.2.10

Sea $B = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3\}$ una base de $\Re^3$ y $f: \Re^3 \mapsto \Re^3$ un endomorfismo. Determine la matriz asociada a "f" respecto de la base "B" sabiendo que:

El vector $\overline{p} = \overline{k}_1 + \overline{k}_3$ es autovector del autovalor $\lambda = 2$.

El vector $\overline{q} = \overline{k}_3$ es autovector del autovalor $\lambda = 3$.

El vector $\overline{w} = \overline{k}_1 + \overline{k}_2$ es tal que $f(\overline{w}) = \overline{k}_1 + \overline{k}_2 + \overline{k}_3$.

FONEMATO 8.3.1

Calcúlese A^4, siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

FONEMATO 8.3.2

En la ínsula de Barataria hay tres empresas, Ferroín, Ferroval y Baraferro, que fabrican ferrines no valigerables. En la actualidad, Ferroín controla el 60 % del mercado, y las otras se reparten el resto por partes iguales.

Se ha comprobado que de un año a otro, Ferroval consigue hacerse con el 20 % del mercado controlado anteriormente por Ferroín, y con el 30 % del de Baraferro. A su vez, Ferroín consigue arrebatar el 40 % del mercado controlado por sus competidores; y finalmente, Baraferro consigue el 60 % del mercado controlado anteriormente por Ferroín y el 10 % del controlado por Ferroval. Si esta dinámica se mantiene a lo largo del tiempo, representar matricialmente la evolución del reparto del mercado de ferrines no valigerables, y la distribución del mercado a largo plazo.

FONEMATO 8.7.1

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (2.x_1 - 2.x_2;2.x_2;- x_2 + 2.x_3)$.

Determine una forma canónica de Jordan correspondiente a "f".

FONEMATO 8.7.2

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (4.x_1 + 8.x_2;4.x_2 + 8.x_3;4.x_3)$.

Determine una forma canónica de Jordan correspondiente a "f".

FONEMATO 8.7.3

Sea $f:\Re^3 \mapsto \Re^3$ el endomorfismo cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1;x_1 + 2.x_2;2.x_2 + 2.x_3)$.

Determine una forma canónica de Jordan correspondiente a "f".

Tema 9
Formas bilineales
y formas cuadráticas

FONEMATO 9.1.1

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 2 y $B=\{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ la base de referencia en él. Sea $f: V\times V \mapsto \Re$ tal que $f(\overline{x};\overline{y}) = 4.x_1.y_1 + 3.x_1.y_2 - x_2.y_2$, siendo

$$\overline{x} = x_1 \bullet \overline{u}_1 + x_2 \bullet \overline{u}_2 \ ; \ \overline{y} = y_1 \bullet \overline{u}_1 + y_2 \bullet \overline{u}_2$$

Pruebe que "f" es una forma bilineal.

FONEMATO 9.2.1

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 2 y $B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ la base de referencia en él. Sea $f:V\times V\mapsto\Re$ la forma bilineal tal que $f(\overline{u}_i;\overline{u}_j)=2.i+3.j$.

Determínese la expresión de "f" respecto de la base "B", calculando $f(\overline{p};\overline{q})$ y $f(\overline{q};\overline{p})$ si $\overline{p}=1\bullet\overline{u}_1+1\bullet\overline{u}_2$ y $\overline{q}=1\bullet\overline{u}_1-1\bullet\overline{u}_2$.

FONEMATO 9.2.2

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 3 y $B=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\}$ la base de referencia en él. Sea $f:V\times V\mapsto\Re$ la forma bilineal tal que $f(\overline{a}_i;\overline{a}_j)=i^2+j^2$.

Determínese la expresión de la forma bilineal "f" respecto de la base "B", calculando $f(\overline{p};\overline{q})$ y $f(\overline{q};\overline{p})$, siendo $\overline{p}=1\bullet\overline{a}_1+1\bullet\overline{a}_3$ y $\overline{q}=1\bullet\overline{a}_2+1\bullet\overline{a}_3$.

FONEMATO 9.2.3

Determínese la matriz asociada a la forma bilineal $f:\Re^3\times\Re^3\mapsto\Re$ tal que

$$f(\overline{x};\overline{y})=9.x_1.y_1-3.x_1.y_3+5.x_2.y_1+8.x_2.y_2+7.x_3.y_2$$

FONEMATO 9.2.4

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 2 y $B=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ la base de referencia en él. Sea $f:V\times V\mapsto\Re$ tal que $f(\overline{x};\overline{y})=4.x_1.y_1+3.x_1.y_2-x_2.y_2$, siendo $\overline{x}=x_1\bullet\overline{u}_1+x_2\bullet\overline{u}_2$ e $\overline{y}=y_1\bullet\overline{u}_1+y_2\bullet\overline{u}_2$. Pruebe que "f" es una forma bilineal.

FONEMATO 9.2.5

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno y $B=\{1,x\}$ la base de referencia elegida en él.

1) Pruebe que es bilineal la aplicación $f:V\times V\mapsto\Re$ tal que

$$f(p(x);q(x))=\int_0^1 p(x).q(x).dx$$

2) Determine la expresión de "f" respecto de la base "B".

FONEMATO 9.2.6

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno y $B=\{1,x\}$ la base de referencia elegida en él. Pruebe que es bilineal la aplicación $f:V\times V\mapsto\Re$ tal que $f(p(x);q(x))=p(1).q(1)+p(2).q(2)$. Determine la expresión de "f" respecto de la base "B".

FONEMATO 9.5.1

Se consideran las siguientes formas bilineales, todas ellas referidas a la base canónica de $\Re^2$:

$$g_1:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; g_1(\overline{x};\overline{y}) = 5.x_1.y_2 + 3.x_2.y_2$$
$$g_2:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; g_2(\overline{x};\overline{y}) = 7.x_2.y_1$$
$$g_3:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; g_3(\overline{x};\overline{y}) = 2.x_1.y_1 + 3.x_1.y_2 + 7.x_2.y_1 + 4.x_2.y_2$$

Determínese la expresión de $h = 3 \bullet g_1 + 4 \bullet g_2 - 5 \bullet g_3$ respecto de la base canónica de $\Re^2$.

FONEMATO 9.5.2

En el conjunto $F = \{ f:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; \text{"f" es forma bilineal} \}$, se consideran las siguientes formas bilineales, todas ellas referidas a la base canónica de $\Re^2$:

$$h_1:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; h_1(\overline{x};\overline{y}) = 5.x_1.y_2 + 3.x_2.y_2$$
$$h_2:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; h_2(\overline{x};\overline{y}) = 7.x_2.y_1$$
$$h_3:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re \;/\; h_3(\overline{x};\overline{y}) = 5.x_1.y_2 + 7.x_2.y_1 + 3.x_2.y_2$$

1) Estúdiese su dependencia o independencia lineal.
2) ¿Constituyen un sistema de generadores de "F"?, ¿y una base?
3)Calcúlese la dimensión y una base de la variedad lineal que engendran.

FONEMATO 9.6.1

Sea $f:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^2$ es $f(\bar{x};\bar{y}) = 5.x_1.y_1 + 6.x_1.y_2 + 2.x_2.y_1 + 7.x_2.y_2$

Descomponer "f" en suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica.

FONEMATO 9.7.1

Sea $f:\Re^3\times\Re^3\mapsto\Re$ la forma bilineal cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(\bar{x};\bar{y})=2.x_1.y_1+2.x_2.y_3+x_3.y_1+x_3.y_3$.

Determine los subespacios $\ker_i f$ y $\ker_d f$.

FONEMATO 9.7.2

Sea $f:\Re^3\times\Re^3\mapsto\Re$ la forma bilineal cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $f(\bar{x};\bar{y})=2.x_1.y_1+2.x_1.y_3+2.x_3.y_1+2.x_3.y_3$.

Determine los subespacios $\ker_i f$ y $\ker_d f$.

FONEMATO 9.7.3

Sea la forma bilineal $f:P_2\times P_2\mapsto\Re$ tal que:

$$f(p(x);q(x))=\left(\int_0^1(p'(x)+p''(x)).dx\right).\left(\int_0^1 q''(x).dx\right)$$

Determine los subespacios $\ker_i f$ y $\ker_d f$.

FONEMATO 9.9.1

Sea $f: \Re^3 \times \Re^3 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$, es

$$f(\overline{x};\overline{y}) = 2.x_1.y_1 + x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_2.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_1 + x_3.y_3$$

Determine el subespacio conjugado de $H = \{(x_1; x_2; x_3) / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

FONEMATO 9.10.1

Sea $f:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya matriz asociada respecto de la base $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$ es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Determínese la expresión de "f" respecto de la base $B^* = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$, si $\overline{v}_1 = 2 \bullet \overline{u}_1 + 3 \bullet \overline{u}_2$ y $\overline{v}_2 = 4 \bullet \overline{u}_2$.

FONEMATO 9.10.2

Sea $f:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ la forma bilineal cuya matriz asociada respecto de la base $B = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2\}$ es $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Determínese la expresión de "f" respecto de la base $B^* = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$ si $\overline{k}_1 = 5 \bullet \overline{a}_1 + 6 \bullet \overline{a}_2$ y $\overline{k}_2 = 7 \bullet \overline{a}_1 + 8 \bullet \overline{a}_2$.

FONEMATO 9.10.3

Sea $f:\Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ la forma bilineal tal que:

$$f((2;3);(2;3)) = 15 \ ; \ f((2;3);(4;1)) = f((4;1);(2;3)) = 12 \ ; \ f((4;1);(4;1)) = 19$$

Determine la expresión de "f" respecto de la base $B = \{(0;5), (-2;7)\}$.

FONEMATO 9.11.1

La expresión de una forma bilineal respecto de la base canónica de $\Re^3$ es:

$$1)\ f(\bar{x};\bar{y}) = 3.x_1.y_1 + x_1.y_2 + 7.x._2.y_2 + 5.x_2.y_1 + \\ + 6.x_3.y_1 + 8.x_2.y_3 + 9.x_3.y_3$$

$$2)\ g(\bar{x};\bar{y}) = 3.x_1.y_1 + 2.x_1.y_2 + 6.x_1.y_3 + 7.x._2.y_2 + \\ + 4.x_2.y_1 + 8.x_3.y_2 + 9.x_3.y_3$$

Determine la forma cuadrática asociada a la forma bilineal.

FONEMATO 9.13.1

Sea $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ la forma cuadrática cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $Q(\bar{x}) = x_1^2 + 3.x_2^2 - 6.x_3^2 + 8.x_1.x_2 + 4.x_1.x_3$.

Determine la expresión de "Q" respecto de la base

$$B^* = \{\bar{h}_1 = (2;4;5), \bar{h}_2 = (3;7;0), \bar{h}_3 = (9;0;0)\}$$

FONEMATO 9.13.2

Sea $B = \{\bar{k}_1, \bar{k}_2\}$ una base de $\Re^2$ y $Q:\Re^2 \mapsto \Re$ la forma cuadrática cuya expresión respecto de "B" es $Q(\bar{x}) = 2.x_1^2 + x_2^2 + 6.x_1.x_2$.

Determine su expresión respecto de la base $B^* = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$, siendo:

$$\bar{k}_1 = 9 \bullet \bar{h}_2 \; ; \; \bar{k}_2 = 2 \bullet \bar{h}_1 + 3 \bullet \bar{h}_2$$

FONEMATO 9.15.1

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que:

$$Q(\bar{x}) = 3.x_1^2 + 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 4.x_2.x_3$$

FONEMATO 9.15.2

Diagonalícese la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que $Q(\bar{x}) = x_1^2 + 2.x_2.x_3$

FONEMATO 9.15.3

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que:

$$Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3$$

FONEMATO 9.15.4

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^4 \mapsto \Re$ tal que

$$Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 - 2.x_1.x_4 - 2.x_2.x_3 + 2.x_2.x_4 + 2.x_3.x_4$$

FONEMATO 9.16.1

Diagonalícese la forma del ejercicio 9.13.1, es decir la $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que

$$Q(\bar{x}) = 3.x_1^2 + 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 4.x_2.x_3.$$

FONEMATO 9.16.2

Sea $Q:\Re^2 \mapsto \Re$ la forma cuadrática cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^2$ es $Q(\bar{x}) = x_1^2 + 2.x_1.x_2 + x_2^2$. Diagonalícese mediante cambio de base ortonormal y mediante transformaciones elementales.

FONEMATO 9.17.1

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $Q(\overline{v}) = x^2 + 7.y^2 + 8.z^2 - 6.x.y + 4.x.z - 10.y.z$

FONEMATO 9.17.2

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $Q(\overline{v}) = x^2 + 5.y^2 - 4.z^2 + 2.x.y - 4.x.z$.

FONEMATO 9.17.3

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^3$ es $Q(\overline{v}) = 2.x.y + 2.x.z + 2.y.z$

FONEMATO 9.17.4

Diagonalice la forma cuadrática $Q:\Re^4 \mapsto \Re$ cuya expresión respecto de la base canónica de $\Re^4$ es

$$Q(\overline{v}) = x^2 - y^2 + 3.z^2 - 3.t^2 + 2.x.y + 2.x.z + 2.x.t + \\ + 6.y.z - 6.y.t + 2.z.t$$

FONEMATO 9.17.5

Sea la forma bilineal $f: P_2 \times P_2 \mapsto \Re$ tal que:

$$f(p(x);q(x)) = \left(\int_0^1 (2.p'(x)+p''(x)).dx\right).\left(\int_0^2 \frac{1}{4}.q''(x).dx\right)$$

Diagonalice la forma cuadrática "Q" asociada a "f".

FONEMATO 9.18.1

Diagonalice $Q:\Re^4 \mapsto \Re$ tal que, respecto de la base canónica, es

$$Q(\bar{x}) = 4.x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4.x_1.x_2 - 4.x_1.x_3 + \\ + 4.x_1.x_4 + 4.x_2.x_3 - 4.x_2.x_4$$

FONEMATO 9.20.1

Clasifique la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que

$$Q(\bar{x}) = 2.x_1^2 + a.x_2^2 + \frac{1}{2}.x_3^2 + 2.x_1.x_3$$

FONEMATO 9.20.2

Clasifique las siguientes formas cuadráticas:

$$h:\Re^2 \mapsto \Re \ / \ h(\bar{x}) = 3.x_1^2 + 2.x_2^2 - 2.a.x_1.x_2$$
$$g:\Re^3 \mapsto \Re \ / \ g(\bar{x}) = a.x_1^2 - 2.x_2^2 - x_3^2 + 2.x_2.x_3$$

FONEMATO 9.20.3

Clasifique la forma cuadrática $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ tal que

$$Q(\bar{x}) = 3.x_1^2 + a.x_2^2 + 3.x_3^2 - 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 - 2.x_2.x_3$$

FONEMATO 9.20.4

Siendo $a \in \Re$, sea $Q:\Re^3 \mapsto \Re$ la forma cuadrática tal que:

$$Q(x;y;z) = a.x^2 + a.y^2 + a.z^2 + 2.\sqrt{2}.x.y + 2.\sqrt{2}.y.z$$

Clasifique "Q" en función de los valores del parámetro $a \in \Re$.

FONEMATO 9.20.5

Sea la forma cuadrática $Q(X) = X^t \bullet A \bullet X$.

Sea la forma cuadrática $Q_B(X) = (B \bullet X)^t \bullet A \bullet (B \bullet X)$, siendo "B" una matriz ortogonal.

Demuestre que "Q" y "Q_B" tienen el mismo signo.

FONEMATO 9.20.6

Sea $f:\Re^n \mapsto \Re^n$ una aplicación lineal.

Sea $Q:\Re^n \mapsto \Re$ una forma cuadrática definida positiva con matriz asociada "A".

Sea la forma cuadrática $Q_1:\Re^n \mapsto \Re$ tal que $Q_1(\bar{x}) = Q(f(\bar{x}))$.

Demuestre "Q" es definida positiva si "f" es monomorfismo.

¿Qué puede afirmarse si "f" no es monomorfismo?

FONEMATO 9.21.1

Clasifique la forma cuadrática $Q(\bar{x}) = 2.x_1.x_2 + 2.x_1.x_3 + 2.x_2.x_3$ restringida a los siguientes subespacios de $\Re^3$:

$$S_1 = \{(x_1;x_2;x_3) \in \Re^3 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$

$$S_2 = \left\{(x_1;x_2;x_3) \in \Re^3 \middle/ \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3.x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

FONEMATO 9.21.2

Clasifique la forma cuadrática $Q(\bar{u}) = x^2 - y^2 + 2.x.z + 2.y.z$ restringida a los siguientes subespacios de $\Re^3$:

$$S_1 = \{(x;y;z) \in \Re^3 / x - y = 0\}$$

$$S_2 = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \middle/ \begin{matrix} x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$S_3 = \{(x;y;z) \in \Re^3 / y - z = 0\}$$

FONEMATO 9.21.3

Sea $Q : \Re^3 \mapsto \Re$ tal que $Q(x;y;z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2.a.x.y$.

1) Clasifique "Q" según los valores del parámetro $a \in \Re$.

2) Si $a \neq 0$, clasifique "Q" restringida al subespacio "S".

$$S = \{(x;y;z) \in \Re^3 \ / \ z - y = 0,\ a.x + y - 2.z = 0\}$$

FONEMATO 9.21.4

Sea $Q : \Re^3 \mapsto \Re$ la forma cuadrática tal que:

$$Q(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + b^2.x_3^2 + 2.b.x_2.x_3 \ ; \ b \in \Re,\ b \neq 0$$

1) Clasifique "Q" en función de los valores del parámetro "b" .

2) Diagonalice "Q".

3) Si $a \in \Re$, determine el signo de "Q" si se restringe al subespacio vectorial "S".

$$S = \{\bar{x} \in \Re^3 / x_1 - a.x_2 = 0,\ x_2 - b.x_3 = 0\}$$

4) Halle una aplicación lineal cuyo núcleo sea "S" y diga qué tipo de aplicación es.

Tema 10
Producto escalar

FONEMATO 10.2.1

Siendo la base de referencia en $\Re^2$ la canónica, sea $f : \Re^2 \times \Re^2 \mapsto \Re$ tal que:

$$f(\bar{x};\bar{y}) = 5.x_1.y_1 + 2.x_1.y_2 + 2.x_2.y_1 + 3.x_2.y_2$$

Demuestre que "f" es un producto escalar.

FONEMATO 10.2.2

Sea "V" un espacio vectorial de dimensión 2 y $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ la base de referencia en él. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in V$ tales que $\bar{x} = x_1 \bullet \bar{u}_1 + x_2 \bullet \bar{u}_2$, $\bar{y} = y_1 \bullet \bar{u}_1 + y_2 \bullet \bar{u}_2$.

Sea la aplicación $f : V \times V \mapsto \Re$ tal que

$$f(\bar{x};\bar{y}) = (x_1 + 2.x_2).(y_1 + 2.y_2) + (3.x_1 + 4.x_2).(3.y_1 + .4y_2)$$

Demuestre que "f" es un producto escalar.

FONEMATO 10.2.3

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2. Sea $B = \left\{ \bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = x, \bar{k}_3 = x^2 \right\}$ la base de referencia en "V".

Sea la aplicación $f : V \times V \mapsto \Re$ tal que $f(p(x);q(x)) = \int_0^1 p(x).q(x).dx$.

Demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a "V" en un espacio vectorial euclídeo, determinando la matriz de Graam respecto de la base "B" y la matriz de Graam respecto de la base B^*.

FONEMATO 10.2.4

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2. Sea $B = \left\{ \bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = x, \bar{k}_3 = x^2 \right\}$ la base de referencia en "V".

Sea la aplicación $f : V \times V \mapsto \Re$ tal que

$$f(p(x);q(x)) = p(1).q(1) + p(2).q(2) + p(3).q(3)$$

Demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a "V" en un espacio vectorial euclídeo, determinando la matriz de Graam respecto de la base "B".

FONEMATO 10.2.5

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2. Sea $B = \left\{ \bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = x, \bar{k}_3 = x^2 \right\}$ la base de referencia en "V".

Sea la aplicación $f : V \times V \mapsto \Re$ tal que $f(p(x);q(x)) = \int_0^1 p(x).q(x).dx$.

Demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a "V" en un espacio vectorial euclídeo, determinando la matriz de Graam respecto de la base "B" y la matriz de Graam respecto de la base B^*.

$$B^* = \left\{ \bar{h}_1 = 2 + 3.x + 4.x^2,\ \bar{h}_2 = 2.x - 5.x^2,\ \bar{h}_3 = 6.x^2 \right\}$$

FONEMATO 10.2.6

Sea "V" el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado no superior a 2, siendo $B = \{\bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = x, \bar{k}_3 = x^2\}$ la base de referencia en "V". Si $f: V \times V \mapsto \Re$ es un producto escalar y $G = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix}$ es su matriz de Graam respecto de la base "B" determine la matriz de Graam respecto de la base

$$B^* = \{\bar{h}_1 = 1 + 6.x + 7.x^2,\ \bar{h}_2 = 3 - 2.x,\ \bar{h}_3 = 5\}$$

FONEMATO 10.2.7

Sea el espacio vectorial $V = \left\{ \begin{bmatrix} p & q \\ r & q \end{bmatrix}, \forall p,q,r \in \Re \right\}$.

Sea $H = \left\{ \bar{k}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{k}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ la base de referencia en "V".

Sea la aplicación $f: V \times V \mapsto \Re$ tal que

$$f(A;B) = a_1.b_1 + (a_1 - a_2).(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2 + a_3).(b_1 + b_2 + b_3)$$

Demuestre que "f" es un producto escalar que transforma a "V" en un espacio vectorial euclídeo, determinando la matriz de Graam respecto de la base "B" y la matriz de Graam respecto de la base B^*.

$$H^* = \left\{ \bar{h}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ \bar{h}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ \bar{h}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \right\}$$

FONEMATO 10.5.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Analice si el conjunto "H" que forman los vectores ortogonales a $\overline{u} = 2 \bullet \overline{e}_1 - 3 \bullet \overline{e}_2 + 2 \bullet \overline{e}_3$ es subespacio "V" determinando una base de "H".

FONEMATO 10.6.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\overline{e}_1, \overline{e}_2$.

Sea el subespacio $A=\{\overline{x}=(x_1;x_2)\in V \ / \ x_1-x_2=0\}$.

1) Determine el subespacio ortogonal al subespacio "A".
2) Determine la proyección ortogonal de "V" sobre "A".
3) Determine la simetría de "V" respecto de "A".

FONEMATO 10.6.2

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$.

Sea el subespacio $A=\{\overline{x}=(x_1;x_2;x_3)\in V \ / \ x_1-x_2+x_3=0\}$.

1) Determine el subespacio ortogonal al subespacio "A".
2) Determine la proyección ortogonal de "V" sobre "A".
3) Determine la simetría de "V" respecto de "A".

FONEMATO 10.6.3

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$.

Sea el subespacio $A=\{\overline{x}=(x_1;x_2;x_3)\in V \ / \ x_1+x_2=0, \ x_1-x_2-2.x_3=0\}$.

1) Determine el subespacio ortogonal al subespacio "A".
2) Determine la proyección ortogonal de "V" sobre "A".
3) Determine la simetría de "V" respecto de "A".

FONEMATO 10.6.4

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo cuya matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4$ es la matriz unidad.

1) Demuestre que si $\overline{p}, \overline{q}\in V$ y $\overline{p}\neq\overline{0}$, siempre puede descomponerse $\overline{q}$ en suma de un vector $\lambda\bullet\overline{p}$ proporcional a $\overline{p}$ y un vector ortogonal a $\overline{p}$, siendo única dicha descomposición. De $\lambda\bullet\overline{p}$ se dice proyección ortogonal de $\overline{q}$ sobre $\overline{p}$.
2) Determine la proyección ortogonal de $\overline{q}=(1;1;0;0)$ sobre $\overline{p}=(2;1;1;0)$.

FONEMATO 10.6.5

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base de "V" que forman los vectores $\overline{e}_1, \overline{e}_2$.

1) Determine la proyección ortogonal de $\overline{q}=(2;1)$ sobre $\overline{p}=(3;4)$.
2) Determine la proyección ortogonal de $\overline{q}$ sobre $\overline{p}$ si $G=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3) Determine la proyección ortogonal de $\overline{q}$ sobre $\overline{p}$ si $G=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

FONEMATO 10.7.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ de "V". Determine una base ortogonal de "V".

FONEMATO 10.8.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de "V". Determine una base ortonormal de "V".

FONEMATO 10.8.2

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B = \{\overline{m}, \bar{n}, \bar{p}\}$ de "V".

1) Determine una base ortogonal de "V".
2) Determine una base ortonormal de "V".

FONEMATO 10.8.3

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B = \{\overline{m}, \bar{n}, \bar{p}\}$ de "V". Determine una base ortogonal de "V" y una base ortonormal de "V".

FONEMATO 10.8.4

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y "G" la matriz de Graam respecto de la base $B = \{\overline{m}, \bar{n}, \bar{p}, \bar{q}\}$ de "V".

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>FONEMATO 10.9.1</u>

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ la base de referencia en "V". Se sabe que $\|\bar{e}_1\|=\|\bar{e}_1\|=1$ y $\|\bar{e}_3\|=2$, siendo:

$$\text{áng.}(\bar{e}_1;\bar{e}_2)=\pi/3\ ;\ \text{áng.}(\bar{e}_1;\bar{e}_3)=\text{áng.}(\bar{e}_2;\bar{e}_3)=\pi/2$$

Sean los vectores $\bar{a}=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3$ y $\bar{b}=\bar{e}_1-\bar{e}_3$.

1) Calcule $\bar{a}\bullet\bar{b}$ y las coordenadas covariantes de $\bar{a}$.
2) Calcule las coordenadas contravariantes del vector $\bar{k}$ cuyas coordenadas covariantes son $(5;1;8)$.
3) Calcule una base formada por $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y otro vector unitario $\bar{c}\in<\bar{e}_1,\bar{e}_2>$ que forme un ángulo $\pi/6$ con $\bar{e}_1$.

FONEMATO 10.10.1

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y $G=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$. Sea $\bar{k}=2\bullet\bar{e}_1+3\bullet\bar{e}_2\in V$.

1) Calcule la base B^* recíproca de "B".
2) Calcule las coordenadas covariantes de $\bar{k}$ respecto de la base "B".
3) Compruebe que las coordenadas covariantes de $\bar{k}$ respecto de la base "B" coinciden con las coordenadas contravariantes de $\bar{k}$ respecto de la base B^*.
4) Calcule $\bar{k}\bullet\bar{h}$, siendo $\bar{h}$ el vector cuyas coordenadas contravariantes respecto de B^* son $(2;1)$.

FONEMATO 10.10.2

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y "G" la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$.

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine la base recíproca la base $B_1=\{\bar{u}_1=\bar{e}_1+\bar{e}_2,\ \bar{u}_1=\bar{e}_2+\bar{e}_3,\ \bar{u}_3=\bar{e}_3\}$ expresada en coordenadas covariantes respecto de la base "B".

FONEMATO 10.10.3

Sea "V" un espacio vectorial euclídeo y "G" la matriz de Graam respecto de la base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$.

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine la base recíproca la base $B_1=\{\bar{u}_1=\bar{e}_1-\bar{e}_3,\ \bar{u}_1=\bar{e}_1+\bar{e}_2,\ \bar{u}_3=\bar{e}_2\}$ expresada en coordenadas contravariantes respecto de la base "B".